

**KONSTRUKSI DAN SIMULASI MODEL GELOMBANG PERMUKAAN  
ALIRAN AIR PADA BIDANG MIRING**

**SKRIPSI**

**OLEH  
NURHASANAH  
NIM. 10610053**



**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2015**

**KONSTRUKSI DAN SIMULASI MODEL GELOMBANG PERMUKAAN  
ALIRAN AIR PADA BIDANG MIRING**

**SKRIPSI**

**Diajukan Kepada  
Fakultas Sains dan Teknologi  
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang  
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam  
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)**

**Oleh  
Nurhasanah  
NIM. 10610053**

**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2015**

**KONSTRUKSI DAN SIMULASI MODEL GELOMBANG PERMUKAAN  
ALIRAN AIR PADA BIDANG MIRING**

**SKRIPSI**

Oleh  
**Nurhasanah**  
**NIM. 10610053**

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji  
Tanggal 05 Juni 2015

Pembimbing I,

Pembimbing II,

Mohammad Jamhuri, M.Si  
NIP. 19810502 200501 1 004

Dr. Ahmad Barizi, M.A  
NIP. 19731212 199803 1 001

Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd  
NIP. 19751006 200312 1 001

**KONSTRUKSI DAN SIMULASI MODEL GELOMBANG PERMUKAAN  
ALIRAN AIR PADA BIDANG MIRING**

**SKRIPSI**

**Oleh  
Nurhasanah  
NIM. 10610053**

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi  
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan  
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal 29 Juni 2015

Penguji Utama : Dr. Usman Pagalay, M.Si .....

Ketua Penguji : Dr. Abdussakir, M.Pd .....

Sekretaris Penguji : Mohammad Jamhuri, M.Si .....

Anggota Penguji : Dr. H. Ahmad Barizi, M.A .....

Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd  
NIP. 19751006 200312 1 001

## PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Nurhasanah

NIM : 10610053

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul : Konstruksi dan Simulasi Model Gelombang Permukaan Aliran  
Air pada Bidang Miring

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 01 Juni 2015  
Yang membuat pernyataan,

Nurhasanah  
NIM. 10610053

## MOTO

اللَّهُ الصَّمَدُ

*“Allah adalah tempat bergantung segala sesuatu” (al-Ikhlâs/112:2)*

*“Jangan menyerah walau apapun yang terjadi.*

*Jika kita menyerah, maka habislah sudah” (TOP ITTIPAT)*



## PERSEMBAHAN

Dengan mengucapkan syukur *alhamdulillah* kepada Allah Swt. skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Almarhum Abah tercinta, H. Moh. Ahdie, yang selama hidupnya telah menjadi ayah terbaik untuk anak-anaknya. Untuk Ummi tercinta, Sutiyah, yang hingga kini tetap dan akan selalu menjadi orang nomor satu dalam hidup penulis. Untuk saudara-saudara penulis, Zubaidi Ahdie, Fauzan Ahdie, Sholihah Ahdie, Nurkomariyah Ahdie, dan Anis Sulalah Ahdie, untuk seluruh cinta dan kepercayaan terhadap penulis. Untuk guru-guru penulis, yang pernah memberikan ilmu untuk penulis, semoga karya ini menjadi bukti ketangguhan penulis untuk terus mencoba menjadi lebih baik di setiap detiknya. Terima kasih untuk segalanya.

## KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah Swt. atas limpahan rahmat, nikmat, dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi yang berjudul “Konstruksi dan Simulasi Model Gelombang Permukaan Aliran Air pada Bidang Miring” ini dengan baik. Shalawat dan salam semoga senantiasa tercurahlimpahkan kepada Rasulullah Muhammad Saw. yang telah menuntun umat manusia dari jaman jahiliyah menuju jaman ilmiah.

Selanjutnya penulis mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah mengarahkan, membimbing, dan memberikan pemikirannya sehingga skripsi ini dapat diselesaikan dengan baik. Ucapan terima kasih penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Raharjo, M.Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Hj. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, sekaligus Dosen Wali bagi penulis.
4. Mohammad Jamhuri, M.Si, selaku dosen pembimbing yang telah dengan sabar memberi arahan, bimbingan, dan motivasi selama pengerjaan skripsi.
5. Dr. H. Ahmad Barizi, M.A, selaku dosen pembimbing keagamaan yang telah memberikan saran dan bimbingan selama penulisan skripsi.

6. Seluruh dosen Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang dan seluruh staf karyawan.
7. Kedua orang tua penulis, H. Moh. Ahdie (alm.) dan Sutiyah, yang penuh jasa, yang telah dan akan selalu menjadi motivator terbaik selama hidup penulis.
8. Keluarga tersayang, Zubaidi Ahdie, Fauzan Ahdie, Sholihah Ahdie, Nurkomariyah Ahdie, dan Anis Sulalah Ahdie yang selalu memberikan dukungan dan motivasi kepada penulis.
9. Teman-teman Jurusan Matematika angkatan 2010, khususnya Binti Tsamrotul Fitria, Rofiatun Jamila, Yulias Mita Rosanti, Zuhriyah, Harum Kurniasari, Muhammad Syukron, Khoirul Umam, dan Muhlis, yang selalu ada dan tak hentinya membantu dan menyemangati penulis.
10. Teman-teman Nurul Furqan, khususnya Siti Rukmana dan Ismi Lathifah yang selalu memberi perhatian lebih pada penulis.
11. Teman-teman kos A6, khususnya Ridy Sulhana dan Dzawis Siyadah yang selalu menemani penulis.
12. Semua pihak yang pernah membantu penulis, yang tidak mungkin disebutkan satu persatu, penulis ucapkan terima kasih atas segalanya.

Semoga skripsi ini bermanfaat dan dapat menambah wawasan keilmuan khususnya bidang matematika. *Aamiin Yaa Rabbal 'Aalamiin.*

Malang, Juni 2015

Penulis

## DAFTAR ISI

<b>HALAMAN JUDUL</b>	
<b>HALAMAN PENGAJUAN</b>	
<b>HALAMAN PERSETUJUAN</b>	
<b>HALAMAN PENGESAHAN</b>	
<b>HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN</b>	
<b>HALAMAN MOTO</b>	
<b>HALAMAN PERSEMBAHAN</b>	
<b>KATA PENGANTAR</b> .....	viii
<b>DAFTAR ISI</b> .....	x
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	xii
<b>ABSTRAK</b> .....	xiii
<b>ABSTRACT</b> .....	xiv
<b>ملخص</b> .....	xv
 <b>BAB I PENDAHULUAN</b>	
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Rumusan Masalah .....	5
1.3 Tujuan Penelitian .....	5
1.4 Batasan Masalah .....	6
1.5 Manfaat Penelitian .....	6
1.6 Metode Penelitian .....	6
1.7 Sistematika Penulisan .....	7
 <b>BAB II KAJIAN PUSTAKA</b>	
2.1 Persamaan Kontinuitas .....	8
2.2 Persamaan Momentum .....	12
2.3 Persamaan Bernoulli.....	16
2.4 Persamaan Navier Stokes .....	20
2.5 Metode Beda Hingga.....	24
2.6 Kondisi Batas .....	25
2.7 Model Matematika dalam Al-Quran .....	27

### **BAB III PEMBAHASAN**

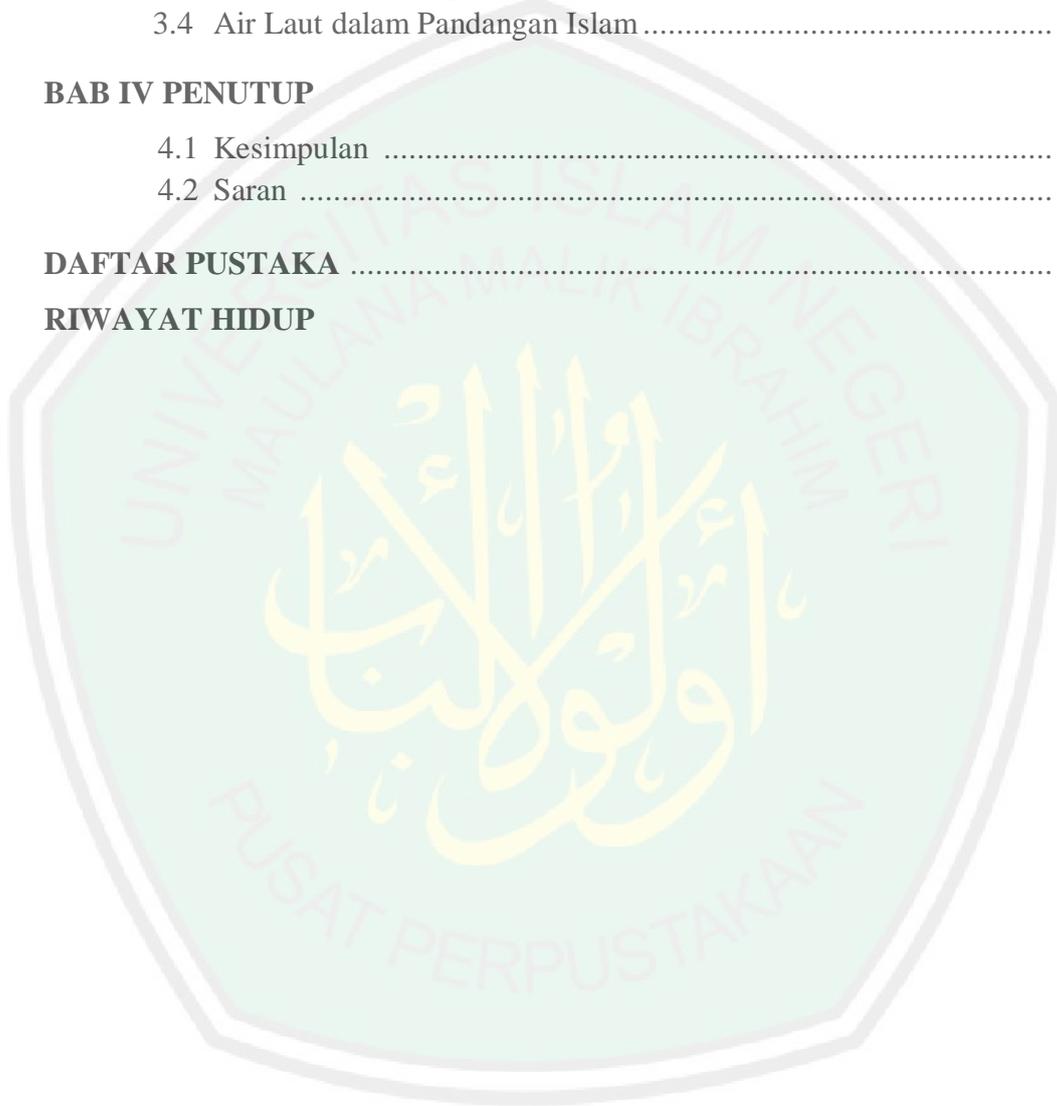
3.1 Konstruksi Model.....	31
3.2 Diskritisasi .....	36
3.3 Simulasi dan Interpretasi Model .....	38
3.4 Air Laut dalam Pandangan Islam .....	44

### **BAB IV PENUTUP**

4.1 Kesimpulan .....	47
4.2 Saran .....	48

<b>DAFTAR PUSTAKA</b> .....	49
-----------------------------	----

### **RIWAYAT HIDUP**



## DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Ilustrasi Aliran dalam Elemen.....	9
Gambar 2.2 Tegangan Normal dan Gaya Gesek pada Fluida Berviskositas .....	20
Gambar 3.1 Balok yang Terletak pada Bidang Miring.....	34
Gambar 3.2 Gelombang Air dengan Kondisi Batas Dirichlet.....	40
Gambar 3.3 Gelombang Air dengan Kondisi Batas Neumann .....	43



## ABSTRACT

Nurhasanah. 2015. **Construction and Simulation of Water Surface Wave Model in Inclined Plane.** Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisor: (I) Mohammad Jamhuri, M.Si. (II) Dr. H. Ahmad Barizi, M.A.

**Keywords:** Inclined Plane, Saint Venant Equations, Simulation of the Model

This study discusses the construction and surface wave model simulations of water flow on the incline. In the construction of the model, the basic laws of fluid flow including continuity equation and momentum equation are used. Several assumptions are used, such as the flow in one dimension, the length of the flow is greater than the depth of flow, pressure distribution is hydrostatic and vertical wave basic flow does not change. The steps in this research are: (1) constructing the basic equations for the fluid flow, (2) simplifying the model, (3) reconstructing to discrete form, and (4) simulating the model then interpret it.

The model obtained in this study is non-linear one-dimensional equation known as Saint Venant equations. From the results of model simulations, it is shown that surface water waves on an inclined plane drove from deep water towards the coastal waters increasingly sharp and increasingly flat valley. The lower the water level, the speed of the wave becomes increasingly slower.

## ABSTRAK

Nurhasanah. 2015. **Konstruksi dan Simulasi Model Gelombang Permukaan Aliran Air pada Bidang Miring**. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Mohammad Jamhuri, M.Si. (II) Dr. H. Ahmad Barizi, M.A.

**Kata Kunci:** Bidang Miring, Persamaan Saint Venant, Simulasi Model

Penelitian ini membahas tentang konstruksi dan simulasi model gelombang permukaan aliran air pada bidang miring. Dalam konstruksi model, digunakan hukum-hukum dasar aliran fluida termasuk persamaan kontinuitas dan persamaan momentum. Beberapa asumsi yang digunakan antara lain bahwa aliran pada satu dimensi, panjang aliran lebih besar dari kedalaman aliran, distribusi tekanan vertikal gelombang adalah hidrostatis dan dasar aliran tidak berubah-ubah. Adapun langkah-langkah dalam penelitian ini adalah: (1) menurunkan persamaan-persamaan dasar yang terjadi pada aliran fluida, (2) menyederhanakan model, (3) melakukan diskritisasi model, dan (4) melakukan simulasi terhadap model kemudian menginterpretasikannya.

Model yang diperoleh dalam penelitian ini berbentuk persamaan non linier satu dimensi yang dikenal dengan persamaan Saint Venant. Dari hasil simulasi model, diketahui bahwa permukaan gelombang air pada bidang miring yang melaju dari perairan laut dalam menuju perairan pantai semakin tajam dan lembah semakin datar. Semakin kecil ketinggian air, kecepatan laju gelombang menjadi semakin lambat (tenang).

## ملخص

نورحسنة. 2015. البناء ومحاكاة نموذج لموجة سطح تدفق المياه على المستوى المنحدرة. بحث جامعي .  
شعبة الرياضيات كلية العلوم والتكنولوجيا. الجامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم  
مالانج. المشرف: (١) محمد جمهوري الماجستير، (٢) الدكتور أحمد بارزى الحاج الماجستير

كلمات رئيسية: المعادلات Saint Venant، المستوى المائل، محاكاة نموذج

تناول هذه الدراسة بناء ومحاكاة نموذج لموجة سطح من تدفق المياه على المستوى المنحدرة. في  
بناء هذا النموذج، تستخدم القوانين الأساسية للتدفق السوائل بما في ذلك معادلة الاستمرارية ومعادلة  
الزخم. يتم استخدام عدة افتراضات وهو أن تدفق في بعد واحد، وطول تدفق أكبر من عمق التدفق،  
توزيع الضغط الرأسي لموجة هو الهيدروستاتيكي وأساسية التدفق لا تتغير. الخطوات في هذا البحث هي:  
(١) اشتقاق المعادلات الأساسية التي تحدث في تدفق السوائل، (٢) تبسيط نموذج، (٣) حلول  
العددية، (٤) إجراء محاكاة لنماذج ثم تفسيره  
النموذج الحصول عليها في هذه الدراسة هو معادلة غير الخطية ذات بعد واحد يعرف  
بمعادلات Saint Venant. من نتائج محاكاة النماذج، فمن المعروف أن سطحية موجات المياه على  
المستوى المنحدرة أخرج من المياه العميقة نحو المياه الساحلية وادي متزايد حادة ومسطحة على نحو  
متزايد. وانخفاض منسوب المياه، وسرعة الموجة تصبح نسبة متزايدة أبطأ (هادئ).

## BAB I

### PENDAHULUAN

#### 1.1 Latar Belakang

Dalam matematika terdapat sebuah cabang ilmu yang banyak digunakan oleh para ilmuwan untuk menggambarkan fenomena yang terjadi di jagad raya ini. Cabang ilmu ini adalah pemodelan matematika. Pemodelan matematika merupakan salah satu cabang ilmu dalam matematika yang mengkaji tentang pemecahan masalah dalam berbagai bidang ilmu dengan menggunakan konsep-konsep matematika yaitu permasalahan dalam bidang sains, teknologi, sosial, dan lain sebagainya. Selain itu, pemodelan dapat diartikan sebagai proses dalam memperoleh pemahaman matematika melalui konteks dunia nyata.

Persoalan yang melibatkan model matematika banyak muncul dalam berbagai cabang ilmu pengetahuan, seperti dalam bidang biologi, kedokteran, teknik, fisika, dan lain-lain. Dalam kehidupan sehari-hari, banyak fenomena alam yang terjadi, dimana fenomena tersebut dapat ditelaah dengan model matematika. Fenomena alam yang paling dekat dan dapat diperhatikan adalah gelombang air laut. Allah Swt. berfirman dalam QS. Luqman/31:31, yaitu:

أَلَمْ تَرَ أَنَّ الْفُلْكَ تَجْرِي فِي الْبَحْرِ بِنِعْمَتِ اللَّهِ لِيُرِيَكُمْ مِنْ آيَاتِهِ إِنَّ فِي ذَلِكَ لَآيَاتٍ لِكُلِّ صَبَّارٍ شَكُورٍ



*“Tidakkah kamu memperhatikan bahwa sesungguhnya kapal itu berlayar di laut dengan nikmat Allah, supaya diperlihatkan-Nya kepadamu sebagian dari tanda-*

*tanda (kekuasaan)-Nya. Sesungguhnya pada yang demikian itu benar-benar terdapat tanda-tanda bagi semua orang yang sangat sabar lagi banyak bersyukur”(QS. Luqman/31:31).*

Dalam ayat ini, disebutkan bahwa salah satu tanda kebesaran Allah Swt. adalah adanya kapal yang berlayar di laut dengan nikmat-Nya. Perlu diketahui, seluruh dunia ini seperempatnya adalah daratan dan tiga perempat lainnya adalah lautan. Kata *bahr* (lautan) muncul sebanyak 39 kali dalam al-Quran. Banyaknya pengulangan ini menunjukkan bahwa banyak rahasia Allah Swt. yang tersembunyi di dalamnya sehingga manusia diperintahkan untuk memperhatikan dan memikirkannya. Al-Quran memperingatkan kepada manusia bahwa lautan diciptakan Allah Swt. untuk kepentingan makhluk dan perlu diambil manfaatnya sebanyak mungkin.

Banyak sekali nikmat Allah Swt. yang terdapat dalam lautan yang dapat diambil manfaatnya. Diciptakan-Nya ikan-ikan di lautan agar dapat dinikmati dagingnya yang segar, dijadikan-Nya perhiasan-perhiasan dan mutiara dari dalam lautan, dijadikan pula bahtera dapat berlayar di lautan agar menjadi manfaat bagi manusia. Allah Swt. berfirman dalam QS. al-Nahl/16:14, yaitu:

وَهُوَ الَّذِي سَخَّرَ الْبَحْرَ لِتَأْكُلُوا مِنْهُ لَحْمًا طَرِيًّا وَتَسْتَخْرِجُوا مِنْهُ حِلْيَةً تَلْبَسُونَهَا وَتَرَى الْفُلْكَ  
مَوَاحِرَ فِيهِ وَلِتَبْتَغُوا مِنْ فَضْلِهِ وَلِعَلَّكُمْ تَشْكُرُونَ ﴿١٤﴾

*“dan Dia-lah, Allah yang menundukkan lautan (untukmu), agar kamu dapat memakan daripadanya daging yang segar (ikan), dan kamu mengeluarkan dari lautan itu perhiasan yang kamu pakai, dan kamu melihat bahtera berlayar padanya, dan supaya kamu mencari (keuntungan) dari karunia-Nya, dan supaya kamu bersyukur”(QS. al-Nahl/16:14).*

Dari sekian banyak tanda-tanda yang Allah jadikan di muka bumi ini, dapat dipikirkan dan direnungkan betapa Maha Besar Allah Swt. yang

menciptakan laut bagi manusia. Dengan dijadikan-Nya bahtera-bahtera dapat berlayar di lautan, manusia dapat berpindah dari satu tempat ke tempat lain, dari satu kota ke kota lain bahkan dari satu negara ke negara lain. Dalam dua ayat di atas, Allah menyebutkan bahwa tanda-tanda tersebut diberikan agar manusia dapat bersyukur. Apabila manusia menjadi *kufur* maka nikmat yang Allah berikan hanya akan mendatangkan bahaya pada diri manusia itu sendiri.

Dalam kehidupan sehari-hari, banyak sekali persamaan yang digunakan untuk memodelkan permukaan air laut, misalnya persamaan Saint Venant. Kusuma (2008) menggunakan persamaan Saint Venant untuk melakukan simulasi tsunami Aceh dengan persamaan metode beda hingga. Kondisi awal yang digunakan pada penelitian gelombang tsunami diambil dari kedalaman laut pada garis pantai kota Banda Aceh. Kondisi kering dan basah digunakan untuk menentukan wilayah penjalaran gelombang. Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa model Saint Venant mampu mensimulasikan gelombang tsunami menggunakan metode beda hingga dengan membandingkan data terjadinya tsunami dengan data eksperimen.

Persamaan Saint Venant didapatkan dari penurunan persamaan Navier-Stokes yang mempertimbangkan masalah tertentu, seperti arus perairan dangkal dimana skala horizontal jauh lebih besar daripada vertikal. Persamaan ini dikerjakan pada perairan dangkal 2D dan diturunkan dengan asumsi bahwa distribusi tekanan adalah hidrostatis. Selanjutnya objek perairan dipartisi dalam bentuk lapisan-lapisan dengan asumsi bahwa panjang sungai sebagai sumbu  $x$  dan kedalaman sungai sebagai sumbu  $y$ . Akhirnya, persamaan-persamaan tersebut diintegrasikan di seluruh bagian dengan menggunakan kondisi batas (*boundary*

*conditions*) untuk mendapatkan persamaan Saint Venant (Aldrighetti dalam Adini, 2011:15).

Persamaan Saint Venant juga sering digunakan untuk model aliran air pada bidang miring. Aliran air pada bidang miring seringkali menimbulkan fenomena *roll wave*. Fenomena ini menunjukkan bentuk permukaan air seolah-olah jatuh. Dengan meninjau gelombang pada kondisi seragam yang diberi gangguan berupa gelombang monokromatik, dapat dicari hubungan antara sudut kemiringan saluran dengan koefisien gesekan yang menyebabkan terbentuknya *roll wave*. Dalam Pratiwi (2009) dijelaskan bahwa hasil analitik menunjukkan sebuah kondisi yang apabila sudut kemiringan saluran melebihi empat kali besar koefisien geseknya, maka gelombang menjadi tidak stabil. Terkait dengan kecepatan aliran air, ketakstabilan gelombang juga akan terjadi apabila kecepatan aliran melebihi dua kali kecepatan gelombang linier.

Ada beberapa metode yang dapat digunakan untuk mencari solusi untuk persamaan Saint Venant 1D. Starodumov (2014) melakukan pendekatan kinematik yang merupakan persamaan orde pertama kuasi-linier. Dalam kasus stasioner terdapat solusi analitis umum, sedangkan untuk kasus non-stasioner diperlukan pengembangan algoritma khusus untuk mencari solusinya.

Dalam jurnal yang berjudul *Linear Stability of The Saint Venant Equations and Drag Parameterizations* (Thual, dkk, 2010) dikemukakan masalah stabilitas linear persamaan Saint Venant 1D. Pada jurnal ini, gaya gesek bagian bawah dan lereng saluran diabaikan, gangguan kecil dari aliran normal diklasifikasikan dalam dua jenis, yaitu gelombang non-dispersif dan tidak teredam. Hal ini menunjukkan bahwa aliran air adalah homogen, karena lereng saluran diabaikan sehingga lereng

dianggap konstan (ketinggiannya tidak berubah terhadap waktu). Untuk analisis stabilitas aliran, digunakan perbandingan kuantitatif antara spasial (tanggapan terhadap kondisi batas) dan temporal (respon terhadap kondisi awal). Sama halnya dengan penelitian ini, penulis juga akan menggunakan kondisi awal dan kondisi batas untuk memodelkan aliran air, namun aliran bukan homogen karena ketinggian aliran berubah di setiap titik waktunya.

Berdasarkan uraian latar belakang di atas, maka penulis tertarik untuk melakukan penelitian dengan judul “Konstruksi dan Simulasi Model Gelombang Permukaan Aliran Air pada Bidang Miring”.

### **1.2 Rumusan Masalah**

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah:

1. Bagaimana model gelombang permukaan aliran air pada bidang miring?
2. Bagaimana simulasi model gelombang permukaan aliran air pada bidang miring?
3. Bagaimana gelombang air laut dalam pandangan Islam?

### **1.3 Tujuan Penelitian**

Adapun tujuan penelitian ini adalah:

1. Mengetahui model gelombang permukaan aliran air pada bidang miring.
2. Mengetahui simulasi model gelombang permukaan aliran air pada bidang miring.
3. Mengetahui gelombang air laut dalam pandangan Islam.

#### 1.4 Batasan Penelitian

Model matematika pada tulisan ini dibuat dengan memperhatikan beberapa asumsi dasar, yaitu:

1. Aliran pada satu dimensi.
2. Panjang aliran lebih besar dari kedalaman aliran.
3. Percepatan vertikal diabaikan dan distribusi tekanan vertikal gelombang adalah hidrostatik.
4. Densitas/kerapatan air konstan.
5. Persamaan untuk aliran tak berotasi.
6. Dasar dan dinding saluran tidak berubah-ubah.

#### 1.5 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat menambah wawasan serta informasi valid yang dapat digunakan untuk mengetahui keadaan permukaan gelombang air dengan dasar saluran yang miring.

#### 1.6 Metode Penelitian

Penelitian ini dilakukan dengan menggunakan metode *library research* atau studi literatur dan deskriptif kuantitatif. Maksud dari metode ini yaitu mengkaji pembahasan-pembahasan dengan beberapa literatur yang telah ada dan disertai analisis dari peneliti sendiri. Analisis yang dilakukan dalam penelitian ini sesuai dengan langkah-langkah penelitian berikut:

1. Menurunkan persamaan-persamaan dasar yang terjadi pada aliran fluida.

2. Menyederhanakan model.
3. Melakukan pendiskritan terhadap model.
4. Melakukan simulasi terhadap model.
5. Memberikan interpretasi dari hasil simulasi.

### 1.7 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan digunakan untuk mempermudah dalam memahami intisari dari laporan ini terbagi menjadi empat bagian, yaitu:

#### Bab I      Pendahuluan

Pada bab ini akan diuraikan tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

#### Bab II      Kajian Pustaka

Bagian ini menjelaskan tentang gambaran umum dari teori yang mendasari pembahasan. Pada bab ini akan diuraikan tentang persamaan kontinuitas, persamaan momentum, persamaan Bernoulli, persamaan Navier Stokes, metode beda hingga, kondisi batas, dan model matematika dalam al-Quran.

#### Bab III      Pembahasan

Pada bab ini akan dibahas tentang konstruksi model gelombang permukaan aliran air pada bidang miring, diskritisasi, dan simulasi serta interpretasi dari hasil simulasi model.

#### Bab IV      Penutup

Pada bab ini dibahas tentang kesimpulan dari pembahasan hasil penelitian disertai dengan saran yang berkaitan dengan penelitian ini.



## BAB II

### KAJIAN PUSTAKA

#### 2.1 Persamaan Kontinuitas

Persamaan kontinuitas mempersyaratkan bahwa suatu fluida harus kontinu serta bersifat kekal, maksudnya tidak dapat diciptakan dan tidak dapat dimusnahkan (Olson dan Wright, 1993:108). Persamaan kontinuitas merupakan salah satu penerapan konsep volume kontrol yang paling sederhana. Persamaan ini menyatakan bahwa di dalam aliran cairan termampatkan (*compressible*) jumlah aliran tiap satuan waktu adalah sama di semua penampang di sepanjang aliran. Penurunan persamaan kontinuitas dapat dilakukan dengan menerapkan hukum ketetapan massa pada konsep volume kontrol.

Rapat massa ( $\rho$ ) adalah ukuran konsentrasi massa zat cair dan dinyatakan dalam bentuk massa ( $m$ ) dibagi satuan volume ( $V$ ), yaitu

$$\rho = \frac{m}{V}$$

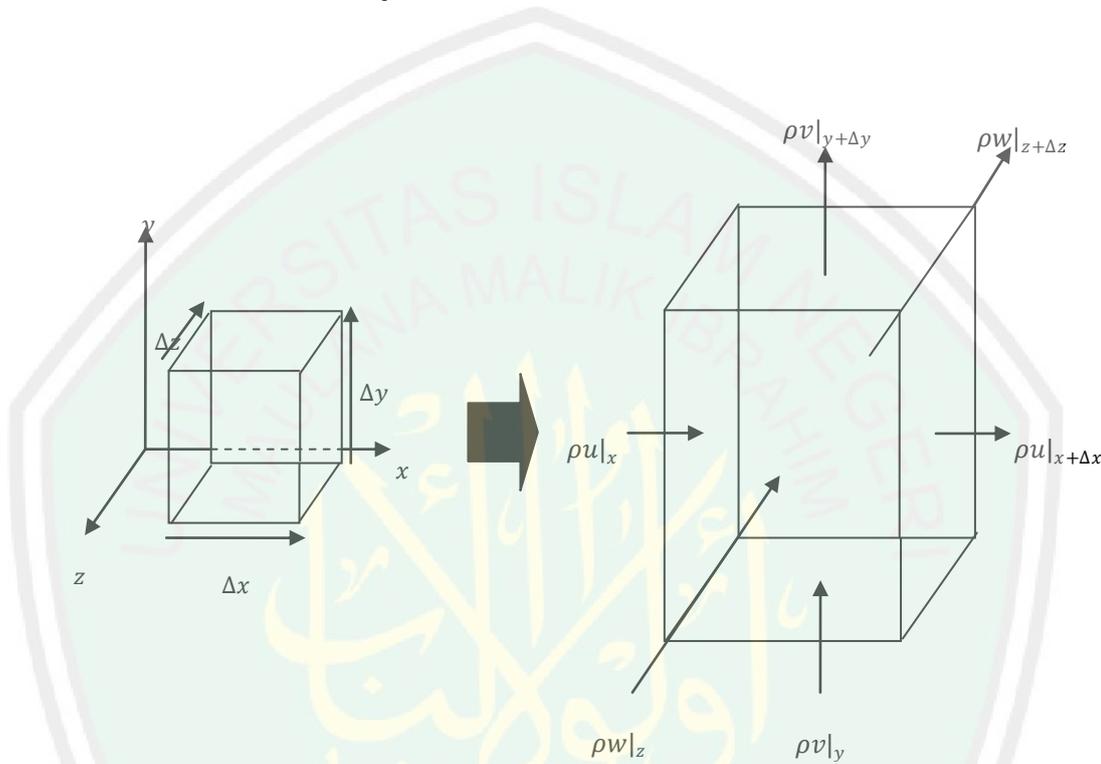
sehingga

$$m = \rho V$$

Hukum kekekalan massa untuk fluida menyatakan bahwa massa fluida yang masuk suatu elemen volume stasioner  $\Delta x \Delta y \Delta z$  sama dengan massa fluida yang keluar. Perubahan massa terhadap waktu  $t$  dinyatakan dalam bentuk

$$\begin{aligned} \frac{\partial m}{\partial t} &= \frac{\partial \rho V}{\partial t} \\ &= \frac{\partial \rho (\Delta x \Delta y \Delta z)}{\partial t} \end{aligned}$$

Selisih antara massa rata-rata yang masuk dan massa rata-rata yang keluar dari elemen volume disebut perubahan massa rata-rata. Ilustrasi aliran dalam elemen volume akan ditunjukkan dalam Gambar 2.1.



Gambar 2.1 Ilustrasi Aliran dalam Elemen Volume

Jika  $\rho$  merupakan rapat massa dan  $u$  merupakan komponen kecepatan dalam arah  $x$  maka laju aliran masuk ke elemen volume dalam arah  $x$  menembus bidang  $\Delta y \Delta z$  pada  $x$  adalah

$$\rho u|_x \Delta y \Delta z$$

sedangkan laju aliran yang keluar melintasi bidang  $x + \Delta x$  dapat dinyatakan dengan

$$\rho u|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z$$

sehingga beda laju masuk dan keluar dalam arah  $x$  dapat ditulis

$$\begin{aligned}\frac{\partial m}{\partial t} &= (\rho u|_x \Delta y \Delta z) - (\rho u|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z) \\ &= (\rho u|_x - \rho u|_{x+\Delta x}) \Delta y \Delta z\end{aligned}$$

Dengan cara yang sama dapat dilakukan untuk arah fluida sumbu  $y$ , yaitu

$$\begin{aligned}\frac{\partial m}{\partial t} &= (\rho v|_y \Delta x \Delta z) - (\rho v|_{y+\Delta y} \Delta x \Delta z) \\ &= (\rho v|_y - \rho v|_{y+\Delta y}) \Delta x \Delta z\end{aligned}$$

dan untuk sumbu  $z$ , yaitu

$$\begin{aligned}\frac{\partial m}{\partial t} &= (\rho w|_z \Delta x \Delta y) - (\rho w|_{z+\Delta z} \Delta x \Delta y) \\ &= (\rho w|_z - \rho w|_{z+\Delta z}) \Delta x \Delta y\end{aligned}$$

dengan  $v$  dan  $w$  secara berturut-turut menyatakan komponen kecepatan dalam arah  $y$  dan  $z$ . Menurut Mustain (2011:120), beda di antara laju aliran masuk dan keluar akan menimbulkan terjadinya laju peningkatan massa yang terkandung dalam elemen volume dan besarnya adalah  $\partial\rho(\Delta x \Delta y \Delta z)$ . Oleh karena itu, hukum kekekalan massa dapat ditulis

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho(\Delta x \Delta y \Delta z)}{\partial t} &= [(\rho u|_x - \rho u|_{x+\Delta x}) \Delta y \Delta z] + [(\rho v|_y - \rho v|_{y+\Delta y}) \Delta x \Delta z] \\ &\quad + [(\rho w|_z - \rho w|_{z+\Delta z}) \Delta x \Delta y]\end{aligned}\tag{2.1}$$

Perubahan massa  
dalam elemen  
volume

Perbedaan diantara laju aliran masuk dan keluar untuk elemen  
volume

Jika kedua ruas pada persamaan (2.1) dibagi dengan  $\Delta x \Delta y \Delta z$  akan diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho(\Delta x \Delta y \Delta z)}{\partial t(\Delta x \Delta y \Delta z)} &= \frac{[(\rho u|_x - \rho u|_{x+\Delta x}) \Delta y \Delta z]}{\Delta x \Delta y \Delta z} + \frac{[(\rho v|_y - \rho v|_{y+\Delta y}) \Delta x \Delta z]}{\Delta x \Delta y \Delta z} \\ &\quad + \frac{[(\rho w|_z - \rho w|_{z+\Delta z}) \Delta x \Delta y]}{\Delta x \Delta y \Delta z}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{(\rho u|_x - \rho u|_{x+\Delta x})}{\Delta x} + \frac{(\rho v|_y - \rho v|_{y+\Delta y})}{\Delta y} + \frac{(\rho w|_z - \rho w|_{z+\Delta z})}{\Delta z} \quad (2.2)$$

Kemudian, untuk  $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0, \Delta z \rightarrow 0$  maka

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\rho u|_x - \rho u|_{x+\Delta x})}{\Delta x} &= -\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \\ \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{(\rho v|_y - \rho v|_{y+\Delta y})}{\Delta y} &= -\frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \\ \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(\rho w|_z - \rho w|_{z+\Delta z})}{\Delta z} &= -\frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \end{aligned}$$

sehingga diperoleh

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}$$

atau dapat ditulis kembali sebagai

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} &= -\frac{\partial \rho}{\partial t} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Untuk aliran cairan tak termampatkan (*incompressible flow*)  $\rho$  adalah konstan atau tetap, sehingga  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ . Ini artinya semua turunan  $\rho$  adalah 0. Oleh

karena itu, persamaan (2.3) menjadi

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} &= 0 \\ \rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Persamaan (2.4) merupakan persamaan kontinuitas dalam bentuk persamaan diferensial. Persamaan kontinuitas diferensial ini seringkali dituliskan dengan menggunakan operator vektor (Potter dan Wiggert, 2011:70), yaitu

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$$

sehingga persamaan (2.4) menjadi

$$\begin{aligned} \rho \nabla \cdot \mathbf{V} &= -\frac{\partial \rho}{\partial t} \\ &= 0 \end{aligned}$$

dimana vektor kecepataannya adalah  $\mathbf{V} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$ . Skalar  $\nabla \cdot \mathbf{V}$  disebut *divergens* dari vektor kecepatan.

## 2.2 Persamaan Momentum

Dalam mekanika klasik, momentum yang dilambangkan dengan  $\mathbf{P}$  diartikan sebagai hasil perkalian dari massa dan kecepatan sehingga menghasilkan vektor. Momentum suatu benda yang bermassa  $m$  dan bergerak dengan kecepatan  $\mathbf{v}$  dapat ditulis

$$\mathbf{P} = m\mathbf{v} \quad (2.5)$$

Massa merupakan besaran skalar, sedangkan kecepatan merupakan besaran vektor. Perkalian antara besaran skalar dengan besaran vektor akan menghasilkan besaran vektor. Jadi, momentum merupakan besaran vektor.

Momentum sebuah partikel dapat dipandang sebagai ukuran kesulitan untuk mendiamkan benda. Sebagai contoh, sebuah truk berat mempunyai momentum yang lebih besar dibanding mobil yang bergerak dengan kelajuan yang sama. Gaya yang lebih besar dibutuhkan untuk menghentikan truk tersebut dibandingkan dengan mobil yang lebih ringan.

Telah disebutkan sebelumnya bahwa  $m = \rho V$  dan  $V = \Delta x \Delta y \Delta z$ , maka dengan mensubstitusikan  $m$  dan  $V$  ke dalam persamaan (2.5) akan diperoleh

$$\begin{aligned} P &= \rho V v \\ &= \rho \Delta x \Delta y \Delta z v \end{aligned} \quad (2.6)$$

sehingga rata-rata perubahan momentum terhadap waktu dapat dinyatakan dengan

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\rho \Delta x \Delta y \Delta z v)$$

Teorema momentum menyatakan bahwa perubahan momentum sama dengan momentum yang masuk dikurangi momentum yang keluar ditambah dengan gaya-gaya dari luar (meliputi gaya gravitasi dan tekanan).

Chorlton (1967) menyatakan bahwa gaya gravitasi pada massa diferensial  $\rho \Delta x \Delta y \Delta z$  dalam volume kendali adalah

$$F = \rho g \Delta x \Delta y \Delta z$$

dan gaya tekanan fluida  $P$  dapat dinotasikan sebagai

$$F = P|_x \Delta y$$

Seperti halnya persamaan kontinuitas, perubahan momentum yang melewati bidang  $x$  dengan kecepatan  $u$  dapat ditulis

$$(\rho u|_x) \Delta y \Delta z$$

sedangkan perubahan momentum yang melewati bidang  $y$  dengan kecepatan  $v$  adalah

$$(\rho v|_y) \Delta x \Delta z$$

dan perubahan momentum yang melewati bidang  $z$  dengan kecepatan  $w$  adalah

$$(\rho w|_z) \Delta x \Delta y$$

Adapun momentum yang melewati bidang  $x + \Delta x$  dengan kecepatan  $u$  dapat ditulis

$$(\rho u|_{x+\Delta x})\Delta y\Delta z$$

Sedangkan momentum yang melewati bidang  $y + \Delta y$  dengan kecepatan  $v$  adalah

$$(\rho v|_{y+\Delta y})\Delta x\Delta z$$

dan momentum yang melewati bidang  $z + \Delta z$  dengan kecepatan  $w$  adalah

$$(\rho w|_{z+\Delta z})\Delta x\Delta y$$

sehingga resultan dari gaya-gaya tersebut dalam arah  $x$  yaitu

$$[P|_x - P|_{x+\Delta x}]\Delta y\Delta z + \rho g_x\Delta y\Delta z$$

untuk arah  $y$

$$[P|_y - P|_{y+\Delta y}]\Delta x\Delta z + \rho g_y\Delta x\Delta z$$

dan untuk arah  $z$

$$[P|_z - P|_{z+\Delta z}]\Delta x\Delta y + \rho g_z\Delta x\Delta y$$

dengan  $P|_{x,y,z}$  dan  $g_{x,y,z}$  secara berturut-turut menyatakan gaya tekanan dan gravitasi dalam arah  $x$ ,  $y$ , dan  $z$ . Sehingga perubahan momentum untuk arah  $x$

dalam elemen volume  $\frac{\partial \rho u(\Delta x\Delta y\Delta z)}{\partial t}$  adalah

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u(\Delta x\Delta y\Delta z)}{\partial t} = & [(\rho u|_x)\Delta y\Delta z - (\rho u|_{x+\Delta x})\Delta y\Delta z] \\ & + [(\rho v|_y)\Delta x\Delta z - (\rho v|_{y+\Delta y})\Delta x\Delta z] \\ & + [(\rho w|_z)\Delta x\Delta y - (\rho w|_{z+\Delta z})\Delta x\Delta y] \\ & + [P|_x - P|_{x+\Delta x}]\Delta y\Delta z + \rho g_x\Delta x\Delta y\Delta z \end{aligned}$$

Kemudian dibagi dengan  $\Delta x\Delta y\Delta z$ , sehingga

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u(\Delta x \Delta y \Delta z)}{\partial t \Delta x \Delta y \Delta z} = & \left[ \frac{(\rho u|_x) \Delta y \Delta z - (\rho u|_{x+\Delta x}) \Delta y \Delta z}{\Delta x \Delta y \Delta z} \right] \\ & + \left[ \frac{(\rho v|_y) \Delta y \Delta z - (\rho v|_{y+\Delta y}) \Delta x \Delta z}{\Delta x \Delta y \Delta z} \right] \\ & + \left[ \frac{(\rho w|_z) \Delta x \Delta y - (\rho w|_{z+\Delta z}) \Delta x \Delta y}{\Delta x \Delta y \Delta z} \right] \\ & + \left[ \frac{[P|_x - P|_{x+\Delta x}] \Delta y \Delta z}{\Delta x \Delta y \Delta z} \right] + \left[ \frac{\rho g_x \Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta x \Delta y \Delta z} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u}{\partial t} = & \left[ \frac{(\rho u|_x) \Delta y \Delta z - (\rho u|_{x+\Delta x}) \Delta y \Delta z}{\Delta x} \right] \\ & + \left[ \frac{(\rho v|_y) \Delta x \Delta z - (\rho v|_{y+\Delta y}) \Delta x \Delta z}{\Delta y} \right] \\ & + \left[ \frac{(\rho w|_z) \Delta x \Delta y - (\rho w|_{z+\Delta z}) \Delta x \Delta y}{\Delta z} \right] \\ & + \left[ \frac{[P|_x - P|_{x+\Delta x}] \Delta y \Delta z}{\Delta x} \right] + [\rho g_x] \end{aligned}$$

Untuk  $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0, \Delta z \rightarrow 0$  diperoleh

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\rho u|_x) \Delta y \Delta z - (\rho u|_{x+\Delta x}) \Delta y \Delta z}{\Delta x} = -u \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}$$

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{(\rho v|_y) \Delta x \Delta z - (\rho v|_{y+\Delta y}) \Delta x \Delta z}{\Delta y} = -v \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}$$

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(\rho w|_z) \Delta x \Delta y - (\rho w|_{z+\Delta z}) \Delta x \Delta y}{\Delta z} = -w \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[P|_x - P|_{x+\Delta x}] \Delta y \Delta z}{\Delta x} = -\frac{\partial P}{\partial x}$$

sehingga perubahan momentum dalam bidang  $x$  adalah

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u}{\partial t} = & -u \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} - v \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} - w \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x \\ = & -\left( u \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + v \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + w \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right) - \frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x \end{aligned} \quad (2.7)$$

Dengan cara yang sama, diperoleh perubahan momentum dalam bidang  $y$  yaitu

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} = -u \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} - v \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} - w \frac{\partial(\rho v)}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial y} + \rho g_y$$

$$= - \left( u \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} - v \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} - w \frac{\partial(\rho v)}{\partial z} \right) - \frac{\partial P}{\partial y} + \rho g_y \quad (2.8)$$

dan untuk perubahan momentum dalam bidang  $z$  yaitu

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho w}{\partial t} &= -u \frac{\partial(\rho w)}{\partial x} - v \frac{\partial(\rho w)}{\partial y} - w \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z \\ &= - \left( u \frac{\partial(\rho w)}{\partial x} + v \frac{\partial(\rho w)}{\partial y} + w \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right) - \frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z \end{aligned} \quad (2.9)$$

Misal  $\bar{q} = (u, v, w)$ ,  $\bar{g} = (g_x, g_y, g_z)$ , dan  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$  maka bentuk

vektor untuk persamaan (2.7) - (2.9) dapat ditulis

$$\frac{\rho \partial \bar{q}}{\partial t} = -\rho(\bar{q} \cdot \nabla)\bar{q} - \nabla P + \rho \bar{g}$$

Kemudian kedua ruas dibagi  $\rho$  sehingga

$$\begin{aligned} \frac{\rho \partial \bar{q}}{\rho \partial t} &= \frac{-\rho(\bar{q} \cdot \nabla)\bar{q} - \nabla P + \rho \bar{g}}{\rho} \\ \frac{\partial \bar{q}}{\partial t} &= -\frac{\rho}{\rho}(\bar{q} \cdot \nabla)\bar{q} - \frac{1}{\rho}\nabla P + \frac{\rho}{\rho}\bar{g} \\ &= -(\bar{q} \cdot \nabla)\bar{q} - \frac{1}{\rho}\nabla P + \bar{g} \end{aligned}$$

Karena gaya gravitasi hanya bekerja pada arah sumbu  $y$  maka  $\bar{g} = (g_x, g_y, g_z) = (0, 1, 0) = -g\nabla y$ .

### 2.3 Persamaan Bernoulli

Hukum Bernoulli menjelaskan tentang konsep dasar aliran fluida (zat cair dan gas) bahwa peningkatan kecepatan pada suatu aliran fluida akan mengakibatkan penurunan tekanan pada zat tersebut. Konsep dasar hukum Bernoulli berlaku pada aliran fluida termampatkan dan aliran fluida tak termampatkan.

Suatu fluida dengan aliran termampatkan merupakan suatu aliran fluida yang mempunyai karakteristik khusus adanya perubahan kerapatan massa pada sepanjang alirannya. Contohnya adalah udara atau gas alam. Adapun fluida dengan aliran tak termampatkan adalah fluida yang mempunyai karakteristik tidak terdapat perubahan kerapatan massa pada sepanjang alirannya. Contohnya adalah air, macam-macam minyak, dan lainnya.

Hukum Bernoulli dapat dianggap sebagai konsep dasar yang menyatakan kekekalan energi, seperti yang telah diungkapkan pada konsep dasar persamaan Bernoulli. Selanjutnya, dapat dikatakan bahwa kekekalan energi tersebut berkaitan dengan energi kinetik dan energi potensial yang terdapat pada suatu aliran fluida. Dengan demikian, penjumlahan energi kinetik dan energi potensial pada suatu aliran fluida akan konstan di setiap titik. Itulah konsep dasar hukum Bernoulli. Persamaan Bernoulli menyatakan bahwa pada suatu aliran fluida yang tertutup, banyaknya energi suatu fluida di suatu titik sama dengan banyaknya energi di titik lain.

Olson dan Wright (1993:137) menyebutkan bahwa secara umum gaya yang bekerja pada aliran fluida dibagi menjadi dua macam, yaitu *body force* (gaya-gaya yang bekerja pada volume atau massa elemen fluida) dan *surface force* (gaya-gaya permukaan).

Persamaan Bernoulli diturunkan dengan asumsi bahwa:

1. Efek-efek viskos dapat diabaikan.
2. Alirannya tunak dan tak termampatkan.
3. Dalam penurunan persamaan, diasumsikan bahwa aliran berlangsung pada sebuah bidang  $(x, y, z)$ .

Perhatikan suatu partikel fluida yang memiliki kecepatan  $V(t)$  pada waktu  $t$ . Pada waktu  $t + \Delta t$ , partikel tersebut akan memiliki kecepatan  $V(t + \Delta t)$  (Potter dan Wiggert, 2011:33). Sehingga percepatan dari partikel tersebut adalah

$$a = \frac{dV}{dt}$$

dengan  $dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz + \frac{\partial V}{\partial t} dt$  karena  $V = V(x, y, z, t)$ . Ini memberi percepatan

$$a = \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial V}{\partial t}$$

Selanjutnya, karena  $V$  adalah kecepatan partikel di  $(x, y, z)$  maka

$$V = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$$

dimana  $(u, v, w)$  adalah komponen-komponen kecepatan dari partikel masing-masing ke arah  $x, y, z$  dan  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  adalah vektor-vektor unit. Untuk partikel di titik yang ingin diketahui dimiliki

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dz}{dt} = w$$

Sehingga percepatan dapat diekspresikan sebagai

$$a = u \frac{\partial V}{\partial x} + v \frac{\partial V}{\partial y} + w \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial t} \quad (2.10)$$

Karena percepatan adalah besaran vektor, maka boleh juga diekspresikan menurut komponen-komponennya. Dalam koordinat Cartesian

$$\begin{aligned} a_x &= u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} \\ a_y &= u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t} \\ a_z &= u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Olson dan Wright (1993:155) menyatakan bahwa gaya-gaya permukaan pada sebuah elemen dengan sisi-sisi  $dx$ ,  $dy$ , dan  $dz$  serta massa  $\rho dx dy dz$  hanya ditimbulkan oleh tekanan sehingga resultan gaya itu dalam arah  $x$  adalah

$$X(\rho dx dy dz) - \frac{\partial p}{\partial x} dx(dy dz)$$

$$X(dx dy dz) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dx(dy dz)$$

Karena jumlah komponen-komponen gaya dari luar per satuan volume sama dengan komponen percepatan, maka dapat ditulis untuk arah  $x$ ,  $y$ , dan  $z$  sebagai berikut:

$$X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2.12)$$

$$Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t} \quad (2.13)$$

$$Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} \quad (2.14)$$

Misal  $\bar{q} = (u, v, w)$ ,  $\bar{g} = (g_x, g_y, g_z)$ , dan  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$  maka

bentuk vektor untuk persamaan (2.12) - (2.14) dapat ditulis

$$\bar{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p = \frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + (\bar{q} \cdot \nabla) \bar{q} \quad (2.15)$$

Karena gaya gravitasi hanya bekerja pada arah sumbu  $y$  maka  $\bar{g} = (g_x, g_y, g_z) = (0, 1, 0) = -g \nabla y$ . Spiegel (1999) menyatakan bahwa perkalian vektor  $A \times (B \times C) = (A \cdot C)B - (A \cdot B)C$ . Sehingga untuk perkalian vektor  $\bar{q} \times (\nabla \times \bar{q})$  adalah  $\bar{q} \times (\nabla \times \bar{q}) = (\bar{q} \cdot \bar{q}) \nabla - (\bar{q} \cdot \nabla) \bar{q}$ .

Dengan  $(\nabla \times \bar{q}) = 0$  untuk aliran yang seragam dan fluida tak berotasi, maka

$$\bar{q} \times (\nabla \times \bar{q}) = (\bar{q} \cdot \bar{q}) \nabla - (\bar{q} \cdot \nabla) \bar{q}$$

$$\bar{q} \times 0 = (\bar{q} \cdot \bar{q}) \nabla - (\bar{q} \cdot \nabla) \bar{q}$$

$$= \left(\frac{1}{2}|\bar{q}|^2\right)\nabla - (\bar{q} \cdot \nabla)\bar{q}$$

$$\left(\frac{1}{2}|\bar{q}|^2\right)\nabla = (\bar{q} \cdot \nabla)\bar{q}$$

sehingga persamaan (2.15) menjadi

$$-g\nabla y - \frac{1}{\rho}\nabla p = \frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + \left(\frac{1}{2}|\bar{q}|^2\right)\nabla \quad (2.16)$$

dengan  $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ ,  $\bar{q} = \nabla\Phi(x, y, z) = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \frac{\partial\Phi}{\partial z}\right) = (u, v, w)$ ,  $|\bar{q}| =$

$\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$ , maka persamaan (2.16) menjadi

$$\begin{aligned} -g\nabla y - \frac{1}{\rho}\nabla p &= \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \left(\frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)\right)\nabla \\ &= \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Phi^2}{\partial x} + \frac{\partial\Phi^2}{\partial y} + \frac{\partial\Phi^2}{\partial z}\right)\right)\nabla \\ \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Phi^2}{\partial x} + \frac{\partial\Phi^2}{\partial y} + \frac{\partial\Phi^2}{\partial z}\right) + gy + \frac{1}{\rho}p &= f(t) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Persamaan (2.17) dikenal sebagai persamaan Bernoulli dengan  $f(t)$  fungsi sembarang dari  $t$ .

## 2.4 Persamaan Navier Stokes

Persamaan Navier Stokes adalah bentuk diferensial dari hukum kedua Newton tentang gerakan. Persamaan gerak yang paling lengkap untuk elemen fluida berviskositas dalam medan gravitasi adalah persamaan Navier Stokes.

Sebuah elemen fluida yang tidak viskos menerima dua buah gaya, yaitu gaya luar (*body force*) dan gaya tekanan (*pressure force*) pada permukaannya. Gaya tekanan adalah gaya yang berasal dari tekanan termodinamik. Elemen fluida pada fluida viskos yang bergerak mengalami gaya permukaan tambahan, yaitu gaya-gaya tangensial atau gaya-gaya geseran dan gaya-gaya normal. Tegangan

permukaan pada elemen fluida adalah tegangan normal (dinyatakan dengan  $\sigma$ ) yang menunjukkan bidang elemen luas dengan arah normal terhadap luas, dan tegangan geser (dinyatakan dengan  $\tau$ ) yang menunjukkan arah komponen tegangan (Olson dan Wright, 1993:158). Ditinjau elemen fluida dengan volume  $\Delta x \Delta y \Delta z$ , seperti gambar berikut:

Gambar 2.2 Tegangan Normal dan Tegangan Geser pada Elemen Fluida Berviskositas

Keseimbangan gaya-gaya yang bekerja pada elemen fluida akibat tegangan normal dan tegangan geser dalam arah  $x$ ,  $y$ , dan  $z$  adalah

$$F_x = - \left[ \tau_{xx} \Delta y \Delta z - \left( \tau_{xx} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y \Delta z \right] - \left[ \tau_{xy} \Delta x \Delta z - \left( \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \Delta y \right) \Delta x \Delta z \right] - \left[ \tau_{xz} \Delta x \Delta y - \left( \tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \Delta z \right) \Delta x \Delta y \right]$$

$$F_y = - \left[ \tau_{yy} \Delta x \Delta z - \left( \tau_{yy} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \Delta y \right) \Delta x \Delta z \right] - \left[ \tau_{yx} \Delta y \Delta z - \left( \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y \Delta z \right] - \left[ \tau_{yz} \Delta x \Delta y - \left( \tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \Delta z \right) \Delta x \Delta y \right]$$

$$F_z = - \left[ \tau_{zz} \Delta x \Delta y - \left( \tau_{zz} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \Delta z \right) \Delta x \Delta y \right] - \left[ \tau_{zx} \Delta y \Delta z - \left( \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y \Delta z \right] - \left[ \tau_{zy} \Delta x \Delta z - \left( \tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} \Delta y \right) \Delta x \Delta z \right]$$

dapat disederhanakan menjadi

$$\begin{aligned}
F_x &= \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z \\
F_y &= \left( \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z \\
F_z &= \left( \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y \Delta z
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Persamaan di atas merupakan tegangan geser pada elemen fluida untuk aliran laminar satu dimensi. Untuk aliran tiga dimensi, menurut hukum Viskositas Stokes:

$$\begin{aligned}
\partial \tau_{xy} &= \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\
\partial \tau_{yz} &= \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\
\partial \tau_{zx} &= \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)
\end{aligned} \tag{2.19}$$

berlaku  $\partial \tau_{xy} = \partial \tau_{yx}$ ,  $\partial \tau_{yz} = \partial \tau_{zy}$ , dan  $\partial \tau_{zx} = \partial \tau_{xz}$ , dengan  $\tau$  tegangan geser yang dihasilkan fluida dan  $\mu$  viskositas fluida (sebuah konstanta proporsionalitas).

Menurut Olson dan Wright (1993:159), dalam hipotesis Stokes tegangan normal untuk fluida Newton dalam kondisi isotropik (sifat yang tak bergantung pada orientasi) juga berkaitan dengan tekanan  $p$ , viskositas  $\mu$ , dan gradien-gradien kecepatan. Hubungan tersebut adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\sigma_x = \tau_{xx} &= -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\
\sigma_y = \tau_{yy} &= -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\
\sigma_z = \tau_{zz} &= -p + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Substitusi persamaan (2.19) dan (2.20) ke persamaan (2.18) maka gaya permukaan dalam arah  $x$

$$F_x = \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right) \right] \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$F_x = \left[ -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$F_x = \left[ -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \right] \Delta x \Delta y \Delta z \quad (2.21)$$

Dengan cara yang sama, diperoleh gaya untuk arah  $y$  dan  $z$  adalah

$$F_y = \left[ -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \right] \Delta x \Delta y \Delta z \quad (2.22)$$

$$F_z = \left[ -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \right] \Delta x \Delta y \Delta z \quad (2.23)$$

Dalam notasi vektor persamaan (2.21), (2.22), dan (2.23) adalah

$$F = (-\nabla p + \mu \bar{\nabla}^2 q) \Delta x \Delta y \Delta z \quad (2.24)$$

dengan  $q = (u, v, w)$ . Apabila vektor gaya  $F = m \cdot a$  dan massa  $\rho \Delta x \Delta y \Delta z$  persamaan (2.24) menjadi

$$\rho \Delta x \Delta y \Delta z a = (-\nabla p + \mu \bar{\nabla}^2 q) \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\rho a = (-\nabla p + \mu \bar{\nabla}^2 q)$$

$$a = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mu}{\rho} (\bar{\nabla}^2 q)$$

Diketahui koefisien viskositas kinematik  $\mathcal{V} = \frac{\mu}{\rho}$  (Triatmodjo, 1996:18), sehingga persamaan menjadi

$$a = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathcal{V} (\bar{\nabla}^2 q) \quad (2.25)$$

dengan  $a$  adalah percepatan dalam arah  $x$ ,  $y$ , dan  $z$ . Dengan mensubstitusikan persamaan (2.11), dalam koordinat Cartesian persamaan (2.25) untuk arah  $x$  menjadi

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \mathcal{V} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (2.26)$$

untuk arah  $y$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (2.27)$$

dan untuk arah z

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (2.28)$$

Body force per satuan massa mempunyai komponen-komponen  $f_x$ ,  $f_y$ ,  $f_z$  dengan mendefinisikan  $f_x$  gaya dari momentum x,  $f_y$  gaya dari momentum y, dan  $f_z$  gaya dari momentum z. Selanjutnya hukum kedua Newton boleh dituliskan untuk sebuah satuan volume sebagai berikut:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f_x \quad (2.29)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + f_y \quad (2.30)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + f_z \quad (2.31)$$

Persamaan (2.29), (2.30), dan (2.31) disebut dengan persamaan Navier Stokes.

## 2.5 Metode Beda Hingga

Metode beda hingga adalah metode yang paling dikenal dalam menyelesaikan persoalan-persoalan persamaan diferensial, baik yang biasa maupun parsial. Metode ini didasarkan pada ekspansi deret Taylor. Terdapat tiga skema standar aproksimasi untuk turunan pertama  $\frac{\partial u}{\partial x}$  (Strauss, 2007:199). Secara matematis dapat dituliskan sebagai

$$\text{Skema beda mundur} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} \quad (2.32)$$

$$\text{Skema beda maju} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \quad (2.33)$$

Skema beda tengah 
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} \quad (2.34)$$

Ketiga skema di atas diperoleh dari ekspansi deret Taylor, yaitu:

$$u(x + \Delta x) = u(x) + u'(x)\Delta x + \frac{1}{2}u''(x)(\Delta x)^2 + \frac{1}{6}u'''(x)(\Delta x)^3 + O(\Delta x)^4 \quad (2.35)$$

Salah satu aproksimasi skema eksplisit dalam metode beda hingga adalah *Forward Time Center Space* (FTCS), yaitu aproksimasi yang menggunakan skema beda maju untuk waktu dan skema beda pusat untuk ruang. Untuk turunan kedua dari  $\frac{\partial u}{\partial x}$  skema beda pusat yaitu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{j+1}^n - \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{j-1}^n}{2\Delta x} \quad (2.36)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (2.32), persamaan (2.36) menjadi

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\left[\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x}\right]_{j+1}^n - \left[\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x}\right]_{j-1}^n}{2\Delta x} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\left[\frac{u_{j+2}^n - u_j^n}{2\Delta x}\right] - \left[\frac{u_j^n - u_{j-2}^n}{2\Delta x}\right]}{2\Delta x} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{u_{j+2}^n - u_j^n - u_j^n + u_{j-2}^n}{2\Delta x} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{u_{j+2}^n - 2u_j^n + u_{j-2}^n}{2\Delta x^2} \end{aligned} \quad (2.37)$$

## 2.6 Kondisi Batas

Dalam masalah fisika selalu dikerjakan pada suatu daerah domain  $D$  (Strauss, 2007:84). Pada kasus getaran yang terjadi pada seutas dawai daerah domainnya adalah  $0 \leq x \leq l$  dengan  $l$  adalah panjang dawai. Jadi batas dari domain terdiri dari dua titik yaitu  $x = 0$  dan  $x = l$ .

Terdapat dua jenis kondisi batas yang penting yaitu:

(1) Kondisi Dirichlet (D), jika  $u$  telah ditentukan

(2) Kondisi Neumann (N), jika turunan normalnya  $\frac{\partial u}{\partial x} = u_x$  telah ditentukan

Contoh kondisi batas pada domain  $0 \leq x \leq l$  yaitu

(1) Kondisi Dirichlet,  $u(0, t) = f(t)$  dan  $u(l, t) = g(t)$

(2) Kondisi Neumann,  $\frac{\partial}{\partial x} u(0, t) = h(t)$  dan  $\frac{\partial}{\partial x} u(l, t) = i(t)$

Dalam Fitria (2014), untuk kondisi batas Neumann dapat dilakukan pendiskritan kondisi batas dengan metode beda hingga. Untuk sebuah persamaan transport

$$u_t + uu_x = 0 \quad (2.38)$$

Dengan menggunakan skema beda pusat, bentuk diskrit persamaan (2.38) adalah

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (u_j^n [u_{j+1}^n - u_{j-1}^n]) + \frac{\Delta t^2}{4\Delta x^2} (u_j^n [u_{j+1}^n - u_{j-1}^n]^2) + \frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2} ((u_j^n)^2 [u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n]) \quad (2.39)$$

Jika dimisalkan  $\frac{\partial}{\partial x} u(0, t) = 3$  dan  $\frac{\partial}{\partial x} u(l, t) = 2$ , maka dengan menggunakan skema beda pusat

$$\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 3$$

untuk  $j = 1$

$$\begin{aligned} \frac{u_2^n - u_0^n}{2\Delta x} &= 3 \\ u_0^n &= u_2^n - 6\Delta x \end{aligned} \quad (2.40)$$

dan batas kanan

$$\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 2$$

untuk  $j = l$

$$\frac{u_{l+1}^n - u_{l-1}^n}{2\Delta x} = 2$$

$$u_{i+1}^n = 4\Delta x + u_{i-1}^n \quad (2.41)$$

Sehingga bila disubstitusikan (2.40) dan (2.41) ke skema (2.39) akan didapatkan kondisi batas kiri sebagai berikut:

$$\begin{aligned} u_1^{n+1} &= u_1^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (u_1^n [u_2^n - u_0^n]) + \frac{\Delta t^2}{4\Delta x^2} (u_1^n [u_2^n - u_0^n]^2) \\ &\quad + \frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2} ((u_1^n)^2 [u_2^n - 2u_1^n + u_0^n]) \\ u_1^{n+1} &= u_1^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (u_1^n [u_2^n - u_2^n + 6\Delta x]) + \frac{\Delta t^2}{4\Delta x^2} (u_1^n [u_2^n - u_2^n + 6\Delta x]^2) \\ &\quad + \frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2} ((u_1^n)^2 [u_2^n - 2u_1^n + u_2^n + 6\Delta x]) \\ u_1^{n+1} &= u_1^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (u_1^n [6\Delta x]) + \frac{\Delta t^2}{4\Delta x^2} (u_1^n [6\Delta x]^2) \\ &\quad + \frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2} ((u_1^n)^2 [2u_2^n - 2u_1^n + 6\Delta x]) \end{aligned}$$

dan kondisi batas kanan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} &= u_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (u_i^n [u_{i+1}^n - u_{i-1}^n]) + \frac{\Delta t^2}{4\Delta x^2} (u_i^n [u_{i+1}^n - u_{i-1}^n]^2) \\ &\quad + \frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2} ((u_i^n)^2 [u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n]) \\ u_i^{n+1} &= u_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (u_i^n [4\Delta x + u_{i-1}^n - u_{i-1}^n]) + \frac{\Delta t^2}{4\Delta x^2} (u_i^n [4\Delta x + u_{i-1}^n - u_{i-1}^n]^2) \\ &\quad + \frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2} ((u_i^n)^2 [4\Delta x + u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n]) \\ u_i^{n+1} &= u_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (u_i^n [4\Delta x]) + \frac{\Delta t^2}{4\Delta x^2} (u_i^n [4\Delta x]^2) \\ &\quad + \frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2} ((u_i^n)^2 [4\Delta x + 2u_{i-1}^n - 2u_i^n]) \end{aligned}$$

## 2.7 Model Matematika dalam Al-Quran

Al-Quran merupakan kitab umat muslim yang dijadikan sebagai rujukan berbagai jenis ilmu pengetahuan. Dalam al-Quran banyak sekali perumpamaan-

perumpamaan yang Allah berikan, salah satunya adalah firman Allah dalam QS. al-Kahfi/18:45, yaitu:

وَأَضْرَبَ لَهُمْ مَثَلِ الْحَيَاةِ الدُّنْيَا كَمَا أَنْزَلْنَاهُ مِنَ السَّمَاءِ فَاخْتَلَطَ بِهِ نَبَاتُ الْأَرْضِ فَأَصْبَحَ هَشِيمًا تَذْرُوهُ الرِّيحُ ۗ وَكَانَ اللَّهُ عَلَىٰ كُلِّ شَيْءٍ مُّقْتَدِرًا ﴿٤٥﴾

*“Dan berilah perumpamaan kepada mereka (manusia), kehidupan dunia sebagai air hujan yang Kami turunkan dari langit, maka menjadi subur karenanya tumbuh-tumbuhan di muka bumi, kemudian tumbuh-tumbuhan itu menjadi kering yang diterbangkan oleh angin. Dan adalah Allah, Maha Kuasa atas segala sesuatu” (QS. al-Kahfi/18:45).*

Dalam ayat ini Allah mengumpamakan kehidupan dunia seperti air hujan yang diturunkan dari langit, yang dapat menumbuhsurkan tumbuh-tumbuhan yang ada di bumi. Semuanya tumbuh indah, meninggi dan menjadi bunga. Namun setelah itu semuanya diporak-porandakan dan diterbangkan oleh angin. Maksud ayat ini adalah Allah Maha Kuasa untuk menjadikan suatu keadaan menjadi sangat indah, namun di lain waktu Dia juga kuasa menjadikannya hancur berantakan (Abdullah, 2007:263).

Dalam surat yang lain, Allah berfirman dalam QS. al-Ra'd/13:17, yaitu:

أَنْزَلَ مِنَ السَّمَاءِ مَاءً فَسَالَتْ أَوْدِيَةٌ بِقَدَرِهَا فَاحْتَمَلَ السَّيْلُ زَبَدًا رَابِيًا ۚ وَمِمَّا يُوقِدُونَ عَلَيْهِ فِي النَّارِ ابْتِغَاءَ حُلْيَةٍ أَوْ مَتَاعٍ زَبَدٌ مِثْلُهٗ ۚ كَذَٰلِكَ يَضْرِبُ اللَّهُ الْحَقَّ وَالْبَاطِلَ ۚ فَأَمَّا الزَّبَدُ فَيَذْهَبُ جُفَاءً ۗ وَأَمَّا مَا يَنْفَعُ النَّاسَ فَيَمْكُثُ فِي الْأَرْضِ ۚ كَذَٰلِكَ يَضْرِبُ اللَّهُ الْأَمْثَالَ ﴿١٧﴾

*“Allah telah menurunkan air (hujan) dari langit, maka mengalirlah air di lembah-lembah menurut ukurannya, maka arus itu membawa buih yang mengambang. Dan dari apa (logam) yang mereka lebur dalam api untuk membuat perhiasan atau alat-alat, ada (pula) buihnya seperti buih arus itu. Demikianlah Allah membuat perumpamaan (bagi) yang benar dan yang bathil. Adapun buih itu, akan hilang sebagai sesuatu yang tak ada harganya; Adapun yang memberi manfaat kepada manusia, maka ia tetap di bumi. Demikianlah Allah membuat perumpamaan-perumpamaan” (QS. al-Ra'd/13:17).*

Dalam ayat ini Allah memberi pemisalan antara yang *haq* dan yang *bathil*. Orang-orang kafir dimisalkan dengan buih yang naik ke permukaan air. Buih akan segera lenyap dengan cara menepi pada tepian lembah, lalu angin menghembuskannya. Demikian pula halnya orang-orang kafir, mereka akan segera lenyap seperti buih yang walaupun sering berada di atas dia akan segera sirna sebagai sesuatu yang tidak ada harganya. “Adapun yang memberi manfaat kepada manusia, maka ia tetap di bumi”. Menurut Mujahid, dia itu adalah air yang murni dan bersih. Penulis kitab *Suq al-Arus* berpendapat bahwa jika benar riwayat ini berasal dari Ibnu Abbas RA. maka artinya adalah Allah Swt. memisalkan al-Quran dengan air dan hati-hati manusia dengan lembah. Kedua pemisalan ini Allah berikan untuk menggambarkan kebenaran yang selalu ada dan kebathilan yang akan segera sirna (al-Qurthubi, 2008:718).

Dalam bidang keilmuan eksakta, perumpamaan ini dapat diartikan sebagai pemodelan. Dapat dikatakan bahwa pemodelan sebenarnya merupakan sebuah pemisalan. Meskipun begitu, pemisalan dalam model matematika tidak sembarang dibuat. Semuanya mengacu pada beberapa asumsi yang nantinya harus dibuktikan kebenaran hasilnya. Dalam ath-Thabari (2008:559), sebuah perkiraan yang tidak diikuti oleh adanya bukti nyata disebut prasangka (*dzann*). Sesuatu yang diperoleh dengan prasangka sama sekali tidak dapat menggantikan sesuatu yang diperoleh dengan kebenaran. Allah melarang hamba-Nya berprasangka buruk. Firman Allah dalam QS. Yunus/10:36, yaitu:

وَمَا يَتَّبِعُ أَكْثَرُهُمْ إِلَّا ظَنًّا إِنَّ الظَّنَّ لَا يُغْنِي مِنَ الْحَقِّ شَيْئًا إِنَّ اللَّهَ عَلِيمٌ بِمَا يَفْعَلُونَ ﴿٣٦﴾

“Dan kebanyakan mereka tidak mengikuti kecuali persangkaan saja. Sesungguhnya persangkaan itu tidak sedikitpun berguna untuk mencapai

*kebenaran. Sesungguhnya Allah Maha mengetahui apa yang mereka kerjakan” (QS. Yunus/10:36).*

Untuk meyakini kebenaran dari sebuah dugaan (prasangka) diperlukan adanya sebuah pembuktian. Allah berfirman dalam QS. al-Naml/27:64, yaitu:

أَمَّنْ يَبْدَأُ الْخَلْقَ ثُمَّ يُعِيدُهُ، وَمَنْ يَرْزُقُكُمْ مِنَ السَّمَاءِ وَالْأَرْضِ أَأَلَهُ مَعَ اللَّهِ قُلْ هَاتُوا بُرْهَانَكُمْ إِنْ كُنْتُمْ صَادِقِينَ ﴿٦٤﴾

*“Atau siapakah yang menciptakan (manusia dari permulaannya), kemudian mengulanginya (lagi), dan siapa (pula) yang memberikan rizki kepadamu dari langit dan bumi? Apakah di samping Allah ada Tuhan (yang lain)? Katakanlah: "Tunjukkanlah bukti kebenaranmu, jika kamu memang orang-orang yang benar" (QS. al-Naml/27:64).*

Dalam ayat ini tampak jelas pentingnya sebuah pembuktian untuk dapat memperkuat kebenaran dari dugaan-dugaan yang ada sebagaimana hal ini juga berlaku dalam penurunan model matematika. Dalam penelitian ini, akan digunakan beberapa asumsi dasar untuk penurunan model dengan dimensi satu ini. Model matematika yang diperoleh kemudian akan diperjelas dengan simulasi sebagai pembuktian.

## BAB III

### PEMBAHASAN

#### 3.1 Konstruksi Model

Model gelombang permukaan aliran air pada bidang miring diturunkan dari persamaan Navier Stokes (2.29), dapat ditulis kembali sebagai

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{\rho} + \mathcal{V} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f \quad (3.1)$$

dimana  $u$ ,  $v$ , dan  $w$  adalah kecepatan dalam arah  $x$ ,  $y$ , dan  $z$ .  $\mathcal{V}$  adalah viskositas dan  $f$  adalah gaya-gaya lain dari luar (*body force*).

Pada masalah sehari-hari (dan hanya untuk fluida), viskositas dapat dinyatakan sebagai kekentalan aliran fluida yang merupakan gesekan antara molekul-molekul cairan yang satu dengan yang lain. Suatu jenis cairan yang mudah mengalir dapat dikatakan memiliki viskositas yang rendah, sebaliknya jenis cairan yang sulit mengalir dikatakan memiliki viskositas yang tinggi. Dalam Bird (1994), dikatakan bahwa pada suhu  $0^\circ\text{C}$  air memiliki viskositas sebesar  $0,0179 \text{ poise}$  sedangkan minyak lobak (minyak sayur) pada suhu yang sama memiliki viskositas sebesar  $25,3 \text{ poise}$ . Karena rendahnya viskositas yang dimiliki air maka viskositas dapat diabaikan dan diasumsikan  $\mathcal{V} = 0$ , sehingga

$$\mathcal{V} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = 0$$

Untuk kasus aliran air bidang miring ini diasumsikan aliran adalah satu dimensi, yaitu aliran mengalir pada arah  $x$  saja sehingga persamaan (3.1) menjadi

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{\rho} + f \quad (3.2)$$

Besar tekanan yang dinyatakan dengan  $p$  didefinisikan sebagai gaya tiap satuan luas. Apabila gaya sebesar  $F$  bekerja secara tegak lurus dan merata pada permukaan bidang seluas  $A$ , tekanan pada permukaan itu dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$p = \frac{F}{A}$$

Tekanan hidrostatis yang dihasilkan pada zat padat hanya ke arah bawah saja (jika tidak diberikan gaya luar lain, maka pada zat padat hanya bekerja gaya gravitasi). Tekanan di dalam zat cair disebabkan oleh adanya gaya gravitasi yang bekerja pada tiap bagian zat cair. Besar tekanan itu bergantung pada kedalaman, semakin dalam letak suatu bagian zat cair semakin besar tekanan pada bagian itu. Apabila suatu benda dibiarkan jatuh bebas, maka gaya yang mempercepatnya ialah beratnya ( $W$ ), sehingga tekanan menjadi

$$p = \frac{W}{A} \quad (3.3)$$

Gaya berat ( $W$ ) dipengaruhi oleh massa benda dan gaya gravitasi yang berlaku, sehingga

$$W = mg$$

Telah dijelaskan pada bab sebelumnya bahwa  $m = \rho V$ , sehingga

$$W = (\rho V)g$$

Aliran viskos dapat digambarkan dengan dua buah bidang sejajar yang dilapisi fluida tipis di antara kedua bidang tersebut. Suatu bidang permukaan bawah yang tetap dibatasi oleh lapisan fluida setebal  $h$ , sejajar dengan suatu

bidang permukaan atas yang bergerak seluas  $A$ . Jika bidang bagian atas itu ringan, yang berarti tidak memberikan beban pada lapisan fluida di bawahnya, maka tidak ada gaya tekan yang bekerja pada lapisan fluida. Untuk tekanan karena gaya berat fluida,  $V$  diperoleh dari hasil kali antara ketinggian dengan luas bidang ( $A$ ), atau dapat ditulis

$$\rho V = \rho h A$$

sehingga

$$W = (\rho h A) g \quad (3.4)$$

dengan  $h$  ketinggian antara titik-titik yang beda tekanannya akan dihitung.

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.4) ke dalam persamaan (3.3) diperoleh

$$p = \frac{(\rho h A) g}{A} = \rho h g \quad (3.5)$$

Massa jenis benda ( $\rho$ ) dan besar percepatan gravitasi ( $g$ ) sudah merupakan sebuah ketetapan (bersifat konstan), sehingga tidak dapat mengalami perubahan apapun. Dalam kasus ini diketahui bahwa ketinggian ( $h$ ) selalu berubah terhadap  $x$  di setiap titiknya. Karena  $h$  selalu berubah maka tekanan ( $p$ ) juga akan berubah di setiap titik  $x$ . Dalam bentuk diferensial, persamaan (3.5) dapat ditulis sebagai

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (\rho h g) = \frac{\partial h}{\partial x} \rho g \quad (3.6)$$

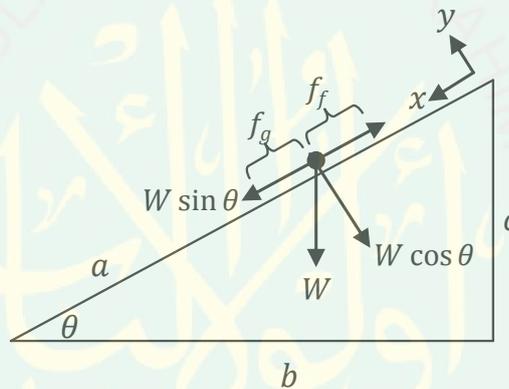
Dengan mensubstitusikan persamaan (3.6) persamaan Navier Stokes (3.2) menjadi

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} &= - \left( \frac{\partial h}{\partial x} \rho g \right) \frac{1}{\rho} + f \\ &= -g \frac{\partial h}{\partial x} + f \end{aligned} \quad (3.7)$$

Terdapat dua jenis *body force* yang termasuk dalam saluran fluida, yaitu gaya-gaya yang disebabkan oleh gravitasi dan gaya-gaya yang disebabkan oleh gesekan, sehingga

$$f = f_g + f_f \quad (3.8)$$

dimana  $f_g$  gaya yang diakibatkan oleh gravitasi dan  $f_f$  gaya yang diakibatkan oleh gesekan. Untuk  $f_g$  dapat diketahui dengan konsep dasar trigonometri, dengan uraian gambar sebagai berikut:



Gambar 3.1 Gaya pada Bidang Miring

Komponen gaya yang ditunjukkan dalam Gambar 3.1 merupakan komponen gaya gravitasi ( $g$ ) dalam arah  $x$ , dengan menggunakan konsep trigonometri dasar diperoleh

$$\begin{aligned} f_g &= W \sin \theta \\ &= mg \sin \theta \end{aligned} \quad (3.9)$$

Diketahui  $f_f$  adalah gaya yang terjadi akibat gesekan. Dalam hukum fisika gaya gesek diperoleh dari hasil perkalian antara koefisien gesek ( $\mu$ ) dan gaya normal ( $N$ ). Secara matematis dapat ditulis

$$f_f = \mu N \quad (3.10)$$

Adapun koefisien gesek statis ( $\mu_s$ ) adalah

$$\mu_s = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad (3.11)$$

Sedangkan untuk gaya normal pada bidang miring dapat diuraikan dari jumlah gaya-gaya sumbu y, yaitu

$$\begin{aligned} \sum F_y &= 0 \\ N - W \cos \theta &= 0 \\ N &= W \cos \theta \end{aligned} \quad (3.12)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.11) dan (3.12), persamaan (3.10) menjadi:

$$\begin{aligned} f_f &= W \cos \theta \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \\ &= W \sin \theta \\ &= mg \sin \theta \end{aligned} \quad (3.13)$$

Adapun ekspresi untuk  $\sin \theta$  dapat disederhanakan menggunakan konsep trigonometri, yaitu

$$\sin \theta = \frac{c}{a}$$

dan

$$\tan \theta = \frac{c}{b}$$

Ingat bahwa untuk  $\theta$  yang sangat kecil akan mengakibatkan  $a \approx b$  sehingga

$$\sin \theta \approx \tan \theta$$

dan persamaan (3.13) dapat ditulis sebagai

$$f_f = mg \tan \theta \quad (3.14)$$

dengan  $m$  adalah massa benda,  $g$  percepatan gravitasi, dan  $\theta$  sudut kemiringan bidang. Gaya gravitasi selalu menuju ke arah bawah sehingga diasumsikan bernilai negatif, sedangkan gaya gesek bersifat selalu menahan gaya gravitasi

(selalu berlawanan arah) sehingga  $f_g$  bernilai negatif dan  $f_f$  bernilai positif, dan persamaan (3.8) dapat ditulis sebagai

$$f = -f_g + f_f \quad (3.15)$$

Diketahui bahwa  $f$  menunjukkan gaya per satuan massa ( $m$ ), sehingga persamaan (3.15) menjadi

$$\begin{aligned} f &= \frac{-f_g + f_f}{m} \\ f &= \frac{-m g \sin \theta + m g \tan \theta}{m} \\ &= -g \sin \theta + g \tan \theta \end{aligned} \quad (3.16)$$

Jika dimisalkan  $\frac{c}{a} = S$  dan  $\frac{c}{b} = S_f$ , maka persamaan (3.16) dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned} f &= -gS + gS_f \\ &= -g(S - S_f) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Apabila persamaan (3.17) disubstitusikan ke dalam persamaan (3.7), maka akan diperoleh model gelombang permukaan aliran air pada bidang miring, yaitu

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -g \frac{\partial h}{\partial x} - g(S - S_f)$$

atau dapat ditulis kembali sebagai

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} + g(S - S_f) = 0 \quad (3.17)$$

dimana  $\frac{\partial u}{\partial t}$  menunjukkan percepatan lokal atau perubahan kecepatan dari waktu ke waktu.  $u \frac{\partial u}{\partial x}$  adalah percepatan konvektif, yaitu perubahan kecepatan berdasarkan jarak  $x$ .  $g \frac{\partial h}{\partial x}$  menunjukkan gradien tekanan, yaitu bagaimana tekanan mengubah posisi gelombang.  $gS$  menunjukkan percepatan karena kemiringan, sedangkan  $gS_f$  menunjukkan gesekan yang menyebabkan

berkurangnya percepatan. Model gelombang permukaan aliran air pada bidang miring ini berbentuk persamaan Saint Venant 1D.

### 3.2 Diskritisasi

Pada subbab ini, akan dilakukan diskritisasi untuk model gelombang permukaan aliran air pada bidang miring dengan menggunakan metode Lax-Wendroff. Metode ini dipilih karena merupakan salah satu metode dengan skema eksplisit orde dua yang digunakan dalam ruang dan waktu. Adapun persamaan yang diperoleh dari konstruksi model pada subbab sebelumnya adalah

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} + g(S - S_f) = 0$$

atau dapat ditulis kembali sebagai

$$u_t + uu_x + gh_x + g(S - S_f) = 0 \quad (3.18)$$

Dengan memindahkan  $u_t$ , persamaan (3.18) menjadi

$$u_t = -uu_x - gh_x - g(S - S_f) \quad (3.19)$$

Untuk menyelesaikan persamaan (3.19) digunakan metode Lax-Wendroff (ekspansi deret Taylor), yaitu

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \Delta t (u_t)|_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 (u_{tt})|_j^n + \dots \quad (3.20)$$

Langkah pertama yang harus dilakukan adalah mencari nilai dari  $u_t$  dan  $u_{tt}$ .

Untuk  $u_t$ :

$$u_t = -uu_x - gh_x - g(S - S_f)$$

Misal  $g(S - S_f) = C$ , maka

$$u_t = -uu_x - gh_x - C \quad (3.21)$$

dan untuk  $u_{tt}$

$$\begin{aligned}
u_{tt} &= -(uu_x)_t - (gh_x)_t - C_t \\
&= -u_t u_x - uu_{xt} \\
&= -u_t u_x - u(u_t)_x \\
&= -(-uu_x - gh_x - C)u_x - u(-uu_x - gh_x - C)_x \\
&= -(-uu_x - gh_x - C)u_x - u(-u_x u_x - uu_{xx} - gh_{xx}) \\
&= u(u_x)^2 + u_x gh_x + Cu_x + u(u_x)^2 + u^2 u_{xx} + ugh_{xx} \\
&= 2[u(u_x)^2] + u^2 u_{xx} + u_x gh_x + ugh_{xx} + Cu_x
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Kemudian persamaan (3.21) dan (3.22) disubstitusikan ke dalam persamaan (3.20), sehingga

$$\begin{aligned}
u_j^{n+1} &= u_j^n + \Delta t (-uu_x - gh_x - C)|_j^n \\
&\quad + \frac{1}{2} \Delta t^2 (2[u(u_x)^2] + u^2 u_{xx} + u_x gh_x + ugh_{xx} + Cu_x)|_j^n \\
&= u_j^n - \Delta t (uu_x + gh_x + C)|_j^n \\
&\quad + \frac{1}{2} \Delta t^2 (2[u(u_x)^2] + u^2 u_{xx} + u_x gh_x + ugh_{xx} + Cu_x)|_j^n
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Dengan menggunakan skema FTCS (*Forward Time Center Space*), persamaan (3.23) dapat ditulis

$$\begin{aligned}
u_j^{n+1} &= u_j^n - \Delta t \left( u_j^n \left( \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} \right) + gh_x + C \right) + \frac{\Delta t^2}{2} \left[ 2 \left( u_j^n \left( \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} \right)^2 \right) + \right. \\
&\quad \left. u_j^n \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2\Delta x} - 2u_j^n + u_{j-1}^n \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} - u_{j-1}^n \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} + u_j^n gh_x + u_j^n gh_{xx} + Cu_j^n \right]
\end{aligned} \tag{3.24}$$

### 3.3 Simulasi dan Interpretasi Model

Dalam subbab ini akan dilakukan simulasi grafik dengan beberapa kondisi yang berbeda. Dalam simulasi ini akan digunakan kondisi batas Neumann dan Dirichlet dengan ketinggian  $h$  tidak konstan, artinya ketinggian  $h$  di setiap titik  $x$  tidak sama dan semakin kecil karena diasumsikan gelombang mengalir dari laut

dalam menuju perairan pantai. Selanjutnya, akan diberikan penjelasan atau interpretasi dari setiap percobaan yang dilakukan.

Pada percobaan pertama akan dilakukan simulasi menggunakan kondisi batas Dirichlet. Diasumsikan batas interval adalah  $(0,3)$  yaitu pada  $x = 0$  batasnya selalu berada di titik 0.1 dan pada  $x = 3$  batasnya selalu di titik -0.1 dengan kondisi awal diberikan, yaitu  $\frac{\sec x^2}{2}$ . Persamaan (3.18) beserta kondisi batasnya dapat dituliskan sebagai berikut:

$$u_t + uu_x + gh_x + g(S - S_f) = 0, \quad t > 0 \text{ dan } 0 < x < 3$$

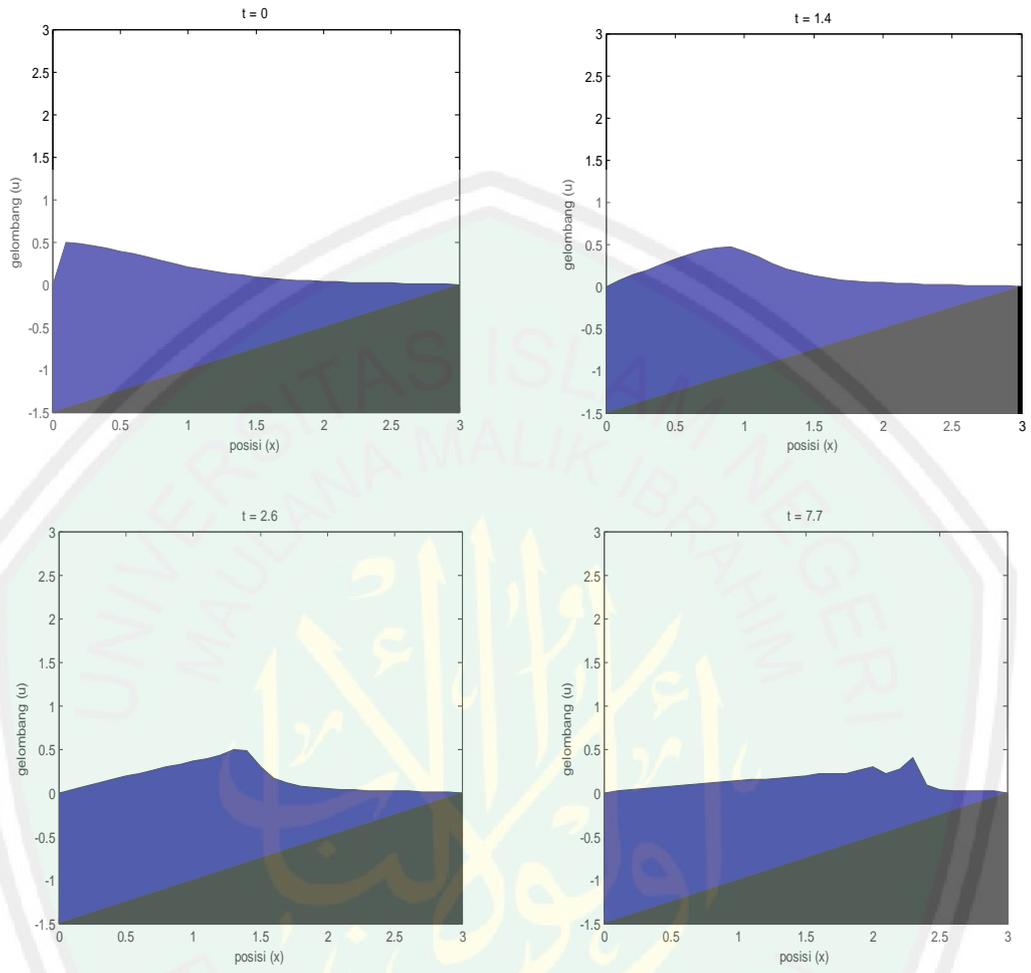
dengan kondisi

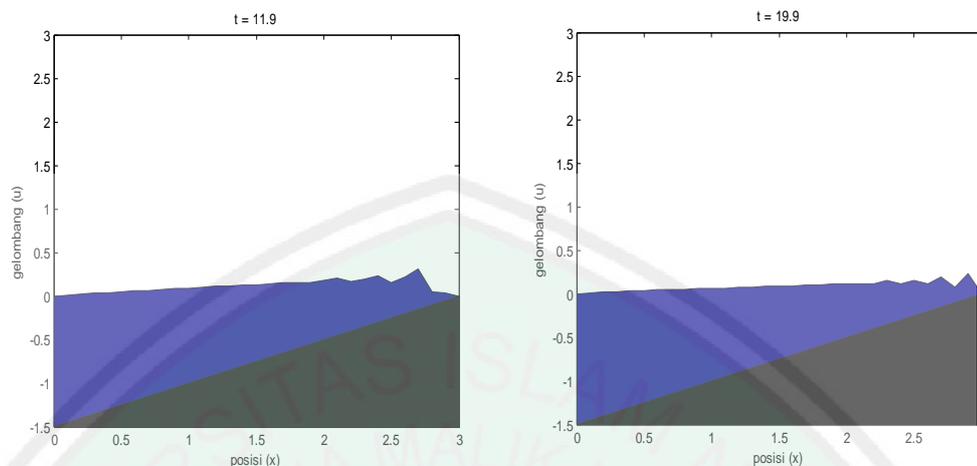
$$u(0, t) = 0.1$$

$$u(3, t) = -0.1$$

$$u(x, 0) = \frac{\sec x^2}{2}$$

Dengan mengambil  $\Delta x = \Delta t = 0.1$  dan  $h = \frac{1}{10000}x$ , maka diperoleh grafik pergerakan gelombang permukaan aliran air pada bidang miring di setiap posisi  $x$  pada saat  $t$  tertentu sebagai berikut:





Gambar 3.2 Gelombang Air dengan Kondisi Batas Dirichlet

Dari Gambar 3.2 di atas, dapat diperhatikan bahwa gelombang yang berjalan dari laut dalam menuju pantai akan mengalami perubahan bentuk karena adanya perubahan kedalaman air. Semakin kecil kedalamannya, pergerakan gelombang air menjadi berkurang sehingga tampak gelombang air semakin tenang. Apabila gelombang bergerak mendekati pantai, pergerakan gelombang di bagian bawah yang berbatasan dengan dasar laut akan melambat. Ini adalah akibat dari gesekan antara air dan dasar pantai. Sementara itu, bagian atas gelombang di permukaan air akan terus melaju. Semakin menuju ke pantai, puncak gelombang akan semakin tajam dan lembahnya semakin datar.

Untuk simulasi selanjutnya diasumsikan batas interval adalah  $(0,3)$  yaitu pada  $x = 0$  batasnya berada di titik  $0.1$  dan  $x = 3$  batasnya berada di titik  $-0.1$  serta diberikan kondisi awal yang sama dengan kasus sebelumnya. Persamaan (3.18) beserta kondisi batasnya dapat dituliskan sebagai berikut:

$$u_t + uu_x + gh_x + g(S - S_f) = 0, \quad t > 0 \text{ dan } 0 < x < 3$$

dengan kondisi

$$u_x(0, t) = 0.1 \quad (3.25)$$

$$u_x(3, t) = -0.1 \quad (3.26)$$

$$u(x, 0) = \frac{\sec x^2}{2}$$

Kemudian dilakukan pendiskritan kondisi batas (3.25) dan (3.26) dengan menggunakan skema beda pusat sehingga

$$\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0.1$$

$$\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = -0.1$$

untuk  $j = 1$  batas kiri menjadi

$$\frac{u_2^n - u_{j_0}^n}{2\Delta x} = 0.1$$

$$u_0^n = u_2^n - 0.2\Delta x \quad (3.27)$$

dan untuk  $j = m$  batas kanan menjadi

$$\frac{u_{m+1}^n - u_{j_m-1}^n}{2\Delta x} = -0.1$$

$$u_{m+1}^n = u_{m-1}^n - 0.2\Delta x \quad (3.28)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.27) dan (3.28) ke dalam persamaan (3.24), diperoleh kondisi batas kiri sebagai berikut:

$$\begin{aligned} u_1^{n+1} = & u_1^n - \Delta t \left( u_1^n \left( \frac{u_2^n - (u_2^n - 0.2\Delta x)}{2\Delta x} \right) + gh_x + C \right) \\ & + \frac{\Delta t^2}{2} \left[ 2 \left( u_1^n \left( \frac{u_2^n - (u_2^n - 0.2\Delta x)}{2\Delta x} \right) \right)^2 + (u_1^n)^2 \left( \frac{2u_2^n - 2u_1^n}{\Delta x^2} \right) \right. \\ & \left. - \left( \frac{u_2^n - (u_2^n - 0.2\Delta x)}{2\Delta x} \right) gh_x + u_1^n gh_{xx} + C \left( \frac{u_2^n - (u_2^n - 0.2\Delta x)}{2\Delta x} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.29)$$

Diberikan  $C = 0$  dan  $h = \frac{1}{10000} x$ , sehingga persamaan (3.29) dapat

disederhanakan menjadi

$$\begin{aligned}
u_1^{n+1} = u_1^n - \Delta t \left( u_1^n \left( \frac{-0.2\Delta x}{2\Delta x} \right) + gh_x \right) \\
+ \frac{\Delta t^2}{2} \left[ 2 \left( u_1^n \left( \frac{-0.2\Delta x}{2\Delta x} \right)^2 \right) + (u_1^n)^2 \left( \frac{2u_2^n - 2u_1^n}{\Delta x^2} \right) - \left( \frac{-0.2\Delta x}{2\Delta x} \right) gh_x \right]
\end{aligned} \quad (3.30)$$

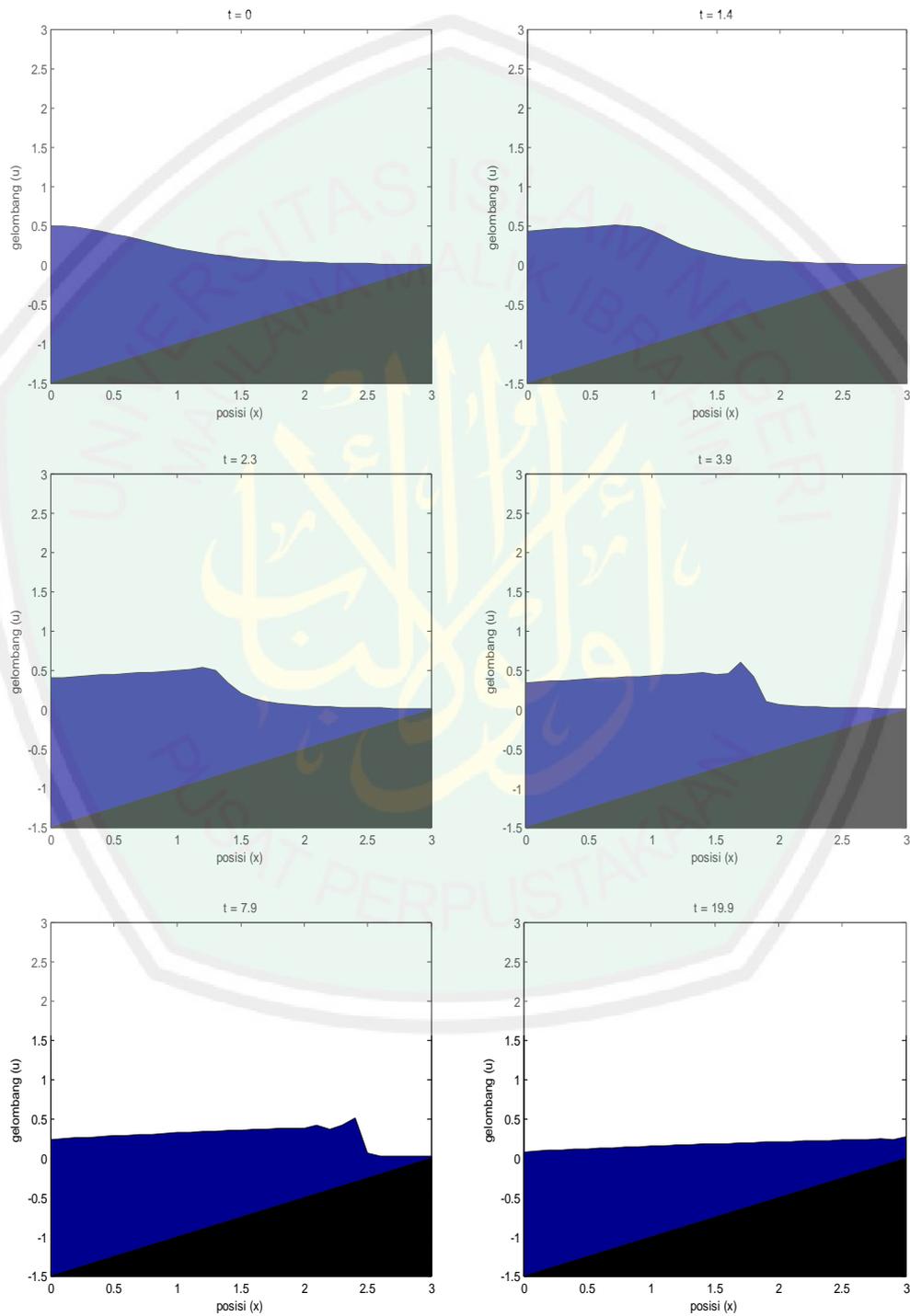
Dengan cara yang sama diperoleh kondisi batas kanan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
u_m^{n+1} = u_m^n - \Delta t \left( u_m^n \left( \frac{(u_{m-1}^n - 0.2\Delta x) - u_{m-1}^n}{2\Delta x} \right) + gh_x + C \right) \\
+ \frac{\Delta t^2}{2} \left[ 2 \left( u_m^n \left( \frac{(u_{m-1}^n - 0.2\Delta x) - u_{m-1}^n}{2\Delta x} \right)^2 \right) \right. \\
+ (u_m^n)^2 \left( \frac{(u_{m-1}^n - 0.2\Delta x) - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{\Delta x^2} \right) \\
+ \left. \left( \frac{(u_{m-1}^n - 0.2\Delta x) - u_{m-1}^n}{2\Delta x} \right) gh_x + u_m^n gh_{xx} \right. \\
+ \left. C \left( \frac{(u_{m-1}^n - 0.2\Delta x) - u_{m-1}^n}{2\Delta x} \right) \right]
\end{aligned} \quad (3.31)$$

Diberikan  $C = 0$  dan  $h = \frac{1}{10000}x$ , sehingga persamaan (3.31) dapat disederhanakan menjadi

$$\begin{aligned}
u_m^{n+1} = u_m^n - \Delta t \left( u_m^n \left( \frac{-0.2\Delta x}{2\Delta x} \right) + gh_x \right) \\
+ \frac{\Delta t^2}{2} \left[ 2 \left( u_m^n \left( \frac{-0.2\Delta x}{2\Delta x} \right)^2 \right) + (u_m^n)^2 \left( \frac{(2u_{m-1}^n - 0.2\Delta x) - 2u_m^n}{\Delta x^2} \right) \right. \\
+ \left. \left( \frac{-0.2\Delta x}{2\Delta x} \right) gh_x \right]
\end{aligned} \quad (3.34)$$

Simulasi untuk kasus ini dilakukan dengan batas *Neumann*. Dengan cara yang sama dengan kasus sebelumnya maka didapatkan grafik pergerakan gelombang permukaan aliran air pada bidang miring sebagai berikut:



Gambar 3.3 Gelombang Air dengan Kondisi Batas Neumann

Tidak jauh berbeda dengan simulasi sebelumnya, dalam simulasi tersebut ditunjukkan bahwa gelombang yang berjalan dari laut dalam menuju pantai akan mengalami perubahan bentuk karena adanya perubahan kedalaman laut. Apabila gelombang bergerak mendekati pantai, pergerakan gelombang di bagian bawah yang berbatasan dengan dasar laut akan melambat. Ini adalah akibat dari gesekan antara air dan dasar pantai. Sementara itu, bagian atas gelombang di permukaan air akan terus melaju. Semakin menuju ke pantai, puncak gelombang akan semakin tajam dan lembahnya akan semakin datar.

Hal ini sesuai dengan pendapat Dyer (1986) yang menyatakan bahwa gelombang yang bergerak dari zona laut lepas hingga tiba di zona dekat pantai (*nearshore beach*) akan melewati beberapa zona gelombang yaitu zona laut dalam (*deep water zone*), zona refraksi (*refraction zone*), zona pecah gelombang (*surf zone*), dan zona pengadukan gelombang (*swash zone*). Gelombang mula-mula terbentuk di daerah pembangkit (*generated area*), selanjutnya gelombang-gelombang tersebut akan bergerak pada zona laut dalam dengan panjang dan periode yang relatif pendek. Setelah masuk ke badan perairan dangkal, gelombang akan mengalami refraksi (pembelokan arah) akibat topografi dasar laut yang menanjak sehingga sebagian kecepatan gelombang menjadi berkurang, periodenya semakin lama, dan tingginya semakin bertambah. Gelombang kemudian akan pecah pada zona *surf* dengan melepaskan sejumlah energinya dan naik ke pantai (*swash*) dan setelah beberapa waktu kemudian gelombang akan kembali turun (*backswash*) yang kecepatannya bergantung pada kemiringan pantai atau *slope*. Pantai dengan kemiringan yang tinggi akan lebih cepat

memantulkan gelombang, sedangkan pantai dengan kemiringan yang kecil pemantulan gelombangnya relatif lambat.

### 3.4 Air Laut dalam Pandangan Islam

Dalam al-Quran, terdapat 39 ayat yang menyebutkan tentang laut. Tidak ada di antara ayat-ayat tersebut yang bertentangan dengan kebenaran ilmu pengetahuan. Dalam kehidupan sehari-hari, air memiliki peran yang sangat penting. Air memiliki kekuatan yang sangat besar. Aliran air yang sangat deras dapat menghanyutkan barang apapun yang diterjangnya, seperti banjir misalnya. Jangankan banjir, bahkan tetesan-tetesan air dapat menghancurkan bebatuan yang keras. Firman Allah Swt. dalam QS. al-Isro'/17:67, yaitu:

وَإِذَا مَسَّكُمُ الضُّرُّ فِي الْبَحْرِ ضَلَّ مَنْ تَدْعُونَ إِلَّا إِلَاهُ ۖ فَلَمَّا نَجَّكُمْ إِلَى الْبَرِّ أَعْرَضْتُمْ وَكَانَ الْإِنْسَانُ كَفُورًا



*“dan apabila kamu ditimpa bahaya di lautan, niscaya hilanglah siapa yang kamu seru kecuali Dia, maka tatkala Dia menyelamatkan kamu ke daratan, kamu berpaling. Dan manusia itu adalah selalu tidak berterima kasih” (QS. al-Isro'/17:67).*

Dalam sebuah referensi dikatakan bahwa gelombang laut yang memiliki ketinggian 25 kaki dapat mejadi 130 kaki pada musim badai. Apabila setiap gelombang dengan ketinggian 1 kaki memiliki kemampuan menghancurkan 6.000 ritl, maka tak dapat dibayangkan kerusakan yang dapat disebabkan oleh gelombang air laut tersebut.

Allah Swt. selalu memerintahkan semua makhluk-Nya untuk memikirkan dan merenungkan segala sesuatu yang diciptakan-Nya di muka bumi ini. Salah satunya adalah perintah untuk mengeksplorasi dan memanfaatkan laut untuk

kesejahteraan umat manusia seperti dalam QS. Luqman ayat 31. Terdapat beberapa ayat dalam al-Quran yang berbicara tentang manfaat laut bagi manusia, salah satunya dalam QS. al-Jatsiyah/45:12, yaitu:

﴿اللَّهُ الَّذِي سَخَّرَ لَكُمْ الْبَحْرَ لِتَجْرِيَ الْفُلُكُ فِيهِ بِأَمْرِهِ ۖ وَلِتَبْتَغُوا مِنْ فَضْلِهِ ۗ وَلِعَلَّكُمْ تَشْكُرُونَ﴾

*“Allah-lah yang menundukkan lautan untukmu supaya kapal-kapal dapat berlayar padanya dengan seizin-Nya dan supaya kamu dapat mencari karunia-Nya dan mudah-mudahan kamu bersyukur”*(QS. al-Jatsiyah/45:12).

Dalam ayat tersebut, dijelaskan bahwa laut tidak hanya mengandung kadar garam yang tinggi tetapi juga dapat dijadikan sarana perhubungan dan perdagangan. Selain itu, dalam ayat lain juga disebutkan bahwa laut merupakan sumber protein dari ikan segar dan mengandung permata-permata yang dapat diambil manfaatnya oleh umat manusia. Firman Allah Swt. dalam QS. al-Maidah/5:96, yaitu:

﴿أَحِلَّ لَكُمْ صَيْدُ الْبَحْرِ وَطَعَامُهُ مَتَعًا لَكُمْ وَلِلسَّيَّارَةِ وَحُرِّمَ عَلَيْكُمْ صَيْدُ الْبَرِّ مَا دُمْتُمْ حُرَمًا ۗ وَاتَّقُوا اللَّهَ الَّذِي إِلَيْهِ تُحْشَرُونَ﴾

*“Dihalalkan bagimu binatang buruan laut dan makanan (yang berasal) dari laut sebagai makanan yang lezat bagimu, dan bagi orang-orang yang dalam perjalanan; dan diharamkan atasmu (menangkap) binatang buruan darat, selama kamu dalam ihram. dan bertakwalah kepada Allah yang kepada-Nyalah kamu akan dikumpulkan”*(QS. al-Maidah/5:96).

Hasil penelitian menunjukkan bahwa orang yang mengonsumsi ikan relatif lebih sehat dan terhindar dari serangan jantung. Hal ini dikarenakan kandungan nutrisi dalam ikan sangat baik dan berperan penting untuk mengurangi resiko berbagai macam penyakit. Ikan mengandung asam omega tiga yang dapat membantu mengurangi resiko serangan jantung dan memperkuat sistem kekebalan tubuh apabila dikonsumsi secara teratur.

Pesan al-Quran tentang laut kini dibuktikan oleh negara-negara maju, dengan memanfaatkan potensi lautnya dengan baik dapat menjadikan mereka sebagai negara kaya. Selain itu laut dengan sistem arus dan gelombangnya memberikan energi terbarukan kepada umat manusia. Hal ini menjadi bukti bagi keaslian al-Quran, bahwa pesan-pesan yang tersirat dalam al-Quran seharusnya dijadikan pegangan hidup. Manfaat laut masih belum banyak yang dimanfaatkan. Hanya dengan sains yang didedikasikan untuk mensyukuri karunia Allah inilah yang akan membawa manusia pada kehidupan yang lebih baik.



## BAB IV

### PENUTUP

#### 4.1 Kesimpulan

Berdasarkan uraian penjelasan dalam bab sebelumnya, kesimpulan yang diperoleh adalah:

1. Model gelombang permukaan aliran air pada bidang miring berbentuk persamaan Saint Venant 1D yaitu

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} + g(S - S_f) = 0$$

dimana  $\frac{\partial u}{\partial t}$  menunjukkan percepatan lokal atau perubahan kecepatan dari waktu ke waktu.  $u \frac{\partial u}{\partial x}$  adalah percepatan konvektif, yaitu perubahan kecepatan berdasarkan jarak  $x$ .  $g \frac{\partial h}{\partial x}$  menunjukkan gradien tekanan, yaitu bagaimana tekanan mengubah posisi gelombang.  $gS$  menunjukkan percepatan karena kemiringan, sedangkan  $gS_f$  menunjukkan gesekan yang menyebabkan berkurangnya percepatan.

2. Hasil simulasi menunjukkan bahwa permukaan gelombang air pada bidang miring yang melaju dari perairan laut dalam menuju perairan pantai semakin tajam dan lembah semakin datar. Semakin kecil ketinggian air, kecepatan laju gelombang mejadi semakin lambat (tenang). Hal ini dipengaruhi oleh tekanan gradien yang juga semakin kecil mengikuti ketinggian air.
3. Dalam al-Quran disebutkan bahwa Allah Swt. menciptakan banyak manfaat bagi manusia yang tersimpan dalam lautan. Banyaknya manfaat yang Allah berikan menunjukkan tanda-tanda kekuasaan-Nya yang begitu besar. Seiring

berkembangnya zaman, akan semakin banyak pengetahuan-pengetahuan lain yang akan ditemukan dalam ilmu yang berhubungan dengan kelautan.

#### 4.2 Saran

Dalam penelitian ini penulis hanya melakukan simulasi dengan menggunakan metode Lax-Wendroff dengan kondisi batas Neumann dan Dirichlet. Untuk penelitian selanjutnya disarankan untuk melakukan simulasi menggunakan kondisi batas serap (*absorbing boundary condition*) untuk melihat perubahan gelombang permukaan air pada bidang miring apabila pantulan gelombang dihilangkan.

## DAFTAR PUSTAKA

- Abdullah. 2007. *Lubaabut Tafsir min Ibni Katsiir*. Jakarta: PUSTAKA IMAM ASY-SYAFI'I.
- Adini, S.A. 2011. *Solusi Numerik Persamaan Saint Venant 2D dan Persamaan Navier Stokes 2D*. UIN Malang : Skripsi tidak diterbitkan.
- Al-Qurthubi, S.I. 2008. *Tafsir Al Qurthubi*. Jakarta : Pustaka Azzam.
- Ath-Thabari, A.B.J. 2009. *Tafsir Ath-Thabari*. Jakarta: Pustaka Azzam.
- Bird, T. 1994. *Kimia Fisik untuk Universitas*. Gramedia Pustaka Utama. Jakarta.
- Chorlton, Frank. 1967. *Textbooks of Fluid Dynamics*. London: D. Van Norstrand Company, Ltd..
- Dyer, K.R. 1986. *Coastal and Estuarine Sediment Dynamic*. New York: John Wiley & Sons, Ltd.
- Fitria, Binti Tsamrotul. 2015. *Penurunan Model Traffic Flow Berdasarkan Hukum-Hukum Keseimbangan*. UIN Malang: Skripsi tidak diterbitkan.
- Kusuma, M.S.B., Adityawan, M.B. & Farid, M. 2008. *Modelling Two Dimension Inundation Flow Generated by Tsunami Propagation in Banda Aceh City*. Aceh Tsunami Digital Repository.
- Mustain, M. 2011. *Mekanika Fluida*. Surabaya: ITSPRESS.
- Olson, R.M. & Wright, S.J. 1993. *Dasar-Dasar Mekanika Fluida Teknik*. Jakarta: PT. Gramedia Pustaka Umum.
- Potter, M.C. & Wiggert, D.C. 2011. *Mekanika Fluida*. Jakarta: PT. Gelora Aksara Pratama.
- Spiegel, M.R. 1999. *Analisis Vektor dan Suatu Pengantar Analisis Tensor*. Jakarta: Erlangga.
- Starodumov, I. 2014. Solution of Kinematic Approximation of Saint-Venant Equation, Analytical Solutions for Several Tasks. *Applied Mathematical Sciences*, 8 (7): 315-320.
- Strauss, A.W.. 2007. *Partial Differential Equations an Introduction Second Edition*. New York: John Wiley & Sons, Ltd.

Thual, O., Plumerault, L.R., & Astruc, D. 2010. Linear Stability of The Saint-Venant Equations and Dras Parameterizations. *Journal of Hydraulic Research*, 48 (3).

Triatmodjo, B. 1996. *Hidraulika I*. Yogyakarta: Beta Offset.

