PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL FOKKER-PLANCK DENGAN METODE GARIS

SKRIPSI

OLEH
SITI MUYASSAROH
NIM. 10610045

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG

2015

PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL FOKKER-PLANCK DENGAN METODE GARIS

SKRIPSI

Diajukan kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh
Siti Muyassaroh
NIM. 10610045

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2015

PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL FOKKER-PLANCK DENGAN METODE GARIS

SKRIPSI

Oleh
Siti Muyassaroh
NIM. 10610045

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 17 Desember 2014

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Ari Kusumastuti, S.Si., M.Pd	Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd
NIP.19770521 200501 2 004	NIP.19630502 198703 1 005

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL FOKKER-PLANCK DENGAN METODE GARIS

SKRIPSI

Oleh
Siti Muyassaroh
NIM. 10610045

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal 08 Januari 2015

Penguji Utama	:	Mohammad Jamhuri, M.Si	....
Ketua Penguji	:	Dr. Usman Pagalay, M.Si	....
Sekretaris Penguji	:	Ari Kusumastuti, S.Si., M.Pd	....
Anggota Penguji	:	Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd	....

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Siti Muyassaroh

NIM : 10610045

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul : Penyelesaian Persamaan Diferensial Parsial Fokker-Planck dengan Metode Garis

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambil-alihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 05 Januari 2015
Yang membuat pernyataan,

Siti Muyassaroh
NIM. 10610045

MOTO

"خير الناس انفعهم للناس"

"Manusia yang baik adalah manusia yang mampu memberi manfaat bagi manusia yang lain"

(HR. Ahmad dan Thabrani)

PERSEMBAHAN

Karya ini penulis persembahkan untuk:

Orang tua tercinta:

“Bapak Musyadad dan Ibu Siti Khanifah”

Saudara tersayang:

“Siti Musyarofah”

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Alhamdulillah, segala puji dan syukur penulis panjatkan Kehadirat Allah Swt. yang telah melimpahkan segala nikmat, rahmat dan hidayah-Nya kepada penulis sehingga penulis mampu menyelesaikan studi di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang sekaligus menyelesaikan penulisan skripsi dengan judul *"Penyelesaian Persamaan Diferensial Parsial Fokker-Planck dengan Metode Garis"*. Shalawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad Saw. keluarga, serta para sahabat beliau.

Penulis menyadari bahwa penulisan skripsi ini tidak akan selesai tanpa bantuan, bimbingan serta do'a dari berbagai pihak. Untuk itu penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Hj. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Ari Kusumastuti, S.Si., M.Pd dan Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd, selaku dosen pembimbing skripsi yang telah memberikan bimbingan dengan baik sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.

5. Seluruh dosen Jurusan Matematika yang telah memberikan ilmu yang dapat dijadikan bekal di masa depan.
6. Kedua orang tua penulis, Bapak Musyadad dan Ibu Siti Khanifah, yang senantiasa mendukung dengan segenap cinta kasih yang tulus. Berkat do'a dan ridho mereka, Allah memberikan berbagai kemudahan kepada penulis.
7. Seluruh keluarga besar penulis, khususnya saudara penulis Siti Musyarofah yang senantiasa memberi motivasi dan inspirasi kepada penulis untuk menjadi manusia yang lebih baik setiap harinya.
8. Teman-teman Jurusan Matematika angkatan 2010, khususnya sahabat "Princess" (Alfi Nur, Afifah Aini, Naila Nafilah, Harum Kurniasari, Syarifatuz Zakiya, Fitria Nur'aini), serta teman-teman terapan (Thoufina Kurniyati, Rofiatun Jamila, Afidah Karimatul Laili, Luluk Ianatul Afifah, Binti Tsamrotul Fitria).
9. Sahabat "Arfaza23" (Ratih Setya Andhini, Fariza Aulia, Anis Mufidah, Echa Yuniar Minarti, Febri Widiyatul Ilmiyah), keluarga besar Lapasa MAN Rengel, Ponpes Yasika Plumpang serta keluaga besar TPQ Nasyi'ul Huda.
10. Semua pihak yang tidak mungkin penulis sebutkan satu persatu yang turut membantu dalam penyelesaian penulisan skripsi ini.

Semoga Allah membalas kebaikan mereka dengan yang lebih baik. Akhir kata semoga skripsi ini memberikan manfaat bagi para pembaca, khususnya bagi penulis secara pribadi. *Aamiin.*

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Malang, Januari 2015

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

DAFTAR LAMPIRAN

ABSTRAK

Muyassaroh, Siti. 2015. **Penyelesaian Persamaan Diferensial Parsial Fokker-Planck dengan Metode Garis.** Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi. Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Ari Kusumastuti, S.Si., M.Pd. (II) Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd.

Kata kunci: persamaan Fokker-Planck, metode garis, metode Runga-Kutta.

Persamaan Fokker-Planck merupakan persamaan diferensial parsial yang menggambarkan fungsi distribusi partikel dalam suatu sistem yang berisi banyak partikel yang saling bertumbukan. Digunakan metode garis untuk menyelesaikan solusi numerik pada persamaan Fokker-Planck. Metode ini merepresentasikan bentuk persamaan diferensial parsial ke dalam bentuk sistem persamaan diferensial biasa yang ekuivalen pada bentuk persamaan diferensial parsialnya. Langkah pertama yang dilakukan untuk menyelesaikan persamaan Fokker-Planck dengan metode garis yaitu mengganti turunan ruang dengan metode beda hingga pusat, sehingga diperoleh bentuk sistem persamaan diferensial biasa. Langkah kedua yaitu menyelesaikan sistem persamaan diferensial biasa yang telah diperoleh pada langkah pertama dengan metode penyelesaian yang berlaku pada persamaan diferensial biasa yaitu metode Runga-Kutta orde empat. Hasil solusi numerik dengan metode garis kemudian dibandingkan dengan solusi eksak menghasilkan galat yang sangat kecil atau mendekati nol, sehingga dapat disimpulkan bahwa metode garis merupakan metode yang baik untuk menyelesaikan persamaan Fokker-Planck.

ABSTRACT

Muyassaroh, Siti. 2015. **Solution Of Fokker-Planck Partial Differential Equation Using Line Method**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology. State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) Ari Kusumastuti, S.Si., M.Pd. (II) Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd.

Keywords : Fokker-Planck equation, line method, Runge-Kutta method

Fokker-Planck equation is partially differential equation that describe distribution function of particles on system contain many particles that collide each other. The method of lines is used to solve numerical solution of Fokker-Planck equation. This method represents form of partially differential equation into the form of ordinary differential equation that equivalent to the form of its partially differential equation. The first step to solve Fokker-Planck equation using line method of lines is replacing spatial derivative with center finite difference, in order to obtain system of ordinary differential equation. The second step is solving the system of ordinary differential equation that have been obtained in the first step using the method of lines using the solving method that used at ordinary differential equation, that is Runga-Kutta method of fourth order. Then numerical solution obtained by using the method of lines is compared to the exact solution and produce error that very small or tend to zero, therefore it can be concluded that the method of lines is good method for solving Fokker-Planck equation.

ملخص

ميسّره، سيتي. ٢٠١٥ .**تحليل المعادلات التفاضلية الجزئية فكّر–بلانج بطريقة الخط**. البحث الجا معي. شعبة الرياضيات. كلية العلوم والتكنولوجيا. جامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج . المشرف: (١) أري كوسومستوتي الماجستر (٢) الدكتورالحج ايمام سوجاروا الماجستر

الكلمة الرئيسية: فكّر–فلانج معادلة ، طريقة الخط ، طريقة رونج كوتا

فوكر– بلانج معادلة هي المعادلة التفاضلية الجزئية التي تصف وظيفة توزيع الجزيئات في نظام تحتوي على العديد من الجزيئات تصطدم بعضها بعضا. وتستخدم طريقة الخط لحل الحل العددي لمعادلة فوكر– بلانج. ويمثل هذا الأسلوب شكل المعادلات التفاضلية الجزئية في شكل نظام من المعادلات التفاضلية العادية وتعادل في شكل معادلات التفاضلية الجزئية. الخطوة الأولى التي اتخذت لإتمام معادلة فوكر– بلانج بطريقة الخط، هو استبدال مشتق الفضاء بطريقةالفرق المحدودالمتوسطي. من أجل الحصول على شكل نظام من المعادلات التفاضلية العادية. الخطوة الثانيةهي تحليل نظام المعادلات التفاضلية العادية التي تم الحصول عليها في الخطوة الأولى بطريقةالتى ينطبق على معادلات التفاضلية العادية طريقة رونج–كوتاعلى الرتبةالرابعة. نتائج الحل العددي مع طريقة الخط يتم بعد ذلك مقارنتها مع الحل الدقيق ينتج خطأ صغير جدا أو قريبة من الصفر. لذلك يمكن القول بأن طريقة الخطوط هو وسيلة ممتازة لحل معادلة فوكر– بلانج.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Persamaan Fokker-Planck merupakan persamaan yang menggambarkan fungsi distribusi partikel dalam suatu sistem yang berisi banyak partikel yang saling bertumbukan. Persamaan ini berisi komponen difusi partikel dan interaksi antar partikel (Palupi, 2010:A1). Dalam literatur matematika persamaan Fokker-Planck biasa disebut dengan persamaan Kolmogorov maju. Bentuk umum persamaan Fokker-Planck adalah:

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x}\big(A(x,t)v(x,t)\big) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\big(B(x,t)v(x,t)\big)$$

$a(x,t)$ disebut sebagai koefisien apung (*drift coefficient*) dan $b(x,t)$ disebut sebagai koefisien diffusi (Zauderer, 1998:10). Persamaan Fokker-Planck termasuk persamaan diferensial parsial karena mengandung turunan parsial, yaitu turunan dengan dua variabel bebas x dan t.

Terdapat beberapa metode untuk menyelesaikan masalah pada persamaan diferensial parsial. Salah satu metode yang bisa digunakan yaitu metode garis. Ide dasar metode garis adalah mengubah bentuk persamaan diferensial parsial ke dalam bentuk persamaan diferensial biasa (Hamdi dkk, 2009:5). Menurut Sadiku (1997), metode garis dianggap sebagai metode beda hingga khusus tetapi lebih efektif sehubungan dengan keakuratan dan waktu perhitungan dibandingkan dengan metode beda hingga biasa.

Metode garis telah banyak diterapkan pada beberapa permasalahan persamaan diferensial parsial. Penelitian terdahulu yang membahas metode garis antara lain yaitu M. N. O. Sadiku dan C. N. Obiozor (1997) yang menerapkan metode garis pada persamaan Laplace. Langkah pertama yang dilakukan adalah mendiskritisasi variabel x dan mengganti turunan kedua yang bergantung pada x dengan metode beda hingga. Kemudian langkah kedua menyelesaikan persamaan yang dihasilkan pada langkah pertama dengan invers transformasi menggunakan bentuk matriks dan nilai eigen. Penelitian lain dilakukan oleh A. Ozdes dan E. N. Aksan (2006) membahas solusi numerik persamaan Korteweg-de Vries dengan metode garis. Langkah pertama yang dilakukan yaitu mengganti turunan parsial yang bergantung pada variabel ruang, yaitu $\frac{\partial u}{\partial x}$ dan $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$ dengan metode beda hingga sehingga menghasilkan sistem persamaan diferensial biasa yang bergantung pada t. Kemudian langkah kedua menyelesaikan persamaan diferensial biasa dengan metode Euler.

Sadiku (1997) menerangkan bahwa metode garis memiliki beberapa keunggulan yaitu, metode ini sangat efisien dalam perhitungan karena menghasilkan solusi yang akurat dengan sedikit waktu yang ditempuh. Selain itu metode ini juga mudah dalam menentukan kestabilannya dengan memisahkan antara variabel ruang dan waktu.

Islam memerintahkan manusia untuk membangun segala pemikirannya berdasarkan aqidah Islam, bukan lepas dari aqidah itu. Hal ini dapat dipahami dari ayat berikut:

ٱقْرَأْ بِٱسْمِ رَبِّكَ ٱلَّذِى خَلَقَ ١

“Bacalah dengan (menyebut) nama Tuhanmu yang Menciptakan”. (QS. al-Alaq/96:1).

Ayat di atas merupakan ayat pertama yang diturunkan oleh Allah untuk menginspirasikan manusia agar senantiasa belajar, salah satunya yaitu membaca fenomena di alam raya ini. Namun dalam proses membaca tersebut, haruslah dengan berdasarkan iman kepada Allah, karena *iqra'* haruslah dengan *bismi rabbika*. Dengan membaca, manusia akan memperoleh pengetahuan dan pemahaman tentang segala sesuatu. Selain memperoleh pemahaman, membaca juga mampu meningkatkan ketaqwaan manusia terhadap Sang Pencipta.

Banyak sekali fenomena di alam raya yang telah dijelaskan oleh al-Quran. Menurut penulis, persamaan Fokker-Planck merupakan salah satu fenomena yang harus dipelajari agar diperoleh pemahaman baru dalam menyelesaikan solusinya.

Dengan melihat beberapa urgensi tersebut, maka penelitian ini difokuskan pada penerapan metode garis untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial Fokker-Planck. Sehingga tema penelitian yang diangkat adalah "Penyelesaian Persamaan Diferensial Parsial Fokker-Planck dengan Metode Garis".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, maka rumusan masalah yang diambil adalah:

1. Bagaimana penerapan metode garis untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial Fokker-Planck?
2. Bagaimana perbandingan solusi analitik dan solusi numerik persamaan diferensial parsial Fokker-Planck dengan metode garis?
3. Bagaimana interpretasi hasil penyelesaian persamaan diferensial parsial Fokker-Planck dengan metode garis?

4. Bagaimana kaitan antara penyelesaian persamaan diferensial parsial Fokker-Planck dengan metode garis terhadap kajian agama?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah:

1. Mengetahui penerapan metode garis untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial Fokker-Planck.
2. Mengetahui perbandingan solusi analitik dan numerik persamaan diferensial parsial Fokker-Planck dengan metode garis.
3. Mengetahui interpretasi hasil penyelesaian persamaan diferensial parsial Fokker-Planck dengan metode garis.
4. Mengetahui kaitan antara penyelesaian persamaan diferensial parsial Fokker-Planck dengan metode garis terhadap kajian agama.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat penelitian ini adalah untuk mengemukakan suatu metode lain sebagai alternatif untuk menyelesaikan solusi numerik persamaan diferensial parsial Fokker-Planck yaitu dengan menggunakan metode garis (*method of lines*).

1.5 Batasan Masalah

Adapun dalam penelitian ini digunakan persamaan diferensial parsial Fokker-Planck sebagai berikut:

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x,t) - xe^{3t}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t) - \frac{\partial v}{\partial x}(x,t) = 2xe^{2t} - e^{2t}$$

dengan kondisi awal dan kondisi batas yang diberikan masing-masing yaitu $v(x,0) = x$, untuk $x \in (0,1)$ dan nilai batas $v(0,t) = 0$, $v(1,t) = e^{2t}$. Daerah solusi dibatasi pada $0 \leq x \leq 1$ dan $0 \leq t \leq 1$. Solusi eksak atau analitik persamaan di atas yaitu:

$$v(x,t) = xe^{2t}$$

Persamaan di atas diambil dari jurnal *"Applied Mathematical Sciences"* vol. 7, nomor 35 Tahun 2013 karya Eman Ali Hussain dan Zainab Mohammed Alwan. Dalam penelitian ini, masalah kestabilan tidak dibahas.

1.6 Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan metode kepustakaan yaitu pengumpulan referensi dengan membaca buku literatur yang berkaitan dengan masalah penelitian. Adapun langkah-langkah penelitian yang dilakukan adalah:

1. Menganalisis metode garis dan menerapkan metode garis pada persamaan diferensial parsial Fokker-Planck. Langkah-langkah yang dilakukan adalah:
   a. Mengganti turunan variabel yang bergantung pada x untuk memperoleh sistem persamaan diferensial biasa dengan metode beda hingga pusat.
   b. Menghitung solusi dari sistem persamaan diferensial biasa dengan metode Runga-Kutta orde empat.
2. Menganalisis perbandingan solusi eksak terhadap solusi numerik pada penyelesaian persamaan diferensial parsial Fokker-Planck dengan metode garis untuk mengetahui galatnya.
3. Interpretasi hasil penyelesaian.

4. Membahas kaitan kajian agama dengan pembahasan tentang penyelesaian persamaan diferensial parsial Fokker-Planck dengan metode garis.

1.7 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan yang digunakan terdiri dari empat bab. Masing-masing bab dibagi ke dalam beberapa subbab dengan rumusan sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Pendahuluan meliputi latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Bab ini terdiri atas teori-teori yang mendukung bagian pembahasan serta yang berhubungan dengan penelitian. Teori-teori tersebut antara lain persamaan diferensial parsial Fokker-Planck, metode beda hingga persamaan Fokker-Planck, metode Garis, metode Rung-Kutta, galat, kajian penelitian terdahulu dan kajian Agama.

Bab III Pembahasan

Bab ini berisi tentang pembahasan mengenai langkah-langkah menyelesaikan persamaan diferensial parsial Fokker-Planck dengan menggunakan metode garis sebagaimana yang telah dijelaskan dalam metode penelitian.

Bab IV Penutup

Bab ini berisi tentang kesimpulan dari pembahasan dan saran untuk pembaca dan peneliti selanjutnya.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Diferensial Parsial Fokker-Planck

Persamaan Fokker-Planck merupakan persamaan yang menggambarkan fungsi distribusi partikel dalam suatu sistem yang berisi banyak partikel yang saling bertumbukan (Palupi, 2010:A1). Persamaan ini pertama kali dikenalkan oleh Fokker dan Planck. Beberapa penerapan persamaan Fokker-Planck antara lain pada gerakan tidak menentu partikel kecil yang direndam dalam suatu cairan, fluktuasi intensitas sinar laser, dan distribusi kecepatan partikel cairan dalam aliran turbulen. Secara umum persamaan Fokker-Planck dapat diaplikasikan pada sistem keseimbangan maupun ketakseimbangan (Frank, 2004:1).

Bentuk umum persamaan Fokker-Planck adalah:

$$\frac{\partial}{\partial t}v(x,t) = \left[-A(x,t)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}B(\,x,t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]v(x,t) \tag{2.1}$$

dimana $v(x,t)$ menggambarkan fungsi distribusi partikel, $A(x,t)$ dan $B(x,t)$ masing-masing disebut koefisien apung (*drift coefficient*) dan koefisien diffusi (*diffusion coefficient*). Persamaan Fokker-Planck termasuk persamaan diferensial parsial (PDP) karena persamaan ini menggambarkan laju perubahan terhadap dua variabel bebas yaitu waktu dan jarak (ruang).

Awal terbentuknya persamaan nonlinier Fokker-Planck merupakan akibat terjadinya tumbukan antara partikel, sehingga mengalami perubahan arah gerak secara acak (*Brownian Motion*). Partikel yang disebut sebagai partikel Brownian tersebut mengalami proses difusi. Gerakan partikel bersifat acak dan gerakan partikel tidak dipengaruhi oleh gerakan partikel sebelumnya (Palupi, 2010:A1).

Zauderer (2006) menyatakan bahwa awal terbentuknya persamaan Fokker-Planck diperoleh dari asumsi partikel yang berpindah dari posisi awalnya pada sumbu-x yang bergerak ke segala arah dengan besar pergeserannya yaitu δ. x_i adalah variabel acak dengan asumsi nilai $+\delta$ untuk partikel yang bergerak ke kanan dan $-\delta$ untuk partikel yang bergerak ke kiri. Probabilitas jarak berupa $+\delta$ dimisalkan sebagai p dan probabilitas jarak $-\delta$ dimisalkan sebagai q. Jadi probabilitas total kedua gerakan yaitu $p+q=1$. Andaikan partikel Brownian dalam interval waktu yang singkat τ bergeser sejauh δ maka total pergeseran setelah melakukan n langkah dinyatakan dengan $X_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$.

Lokasi perpindahan partikel dinyatakan dalam harga harapan (ekspektasi) yang ditulis dengan $E(X) = \langle X \rangle = (p-q)\delta$, sedangkan besar perpindahan partikel (total jarak) dinyatakan dalam nilai variansi yang ditulis dengan $V(X) = 4pq\delta^2$. Nilai tersebut berlaku ketika partikel bergeser pada setiap langkah. Pada kasus banyak langkah *(multistep)* maka berlaku $E(X_n) = \langle X_n \rangle = (p-q)\delta n$ dan $V(X) = 4pq\delta^2 n$. Banyaknya langkah n dapat dihitung yaitu $n = \frac{t}{\tau}$ sehingga $E(X_n) = \langle X_n \rangle = (p-q)\delta \frac{t}{\tau}$ dan $V(X) = 4pq\delta^2 \frac{t}{\tau}$. Diambil δ dan τ sangat kecil infinitif mendekati nol, sehingga nilai $\frac{\delta^2}{\tau}$ memiliki nilai tertentu dan nilai $(p-q)$ mendekati suatu kelipatan δ^2.

Apabila X merupakan suatu fungsi waktu maka probabilitas untuk p dan q menjadi $p = \frac{1}{2}(a + b\delta)$ dan $q = \frac{1}{2}(a - b\delta)$ dimana a merupakan suatu fungsi yang nilainya $0 < a \leq 1$ sedangkan b merupakan konstanta yang dipilih sedemikian hingga $0 \leq p, q \leq 1$. Jadi diperoleh nilai $p + q = a$. Karena peluang partikel ini terdiri dari dua bagian, yaitu peluang bergeser ke kanan dan ke kiri serta masing-masing pergerakan partikel bersifat bebas maka penurunan rumus didekati berdasarkan teori probabilitas dengan menggunakan distribusi binomial. Fungsi distribusi probabilitas partikel di titik x pada waktu $t+\tau$ terdefinisi sebagai berikut:

$$v(x,t+\tau)=[1-p-q]v(x,t)+pv(x-\delta,t)+qv(x+\delta,t) \tag{2.2}$$

Digunakan deret Taylor untuk menguraikan setiap nilai v. Deret Taylor untuk distribusi probabilitas partikel (v) saat $t+\tau$ yaitu $v(x,t+\tau)=v(x,t)+\tau v_t(x,t)$. Deret Taylor untuk distribusi probabilitas partikel (v) pada posisi $x+\delta$ yaitu $v(x+\delta,t)=v(x,t)+\delta v_x(x,t)+\frac{1}{2}\delta^2 v_{xx}(x,t)$, sedangkan deret Taylor untuk distribusi probabilitas partikel (v) pada posisi $x-\delta$ yaitu $v(x-\delta,t)=v(x,t)-\delta v_x(x,t)+\frac{1}{2}\delta^2 v_{xx}(x,t)$. Deret Taylor terhadap variabel x dipotong sampai turunan kedua karena pada persamaan kolmogorov maju atau Fokker-Planck hanya mempertimbangkan kecepatan dan percepatan yang dinyatakan dalam turunan pertama dan kedua variabel x.

Setelah diperoleh deret Taylor pada masing-masing distribusi probabilitas partikel, maka disubstitusikan ke persamaan (2.2) diperoleh

$$v(x,t)+\tau v_t(x,t)=[1-p-q]v(x,t)+p\left[v(x,t)-\delta v_x(x,t)+\frac{1}{2}\delta^2 v_{xx}(x,t)\right]+q\left[v(x,t)+\delta v_x(x,t)+\frac{1}{2}\delta^2 v_{xx}(x,t)\right]$$

Suku-suku sejenis dikelompokkan menjadi satu

$$\tau v_t(x,t)=[-1+1-p-q+p+q]v(x,t)+[-p+q]\delta v_x(x,t)+[p+q]\frac{1}{2}\delta^2 v_{xx}(x,t)$$

τ dipindah ruas ke kanan, diperoleh

$$v_t(x,t)=[-a+a]v(x,t)-[p-q]\frac{\delta}{\tau}v_x(x,t)+[p+q]\frac{1}{2}\frac{\delta^2}{\tau}v_{xx}(x,t)$$

Diambil δ dan τ sangat kecil, dengan $(p-q)\delta = E(X)$. Karena X merupakan bentuk fungsi maka diasumsikan:

$$\lim_{\tau \to 0} [p-q] \frac{\delta}{\tau} = A(x,t)$$

Untuk $[p+q] = a$ maka

$$\lim_{\tau \to 0} a \frac{\delta^2}{\tau} = B(x,t)$$

Jadi persamaan sebelumnya menjadi:

$$v_t(x,t) = -A(x,t)v_x(x,t) + \frac{1}{2}B(x,t)v_{xx}(x,t)$$

atau dapat ditulis sebagai berikut:

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x,t) = -A(x,t)\frac{\partial}{\partial x}v(x,t) + \frac{1}{2}B(x,t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}v(x,t)$$

Persamaan inilah yang disebut persamaan nonlinier Fokker-Planck (Zauderer, 2006:10).

Orde dari PDP adalah pangkat tertinggi dari turunan parsial yang muncul pada persamaan tersebut. Jika dilihat dari persamaan (2.1), maka persamaan Fokker-Planck merupakan PDP orde satu terhadap variabel bebas t dan orde dua terhadap variabel bebas x.

Menurut Sasongko (2010), PDP diklasifikasikan berdasarkan kondisi-kondisi berikut :

1. Apabila koefisien pada persamaan adalah konstanta atau fungsi yang terdiri dari variabel bebas saja, maka persamaan tersebut disebut linier.
2. Apabila koefisien pada persamaan adalah fungsi dari variabel tak bebas dan atau merupakan turunan dengan orde yang lebih rendah daripada persamaan diferensialnya $\left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial t}\right)$, maka persamaan tersebut disebut kuasilinier.

3. Apabila koefisien pada persamaan adalah fungsi dengan orde turunan yang sama dengan orde persamaan diferensialnya $\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t}\right)$, maka persamaan tersebut disebut persamaan nonlinier.

Berdasarkan klasifikasi di atas, maka persamaan (2.1) termasuk dalam persamaan nonlinier karena koefisien pada persamaan berupa fungsi. Selain klasifikasi di atas, Zauderer (2006) juga mengklasifikasikan PDP orde dua dengan melihat nilai diskriminan D dimana $D = B^2(x,t) - 4A(x,t)C(x,t)$. Jika $D > 0$ maka PDP dikatakan bertipe hiperbolik. Jika $D = 0$ maka PDP memiliki tipe parabolik dan jika $D < 0$ maka dikatakan bertipe elliptik. Dilihat dari pernyataan tersebut, maka persamaan (2.1) memiliki tipe parabolik karena nilai $D = 0$.

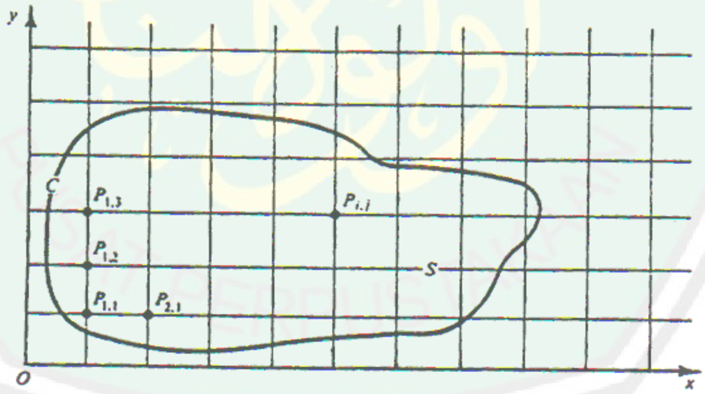
Dalam rangka melengkapi masalah pada PDP, maka diperlukan beberapa kondisi tambahan. Jumlah kondisi tambahan tersebut ditentukan oleh turunan orde tertinggi pada setiap variabel bebasnya. Dengan melihat turunan orde tertinggi masing-masing variabel bebas pada persamaan (2.1) maka diberikan satu kondisi tambahan pada t dan dua kondisi tambahan pada x. t disebut dengan variabel nilai awal sehingga membutuhkan satu kondisi awal. x disebut variabel nilai batas sehingga membutuhkan dua kondisi batas (Hamdi, dkk, 2009:2).

Kondisi batas dibagi menjadi tiga kelompok yaitu:

1. Kondisi batas yang berupa nilai dari suatu fungsi yang tidak diketahui disebut dengan kondisi Dirichlet.
2. Kondisi batas yang berupa turunan dari v disebut dengan kondisi Neumann.
3. Kondisi batas yang nilainya linier terhadap v dan juga mengandung turunan dari v disebut kondisi Robin (campuran Dirichlet dan Neumann) (Humi dan Miller, 1992:42-43).

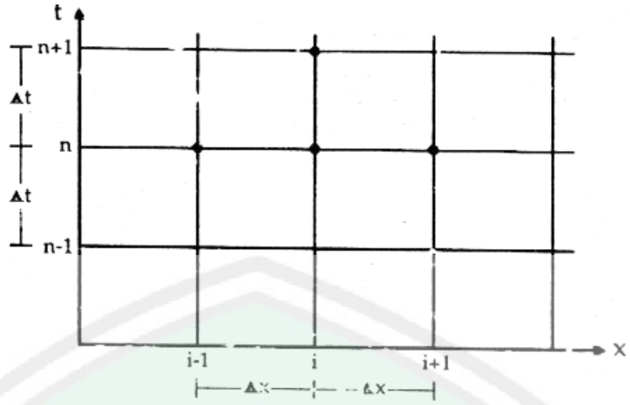
2.2 Metode Beda Hingga Persamaan Fokker-Planck

Penyelesaian persamaan diferensial parsial dengan kondisi awal dan batas dapat diselesaikan dengan metode beda hingga dengan cara membuat jaringan titik hitungan pada daerah tinjauan. Sebagai contoh penyelesaian persamaan ellips pada daerah S yang dibatasi oleh kurva C seperti tampak pada Gambar 2.1. Daerah tinjauan S dibagi menjadi sejumlah pias (titik hitungan P) dengan jarak antara pias adalah Δx dan Δy. Kondisi dimana variabel tidak bebas (v) harus memenuhi di sekeliling kurva C disebut dengan kondisi batas. Penyelesaian persamaan diferensial merupakan perkiraan dari nilai v pada titik-titik hitungan $P_{11}, P_{12}, \dots, P_{ij}, \dots$ Perkiraan dilakukan dengan mengganti turunan dari persamaan diferensial parsial dengan menggunakan perkiraan beda hingga (Triatmodjo, 2002:200).



Gambar 2.1. Penyelesaian Persamaan Diferensial Parsial

Persamaan Fokker-Planck yang mengandung variabel x dan t, perkiraan beda hingga dilakukan dengan membuat jaringan titik hitungan pada bidang x-t (Gambar 2.2), yang dibagi dalam sejumlah pias dengan interval ruang dan waktu adalah Δx dan Δt.



Gambar 2.2. Jaringan Titik Hitungan Dalam Bidang $x - t$

Turunan parsial dalam persamaan diferensial parsial pada setiap titik grid didekati dari nilai-nilai tetangga dengan menggunakan deret Taylor. Dibentuk skema beda hingga untuk turunan parsial fungsi v yang terdiri dari dua variabel bebas x dan t. Berikut merupakan deret Taylor:

$$v(x+\Delta x,t) = v(x,t) + \Delta x v_x(x,t) + \frac{\Delta x^2}{2!} v_{xx}(x,t) + \cdots$$
$$+ \frac{\Delta x^{(n-1)}}{(n-1)!} v_{x(n-1)}(x,t) + O(\Delta x^n) \quad (2.3)$$

$$v(x-\Delta x,t) = v(x,t) - \Delta x v_x(x,t) + \frac{\Delta x^2}{2!} v_{xx}(x,t) - \cdots$$
$$+ \frac{\Delta x^{(n-1)}}{(n-1)!} v_{x(n-1)}(x,t) + O(\Delta x^n) \quad (2.4)$$

$$v(x,t+\Delta t) = v(x,t) + \Delta t v_t(x_0,t) + \frac{\Delta t^2}{2!} v_{tt}(x,t) + \cdots$$
$$+ \frac{\Delta t^{(n-1)}}{(n-1)!} v_{t(n-1)}(x,t) + O(\Delta x^n) \quad (2.5)$$

$$v(x,t-\Delta t) = v(x,t) - \Delta t v_t(x_0,t) + \frac{\Delta t^2}{2!} v_{tt}(x,t) - \cdots$$
$$+ \frac{\Delta t^{(n-1)}}{(n-1)!} v_{t(n-1)}(x,t) + O(\Delta x^n) \quad (2.6)$$

dimana $O(\Delta x^n)$ merupakan galat. Untuk memperoleh turunan parsial pertama pada variabel x dengan skema beda hingga pusat, maka persamaan di atas dipotong sampai turunan kedua kemudian persamaan (2.3) dikurangi persamaan (2.4) maka akan diperoleh:

$$v_x(x_i, t_n) = \frac{v(x_i + \Delta x, t_n) - v(x_i - \Delta x, t_n)}{2\Delta x} \quad (2.7)$$

Karena Δx konstan sehingga $x_{i+1} = x_i + \Delta x$, persamaan di atas menjadi:

$$v_x(x_i, t_n) = \frac{v(x_{i+1}, t_n) - v(x_{i-1}, t_n)}{2\Delta x} \quad (2.8)$$

Apabila notasi $v(x_i, t_n)$ dituliskan sebagai v_i^n, maka berikut merupakan skema beda hingga pusat untuk turunan parsial fungsi v pada x:

$$v_x(x_i, t_n) \approx \frac{v_{i+1}^n - v_{i-1}^n}{2\Delta x} \quad (2.9)$$

Persamaan (2.9) disebut skema beda hingga pusat untuk x. Skema beda hingga untuk turunan parsial fungsi v pada t dilakukan dengan cara yang sama yaitu mengurangkan persamaan (2.5) dengan persamaan (2.6) sehingga didapatkan persamaan sebagai berikut yang merupakan turunan pertama skema beda hingga pusat untuk t:

$$v_t(x_i, t_n) \approx \frac{v_i^{n+1} - v_i^{n-1}}{2\Delta t} \quad (2.10)$$

Selanjutnya akan dibentuk skema beda hingga pusat untuk turunan kedua fungsi v pada x dengan memotong deret Taylor di atas sampai turunan ketiga kemudian menjumlahkan keduanya sehingga akan diperoleh:

$$v_{xx}(x_i, t_n) \approx \frac{v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n}{\Delta x^2} \quad (2.11)$$

Demikian juga untuk turunan parsial kedua fungsi v pada t dilakukan dengan cara yang serupa dengan langkah sebelumnya yaitu dengan menjumlahkan deret

Taylor $v(x, t + \Delta t)$ dengan $v(x, t - \Delta t)$ yang dipotong sampai turunan ketiga maka diperoleh:

$$v_{tt}(x_i, t_n) \approx \frac{v_i^{n+1} - 2v_i^n + v_i^{n-1}}{\Delta t^2} \tag{2.12}$$

Zauderer (2006) menyebutkan bahwa aproksimasi solusi pasti konvergen ke solusi analitiknya, jika konsistensi dari persamaan beda dan kestabilan dari skema yang diberikan terpenuhi. Kriteria konsistensi dengan sendirinya akan terpenuhi jika $\Delta t \to 0$ dan $\Delta x \to 0$.

2.3 Metode Garis

Metode garis merupakan salah satu dari metode numerik yang paling efisien untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial. Metode ini banyak diaplikasikan pada beberapa masalah di bidang fisika teori. Metode garis pertama kali dikenalkan oleh matematikawan asal Jerman bernama Erich Rothe pada tahun 1930 (Pregla, 2008:15).

Ide dasar metode garis adalah mengganti turunan ruang (nilai batas) pada persamaan diferensial parsial dengan pendekatan aljabar. Setelah langkah ini dilakukan, maka turunan ruang tidak lagi dinyatakan secara eksplisit dalam variabel bebas ruang. Dengan demikian, hanya ada variabel nilai awal saja artinya dengan adanya satu variabel bebas yang tersisa maka diperoleh sistem persamaan diferensial biasa (PDB) yang mendekati persamaan diferensial parsial yang asli. Kemudian selanjutnya adalah merumuskan pendekatan sistem persamaan diferensial biasa. Setelah ini dilakukan maka bisa diterapkan beberapa pendekatan untuk nilai awal persamaan diferensial biasa guna menghitung solusi numerik dari persamaan diferensial parsial (Hamdi, dkk, 2009:5).

Ilustrasi metode garis di atas dapat dipahami dengan melihat beberapa contoh berikut. Akan diselesaikan solusi persamaan berikut dengan metode garis.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{2.13}$$

Langkah pertama yaitu mengganti turunan variabel ruang dengan pendekatan beda hingga, yaitu

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} \tag{2.14}$$

dimana i adalah indeks yang menunjukkan posisi sepanjang garis x dan Δx adalah interval x sepanjang garis, yang diasumsikan konstan. Jadi nilai akhir sebelah kiri dari x adalah $i = 1$, dan nilai akhir sebelah kanan dari x adalah $i = M$ atau dapat dikatakan bahwa garis x memiliki M titik. Sehingga pendekatan dengan metode garis pada persamaan (2.13) adalah

$$\frac{du_i}{dx} = -v\frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x}, 1 \le i \le M \tag{2.15}$$

Pada persamaan (2.15) ditulis sebagai bentuk persamaan diferensial biasa karena hanya terdapat satu variabel bebas, yaitu t. Persamaan (2.15) merepresentasikan sistem yang terdiri dari M PDB. Untuk menghitung solusi PDP, maka dihitung solusi pada sistem PDB yang terbentuk. Diberikan nilai awal dan nilai batas persamaan (2.13) sebagai berikut:

$$u(x, t = 0) = f(x)$$

$$u(x = 0, t) = g(t)$$

Selama persamaan (2.15) memiliki M nilai awal, maka dibutuhkan M kondisi awal juga, sehingga nilai awal menjadi

$$u(x_i, t = 0) = f(x_i), 1 \le i \le M$$

Sedangkan penerapan pada nilai batas pada titik $i = 1$ yaitu

$$u(x_1, t) = g(t)$$

Jadi solusi dari sistem PDB adalah

$$u_1(t), u_2(t), \cdots, u_{M-1}(t), u_M(t)$$

yang merupakan pendekatan terhadap $u(x, t)$ pada titik $i = 1, 2, \cdots, M$.

Contoh lain yaitu diberikan persamaan difusi berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2.16}$$

dengan kondisi awal yang diberikan pada $t = 0$ adalah $u = 1$ dan kondisi batas $\frac{\partial u}{\partial x} = u$ pada $x = 0$ dan $\frac{\partial u}{\partial x} = -u$ pada $x = 1$ untuk setiap t. Misalkan $D = 1{,}0$ maka persamaan di atas menjadi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2.17}$$

Langkah pertama pada metode garis adalah mengganti turunan ruang dengan menggunakan metode beda hingga pusat

$$\frac{\partial^2 u_i^n}{\partial x^2} = \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{(\Delta x)^2} \tag{2.18}$$

Substitusi ke persamaan (2.17) sehingga diperoleh

$$\frac{\partial u_i^n}{\partial t} = \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{(\Delta x)^2} \tag{2.19}$$

Karena tersisa satu variabel bebas maka bentuk parsial tersebut berubah menjadi biasa

$$\frac{du_i^n}{dt} = \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{(\Delta x)^2} \tag{2.20}$$

Saat $t = 0$ atau $n = 0$ semua harga $u = 1$ atau $u(x, 0) = 1$. Pada kondisi batas pertama yaitu saat $x = 0$ atau $i = 0$ maka

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u$$

$$\frac{du_0^n}{\partial x} = \frac{u_{-1}^n - u_1^n}{2\Delta x}$$

$$u_0^n = \frac{u_{-1}^n - u_1^n}{2\Delta x}$$

$$u_{-1}^n = -2\Delta x u_0^n + u_1^n \tag{2.21}$$

Substitusikan persamaan (2.21) ke persamaan (2.20) sehingga diperoleh

$$\frac{du_0^n}{dt} = \frac{2}{(\Delta x)^2}[-(1+\Delta x)u_0^n + u_1^n] \tag{2.22}$$

Jika diambil $\Delta x = 0{,}1$ maka ketika $x = 1$ atau $i = 10$ persamaan (2.20) menjadi

$$\frac{du_{10}^n}{dt} = \frac{u_9^n - 2u_{10}^n + u_{11}^n}{(\Delta x)^2} \tag{2.23}$$

dengan kondisi batas kedua

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -u$$

$$\frac{du_{10}^n}{\partial x} = \frac{u_{11}^n - u_9^n}{2\Delta x}$$

$$u_{10}^n = \frac{u_{11}^n - u_9^n}{2\Delta x}$$

$$u_{11}^n = -2\Delta x u_{10}^n + u_9^n \tag{2.24}$$

Substitusikan persamaan (2.24) ke persamaan (2.23) diperoleh

$$\frac{du_{10}^n}{dt} = \frac{2}{(\Delta x)^2}[-(1+\Delta x)u_{10}^n + u_9^n] \tag{2.25}$$

Dari persamaan (2.25) dan (2.22) disimpulkan bahwa terdapat suatu simetri pada saat $x = \frac{1}{2}$ atau $i = 5$ maka

$$\frac{\partial u_5^n}{\partial t} = \frac{u_6^n - u_4^n}{2\Delta x}$$

$$0 = \frac{u_6^n - u_4^n}{2\Delta x}$$

$$u_6^n = u_4^n \tag{2.26}$$

Sehingga pada saat $i = 5$ persamaan (2.22) menjadi

$$\frac{du_5^n}{dt} = \frac{2}{(\Delta x)^2}[u_4^n - u_5^n] \tag{2.27}$$

Jadi sistem persamaan diferensial biasa yang terbentuk yaitu:

$$\frac{du_0^n}{dt} = \frac{2}{(\Delta x)^2}[-(1+\Delta x)u_0^n + u_1^n] \tag{2.28}$$

$$\frac{du_1^n}{dt} = \frac{u_0^n - 2u_1^n + u_2^n}{(\Delta x)^2} \tag{2.29}$$

$$\frac{du_2^n}{dt} = \frac{u_1^n - 2u_2^n + u_3^n}{(\Delta x)^2} \tag{2.30}$$

$$\frac{du_3^n}{dt} = \frac{u_2^n - 2u_3^n + u_4^n}{(\Delta x)^2} \tag{2.31}$$

$$\frac{du_4^n}{dt} = \frac{u_3^n - 2u_4^n + u_5^n}{(\Delta x)^2} \tag{2.32}$$

$$\frac{du_5^n}{dt} = \frac{2}{(\Delta x)^2}[u_4^n - u_5^n] \tag{2.33}$$

Skema ini dikenal sebagai metode garis karena solusi pada setiap jaringan titik x_i ditentukan pada sepanjang garis $x = x_i$ dengan $t > 0$ pada bidang $x - t$ dengan nilai awal yang diberikan saat $t = 0$ (Zauderer, 2006:763-764). Setelah diperoleh suatu sistem persamaan diferensial biasa, maka akan dengan mudah dicari solusi numeriknya menggunakan metode penyelesaian pada persamaan diferensial biasa seperti metode Euler, metode Runga-Kutta dan lain-lain.

2.4 Metode Runga-Kutta

Penyelesaian PDB dengan metode deret Taylor tidak praktis, karena metode tersebut membutuhkan perhitungan turunan $f(x,y)$. Di samping itu, tidak semua fungsi mudah dihitung turunannya terutama bagi fungsi yang bentuknya rumit. Semakin tinggi orde metode deret Taylor, maka semakin tinggi turunan fungsi yang harus dihitung. Selain itu untuk mendapatkan hasil yang lebih teliti diperlukan Δx atau h yang kecil, padahal penggunaan Δx yang kecil menyebabkan waktu hitungan yang lebih panjang. Oleh karena itu metode Runga-Kutta merupakan alternatif dari metode deret Taylor yang memberikan ketelitian hasil yang lebih besar dan tidak memerlukan turunan fungsi (Triatmodjo, 2002:182).

Bentuk umum metode Runga-Kutta

$$y_{r+1} = y_r + h\grave{e}(x_r, y_r, h) \tag{2.34}$$

dengan $\grave{e}(x_r, y_r, h)$ adalah fungsi pertambahan yang menggambarkan kemiringan pada interval. Fungsi pertambahan tersebut dapat ditulis dalam bentuk umum

$$\grave{e} = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \cdots + a_n k_n$$

dengan a adalah konstanta dan k adalah

$k_1 = \Delta x. f(x_r, y_r)$

$k_2 = \Delta x. f(x_r + p_1,\ y_r + q_{11} k_1)$

$k_3 = \Delta x. f(x_r + p_2,\ y_r + q_{21} k_1 + q_{22} k_2)$

$\vdots$

$k_n = \Delta x. f\left(x_n + p_{n-1},\ y_r + q_{(n-1)1} k_1 + q_{(n-1)2} k_2 + \cdots + q_{(n-1)(n-1)} k_{(n-1)}\right)$

dengan p dan q adalah konstanta. Nilai k menunjukkan hubungan berurutan, karena k_1 muncul dalam persamaan untuk menghitung k_2, k_2 juga muncul dalam persamaan untuk menghitung k_3, dan seterusnya (Chapra dan Canale, 2002:701). Hubungan yang berurutan ini membuat metode Runga-Kutta adalah efisien dalam hitungan (Triatmodjo, 2002:184).

Ada beberapa tipe metode Runga-Kutta yang tergantung pada nilai n yang digunakan. Untuk $n = 1$ disebut metode Runga-Kutta orde satu atau disebut juga metode Euler, yang diperoleh dari

$$\grave{e} = a_1 k_1 = a_1 f(x_r, y_r)$$

maka persamaan (2.34) menjadi

$$y_{r+1} = y_r + hf(x_r, y_r) \tag{2.35}$$

Pada metode Runga-Kutta, setelah nilai n ditetapkan, kemudian nilai a, p, q dicari dengan menyamakan persamaan (2.34) dengan suku-suku dari deret Taylor (Triatmodjo, 2002:184). Untuk selanjutnya bisa ditentukan metode Runga-Kutta pada orde selanjutnya.

Metode Runga-Kutta orde dua adalah

$$y_{r+1} = y_r + (a_1 k_1 + a_2 k_2)h \tag{2.36}$$

dengan

$$k_1 = f(x_r, y_r)$$

$$k_2 = f(x_r + p_1 h,\ y_r + q_{11} k_1 h)$$

Metode Runga-Kutta orde tiga adalah

$$y_{r+1} = y_r + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)h \tag{2.37}$$

dengan:

$$k_1 = f(x_r, y_r)$$

$$k_2 = f\left(x_r + \frac{1}{2}h, y_r + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = f(x_r + h, y_r - k_1 + 2k_2)$$

Metode Runga-Kutta orde empat adalah

$$y_{r+1} = y_r + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h \tag{2.38}$$

dengan

$$k_1 = f(x_r, y_r)$$

$$k_2 = f\left(x_r + \frac{1}{2}h, y_r + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(x_r + \frac{1}{2}h, y_r + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = f(x_r + h, y_r + k_3)$$

Metode Runga-Kutta orde empat banyak digunakan karena mempunyai ketelitian yang lebih tinggi (Triatmodjo, 2002:192).

Misalnya akan diselesaikan persamaan diferensial biasa berikut dengan metode Runga-Kutta orde empat

$$\frac{du_0^0}{dt} = 200(-1{,}1u_0^0 + 1)$$

Dengan metode Runga-Kutta orde empat, maka dapat dicari nilai u_0^1 yaitu:

$$u_0^1 = u_0^0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\Delta t$$

dimana

$$k_1 = f(0,1) = 200(-1{,}1(1) + 1) = 200(-0{,}1) = -20$$

$$k_2 = f(0{,}00125; 0{,}975) = 200(-1{,}1(0{,}975) + 1) = -14{,}5$$

$$k_3 = f(0{,}00125, ; 0{,}98187) = 200(-1{,}1(0{,}98187) + 1) = -16{,}012$$

$$k_4 = f(0{,}0025;\ 0{,}95997) = 200(-1{,}1(0{,}95997) + 1) = -11{,}194$$

Jadi diperoleh solusi

$$u_0^1 = u_0^0 + \tfrac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\Delta t$$

$$= 1 + \tfrac{1}{6}(-20 - 29 - 32{,}024 - 11{,}194)(0{,}0025)$$

$$= 1 - 0{,}03842 = 0{,}9615$$

2.5 Galat

Penyelesaian secara numerik suatu persamaan matematik hanya memberikan nilai perkiraan yang mendekati nilai sejati yang sesuai dengan kenyataan. Solusi numerik jelas tidak sama dengan solusi sejati (*exact*), sehingga terdapat selisih antara keduanya yang disebut galat (*error*). Terdapat tiga macam galat yaitu galat bawaan, galat pembulatan dan galat pemotongan (Urifah, 2008:57-58).

Galat bawaan adalah galat dari nilai data. Galat tersebut bisa terjadi karena kekeliruan dalam menyalin data, salah membaca skala atau galat karena kurangnya pengertian mengenai hukum-hukum fisik dari data yang diukur. Galat pembulatan terjadi karena tidak diperhitungkannya beberapa angka terakhir dari suatu bilangan. Galat ini terjadi apabila bilangan perkiraan digunakan untuk menggantikan bilangan eksak. Galat pemotongan terjadi karena tidak dilakukannya hitungan sesuai dengan prosedur matematik yang benar. Sebagai contoh suatu proses takhingga diganti dengan proses berhingga dalam matematika. Suatu fungsi dapat dipresentasikan dalam bentuk deret tak hingga, misalkan:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

Nilai eksak dari e^x diperoleh apabila semua suku deret tersebut diperhitungkan. Dalam praktek, sulit memperhitungkan semua suku pertama sampai tak hingga. Apabila hanya diperhitungkan beberapa suku pertama saja, maka hasilnya tidak sama dengan nilai eksak (Triatmodjo, 2002:2-3).

Strauss (2007) menyebutkan bahwa terdapat dua jenis galat dalam sebuah komputasi yang menggunakan aproksimasi beda hingga yaitu *truncation error* (*error* pemotongan) yaitu *error* yang terjadi karena pemotongan dari suatu deret tak hingga menjadi deret berhingga dan *roundoff error* (*error* pembulatan) yaitu *error* yang terjadi akibat pembulatan suatu bilangan sampai pada beberapa digit tertentu.

Terdapat dua jenis galat hubungan antara nilai eksak dan nilai perkiraan, yaitu:

1. Galat absolut adalah kesalahan perbedaan (selisih) antara nilai eksak dan nilai perkiraan (pendekatan pada nilai sebenarnya). Dituliskan:

$$x = \bar{x} - e$$

dimana x adalah nilai sebenarnya, $\bar{x}$ adalah pendekatan pada nilai sebenarnya dan e adalah galat. Di sini e adalah galat absolut yaitu:

$$e = \bar{x} - x$$

2. Galat relatif adalah tingkat kesalahan yang dilakukan dengan membandingkan kesalahan yang terjadi dengan nilai eksak.

$$e_R = \frac{e}{x}$$

dengan e_R = galat relatif, e = galat absolut dan $x =$ nilai eksak. Galat relatif sering diberikan dalam bentuk persen sebagai berikut:

$$e_R = \frac{e}{x} \times 100\%$$ (Urifah, 2008:59).

2.6 Kajian Penelitian Terdahulu

Metode garis merupakan suatu pendekatan untuk pencarian solusi persamaan diferensial parsial yang pada dasarnya terdiri dari dua langkah besar. Pertama mengganti variabel turunan ruang dengan pendekatan beda hingga. Kemudian setelah diperoleh sistem persamaan diferensial biasa maka langkah kedua adalah menyelesaikan persamaan diferensial biasa dengan metode penyelesaian pada persamaan diferensial biasa yang ada, seperti metode Euler, metode Runga-Kutta dan lainnya (Hamdi, dkk, 2009:5).

Metode garis sebagai salah satu metode penyelesaian PDP, awalnya hanya diterapkan pada kajian mengenai elektromagnetik saja oleh R. Pregla. Namun dalam perkembangan selanjutnya metode garis ini diterapkan pada beberapa kajian mengenai persamaan diferensial. Beberapa peneliti menerapkan metode garis untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa maupun persamaan diferensial parsial (Sadiku dan Obiozor, 1997:282).

A.Ozdes dan E. N. Aksan (2006) dalam penelitiannya membahas solusi persamaan Korteweg-de Vries dengan menggunakan metode garis. Persamaan Korteweg-de Vries merupakan persamaan diferensial parsial nonlinier orde tiga yang mempunyai bentuk umum sebagai berikut:

$$U_t + \text{å}UU_x + \text{ã}U_{xxx} = 0, \qquad a \leq x \leq b$$

dengan å dan ã adalah parameter yang bernilai positif. Nilai awal yang diberikan yaitu $U(x,0) = g(x)$ dan nilai batasnya yaitu $U(a,t) = 0;\;\; U(b,t) = 0;\;\; t > 0$.

Langkah pertama yang dilakukan yaitu mengganti turunan parsial yang bergantung pada variabel ruang, yaitu $\frac{\partial u}{\partial x}$ dan $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$ dengan metode beda hingga sehingga menghasilkan sistem persamaan diferensial biasa yang bergantung pada t. Kemudian langkah kedua menyelesaikan persamaan diferensial biasa dengan metode Euler. Hasil solusi dengan metode garis tidak hanya dibandingkan dengan solusi eksak saja tetapi juga dibandingkan dengan solusi yang diperoleh dengan metode lain seperti metode beda hingga eksponensial (EFDM), metode elemen hingga Galerkin (GFEM) dan lainnya. Dari hasil penelitian diperoleh kesimpulan bahwa metode garis melakukan perhitungan dengan waktu yang lebih ekonomis dan solusi numerik yang diperoleh lebih baik daripada menggunakan metode beda hingga biasa.

Penelitian lain dilakukan oleh M. N. O. Sadiku dan C. N. Obiozor (1997) yang memperkenalkan metode garis sebagai salah satu metode numerik untuk menyelesaiakan masalah persamaan diferensial parsial. Dalam penelitian ini, diberikan contoh penerapan metode garis pada persamaan Laplace. Bentuk umum persamaan Laplace yang digunakan adalah

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0$$

Hampir sama seperti penelitian sebelumnya, langkah pertama yang dilakukan adalah mendiskritisasi variabel x dan mengganti turunan kedua yang bergantung pada x dengan metode beda hingga. Kemudian langkah selanjutnya menyelesaikan persamaan yang dihasilkan pada langkah pertama dengan invers transformasi menggunakan bentuk matriks dan nilai eigen. Dengan mensubtitusikan kondisi batas maka akan diperoleh hasil numeriknya. Dalam penelitian ini diperoleh hasil bahwa solusi numerik dengan metode garis bisa mendekati solusi eksaknya. Selain dua penelitian tersebut, masih banyak lagi penelitian yang membahas metode garis.

2.7 Kajian Agama

Ilmu pengetahuan telah memberikan sumbangan yang berarti dalam memahami ayat-ayat al-Quran terutama yang berkaitan dengan fenomena alam semesta. Ayat-ayat tersebut hanya dapat dipahami maknanya dengan bantuan teori-teori dan penemuan-penemuan ilmiah. Dengan demikian ilmu pengetahuan adalah disiplin ilmu yang juga memberi sumbangan kepada ilmu tafsir (Mangunjaya, dkk, 2007:5).

Semua peristiwa dalam kehidupan di alam raya ini sebenarnya sudah terpola dengan rapi, tersusun dari beberapa aturan-aturan yang saling berkaitan, ada langkah-langkahnya, perhitungannya bahkan formulanya. Para ilmuwan secara umum tidak membuat suatu formula, tetapi mereka menangkap fenomena yang terjadi, kemudian meneliti dan merumuskannya dalam suatu bentuk tertentu sehingga terbentuk suatu formula baru. Salah satu contoh fenomena di alam yaitu gerakan partikel yang bergerak secara acak dan saling bertumbukan. Fenomena ini dalam ilmu fisika dapat digambarkan dalam sebuah persamaan yang disebut persamaan Fokker-Planck.

Banyak sekali fenomena alam yang dijelaskan dalam al-Quran. Diantaranya yang tersebut dalam al-Quran yaitu sebagai berikut:

لَا ٱلشَّمۡسُ يَنۢبَغِي لَهَآ أَن تُدۡرِكَ ٱلۡقَمَرَ وَلَا ٱلَّيۡلُ سَابِقُ ٱلنَّهَارِۚ وَكُلّٞ فِي فَلَكٖ يَسۡبَحُونَ ٤٠

"Tidaklah mungkin bagi matahari mendapatkan bulan dan malampun tidak dapat mendahului siang dan masing-masing beredar pada garis edarnya." (QS. Yaasiin/36: 40).

Allah menjelaskan dalam ayat ini bukti tentang kekuasaan-Nya, yaitu matahari dan bulan yang beredar pada orbitnya masing-masing dan tidak melampauinya dengan hitungan yang tepat dan tidak menyimpang dari garis edarnya. Tidaklah mungkin terjadi tabrakan antara matahari dan bulan, dan tidak pula malam mendahului siang. Semuanya berjalan sesuai dengan pengaturan dan ketetapan Allah. Dalam ayat lain, Allah juga menjelaskan fenomena langit dan bumi sebagai berikut:

خَلَقَ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلۡأَرۡضَ بِٱلۡحَقِّۖ يُكَوِّرُ ٱلَّيۡلَ عَلَى ٱلنَّهَارِ وَيُكَوِّرُ ٱلنَّهَارَ عَلَى ٱلَّيۡلِۖ وَسَخَّرَ ٱلشَّمۡسَ
وَٱلۡقَمَرَۖ كُلّٞ يَجۡرِي لِأَجَلٖ مُّسَمًّىۗ أَلَا هُوَ ٱلۡعَزِيزُ ٱلۡغَفَّٰرُ ٥

"Dia menciptakan langit dan bumi dengan (tujuan) yang benar, Dia menutupkan malam atas siang dan menutupkan siang atas malam dan menundukkan matahari

dan bulan, masing-masing berjalan menurut waktu yang ditentukan. ingatlah Dialah yang Maha Perkasa lagi Maha Pengampun." (QS. al-Zumar/39:5).

Sebagaimana penciptaan matahari dan bulan, langit dan bumi juga diciptakan dengan tujuan tertentu dimana didalamnya terdapat pergantian siang dan malam yang berjalan secara beriringan dan teratur. Kepastian dan ketentuan waktu ini merupakan kebijaksanaan Yang Maha Mulia. Hal tersebut adalah bukti atas kekuasaan Allah Yang Maha Perkasa (Al-Jazairi, 2009:170).

Dalam ayat lain Allah juga menjelaskan tentang ke-Esaan-Nya dalam mencipta dan mengatur, dimana hal itu menunjukkan bahwa hanya Dia yang berhak disembah. Ayat tersebut berbunyi:

إِنَّ رَبَّكُمُ ٱللَّهُ ٱلَّذِى خَلَقَ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضَ فِى سِتَّةِ أَيَّامٍ ثُمَّ ٱسْتَوَىٰ عَلَى ٱلْعَرْشِ ۖ يُدَبِّرُ ٱلْأَمْرَ ۖ مَا مِن شَفِيعٍ إِلَّا مِنۢ بَعْدِ إِذْنِهِۦ ۚ ذَٰلِكُمُ ٱللَّهُ رَبُّكُمْ فَٱعْبُدُوهُ ۚ أَفَلَا تَذَكَّرُونَ ﴿٣﴾

"Sesungguhnya Tuhan kamu ialah Allah yang menciptakan langit dan bumi dalam enam masa, kemudian Dia bersemayam di atas 'Arsy untuk mengatur segala urusan. Tiada seorangpun yang akan memberi syafa'at kecuali sesudah ada izin-Nya. (Dzat) yang demikian itulah Allah, Tuhan kamu, maka sembahlah Dia. Maka apakah kamu tidak mengambil pelajaran?" (QS. Yunus/10:3).

Berdasarkan beberapa ayat tersebut, diketahui bahwa alam raya beserta isinya ini tidak berjalan tanpa aturan dan tidak pula berputar secara serampangan. Melainkan semuanya mengikuti takdir (ketentuan) Allah dan perputarannya sesuai dengan hukum Allah. Allah mengatur dan menjaga alam, menciptakan undang-undang dan hukum-hukum untuk mengatur kehidupan manusia di dunia dan akhirat. Aturan tersebut dibuat agar manusia dapat menjalani kehidupan dengan teratur.

Dengan diciptakannya fenomena alam tersebut, Allah menganjurkan manusia agar senantiasa menggunakan akal pikirannya untuk memikirkan tentang penciptaan alam semesta ini, tentang keindahan dan kebesaran penciptanya serta segala sesuatu yang ditempatkan oleh Allah di dalamnya. Perenungan tersebut mendorong mereka untuk mengatakan bahwa tiadalah Allah menciptakan semua ini sia-sia tanpa ada hikmah yang bisa dijadikan pelajaran dan tanpa ada tujuan. Allah menciptakan semua ini agar senantiasa diingat dan disyukuri.

Allah memuliakan orang-orang yang pandai bersyukur dan pandai mengingat-Nya di dalam surga, tempat kemuliaan serta menghinakan orang-orang yang ingkar dalam neraka. Mereka bertawassul dengan keimanan kepada Allah melalui permohonan-permohonan yang baik dan mulia, yaitu ampunan atas dosa-dosa mereka dan mereka diwafatkan beserta orang-orang yang berbakti. Hal ini terdapat dalam surat al-Najm ayat 31 berikut:

وَلِلَّهِ مَا فِي ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَمَا فِي ٱلْأَرْضِ لِيَجْزِيَ ٱلَّذِينَ أَسَٰٓـُٔواْ بِمَا عَمِلُواْ وَيَجْزِيَ ٱلَّذِينَ أَحْسَنُواْ بِٱلْحُسْنَى ٣١

"Dan hanya kepunyaan Allah-lah apa yang ada di langit dan apa yang ada di bumi supaya Dia memberi balasan kepada orang-orang yang berbuat jahat terhadap apa yang telah mereka kerjakan dan memberi balasan kepada orang-orang yang berbuat baik dengan pahala yang lebih baik (syurga)." (QS. al-Najm/53:31).

Dalam ayat lain juga diterangkan balasan bagi orang-orang yang bertaqwa kepada Allah:

جَزَآؤُهُمْ عِندَ رَبِّهِمْ جَنَّٰتُ عَدْنٍ تَجْرِي مِن تَحْتِهَا ٱلْأَنْهَٰرُ خَٰلِدِينَ فِيهَآ أَبَدًا ۖ رَّضِيَ ٱللَّهُ عَنْهُمْ وَرَضُواْ عَنْهُ ۚ ذَٰلِكَ لِمَنْ خَشِيَ رَبَّهُۥ ٨

"Balasan mereka di sisi Tuhan mereka ialah syurga 'Adn yang mengalir di bawahnya sungai-sungai; mereka kekal di dalamnya selama-lamanya. Allah ridha terhadap mereka dan merekapun ridha kepada-Nya. yang demikian itu adalah (balasan) bagi orang yang takut kepada Tuhannya." (QS. al-Bayyinah/98:8).

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Penerapan Metode Garis pada Penyelesaian Persamaan Fokker-Planck

Metode garis merupakan salah satu metode yang digunakan untuk menyelesaikan permasalahan solusi pada persamaan diferensial parsial. Metode ini merepresentasikan bentuk persamaan diferensial parsial ke dalam bentuk sistem persamaan diferensial biasa yang ekuivalen pada bentuk persamaan diferensial parsialnya (Hamdi, dkk., 2009:5). Ide dasar metode garis terdiri dari dua langkah, pertama mengganti turunan ruang dengan menggunakan metode beda hingga sehingga diperoleh sistem persamaan diferensial biasa. Kemudian menyelesaikan sistem persamaan diferensial biasa yang sudah diperoleh dengan menggunakan metode penyelesaian pada persamaan diferensial biasa, seperti metode Euler, metode Runga-Kutta dan lain-lain.

Menurut Sadiku dan Obiozor (1997), metode ini dinamakan metode garis karena solusi ditentukan pada setiap garis $x = x_i$ dimana daerah solusi dibagi menjadi beberapa garis lurus yang sejajar dengan sumbu-y pada batas tertentu.

Berikut merupakan bentuk umum persamaan diferensial parsial nonlinier Fokker-Planck.

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x,t) = -A(x,t)\frac{\partial v}{\partial x}(x,t) + \frac{1}{2}B(x,t)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t) + f(x,t) \tag{3.1}$$

Selanjutnya akan diselesaikan solusi numerik persamaan Fokker-Planck dengan menggunakan metode garis. Adapun model persamaan yang digunakan yaitu

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x,t) - xe^{3t}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t) - \frac{\partial v}{\partial x}(x,t) = 2xe^{2t} - e^{2t} \tag{3.2}$$

dengan nilai awal yang diberikan yaitu $v(x,0) = x$, untuk $x \in (0,1)$ dan nilai batas $v(0,t) = 0$, $v(1,t) = e^{2t}$. Daerah solusi dibatasi pada $0 \leq x \leq 1$ dan $0 \leq t \leq 1$ (Hussain & Alwan, 2013:1784).

Langkah pertama yang harus dilakukan pada metode garis adalah mengganti turunan ruang pada persamaan diferensial parsial dengan menggunakan metode beda hingga pusat. Pendekatan beda hingga diperoleh dari deret Taylor dimana domainnya berupa grid. Untuk menyederhanakan penulisan, ditulis dengan notasi indeks seperti berikut:

$$v(x_i, t_n) = v_i^n$$

dimana i adalah indeks yang menunjukkan posisi di sepanjang grid x sedangkan n adalah indeks yang menunjukkan posisi di sepanjang grid t. Transformasi beda pusat untuk turunan pertama variabel ruang sebagaimana dijelaskan pada kajian pustaka adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x_i, t_n) \approx \frac{v_{i+1}^n - v_{i-1}^n}{2\Delta x}$$

Sedangkan untuk turunan kedua variabel ruang sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x_i, t_n) \approx \frac{v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

Turunan variabel waktu tidak dilakukan transformasi beda hingga. Bentuk beda hingga di atas disubtitusikan pada persamaan (3.2) sehingga diperoleh bentuk berikut:

$$\frac{\partial v_i^n}{\partial t} = x_i e^{3t_n}\left(\frac{v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n}{\Delta x^2}\right) + \frac{v_{i+1}^n - v_{i-1}^n}{2\Delta x} + 2x_i e^{2t_n} - e^{2t_n} \quad (3.3)$$

Menurut Hamdi dkk (2009), ketika turunan variabel ruang sudah diganti dengan beda hingga, maka turunan ruang tersebut tidak lagi dinyatakan secara eksplisit dalam variabel bebas ruang, sehingga tersisa variabel nilai awal saja yaitu variabel t. Dengan demikian karena tersisa satu variabel bebas saja maka diperoleh sistem persamaan diferensial biasa (PDB) yang mendekati PDP aslinya. Maka persamaan diferensial parsial di atas berubah menjadi bentuk persamaan diferensial biasa berikut:

$$\frac{dv_i^n}{dt} = x_i e^{3t_n}\left(\frac{v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n}{\Delta x^2}\right) + \frac{v_{i+1}^n - v_{i-1}^n}{2\Delta x} + 2x_i e^{2t_n} - e^{2t_n} \tag{3.4}$$

Dengan demikian, bentuk PDP (3.2) telah diubah ke dalam bentuk sistem PDB.

Jika dipilih $\Delta x = 0{,}25$ maka daerah solusi terdiri dari x_i, dengan $i = 0{,}1{,}2{,}3{,}4$ dan $\Delta t = 0{,}01$ atau $n = 0{,}1{,}2{,}\cdots{,}101$, sehingga akan diperoleh sistem persamaan diferensial biasa sebagai berikut:

$$\frac{dv_0^n}{dt} = x_0 e^{3t_n}\left(\frac{v_1^n - 2v_0^n + v_{-1}^n}{\Delta x^2}\right) + \frac{v_1^n - v_{-1}^n}{2\Delta x} + 2x_0 e^{2t_n} - e^{2t_n}$$

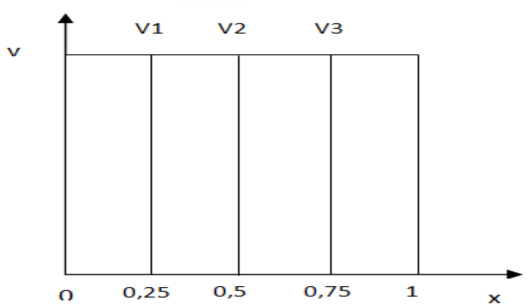
$$\frac{dv_1^n}{dt} = x_1 e^{3t_n}\left(\frac{v_2^n - 2v_1^n + v_0^n}{\Delta x^2}\right) + \frac{v_2^n - v_0^n}{2\Delta x} + 2x_1 e^{2t_n} - e^{2t_n}$$

$$\frac{dv_2^n}{dt} = x_2 e^{3t_n}\left(\frac{v_3^n - 2v_2^n + v_1^n}{\Delta x^2}\right) + \frac{v_3^n - v_1^n}{2\Delta x} + 2x_2 e^{2t_n} - e^{2t_n}$$

$$\frac{dv_3^n}{dt} = x_3 e^{3t_n}\left(\frac{v_4^n - 2v_3^n + v_2^n}{\Delta x^2}\right) + \frac{v_4^n - v_2^n}{2\Delta x} + 2x_3 e^{2t_n} - e^{2t_n}$$

$$\frac{dv_4^n}{dt} = x_4 e^{3t_n}\left(\frac{v_5^n - 2v_4^n + v_3^n}{\Delta x^2}\right) + \frac{v_5^n - v_3^n}{2\Delta x} + 2x_4 e^{2t_n} - e^{2t_n}$$

Berikut adalah gambaran diskritisasi variabel x:



Gambar 3.1 Ilustrasi Diskritisasi Variabel x

Berdasarkan kondisi awal dan kondisi batas yang diberikan maka akan dihitung nilai v_i^n di sepanjang titik x_i dan pada setiap waktu t_n. Untuk $i = 0$ atau $x = 0$ dan $i = 4$ atau $x = 1$ solusi $v(x,t)$ mengikuti nilai batas yang diberikan yaitu $v(0,t) = 0$ dan $v(1,t) = e^{2t}$. Jadi dapat dikatakan bahwa ketika nilai $x = 0$ maka diperoleh nilai $v = 0$ dan ketika nilai $x = 1$ maka diperoleh nilai $v = e^{2t}$. Berikut merupakan tabel kondisi batas dan kondisi awal:

Tabel 3.1. Kondisi Awal dan Batas

	$x_0 = 0$	$x_1 = 0{,}25$	$x_2 = 0{,}5$	$x_3 = 0{,}75$	$x_4 = 1$
$t_0 = 0$	0	0,25	0,5	0,75	1
$t_1 = 0{,}01$	0	-	-	-	1,0202
$t_2 = 0{,}02$	0	-	-	-	1,0408
$t_3 = 0{,}03$	0	-	-	-	1,0618
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$t_{100} = 1$	0	-	-	-	7,3891

Langkah kedua setelah diperoleh sistem PDB adalah menyelesaikan PDB tersebut dengan metode Runga-Kutta orde empat. Bentuk umum metode Runga-Kutta orde empat yaitu:

$$v_i^{n+1} = v_i^n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

dengan

$$k_1 = \Delta t.f(t_n, v_i^n)$$

$$k_2 = \Delta t.f\left(t_n + \frac{1}{2}\Delta t, v_i^n + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_2 = \Delta t.f\left(t_n + \frac{1}{2}\Delta t, v_i^n + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = \Delta t.f(t_n + \Delta t, v_i^n + k_3)$$

Pada saat $t = 0$ atau $n = 0$ terdapat tiga persamaan diferensial biasa yaitu sebagai berikut:

Untuk $i = 1$ atau $x = 0{,}25$ bentuk PDB yaitu:

$$\frac{dv_1^0}{dt} = x_1 e^{3t_0}\left(\frac{v_2^0 - 2v_1^0 + v_0^0}{\Delta x^2}\right) + \left(\frac{v_2^0 - v_0^0}{2\Delta x}\right) + 2x_1 e^{2t_0} - e^{2t_0}$$

$$\frac{dv_1^0}{dt} = (0{,}25)e^{3t_0}\left(\frac{v_2^0 - 2v_1^0 + 0}{0{,}0625}\right) + \left(\frac{v_2^0 - 0}{0{,}5}\right) + 2(0{,}25)e^{2t_0} - e^{2t_0}$$

$$\frac{dv_1^0}{dt} = 4e^{3t_0}\left(v_2^0 - 2v_1^0\right) + \left(\frac{v_2^0}{0{,}5}\right) - 0{,}5e^{2t_0}$$

Untuk $i = 2$ atau $x = 0{,}5$ bentuk PDB yaitu:

$$\frac{dv_2^0}{dt} = x_2 e^{3t_0}\left(\frac{v_3^0 - 2v_2^0 + v_1^0}{\Delta x^2}\right) + \left(\frac{v_3^0 - v_1^0}{2\Delta x}\right) + 2x_2 e^{2t_0} - e^{2t_0}$$

$$\frac{dv_2^0}{dt} = (0{,}5)e^{3t_0}\left(\frac{v_3^0 - 2v_2^0 + v_1^0}{0{,}0625}\right) + \left(\frac{v_3^0 - v_1^0}{0{,}5}\right) + 2(0{,}5)e^{2t_0} - e^{2t_0}$$

$$\frac{dv_2^0}{dt} = 8e^{3t_0}\left(v_3^0 - 2v_2^0 + v_1^0\right) + \left(\frac{v_3^0 - v_1^0}{0{,}5}\right)$$

Untuk $i = 3$ atau $x = 0{,}75$ bentuk PDB yaitu:

$$\frac{dv_3^0}{dt} = x_3 e^{3t_0}\left(\frac{v_4^0 - 2v_3^0 + v_2^0}{\Delta x^2}\right) + \frac{v_4^0 - v_2^0}{2\Delta x} + 2x_3 e^{2t_0} - e^{2t_0}$$

$$\frac{dv_3^0}{dt} = (0{,}75)e^{3t_0}\left(\frac{v_4^0 - 2v_3^0 + v_2^0}{0{,}0625}\right) + \left(\frac{v_4^0 - v_2^0}{0{,}5}\right) + 2(0{,}75)e^{2t_0} - e^{2t_0}$$

$$\frac{dv_3^0}{dt} = 12e^{3t_0}\left(e^{2t} - 2v_3^0 + v_2^0\right) + \left(\frac{e^{2t_0} - v_2^0}{0{,}5}\right) + 0{,}5e^{2t_0}$$

Dengan menggunakan metode Runga-Kutta orde empat, dapat diperoleh nilai v_i^{n+1}

$$v_1^1 = v_1^0 + \frac{1}{6}(k_{11} + 2k_{21} + 2k_{31} + k_{41})$$

$$v_2^1 = v_2^0 + \frac{1}{6}(k_{12} + 2k_{22} + 2k_{32} + k_{42})$$

$$v_3^1 = v_3^0 + \frac{1}{6}(k_{13} + 2k_{23} + 2k_{33} + k_{43})$$

Langkah awal yang harus dilakukan dengan metode Runga-Kutta adalah mencari masing-masing nilai k

$$k_{11} = \Delta t. f(0; 0{,}25)$$

$$= (0{,}01)\left(4e^{3(0)}\big(0{,}5 - 2(0{,}25)\big) + \left(\frac{0{,}5}{0{,}5}\right) - 0{,}5e^{2(0)}\right)$$

$$= 0{,}005$$

$$k_{12} = \Delta t. f(0; 0{,}5)$$

$$= (0{,}01)\left(8e^{3(0)}(0{,}75 - 2(0{,}5) + 0{,}25) + \left(\frac{0{,}75 - 0{,}25}{0{,}5}\right)\right)$$

$$= 0{,}01$$

$$k_{13} = \Delta t. f(0; 0{,}75)$$

$$= (0{,}01)\left(12e^{3(0)}\big(e^{2(0)} - 2(0{,}75) + 0{,}5\big) + \left(\frac{e^{2(0)} - 0{,}5}{0{,}5}\right)\right)$$

$$= 0{,}015$$

$$k_{21} = \Delta t. f(0{,}005; 0{,}2525)$$

$$= (0{,}01)\left(4e^{3(0{,}005)}\big(0{,}5 - 2(0{,}2525)\big) + \left(\frac{0{,}5}{0{,}5}\right) - 0{,}5e^{2(0{,}005)}\right)$$

$$= 0{,}0049$$

$$k_{22} = \Delta t. f(0{,}005; 0{,}505)$$

$$= (0{,}01)\left(8e^{3(0{,}005)}(0{,}75 - 2(0{,}505) + 0{,}25) + \left(\frac{0{,}75 - 0{,}25}{0{,}5}\right)\right)$$

$$= 0{,}0092$$

$$k_{23} = \Delta t. f(0{,}005; 0{,}7575)$$

$$= (0{,}01)\left(12e^{3(0{,}005)}\big(e^{2(0{,}005)} - 2(0{,}7575) + 0{,}5\big) + \frac{e^{2(0{,}005)} - 0{,}5}{0{,}5}\right)$$

$$= 0{,}0132$$

$$k_{31} = \Delta t. f(0{,}005; 0{,}2523)$$

$$= (0{,}01)\left(4e^{3(0{,}005)}\big(0{,}5 - 2(0{,}2523)\big) + \frac{0{,}5}{0{,}5} - 0{,}5e^{2(0{,}005)}\right)$$

$$= 0{,}00476$$

$$k_{32} = \Delta t. f(0{,}005; 0{,}504)$$

$$= (0{,}01)\left(8e^{3(0{,}005)}(0{,}75 - 2(0{,}504) + 0{,}25) + \left(\frac{0{,}75 - 0{,}25}{0{,}5}\right)\right)$$

$$= 0{,}0094$$

$$k_{33} = \Delta t. f(0{,}005; 0{,}7566)$$

$$= (0{,}01)\left(12e^{3(0{,}005)}\big(e^{2(0{,}005)} - 2(0{,}7566) + 0{,}5\big) + \frac{e^{2(0{,}005)} - 0{,}5}{0{,}5}\right)$$

$$= 0{,}0134$$

$$k_{41} = \Delta t. f(0{,}01; 0{,}2547)$$

$$= (0{,}01)\left(4e^{3(0{,}01)}\big(0{,}5 - 2(0{,}2547)\big) + \frac{0{,}5}{0{,}5} - 0{,}5e^{2(0{,}01)}\right)$$

$$= 0{,}0045$$

$$k_{42} = \Delta t. f(0{,}01; 0{,}5093)$$

$$= (0{,}01)\left(8e^{3(0{,}01)}(0{,}75 - 2(0{,}5093) + 0{,}25) + \left(\frac{0{,}75 - 0{,}25}{0{,}5}\right)\right)$$

$$= 0{,}0085$$

$$k_{43} = \Delta t. f(0{,}01; 0{,}7634)$$

$$= (0{,}01)\left(12e^{3(0{,}01)}\big(e^{2(0{,}01)} - 2(0{,}7634) + 0{,}5\big) + \frac{e^{2(0{,}01)} - 0{,}5}{0{,}5}\right)$$

$$= 0{,}0117$$

Setelah diperoleh semua nilai k, selanjutnya disubtitusikan ke rumus awal:

$$v_1^1 = v_1^0 + \frac{1}{6}(k_{11} + 2k_{21} + 2k_{31} + k_{41})$$

$$= 0{,}25 + \frac{1}{6}(0{,}005 + 0{,}0094 + 0{,}0095 + 0{,}0045)$$

$$= 0{,}2549$$

$$v_2^1 = v_2^0 + \frac{1}{6}(k_{12} + 2k_{22} + 2k_{32} + k_{42})$$

$$= 0{,}5 + \frac{1}{6}(0{,}01 + 0{,}0184 + 0{,}0188 + 0{,}0085)$$

$$= 0{,}5100$$

$$v_3^1 = v_3^0 + \frac{1}{6}(k_{13} + 2k_{23} + 2k_{33} + k_{43})$$

$$= 0{,}75 + \frac{1}{6}(0{,}015 + 0{,}0264 + 0{,}0268 + 0{,}0117)$$

$$= 0{,}7651$$

Jadi pada saat $t = 0{,}01$ diperoleh nilai $v_1^1 = 0{,}2550$, nilai $v_2^1 = 0{,}5093$ dan $v_3^1 = 0{,}7634$. Langkah di atas kemudian diulang sampai iterasi ke-101 yaitu ketika $t = 1$ atau $n = 100$. Untuk mempermudah perhitungan digunakan bantuan program matlab sebagaimana terlampir pada lampiran 2. Hasil yang diperoleh ketika $t = 1$ yaitu $v_1^{100} = 1{,}8091$, $v_2^{100} = 3{,}9021$ dan $v_3^{100} = 5{,}1894$. Hasil perhitungan solusi metode garis digambarkan dalam tabel berikut. Hasil penyelesaian selengkapnya dapat dilihat di lampiran 4.

Tabel 3.2 Solusi Persamaan Fokker-Planck (3.2) dengan Metode Garis

Iterasi	t	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
1	0	0	0,25	0,5	0,75	1
2	0,01	0	0,2549	0,5100	0,7651	1,0202
3	0,02	0	0,2600	0,5202	0,7804	1,0408
4	0,03	0	0,2652	0,5306	0,7961	1,0618
5	0,04	0	0,2704	0,5412	0,8121	1,0833
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
101	1	0	1,8091	3,9021	5,1894	7,3891

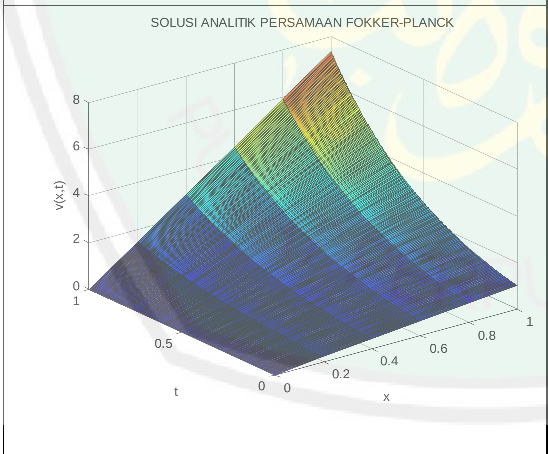
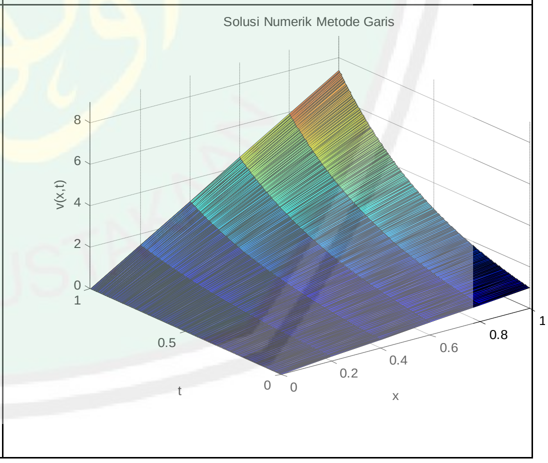
3.2 Perbandingan Solusi Analitik dan Numerik Metode Garis pada Persamaan Fokker-Planck

Metode garis dikatakan sebagai metode beda hingga khusus karena metode ini dianggap lebih efektif dan efisien dalam perhitungannya sehingga tidak memerlukan waktu yang lama untuk menentukan penyelesaiannya. Menurut Eman Ali Hussain dan Zainab Mohammed Alwan (2013), solusi eksak (analitik) persamaan Fokker-Planck (3.2) adalah sebagai berikut:

$$v(x,t) = xe^{2t}$$

Bertujuan untuk menunjukkan bahwa solusi dengan metode garis adalah mendekati solusi analitik maka digambarkan perbandingan gambar antara solusi analitik dan solusi numerik dengan metode garis persamaan Fokker-Planck (3.2) dalam tabel berikut:

Tabel 3.3. Perbandingan Gambar Solusi Analitik dan Solusi Numerik dengan Metode Garis

Solusi Analitik	Solusi Numerik dengan Metode Garis
	

Sebagaimana dijelaskan pada kajian pustaka bahwa penyelesaian secara numerik hanya menghasilkan nilai yang mendekati pada solusi analitiknya. Sehingga penyelesaian secara numerik pasti menghasilkan *error*. Bertujuan untuk mengetahui besarnya *error* metode garis terhadap solusi eksaknya, dapat dilakukan dengan menghitung selisih antara nilai eksak dan nilai pendekatan dengan metode garis. Dengan memasukkan nilai x dan t maka akan diperoleh nilai eksaknya sebagaimana perhitungan berikut:

Ketika nilai $x = 0{,}25$ dan $t = 0{,}01$ maka

$$v(0{,}25; 0{,}01) = (0{,}25)e^{2(0{,}01)}$$

$$v(0{,}25; 0{,}01) = (0{,}25)(1{,}0202)$$

$$v(0{,}25; 0{,}01) = 0{,}2551$$

Ketika nilai $x = 0{,}25$ dan $t = 0{,}02$ maka

$$v(0{,}25; 0{,}02) = (0{,}25)e^{2(0{,}02)}$$

$$v(0{,}25; 0{,}02) = (0{,}25)(1{,}0408)$$

$$v(0{,}25; 0{,}02) = 0{,}2602$$

Ketika nilai $x = 0{,}5$ dan $t = 0{,}01$ maka

$$v(0{,}5; 0{,}01) = (0{,}5)e^{2(0{,}01)}$$

$$v(0{,}5; 0{,}01) = (0{,}5)(1{,}0202)$$

$$v(0{,}5; 0{,}01) = 0{,}5101$$

Ketika nilai $x = 0{,}5$ dan $t = 0{,}02$ maka

$$v(0{,}5; 0{,}02) = (0{,}5)e^{2(0{,}02)}$$

$$v(0{,}5; 0{,}02) = (0{,}5)(1{,}0408)$$

$$v(0{,}5; 0{,}02) = 0{,}5204$$

Demikian seterusnya untuk nilai x dan t tertentu. Untuk hasil selengkapnya digunakan bantuan program MATLAB sebagaimana terlampir pada lampiran 5.

Setelah diperoleh nilai eksaknya maka *error* dicari dengan menghitung selisih antara nilai eksak dan nilai perkiraan yang telah diperoleh pada subbab sebelumnya. Besarnya *error* digambarkan pada tabel berikut.

Tabel 3.4. Perbandingan Solusi Eksak dan Solusi Numerik dengan Metode Garis

x	t	**Solusi Numerik** $v(x,t)$	**Solusi Eksak** $v(x,t)$	**Nilai *error***
0,25	0,01	0,2549	0,2551	0,0002
0,25	0,02	0,2600	0,2602	0,0002
0,25	0,03	0,2652	0,2655	0,0003
0,25	0,04	0,2704	0,2708	0,0004
0,25	0,05	0,2758	0,2763	0,0005
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0,25	1	1,8091	1,8473	0,0382
0,5	0,01	0,5100	0,5101	0,0001
0,5	0,02	0,5202	0,5204	0,0002
0,5	0,03	0,5306	0,5309	0,0003
0,5	0,04	0,5412	0,5416	0,0003
0,5	0,05	0,5521	0,5526	0,0005
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0,5	1	3,9021	3,6945	0,2076
0,75	0,01	0,7651	0,7652	0,0001
0,75	0,02	0,7804	0,7806	0,0002
0,75	0,03	0,7961	0,7964	0,0003
0,75	0,04	0,8121	0,8125	0,0004
0,75	0,05	0,8285	0,8289	0,0004
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0,75	1	5,1894	5,5418	0,3524

Bertujuan untuk mengetahui *error* pemotongan yang dihasilkan oleh persamaan Fokker-Planck, dilakukan diskritisasi dengan metode beda hingga pusat, sehingga diperoleh skema sebagai berikut:

$$\frac{v_i^{n+1}-v_i^{n-1}}{2\Delta t}=-A\left(\frac{v_{i+1}^n-2v_i^n+v_{i-1}^n}{\Delta x^2}\right)+\frac{1}{2}B\left(\frac{v_{i+1}^n-v_{i-1}^n}{2\Delta x}\right)+f(x,t)$$

Atau dapat ditulis:

$$\frac{v_i^{n+1}-v_i^{n-1}}{2\Delta t}+A\left(\frac{v_{i+1}^n-2v_i^n+v_{i-1}^n}{\Delta x^2}\right)-\frac{1}{2}B\left(\frac{v_{i+1}^n-v_{i-1}^n}{2\Delta x}\right)=f(x,t) \qquad (3.4)$$

Konsistensi dapat dicari dengan menggunakan ekspansi deret Taylor yang disubstitusikan ke dalam persamaan (3.4). Berikut merupakan ekspansi deret Taylor yang digunakan dalam persamaan (3.4).

$$v_i^{n\pm1} = v_i^n \pm \Delta t\, v_t|_i^n + \frac{1}{2}\Delta t^2\, v_{tt}|_i^n \pm \frac{1}{6}\Delta t^3\, v_{ttt}|_i^n + \cdots$$

$$v_{i\pm1}^n = v_i^n \pm \Delta x\, v_x|_i^n + \frac{1}{2}\Delta x^2\, v_{xx}|_i^n \pm \frac{1}{6}\Delta x^3\, v_{xxx}|_i^n + \cdots$$

Selanjutnya deret Taylor tersebut disubstitusikan ke dalam persamaan (3.4) yang sebelumnya diuraikan satu-persatu sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
v_i^{n+1} - v_i^{n-1} &= \Big(v_i^n + \Delta t\, v_t\Big|_i^n + \tfrac{1}{2}\Delta t^2\, v_{tt}\Big|_i^n + \tfrac{1}{6}\Delta t^3\, v_{ttt}\Big|_i^n + \tfrac{1}{24}\Delta t^4\, v_{tttt}\Big|_i^n + \\
&\quad \tfrac{1}{120}\Delta t^5\, v_{ttttt}|_i^n \cdots\Big) - \Big(v_i^n - \Delta t\, v_t\Big|_i^n + \tfrac{1}{2}\Delta t^2\, v_{tt}\Big|_i^n - \tfrac{1}{6}\Delta t^3\, v_{ttt}\Big|_i^n + \\
&\quad \tfrac{1}{24}\Delta t^4\, v_{tttt}\Big|_i^n - \tfrac{1}{120}\Delta t^5\, v_{ttttt}|_i^n + \cdots\Big) \\
&= v_i^n + \Delta t\, v_t\Big|_i^n + \tfrac{1}{2}\Delta t^2\, v_{tt}\Big|_i^n + \tfrac{1}{6}\Delta t^3\, v_{ttt}\Big|_i^n + \tfrac{1}{24}\Delta t^4\, v_{tttt}\Big|_i^n + \\
&\quad \tfrac{1}{120}\Delta t^5\, v_{ttttt}|_i^n \cdots - v_i^n + \Delta t\, v_t\Big|_i^n - \tfrac{1}{2}\Delta t^2\, v_{tt}\Big|_i^n + \tfrac{1}{6}\Delta t^3\, v_{ttt}\Big|_i^n - \\
&\quad \tfrac{1}{24}\Delta t^4\, v_{tttt}\Big|_i^n + \tfrac{1}{120}\Delta t^5\, v_{ttttt}|_i^n + \cdots \\
&= 2\Delta t\, v_t\Big|_i^n + \frac{1}{3}\Delta t^3\, v_{ttt}\Big|_i^n + \frac{1}{60}\Delta t^5\, v_{ttttt}|_i^n + \cdots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{v_i^{n+1} - v_i^{n-1}}{2\Delta t} &= \frac{2\Delta t\, v_t\Big|_i^n + \tfrac{1}{3}\Delta t^3\, v_{ttt}\Big|_i^n + \tfrac{1}{60}\Delta t^5\, v_{ttttt}|_i^n + \cdots}{2\Delta t} \\
&= v_t\Big|_i^n + \frac{1}{6}\Delta t^2\, v_{ttt}\Big|_i^n + \frac{1}{120}\Delta t^4\, v_{ttttt}|_i^n + \cdots
\end{aligned} \qquad (3.5)$$

$$\begin{aligned}
v_{i+1}^n - v_{i-1}^n &= \Big(v_i^n + \Delta x\, v_x\Big|_i^n + \tfrac{1}{2}\Delta x^2\, v_{xx}\Big|_i^n + \tfrac{1}{6}\Delta x^3\, v_{xxx}\Big|_i^n + \tfrac{1}{24}\Delta x^4\, v_{xxxx}\Big|_i^n + \\
&\quad \tfrac{1}{120}\Delta x^5\, v_{xxxxx}|_i^n + \cdots\Big) - \Big(v_i^n - \Delta x\, v_x\Big|_i^n + \tfrac{1}{2}\Delta x^2\, v_{xx}\Big|_i^n - \\
&\quad \tfrac{1}{6}\Delta x^3\, v_{xxx}\Big|_i^n + \tfrac{1}{24}\Delta x^4\, v_{xxxx}\Big|_i^n - \tfrac{1}{120}\Delta x^5\, v_{xxxxx}|_i^n + \cdots\Big)
\end{aligned}$$

$$= v_i^n + \Delta x\, v_x\Big|_i^n + \frac{1}{2}\Delta x^2\, v_{xx}\Big|_i^n + \frac{1}{6}\Delta x^3\, v_{xxx}\Big|_i^n + \frac{1}{24}\Delta x^4\, v_{xxxx}\Big|_i^n + \frac{1}{120}\Delta x^5\, v_{xxxxx}\Big|_i^n + \cdots - v_i^n + \Delta x\, v_x\Big|_i^n - \frac{1}{2}\Delta x^2\, v_{xx}\Big|_i^n + \frac{1}{6}\Delta x^3\, v_{xxx}\Big|_i^n - \frac{1}{24}\Delta x^4\, v_{xxxx}\Big|_i^n + \frac{1}{120}\Delta x^5\, v_{xxxxx}\Big|_i^n - \cdots$$

$$= 2\Delta x\, v_x\Big|_i^n + \frac{1}{3}\Delta x^3\, v_{xxx}\Big|_i^n + \frac{1}{60}\Delta x^5\, v_{xxxxx}\Big|_i^n + \cdots$$

$$\frac{v_{i+1}^n - v_{i-1}^n}{2\Delta x} = \frac{2\Delta x\, v_x\Big|_i^n + \frac{1}{3}\Delta x^3\, v_{xxx}\Big|_i^n + \frac{1}{60}\Delta x^5\, v_{xxxxx}\Big|_i^n + \cdots}{2\Delta x}$$

$$= v_x\Big|_i^n + \frac{1}{6}\Delta x^2\, v_{xxx}\Big|_i^n + \frac{1}{120}\Delta x^4\, v_{xxxxx}\Big|_i^n + \cdots \tag{3.6}$$

$$v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n = \left(v_i^n + \Delta x\, v_x\Big|_i^n + \frac{1}{2}\Delta x^2\, v_{xx}\Big|_i^n + \frac{1}{6}\Delta x^3\, v_{xxx}\Big|_i^n + \frac{1}{24}\Delta x^4\, v_{xxxx} + \frac{1}{120}\Delta x^5\, v_{xxxxx}\Big|_i^n + \cdots\right) - 2v_i^n + \left(v_i^n - \Delta x\, v_x\Big|_i^n + \frac{1}{2}\Delta x^2\, v_{xx}\Big|_i^n - \frac{1}{6}\Delta x^3\, v_{xxx}\Big|_i^n + \frac{1}{24}\Delta x^4\, v_{xxxx}\Big|_i^n - \frac{1}{120}\Delta x^5\, v_{xxxxx}\Big|_i^n + \cdots\right)$$

$$= v_i^n + \Delta x\, v_x\Big|_i^n + \frac{1}{2}\Delta x^2\, v_{xx}\Big|_i^n + \frac{1}{6}\Delta x^3\, v_{xxx}\Big|_i^n + \frac{1}{24}\Delta x^4\, v_{xxxx}\Big|_i^n + \frac{1}{120}\Delta x^5\, v_{xxxxx}\Big|_i^n + \cdots - 2v_i^n + v_i^n - \Delta x\, v_x\Big|_i^n + \frac{1}{2}\Delta x^2\, v_{xx}\Big|_i^n - \frac{1}{6}\Delta x^3\, v_{xxx}\Big|_i^n + \frac{1}{24}\Delta x^4\, v_{xxxx}\Big|_i^n - \frac{1}{120}\Delta x^5\, v_{xxxxx}\Big|_i^n + \cdots$$

$$= \Delta x^2\, v_{xx}\Big|_i^n + \frac{1}{12}\Delta x^4\, v_{xxxx}\Big|_i^n + \cdots$$

$$\frac{v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n}{\Delta x^2} = \frac{\Delta x^2\, v_{xx}\Big|_i^n + \frac{1}{12}\Delta x^4\, v_{xxxx}\Big|_i^n + \cdots}{\Delta x^2}$$

$$= v_{xx}\Big|_i^n + \frac{1}{12}\Delta x^2\, v_{xxxx}\Big|_i^n + \cdots \tag{3.7}$$

Selanjutnya persamaan (3.5), (3.6) dan (3.7) disubstitusikan ke dalam persamaan (3.4) sehingga diperoleh

$$\left(v_t \Big|_i^n + \frac{1}{6}\Delta t^2 \, v_{ttt} \Big|_i^n + \frac{1}{120}\Delta t^4 \, v_{ttttt} \Big|_i^n + \cdots \right) + A \left(v_x \Big|_i^n + \frac{1}{6}\Delta x^2 \, v_{xxx} \Big|_i^n + \frac{1}{120}\Delta x^4 \, v_{xxxxx} \Big|_i^n + \cdots \right) - \frac{1}{2} B \left(v_{xx} \Big|_i^n + \frac{1}{12}\Delta x^2 \, v_{xxxx} \Big|_i^n + \cdots \right) = f(x,t)$$

Atau dapat ditulis

$$v_t \Big|_i^n + \frac{1}{6}\Delta t^2 \, v_{ttt} \Big|_i^n + \frac{1}{120}\Delta t^4 \, v_{ttttt} \Big|_i^n + \cdots + A \, v_x \Big|_i^n + \frac{A}{6}\Delta x^2 \, v_{xxx} \Big|_i^n + \frac{A}{120}\Delta x^4 \, v_{xxxxx} \Big|_i^n + \cdots - \frac{B}{2} \, v_{xx} \Big|_i^n - \frac{B}{24}\Delta x^2 \, v_{xxxx} \Big|_i^n - \cdots = f(x,t)$$

Kemudian dikelompokkan suku-suku yang sejenis, sehingga diperoleh

$$\begin{gathered} \left(v_t + A\, v_x - \frac{B}{2}\, v_{xx} \right) \Big|_i^n + \frac{1}{6}\Delta t^2 \, v_{ttt} \Big|_i^n + \Delta x^2 \left(\frac{A}{6}\, v_{xxx} - \frac{B}{24}\, v_{xxxx} \right) \Big|_i^n \\ + \frac{1}{120}\Delta t^4 \, v_{ttttt} \Big|_i^n + \Delta x^4 \left(\frac{A}{120}\, v_{xxxxx} - \cdots \right) \Big|_i^n = f(x,t) \end{gathered} \tag{3.8}$$

Dari persamaan (3.8) dapat diketahui bahwa *error* pemotongan yang dihasilkan mempunyai orde dua yaitu $O(\Delta t^2, \Delta x^2)$. Persamaan (3.8) dikatakan konsisten jika

$$\lim_{(\Delta t, \Delta x) \to 0} \frac{1}{6}\Delta t^2 \, v_{ttt} \Big|_i^n + \Delta x^2 \left(\frac{A}{6}\, v_{xxx} - \frac{B}{24}\, v_{xxxx} \right) \Big|_i^n = 0$$

Jika Δt dan Δx sangat kecil maka jumlah dari limit tersebut akan semakin kecil, karena berapapun nilai v_{ttt}, v_{xxx}, v_{xxxx} jika dikalikan dengan nilai dari Δt dan Δx akan ikut mengecil. *Error* pemotongan yang dihasilkan akan menuju nol untuk $\Delta t \to 0$ dan $\Delta x \to 0$.

3.3 Interpretasi Hasil

Persamaan Fokker-Planck merupakan persamaan diferensial parsial yang memiliki orde satu terhadap variabel t dan orde dua terhadap variabel x. Dalam penelitian ini penyelesaian persamaan Fokker-Planck diselesaikan dengan menggunakan metode garis. Berdasarkan teori pada Bab II dikatakan bahwa metode ini menghasilkan solusi numerik yang lebih akurat dibandingkan metode beda hingga biasa serta waktu perhitungan yang dibutuhkan lebih efisien. Sehingga digunakan metode garis untuk menyelesaikan persamaan Fokker-Planck.

Penyelesaian dengan metode garis terdiri dari dua tahap, yaitu mengganti turunan variabel ruang dengan metode beda hingga sehingga diperoleh sistem PDB yang mendekati bentuk PDP asli, kemudian langkah kedua yaitu menyelesaikan sistem PDB dengan metode penyelesaian PDB. Bentuk metode beda hingga yang digunakan yaitu beda hingga pusat karena titik-titik yang dihitung dipengaruhi oleh titik-titik disekitarnya sehingga beda hingga pusat dianggap lebih baik daripada beda hingga maju dan mundur. Kemudian penyelesaian PDB menggunakan metode Runga-Kutta orde empat karena metode ini mempunyai ketelitian yang lebih tinggi (Triatmodjo, 2002:192).

Persamaan Fokker-Planck yang diselesaikan dalam penelitian ini yaitu persamaan (3.2) yang diambil dari jurnal karangan Eman Ali Hussain dan Zainab Mohammed Alwen (2013) dengan kondisi awal dan kondisi batas yang diberikan sebagaimana tersebut pada pembahasan di atas.

Langkah pertama yaitu mengganti turunan variabel ruang dengan metode beda hingga pusat. Pendekatan beda hingga pusat diperoleh dari deret Taylor sebagaimana yang dijelaskan pada Bab II. Setelah ini dilakukan maka diperoleh sistem PDB yang mendekati bentuk PDP aslinya. Karena daerah x dibatasi antara 0 sampai 1 maka dipilih $\Delta x = 0{,}25$ sehingga diperoleh sistem PDB yang terdiri dari lima persamaan.

Setelah diperoleh bentuk PDB maka langkah kedua yaitu menyelesaikan masing-masing PDB dengan metode Runga-Kutta orde empat. Berdasarkan nilai awal dan nilai batas yang telah diberikan, digambarkan dalam Tabel 3.1 yaitu $v(x,0) = x$, untuk $x \in (0,1)$ dan nilai batas $v(0,t) = 0$, $v(1,t) = e^{2t}$. Jadi tersisa tiga persamaan yang harus diselesaikan dengan metode Runga-Kutta orde empat yaitu v_1^n, v_2^n dan v_3^n. Solusi dihitung pada setiap waktu t_n di sepanjang titik x_i.

Dipilih $\Delta t = 0{,}01$ maka iterasi berjalan dari $n = 0,1,2,\cdots,100$. Untuk menyelesaikan PDB dengan metode Runga-Kutta orde empat, maka langkah awal adalah menentukan nilai k_1, k_2, k_3, k_4. Kemudian baru dihitung nilai v_i^{n+1} dengan formula yang ada pada metode Runga-Kutta orde empat. Iterasi dilakukan terus menerus sampai iterasi ke-101. Untuk mempermudah perhitungan yang membutuhkan banyak iterasi maka digunakan bantuan program MATLAB sebagaimana terlampir pada Lampiran 2. Hasil yang diperoleh digambarkan pada Tabel 3.2.

Persamaan (3.2) mempunyai solusi analitik yaitu $v(x,t) = xe^{2t}$. Sebagimana dijelaskan pada Bab II bahwa penyelesaian secara numerik suatu persamaan diferensial hanya memberikan nilai perkiraan yang mendekati nilai eksak dari penyelesaian analitik persamaan tersebut. Sehingga dalam penyelesaian numerik tersebut terdapat galat atau kesalahan terhadap nilai eksaknya. Nilai eksak adalah besarnya nilai solusi secara analitik sedangkan nilai perkiraan adalah besarnya nilai solusi yang dicari dengan metode garis.

Bertujuan untuk mengetahui perbandingan solusi analitik dan solusi metode garis, maka keduanya digambarkan dalam bentuk plot masing-masing dalam Tabel 3.3 di atas. Hasil tersebut menunjukkan bahwa solusi analitik dan solusi metode garis pada persamaan (3.2) hampir sama atau dapat dikatakan bahwa solusi metode garis mendekati solusi analitiknya.

Besarnya nilai *error* yang dihasilkan solusi metode garis terhadap solusi analitik, dilakukan dengan cara menghitung selisih antara nilai perkiraan dengan nilai eksaknya. Hasil perhitungan *error*nya digambarkan pada Tabel 3.4. Hasil perhitungan menghasilkan nilai *error* yang sangat kecil menunjukkan bahwa solusi metode garis hampir mendekati solusi analitik.

Error pemotongan pada persamaan Fokker-Planck dapat dilihat dengan cara ekspansi deret Taylor pada tiap suku-sukunya sehingga dihasilkan *error* pemotongan yang mempunyai orde dua yaitu $O(\Delta t^2, \Delta x^2)$. Limit yang dihasilkan dengan nilai Δt dan Δx yang sangat kecil adalah sebesar nol, artinya solusi persamaan (3.1) mempunyai nilai galat kecil.

Berdasarkan beberapa pernyataan di atas, diperoleh kesimpulan bahwa solusi persamaan Fokker-Planck dengan metode garis merupakan solusi numerik yang mendekati nilai eksaknya, atau bisa dikatakan bahwa metode garis merupakan metode yang baik untuk menyelesaikan permasalahan solusi numerik pada persamaan Fokker-Planck.

3.4 Tinjauan Agama terhadap Hasil Pembahasan

Perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi pada masa sekarang sangat besar kontribusinya dalam memahami ayat-ayat Allah baik ayat qauliyah (al-Quran) maupun ayat kauniyah (alam semesta). Selain sebagai pedoman hidup umat manusia, Al-Qur’an juga banyak terkandung informasi-informasi ilmiah meskipun al-Quran bukan kitab sains dan teknologi. Di dalamnya terkandung azas-azas yang sangat penting dari ilmu-ilmu dan teknologi yang dimaksud. Sehingga al-Quran mampu mendorong umat manusia untuk senantiasa belajar, mengkaji dan menganalisis alam ciptaan Allah.

Pembahasan mengenai penyelesaian persamaan Fokker-Planck dengan metode garis dimaksudkan untuk menganalisis dan mengkaji metode lain yang digunakan untuk menyelesaikan PDP agar diperoleh solusi yang mendekati solusi sebenarnya, yaitu dengan metode garis. Metode garis termasuk metode beda hingga khusus karena hampir menyerupai metode beda hingga biasa. Bedanya pada metode garis, diskritisasi hanya dilakukan pada variabel bebas yang menyatakan ruang. Selain itu perhitungan pada metode garis juga lebih efektif dibanding dengan metode beda hingga biasa. Untuk memperoleh solusi yang baik pada penyelesaian persamaan Fokker-Planck, maka perlu dikaji dan diteliti metode apa yang digunakan. Dalam agama Islam juga sangat menganjurkan umatnya untuk melakukan penelitian dan pengkajian fenomena alam yang terjadi.

Alam raya dengan segala isinya berisi aturan-aturan (Sunnatullah) yang harus dan pasti dijalani agar tercipta keharmonisan gerak, tatanan dan sistem diantara objek-objeknya. Tidaklah Allah menciptakan segala sesuatu di bumi dengan sia-sia. Segala ciptaan-Nya memikili arti dan makna tertentu serta berjalan sesuai dengan aturan dan ketetapan Allah. Sebagaimana yang telah dijelaskan pada bab sebelumnya bahwa banyak sekali fenomena di alam raya ini yang dicptakan oleh Allah agar manusia senantiasa berpikir. Matahari senantiasa terbit dari timur dan tenggelam ke barat, gunung-gunung akan senantiasa menjadi pasak dan langit menjadi atap bagi bumi. Matahari, bulan beserta bumi bergerak mengikuti garis edarnya masing-masing, angin berhembus dari tekanan tinggi ke rendah, api dengan sifat panasnya, sedangkan air sifat dinginnya dan lain sebagainya.

Firman Allah *"tidaklah mungkin matahari mendapatkan bulan"* dijelaskan dalam tafsir al-Aisar maksudnya adalah tidaklah mudah atau tidak mungkin bagi matahari untuk mendapati bulan sehingga hilanglah cahayanya, akan tetapi setiap mereka memiliki poros sehingga tidak akan saling bertemu kecuali jarang sekali pada bagian tertentu dari ufuk sehingga terjadilah gerhana bulan atau matahari. Sedangkan firman-Nya *"dan masing-masing beredar pada garis edarnya masing-masing"* maksudnya masing-masing baik matahari maupun bulan dan bintang yang beredar pada garis peredarannya maka tidaklah mungkin terjadi bercampur atau beradu sebagian dengan sebagian yang lainnya sampai berakhirnya kehidupan. Bila itu terjadi maka hancurlah alam semesta ini.

Penciptaan alam semesta merupakan bukti nyata kebesaran dan kekuasaan Allah. Hal ini telah dinyatakan dalam al-Quran sejak zaman dahulu kala. Seiring dengan perkembangan zaman, para ilmuwan banyak menemukan penemuan-penemuan penting dari alam yang pada dasarnya sesuai dengan apa yang telah dituliskan dalam al-Quran. Hal ini menunjukkan bahwa sesungguhnya al-Quran berisi dasar-dasar segala ilmu baik ilmu alam maupun lainnya.

Semakin tinggi kemampuan pengetahuan yang dimiliki manusia maka sejatinya semakin tinggi pula kebenaran-kebenaran yang tersingkap dalam al-Quran. Semakin besar manusia memahami akan sesuatu hal, maka semakin meningkatkan rasa syukur serta ketaqwaannya terhadap Sang Pencipta.

Dalam kehidupan sehari-hari, manusia juga berpegang teguh pada aturan yang telah ditetapkan Allah. Manusia yang senantiasa mengikuti aturan sesuai dengan perintah Allah maka dalam hidupnya tidak akan pernah ada kekhawatiran dan tidak pula merasakan kesedihan. Mereka akan mendapatkan pahala sebagai balasan atas kepatuhan terhadap perintah Allah. Sesuai dengan firman Allah dalam surat al-Baqarah ayat 38 berikut:

قُلْنَا ٱهْبِطُوا۟ مِنْهَا جَمِيعًا ۖ فَإِمَّا يَأْتِيَنَّكُم مِّنِّى هُدًى فَمَن تَبِعَ هُدَاىَ فَلَا خَوْفٌ عَلَيْهِمْ وَلَا هُمْ يَحْزَنُونَ ﴿٣٨﴾

"Kami berfirman: Turunlah kamu semuanya dari surga itu! kemudian jika datang petunjuk-Ku kepadamu, maka barang siapa yang mengikuti petunjuk-Ku, niscaya tidak ada kekhawatiran atas mereka, dan tidak (pula) mereka bersedih hati." (QS. al-Baqarah/02: 38).

Oleh karena itu, sebagai makhluk ciptaan-Nya yang dianugerahi akal hendaknya umat manusia senantiasa membenahi paradigma berfikir dan sikapnya dalam kehidupan di dunia ini. Hendaklah manusia bertindak sesuai dengan aturan yang ditentukan oleh *Rabb*-nya. Karena aturan yang dibuat oleh Allah itu pasti memiliki maksud dan tujuan tertentu yang pada hakikatnya untuk kesejahteraan umat manusia itu sendiri.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah diuraikan, diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Langkah yang harus dilakukan untuk menyelesaikan persamaan Fokker-Planck dengan metode garis yaitu mengganti turunan variabel ruang dengan menggunakan metode beda hingga pusat. Sehingga diperoleh suatu sistem persamaan diferensial biasa. Langkah selanjutnya yaitu menyelesaikan masing-masing persamaan diferensial biasa yang diperoleh dengan menggunakan metode yang berlaku pada persamaan diferensial biasa yaitu metode Runga-Kutta orde empat.
2. Perbandingan solusi analitik dengan solusi numerik menggunakan metode garis menghasilkan galat yang kecil dimana *error* pemotongan yang dihasilkan pada persamaan mempunyai orde dua yaitu $\mathcal{O}(\Delta t^2, \Delta x^2)$. Solusi numerik yang dihasilkan dengan metode garis mendekati nilai sebenarnya.
3. Interpretasi hasil penyelesaian persamaan Fokker-Planck dengan metode garis yaitu metode garis menghasilkan solusi yang mendekati solusi analitiknya. Sehingga metode garis ini dikatakan sebagai metode yang baik untuk menyelesaikan solusi numerik pada persamaan Fokker-Planck.
4. Kaitan antara pembahasan penyelesaian persamaan Fokker-Planck menggunakan metode garis terhadap kajian agama yaitu sebagai makhluk yang dianugerahi akal pikiran, manusia dianjurkan untuk senantiasa mengkaji

fenomena alam yang diciptakan oleh Allah agar memperoleh pemahaman baru sehingga mampu meningkatkan rasa syukur dan ketaqwaannya kepada Allah.

4.2 Saran

Penyelesaian persamaan diferensial parsial secara numerik dapat dilakukan dengan menggunakan beberapa metode antara lain metode beda hingga skema implisit, eksplisit dan *Crank-Nicolson* serta metode garis. Untuk penelitian selanjutnya disarankan menggunakan metode lain seperti *Finite Volume Method (FVM)* sebagai perbandingan terhadap metode garis.

DAFTAR PUSTAKA

Al-Jazairi, S. 2009. *Tafsir Al-Qur'an Al-Aisar Jilid 6*. Jakarta: Darus Sunnah Press.

Chapra, S.C. dan Canale, R.P. 2002. *Numerical Methods for Engineers with Software and Programing Applications. Fourth Edition.* New York: The Mc Graw-Hill Companies, Inc.

Frank, T.D. 2004. *Nonlinear Fokker-Planck Equation*. Munster: Springer Berlin.

Hamdi, S., Schiesser, W.E., dan Griffiths, G.W. 2009. *Method of Lines*. San Diego: Scholarpedia.

Humi, M. dan Miller, W.B. 1992. *Boundary Value Problems and Partial Differential Equations.* Boston: PWS-KENT.

Hussain, E.A. dan Alwan Z.M. 2013. The Finite Volume Method for Solving Systems of Non-linear Initial-Boundary Value Problems for PDE's. *Applied Mathematical Sciences.* Vol. 7, Hal 1737-1755.

Mangunjaya, F.M., Heriyanto, H., dan Gholami, R. 2007. *Menanam Sebelum Kiamat: Islam, Ekologi dan Gerakan Lingkungan Hidup.* Jakarta: Yayasan Obor Indonesia.

Ozdes, A dan Aksan, E. N. 2006. The Method of Lines Solution of the Korteweg-de Vries Equation for Small Times. *Int. J. Contemp. Math. Science*, Vol. 1, Hal 639-650.

Palupi, D.S. 2010. Persamaan Fokker-Planck dan Aplikasinya dalam Astrofisika. *Jurnal Berkala Fisika*, Vol. 13, Hal A1-A6.

Pregla, R. 2008. *Analysis of Electromagnetic Fields and Waves: The Method of Lines.* British: John Wiley & Sons, Ltd.

Sadiku, M.N.O. dan Obiozor, C.N. 1997. A Simple Introduction to the Method of Lines. *International Journal of Electrical Engineering Education*, Vol. 37, Hal 282-296.

Sasongko, S.B. 2010. *Metode Numerik dengan Scilab*. Yogyakarta: C.V ANDI OFFSET.

Strauss, A.W. 2007. *Partial Differential Equations an Introduction Second Edition.* New York: John Wiley & Sons, Ltd.

Triatmodjo, B. 2002. *Metode Numerik Dilengkapi dengan Program Komputer*. Yogyakarta: Beta Offset.

Urifah, S.N. 2008. *Penyelesaian Numerik Sistem Persamaan Diferensial Lotka Volterra dengan Metode Runga-Kutta Fehlberg (RKF 45) dan Metode Heun*. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Zauderer, E. 2006. *Partial Differential Equations of Applied Mathematich*. New York: Wiley-Interscience.

LAMPIRAN-LAMPIRAN

Lampiran 1. Program Matlab Grafik Solusi Analitik Persamaan Fokker-Planck

```
clc,clear all
dx=0.25;
dt=0.01;
x=0:dx:1;
t=0:dt:1;
nx=length(x);
mt=length(t);
for n=1:mt
    for i=1:nx
        veksak(n,i)=x(i)*exp(2*t(n))
    end
end
surf(x,t,veksak)
xlabel('x')
ylabel('t')
zlabel('v(x,t)')
grid on
title('SOLUSI ANALITIK PERSAMAAN FOKKER-PLANCK')
```

Lampiran 2. Program Matlab Penyelesaian Numerik dengan Metode Garis

```
clc,clear all
f=inline('((x*exp(3*t)*(v2-(2*v1)+v0))/a^2)+((v2-
v0)/(2*a))+(2*x*exp(2*t))-exp(2*t)')
a=input('masukkan interval x =');
b=input('masukkan interval t =');
x=0:a:1;
t=0:b:1;
nx=length(x);
mt=length(t);

%kondisi awal dan kondisi batas
v=zeros(mt,nx);
v(1,:)=x;
v(:,1)=0;
v(:,nx)=exp(2*t);

%Runga-kutta
for n=2:mt
    for i=2:nx-1

    k1=b*f(a,t(n-1),v(n-1,i-1),v(n-1,i),v(n-1,i+1),x(i));
    k2=b*f(a,t(n-1)+((1/2)*b),v(n-1,i-1)+((1/2)*k1),v(n-
1,i)+((1/2)*k1),v(n-1,i+1)+((1/2)*k1),x(i));
    k3=b*f(a,t(n-1)+((1/2)*b),v(n-1,i-1)+((1/2)*k2),v(n-
1,i)+((1/2)*k2),v(n-1,i+1)+((1/2)*k2),x(i));
    k4=b*f(a,t(n-1)+b,v(n-1,i-1)+k3,v(n-1,i)+k3,v(n-
1,i+1)+k3,x(i));

        v(n,i)=v(n-1,i)+((k1+(2*k2)+(2*k3)+k4)/6);
    end
end
v
surf(x,t,v)
zlim([0 9])
grid on
xlabel('x');ylabel('t');zlabel('v(x,t)');
title('Solusi Numerik Metode Garis')
```

Lampiran 3. Program Matlab Perbandingan Solusi Numerik Metode Garis dan Analitik serta Perhitungan *Error*

```
clc,clear all
%solusi numerik
f=inline('((x*exp(3*t)*(v2-(2*v1)+v0))/a^2)+((v2-
v0)/(2*a))+(2*x*exp(2*t))-exp(2*t)')
a=input('masukkan interval x =');
b=input('masukkan interval t =');
x=0:a:1;
t=0:b:1;
nx=length(x);
mt=length(t);

%kondisi awal dan kondisi batas
v=zeros(mt,nx);
v(1,:)=x;
v(:,1)=0;
v(:,nx)=exp(2*t);

%Runga-kutta
for n=2:mt
    for i=2:nx-1

        k1=b*f(a,t(n-1),v(n-1,i-1),v(n-1,i),v(n-1,i+1),x(i));
        k2=b*f(a,t(n-1)+((1/2)*b),v(n-1,i-1)+((1/2)*k1),v(n-
1,i)+((1/2)*k1),v(n-1,i+1)+((1/2)*k1),x(i));
        k3=b*f(a,t(n-1)+((1/2)*b),v(n-1,i-1)+((1/2)*k2),v(n-
1,i)+((1/2)*k2),v(n-1,i+1)+((1/2)*k2),x(i));
        k4=b*f(a,t(n-1)+b,v(n-1,i-1)+k3,v(n-1,i)+k3,v(n-
1,i+1)+k3,x(i));

        v(n,i)=v(n-1,i)+((k1+(2*k2)+(2*k3)+k4)/6);
    end
end
v

%solusi analitik
 for j=1:mt
    for i=1:nx
        veksak(j,i)=x(i)*exp(2*t(j));
    end
 end
veksak

% Kalkulasi Eror
e =zeros(nx+1,mt+1);
e = abs(v - veksak)
```

Lampiran 4. Output Solusi Numerik $v(x,t)$ dengan Metode Garis

v0	v1	v2	v3	v4
0	0.2500	0.5000	0.7500	1.0000
0	0.2549	0.5100	0.7651	1.0202
0	0.2600	0.5202	0.7804	1.0408
0	0.2652	0.5306	0.7961	1.0618
0	0.2704	0.5412	0.8121	1.0833
0	0.2758	0.5521	0.8285	1.1052
0	0.2813	0.5631	0.8452	1.1275
0	0.2869	0.5744	0.8622	1.1503
0	0.2926	0.5860	0.8796	1.1735
0	0.2984	0.5977	0.8973	1.1972
0	0.3044	0.6097	0.9154	1.2214
0	0.3105	0.6220	0.9338	1.2461
0	0.3167	0.6345	0.9527	1.2712
0	0.3230	0.6473	0.9719	1.2969
0	0.3295	0.6603	0.9915	1.3231
0	0.3361	0.6736	1.0115	1.3499
0	0.3428	0.6871	1.0319	1.3771
0	0.3497	0.7010	1.0528	1.4049
0	0.3567	0.7151	1.0740	1.4333
0	0.3639	0.7295	1.0957	1.4623
0	0.3712	0.7443	1.1178	1.4918
0	0.3787	0.7593	1.1404	1.5220
0	0.3864	0.7746	1.1634	1.5527
0	0.3942	0.7902	1.1869	1.5841
0	0.4021	0.8062	1.2109	1.6161
0	0.4102	0.8225	1.2354	1.6487
0	0.4185	0.8391	1.2603	1.6820
0	0.4270	0.8561	1.2858	1.7160
0	0.4356	0.8734	1.3118	1.7507
0	0.4445	0.8910	1.3383	1.7860
0	0.4535	0.9090	1.3654	1.8221
0	0.4627	0.9274	1.3930	1.8589
0	0.4720	0.9462	1.4211	1.8965
0	0.4816	0.9653	1.4498	1.9348
0	0.4914	0.9849	1.4791	1.9739
0	0.5013	1.0048	1.5090	2.0138
0	0.5115	1.0251	1.5396	2.0544
0	0.5219	1.0459	1.5707	2.0959
0	0.5325	1.0671	1.6024	2.1383
0	0.5433	1.0887	1.6348	2.1815
0	0.5543	1.1107	1.6679	2.2255
0	0.5656	1.1332	1.7016	2.2705
0	0.5771	1.1561	1.7360	2.3164
0	0.5888	1.1795	1.7711	2.3632
0	0.6007	1.2034	1.8069	2.4109
0	0.6129	1.2278	1.8435	2.4596
0	0.6254	1.2527	1.8807	2.5093
0	0.6381	1.2780	1.9188	2.5600
0	0.6510	1.3039	1.9576	2.6117
0	0.6642	1.3303	1.9971	2.6645
0	0.6777	1.3572	2.0375	2.7183
0	0.6914	1.3847	2.0787	2.7732
0	0.7055	1.4127	2.1208	2.8292
0	0.7198	1.4413	2.1636	2.8864
0	0.7344	1.4705	2.2074	2.9447
0	0.7493	1.5003	2.2520	3.0042
0	0.7645	1.5306	2.2975	3.0649
0	0.7800	1.5616	2.3440	3.1268
0	0.7958	1.5932	2.3914	3.1899

0	0.8119	1.6255	2.4397	3.2544
0	0.8284	1.6584	2.4890	3.3201
0	0.8452	1.6919	2.5393	3.3872
0	0.8623	1.7261	2.5907	3.4556
0	0.8798	1.7611	2.6430	3.5254
0	0.8976	1.7967	2.6965	3.5966
0	0.9158	1.8330	2.7510	3.6693
0	0.9343	1.8701	2.8066	3.7434
0	0.9533	1.9080	2.8633	3.8190
0	0.9726	1.9465	2.9212	3.8962
0	0.9923	1.9859	2.9802	3.9749
0	1.0124	2.0261	3.0404	4.0552
0	1.0329	2.0671	3.1019	4.1371
0	1.0538	2.1089	3.1646	4.2207
0	1.0751	2.1515	3.2285	4.3060
0	1.0969	2.1950	3.2938	4.3929
0	1.1191	2.2394	3.3604	4.4817
0	1.1417	2.2847	3.4283	4.5722
0	1.1648	2.3309	3.4976	4.6646
0	1.1884	2.3780	3.5682	4.7588
0	1.2124	2.4261	3.6404	4.8550
0	1.2370	2.4752	3.7139	4.9530
0	1.2620	2.5252	3.7890	5.0531
0	1.2875	2.5763	3.8655	5.1552
0	1.3136	2.6284	3.9437	5.2593
0	1.3402	2.6815	4.0234	5.3656
0	1.3673	2.7357	4.1047	5.4739
0	1.3949	2.7910	4.1876	5.5845
0	1.4232	2.8474	4.2722	5.6973
0	1.4519	2.9050	4.3585	5.8124
0	1.4813	2.9637	4.4466	5.9299
0	1.5113	3.0236	4.5365	6.0496
0	1.5418	3.0847	4.6281	6.1719
0	1.5730	3.1471	4.7217	6.2965
0	1.6048	3.2107	4.8171	6.4237
0	1.6373	3.2756	4.9144	6.5535
0	1.6704	3.3417	5.0138	6.6859
0	1.7041	3.4097	5.1144	6.8210
0	1.7389	3.4765	5.2212	6.9588
0	1.7723	3.5567	5.3100	7.0993
0	1.8169	3.5797	5.4997	7.2427
0	1.8091	3.9021	5.1894	7.3891

Lampiran 5. Output Solusi Eksak $v(x,t)$

v0	v1	v2	v3	v4
0	0.2500	0.5000	0.7500	1.0000
0	0.2551	0.5101	0.7652	1.0202
0	0.2602	0.5204	0.7806	1.0408
0	0.2655	0.5309	0.7964	1.0618
0	0.2708	0.5416	0.8125	1.0833
0	0.2763	0.5526	0.8289	1.1052
0	0.2819	0.5637	0.8456	1.1275
0	0.2876	0.5751	0.8627	1.1503
0	0.2934	0.5868	0.8801	1.1735
0	0.2993	0.5986	0.8979	1.1972
0	0.3054	0.6107	0.9161	1.2214
0	0.3115	0.6230	0.9346	1.2461
0	0.3178	0.6356	0.9534	1.2712
0	0.3242	0.6485	0.9727	1.2969
0	0.3308	0.6616	0.9923	1.3231
0	0.3375	0.6749	1.0124	1.3499
0	0.3443	0.6886	1.0328	1.3771
0	0.3512	0.7025	1.0537	1.4049
0	0.3583	0.7167	1.0750	1.4333
0	0.3656	0.7311	1.0967	1.4623
0	0.3730	0.7459	1.1189	1.4918
0	0.3805	0.7610	1.1415	1.5220
0	0.3882	0.7764	1.1645	1.5527
0	0.3960	0.7920	1.1881	1.5841
0	0.4040	0.8080	1.2121	1.6161
0	0.4122	0.8244	1.2365	1.6487
0	0.4205	0.8410	1.2615	1.6820
0	0.4290	0.8580	1.2870	1.7160
0	0.4377	0.8753	1.3130	1.7507
0	0.4465	0.8930	1.3395	1.7860
0	0.4555	0.9111	1.3666	1.8221
0	0.4647	0.9295	1.3942	1.8589
0	0.4741	0.9482	1.4224	1.8965
0	0.4837	0.9674	1.4511	1.9348
0	0.4935	0.9869	1.4804	1.9739
0	0.5034	1.0069	1.5103	2.0138
0	0.5136	1.0272	1.5408	2.0544
0	0.5240	1.0480	1.5720	2.0959
0	0.5346	1.0691	1.6037	2.1383
0	0.5454	1.0907	1.6361	2.1815
0	0.5564	1.1128	1.6692	2.2255
0	0.5676	1.1352	1.7029	2.2705
0	0.5791	1.1582	1.7373	2.3164
0	0.5908	1.1816	1.7724	2.3632
0	0.6027	1.2054	1.8082	2.4109
0	0.6149	1.2298	1.8447	2.4596
0	0.6273	1.2546	1.8820	2.5093
0	0.6400	1.2800	1.9200	2.5600
0	0.6529	1.3058	1.9588	2.6117
0	0.6661	1.3322	1.9983	2.6645
0	0.6796	1.3591	2.0387	2.7183
0	0.6933	1.3866	2.0799	2.7732
0	0.7073	1.4146	2.1219	2.8292
0	0.7216	1.4432	2.1648	2.8864
0	0.7362	1.4723	2.2085	2.9447

0	0.7510	1.5021	2.2531	3.0042
0	0.7662	1.5324	2.2986	3.0649
0	0.7817	1.5634	2.3451	3.1268
0	0.7975	1.5950	2.3924	3.1899
0	0.8136	1.6272	2.4408	3.2544
0	0.8300	1.6601	2.4901	3.3201
0	0.8468	1.6936	2.5404	3.3872
0	0.8639	1.7278	2.5917	3.4556
0	0.8814	1.7627	2.6441	3.5254
0	0.8992	1.7983	2.6975	3.5966
0	0.9173	1.8346	2.7520	3.6693
0	0.9359	1.8717	2.8076	3.7434
0	0.9548	1.9095	2.8643	3.8190
0	0.9740	1.9481	2.9221	3.8962
0	0.9937	1.9875	2.9812	3.9749
0	1.0138	2.0276	3.0414	4.0552
0	1.0343	2.0686	3.1028	4.1371
0	1.0552	2.1103	3.1655	4.2207
0	1.0765	2.1530	3.2295	4.3060
0	1.0982	2.1965	3.2947	4.3929
0	1.1204	2.2408	3.3613	4.4817
0	1.1431	2.2861	3.4292	4.5722
0	1.1661	2.3323	3.4984	4.6646
0	1.1897	2.3794	3.5691	4.7588
0	1.2137	2.4275	3.6412	4.8550
0	1.2383	2.4765	3.7148	4.9530
0	1.2633	2.5265	3.7898	5.0531
0	1.2888	2.5776	3.8664	5.1552
0	1.3148	2.6297	3.9445	5.2593
0	1.3414	2.6828	4.0242	5.3656
0	1.3685	2.7370	4.1055	5.4739
0	1.3961	2.7923	4.1884	5.5845
0	1.4243	2.8487	4.2730	5.6973
0	1.4531	2.9062	4.3593	5.8124
0	1.4825	2.9649	4.4474	5.9299
0	1.5124	3.0248	4.5372	6.0496
0	1.5430	3.0859	4.6289	6.1719
0	1.5741	3.1483	4.7224	6.2965
0	1.6059	3.2119	4.8178	6.4237
0	1.6384	3.2768	4.9151	6.5535
0	1.6715	3.3429	5.0144	6.6859
0	1.7052	3.4105	5.1157	6.8210
0	1.7397	3.4794	5.2191	6.9588
0	1.7748	3.5497	5.3245	7.0993
0	1.8107	3.6214	5.4321	7.2427
0	1.8473	3.6945	5.5418	7.3891