ANALISIS METODE BEDA HINGGA IMPLISIT DAN EKSPLISIT DENGAN TRANSFORMASI PEUBAH PADA PERHITUNGAN HARGA OPSI ASIA

SKRIPSI

OLEH
WINDA APRILIANI
NIM. 11610059

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2015

ANALISIS METODE BEDA HINGGA IMPLISIT DAN EKSPLISIT DENGAN TRANSFORMASI PEUBAH PADA PERHITUNGAN HARGA OPSI ASIA

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh
Winda Apriliani
NIM. 11610059

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2015

ANALISIS METODE BEDA HINGGA IMPLISIT DAN EKSPLISIT DENGAN TRANSFORMASI PEUBAH PADA PERHITUNGAN HARGA OPSI ASIA

SKRIPSI

Oleh
Winda Apriliani
NIM. 11610059

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 12 Mei 2015

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Abdul Aziz, M.Si	H. Wahyu H. Irawan, M. Pd
NIP. 19760318 200604 1 002	NIP. 19710420 200003 1 003

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

ANALISIS METODE BEDA HINGGA IMPLISIT DAN EKSPLISIT DENGAN TRANSFORMASI PEUBAH PADA PERHITUNGAN HARGA OPSI ASIA

SKRIPSI

Oleh:
Winda Apriliani
NIM. 11610059

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
Dan Dinyatakan Sebagai Salah Satu Persyaratan
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal

Penguji Utama	:
Ketua Penguji	:
Sekretaris Penguji	:
Anggota Penguji	:

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP.19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertandatangan di bawah ini:

Nama	: Winda Apriliani
NIM	: 11610059
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
JudulSkripsi	: Analisis Metode Beda Hingga Implisit dan Ekplisit dengan Transformasi Peubah pada Perhitungan Harga Opsi Asia.

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima saksi atas perbuatan tersebut.

Malang,17 Mei 2015
Yang membuat pernyataan,

Winda Apriliani
NIM. 11610059

MOTO

" Karena sesungguhnya sesudah kesulitan pasti ada kemudahan.
Sesungguhnya setelah kesulitan itu ada kemudahan"

(Q.S. Al-Insyirah: 5-6)

HALAMAN PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Ayahanda Isfandi, ibunda Ismiati, serta kakak tersayang Dian Prasetyowati, Indra Syahbana dan Arin Tri Fandini yang kata-katanya selalu memberikan semangat yang berarti bagi penulis

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah Swt. atas rahmat, taufik serta hidayah-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis banyak mendapatkan bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Untuk itu ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan yang setinggi-tingginya penulis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. D. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Abdul Aziz, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang telah bnayak memberikan arahan, nasihat, motivasi, dan berbagi pengalaman yang berharga kepada penulis.
5. H. Wahyu H. Irawan, M.Pd, selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan dan berbagi ilmunya kepada penulis.

6. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen, terima kasih atas segala ilmu dan bimbinganya.
7. Ayah dan Ibu yang selalu memberikan doa, semangat, serta motivasi kepada penulis sampai saat ini.
8. Seluruh teman-teman di Jurusan Matematika angkatan 2011, terutama Siti Jumaroh, Fafika Hayati, Dyah Praminia, Alfu Laila, dan Alifatuhrohmah yang berjuang bersama-sama untuk meraih mimpi, terima kasih atas kenangan-kenangan indah yang dirajut bersama dalam menggapai impian.
9. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik moril maupun materiil.

Akhirnya penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat bagi penulis dan pembaca.

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Malang, Mei 2015

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR SIMBOL

Simbol-simbol yang digunakan dalam skripsi ini mempunyai makna yaitu sebagai berikut:

S : Harga saham
S_i : Harga saham pada waktu i
S_T : Harga saham pada saat jatuh tempo
$\bar{S}$: Rata-rata harga saham
S_0 : Harga saham awal
y : Harga saham dengan transformasi peubah
ΔS : Jarak atau selisih pada harga saham
T : Waktu jatuh tempo
t : Waktu
τ : Waktu jatuh tempo dengan transformasi peubah
Δt : Jarak atau selisih pada waktu
σ : Volatilitas saham (besar jarak antara fluktuasi (naik-turun) harga saham.
r : Tingkat suku bunga resiko
K : Harga strike
C : Harga opsi beli
P : Harga opsi jual
V : Harga opsi
W : Harga opsi menggunakan transformasi peubah
$V(S,t)$: Harga opsi yang bergantung pada harga saham dan waktu
$W(y,\tau)$: Harga opsi yang bergantung pada harga saham dan waktu dengan transformasi peubah
N : Harga saham maksimal
M : Waktu maksimal
n : Banyaknya harga saham
$f(x_i)$: Fungsi f dititik x_i
$f', f'', ..., f^n$: Turunan pertama, kedua sampai turunan ke-n
$f(x+\Delta x)$: Fungsi dengan variabel bergeser kedepan sebesar Δx
$f(x-\Delta x)$: Fungsi dengan variabel bergeser kebelakang sebesar Δx
Δx : Jarak antara x_i dengan x_{i+1}
$e^{-r(T-t)}$: Nilai diskonto
i : Indeks waktu
j : Indeks harga saham
A : Matriks tridiagonal metode beda hingga implisit
B : Matriks tridiagonal metode beda hingga eksplisit

ABSTRAK

Apriliani, Winda. 2015. **Analisis Metode Beda Hingga Implisit dan Eksplisit dengan Transformasi Peubah pada Perhitungan Harga Opsi Asia**. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Abdul Aziz, M.Si. (II) Wahyu H Irawan, M. Pd.

Kata Kunci: Transformasi Peubah, Implisit, Eksplisit.

Metode beda hingga merupakan salah satu metode numerik yang sering digunakan untuk mencari penyelesaian persamaan diferensial. Dasar yang digunakan berupa turunan. Salah satu metode beda hingga yang digunakan untuk persamaan diferensial parsial yaitu metode beda hingga implisit dan eksplisit.

Opsi adalah hak klaim untuk menjual dan membeli. Opsi dibagi menjadi dua jenis opsi *call* dan opsi *put* dimana opsi *call* adalah hak untuk membeli harga saham dengan harga tertentu dan waktu jatuh tempo tertentu sesuai dengan kontrak yang dibuat kedua belah pihak sedangkan opsi *put* adalah hak untuk menjual harga saham dengan harga tertentu dan waktu jatuh tempo tertentu sesuai kontrak opsi yang dibuat kedua belak pihak. Sedangkan menurut penggunaan waktu opsi dibedakan menjadi opsi Eropa, Amerika dan opsi Asia. Opsi Eropa adalah opsi yang di *exersice* pada akhir waktu jatuh tempo saja. Opsi Amerika adalah opsi yang dapat di *exersice* pada setiap waktu sampai batas waktu jatuh tempo dan Opsi Asia adalah opsi yang merata-ratakan harga saham dan dapat di *exercise* pada periode waktu tertentu sampai jatah waktu jatuh tempo.

Perhitungan harga opsi dengan menggunakan metode beda hingga lebih baik dengan mentransformasikan harga saham S menjadi $\ln S$, sehingga metode beda hingga menjadi metode beda hingga implisit dan eksplisit dengan transformasi peubah.

Dari hasil penelitian yang telah dilakukan, dapat diketahui bahwa metode beda hingga implisit dan eksplisit dengan transformasi peubah dapat diterapkan pada opsi Asia karena kedua metode tersebut dapat diterapkan pada opsi Eropa dan mempunyai solusi analitik dengan semakin diperbanyak partisi N maka akan konvergen kepada *Black-Scholes*. Opsi Asia tidak memiliki solusi analitik sehingga kedua metode tersebut perlu diterapkan pada opsi Eropa untuk mendapakan solusi analitiknya terlebih dahulu. Dari kedua metode tersebut, metode implisit dengan transformasi peubah lebih baik digunakan untuk menentukan harga opsi Asia dibandingkan metode eksplisit dengan transformasi peubah karena memberikan hasil yang optimal dan efektif jika dibandikan dari titik kekonverganannya karena metode implisit dengan transformasi peubah menunjukkan titik kekonvergenannya pada 199984. Sedangkan metode beda hingga eksplisit menunjukkan titik kekonvergenanya pada 1.99973. Sehingga metode implisit dengan transformasi peubah yang lebih baik diterapkan pada perhitungan harga opsi Asia.

ABSTRACT

Apriliani, Winda. 2015. **The Analysis Method ofImplicit and Explicit to the Differencewith the Transformation of the Variables in the Calculation of Prices of Asian Options**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Supervisor: (I) Abdul Aziz, M.Si. (II) Wahyu H Irawan, M. Pd.

Keywords: Transformation of Variables, Implicit, Explicit.

Finite different method to is one of the commonly used numerical methods for solving differential equations. It’s based on a derivative. One of finite different method that is used for solving partial differential equation is the method of implicit and explicit finite different.

Options are the claims right to sell and buy. The options are divided into two types namely call options and put options. The call options are the right to buy the stock price with a certain price and a certain maturity time in accordance with the contract that made both parties. Put is the right to sell the stock with a specific price and maturity timeaccording to the options contracts that are made by both sides. While according to the usage of the time, options are distinguished into the European, American and Asian options. The European option is an that is exercised only on maturity time. American option is an option that can be exersicedat any time until the time, and Asian Option is the option that averages stock price and can be exercised in a certain time period until the maturity time.

The calculation of the price of the option, using the differene methods is better performed by transforming the stock price S to $\ln S$, so the difference method turn into implicit and explicit method with the transformation of variables.

From the results of research, it can be noted that implicit and explicit difference methods with the transformation of the variables can be applied the Asian option because both of these methods can be applied to European option and obtain the analytical solution,in which the more the number partitian N, the more it converges to Black-Scholes solution. Asian option has no analyticed solution so that both methods need to be applied to European options for the analyticsolution obtained in advance. From both of methods, the implicit method with the transformation of variables is better used for determining the Asia option price compared with explicit variables transformation method because it gives optimal results and effective comparison of the convergent point because of the implicit method with the transformation of variables converges to 1.99984. Whereas the explicit differen methods converges to 1.99973. So the implicit method with the transformation of the variables are better applied to the calculation of the prices of Asian options.

مخلص

أبريلياني،ويندى. 2015.**تحليل أسلوب مختلف المحدودة** الضمنيةوالصريحة **مع تحول متغير على حساب سعر الخيار الآسيوي**. قسم الرياضيات في كلية العلوم والتكنولوجيا. الدولة الإسلامية من جامعة مولانا إبراهيم مالك مالانغ. المشرف(1) عبد العزيزالما جستير (2)وحيوهينكي ايراوان الما جستير.

الكلمات الرئيسية: الخيار، بلاك–شولز، الضمنية،الصريحة، تحول متغير

أساليب مختلفة لإحدى الطرق العددية المستخدمة عادة لحل المعادلات التفاضلية. قاعدة تستخدم في شكل مشتق. يختلف أسلوب واحد لاستخدامه لمعادلة التفاضلية الجزئية بطريقة مختلفة ضمنية وصريحة.

الخيارات هي المطالبات الصحيحة لبيع وشراء. الخيارات تنقسم إلى نوعين من خيارات الاتصال وخيارات وضع فيها خيارات الاتصال الحق في شراء سعر الأسهم بسعر معين ووقت نضج معين وفقا للعقد الذي أدلى كل الأطراف بينما وضعت بين الخيارين هو الحق في بيع سعر الأسهم بسعر محدد ووقت النضج لخيارات مطابقة خاصة العقود التي تصنع كلا الطرفين بلاك. بينما وفقا لاستخدام الوقت وتتميز خيارات إلى الخيار الأوروبي، خيارات أمريكا وآسيا. الخيار الأوروبي خيار في الوقت في نهاية النضج اكسيرسيسي فقط. الخيار الأمريكي هو أحد الخيارات التي يمكن أن تكون اكسيرسيسي في أي وقت حتى الحد الزمني المقرر و "الخيارات الآسيوية" هو الخيار مراتى–راتاكان سعر السهم، ويمكن أن تمارس في فترة زمنية معينة حتى الوقت المخصص الواجب.

حساب سعر الخيار باستخدام أساليب مختلفة على نحو أفضل عن طريق تحويل إلى أسعار الأسهم، حيث يختلف الأسلوب أن تكون أساليب مختلفة للضمنية والصريحة مع تحول المتغيرات.

من نتائج الأبحاث التي تم القيام به، يمكن ملاحظة أنه يمكن تطبيق أساليب مختلفة للضمنية والصريحة مع تحول المتغيرات على خيار الآسيوية نظراً لأن كلا من هذه الطرق يمكن تطبيقها على الخيار الأوروبي ويكون الحل التحليلي مع المزيد من ترقيات القسم N ثم أنها سوف تلتقي بالأسود سكولز. الخيار الآسيوي قد لا يوجد حل تحليلية حيث أن كلا من هذه الطرق بحاجة إلى أن تطبق على الخيارات الأوروبية لحل أناليتيكنيا التي تم الحصول عليها في وقت مبكر. لكل من هذه

الأساليب، استخدام الأسلوب ضمناً بتحويل متغيرات أفضل لتحديد سعر الخيار آسيا مقارنة مع أسلوب تحويل المتغيرات الصريحة لأنه يعطي نتائج أفضل وفعالية إذا ديبانديكان من نقطة كيكونفيرجانانيا بسبب الأسلوب الضمني مع تحول المتغيرات التي تشير إلى نقطة كيكونفيرجينانيا أي 199984. بينما أساليب مختلفة للإشارة صراحة إلى نقطة كيكونفيرجينانيا في 1.99973. وبطريقة ضمنية مع تحول المتغيرات التي أفضل تطبيق لحساب أسعار الخيارات الآسيوية

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Metode numerik merupakan salah satu cabang ilmu matematika. Metode numerik adalah teknik untuk menyelesaikan permasalahan-permasalahan yang diformulasikan secara matematis dengan cara operasi hitungan (*arithmetic*) (Triatmodjo, 2002). Kebanyakan dari metode-metode numerik yang diturunkan didasarkan dengan merubah bentuk fungsi ke dalam bentuk polinom, karena polinom merupakan bentuk fungsi paling mudah dipahami kelakuannya. Solusi numerik merupakan pendekatan (hampiran) terhadap solusi sejati. Polinum hampiran didapatkan dengan deret Taylor. Salah satu metode numerik adalah metode beda hingga. Metode beda hingga sering digunakan dalam bidang teknik maupun sains untuk mencari penyelesaian persamaan diferensial. Dasar yang dipakai dalam metode beda hingga (*finite difference*) adalah definisi turunan (Munir, 2010). Salah satu metode beda hingga yang digunakan untuk persamaan diferensial parsial yaitu metode beda hingga implisit dan metode beda hingga eksplisit.

Hull (2002) menyatakan bahwa derivative adalah instrument keuangan yang nilainya didasarkan atau diturunkan dari aset yang mendasarinya. Beberapa produk derivatif antara lain: kontrak berjangka (*future contract*), kontrak *forward*, dan kontrak opsi. Kontrak berjangka merupakan suatu kewajiban untuk membeli atau menjual suatu asset pada harga yang telah ditentukan pada saat jatuh tempo. Kontrak *forward* merupakan perjanjian untuk melakukan penyerahan aset di masa mendatang pada harga yang disepakati.

Salah satu penelitian yang mencari solusi analitik pada harga opsi dapat menggunakan metode beda hingga, seperti yang dilakukan oleh Prahmana (2007) yang meneliti tentang penentuan harga opsi untuk model *Black-Scholes* berupa persamaan differensial parsial pada tipe Eropa menggunakan metode beda hingga untuk mendapatkan solusi analitik.

Brenan dan Schwart, Geski dan Sharstri dalam Hull dan White (1990) menyatakan bahwa akan lebih efisien menggunakan transformasi logaritma terhadap harga saham ketika menggunakan metode beda hingga, efesien disini berarti lebih baik menggunakan transformasi logaritma jika metode beda hingga diterapkan pada perhitungan harga saham dan harga opsi karena harga saham tidak berdistribusi normal dan jika diterapkan metode beda hingga maka galat yang dihasilkan akan semakin besar oleh karena itu perlu menggunakan transformasi peubah pada harga saham S menjadi $\ln S$ (Suritno, 2008). $\ln S$ diharapkan dapat mengecilkan nilai error sehingga perhitungan harga opsi Asia dapat lebih mendekati solusi analitiknya. Meskipun begitu perhitungan harga opsi Asia masih akan memiliki nilai error karena metode beda hingga hanya sebuah metode pendekatan untuk mendekati solusi analitik tetapi tidak akan memberikan nilai solusi analitiknya. Sebagaimana firman Allah dalam al-Qur'an surat Maryam ayat 94 yang berbunyi:

لَقَدْ أَحْصَىٰهُمْ وَعَدَّهُمْ عَدًّا ﴿٩٤﴾

Artinya: "Sesungguhnya Allah telah menentukan jumlah mereka dan menghitung mereka dengan hitungan yang teliti" (Q.S. Maryam: 94).

Kamal, (2005) menyatakan ayat tersebut menjelaskan pengetahuan Allah Swt tidak hanya hal-hal yang bersifat umum (*universal*), tapi juga rincian-rincian permasalahan.

Penulis menyatakan bahwa Allah Swt yang dapat mengetahui semua jumlah hitungan dengan tepat dan teliti, sedangkan manusia tidak akan mengetahui nilai tersebut dengan tepat melainkan hanya dapat menghitung pendekatanya saja untuk mendapatkan nilai sedekat-dekatnya dengan berbagai metode yang ada salah satunya yaitu metode beda hingga dengan transformasi peubah yang digunakan untuk mendapatkan solusi analitik perhitungan harga opsi Asia.

Harga opsi Eropa dapat ditentukan dengan menemukan solusi analitik dari model persamaan *Black-Scholes*. Sedangkan untuk opsi Asia hingga saat ini belum diketahui solusi analitiknya, sehingga dalam penyelesaiannya digunakan metode numerik untuk mendapatkan solusi numeriknya (Wahyudi, 2014).

Wahyudi (2014) meneliti tentang pencarian solusi analitik dengan metode beda hingga implisit, eksplisit dan *Crank-Nicolson* dalam perhitungan harga opsi Asia, yang mendapatkan hasil solusi analitik dengan menggunakan metode implisit dan *Crank-Nicolson* mendekati solusi analitik formula *Black-Scholes* yang menjadi acuan kekonvergenan metode tersebut pada opsi Asia, tetapi solusi analitik menggunakan metode eksplisit menjauhi solusi analitik formula *Black-Scholes* meskipun partisi waktu diperbanyak. Sehubung dengan permasalahan tersebut, penelitian ini dimaksudkan untuk mencari solusi penyelesaian perhitungan harga opsi Asia menggunakan metode beda hingga implisit dan eksplisit dengan transformasi peubah serta membandingkan hasil penelitian terdahulu dengan penelitian yang akan diteliti sehingga akan didapatkan metode terbaik pada perhitungan harga opsi Asia.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan permasalahan pada latar belakang, maka rumusan masalah dalam penelitian ini yaitu:

1. Bagaimana hasil analisis metode beda hingga implisit dan eksplisit dengan transformasi peubah pada perhitungan harga opsi Asia?
2. Bagaimana perbandingan antara hasil kedua metode beda hingga implisit dan eksplisit dengan transformasi peubah?
3. Bagaimana interpretasi menurut Islam tentang analisis metode beda hingga implisit dan eksplisit dengan transformasi peubah pada perhitungan harga opsi Asia dan perbandingan antara kedua metode tersebut?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan pada rumusan masalah, tujuan pada penelitian ini yaitu:

1. Untuk mengetahui hasil analisis metode beda hingga implisit dan eksplisit dengan transformasi peubah pada perhitungan harga opsi Asia?
2. Untuk mengetahui perbandingan antara hasil metode beda hingga implisit dan eksplisit dengan metode beda hingga implisit dan eksplisit dengan transformasi peubah?

1.4 Defisi Operasional

Adapun definisi operasional dalam penelitian ini sebagai berikut:

1. Beda hingga merupakan salah satu metode numerik untuk menyelesaikan persamaan diferensial dengan mengaprosimasikan turunan-turunannya. Metode beda hingga dibedakan berdasarkan skemanya yaitu metode beda hingga implisit dan eksplisit.
2. Transformasi Peubah merupakan pengubahan peubah suatu fungsi peubah dengan fungsi lain sehingga terbentuk fungsi peubah baru yang didasari hubungan peubah awal dengan peubah baru.
3. Opsi merupakan adalah suatu hak untuk membeli atau menjual suatu aset tertentu dengan harga tertentu dan dengan jangka waktu tertentu. Menurut *exsersice*-nya opsi dibedakan menjadi opsi *call* dan opsi *put* dimana opsi *call* adalah hak untuk membeli kembali harga saham dengan harga tertentu dan waktu jatuh tempo tertentu sedangkan opsi put yaitu hak untuk menjual kembali harga saham dengan harga tertentu dan waktu jatuh tempo tertentu.
4. Efisien yaitu sesuai untuk menghasilkan sesuatu dengan baik, tepat, dan cepat.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diberikan dari penelitian ini adalah :

1. Secara teoritis, untuk memberikan informasi tentang perhitungan harga opsi Asia menggunakan metode beda hingga implisit dan eksplisit dengan transformasi peubah

2. Secara praktis, sebagai metode alternative untuk memprediksikan harga opsi Asia.

1.6 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Aset dasar opsi yang digunakan berupa saham
2. Tipe dasar rata-rata harga saham pada opsi Asia digunakan rata-rata Aritmatika.
3. Perbandingan kedua metode dibandingkan dari titik kekonvergenan.

1.7 Sistematika Penulisan

Untuk mempermudah pembaca memahami tulisan ini, peneliti membagi tulisan ini kedalam empat bab, yaitu :

Bab I Pendahuluan

Dalam bab ini dijelaskan tentang latar belakang masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Tinjauan Pustaka

Dalam bab ini dipaparkan tentang hal-hal yang mendasari dalam masalah yang dikaji oleh peneliti, diantaranya adalah tentang metode beda hingga, skema implisit dan eksplisitopsi Asia dengan transformasi peubah, formula *Black-Scoles* dan pengertian opsi itu sendiri.

Bab III Metode Penelitian

Dalam bab ini dipaparkan jenis metode penelitian yang mendasari tentang penelitian ini dan tahap-tahap penelitian tentang metode beda hingga implisit dan eksplisit dengan transformasi peubah.

Bab IV Pembahasan

Dalam bab ini dipaparkan hasil kajian dan analisis dari simulasi yang sudah dilakukan oleh peneliti dalam mengkaji permasalahan yang telah diangkat, yaitu: mengkaji perhitungan harga opsi Asia dengan transformasi peubah menggunakan metode beda hingga implisit dan eksplisit, membuat simulasi komputasi metode beda hingga implisit daneksplisit dengan mengambil suatu kasus tertentu serta menganalisis hasil simulasi tersebut.

Bab V Penutup

Dalam bab ini dipaparkan tentang kesimpulan dari hasil pembahasan dan saran untuk penelitian selanjutnya.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Saham

Pasar modal adalah pasar tempat memperdagangkan berbagai instrument keuangan jangka panjang yang bisa diperjualbelikan. Pasar modal merupakan sarana pendanaan bagi perusahaan maupun institusi pemerintah, sekaligus sebagai sarana bagi masyarakat untuk melakukan kegiatan investasi. Dengan demikian, pasar modal memfasilitasi berbagai sarana dan prasarana kegiatan jual beli surat-surat berharga. Instrumen keuangan yang diperdagangkan di pasar modal merupakan instrumen jangka panjang (lebih dari satu tahun). Salah satu contoh yang dijualbelikan di pasar modal adalah saham. Sehingga saham adalah surat berharga yang menunjukkan kepemilikkan perusahaan sehingga pemegang saham memiliki hak klaim atas dividen atau distribusi lain yang dilakukan perusahaan kepada pemegang saham lainnya (Hariyani, 2010).

2.2 Pengertian Opsi

Pemegang saham mempunyai hak klaim untuk menjual atau membeli suatu saham, hak tersebut disebut dengan opsi. Opsi adalah sebuah kontrak hak (bukan kewajiban) kepada pemegangnya (pembelinya) untuk membeli atau menjual kembali pada penjual kontrak opsi dengan harga yang sudah tertentu dan waktu jatuh tempo tertentu sesuai persepakatan kedua belak pihak yaitu pembeli kontrak dan penjual kontrak. Harga pasar opsi sangat berpengaruh dan dikembangkan terus untuk mengetahui metode perhitungannya karena sangat berguna untuk pengambilan keputusan bagi pembeli kontrak opsi untuk membeli atau menjual kembali opsi kepada kontrak opsi sehingga keuntungan di dapat bukan kerugian. Harga pasar opsi dapat diperkirakankarena harga opsi terpengaruhi oleh beberapa aspek yaitu harga pasar saham, harga jatuh tempo, waktu jatuh tempo, tingkat suku bunga resiko dan varian (Widoatmodjo, 2005).

Kontrak Opsi Saham (KOS) adalah efek yang memuat hak beli (*call option*) atau hak jual (*put option*) atas *underlying stock* berupa saham perusahaan tercatat yang menjadi dasar perdagangan seri KOS dalam jumlah dan *strike price* tertentu serta berlaku dalam periode tertentu. *Strike price* adalah harga yang ditetapkan bursa efek untuk setiap seri KOS sebagai acuan pelaksanaan. Opsi Amerika memberikan kesempatan kepada pemegang hak (*taker*) untuk melaksanakan haknya setiap saat hingga saat jatuh tempo. Sementara itu, opsi Eropa hanya memberikan kesempatan kepada *taker* untuk melaksanakan haknya pada saat jatuh tempo. Kontrak opsi saham dapat diperjual belikan, tetapi yang dapat diperjualbelikan hanyalah hak jual maupun hak beli (Manurung, 2011).

2.3 Harga Opsi Saham

Aziz (2005) menyatakan bahwa ada dua jenis dasar opsi yaitu *call* dan *put*. Opsi *call* adalah hak untuk membeli sejumlah tertentu suatu *underlying asset* dengan harga sebesar *srike (exercise) price*, pada waktu *expiration (maturity) date* atau sebelumnya. Sedangkan opsi *put* adalah hak untuk menjual sejumlah tertentu suatu *underlying asset* dengan harga sebesar *strike (exercise) price*, pada waktu *expiration (maturity) date* atau sebelumnya.

2.3.1 *Call Option*

Misal S_T adalah harga saham pada saat jatuh tempo, K adalah harga saham yang ditetapkan atau harga pelaksanaan, dan T adalah waktu jatuh tempo. Jika harga saham pada saat jatuh tempo lebih besar daripada harga pelaksanaan atau $S_T > K$, maka besar keuntungan yang diperoleh yaitu $S_T - K$. Sebaliknya, jika $K \geq S_T$ maka pemegang *call option* (opsi beli) tidak memperoleh keuntungan atau keuntungan yang diperoleh adalah nol (Luenberger, 1998).

Harga opsi beli pada saat jatuh tempoh adalah

$$C = \begin{cases} S_T - K & ; S_T > K \\ 0 & ; S_T \leq K \end{cases} \tag{2.1}$$

sehingga

$$C = maks(0, S_T - K) \tag{2.2}$$

Menurut Halim (2005), pada saat harga saham lebih rendah daripada harga pelaksanaan $(S_T < K)$, maka opsi beli bernilai nol dan dikatakan dalam keadaan *out of the money (OTM)*. Dalam keadaan ini pemegang opsi tidak akan menggunakan haknya dan ia akan mengalami kerugian sebesar premi yang telah dibayarkan. Sedangkan pada saat harga saham lebih tinggi dari harga pelaksanaan dan bernilai positif, maka opsi beli dikatakan dalam keadaan *in the money (ITM)*. Dalam keadaan ini pemilik opsi akan menggunakan opsinya karena akan memperoleh keuntungan atau dapat meminimalkan kerugian yang disebabkan karena telah membayar premi kepada penjual opsi, dan untuk harga saham sama dengan harga pelaksanaan $(S_T = K)$, maka opsi beli dikatakan dalam keadaan *at the money (ATM)*, sehingga opsi ini akan bernilai nol.

2.3.2 *Put Option*

Misal S_T adalah harga saham pada saat jatuh tempo, K adalah harga saham yang ditetapkan atau harga pelaksanaan, dan T adalah waktu jatuh tempo. Jika harga saham pada saat jatuh tempo lebih kecil daripada harga saham yang telah ditentukan (harga pelaksanaan) atau $S_T < K$, maka besar keuntungan yang diperoleh yaitu $K - S_T$. Sebaliknya, jika $S_T \geq K$ maka pemegang *put option* (opsi jual) tidak melakukan haknya sehingga keuntungannya adalah nol (Luenberger, 1998).

Harga opsi jual pada saat jatuh tempoh adalah

$$P = \begin{cases} K - S_T & ; S_T < K \\ 0 & ; S_T \geq K \end{cases} \tag{2.3}$$

sehingga

$$P = maks(0, K - S_T) \tag{2.4}$$

Menurut Halim (2005), pada saat harga saham lebih rendah dari pada harga pelaksanaan $(S_T < K)$, maka opsi jual akan bernilai positif dan dikatakan dalam keadaan *in the money (ITM)*. Dalam keadaan ini pemegang opsi jual akan menggunakan haknya dan nilai opsi ini yaitu sebesar selisih antara harga pelaksanaan dan harga saham. Sedangkan pada saat harga saham lebih tinggi dari harga pelaksanaan $(S_T > K)$, maka opsi jual dikatakan dalam keadaan *out of the money (OTM*). Dalam keadaan ini pemilik opsi tidak akan menggunakan opsinya karena ia dapat menjual saham dengan harga yang lebih tinggi di pasar saham. Kerugian maksimal yang diderita sama dengan harga premi opsi yang telah dibayarkan dan untuk harga saham sama dengan harga pelaksanaan $(S_T = K)$, maka opsi jual dikatakan dalam keadaan *at the money (ATM)*, sehingga opsi ini akan bernilai nol. Kerugian yang diderita pemegang opsi beli adalah sebesar premi yang telah dibayarkan kepada penjual opsi.

2.3.3 Masalah Nilai Awal dan Syarat Batas

Hidayatullah (2012) menyatakan masalah nilai awal adalah persamaan diferensial tingkat n bersama dengan syarat awal pada suatu nilai yang dimungkinkan mempunyai nilai pada variabel bebas yang sama. Masalah nilai awal untuk persamaan diferensial orde n $f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^n\right) = 0$ yaitu menentukan selesaian persamaan diferensial pada interval I dan memenuhi n syarat awal di $x_0 \in I$ subset dari bilangan real. Bentuk umum masalah nilai awal yaitu :

$$f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^n\right) = 0 \tag{2.5}$$

dengan

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y^n(x_0) = y_{(n-1)} \end{cases} \tag{2.6}$$

dimana $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ adalah konstanta yang diberikan.

2.4 Tipe-tipe Opsi

Opsi juga dapat dibedakan menurut pelaksanaannya dan penggunaan hak yaitu *American style option* dan *Europan style option* atau sering disebut opsi Amerika dan opsi Eropa. Opsi-opsi ini bukanlah dipengaruhi oleh tempat pembeliannya tetapi dipengaruhi dalam penggunaan haknya untuk mengambil keputusan menjual atau membeli. *American style option* atau opsi Amerika adalah opsi yang dalam penggunakan haknya dapat di *exercise* setiap saat selama periode opsi tersebut sedangkan *Europan style option* atau opsi Eropa adalah opsi yang dalam penggunaan haknya dapat di-*exercise* hanya di akhir periode saja. Para ahli ekonomi mulai mengembangkan dan menemukan opsi lain selain opsi Eropa dan Amerika yaitu opsi Asia dimana *payoff*-nya bergantung pada rata-rata harga saham selama masa hidup opsi (Manurung, 2011).

2.5 Opsi Asia

Seydel (2009) menyatakan bahwa ada beberapa cara bagaimana rata-rata nilai dari harga saham S_i dapat dibentuk, jika harga S_i diamati pada waktu diskrit. Menurut Higham (2004) contoh t_n, mengatakan *equidistantly* dengan interval waktu $\Delta t = T/n$. Sehingga rata-rata aritmatika (*mean aritmatic*)

$$\bar{S} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S_i \tag{2.7}$$

Jika hasil observasi sampel dalam periode $0 \le t \le T$, sehingga opsi Asia adalah rata-rata perkembangan harga saham $(\bar{S})$ fungsi hasil dari opsi tipe Asia didefinisikan sebagai:

$$(\bar{S} - K, 0) \text{ harga rata-rata } \textit{call} \tag{2.8}$$

$$(K - \bar{S}, 0) \text{ harga rata-rata } \textit{put} \tag{2.9}$$

Harga opsi disebut juga *rate option* atau *fixed strike option*. *Strike option* disebut juga *floating strike option*. *Payoff* pada definisi persamaan (2.8) dan persamaan (2.9), $S > 0$ dan $\bar{S} > 0$, untuk menemukan nilai opsi *call*

$$V_M = \max(\bar{S} - K, 0) \tag{2.10}$$

Untuk menentukan nilai opsi *put*

$$V_M = \max(K - \bar{S}, 0) \qquad (2.11)$$

Menurut Higham (2004) untuk menemukan nilai option awal acak kontinu menggunakan diskon, dengan r sebagai suku bunga bebas resiko yaitu :

$$V_0 = e^{-r\Delta t} V_M \qquad (2.12)$$

2.6 Proses Stokastik

Proses stokastik $X = \{X(t); t \in T\}$ adalah himpunan variabel *random* $X(t)$ yang dapat diindeks dengan parameter t, dalam himpunan indeks T yang mempunyai urutan. Jika T diskrit, maka himpunan indeks T dapat ditulis $T = \{0, 1, 2, ...\}$. Jika T kontinu, maka himpunan indeks T dapat ditulis $T = [0, \infty)$ (Khuriyanti, 2009).

Nilai yang mungkin dari *X(t)* disebut *state*. Himpunan nilai yang mungkin dari *X(t)* adalah *state space*. Berdasarkan *state space*-nya, proses stokastik dapat dibedakan menjadi *state space* diskrit dan *state space* kontinu. Karena harga saham adalah variabel *random* yang pergerakannya tidak diketahui secara pasti, maka dapat dikatakan bahwa pergerakan harga saham merupakan sebuah proses stokastik (Khuriyanti, 2009).

2.7 Gerak *Brown*

Khuriyanti (2009) menyatakan bahwa gerak *Brown* dengan variansi σ^2 merupakan proses stokastik $\{W(t); t \geq 0\}$ dengan sifat-sifat sebagai berikut:

1. Setiap kenaikan $W(s+t)-W(s)$ adalah berdistribusi normal dengan *mean* 0 dan variansi $\sigma^2 t$.
2. Untuk setiap pasang interval waktu yang saling lepas $(u,v],(w,y]$ dengan $0 \le u < v \le w < y$, maka kenaikan $W(y)-W(w)$ dan $W(v)-W(u)$ adalah variabel *random* yang independen.
3. $W(t)$ kontinu sebagai fungsi dari t dan $W(0)=0$

2.8 *Itô Process*

Niwiga (2005) menyatakan proses stokastik $X = \{X(t); t \ge 0\}$ yang memiliki selesaian

$$X = X_0 + \int_0^t a(X_s,t)\,ds + \int_0^t b(X_s,t)\,dW_s \qquad (2.13)$$

disebut *Itô process*. Persamaan diferensial stokastik yang sesuai dengan *Itô process*, yaitu

$$dX_t = a(X_t,t)\,dt + b(X_t,t)\,dW_t \qquad (2.14)$$

dengan $a(X_t,t)$ adalah bentuk *drift*, $b(X_t,t)$ adalah bentuk difusi dan W_s adalah proses *Wiener*.

Khuriyanti (2009) menyatakan bahwa proses *Wiener* disebut juga proses gerak *Brown* standar, yaitu jika $\{W(t) \mid 0 \le t \le \infty\}$ dengan variansi σ^2, maka $\left\{B(t) = \frac{1}{\sigma}W(t); 0 \le t \le \infty\right\}$ adalah gerak *Brown* dengan variansi 1.

2.9 Tabel Perkalian *Itô Process*

Kwok (1998) menyatakan bahwa untuk $E\left((dW)^2\right)=dt$, $\text{var}\left((dW)^2\right)=O(dt)$, $E(dtdW)=0$, dan $\text{var}(dtdW)=O(dt)$. Misalkan syarat-syarat order $O(dt)$ yang diperlakukan = 0, maka dapat diamati bahwa $(dW)^2$ dan $dtdW$ adalah bebas stokastik, karena variansi dari keduanya adalah 0.

Oleh karena itu $(dW)^2=dt$ dan $dtdW=0$ tidak hanya pada ekspektasi tetapi juga pada eksaknya. Untuk dt bernilai sangat kecil, maka $\lim\limits_{t\to 0} dt=0$ (Wilmott, dkk., 1995). Lyuu (2012) menyatakan bahwa perkalian *Itô process* sebagaimana tabel berikut.

Tabel 2.1 Perkalian *Itô Process*

	dW	dt
dW	dt	0
dt	0	0

2.10 Proses Harga Saham

Brewer, dkk. (2012) menyatakan bahwa model harga saham didefinisikan sebagai berikut:

$$dS_t=S_t\left[\mu dt+\sigma dW_t\right] \tag{2.15}$$

Untuk mencari solusi *S(t)* dengan menggunakan *Itô formula* untuk $G=\ln S(t)$, maka diperoleh persamaan

$$dG=\left(\frac{\partial G}{\partial S}\mu S+\frac{\partial G}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}\sigma^2 S(t)^2\right)dt+\frac{\partial G}{\partial S}\sigma S dW \tag{2.16}$$

$$= \frac{1}{S(t)} \mu S(t) dt + 0 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{S(t)^2}\right)\sigma^2 S(t)^2 dt + \frac{1}{S(t)} \sigma S(t) dW(t) \quad (2.17)$$

$$d \ln S(t) = \mu dt + \sigma dW(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 dt \quad (2.18)$$

$$\int d \ln S(t) = \int \mu dt + \int \sigma dW(t) - \int \frac{1}{2}\sigma^2 dt \quad (2.19)$$

$$\ln S(t) - \ln S(0) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t) + \sigma W(t) \quad (2.20)$$

$$\ln \frac{S(t)}{S(0)} = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W(t) \quad (2.21)$$

$$S(t) = S(0) e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W(t)}. \quad (2.22)$$

Dengan proses *Wiener*, diperoleh $W(t) = \xi\sqrt{t}$ untuk ξ adalah bilangan acak dari distribusi normal baku. Sehingga persamaan (2.23) menjadi

$$S(t) = S(0) e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma\xi\sqrt{t}}$$

Sydel (2009) menyatakan bahwa untuk memodelkan tingkat keuntungan μ diganti dengan tingkat suku bunga bebas resiko r sehingga $\mu = r$. Sehingga persamaan menjadi

$$S(t) = S(0) e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma\xi\sqrt{t}} \quad (2.23)$$

Pada kenyataanya $\mu \neq r$, sehingga tidak ada yang dapat berinvestasi di pasar saham. Investor mengekspektasi $\mu > r$ sebagai kompensasi untuk resiko saham lebih besar dari obligasi.

2.11 Persamaan *Black-Scholes*

Metode penetapan harga opsi saham secara analitik dirumuskan oleh Fisher Black dan Mayor Scholes pada tahun 1973 yang dikenal dengan model *Black-Scholes*. Model *Black-Scholes* menggunakan beberapa asumsi, yaitu opsi yang digunakan adalah opsi tipe Eropa, volatilitas (ukuran perubahan harga saham) bersifat konstan selama usia opsi, terdapat suku bunga bebas resiko, proses acak dalam memperoleh harga saham, saham yang digunakan tidak memeberikan dividen serta tidak terdapat pajak dan biaya transaksi (Hull, 2002).

Judokusumon (2010), menyatakan harga opsi yang dihasilkan oleh perhitungan model *Black-Scholes* adalah harga yang *fair* sehingga jika harga suatu opsi berbeda dengan harga tersebut maka akan ada kemungkinan untuk mendapatkan laba *arbritase* bebas resiko dengan cara mengambil posisi yang berlawanan terhadap saham yang dijadikan pacuan.

Menurut Kwok (1998) model persamaan *Black-Scholes* yang dapat digunakan untuk menentukan harga opsi saham yaitu:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial^2 S} + rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} - rV = 0 \qquad (2.24)$$

2.12 Aproksimasi Turunan

2.12.1 Aproksimasi Turunan Pertama

Misalkan suatu fungsi $f(x)$ diketahui dititik x_i dan semua turunan dari f terhadap x pada titik tersebut, maka dengan deret Taylor dapat dinyatakan nilai f pada titik x_{i+1} yang terletak pada jarak Δx dari titik x_i (Triatmodjo, 2002) yaitu:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)\frac{\Delta x}{1!} + f''(x_i)\frac{\Delta x^2}{2!} + \ldots \qquad (2.25)$$

Diferesial numerik digunakan untuk memperkirakan bentuk diferensial kontinu menjadi bentuk diskrit sehingga akan di dapatkan persamaan diferensial yang diturunkan berdasarkan deret Taylor.

Persamaan deret taylor (2.25) dapat ditulis dalam bentuk :

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)\Delta x + f''(x_i)\frac{\Delta x^2}{2!} + O(\Delta x^3)$$

sehingga diperoleh

$$\frac{df}{dx} = f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\Delta x} - O(\Delta x^2) \qquad (2.26)$$

Persamaan (2.26) disebut turunan pertama yang menggunakan titik di depannya x_{i+1} yang sering disebut aproksimasi turunan pertamabeda hingga maju. Sebaliknya jika menggunakan titik x_{i-1} maka disebut aproksimasi turunan pertama beda hingga mundur, yaitu (Triatmodjo, 2002) :

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - f'(x_i)\Delta x + f''(x_i)\frac{\Delta x^2}{2!} - O(\Delta x^3) \qquad (2.27)$$

sehingga diperoleh

$$\frac{df}{dx} = f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x} + O(\Delta x^2) \qquad (2.28)$$

Untuk mendapatkan turunan pertama beda hingga pusat dengan mengurangkan x_{i-1} dan x_{i+1}, yaitu:

$$f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}) = 2f'(x_i)\Delta x + O(\Delta x^2)$$

sehingga diperoleh

$$\frac{df}{dx} = f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2\Delta x} - O(\Delta x^2) \qquad (2.29)$$

2.12.2 Aproksimasi Turunan Kedua

Menurut Triatmodjo (2002) untuk mendapatkan turunan kedua dapat menggunakan persamaan deret Taylor $f(x_{i+1})$ pada persamaan (2.25) sehingga diperoleh:

$$f''(x_i)\frac{\Delta x^2}{2} = f(x_{i+1}) - f(x_i) - f'(x_i)\Delta x + O(\Delta x^3)$$

sehingga diperoleh

$$f''(x_i) = \left(\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\Delta x} - f'(x_i)\right)\frac{2}{\Delta x} \tag{2.30}$$

subtitusi $f'(x_i)$ dari persamaan (2.27) ke persamaan (2.30) sehingga diperoleh:

$$f''(x_i) = \left(\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\Delta x} - \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x} + f''(x_i)\frac{\Delta x}{2}\right)\right)\frac{2}{\Delta x}$$

$$f''(x_i) = 2\left(\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\Delta x^2} - \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{\Delta x^2}\right) - f''(x_i)$$

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - f'(x_i)\Delta x + f''(x_i)\frac{\Delta x^2}{2!} + O(\Delta x^3)$$

$$2f''(x_i) = 2\left(\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\Delta x^2} - \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{\Delta x^2}\right)$$

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{\Delta x^2} \tag{2.31}$$

Persamaan (2.31) merupakan persamaan aproksimasi turunan kedua dengan deret Taylor.

2.13 Metode Beda Hingga

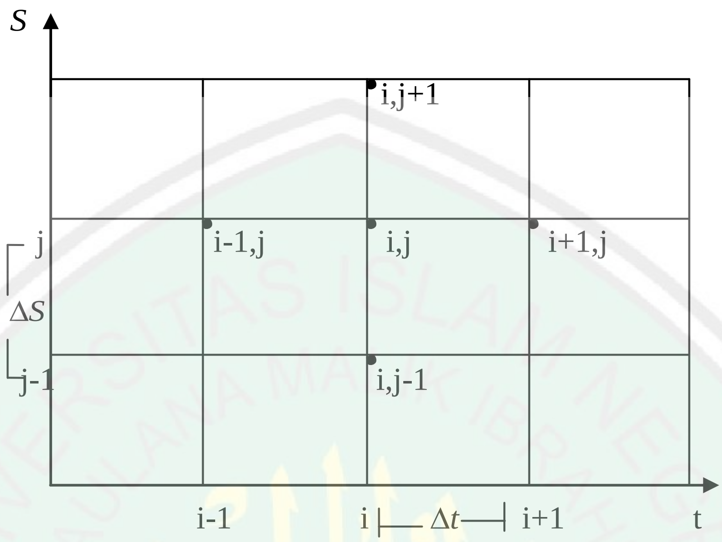
Metode numerik adalah teknik untuk menyelesaikan permasalahan-permasalahan yang diformulasikan secara matematis dengan cara operasi hitungan (*arithmetic*). Berbagai permasalahan dalam bidang ilmu pengetahuan dan teknologi dapat digambarkan dalam bentuk persamaan matematik. Hasil penyelesaian numerik merupakan nilai perkiraan atau pendekatan dari penyelesaian analisis atau eksak. Karena merupakan nilai pendekatan, maka terdapat kesalahan terhadap nilai eksak. Nilai kesalahan tersebut harus cukup kecil terhadap tingkat kesalahan yang diterapkan (Triatmodjo, 2002).

Salah satu metode numerik adalah metode beda hingga. Metode beda hingga sering digunakan dalam bidang teknik maupun sains untuk mencari penyelesaian persamaan diferensial. Dasar yang dipakai dalam metode beda hingga (*finite difference*) adalah definisi turunan. Kebanyakan dari metode-metode numerik yang diturunkan didasarkan dengan merubah bentuk fungsi ke dalam bentuk polinom, karena polinom merupakan bentuk fungsi paling mudah dipahami kelakuannya. Solusi numerik merupakan pendekatan (hampiran) terhadap solusi sejati, sehingga terdapat galat sebesar selisih antara solusi sejati dengan solusi hampiran. Galat pada solusi numerik harus dihubungkan dengan polinum yang menghampiri fungsi sebenarnya. Polinum hampiran didapatkan dengan deret Taylor.

2.14 Skema Beda Hingga

Skema turunan dengan bentuk beda hingga adalah jaringan titik hitungan pada bidang $S-t$ yang dapat dibagi menjadi sejumlah pias segi empat denan sisi

Δx dan Δt. Panjang pias dalam arah S adalah ΔS dan dalam arah t adalah Δt. Dengan menggunakan jaringan titik hitungan (i, j) (Triatmodjo, 2002).



Gambar 2.1 Jaringan Titik Hitungan dalam Bidang $S-t$

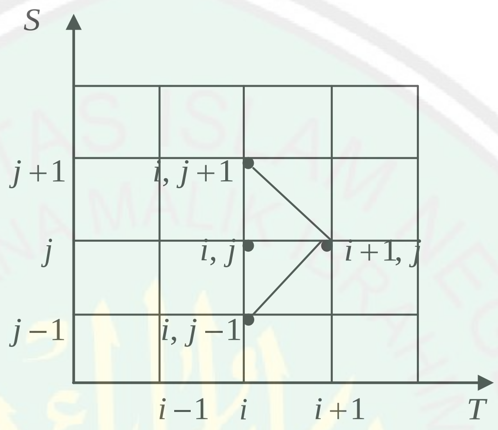
Sedangkan diferensial terhadap S yaitu :

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial t} &\approx \frac{V_{i,j+1}-V_{i,j}}{\Delta t}\\ \frac{\partial V}{\partial S} &\approx \frac{V_{i,j+1}-V_{i,j-1}}{2\Delta S}\\ \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} &\approx \frac{V_{i,j+1}-2V_{i,j}+V_{i,j-1}}{\Delta S^2}\end{aligned} \quad (2.32)$$

$\partial V/\partial t$ merupakan aproksimasi turunan pertama terhadap t dari deret Taylor, $\partial V/\partial S$ merupakan aproksimasi turunan pusat dan untuk aproksimasi turunan kedua yaitu $\partial^2 V/\partial S^2$.

2.14.1 Skema Implisit

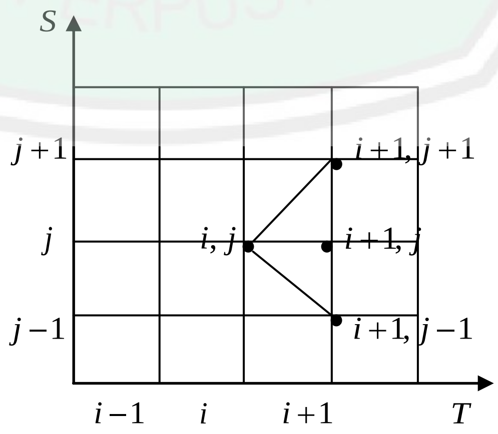
Skema metode beda hingga implisit menunjukkan jaringan titik hitung dimana variabel di titik $i, j+1$ dipengaruhi i, j dimana nilainya sudah diketahui serta dipengaruhi oleh $i-1, j+1$ dan $i+1, j+1$ yang belum diketahui nilainya. Sehingga nilai $i, j+1$ tidak bisa langsung dihitung, tetapi membutuhkan suatu sistem persamaan yang harus diselesaikan terlebih dahulu, dimana $i = 1,2,...M$ dan $j = 1,2,..., N$ (Triatmodjo, 2002) yaitu:



Gambar 2.2 Skema Implisit

2.14.2 Skema Eksplisit

Pada skema metode beda eksplisit menunjukkan jaringan titik hitung dimana $i, j+1$ tidak diketahui dan bergantung pada i, j , $i+1, j$ dan $i-1, j$ yang sudah diketahui sehingga membentuk skema (Triatmodjo, 2002) yaitu:



Gambar 2.3 Skema Eksplisit

2.15 Penelitian Terdahulu

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan oleh Wahyudi (2014) dengan judul "Analisis Metode Beda Hingga Implisit, Eksplisit dan *Crank-Nicholson* pada Perhitungan Harga Opsi Asia" sehingga diperoleh persamaan beda hingga implisit dan eksplisit.

2.15.1 Metode Beda Hingga Implisit

Persamaan beda hingga implisit diperoleh dengan mensubtitusikan aproksimasi beda maju, beda pusat turunan pertama dan beda pusat turunan kedua ke persamaan (2.22), sebagai berikut:

$$\frac{\partial V}{\partial t} \approx \frac{V_{i+1,j} - V_{i,j}}{\Delta t} \qquad \text{(beda maju)}$$

$$\frac{\partial V}{\partial S} \approx \frac{V_{i,j+1} - V_{i,j-1}}{2\Delta S} \qquad \text{(beda pusat turunan pertama)}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \approx \frac{V_{i,j+1} - 2V_{i,j} + V_{i,j-1}}{\Delta S^2} \qquad \text{(beda pusat turunan kedua)}$$

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \left(V_{i,j+1} - 2V_{i,j} + V_{i,j-1}\right) + rS\left(\frac{V_{i,j+1} - V_{i,j-1}}{2\Delta S}\right) + \left(\frac{V_{i+1,j} - V_{i,j}}{\Delta t}\right) - rV_{i,j} = 0$$

$$\left(\frac{rj\Delta t}{2} - \frac{\sigma^2 j^2 \Delta t}{2}\right)V_{i,j-1} + \left(1 + \sigma^2 j^2 \Delta t + r\Delta t\right)V_{i,j} + \left(-\frac{rj\Delta t}{2} - \frac{\sigma^2 j^2 \Delta t}{2}\right)V_{i,j+1} = V_{i+1,j}$$

Sehingga dapat disederhanakan menjadi

$$V_{i+1,j} = a_j V_{i,j-1} + b_j V_{i,j} + c_j V_{i,j+1} \qquad (2.33)$$

dengan

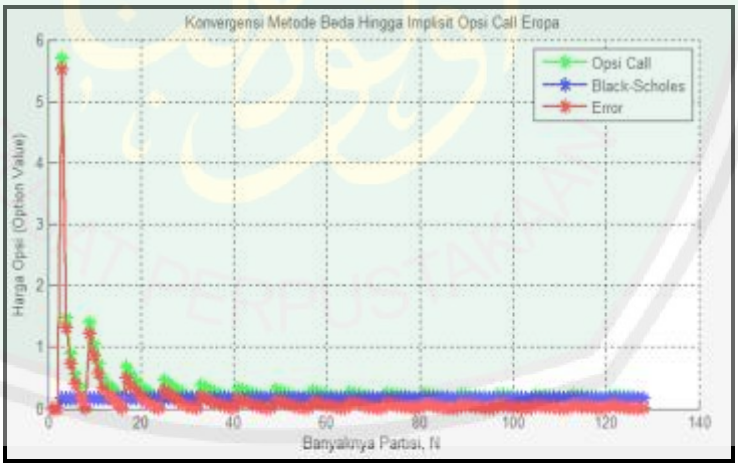
$$a_j = \frac{rj\Delta t}{2} - \frac{\sigma^2 j^2 \Delta t}{2},\; b_j = 1 + \sigma^2 j^2 \Delta t + r\Delta t,\; c_j = -\frac{rj\Delta t}{2} - \frac{\sigma^2 j^2 \Delta t}{2}$$

Masukkan nilai i = 0, 1, 2, ...,$(N-1)$ dan$j$ = 1, 2, ..., $(M-1)$ pada persamaan (2.33)sehingga diperoleh suatu sistem persamaan linear yang dapat dinyatakan dalam matriks, yaitu:

$$\begin{bmatrix} V_{i+1,1} \\ V_{i+1,2} \\ \vdots \\ V_{i+1,(m-2)} \\ V_{i+1,(m-2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{(m-2)} & b_{(m-2)} & c_{(m-2)} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{(m-1)} & b_{(m-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{i,1} \\ V_{i,2} \\ \vdots \\ V_{i,(m-2)} \\ V_{i,(m-1)} \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

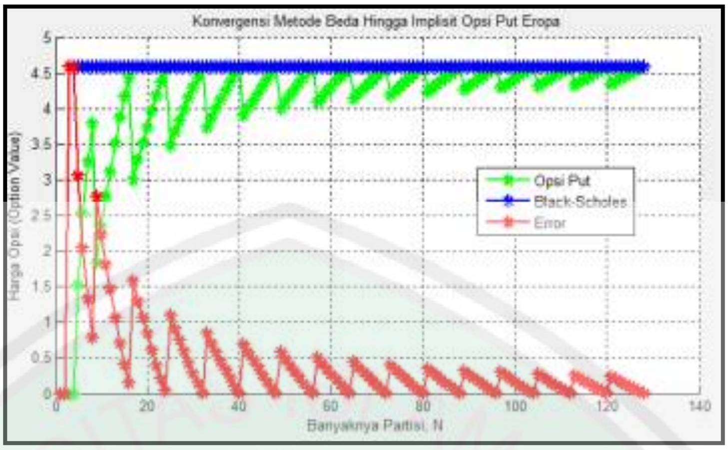
dari matriks tridiagonal persamaan (2.34) dapat dinyatakan dengan $V_{i+1,j} = AV_{i,j}$ dimana A adalah matriks tridiagonal dengan ukuran $(M-1)\text{x}(M-1)$dan selesaiannya adalah $V_{i,j} = \left(A^T A\right)^{-1} A^T V_{i+1,j}$ yang berukuran. $(M-1)$ x 1.

Simulasi Komputasi pada opsi eropa dan opsi Asia metode beda hingga implisit pada penelitian terahulu bertutut-turut pada gambar 2.4, 2.5 dan 2.6 yaitu:



Gambar 2.4 Grafik Simulasi Metode Beda Hingga Implisit Opsi *Call* Eropa dengan N=128

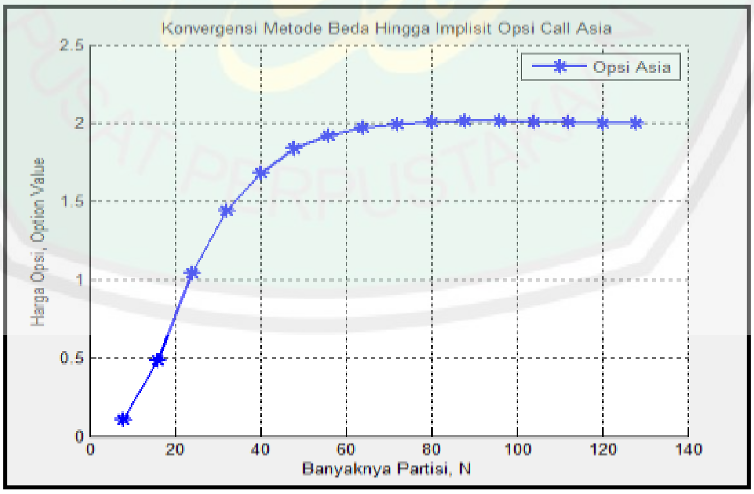
Gambar 2.4 menunjukkan simulasi metode beda hingga implisit opsi *call* Eropa pada partisi N=128 mulai mendekati (konvergen) pada opsi *call Black-Scholes* dengan galat yang semakin kecil karena partisi N diperbanyak.



Gambar 2.5 Grafik Simulasi Metode Beda Hingga Implisit Opsi *Put* Eropa dengan N=128

Gambar 2.5 menunjukkan simulasi pergerakan harga opsi pada metode beda hingga implisit opsi *put* Eropa dengan N=128 juga mulai menekati (konergen) ke harga opsi *put Balack-Scholes* dengan galat yang lebih kecil.

Metode beda hingga implisit opsi *call* dan *put* dapat di terapkan pada opsi Eropa sehingga metoe ini dapat digunakan untuk opsi Asia.



Gambar 2.6 Grafik Simulasi Metode Beda Hingga Implisit Opsi *Call* Asia dengan N=128

Pada gambar 2.6 menunjukkan grafik pergerakan harga opsi *call* Asia dengan N=128 pada metode beda hingga implisit. Karena pada opsi Asia tidak memiliki solusi analitik maka semakin di perbanyak partisi N maka akan konergen pada satu titik.

2.15.2 Metode Beda Hingga Eksplisit

Persamaan beda hingga eksplisit diperoleh dengan mensubtitusikan aproksimasi beda maju, beda pusat turunan pertama dan beda pusat turunan kedua ke persamaan (2.13), sebagai berikut:

$$\frac{\partial V}{\partial t} \approx \frac{V_{i+1,j} - V_{i,j}}{\Delta t} \qquad \text{(beda maju)}$$

$$\frac{\partial V}{\partial S} \approx \frac{V_{i+1,j+1} - V_{i+1,j-1}}{2\Delta S} \qquad \text{(beda pusat turunan pertama)}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \approx \frac{V_{i+1,j+1} - 2V_{i+1,j} + V_{i+1,j-1}}{\Delta S^2} \qquad \text{(beda pusat turunan kedua)}$$

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \left(V_{i+1,j+1} - 2V_{i+1,j} + V_{i+1,j-1}\right) + rS\left(\frac{V_{i+1,j+1} - V_{i+1,j-1}}{2\Delta S}\right) + \left(\frac{V_{i+1,j} - V_{i,j}}{\Delta t}\right) - rV_{i,j} = 0$$

$$\frac{1}{1+r\Delta t}\left(\left(\frac{\sigma^2 j^2 \Delta t}{2} - \frac{rj\Delta t}{2}\right)V_{i+1,j-1} + \left(1 - \sigma^2 j^2 \Delta t\right)V_{i+1,j} + \left(\frac{\sigma^2 j^2 \Delta t}{2} + \frac{rj\Delta t}{2}\right)\right)V_{i+1,j+1} = V_{i,j}$$

Sehingga dapat disederhanakan menjadi

$$V_{i,j} = a_j V_{i+1,j-1} + b_j V_{i+1,j} + c_j V_{i+1,j+1} \qquad (2.35)$$

$$a_j = \frac{1}{1+r\Delta t}\left(\frac{\sigma^2 j^2 \Delta t}{2} - \frac{rj\Delta t}{2}\right),\ b_j = \frac{1}{1+r\Delta t}\left(1 - \sigma^2 j^2 \Delta t\right), \text{ dan}$$

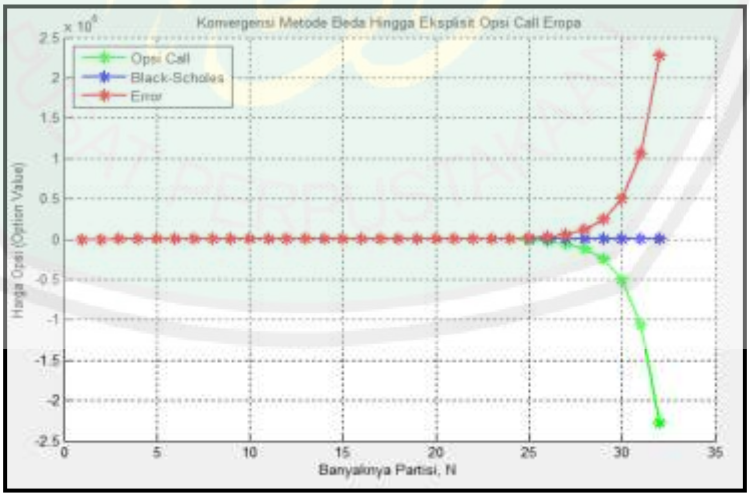
$$c_j = \frac{1}{1+r\Delta t}\left(\frac{\sigma^2 j^2 \Delta t}{2} + \frac{rj\Delta t}{2}\right)$$

Jika pada persamaan (2.35) nilai i = 0, 1, 2, ..., $(N-1)$ dan j = 1, 2, ..., $(M-1)$ di jalankan maka akan diperoleh suatu sistem persamaan linear yang dapat dinyatakan dalam matriks, yaitu:

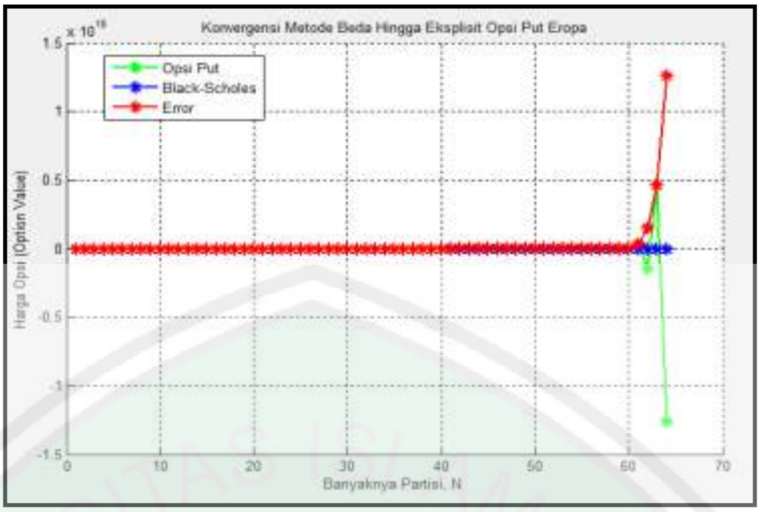
$$\begin{bmatrix} V_{i,1} \\ V_{i,2} \\ \vdots \\ V_{i,(m-1)} \\ V_{i,m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{(m-2)} & b_{(m-2)} & c_{(m-2)} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{(m-1)} & b_{(m-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{i+1,1} \\ V_{i+!,2} \\ \vdots \\ V_{i+1,(m-2)} \\ V_{i+1,(m-1)} \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

dari matriks tridiagonal persamaan (2.36) dapat dinyatakan dengan $V_{i,j} = BV_{i+1,j}$ dimana B adalah matriks tridiagonal dengan ukuran $(M-1)$ x $(M-1)$ yang unsur-unsur $V_{i+1,j}$ telah diketahui dan selesaiannya adalah $V_{i,j} = BV_{i+1,j}$ yang berukuran $(m-1)$ x 1.

Simulasi komputasi untuk metode beda hingga eksplisit pada opsi Eropa, yaitu :



Gambar 2.7 Grafik Simulasi Metode Beda Hingga Eksplisit Opsi Call Eropa dengan N=32



Gambar 2.8 Grafik Simulasi Metode Beda Hingga Eksplisit Opsi *Put* Eropa dengan N=64

Gambar 2.6(a) dan 2.6(b) menunjukkan pergerakan harga opsi metode beda hingga eksplisit opsi *call* Eropa dan *put* Eropa tidak mendekati (konvergen) terhadap harga opsi *call* dan *put Black-Scholes* sehingga metode beda hingga eksplisit tidak dapat diterapkan pada opsi Asia

2.16 Matriks Tridiagonal

Matriks adalah suatu himpunan kuantitas-kuantitas (yang disebut elemen), disusun dalam bentuk persegi panjang yang memuat baris-baris dan kolom-kolom. Matriks memiliki beberapa jenis, salah satunya matriks tridiagonal. Matriks tridiagonal adalah matriks bujur sangkar yang semua elemen- elemennya bernilai 0 kecuali elemen-elemen diagonal utama serta samping kanan dan kirinya. Matriks-matriks bujur sangkar berordo n yang dimisalkan matriks A dan B yang berlaku $AB = BA = I$ maka B dikatakan invers dari A dan ditulis $B = A^{-1}$, sebaliknya A adalah invers dari B yang dapat ditulis $A = B^{-1}$. Tidak semua matriks bujur sangkar mempunyai invers. Suatu matriks dikatakan memiliki invers jika nilai determinannyatidak sama dengan 0 yang disebut matriks non singular (Rachmani, 2008).

Dengan memisalkan A adalah matriks tridiagonal yaitu :

$$A = \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 \\ 0 & b & c & d \\ 0 & 0 & d & e \end{bmatrix} \tag{2.37}$$

Untuk mendapatkan nilai determinannya, yaitu:

$$\det A = a\begin{bmatrix} b & c & 0 \\ b & c & d \\ 0 & d & e \end{bmatrix} - b\begin{bmatrix} a & c & 0 \\ 0 & c & d \\ 0 & d & e \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & b & d \\ 0 & 0 & e \end{bmatrix} - 0\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & d \end{bmatrix}$$

$$\det A = a[b(ce - d^2) - c(be - 0) + 0(bd - 0)] - b[a(be - 0) - c(0 - 0) + 0(0 - 0)] + 0 - 0$$

$$\det A = a[-bd^2] - b[abe]$$

$$\det A = -abd^2 - ab^2e \tag{2.38}$$

sehingga determinan matriks tridiagonal A bernilai dan tidak sama dengan 0 sehingga matriks tridiagonal memiliki invers.

2.17 Perspektif Islam pada Saham

Secara umum pasar modal atau bursa efek adalah gedung atau ruangan tempat diadakannya perdagangan efek atau saham, sedangkan yang dimaksud saham adalah tanda penyertaan modal pada suatu perusahaan (Suhrawardi, 2000). Pasar modal yang mengikuti prinsip-prinsip Islam dinamakan pasar modal syariah yang kegiatannya bersangkutan dengan penawaran umum dan perdagangan efek, perusahaan publik yang berkaitan dengan efek yang diterbitkannya serta lembaga dan profesi yang berkaitan dengan efek yang menjalankan kegiatannya sesuai syariat Islam (Aziz, 2010).

Modal yang diperdagangkan di pasar modal merupakan modal yang diukur dari waktunya disebut modal jangka panjang. Oleh karena itu, sangat menguntungkan karena pengembalian modal tersebut berjarak relatif panjang, baik yang bersifat kepemilikan atau yang bersifat hutang (Aziz, 2010).

Saham berupa investasi jangka panjang dan menguntungkan, oleh karena itu Islam menganjurkannya. Hal tersebut dijelaskan dalam al-Qur’an surat al-Hasyr ayat 18 sebagai berikut :

يَٰٓأَيُّهَا ٱلَّذِينَ ءَامَنُوا۟ ٱتَّقُوا۟ ٱللَّهَ وَلْتَنظُرْ نَفْسٌ مَّا قَدَّمَتْ لِغَدٍ ۖ وَٱتَّقُوا۟ ٱللَّهَ ۚ إِنَّ ٱللَّهَ خَبِيرٌۢ بِمَا تَعْمَلُونَ ١٨

Artinya : *“Hai orang-orang yang beriman, bertakwalah kepada Allah dan hendaklah setiap memperhatikan apa yang telah diperbuatnya untuk hari esok (akhirat) dan bertakwalah kepada Allah, sesungguhnya Allah Maha Mengetahui apa yang kamu kerjakan”*

Penulis menyatakan bahwa Surat al-Hasyr ayat 18 menjelaskan tentang pentingnya manusia untuk berinvestasi bukan hanya didunia tetapi juga diakhirat dengan menjalankan perintah dan menjauhi larangan Allah Swt karena sesungguhnya Allah mengetahui apa saja yang dikerjakan manusia didunia dan semua perbuatan itu hendaklah sebagai bekal untuk diakhirat.

Investasi sebagai bekal dunia dan akhirat juga dijelaskan pada al-Qur’an surat Lukman ayat 34:

إِنَّ ٱللَّهَ عِندَهُۥ عِلْمُ ٱلسَّاعَةِ وَيُنَزِّلُ ٱلْغَيْثَ وَيَعْلَمُ مَا فِى ٱلْأَرْحَامِ ۖ وَمَا تَدْرِى نَفْسٌ مَّاذَا
تَكْسِبُ غَدًا ۖ وَمَا تَدْرِى نَفْسٌۢ بِأَىِّ أَرْضٍ تَمُوتُ ۚ إِنَّ ٱللَّهَ عَلِيمٌ خَبِيرٌۢ ﴿٣٤﴾

Artinya: *"Sesungguhnya Allah, hanya pada sisi-Nya sajalah pengetahuan hari kiamat; dan Dialah yang menurunkan hujan, dan mengetahui apa yang ada pada rahim. Dan tiada seorangpun yang dapat mengetahui (dengan pasti) apa yang akan diusahakan besok. Dan tiada seorang-pun yang dapat mengetahui bumi mana dia akan mati. Sesungguhnya Allah Maha Mengetahui lagi Maha Penyayang."*

Pada surat Lukman ayat 34 ini bermakna bahwa investasi sangatlah penting dan dianjurkan karena manusia tidak akan pernah tahu hari kiamat kapan akan terjadi sehingga manusia di haruskan untuk berinvestasi sebagai bekal dunia serta memiliki keturunan adalah investasi akhirat dan juga dunia karena anak adalah anugrah yang diberikan Allah Swt dan doa anak akan menyelamatkan orang tua dari siksaan neraka. Karena itulah investasi sangatlah dianjurkan (Huda, 2010).

Penulis berpendapat bahwa investasi di dunia dan akhirat sangatlah penting dan dianjurkan agama Islam tetapi dengan mentaati semua syariat agama Islam itu sendiri. Investasi akhirat salah satu contohnya yaitu mendidik anak menjadi anak sholeh dan sholehah yang mentaati semua ajaran Allah Swt dan larangannya. Sedangkan investasi dunia bisa berupa saham. Saham ini bisa menjadi haram dan bisa menjadi halal karena jika saham menerapkan bunga maka itu akan menjadi haram karena bunga menurut Islam adalah riba tetapi jika saham berlandasan syariat agama Islam maka saham dianggap halal.

2.17.1 Instrumen Pasar Modal Syariah

Ada berbagai macam instrument pasar modal, menurut Obaidullah instumen penting yang dapat diperdagangkan sebagai hasil pemikiran menurut hukum Islam, yaitu (Muhammad, 2004):

1. Dana mudharabah (*Mudharabah Fund*) merupakan instrument keuangan bagi investor untuk pembiayaan bersama proyek besar berdasarkan prinsip bagi hasil
2. Saham biasa perusahaan (*Common Stock*), yang diterbitkan oleh perusahaan yang didirikan untuk kegiatan bisnis sesuai dengan Islam.
3. Obligasi muqarabah (*Muqarabah Bond*), yaitu pembiayaan proyek yang terpisah dari kegiatan umum perusahaan.
4. Obligasi bagi hasil (*Profit Sharing Bond*), diterbitkan oleh perusahaan yang aktivitas bisnisnya sesuai dengan syariah Islam dan berdasarkan prinsip bagi hasil.
5. Saham preferen (*Preferred Stock*), memiliki hak-hak istimewa seperti *dividen* tetap dan prioritas dalam likuidasi karena terdapat unsure pendapatan tetap (seperti bunga), maka dilarang menurut Islam. Namun ini masih menjadi bahan pembahasan.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Pendekatan Penelitian

Berdasarkan dengan rumusan masalah dan tujuan penelitian yang sudah dipaparkan, maka penelitian tentang Analisis Metode Beda Hingga dengan Transformasi Peubah pada Perhitungan Harga Opsi Asia ini menggunakan pendekatan studi literatur.Pendekatan studi literatur merupakan pengumpulan bahan pustaka sebagai bahan penunjang untuk menyelesaikan penelitian ini.

3.2 Analisis Data

Data didapatkan dari memisalkan nilai yang merupakan faktor pengaruh perhitungan harga opsi yaitu harga saham awal, waktu jatuh tempo, volatilitas harga saham, bunga bebas resiko dan harga ketentan yang disepakati di kontrak opsi.Pada penelitian ini analisis data menggunakan software Matlab R2010a.

3.3 Tahap Penelitian

Penelitian ini menggunakan dua metode beda hingga yaitu metode beda hingga implisit dan eksplisit sehingga tahapan pada penelitian ini yaitu:

1. Mentransformasikan harga saham S menjadi $\ln S$
2. Merumuskan persamaan *Black-Scholes* dengan transformasi peubah.
3. Mensubtitusikan metodebeda hingga implisit dan eksplisit pada persamaan *Black-Scholes* dengan transformasi peubah

4. Membuat simulasi dengan metode beda hingga implisit dan eksplisit dengan transformasi peubah pada suatu kasus tertentu. Dalam penelitian ini variabel yang diambil adalah harga saham untuk menentukan harga opsi saham. Adapun langkah-langkah yang dilakukan untuk mengkaji metode beda hingga implisit dan eksplisit dengan transformasi peubah menggunakan simulasi program Matlab R2010a, sebagai berikut :
   1. Menentukan harga saham awal (S_0), harga ketentuan (K), waktu jatuh tempo (T), tingkat suku bunga resiko (r) dan standart deviasi (σ) dari suatu harga saham tertentu.
   2. Membangkitkan harga saham pada opsi Asia pada masa tertentu
   3. Menetukan harga opsi call dan put Asia pada langkah 2 dengan menggunakan model harga opsi Asia.
   4. Mengulangi langkah 2 dan 3 sebanyak N kali (Misalkan N berulang untuk 8, 16, 32, 64, 128 dan 256)
   5. Menentukan nilai interval opsi
5. Menganalisis hasil simulasi metode beda hingga implisit dan eksplisit dengan transformasi peubahpada perhitungan harga opsi Asia.
6. Membandingkan hasil simulasi metode beda hingga implisit dan eksplisit dengan metode beda hingga implisit dan eksplisit dengan transformasi peubah.

BAB IV

PEMBAHASAAN

4.1 Transformasi Peubah

Transformasi peubah adalah peubah yang ditransformasikan. Peubah saham dinotasikan sebagai S dan akan di transformasikan menjadi $S = e^y$ karena harga saham S nonlinear, maka dapat dinyatakan menjadi bentuk eksponensial e^y sehingga akan didapatkan $y = \ln S$ dan $V(S,t) \sim W(y,\tau)$. Oleh karena itu, peubah yang akan digunakan untuk perhitungan harga saham Asia adalah $\ln S$. Penggunaan $\ln S$ akan lebih efisien dari pada S karena metode beda hingga akan diterapkan, karena jika standart deviasi σ pada peubah S konstan, maka pada peubah $\ln S$ juga konstan. Transformasi standart deviasi $\ln S$ pada interval Δt tidak bergantung pada S dan t. Karena $V(S,t) \sim W(y,\tau)$, maka akan didapatkan turunan parsial, sebagai berikut :

$$\frac{\partial V}{\partial S} = \frac{\partial W}{\partial S}$$

karena W tidak dapat diturunkan terhadap S, sehingga digunakan aturan berantai turunan, yaitu:

$$\frac{\partial V}{\partial S} = \frac{\partial W}{\partial S}\frac{\partial y}{\partial y}$$

$$\frac{\partial V}{\partial S} = \frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial S}$$

$$\frac{\partial V}{\partial S} = \frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial(\ln S)}{\partial S} = \frac{\partial W}{\partial y}\frac{1}{S}$$

maka
$$\frac{\partial V}{\partial S} = \frac{\partial W}{\partial y}e^{-y} \qquad (4.1)$$

Sedangkan untuk turunan ke dua, yaitu :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = \frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{\partial W}{\partial y} e^{-y}\right)$$

Karena W tidak dapat diturunkan terhadap S sehingga digunakan aturan berantai, yaitu:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial W}{\partial y} e^{-y}\right)\frac{\partial y}{\partial S}$$

$$= \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} e^{-y} + \frac{\partial W}{\partial y}\left(-e^{-y}\right)\right)\frac{\partial (\ln S)}{\partial S}$$

$$= \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{\partial W}{\partial y}\right) e^{-y}\frac{1}{S}$$

$$= \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{\partial W}{\partial y}\right) e^{-y}\frac{1}{e^{y}}$$

$$= \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{\partial W}{\partial y}\right) e^{-2y} \tag{4.2}$$

dan untuk turunan parsial terhadap t , yaitu:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial W}{\partial \tau} \tag{4.3}$$

4.2 *Black-Scholes* dengan Transformasi Peubah

Persamaan (2.24) merupakan persamaan umum *Black-Scholes* yang akan ditransformasikan dengan cara mensubtitusikan persamaan umum *Black-Scholes* ke persamaan (4.1), (4.2) dan (4.3), sehingga didapatkan persamaan *Black-Scholes* dengan transformasi peubah :

$$0=\frac{\partial W}{\partial \tau}+re^{y}\frac{\partial W}{\partial y}e^{-y}+\frac{1}{2}\sigma^{2}e^{2y}\left(\frac{\partial^{2}W}{\partial y^{2}}-\frac{\partial W}{\partial y}\right)e^{-2y}-rW$$

$$0=\frac{\partial W}{\partial \tau}+re^{y}\frac{\partial W}{\partial y}+\frac{1}{2}\sigma^{2}\left(\frac{\partial^{2}W}{\partial y^{2}}-\frac{\partial W}{\partial y}\right)-rW$$

$$0=\frac{\partial W}{\partial \tau}+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^{2}\right)\frac{\partial W}{\partial y}+\frac{1}{2}\sigma^{2}\frac{\partial^{2}W}{\partial y^{2}}-rW \tag{4.4}$$

Persamaan (4.4) adalah persamaan *Black-Scholes* dengan transformasi peubah yang akan diterapkan pada metode beda hingga, dengan peubah y dipartisi dengan interval Δy, yaitu $0, \Delta y, 2\Delta y, \dots, y, y+\Delta y, \dots, \infty$ dengan harga saham minimum 0 dan maksimum ∞. Ketika menggunakan metode ini maka dipilih nilai Δy sekecil-kecilnya dan saham maksimum berhingga. Karena nilai saham minimum mendekati nol maka $\ln S$ juga mendekati nol. Sedangkan diskritisasi untuk t yaitu $0, \Delta\tau, 2\Delta\tau, \dots, \tau, \tau+\Delta\tau, \dots, \infty$. Sehingga aproksimasi pada waktu τ_i dan pada saham y_j dengan $i = 0, 1, 2, \dots, M$ dan $j = 0, 1, 2, \dots, N$. Maka didapatkan :

$$W_j^i = W\left(y_i, \tau_j\right) \tag{4.5}$$

4.3 Metode Beda Hingga

Salah satu cara untuk menyelesaikan persamaan diferensial adalah dengan menggunakan metode beda hingga. Metode beda hingga menggunakan pendekatan deret Taylor untuk mendapatkan aproksimasi turunan-turunan persamaan tersebut dan merubahnya menjadi sistem persamaan linear.

4.3.1 Aproksimasi Metode Beda Hingga

Metode beda hingga menggunakan pendekatan deret Taylor. Aproksimasi turunan parsial menggunakan ekspansi deret Taylor $W(\tau, S+\Delta S)$ dan $W(\tau, S-\Delta S)$ dengan $W(\tau, y)$ dinyatakan W_j^i, yaitu :

$$W(\tau, y+\Delta y) = W(\tau, y) + \frac{\partial W}{\partial y}\Delta y + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\Delta y^2 + O(\Delta y^3) \tag{4.6}$$

$$W(\tau, y-\Delta y) = W(\tau, y) - \frac{\partial W}{\partial y}\Delta y + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\Delta y^2 - O(\Delta y^3) \tag{4.7}$$

dengan menggunakan persamaan (4.6) didapatkan persamaan beda maju, yaitu:

$$W(\tau, y+\Delta y) = W(\tau, y) + \frac{\partial W}{\partial y}\Delta y + O(\Delta y^2)$$

$$W(\tau, y+\Delta y) - W(\tau, y) = \frac{\partial W}{\partial y}\Delta y + O(\Delta y^2)$$

$$\frac{\partial W}{\partial y}\Delta y \approx W(\tau, y+\Delta y) - W(\tau, y)$$

$$\approx \frac{W(\tau, y+\Delta y) - W(\tau, y)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} \approx \frac{W_{j+1}^i - W_j^i}{\Delta y} \tag{4.8}$$

dengan menggunakan persamaan (4.7) didapatkan persamaan beda mundur, yaitu:

$$W(\tau, y-\Delta y) = W(\tau, y) - \frac{\partial W}{\partial y}\Delta y + O(\Delta y^2)$$

$$W(\tau, y) - W(\tau, y-\Delta y) = \frac{\partial W}{\partial y}\Delta y + O(\Delta y^2)$$

$$\frac{\partial W}{\partial y}\Delta y \approx W(\tau, y) - W(\tau, y-\Delta y)$$

$$\approx \frac{W(\tau, y) - W(\tau, y - \Delta y)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} \approx \frac{W_j^i - W_{j-1}^i}{\Delta y} \qquad (4.9)$$

sedangkan dengan mengurangkan (4.6) dari (4.7) maka akan didapatkan persamaan beda pusat, yaitu:

$$\tau W(\tau, y + \Delta y) - W(\tau, y - \Delta y) = W(\tau, y) + \frac{\partial W}{\partial y}\Delta y - \left(W(\tau, y) - \frac{\partial W}{\partial y}\Delta y \right) + O(\Delta y^2)$$

$$W(\tau, y + \Delta y) - W(\tau, y - \Delta y) = 2\frac{\partial W}{\partial y}\Delta y + O(\Delta y^2)$$

$$W(\tau, y + \Delta y) - W(\tau, y - \Delta y) \approx 2\frac{\partial W}{\partial y}\Delta y$$

$$\frac{W(\tau, y + \Delta y) - W(\tau, y - \Delta y)}{2\Delta y} \approx \frac{\partial W}{\partial y} \qquad (4.10)$$

untuk mendapatkan turunan kedua $W(t, y)$ dengan menggunakan beda hingga maju persamaan (4.6), yaitu:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \approx \left(\frac{W(\tau, y + \Delta y) - W(\tau, y)}{\Delta y} - \frac{\partial W}{\partial y} \right) \frac{2}{\Delta y} \qquad (4.11)$$

untuk $\partial W / \partial y$ didapatkan dengan menggunakan beda hingga mundur pada persamaan (4.7) $W(\tau, y + \Delta y)$ sehingga persamaan (4.11) menjadi:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \approx \left(\frac{W(\tau, y + \Delta y) - W(\tau, y)}{\Delta y} - \left(\frac{W(\tau, y) - W(\tau - \Delta y)}{\Delta y} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\frac{\Delta y}{2} \right) \right) \frac{2}{\Delta y}$$

$$\approx 2\left(\frac{W(\tau, y + \Delta y) - W(\tau, y)}{\Delta y^2} - \frac{W(\tau, y) - W(\tau - \Delta y)}{\Delta y^2} \right) - \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}$$

$$2\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \approx 2\left(\frac{W(\tau, y + \Delta y) - W(\tau, y)}{\Delta y^2} - \frac{W(\tau, y) - W(\tau - \Delta y)}{\Delta y^2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \approx \frac{W(\tau, y+\Delta y) - 2W(\tau, y) + W(\tau - \Delta y)}{\Delta y^2} \tag{4.12}$$

yang merupakan aproksimasi turunan kedua.

Untuk ekspansi deret Taylor untuk $W(\tau + \Delta t, y)$ dan $W(\tau - \Delta t, y)$ yaitu:

$$W(\tau + \Delta\tau, y) = W(\tau, y) + \frac{\partial W}{\partial \tau}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2}\Delta\tau^2 + O(\Delta\tau^3) \tag{4.13}$$

$$W(\tau - \Delta\tau, y) = W(\tau, y) - \frac{\partial W}{\partial t}\Delta\tau + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2}\Delta\tau^2 - O(\Delta\tau^3) \tag{4.14}$$

dengan menggunakan persamaan (4.13) diperoleh persamaan beda maju, yaitu

$$W(\tau + \Delta\tau, y) = W(\tau, y) + \frac{\partial W}{\partial \tau}\Delta\tau + O(\Delta\tau^2)$$

$$W(\tau + \Delta\tau, y) - W(\tau, y) = \frac{\partial W}{\partial \tau}\Delta\tau + O(\Delta\tau^2)$$

$$W(\tau + \Delta\tau, y) - W(\tau, y) \approx \frac{\partial W}{\partial \tau}\Delta\tau$$

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} \approx \frac{W(\tau + \Delta\tau, y) - W(\tau, y)}{\Delta\tau}$$

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} \approx \frac{W_j^{i+1} - W_j^i}{\Delta\tau} \tag{4.15}$$

Dengan menggunakan persamaan (4.14) maka didapatkan beda mundur, yaitu:

$$W(\tau - \Delta\tau, y) = W(\tau, y) - \frac{\partial W}{\partial \tau}\Delta\tau + O(\Delta\tau^2)$$

$$W(\tau, y) - W(\tau - \Delta\tau, y) \approx \frac{\partial W}{\partial t}\Delta\tau$$

$$\frac{W(\tau, y) - W(\tau - \Delta\tau, y)}{\Delta\tau} \approx \frac{\partial W}{\partial \tau} \tag{4.16}$$

4.3.2 Skema Metode Beda Hingga Implisit

Harga opsi menggunakan metode beda hingga implisit dari persamaan *Black-Scholes* diperoleh dengan turunan parsial $\partial W / \partial \tau$ yang diaproksimasi menggunakan beda maju dan untuk turunan parsial $\partial W / \partial y$, dan $\partial^2 W / \partial y^2$ yang diaproksimasi menggunakan beda pusat, yaitu:

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} \approx \frac{W_j^{i+1} - W_j^i}{\Delta \tau} \qquad \text{(beda maju)} \tag{4.17}$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} \approx \frac{W_{j+1}^i - W_{j-1}^i}{2\Delta y} \qquad \text{(beda pusat turunan pertama)} \tag{4.18}$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \approx \frac{W_{j+1}^i - 2W_j^i + W_{j-1}^i}{\Delta y^2} \qquad \text{(beda pusat turunan kedua)} \tag{4.19}$$

kemudian mensubtitusikan persamaan (4.17), (4.18), dan (4.19) ke persamaan (4.4), maka akan diperoleh

$$\frac{W_j^{i+1} - W_j^i}{\Delta \tau} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{\left(W_{j+1}^i - W_{j-1}^i\right)}{2\Delta y} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\left(W_{j+1}^i - 2W_j^i + W_{j-1}^i\right)}{\Delta y^2} - rW_j^{i+1} = 0$$

$$\left(\frac{W_j^{i+1}}{\Delta \tau} - \frac{W_j^i}{\Delta \tau}\right) + \left(\frac{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)W_{j+1}^i}{2\Delta y} - \frac{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)W_{j-1}^i}{2\Delta y}\right) + \left(\frac{\sigma^2 W_{j+1}^i}{2\Delta y^2} - \frac{\sigma^2 W_j^i}{\Delta y^2} + \frac{\sigma^2 W_{j-1}^i}{2\Delta y^2}\right) - rW_j^{i+1} = 0 \tag{4.20}$$

subtitusikan $\Delta y = \dfrac{y_j}{j}$ ke persamaan (4.20) sehingga persamaan menjadi

$$\left(\frac{W_j^{i+1}}{\Delta \tau} - \frac{W_j^i}{\Delta \tau}\right) + \left(\frac{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 j\right)W_{j+1}^i}{2y_j} - \frac{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)jW_{j-1}^i}{2y_j}\right) + \left(\frac{\sigma^2 j^2 W_{j+1}^i}{2y_j^{\,2}} - \frac{\sigma^2 j^2 W_j^i}{y_j^{\,2}} + \frac{\sigma^2 j^2 W_{j-1}^i}{2y_j^{\,2}}\right) - rW_j^{i+1} = 0$$

kemudian kedua ruas dikalikan dengan $\Delta \tau$, maka diperoleh

$$\left(-1-\frac{\sigma^2 j^2\Delta\tau}{y_j^{\ 2}}\right)W_j^i+\left(\frac{\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)j\Delta\tau}{2y_j}+\frac{\sigma^2 j^2\Delta\tau}{2y_j^{\ 2}}\right)W_{j+1}^i+\left(-\frac{\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)j\Delta\tau}{2y_j}+\frac{\sigma^2 j^2\Delta\tau}{2y_j^{\ 2}}\right)W_{j-1}^i=\left(r\Delta\tau-1\right)W_j^{i+1}$$

$$\frac{1}{r\Delta\tau-1}\left(\left(-\frac{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)j\Delta\tau}{2y_j}+\frac{\sigma^2 j^2\Delta\tau}{2y_j^{\ 2}}\right)W_{j-1}^i+-1-\frac{\sigma^2 j^2\Delta\tau}{y_j^{\ 2}}W_j^i+\left(\frac{\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)j\Delta\tau}{2y_j}+\frac{\sigma^2 j^2\Delta\tau}{2y_j^{\ 2}}\right)W_{j+1}^i\right)=W_j^{i+1} \qquad (4.21)$$

Persamaan (4.21) dapat disederhanakan menjadi

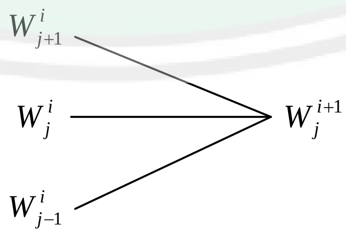
$$\alpha_j W_{j-1}^i+\beta_j W_j^i+\gamma_j W_{j+1}^i=W_j^{i+1} \qquad (4.22)$$

untuk $i=(N-1),...,1,0$ dan $j=1,2,...,(M-1)$

dengan

$$\alpha_j=\frac{1}{r\Delta\tau-1}\left(-\frac{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)j\Delta t}{2y_j}+\frac{\sigma^2 j^2\Delta\tau}{2y_j^{\ 2}}\right),\beta_j=\frac{1}{r\Delta\tau-1}\left(-1-\frac{\sigma^2 j^2\Delta\tau}{y_j^{\ 2}}\right),$$
$$\delta_j=\frac{1}{r\Delta\tau-1}\left(\frac{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)j\Delta t}{2y_j}+\frac{\sigma^2 j^2\Delta\tau}{2y_j^{\ 2}}\right) \qquad (4.23)$$

Dari persamaan (4.23) maka dapat dibentuk skema untuk metode beda hingga implisit:



Gambar 4.1 Skema Metode Beda Hingga Implisit

4.3.3 Skema Metode Beda Hingga Eksplisit

Untuk mendiskritisasi model persamaan *Black-Scholes* dengan metode beda hingga eksplisit yaitu menggunakan aproksimasi beda maju dan pusat.

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} \approx \frac{W_j^{i+1} - W_j^i}{\Delta \tau} \qquad \text{(beda maju)} \tag{4.24}$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} \approx \frac{W_{j+1}^{i+1} - W_{j-1}^{i+1}}{2\Delta y} \qquad \text{(beda pusat turunan pertama)} \tag{4.25}$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \approx \frac{W_{j+1}^{i+1} - 2W_j^{i+1} + W_{j-1}^{i+1}}{\Delta y^2} \qquad \text{(beda pusat turunan kedua)} \tag{4.26}$$

kemudian mensubtitusikan persamaan (4.24), (4.25) dan (4.26) ke dalam persamaan (4.4), maka akan diperoleh

$$\left(\frac{W_j^{i+1}}{\Delta\tau} - \frac{W_j^i}{\Delta\tau}\right) + \left(\frac{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)W_{j+1}^{i+1}}{2\Delta y} - \frac{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)W_{j-1}^{i+1}}{2\Delta y}\right) + \left(\frac{\sigma^2 W_{j+1}^{i+1}}{2\Delta y^2} - \frac{\sigma^2 W_j^{i+1}}{\Delta y^2} + \frac{\sigma^2 W_{j-1}^{i+1}}{2\Delta y^2}\right) - rW_j^i = 0 \tag{4.27}$$

subtitusikan $\Delta y = \dfrac{y_j}{j}$ ke persamaan (4.27) sehingga persamaan menjadi

$$\left(\frac{W_j^{i+1}}{\Delta\tau} - \frac{W_j^i}{\Delta\tau}\right) + \left(\frac{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)jW_{j+1}^{i+1}}{2y_j} - \frac{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)jW_{j-1}^{i+1}}{2y_j}\right) + \left(\frac{\sigma^2 j^2 W_{j+1}^{i+1}}{2y_j^2} - \frac{\sigma^2 j^2 W_j^{i+1}}{y_j^2} + \frac{\sigma^2 j^2 W_{j-1}^{i+1}}{2y_j^2}\right) - rW_j^i = 0$$

kemudian kedua ruas dikalikan dengan $\Delta\tau$, maka diperoleh

$$\left(1 - \frac{\sigma^2 j^2 \Delta\tau}{y_j^2}\right)W_j^{i+1} + \left(\frac{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)j\Delta\tau}{2y_j} + \frac{\sigma^2 j^2 \Delta\tau}{2y_j^2}\right)W_{j+1}^{i+1} + \left(-\frac{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)j\Delta\tau}{2y_j} + \frac{\sigma^2 j^2 \Delta\tau}{2y_j^2}\right)W_{j-1}^{i+1} = (r\Delta\tau + 1)W_j^i$$

$$\frac{1}{r\Delta\tau + 1}\left(\left(-\frac{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)j\Delta\tau}{2y_j} + \frac{\sigma^2 j^2 \Delta\tau}{2y_j^2}\right)W_{j-1}^{i+1} + \left(1 - \frac{\sigma^2 j^2 \Delta\tau}{y_j^2}\right)W_j^{i+1} + \left(\frac{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)j\Delta\tau}{2y_j} + \frac{\sigma^2 j^2 \Delta\tau}{2y_j^2}\right)W_{j+1}^{i+1}\right) = W_j^i \tag{4.28}$$

Persamaan (4.28) dapat disederhanakan menjadi

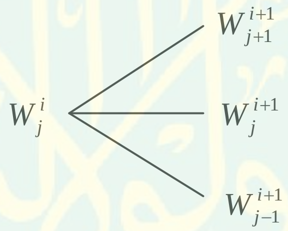
$$\alpha_j W_{j-1}^{i+1} + \beta_j W_j^{i+1} + \gamma_j W_{j+1}^{i+1} = W_j^i \tag{4.29}$$

untuk $i = (N-1),\ldots,1,0$ dan $j = 1,2,\ldots,(M-1)$

dengan

$$\alpha_j = \frac{1}{r\Delta\tau + 1}\left(-\frac{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)\, j\Delta t}{2y_j} + \frac{\sigma^2 j^2 \Delta\tau}{2{y_j}^2}\right), \beta_j = \frac{1}{r\Delta\tau + 1}\left(1 - \frac{\sigma^2 j^2 \Delta\tau}{{y_j}^2}\right),$$
$$\delta_j = \frac{1}{r\Delta\tau + 1}\left(\frac{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)\, j\Delta t}{2y_j} + \frac{\sigma^2 j^2 \Delta\tau}{2{y_j}^2}\right) \tag{4.30}$$

Dari persamaan (4.30), maka dapat di bentuk skema metode beda hingga eksplisit yaitu :



Gambar 4.2 Skema Beda Hingga Eksplisit

4.3.4 Solusi Matriks Metode Beda Hingga Implisit

Persamaan beda hingga implisit dapat membentuk suatu sistem persamaan linear dengan memisalkan nilai harga saham awal (S_0) = 5 (satuan mata uang), harga ketentuan (K) = 10 (satuan mata uang), waktu jatuh tempo (T) = 1 tahun, tingkat suku bunga resiko (r) = 6% , standart deviasi saham tersebut (σ) sebesar 0.5 dan $M = N = 5$ sehingga didapatkan $i = 4,3,2,1,0$ dan $j = 1,2,3,4$.

Serta memisalkan $\xi = 1$, maka akan didapatkan nilai awal, nilai batas atas dan batas bawah sebagai berikut:

- Opsi yang dipilih yaitu opsi *call*, serta V sebagai harga opsi sedangkan untuk harga opsi dengan transformasi peubah di simbolkan W.
- Nilai *payoff* pada akhir periode merupakan nilai awal yang diberikan, dengan menggunakan persamaan (2.23) maka akan didapatkan kemungkinan-kemungkinan harga saham didapatkan :

$$\begin{aligned} S(0) &= 5 \\ S(1) &= 6.8513 \\ S(2) &= 6.95485 \\ S(3) &= 7.05995 \\ S(4) &= 7.16665 \end{aligned} \tag{4.31}$$

Dari kemungkinan-kemungkinan harga saham pada (4.31) dapat ditentukan nilai rata-ratanya, yaitu:

$$\bar{S} = \frac{1}{5}(S(0) + S(1) + S(2) + S(3) + S(4)) = 6.605655 \tag{4.32}$$

Rata-rata pada persamaan (4.32) dapat di sebarkan menjadi beberapa nilai rata-rata yang di dapatkan dengan mengalikan nilai tersebut dengan indeks waktu serta dikali dua dan dibagi banyaknya harga saham yang disebarkan, yaitu:

$$\begin{aligned} \bar{S}_1 &= 2.64262 \\ \bar{S}_2 &= 5.28452 \\ \bar{S}_3 &= 7.92678 \\ \bar{S}_4 &= 10.56904 \\ \bar{S}_5 &= 13.2113 \end{aligned} \tag{4.33}$$

sehingga didapatkan nilai awal yaitu:

$$
\begin{aligned}
V_1^5 &= \max\left(\bar{S}_1 - K, 0\right) \\
&= \max\left((2.64262 - 5), 0\right) = 0 \\
V_2^5 &= \max\left(\bar{S}_2 - K, 0\right) \\
&= \max\left((5.28452 - 5), 0\right) = 0.28452 \\
V_3^5 &= \max\left(\bar{S}_3 - K, 0\right) \\
&= \max\left((7.92678 - 5), 0\right) = 2.92678 \\
V_4^5 &= \max\left(\bar{S}_4 - K, 0\right) \\
&= \max\left((10.56904 - 5), 0\right) = 5.56904 \\
V_5^5 &= \max\left(\bar{S}_5 - K, 0\right) \\
&= \max\left((13.2113 - 5), 0\right) = 8.2113
\end{aligned}
\tag{4.34}
$$

Untuk harga opsi dengan transformasi peubah yang disimbolkan W, nilai W didapatkan dengan merumuskan $W = \ln(V)$ sehingga dengan menggunakan nilai-nilai pada persamaan (4.32) maka, akan di dapatkan nilai-nilai awal pada W_j^5 yaitu:

$$
\begin{aligned}
W_1^5 &= \ln V_1^5 = 0 \\
W_2^5 &= \ln V_2^5 = 0 \\
W_3^5 &= \ln V_3^5 = 1.0739 \\
W_4^5 &= \ln V_4^5 = 1.71722 \\
W_5^5 &= \ln V_5^5 = 2.10551
\end{aligned}
\tag{4.35}
$$

- Nilai *payoff* tertinggi pada setiap periode, yaitu :

$$W_5^4 = W_5^5 e^{-r\Delta t} = 2.10551\, e^{-0.06} = 1.98289$$

$$W_5^3 = W_5^4 e^{-r\Delta t} = W_5^5 e^{-2r\Delta t} = 2.10551\, e^{-2(0.06)} = 2.08039$$

$$W_5^2 = W_5^3 e^{-r\Delta t} = W_5^5 e^{-3r\Delta t} = 2.10551\, e^{-3(0.06)} = 2.06795 \quad (4.36)$$

$$W_5^1 = W_5^2 e^{-r\Delta t} = W_5^5 e^{-4r\Delta t} = 2.10551\, e^{-4(0.06)} = 2.05559$$

$$W_5^0 = W_5^1 e^{-r\Delta t} = W_5^5 e^{-5r\Delta t} = 2.10551\, e^{-5(0.06)} = 1.5598$$

yang dinamakan nilai batas atas

- Nilai *payoff* terendah pada setiap periode, yaitu :

$$V_0^5 = \max(y_{\min} - K, 0) = 0$$

$$V_0^4 = \max(y_{\min} - K, 0) = 0$$

$$V_0^3 = \max(y_{\min} - K, 0) = 0$$

$$V_0^2 = \max(y_{\min} - K, 0) = 0$$

$$V_0^1 = \max(y_{\min} - K, 0) = 0$$

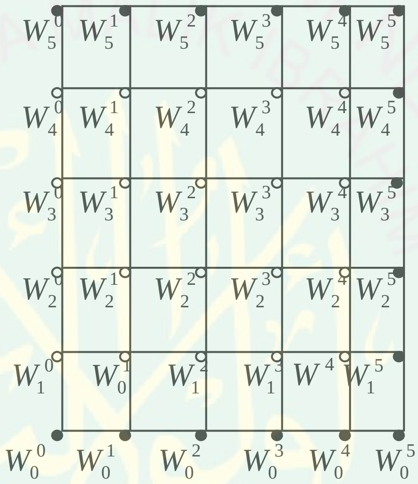
$$V_0^0 = \max(y_{\min} - K, 0) = 0$$

sehingga untuk batas bawah untuk W_0^i, yaitu:

$$\begin{aligned} W_0^5 &= \ln V_0^5 = 0 \\ W_0^4 &= \ln V_0^4 = 0 \\ W_0^3 &= \ln V_0^3 = 0 \\ W_0^2 &= \ln V_0^2 = 0 \\ W_0^1 &= \ln V_0^1 = 0 \\ W_0^0 &= \ln V_0^0 = 0 \end{aligned} \quad (4.37)$$

karena nilai saham minimum mendekati 0 maka $\ln S$ juga mendekati 0 sehingga dianggap nilainya sama dengan 0

Nilai awal, nilai batas atas dan batas bawah dapat dibentuk sebuah grid metode beda hingga, sehingga akan diketahui posisi yang sudah bernilai dan posisi yang belum bernilai yang akan dicari nilainya dengan metode beda hingga implisit. Nokta yang berarsir merupakan nokta yang nilainya sudah diketahui dari nilai awal, nilai batas atas dan batas bawah sedangkan nokta yang tidak berarsis nilainya belum diketahui.



Gambar 4.3 Grid Beda HinggaImplisit dengan Transformasi Peubah

Menggunakan grid metode beda hingga pada gambar (4.3), maka akan didapatkan sistem persamaan linear sebagai berikut:

untuk $i = 4, j = 1$

$$W_1^5 = \beta_1 W_1^4 + \gamma_1 W_2^4$$

$$0 = \beta_1 W_1^4 + \gamma_1 W_2^4$$

karena persamaan linear diatas tidak dapat diselesaikan dan membutuhkan titik lainnya $i = 4, j = 2,3,4$ untuk penyelesaiannya, sehingga:

$$W_2^5 = \alpha_2 W_1^4 + \beta_2 W_2^4 + \gamma_2 W_3^4$$

$$0 = \alpha_2 W_1^4 + \beta_2 W_2^4 + \gamma_2 W_3^4$$

$$W_3^5 = \alpha_3 W_2^4 + \beta_3 W_3^4 + \gamma_3 W_4^4$$

$$1.0739 = \alpha_3 W_2^4 + \beta_3 W_3^4 + \gamma_3 W_4^4$$

$$W_4^5 = \alpha_4 W_3^4 + \beta_4 W_4^4 + \gamma_3 W_5^4$$

$$1.71722 - \gamma_4 (1.98289) = \alpha_4 W_3^4 + \beta_4 W_4^4$$

dari sistem persamaan liniear tersebut dapat diubah menjadi bentuk matriks yaitu:

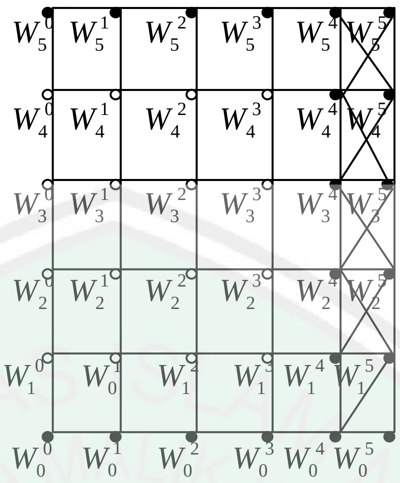
$$\begin{bmatrix} 1.08693 & -0.0507 & 0 & 0 \\ -0.02183 & 1.08982 & -0.03015 & 0 \\ 0 & -0.00446 & 1.08028 & -0.01107 \\ 0 & 0 & -0.00178 & 1.07205 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1^4 \\ W_2^4 \\ W_3^4 \\ W_4^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.7039 \\ 1.56156 \end{bmatrix}$$

sehingga didapatkan

$$\begin{bmatrix} W_1^4 \\ W_2^4 \\ W_3^4 \\ W_4^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.08693 & -0.0507 & 0 & 0 \\ -0.02183 & 1.08982 & -0.03015 & 0 \\ 0 & -0.00446 & 1.08028 & -0.01107 \\ 0 & 0 & -0.00178 & 1.07205 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.7039 \\ 1.56156 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.92088 & 0.04285 & 0.00119 & 0.00001 \\ 0.01845 & 0.91855 & 0.02564 & 0.00026 \\ 0.00007 & 0.00379 & 0.92581 & 0.00956 \\ 0 & 0 & 0.00154 & 0.93281 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.7039 \\ 1.56156 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.00002 \\ 0.00041 \\ 0.01493 \\ 1.45664 \end{bmatrix}$$

maka grid metode beda hingga implisit menjadi :



Gambar 4.4 Grid Metode beda Hingga Implisit dengan Transformasi Peubah titik W_j^4

untuk $i = 3, j = 1$

$$W_1^4 = \beta_1 W_1^3 + \gamma_1 W_2^3$$

$$0.00002 = \beta_1 W_1^3 + \gamma_1 W_2^3$$

karena persamaan linear diatas tidak dapat diselesaikan dan membutuhkan titik lainnya $i = 4, j = 2,3,4$ untuk penyelesaiannya, sehingga:

$$W_2^4 = \alpha_2 W_1^3 + \beta_2 W_2^3 + \gamma_2 W_3^3$$

$$0.00041 = \alpha_2 W_1^3 + \beta_2 W_2^3 + \gamma_2 W_3^3$$

$$W_3^4 = \alpha_3 W_2^3 + \beta_3 W_3^3 + \gamma_3 W_4^3$$

$$0.01493 = \alpha_3 W_2^3 + \beta_3 W_3^3 + \gamma_3 W_4^3$$

$$W_4^4 = \alpha_4 W_3^3 + \beta_4 W_4^3 + \gamma_3 W_5^3$$

$$1.45664 - \gamma_4 (2.44394) = \alpha_4 W_3^3 + \beta_4 W_4^3$$

dari sistem persamaan liniear tersebut dapat diubah menjadi bentuk matriks, yaitu:

$$\begin{bmatrix} \beta_1 & \gamma_1 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \\ 0 & 0 & \alpha_4 & \beta_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1^3 \\ W_2^3 \\ W_3^3 \\ W_4^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.00002 \\ 0.00041 \\ 0.01493 \\ 1.54676 \end{bmatrix}$$

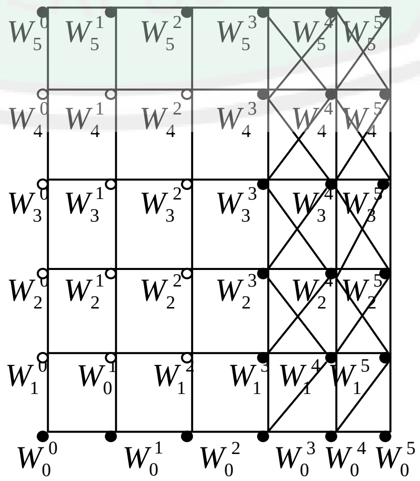
dengan menggunakan persamaan (4.23) maka akan di dapatkan nilai α, β, γ yaitu:

$$\begin{bmatrix} 1.08693 & -0.0507 & 0 & 0 \\ -0.02183 & 1.08982 & -0.03015 & 0 \\ 0 & -0.00446 & 1.08028 & -0.01107 \\ 0 & 0 & -0.00178 & 1.07205 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1^3 \\ W_2^3 \\ W_3^3 \\ W_4^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.00002 \\ 0.00041 \\ 0.01493 \\ 1.54676 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} W_1^3 \\ W_2^3 \\ W_3^3 \\ W_4^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.08693 & -0.0507 & 0 & 0 \\ -0.02183 & 1.08982 & -0.03015 & 0 \\ 0 & -0.00446 & 1.08028 & -0.01107 \\ 0 & 0 & -0.00178 & 1.07205 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0.00002 \\ 0.00041 \\ 0.01493 \\ 1.54676 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.92088 & 0.04285 & 0.00119 & 0.00001 \\ 0.01845 & 0.91855 & 0.02564 & 0.00026 \\ 0.00007 & 0.00379 & 0.92581 & 0.00956 \\ 0 & 0 & 0.00154 & 0.93281 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.00002 \\ 0.00041 \\ 0.01493 \\ 1.54676 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.00007 \\ 0.00116 \\ 0.02861 \\ 1.44286 \end{bmatrix}$$

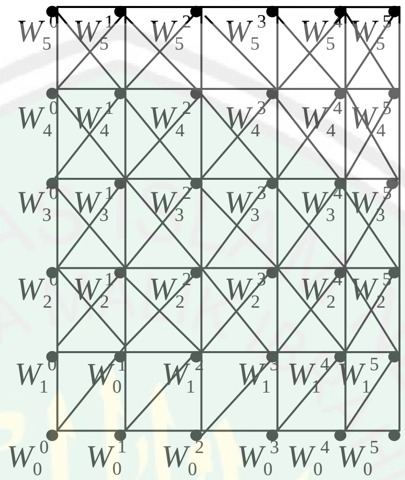
maka grid metode beda hingga implisit menjadi :



Gambar 4.5 Grid Metode beda Hingga Implisit dengan Transformasi Peubah titik W_j^3

Dengan cara yang sama maka akan didapatkan semua nilai pada index $i = 2,1,0$ dan $j = 1,2,3,4$ sehingga grid metode beda hingga menjadi :

maka grid metode beda hingga implisit menjadi :



Gambar 4.6 Grid Metode beda Hingga Implisit engan Transformasi Peubah titik W_j^5

serta dapat dibentuk matriks umum metode beda hingga implisit, yaitu :

$$\begin{bmatrix} \beta_1 & \gamma_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & \cdots & \alpha_{M-2} & \beta_{M-2} & \gamma_{M-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_{M-1} & \beta_{M-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_0^i \\ W_1^i \\ \vdots \\ W_{M-2}^i \\ W_{M-1}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_0^{i+1} \\ W_1^{i+1} \\ \vdots \\ W_{M-1}^{i+1} \\ W_M^{i+1} \end{bmatrix} \tag{4.38}$$

sehingga matriks persamaan (4.38) dapat dinyatakan dengan $AW^i = W^{i+1}$ dimana A adalah matriks tridiagonal dan matriks non singular yang mempunyai invers dengan ukuran $(M-1)$ x $(M-1)$ sehingga unsur-unsur W^i diketahui dengan menggunakan penyelesaian $W^i = A^{-1}W^{i+1}$ yang berukuran $(M-1)$ x 1.

4.3.5 Solusi Matrik Metode Beda Hingga Eksplisit

Misalkan memberikan nilai harga saham awal (y_0) = 5 (satuan mata uang), harga ketentuan (K) = 10 (satuan mata uang), waktu jatuh tempo (T) = 1 tahun, tingkat suku bunga resiko (r) = 6% dan standart deviasi saham tersebut (σ) sebesar 0.5 dan memisalkan $M = N = 5$ sehingga didapatkan $i = 4,3,2,1,0$ dan $j = 1,2,3,4$ memberikan nilai awal, nilai batas atas dan batas bawah sama dengan metode beda hingga implisit dan persamaan beda hingga eksplisit pada persamaan (4.29) akan membentuk suatu sistem persamaan linear, yaitu :

untuk $i = 4,\ j = 1$

$$W_1^4 = \beta_1 W_1^5 + \gamma_1 W_2^5$$

$$W_1^4 = \beta_1(0) + \gamma_1(0)$$

karena persamaan linear diatas tidak dapat diselesaikan dan membutuhkan titik lainnya $i = 4,\ j = 2,3,4$ untuk penyelesaiannya, sehingga:

$$W_2^4 = \alpha_2 W_1^5 + \beta_2 W_2^5 + \gamma_2 W_3^5$$

$$W_2^4 - \gamma_2(0) = \alpha_2(0) + \beta_2(0)$$

$$W_3^4 = \alpha_3 W_2^5 + \beta_3 W_3^5 + \gamma_3 W_4^5$$

$$W_3^4 - \gamma_3(1.57562) = \alpha_3(0) + \beta_3(0)$$

$$W_4^4 = \alpha_4 W_3^5 + \beta_4 W_4^5 + \gamma_4 W_5^5$$

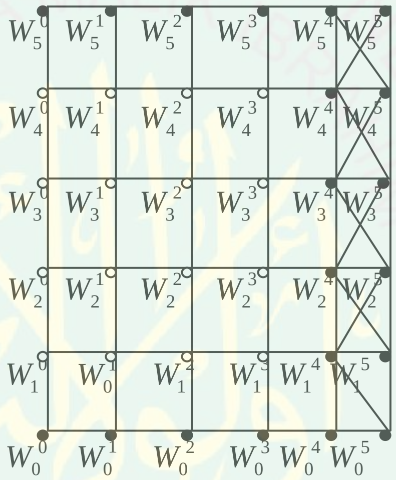
$$W_4^4 = \alpha_4(0) + \beta_4(1.57562) - \lambda_4(2.60574)$$

Dari sistem persamaan liniear tersebut dapat diubah menjadi bentuk matriks, yaitu:

$$\begin{bmatrix} 0.92292 & 0.01372 & 0 & 0 \\ 0.00784 & 0.92035 & 0.01522 & 0 \\ 0 & 0.00436 & 0.92881 & 0.01023 \\ 0 & 0 & 0.00158 & 0.9361 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1.46001 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1^4 \\ W_2^4 \\ W_3^4 \\ W_4^4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} W_1^4 \\ W_2^4 \\ W_3^4 \\ W_4^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.01494 \\ 1.36672 \end{bmatrix}$$

Maka grid metode beda hingga eksplisit yaitu:



Gambar 4.7 Grid Metode Beda Hingga Eksplisit engan Transormasi Peubah W_j^4

untuk $i = 3,\ j = 1$

$$W_1^3 = \beta_1 W_1^4 + \gamma_1 W_2^4$$

Karena persamaan linear diatas tidak dapat diselesaikan dan membutuhkan titik lainnya $i = 4,\ j = 2,3,4$ untuk penyelesaiannya, sehingga:

$$W_2^3 = \alpha_2 W_1^4 + \beta_2 W_2^4 + \gamma_2 W_3^4$$

$$W_2^3 = \alpha_2 (0) + \beta_2 (0) + \gamma_2 (0.01494)$$

$$W_3^3 = \alpha_3 W_2^4 + \beta_3 W_3^4 + \gamma_3 W_4^4$$

$$W_3^3 = \alpha_3(0) + \beta_3(0.01494 + \gamma_3(1.36672)$$

$$W_4^3 = \alpha_4 W_3^4 + \beta_4 W_4^4 + \gamma_4 W_5^4$$

$$W_4^3 = \alpha_4(0.01494) + \beta_4(1.36672) + \gamma_4(2.60574)$$

Dari sistem persamaan liniear tersebut dapat diubah menjadi bentuk matriks, yaitu:

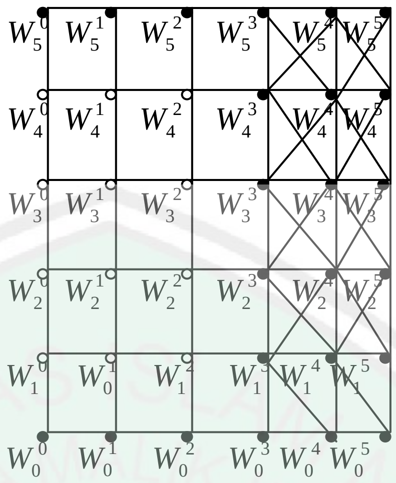
$$\begin{bmatrix} \beta_1 & \gamma_1 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \\ 0 & 0 & \alpha_4 & \beta_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.01494 \\ 1.36672 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1^3 \\ W_2^3 \\ W_3^3 \\ W_4^3 - 0.01493 \end{bmatrix}$$

dengan menggunakan persamaan (4.30) maka akan di dapatkan nilai $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$ yaitu:

$$\begin{bmatrix} 0.92292 & 0.01372 & 0 & 0 \\ 0.00784 & 0.92035 & 0.01522 & 0 \\ 0 & 0.00436 & 0.92881 & 0.01023 \\ 0 & 0 & 0.00158 & 0.9361 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.01494 \\ 1.36672 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1^3 \\ W_2^3 \\ W_3^3 \\ W_4^3 - 0.01493 \end{bmatrix}$$

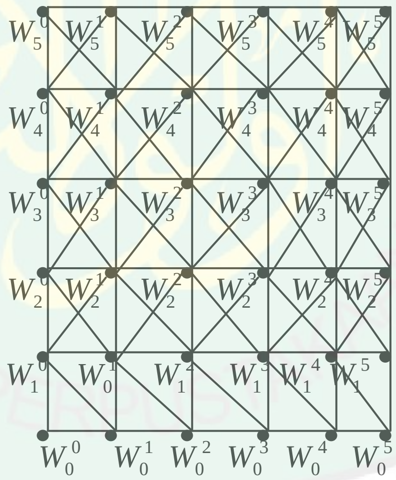
$$\begin{bmatrix} W_1^3 \\ W_2^3 \\ W_3^3 \\ W_4^3 - 0.01493 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.00015 \\ 1.27939 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.00015 \\ 1.29432 \end{bmatrix}$$

maka grid metode beda hingga eksplisit menjadi :



Gambar 4.8 Grid Metode Beda Hingga Eksplisit dengan Transformasi Peubah W_j^3

Menggunakan cara yang sama maka akan didapatkan semua nilai pada indeks $i = 2,1,0$ dan $j = 1,2,3,4$ maka grid metode beda hingga eksplisit menjadi :



Gambar 4.9 Grid Metode Beda Hingga Eksplisit dengan Transformasi Peubah W_j^5

sehingga dapat dibentuk matriks umum metode bedahingga eksplisit, yaitu :

$$\begin{bmatrix} \beta_1 & \gamma_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & \cdots & \alpha_{M-2} & \beta_{M-2} & \gamma_{1M-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_{M-1} & \beta_{M-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_0^{i+1} \\ W_1^{i+1} \\ \vdots \\ W_{M-2}^{i+1} \\ W_{M-1}^{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_0^{i} \\ W_1^{i} \\ \vdots \\ W_{M-1}^{i} \\ W_{M}^{i} \end{bmatrix} \tag{4.39}$$

Sehingga matrik persamaan (4.39) dapat dinyatakan dengan $BW^{i+1} = W^{i}$ dimana B adalah matriks tridiagonal dan matriks non singular yang mempunyai invers denganukuran $(M-1) \text{x} (M-1)$ sehingga unsur-unsur W^{i+1} diketahui yang berukuran $(M-1)$ x 1.

Dengan menggunakan bentuk matriks umum metode beda hingga imlisit dan eksplisit maka dapat ditentukan $i = (N-1),...,1,0$ dan $j = 1,2,...,(M-1)$ tetapi tidak dapat dihitung dengan manual sehingga penelitian membutuhkan bantuan simulasi komputasi menggunakan bantuan program Matlab2010a.

4.4 Simulasi Komputasi

Simulasi komputasi dengan menggunakan metode beda hingga implisit dan eksplisit dengan transformasi peubah mengambil beberapa kasus tertentu. Pada penelitian sebelumnya sebelum metode-metode digunakan untuk menentukan perhitungan harga opsi Asia, terlebih dahulu diiplementasikan pada penentuan harga opsi Eropa karena pada harga opsi Asia tidak terdapat solusi analitiknya sehingga digunakan opsi Eropa terlebih dahulu untuk mendapatkan solusi analitik. Jika metode beda hingga implisit dan eksplisit dapat diterapkan pada perhitungan harga opsi Eropa dan sesuai dengan solusi analitiknya maka metode beda hingga implisit dan eksplisit dengan transformasi peubah, diimplementasikan kembali ke opsi Eropa untuk mendapatkan solusi analitik dari metode beda hingga implisit dan eksplisit dengan transformasi peubah. Setelah diimplementasikan pada opsi Eropa dan mendapatkan solusi analitiknya maka akan metode tersebut dapat digunakan pada opsi Asia.

4.4.1 Algoritma

Berikut ini adalah algoritma untuk metode beda hingga implisit dan eksplisit dengan transformasi peubah, yaitu:

1. *Input:* $S_0, r, \sigma, T, K,$ dan N.
2. Tentukan harga saham maksimal (Smax) dan minimal (Smin).
3. Hitung partisi harga saham, $dS = \frac{\text{Smax}}{M}$ dan partisi waktu, $dt = \frac{T}{N}$.
4. Hitung harga saham tiap waktu, $S_t = S_0 e^{\left[r - \frac{1}{2}\sigma^2\right]t + \sigma \xi \sqrt{t}}$ untuk t = 1,2,3,...,N.
5. Hitung harga saham rata-rata dengan ketentuan, $\bar{S} = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} S_t$.
6. Hitung elemen-elemen matriks B dan A, yaitu α, β dan γ dengan mengunakan persamaan (4.23), dan (4.30) untuk masing-masing metode beda hingga (implisit dan eksplisit dengan transformasi peubah).
7. Buat matriks B dan A yang diperoleh dari langkah keenam dengan menggunakan persamaan (4.23), dan (4.30) untuk masing-masing metode beda hingga (implisit dan eksplisit dengan transformasi peubah).
8. Untuk *call* opsi, hitung nilai batas atas W_j^0 = Smax, nilai batas bawah W_j^{N-1} = Smin, untuk semua j= 1,2,..,M-1, dan nilai awal $W_{M-1}^i = \max(\bar{S} - K, 0)$ untuk semua i = N-1,...,2,1,0.

   Untuk *put* opsi, hitung nilai batas atas W_j^0=Smin, nilai batas bawah W_{j1}^{N-1}=Smax, untuk semua j = 1,2,..,M-1, dan nilai awal $W_{M-1}^i = \max(K - \bar{S}, 0)$ untuk semua i = N-1,...,2,1,0.

9. Hitung nilai opsi untuk setiap vektor

   a. Untuk metode beda hingga implisit $W^{i} = (A^{T}A)^{-1}A^{T}W^{i+1}$ untuk suatu $i = N$-1,...,2,1,0 dan masing-masing j = 1,2,...,M-1.

   b. Untuk metode beda hingga eksplisit $W_{j}^{i} = BW_{j}^{i+1}$ untuk suatu $i = N$-1,...,2,1, 0 dan masing-masing j = 1,2,...,M-1.

10. *Output*

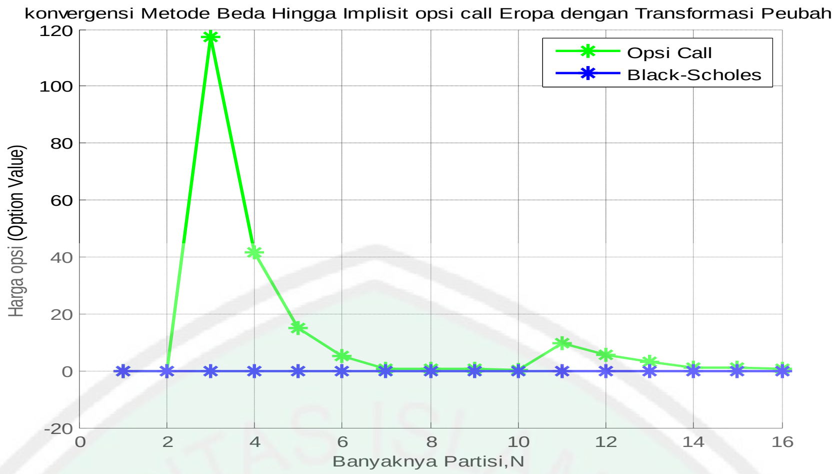
    a. Harga opsi *call* dan *put Asia*

    b. Pergerakan harga opsi.

11. Ulangi langkah 1 sampai dengan 9 dengan N yang berbeda.

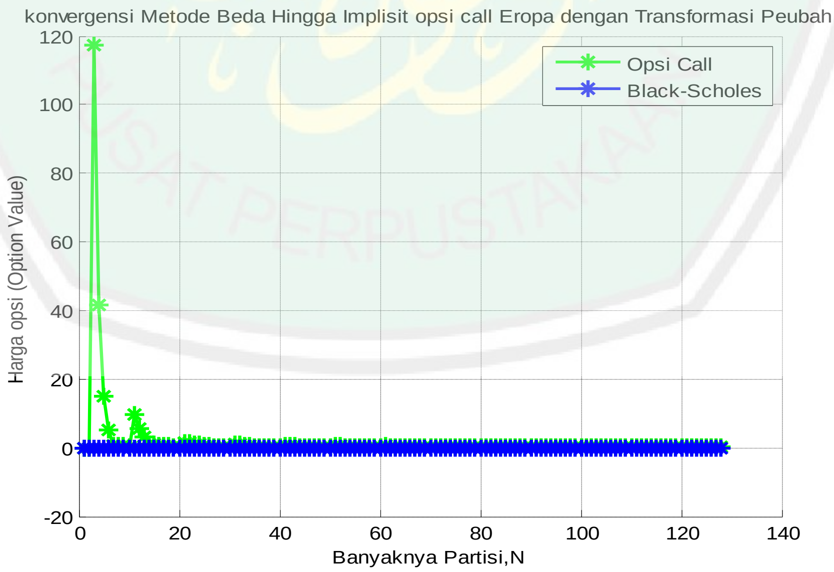
4.4.2 Perhitungan Harga Opsi Eropa

Sebagai ilustrasi, misalkan suatu kontark opsi diberikan harga saham awal, S0=5 (satuan mata uang) perlembar, waktu jatuh tempo, T=1 tahun, tingkat suku bunga bebas resiko, r= 6% pertahun dan standar deviasi saham tersebut sebesar, sig=0.5. Grafik yang didapatkan untuk solusi numerik untup opsi Eropa dengan metode beda hingga implisit dan eksplisit dengan transformasi peubah berturut-turut yang terlihat pada gambar (4.10)dan gambar (4.11) yaitu :



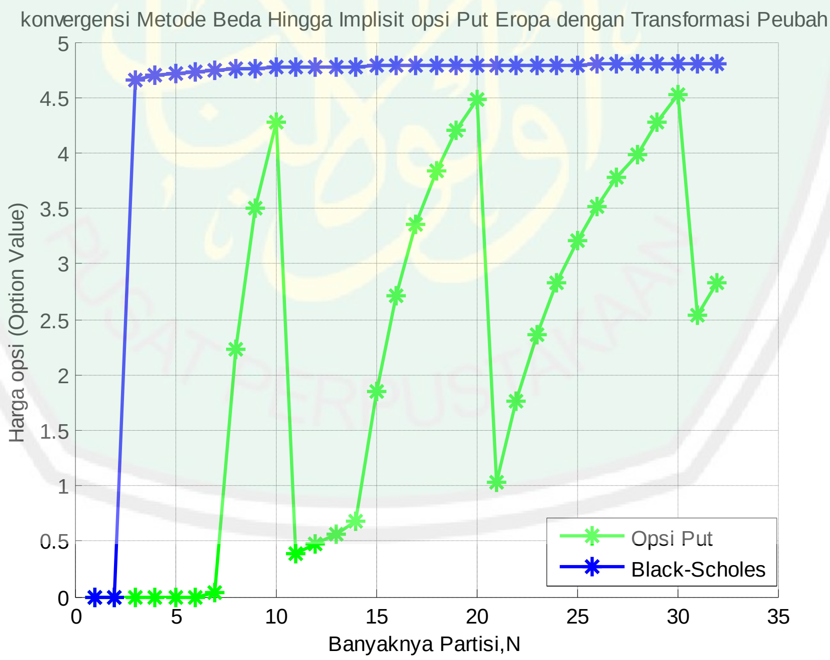
Gambar 4.10(a) Grafik Simulasi Metode Beda Hingga Implisit dengan Transformasi Peubah Opsi *Call* Eropa pada N=16

Grafik pada gambar 4.10(a) menunjukkan pergerakan harga opsi *call* Eropa pada metode beda hingga implisit dengan transformasi peubah dengan N=16. Pergerakan harga opsi *call* Eropa tersebut mulai mendekati (konvergen) persamaan *call* model *Balck-Scholes* tetapi nilai galat masih cukup besar sehingga perlu di perbanyak partisi kembali.



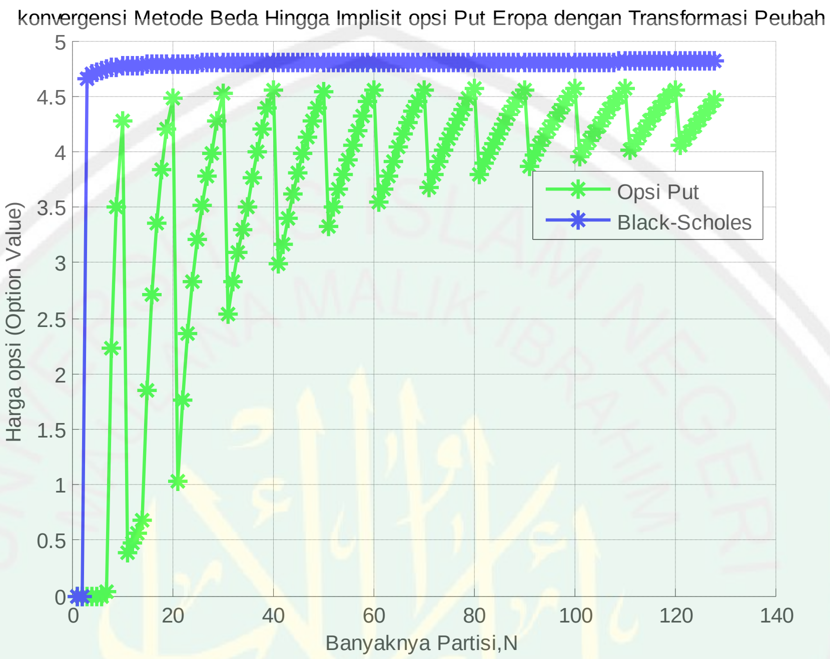
Gambar 4.10(b) Grafik Simulasi Metode Beda Hingga Implisit dengan Transformasi Peubah Opsi Call Eropa pada N=128

Sedangkan pada gambar grafik 4.10(b) yang menunjukkan harga opsi *call* Eropa pada metode beda hingga implisit dengan transformasi peubah dengan partisi yang diperbanyak sebanyak N=128. Semakin diperbanyak partisi maka semakin terlihat harga opsi *call* eropa mendekati (konvergen) pada harga opsi *call* model persamaan *Balck-Scholes* dan galat yang dihasilkan semakin kecil. Semakin banyak partisi dilakukan maka semakin kecil pula galat yang dihasilkan. Pada waktu awal harga opsi akan melonjak dan menjauhi Black-Scholes ini dikarenakan partisi yang kecil dan galat yang besar sehingga pemegang saham akan merugi jika mengeksekusinya. Semakin partisi *N* berjalan sampai ke *N*=128 terlihat pada gambar grafik harga opsi mendekati solusi analitik dan membuat galat semakin mengecil.



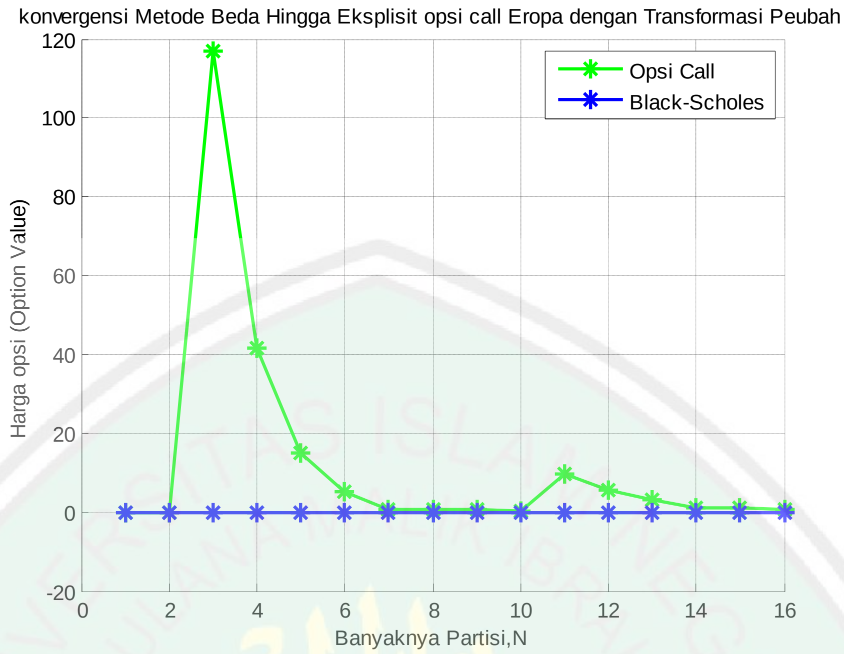
Gambar 4.10(c) Grafik Simulasi Metode Hingga Implisit dengan Transformasi Peubah Opsi *Put* Eropa pada N=32

Pada grafik gambar 4.10(c) menunjukkan pergerakan metode beda hingga implisit dengan transformasi peubah opsi *put* eropa pada partisi N=32 mulai mendekati (konvergen) pada harga opsi put persamaan *Black-Scholes*.



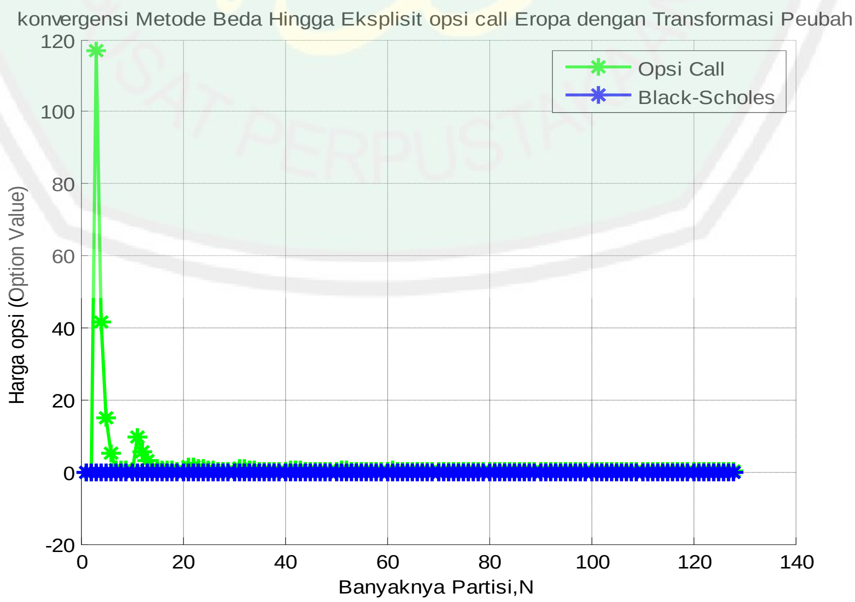
Gambar 4.10(d) Grafik Simulasi Metode Beda Hingga Implisit dengan Transformasi Peubah Opsi *Put* Eropa pada N=128

Oleh karena itu pada gambar 4.10(d) yang menunjukkan pergerakan harga opsi *put* eropa pada metode beda hingga implisit dengan transformasi peubah di partisi sampai N=128 sehingga terlihat harga opsi *put* eropa mendekati (konvergen) ke harga opsi *put* *Black-Scholes* dengan galat yang tidak terlalu besar. Pada gambar terlihat partisi awal harga opsi menjauhi solusi analitiknya dan memberikan galat yang cukup besar tetapi semakin partisi diperbanyak maka harga opsi mulai mendekati solusi analitik Black-Scholes meskipun terlihat bahwa galat masih cukup besar sehingga simulasi ini pada metode beda hingga implisit opsi yang dipilih adalah opsi *call* sehingga menguntungkan bagi pemegang saham.



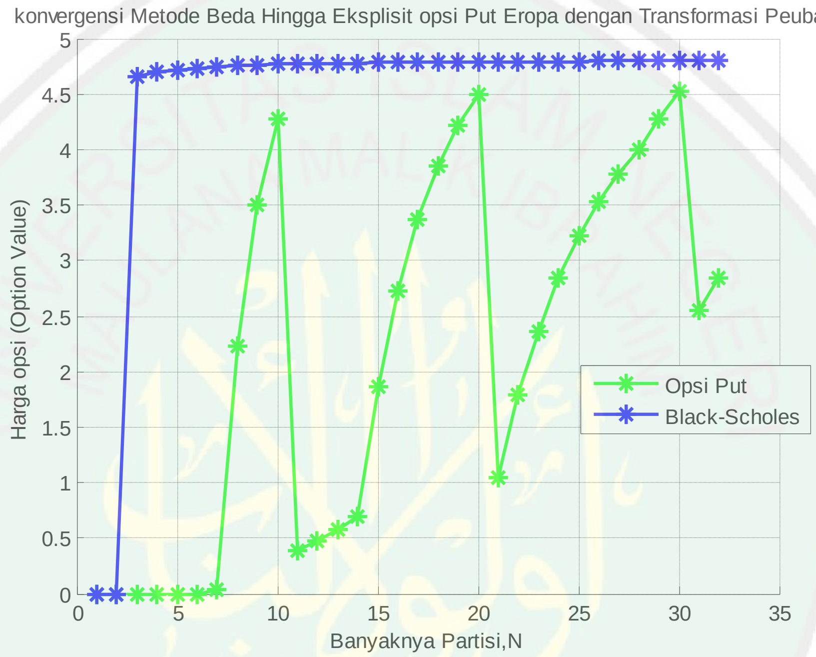
Gambar 4.11(a) Grafik Simulasi Metode Beda Hingga Eksplisit dengan Transformasi Peubah Opsi *Call* Eropa pada N=16

Gambar 4.11(a) menunjukkan pergerakan harga opsi *call* eropa pada metode beda hingga eksplisit dengan transformasi peubah dengan partisi N=16 mulai mendekati (konvergen) ke harga opsi *call Black-Scholes*.



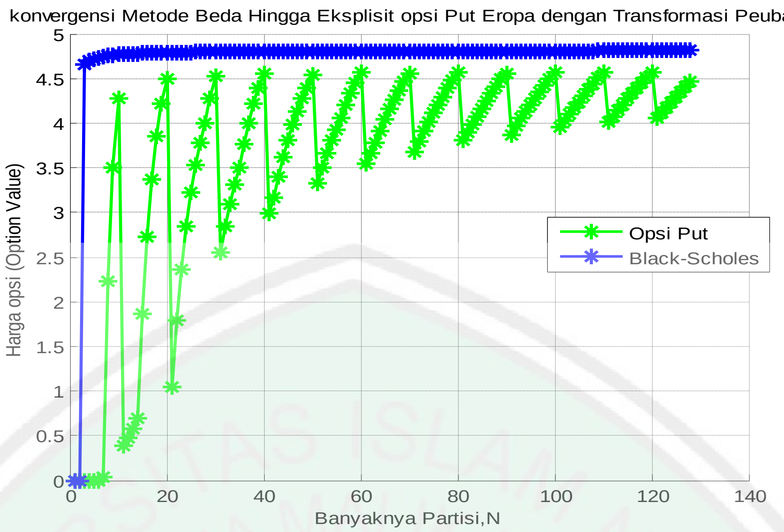
Gambar 4.11(b) Grafik Simulasi Metode Beda Hingga Eksplisit dengan Transformasi Opsi *Call* Eropa Peubah pada N=128

Sedangkan pada partisi N=128 pada gambar 4.11(b) yang menunjukkan harga opsi *call* eropa pada metode beda hingga eksplisit dengan transformasi peubah mendekati (konvergen) ke harga opsi *call Black-Scholes* dengan galat yang lebih sedikit dibandingkan partisi ke N=16.



Gambar 4.11(c) Grafik Simulasi Metode Beda Hingga Eksplisit dengan Transformasi Peubah Opsi Put Eropa pada N=32

Untuk harga opsi *put* eropa pada gambar 4.11(c) yang menunjukkan pergerakan harga opsi *put* eropa pada metode beda hingga eksplisit dengan partisi ke N=32 menunjukkan pula mendekati (konvergen) ke harga opsi *put Black-Scholes.*

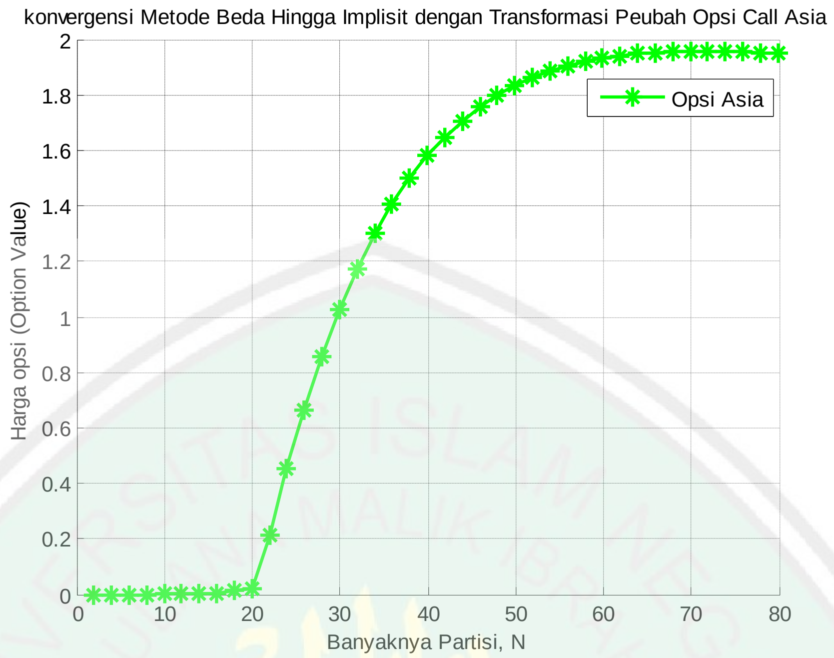


Gambar 4.11(d) Grafik Simulasi Metode Beda Hingga Eksplisit dengan Transformasi Peubah Opsi *Put* Eropa pada N=128

Gambar 4.11(d) menunjukkan pergerakan harga opsi *put* eropa pada metode beda hingga eksplisit dengan transformasi peubah pada partisi N=128 mendekati (konvergen) pada harga opsi *put Black-Scholes* dengan galat yang lebih kecil. Karena opsi *call* dan *put* eropa pada metode beda hingga implisit dan eksplisit dengan transformasi peubah dapat diterapkan pada harga opsi eropa maka metode beda hingga implisit dan eksplisit dengan transformasi peubah dapat diterapkan pada opsi Asia.

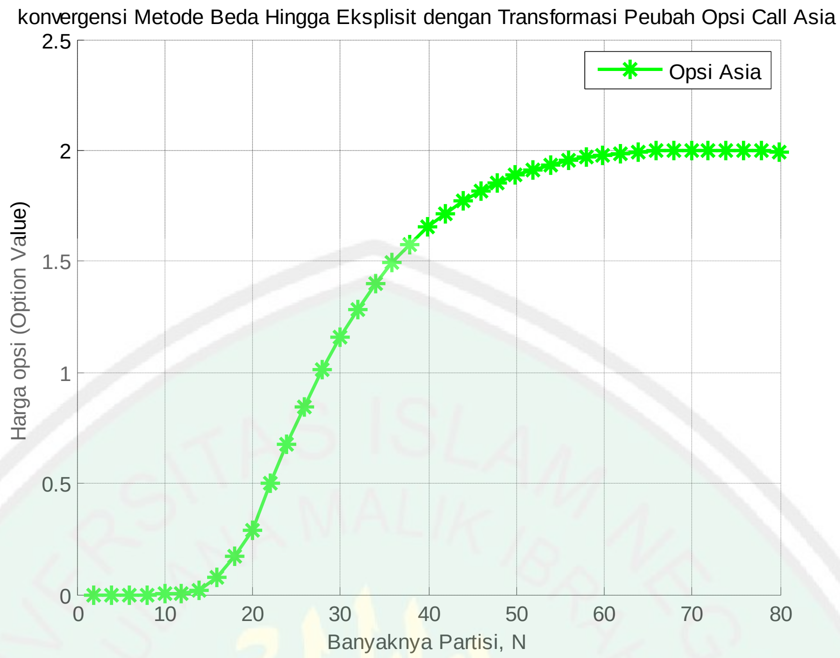
4.4.3 Perhitungan Harga Opsi Asia

Metode beda hingga implisit dan eksplisit dengan transformasi peubah dapat diterapkan pada opsi Eropa sehingga dapat diterapkan pula pada opsi Asia. Dengan kasus yang sama metode bea hingga implisit dan eksplisit dengan transformasi peubah maka akan ditampilkan pergerakan harga opsi Asia pada gambar 4.12 dan 4.13 yaitu :



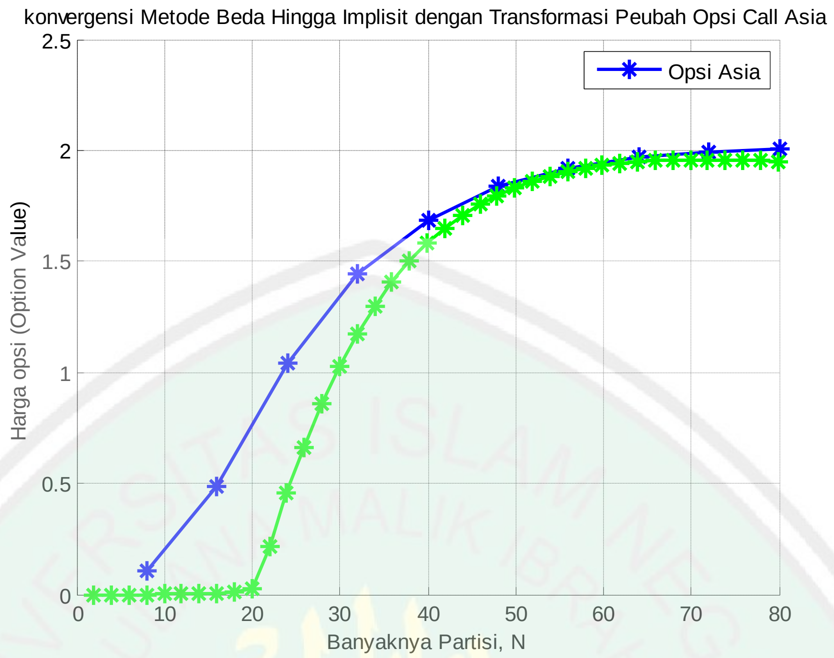
Gambar 4.12 Grafik Simulasi Metode Beda Hingga Implisit dengan Transformasi Peubah pada Opsi *Call* Asia dengan N=80

Gambar 4.12 menunjukkan pergerakan harga opsi Asia metode beda hingga implisit dengan transformasi peubah dengan partisi N=80. Opsi Asia tidak memiliki solusi analitik sehingga perhitungan harga opsi Asia dipartisi sebanyak waktu ke N akan konvergen ke suatu titik dalam kasus metode beda hingga implisit dengan transformasi peubah yaitu 1.9986 (satuan mata uang). Metode beda hingga dengan transformasi peubah pada opsi Asia juga dapat diterapkan pada opsi *put* dan konvergen juga pada satu titik.



Gambar 4.13 Grafik Simulasi Metode Beda Hingga Eksplisit dengan Transformasi Peubah pada Opsi *Call* Asiadengan N=80

Gambar 4.13 menunjukkan pergerakan harga opsi Asia metode beda hingga eksplisit dengan transformasi peubah dengan partisi N=80. Opsi Asia tidak memiliki solusi analitik sehingga perhitungan harga opsi Asia dipartisi sebanyak waktu ke N akan konvergen ke suatu titik dalam kasus metode beda hingga eksplisit dengan transformasi peubah yaitu 1.9967 (satuan mata uang). Metode beda hingga dengan transformasi peubah pada opsi Asia juga dapat diterapkan pada opsi put dan konvergen juga pada satu titik.



Gambar 4.14 Grafik Simulasi Perbandingan antara Metode Beda Hingga Implisit dan Metode Beda Hingga Implisit dengan Transformasi Peubah opsi *call* Asia dengan N=80

Pada gambar 4.14 menunjukkan grafik simulasi perbandingan metode beda hinga implisit dan eksplisit dengan metode beda hingga implisit dan eksplisit dengan transformasi peubah yang terlihat yaitu penggunaan transformasi peubah membuat opsi Asia lebih optimal dan cepat ketitik konvergennya.

Perbandingan metode implisit dan eksplisit dengan transformasi peubah pada titik konvergennya terlihat pada gambar 4.12 dan gambar 4.14, meskipun titik konvergen terlihat sama tetapi pasti berbeda. Pada gambar 4.12 yang menunjukkan metode beda hingga implisit dengan transformasi peubah, titik konvergennya yaitu 1.99984 sedangkan pada gambar 4.13 yang menunjukkan metode eksplisit, titik konvergennya yaitu 1.99973. Sehingga jika dibandingkan dengan titik kekonvergenan maka metode beda hingga implisit dengan transformasi peubah yang lebih baik digunakan dan lebih optimal untuk perhitungan harga opsi Asia dari pada metode beda hingga eksplisit dengan transformasi peubah.

4.5 Keuntungan Investasi dalam Islam

Penulis berpendapat bahwa saham merupakan salah satu bentuk investasi. Islam memperolehkan investasi bagi umatnya asalkan sesuai dengan syariat islam. Investasi dapat berupa investasi dunia dan investasi akhirat. Investasi dunia salah satu contohnya yaitu jual beli saham, sedangkan investasi akhirat salah satunya doa anak pada orang tua.

عَنْ أَبِى هُرَيْرَةَ أَنَّ رَسُولَ اللَّهِ –صلى الله عليه وسلم– قَالَ « إِذَا مَاتَ الإِنْسَانُ انْقَطَعَ عَنْهُ عَمَلُهُ إِلاَّ مِنْ ثَلاَثَةٍ إِلاَّ مِنْ صَدَقَةٍ جَارِيَةٍ أَوْ عِلْمٍ يُنْتَفَعُ بِهِ أَوْ وَلَدٍ صَالِحٍ يَدْعُو لَهُ ».رواه مسلم

Dari Abu Hurairah Ra, Rasulullah Saw bersabda, *"Apabila seseorang meninggal dunia terputus semua amalnya kecuali tiga hal: shadaqah jariah, ilmu yang bermanfaat atau anak shalih yangmendoakannya"*. (HR. Muslim).

Menurut Nabawi (2014) menyatakan Rasulullah Saw memberikan informasi kepada kita untuk mempersiapkan tiga hal sebagai investasi akhirat. Shadaqah jariah yang bisa berupa wakaf dan lain sebagainya, ilmu yang manfaatnya dirasakan banyak orang dan anak shalih yang senantiasa mendoakan orang tuanya. Sehingga bagi orang tua henaklah mendidik anak menjadi anak yang sholeh dan sholehah.

Oleh karena itu penulis menyatakan bahwa investasi sangat dianjurkan dalam islam, investasi ini bermaksud menyiapkan sesuatu terlebih dahulu untuk masa depan didunia ataupun diakhirat nanti karena semua hal perlu untuk dipersiapkan dan difikirkan sehingga kita hidup bahagia dunia akhirat.

Ayat-ayat al-Qur'an dan hadist Rasulullah yang menjelaskan tentang investasi dan pentingnya investasi, yaitu :

1. Q.S at Taubah ayat:34 yang berisikan larangan penimbunan modal (emas dan perak).
2. Q.S al-Isra ayat 29 yang menyatakan bahwasanya Islam mendorong untuk menabung karena menabung adalah langkah awal dalam investasi.
3. H.R Nasa'i dan Turmudzi yang isinya adalah memerintahkan kepada para pemilik modal untuk menginvestasikan segala asset yang dimiliki pada pos-pos yang dibenarkan oleh syariat guna mencukupi kebutuhannya dan kebutuhan orang-orang yang menjadi tanggungannya.

Investasi merupakan salah salah satu ajaran dari konsep Islam yang memenuhi proses *tadrij* (ilmu pengetahuan yang memiliki gradasi) dan *trichotomy* (tiga jenis pengetahuan, yaitu pengetahuan instrumental, pengetahuan intelektual, dan pengetahuan spiritual. Hal tersebut dapat dibuktikan bahwa konsep investasi selain sebagai pengetahuan juga bernuansa spiritual karena menggunakan norma syariah, sekaligus merupakan hakikat dari sebuah ilmu dan amal.

Artinya : "*Sesungguhnya Allah, hanya pada sisi-Nya sajalah pengetahuan tentang hari Kiamat; dan Dia-lah yang menurunkan hujan, dan mengetahui apa yang ada dalam rahim. dan tiada seorangpun yang dapat mengetahui (dengan pasti) apa yang akan diusahakannya besok. dan tiada seorangpun yang dapat mengetahui di bumi mana Dia akan mati. Sesungguhnya Allah Maha mengetahui lagi Maha Mengenal.*"(QS. Luqman : 34)

Dalam al-Quran surat Lukman : 34, Allah secara tegas menyatakan bahwa tiada seorang-pun yang dapat mengetahui apa yang akan diperbuat dan diusahakannya, serta peristiwa yang akan terjadi pada esok hari. Sehingga dengan ajaran tersebut seluruh manusia diperintahkan melakukan investasi (*invest* sebagai kata dasar dari *investment* memiliki arti menanam) sebagai bekal dunia dan akhirat.

Penulis berpendapat bahwa investasi itu sangatlah penting baik di dunia maupun akhirat. Salah satu investasi yang dapat dilakukan didunia yaitu jual beli sahat tetapi harus mengikuti ajaran agama Islam dan harus sesuai aturan syariat Islam. Sedangkan investasi di akhirat salah satunya adalah mendidik anak-anak kita menjadi anak yang sholeh dan sholehah. Anak yang berbakti pada orang tua dan ajaran-ajaran agama Islam serta mentaati dan menjauhi larangan Allah Swt.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang sudah dibahas pada bab sebelumnya maka dapat disimpulkan, yaitu :

1. Metode beda hingga implisit dan eksplisit dengan transformasi peubah dapat diterapkan pada opsi Eropa karena kedua metode tersebut semakin partisi *N* diperbanyak maka akan semakin mendekati ketitik kekonvergenannya yaitu *Black-Scholes*. Metode beda hingga implisit dan eksplisit dengan transformasi peubah dapat diterapkan pada opsi Eropa maka kedua metode tersebut juga dapat diterapkan pada opsi Asia karena opsi Asia tidak mempunyai nilai analitik sehingga perlu menggunakan opsi Eropa untuk mendapatkan solusi analitiknya. Sehingga pada opsi Asia semakin partisi *N* diperbanyak maka akan konvergen pada satu titik.
2. Perbandingan antara metode beda hingga implist dan eksplisit dengan transformasi peubah jika dibandingkan dengan titik kekonvergenannya yaitu metode beda hingga implisit menunjukkan titik konvergenannya yaitu 1.99984 sedangkan metode beda hingga eksplisit, titik kekonvergenannya yaitu 1.99973 sehingga metode implisit dengan transformasi peubah yang lebih baik dan lebih optimal digunakan untuk perhitungan harga opsi Asia.
3. Saham merupakan salah satu yang dijual belikan pada pasar modal. Saham diperbolehkan dalam Islam jika pasar modal mengikuti ajaran syariat Islam yaitu saham yang diperjual belikan pada pasar modal syariah. Saham adalah salah satu bentuk investasi. Investasi sangatlah dianjurkan dalam Islam karena

sangatlah menguntungkan. Investasi berupa investasi di dunia dan investasi di akhirat salah satu contoh investasi di dunia adalah jual beli saham pada pasar modal syariah yang mengikuti syariat Islam dan salah satu contoh investasi di akhirat adalah mendidik anak menjadi ank yang sholeh-sholehah sehingga bisa mengantarkan kita kepintu surga sesuai dengan ajaran Rasullulah tentang shadaqah jariah yang bisa berupa wakaf dan lain sebagainya, ilmu yang manfaatnya dirasakan banyak orang dan anak shalih yang senantiasa mendoakan orang tuanya.

5.2 Saran

Pada skripsi ini penulis hanya memfokuskan pada rata-rata Aritmatika pada perhitungan harga opsi Asia dengan menggunakan metode beda hingga implisit dan eksplisit dengan transformasi peubah, maka diharapkan pada skripsi selanjutnya untuk mengkaji tentang rata-rata geometri pada perhitungan harga opsi Asia dengan menggunakan metode binomial dengan transformasi peubah serta menganalisis kestabilannya.

DAFTAR PUSTAKA

Agustianto. 2013. *Investasi Syariah Menguntungkan Dunia dan Akhirat*. (Online), (http://www.iaei-pusat.org), diakses 11 Mei 2015.

Aziz, A. 2005. *Komputasi Numerik dengan Metode Kombinatorial untuk Barrier Options Pricing*. *Tesis* tidak diterbitkan. Bandung: ITB.

Aziz, A. 2010.*Kapita Selekta Ekonomi Islam*. Bandung: Alfabeta.

Brewer, K.D., Feng, Y., dan Kwan, C.C.Y.. 2012. Geometric Brownian Motion, Option Pricing, and Simulation: Some Spreadsheet-Based Exercises in Financial Modeling. *Spreadsheets in Education (eJSiE)*, 5, 1-13.

Halim, A. 2005.*Analisis Investasi, Edisi Kedua*. Jakarta: Salemba Empat.

Hariyani, I. 2010. *Buku Pintar Pasar Modal Stategi Tepat Investasi Saham, Obligasi, Waran, Right, Opsi, Reksadana, & Produk Pasar Modal Syariah*. Jakarta: Visimedia.

Hidayatullah, H. 2012. *Nilai Awal dan Batas Syarat*. (Online), (http://matematikasegalajenjang.blogspot.com, diakses 17 Oktober 2014.

Higham, D.J. 2004.*An Introduction to Financial Option Valuation Mathematics, Stochasticts and Computation*. Cambridge: Cambridge University Press.

Huda, N. 2010. *Lembaga Keuangan Islam :Tinjauan Teoritis dan Praktis*. Jakarta: Kencana.

Hull, J.C. 2002.*Option Future and Other Derivative*. University of Toronto: Prentice hall International Inc.

Judokusumo, S. 2010. *Pengantar Derivative dalam Moneter Internasional.* Jakarta: Grasindo.

Kamal, A. 2006.*Tafsir Nurul Qur'an Jilid IX*. Terjemahan R. Hikmat Danaatmojo. Jakarta: Al-Huda.

Khuriyanti.2009. *Penentuan Harga Saham Opsi Asia*.Skripsi tidak diterbitkan. Depok: FMIPA Universitas Indonesia.

Kwok, Y. 1998. *Mathematical Models of Financial Derivatives*. Hongkong: Springer.

Luenberger, D. 1998. *Investment Science*. New York: Oxford University Press.

Lyuu, Y.. 1998. *Mathematical Models of Financial Derivatives*. Hongkong: Springer.

Manurung, A. 2011. *Kaya dari Bermain di Bursa Saham*. Jakarta: PT. Kompas Media Nusantara.

Muhammad. 2004. *Dasar-Dasar Keuangan Islam*. Yogyakarta: Ekonisia.

Munir, R. 2010. *Metode Numerik*. Bandung: Informatika.

Nabawi, M. 2014. *Investasi Akhirat*. (Online). (http://almanar-mutiara-nabawi.co.id) diakses 11 Mei 2015

Niwigia, D.B. 2005. *Numerical Methods for The Valuation Of Financial Derivatives*. Tesis tidak diterbitkan. Western Cape: University of Western Cape.

Prahmana, R. 2007. *Jurnal Penentuan Opsi untuk Model Black-Scholes Menggunakan Metode Beda Hingga Crank-Nicolson.*

Rachmani, 2008.*Nilai Eigen dan Vektor Eigen dari Matriks*. (Online), (http://mobile.repository.ipb.ac.id), diakses 28 November 2014.

Seydel, R. 2009. *Tools for Computational Finance*. Berlin: Springer.

Suhrawardi, K. 2000. *Hukum Ekonomi Islam*. Jakarta: Sinar Grafika.

Suritno, 2008. *Metode Beda Hingga Untuk Solusi Numerik Dari Persamaan Black-ScholesHarga Opsi Put Amerika.* Bogor: Tesis tidak diterbitkan.

Triatmodjo, B. 2002.*Metode Numerik*. Yogyakarta: Beta Offset

Wahyudi, 2014.*Analisis Metode Beda Hingga Implisi, Eksplisit dan Crank-Nicholson pada Perhitungan Harga Opsi Asia*. Malang: Skripsi tidak diterbitkan

Widoatmodjo, S. 2005. *Cara Sehat Investasi di Pasar Modal*. Jakarta: Elex Media Komputindo.

Wilmott, P., Howison, S., danDewyne, J.. 1995. *The Mathematics of Financial Derivatives*. New York: Cambridge University Press

RIWAYAT HIDUP

Winda Apriliani, lahir di kota Probolinggo pada tanggal 7 April 1993, biasa dipanggil Winda, tinggal di Jl. Sunan Muria No.08 RT. 02 RW. 01 Kec. Mayangan Kab. Probolinggo. Anak ke empat dari empat bersaudara. Putri dari bapak Isfandi dan Ismiati.

Pendidikan dimulai dari TK Tunas Bakti Probolinggo pada tahun 1997 hingga tahun 1999, setelah itu melanjutkan pendidikan di SDN Sukoharjo III Probolinggo dan lulus pada tahun 2005. Kemudian melanjutkan pendidikan di SMPN 2 Probolinggo dan lulus tahun 2008. Kemudian melanjutkan pendidikan di SMAN 2 Probolinggo dan lulus pada tahun 2011. Selanjutnya pada tahun 2011 menempuh kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang dengan mengambil jurusan Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi.

Selama menjadi mahasiswa, dia berperan aktif pada organisasi UKM Inovasi dan HMJ Matematika dalam rangka mengembangkan ilmu dan pengetahuan seputar organisasi, kematematikaan dan jurnalistik.

LAMPIRAN

Lampiran 1

Simulasi Metode Beda Hingga Implisit dengan Transformasi Peubah pada Perhitungan Harga Opsi Eropa

```
clc,clearall
formatshort
disp('');
disp('PROGRAM METODE BEDA HINGGA IMPLISIT DENGAN TRANSFORMASI 
EROPA');
disp('');
x=input('inputkanfaktorpenggaliSmax x= ');
M=input('inputkanpartisi grid N = ');
disp('');
disp ('                    PILIHAN');
disp('         PEMEGANG HAK SAHAM');
disp('');
disp('         (1)Call option');
disp('         (2)Put option')
disp('');
OptionType=input('input pemeganghak yang diinginkan =')
disp('')
disp('                        ')

tic;

SO=5;      %Hargasahamawal
y=log(SO);%Hargasahamawal DENGAN TRANSFORMASI PEUBAH
T=1;       %Waktu yang digunakan
To=log(T);%waktudengantransformasipeubah
K=10;      %hargasahamketentuan
k=log(K); % hargasahamketentuandengantransormasipeubah
sig=0.5;   %variansi
r=0.06;    %tingkatbunga

Smax=log(x)*y;%Hargasahammaksimum
Smin=0;

%nilaiuntuk BS
d1=(log(y/k)+(r+0.5*sig^2)*To)/(sig*sqrt(To));
d2=d1-sig*sqrt(To);
N1=0.5*(1+erf(d1/sqrt(2)));
N2=0.5*(1+erf(d2/sqrt(2)));

for N=3:M
    Ds=Smax/N; %partisihargasaham
Dt=To/N;    %partisiwaktu
matsol=zeros(N+1,N+1);

%Memangun S dan V
fori=1:N+1
y(i)=Smin+(i-1)*Ds;
```

```
ifOptionType==1
V(i)=max(y(i)-k,0); % Call:Payoff that is initial conition
else
end
end

%membangun elemen2 matrik A
for j=1:N-1
        A=1/(r*Dt-1)
        Alpha=((r-0.5*sig^2)*j*Dt)/2*y;
Betha=(sig^2*j^2*Dt)/2*(y^2);
        a=A*(-Alpha+Betha);
        b=A*(1-2*Betha);
        c=A*(Alpha-Betha);
if j==1
MI(j,j)=b;
MI(j,j+1)=c;
elseif j==N-1
MI(N-1,N-2)=a;
MI(N-1,N-1)=b;
else
MI(j,j-1)=a;
MI(j,j)=b;
MI(j,j+1)=c;
end
end
%payoff
matsol(:,N+1)=V;

%batas
ifOptionType==1
for j=N:-1:1 %call option
matsol(1,j)=Smin; %batasbawah
matsol(N+1,j)=Smax*exp((N+1-j)*-r*Dt); %batasatas
end
else
for j=N:-1:1 %put option
matsol(1,j)=Smax*exp(N+1-j*-r*Dt); %batasatas
matsol(N+1,j)=Smin; %batasbawah
end
end

fori=1:N+1
        A=1/(r*Dt-1)
        Alpha=((r-0.5*sig^2)*i*Dt)/2*y;
Betha=(sig^2*i^2*Dt)/2*y^2;
        c=A*(Alpha+Betha);
end
for j=N:-1:1
matsol(N,j+1)=matsol(N,j+1)-c*matsol(N+1,j)*exp((N+1-j)*-r*Dt);
end

%matrihargaopsi
matV=matsol(2:N,1:N+1);

%Solusimatrikhargaopsi
for j=N:-1:1
matV(:,j)=inv(MI'*MI)*MI'*matV(:,j+1);
```

```
end

%Perhitungan Black-Scholes
    C=y*N1-k*exp(-r*To)*N2;
    P=C-y+exp(-r*To)*k;
ifOptionType==1
BC(N,1)=C;
else
BC(N,1)=P;
end
%OUTPUT
    p=ceil(N/x);
harga_opsi(N,1)=matV(p,1);
    BS=BC;
end
error=abs(BC-harga_opsi);
harga_opsii=matV(p,1)
B_S=BC(x,1)
eror=abs(B_S-harga_opsii)
disp('')

toc;
gridon
holdon
plot(harga_opsi,'-*g','markerSize',10,'LineWidth',2);
plot(BC,'-*b','markerSize',10,'LineWidth',2);
hold0n
plot(error,'-*r','markerSize',10,LineWidth',2);
ifOptionType==1
title('KonvergensiMetode Beda hinggaImplisitOpsi Call Eropa')
else
title('KonvergensiMetode Beda hinggaImplisitOpsi Put Eropa')
end
xlabel('BanyaknyaPartisi, N')
ylabel('HargaOpsi (Option Value)')
ifOptionType==1
    q=legend ('Opsi call','Black-Scholes','Error',1)
else
    q=legend ('Opsi put','Black-Scholes','Error',1)
end
```

Lampiran 2

Simulasi Metode Beda Hingga Eksplisit dengan Transformasi Peubah pada Perhitungan Harga Opsi Eropa

```
clc, clear all
formatshort
disp('');
disp('Program metode beda hingga eksplisit eropa dengan
Transformasi Peubah');
disp('');
x=input('inputkanfaktorpengaliSmax x=');
M=input('inputkanpartisi grid N=');
disp('');
disp('     pilihan');
disp('     pemeganghaksaham');
disp('');
disp('    (1)Call Option');
disp('    (2)Put Option');
disp('');
OptionType=input('input pemeganghak yang diinginkan =');
disp('');
disp('     ');

tic;
SO=5;              % hargasahamawal
y=log(SO)
T=1;               % waktu yang digunakan
K=10;              % hargasahamketentuan
sig=0.5;           % variansi
r=0.06;            % tingkatbunga

Smax=x*y;         % hargasahammaksimum
Smin=0;

d1=(log(SO/K)+(r+0.5*sig^2)*T/(sig*sqrt(T)));
d2=d1-sig*sqrt(T);
N1=0.5*(1+erf(d1/sqrt(2)));
N2=0.5*(1+erf(d2/sqrt(2)));


for N=3:M
    Ds=Smax/N;
Dt=T/N;
matsol=zeros(N+1,N+1);

fori=1:N+1
S(i)=Smin+exp((i-1)*Ds);
ifOptionType==1
W(i)=max(S(i)-K,0);
else
W(i)=max(K-S(i),0);
end
end
for j=1:N-1
        Alpha=1/((r*Dt)+1);
Betha=(Dt*j*(r-0.5*sig^2))/(2*Ds*j);
```

```
        Gamma=(sig^2*Dt*j^2)/(2*Ds^2*j^2);
        a=Alpha*(-Betha+Gamma);
        b=Alpha*(1-(2*Gamma));
        c=Alpha*(Betha+Gamma);
if j==1
MI(j,j)=b;
MI(j,j+1)=c;
elseif j==N-1
MI(N-1,N-2)=a;
MI(N-1,N-1)=b;
else
MI(j,j-1)=a;
MI(j,j)=b;
MI(j,j+1)=c;
end
end

matsol(:,N+1)=W;

ifOptionType==1
for j=N:-1:1
matsol(1,j)=Smin;
matsol(N+1,j)=Smax*exp((N+1-j)*-r*Dt);
end
else
for j=N:-1:1
matsol(1,j)=Smax*exp((N+1-j)*-r*Dt);
matsol(N+1,j)=Smin;
end
end
fori=1:N+1
        Alpha=1/((r*Dt)+1);
Betha=(Dt*i*(r-0.5*sig^2))/(2*Ds*i);
        Gamma=(sig^2*Dt*i^2)/(2*Ds^2*i^2);
        c=Alpha*(Betha+Gamma);
end
for j=N:-1:1
matsol(N,j+1)=matsol(N,j+1)-c*matsol(N+1,j)*exp((N+1-j)*-r*Dt);
end

matW=matsol(2:N,1:N+1);

for j=N:-1:1
matW(:,j)=MI*matW(:,j+1);
end

    C=S0*N1-K*exp(-r*Dt)*N2;
    P=C-S0+exp(-r*Dt)*K;
ifOptionType==1
BC(N,1)=C;
else
BC(N,1)=P;
end

    p=ceil(N/x);
harga_opsi(N,1)=matW(p,1);
    BS=BC;
end
```

```
eror=abs(BC-harga_opsi);
harga_opsii=matW(p,1);
B_S=BC(x,1)
error=abs(B_S-harga_opsi);
disp('');

toc;
gridon
holdon
plot(harga_opsi,'-*g','markerSize',10,'LineWidth',2);
plot(BC,'-*b','markerSize',10,'LineWidth',2);
holdon
plot(eror,'-*r','markerSize',10,'LineWidth',2);
ifOptionType==1
title('konvergensiMetode Beda HinggaEksplisitopsi call
EropadenganTransformasiPeubah')
else
title('konvergensiMetode Beda HinggaEksplisitopsi Put
EropadenganTransformasiPeubah');
end
xlabel('BanyaknyaPartisi,N')
ylabel('Hargaopsi (Option Value)')
ifOptionType==1
    q=legend('Opsi Call','Black-Scholes','Error',1);
else
    q=legend('Opsi Put','Black-Scholes','Error',1);
end
```

Lampiran 3

Simulasi Analisis Metode Beda Hingga Implisit dengan Transformasi Peubah Pada Perhitungan Harga Opsi Asia

```
clc, clear all
formatshort
disp('');
disp('Program metode beda hingga implisit asia');
disp('');
x=input('inputkanfaktorpengaliSmax x=');
M=input('inputkanpartisi grid N=');
disp('');
disp('     pilihan');
disp('     pemeganghaksaham');
disp('');
disp('    (1)Call Option');
disp('    (2)Put Option');
disp('');
OptionType=input('input pemeganghak yang diinginkan =');
disp('');
disp('     ');

SO=4.59;            % hargasahamawal
y=log(SO);
T=1;             % waktu yang digunakan
K=10;            % hargasahamketentuan
sig=0.5;         % variansi
r=0.06;          % tingkatbunga

Smax=x*SO;       % hargasahammaksimum
Smin=0;

for N=3:M
    Ds=Smax/N;
Dt=T/N;
matsol=zeros(N+1,N+1);

fori=1:N+1
S(i)=y*exp((r-0.5*sig^2)*i+sig*sqrt(Dt));
end
Sbar=mean(S);
for j=1:N-1
        Alpha=1/((r*Dt)-1);
Betha=(Dt*j*(r-0.5*sig^2))/(2*y*j);
        Gamma=(sig^2*Dt*j^2)/(2*y^2*j^2);
        a=Alpha*(-Betha+Gamma);
        b=Alpha*(-1-(2*Gamma));
        c=Alpha*(Betha+Gamma);
%a=1;b=2,c=3
if j==1
A(j,j)=b;
A(j,j+1)=c;
elseif j==N-1
A(N-1,N-2)=a;
A(N-1,N-1)=b;
else
```

```
A(j,j-1)=a;
A(j,j)=b;
A(j,j+1)=c;
end
end

fori=1:N+1
ifOptionType==1
V(i)=max((i-1)*Sbar-K,0);
else
V(i)=max(K-(i-1)*Sbar,0);
end
end

matsol(:,N+1)=V;

ifOptionType==1
for j=N:-1:1 %call option
matsol(1,j)=Smin; %batasbawah
matsol(N+1,j)=Smax*exp((N+1-j)*-r*Dt); %batasatas
end
else
for j=N:-1:1 %put option
matsol(1,j)=Smax*exp((N+1-j)*-r*Dt); %batasatas
matsol(N+1,j)=Smin; %batasbawah
end
end
fori=1:N+1
        Alpha=1/((r*Dt)-1);
Betha=(Dt*i*(r-0.5*sig^2))/(2*Ds*i);
        Gamma=(sig^2*Dt*i^2)/(2*Ds^2*i^2);
        c=Alpha*(Betha+Gamma);
end
for j=N:-1:1
matsol(N,j)=matsol(N,j)-c*matsol(N+1,j)*exp((N+1-j)*-r*Dt);
end

matV=matsol(2:N,1:N+1);

for j=N:-1:1
matV(:,j)=inv(A'*A)*A'*matV(:,j+1);
end

    p=ceil(N/x);
harga_opsi(N,1)=matV(p,1);
end
harga_opsii=(matV(p,1));
gridon
holdon
qq=x:x:N;
harga_opsi=harga_opsi(x:x:length(harga_opsi));
plot(qq,harga_opsi,'-*g','markerSize',10,'LineWidth',2)
ifOptionType==1
title('konvergensiMetode Beda
HinggaImplisitdenganTransformasiPeubahOpsi Call Asia')
else
title('konvergensiMetode Beda
HinggaImplisitdenganTransformasiPeubahOpsi Put Asia')
```

```
end
xlabel('BanyaknyaPartisi, N')
ylabel('Hargaopsi (Option Value)')
q=legend('Opsi Asia',1)
```

Lampiran 4

Simulasi Metode Beda Hingga Eksplisit dengan Transformasi Peubah pada Perhitungan Harga Opsi Asia

```
clc, clear all
formatshort
disp('');
disp('Program metode beda hingga eksplisit asia');
disp('');
x=input('inputkanfaktorpengaliSmax x=');
M=input('inputkanpartisi grid N=');
disp('');
disp('     pilihan');
disp('     pemeganghaksaham');
disp('');
disp('    (1)Call Option');
disp('    (2)Put Option');
disp('');
OptionType=input('input pemeganghak yang diinginkan =');
disp('');
disp('     ');

SO=4.69;             % hargasahamawal
y=log(SO);
T=1;            % waktu yang digunakan
K=10;           % hargasahamketentuan
sig=0.5;        % variansi
r=0.06;         % tingkatbunga

Smax=x*SO;      % hargasahammaksimum
Smin=0;

for N=3:M
    Ds=Smax/N;
Dt=T/N;
matsol=zeros(N+1,N+1);

fori=1:N+1
S(i)=y*exp((r-0.5*sig^2)*i+sig*sqrt(Dt));
end
Sbar=mean(S);
for j=1:N-1
        Alpha=1/((r*Dt)+1);
Betha=(Dt*j*(r-0.5*sig^2))/(2*Ds*j);
        Gamma=(sig^2*Dt*j^2)/(2*Ds^2*j^2);
        a=Alpha*(-Betha+Gamma);
        b=Alpha*(1-(2*Gamma));
        c=Alpha*(Betha+Gamma);
%a=1;b=2,c=3
if j==1
A(j,j)=b;
A(j,j+1)=c;
elseif j==N-1
A(N-1,N-2)=a;
```

```
A(N-1,N-1)=b;
else
A(j,j-1)=a;
A(j,j)=b;
A(j,j+1)=c;
end
end

fori=1:N+1
ifOptionType==1
V(i)=max((i-1)*Sbar-K,0);
else
V(i)=max(K-(i-1)*Sbar,0);
end
end

matsol(:,N+1)=V;

ifOptionType==1
for j=N:-1:1 %call option
matsol(1,j)=Smin; %batasbawah
matsol(N+1,j)=Smax*exp((N+1-j)*-r*Dt); %batasatas
end
else
for j=N:-1:1 %put option
matsol(1,j)=Smax*exp((N+1-j)*-r*Dt); %batasatas
matsol(N+1,j)=Smin; %batasbawah
end
end
fori=1:N+1
        Alpha=1/((r*Dt)+1);
Betha=(Dt*i*(r-0.5*sig^2))/(2*Ds*i);
        Gamma=(sig^2*Dt*i^2)/(2*Ds^2*i^2);
        c=Alpha*(Betha+Gamma);
end
for j=N:-1:1
matsol(N,j)=matsol(N,j)-c*matsol(N+1,j)*exp((N+1-j)*-r*Dt);
end

matV=matsol(2:N,1:N+1);

for j=N:-1:1
matV(:,j)=A*matV(:,j+1);
end

    p=ceil(N/x);
harga_opsi(N,1)=matV(p,1);
end
harga_opsii=(matV(p,1));
gridon
holdon
qq=x:x:N;
harga_opsi=harga_opsi(x:x:length(harga_opsi));
plot(qq,harga_opsi,'-*g','markerSize',10,'LineWidth',2)
ifOptionType==1
title('konvergensiMetode Beda
HinggaEksplisitdenganTransformasiPeubahOpsi Call Asia')
else
```

```
title('konvergensiMetode Beda
HinggaEksplisitdenganTransformasiPeubahOpsi Put Asia')
end
xlabel('BanyaknyaPartisi, N')
ylabel('Hargaopsi (Option Value)')
q=legend('Opsi Asia',1)
```