SKRIPSI

ESTIMASI PARAMETER MODEL REGRESI NON LINIER RESIPROKAL DENGAN MENGGUNAKAN METODE *MAXIMUM LIKELIHOOD ESTIMATION*

(Study Kasus Oksidasi Amoniak Menjadi Asam Nitrat)

Oleh:

SOPYAN HADI

NIM: 04510018

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM

MALANG

2009

ESTIMASI PARAMETER MODEL REGRESI NON LINIER RESIPROKAL DENGAN MENGGUNAKAN METODE *MAXIMUM LIKELIHOOD ESTIMATION*

(Study Kasus Oksidasi Amoniak Menjadi Asam Nitrat)

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan Dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:

SOPYAN HADI

NIM: 04510018

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM

MALANG

2009

ESTIMASI PARAMETER MODEL REGRESI NON LINIER RESIPROKAL DENGAN MENGGUNAKAN METODE *MAXIMUM LIKELIHOOD ESTIMATION*

(Study Kasus Oksidasi Amoniak Menjadi Asam Nitrat)

SKRIPSI

Oleh:

SOPYAN HADI

NIM: 04510018

Telah disetujui untuk diuji

Malang, 23 Juli 2009

Dosen pembimbing I	**Dosen Pembimbing II**
<u>Sri Harini, M.Si</u>	**<u>Abdul Aziz, M.Si</u>**
NIP. 150 318 321	**NIP. 150 377 256**

Mengetahui,

Ketua Jurusan Matematika

<u>Sri Harini, M.Si</u>

NIP. 150 318 321

ESTIMASI PARAMETER MODEL REGRESI NON LINIER RESIPROKAL DENGAN MENGGUNAKAN METODE *MAXIMUM LIKELIHOOD ESTIMATION*

(Study Kasus Oksidasi Amoniak Menjadi Asam Nitrat)

SKRIPSI

Oleh:

SOPYAN HADI

NIM: 04510018

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal:
27 Juli 2009

Susunan Dewan Penguji:		Tanda Tangan
1. Penguji Utama	: Drs. H. Turmudi, M.Si	( )
2. Ketua	: Usman Pagalay, M.Si	( )
3. Sekretaris	: Sri Harini, M.Si	( )
4. Anggota	: Abdul Aziz, M.Si	( )

Mengetahui dan Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M.Si
NIP. 150 318 321

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Sopyan Hadi

NIM : 04510018

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambil alihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri.

Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 23 Juli 2009

Yang membuat pernyataan

Sopyan Hadi

NIM. 04510018

Motto

بِسْمِ اللهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

"Sebaik-Baik Manusia Adalah Yang Bermanfaat Bagi Manusia Yang Lain"

Take time to THINK. It is the source of power

Take time to READ. It is fondation of wisdom

Take time to QUIET. It is the opportunity to seek God

Take time to DREAM. It is the future made of

Take time to to PRAY. It is the greatest power on earth

HALAMAN PERSEMBAHAN

بسم الله الرحمن الرحيم

Karya ini ku persembahan untuk...

Allah S.W.T, yang telah memberikan petunjuk dan hidayah-Nya. Lantunan Sholawat tercurah untuk Penerang dunia Muhammad S.A.W, inspirator umat manusia dalam berkarya.

Ayah&Ibu (*Sujono & Srifatun***), terima kasih atas kasih sayang, do'a, perhatian, dan idealitasnya. Semoga Allah membalas semua kebaikan yang telah Ayah&Ibu lakukan pada ananda karena hanya Allah yang bisa membalas kebaikan Ayah&Ibu**

Kakakku (*Uswatun Hasanah, Muhyidin, Sigit Mustofa,***) yang telah memberikan perhatian, semangat, bimbingan dan kebaikan yang tidak akan pernah bisa adik balas**

Adek-adekku (*Khoirul Ikhsan & Siti Fatimah***) semangat dan motifasi kalian membuat kakak semangat untuk menjadi lebih baik dan jadilah anak yang bisa dibanggakan**

Aminatus Sakdiyah **yang telah menemani, memberikan semangat, perhatian dan bimbingan, terima kasih atas semua yang engkau lakukan semoga kita bisa tetap bersama illa yaumil akhir**

Untuk (*Hermanto dan Serly)* **Tanks you brow semoga tetap kekal persahabatan kita**

Untuk (*Pak Iin, Mbah Agus, Mas Wahyu, Mbak endang***) terimakasih untuk doanya**

Special untuk teman-teman IPS NU Pagar Nusa UIN Malang *khususnya angkatan '04, (Mujib, Hanif, Andre, Pray, Annas, mbak Eli, Mimin)* **tetep bersaudara tooooooooooooo**

Super special untuk anggota C2M *(iza, bukhori, Sri, romlah, Annas, Ahda, Andre)* **teruskan perjuangan untuk maju**

untuk prend-prend kontrakan (Mudhopar, Jacky, Andre kuadrat, Aris, Abu)

Teman-teman Matematik '04 semoga selalu sukses.

KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيْمِ

Assalamu'alaikum Wr.Wb.

Teriring ucapan puja dan puji syukur kehadirat Allah SWT. yang telah melimpahkan rahmat, taufik dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi yang berjudul "Estimaasi Parameter Model Regresi Non Linier Resiprokal Dengan Menggunakan Metode *Maksimum Likelihood Estimation (Study Kasus Oksidasi Amoniak Menjadi Asam Nitrat)*".

Penulisan skripsi ini dapat terselesaikan berkat bimbingan dan motivasi dari dosen pembimbing, bapak dan ibu dosen serta bantuan dari semua pihak. Menyadari dengan sepenuhnya, bahwa penulisan skripsi ini tidak lepas dari banyak pihak. Oleh karena itu, tidak lupa penulis ucapkan banyak-banyak terima kasih kepada:

1. Bapak Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
2. Bapak Prof. Drs. Sutiman B. Sumitro, SU., DSc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
3. Ibu Sri Harini, M.Si, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, sekaligus sebagai Dosen Pembimbing yang telah bersedia meluangkan waktunya untuk membimbing dan mengarahkan penulis dalam menyelesaikan penulisan skripsi.

4. Bapak Abdul Aziz, M.Si selaku dosen pembimbing agama, terima kasih atas masukan dan arahannya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini.
5. Bapak Drs. H. Turmudi, M. Si , Bapak Usman pagalay, M. Si sebagai team penguji skripsi, terimakasih telah memberikan masukan-masukan yang sangat berharga untuk saya.
6. Bapak Ghonaim Fasa, S. Si dan Ibu Rini Astuti, M. Pd yang telah membantu proses analisis pada bagian ilmu kimia. Terimaksih semoga dibalas oleh Allah dengna yang lebih baik.
7. Seluruh Dosen Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah memberikan ilmu pengetahuan kepada penulis selama di bangku kuliah, serta seluruh karyawan dan staf Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
8. Kedua orang tua (Bapak Sujono dan Ibu Srifatun), keiklasan beliau memberikan dukungan moril dan sprituil, sehingga penulisan tugas akhir ini dapat terselesaikan
9. Kakak-kakakku (Uswatun Hasanah dan Muhyidin), adik-adik tersayang (Khoirul Ikhsan, Siti Fatimah) terimakasih atas perhatian dan supportnya.
10. Terimakasih yang amat sangat kepada Aminatus Sakdiyah dengan sabar engkau telah menemani sampai skripsi ini selesai dan Teman-teman Pagar Nusa Koms. Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang khususnya angkatan ’04 (semoga selalu kompak).
11. Terimakasih juga kami sampaikan teman-teman jurusan matematika angkatan ’04 yang telah memberikan support, semangat dan do’a.

12. Semua pihak yang tidak mungkin penulis sebut satu persatu, atas keiklasan bantuan moril dan sprituil penulis ucapkan terima kasih.

Penulis menyadari sepenuhnya bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna. Untuk itu, kritik dan saran yang bersifat membangun dari berbagai pihak selalu dinantikan demi kesempurnaan skripsi ini. Dan untuk itu, dengan segala kerendahan hati, penulis mengharapkan semoga skripsi ini dapat diterima.

Semoga ikhtiar ini senantiasa mendapat ridho dan berkah dari Allah SWT. sekaligus sebagai ibadah sosial yang bermanfaat. Akhir kata, semoga skripsi ini dapat bermanfaat khususnya bagi penulis dan pembaca pada umumnya. Amiiiiin.........

Wassalamu'alaikum Wr.Wb

.

Malang, 27 Juli 2009

Penyusun

DAFTAR ISI

DAFTAR SIMBOL

Lambang Matematika

$\sim$	: Berdistribusi
$\leq$	: Lebih kecil atau sama dengan
$\geq$	: Lebih besar atau sama dengan
∞	: Tak berhingga
$<$	: Lebih kecil daripada
$>$	: Lebih besar daripada
$\prod$	: Untuk perkalian
$\sum$	: Untuk penjumlahan

Abjad Yunani

μ	: Mu
Θ θ	: Theta
σ	: Sigma
λ	: Lambda
π	: Pi
ϕ	: Phi
∂	: Dho
ε	: Epsilon

ψ : Psi

β : Bheta

Lambang Khusus

μ	: Nilai Tengah (rataan)
$\bar{X}$	: Rata-rata pada pengamatan X
$\bar{Y}$	: Rata-rata pada pengamatan Y
$\rightarrow$	: Menuju
s^2	: Ragam untuk sampel
σ^2	: Ragam (varian) untuk populasi
$\hat{\beta}$	: Penduga dari matrik vektor β yang entri-entrinya terdiri dari parameter $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, ..., \hat{\beta}_n$
$\hat{\theta}$	: Penduga dari parameter θ
E	: Expectation (nilai harapan)
$L(x_1, ..., x_n; \theta)$	: Fungsi likelihood
$f_{X_1, ..., X_n}(x_1, ..., x_n; \theta)$	: Fungsi padat peluang
$x_1, x_2, x_3, ..., x_n$	: Peubah acak
N	: Normal

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Hadi, Sopyan. 2009. Estimasi Parameter Model Regresi Non Linier Resiprokal dengan Menggunakan Metode *Maksimum Likelihood Estimation (Study Kasus Oksidasi Amoniak Menjadi Asam Nitrat)*. Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: Sri Harini, M. Si dan Abdul Aziz, M. Si.

Kata kunci: regresi non linier resiprokal, pendugaan parameter, *maksimum likelihood estimation*.

Regresi non linier adalah regresi yang variabel-variabelnya berbentuk tidak biasa. Bentuk grafik regresi non linier adalah berupa lengkungan hubungan fungsi antara dua variabel X dan *Y* tidak selalu bersifat linier, akan tetapi bisa juga bukan linier (non linier). Diantara beberapa bentuk regresi nonlinier, salah satunya adalah regresi nonlinier keterbalikan atau biasa disebut dengan regresi nonlinier resiprokal. Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui parameter pada masing-masing parameter intersep dan parameter slop. Sedangkan dalam penentuan peramalannya menggunakan fungsi dan bukan matrix.

Metode yang digunakan untuk mendeteksi parameter model regresi nonlinier resiprokal adalah metode *maximum likelihood estimation*. Untuk membuktikan suatu pendugaan parameter pada model regresi nonlinier resiprokal dilakukan suatu pengujian terhadap pendugaan parameter yang dihasilkan dari metode *maximum likelihood estimation* yaitu dengan cara menentukan sifat-sifat pendugaan parameter sesuai sifat-sifat pendugaan parameter yang baik yaitu unbias, efisien, dan konsisten.

Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa pendugaan parameter yang dihasilkan model regresi resiprokal merupakan penduga yang baik dikarenakan pendugaan parameter yang dihasilkan model regresi resiprokal memenuhi sifat-sifat dari pendugaan parameter yang baik yaitu unbias, efisien dan konsisten. Sedangkan untuk study kasus pada oksidasi amoniak menjadi asam nitrat sesuai dengan pendugaanya dihasilkan model penaksiran seperti di bawah.

$$Y_i = 72,5876 - 2934,62105\frac{1}{X_{1i}} - 569,12798\frac{1}{X_{2i}} + 1903,09088\frac{1}{X_{3i}}$$

Dari data yang ditentukan maka diperolah jika menginginkan jumlah Y_i kecil maka X_1, X_2 harus bernilai kecil dan untuk X_3 harus bernilai besar. Sedangkan jika menginginkan Y_i besar maka X_1 dan X_2 harus bernilai besar dan untuk X_3 harus bernilai kecil. Dalam proses untuk menentukan Y_i kecil atau besar, maka kondisi di atas harus terpenuhi.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Sejak peradaban manusia bermula, matematika memainkan peranan yang sangat penting dalam kehidupan sehari-hari. Berbagai bentuk simbol digunakan untuk membantu perhitungan, pengukuran, penilaian dan peramalan. Salah satu cabang dari matematika terapan adalah statistika, yang menggunakan teori probabilitas sebagai alat dan memberikan deskripsi, analisis dan perkiraan fenomena dan digunakan dalam seluruh ilmu.

Statistik merupakan salah satu cabang pengetahuan yang paling banyak mendapatkan perhatian dan dipelajari oleh ilmuan dari hampir semua bidang ilmu pengetahuan, terutama peneliti yang dalam penelitiannya banyak menggunakan statistik sebagai dasar analisis maupun perancangannya. Dapatlah dikatakan bahwa statistika mempunyai sumbangan yang penting dan besar terhadap kemajuan berbagai bidang ilmu pengetahuan.

Dalam statistik tidak jarang berhadapan dengan persoalan yang melibatkan dua atau lebih peubah atau variabel yang ada, atau diduga ada, dalam suatu hubungan tertentu. Bentuk hubungan ini dikenal dengan nama regresi untuk satu peubah atas peubah lain. Regresi merupakan bentuk hubungan antara peubah respon atau peubah terikat atau peubah tak bebas dan peubah prediktor atau peubah bebas, dengan tujuan untuk memperkirakan dan atau meramalkan nilai rata-rata dari variabel tak bebas (*dependent variabel*) apabila nilai variabel yang menerangkan sudah diketahui. Variabel yang menerangkan sering disebut variabel bebas (*independent variable*) atau *explanatory variable* (Supranto, 1995: 44). Pola hubungan antara variabel tak bebas dengan variabel bebas pada regresi dapat di aplikasikan pada data oksidasi amoniak menjadi asam nitrat.

Oksidasi amoniak menjadi asam nitrat adalah proses pembentukan asam nitrat (HNO_3) yang didapat dengan proses kimiawi antara amoniak (NH_3) dengan oksigen (O_2). Zat kimia ini merupakan salah satu bahan penting dalam pembuatan pupuk, obat bius dan bahan peledak. Di Indonesia kebutuhan akan zat kimia ini sangat tinggi, di perkirakan setiap tahunnya mengalami peningkatan yang tinggi yaitu mencapai 2,6% per tahun. Oleh karenanya, dari penelitian proses oksidasi amoniak menjadi asam nitrat ini diharapkan dapat mengetahui peramalan jumlah amoniak yang hilang (tidak terikat) dari proses oksidasi. Dengan hasil peramalan ini di harapkan pada proses oksidasi selanjutnya jumlah amoniak yang hilang bisa diminimalkan. Sehingga hasil asam nitrat yang diperoleh (terikat) juga menjadi semakin besar.

Suatu penelitian khususnya yang melibatkan suatu variabel respon dan variabel *explanatory*, maka model regresi merupakan model yang cocok digunakan dalam menganalisis data. Model regresi ini mempunyai 2 bentuk yaitu bentuk linier dan tak linier dalam parameternya. Model yang linier dalam parameternya adalah yang dapat didekati dengan teknik regresi berganda, seperti model-model polinom. Model yang tak linier dalam parameternya dikatakan linier instrinsik bila suatu transformasi dapat membuatnya linier. Kurva-kurva logaritma dan resiprokal termasuk golongan ini. Model yang tak dapat dilinierkan melalui transformasi dikatakan tidak linier instrinsik dan analisis yang berhubungan dengannya disebut regresi tak linier (Steel dan Torrie, 540:1993). Salah satu model regresi nonlinier (yang secara instrinsik linier) adalah model resiprokal. Data yang digunakan dalam penelitian ini merupakan data nonlinier sehingga regresi resiprokal ini sesuai jika dijadikan fasilitas untuk menganalisa. Penggunaan analisis regresi ini bertujuan untuk mendeteksi parameter pada model regresi nonlinier resiprokal.

Dalam estimasi parameter pada model regresi nonlinier resiprokal terdapat beberapa macam asumsi tehadap nilai pengamatan (variabel random) akan tetapi dalam pendugaan parameter menggunakan satu asumsi, yaitu nilai pengamatannya diasumsikan berdistribusi normal, dikarenakan distribusi normal merupakan salah satu pendekatan penyelesaian yang cukup baik bagi distribusi-distribusi lain, termasuk distribusi bagi variabel diskrit seperti binomial dan poisson (Harini, 2007:123).

Pendugaan parameter pada oksidasi amoniak menjadi asam nitrat dengan regresi nonlinier resiprokal dilakukan karena merupakan masalah yang paling utama dalam menentukan model untuk peramalan. Maka dari itu diperlukan suatu cara untuk mengatasinya yaitu melakukan suatu pendugaan terhadap model tersebut dengan menggunakan suatu metode. Dan metode tersebut haruslah memberikan hasil yang baik, metode tersebut adalah metode *maximum likelihood estimation*. Untuk membuktikan apakah pendugaan tersebut memenuhi syarat sifat-sifat pendugaan yang baik maka dilakukan suatu pengujian terhadap hasil pendugaan dengan sifat-sifat pendugaan itu sendiri yaitu unbias, efisien, dan konsisten.

Dalam Al Quran telah disinggung terkait dengan permasalahan pendugaan dan perbandingan dua hal. Untuk permasalahan pendugaan yaitu terdapat pada Surat Al-Baqoroh ayat 80:

وَقَالُوا لَن تَمَسَّنَا ٱلنَّارُ إِلَّآ أَيَّامًا مَّعۡدُودَةً ۚ قُلۡ أَتَّخَذۡتُمۡ عِندَ ٱللَّهِ عَهۡدًا فَلَن يُخۡلِفَ ٱللَّهُ عَهۡدَهُۥٓ ۖ أَمۡ تَقُولُونَ عَلَى ٱللَّهِ مَا لَا تَعۡلَمُونَ ﴿٨٠﴾

Artinya: *"Dan mereka berkata: "Kami sekali-kali tidak akan disentuh oleh api neraka, kecuali selama beberapa hari saja." Katakanlah: "Sudahkah kamu menerima janji dari Allah sehingga Allah tidak akan memungkiri janji-Nya, ataukah kamu Hanya mengatakan terhadap Allah apa yang tidak kamu ketahui?""*(QS. Al- Baqoroh:80)

Pada surat Al- Baqoroh:80 dijelaskan bahwa umat yahudi berkata bahwa mereka tidak akan disentuh oleh api neraka, kecuali beberapa hari saja. Pada ayat tersebut terdapat ketidakpastian dalam pernyataan jumlah hitungan hari lama orang yahudi akan disentuh oleh api neraka.

Atas dasar uraian di atas, peneliti akan mengkaji masalah model *non-linier* dengan judul **"Estimasi Parameter Model Regresi Non Linier Resiprokal dengan Menggunakan Metode *Maximum Likelihood Estimation (Study Kasus Oksidasi Amoniak Menjadi Asam Nitrat)"***.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka permasalahan dirumuskan sebagai berikut:

1. Bagaimana bentuk estimasi parameter pada model regresi *Non-linier Resiprokal* dengan menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation*?

2. Bagaimana model regresi *Non-linier Resiprokal* pada data oksidasi amoniak menjadi asam nitrat dengan menggunakan *Maximum Likelihood Estimation*?

1.3 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah

1. Untuk mengetahui bentuk estimasi parameter pada model regresi *Non-linier Resiprokal* dengan menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation*.
2. Untuk mengetahui model regresi *Non-linier Resiprokal* pada data oksidasi amoniak menjadi asam nitrat dengan menggunakan *Maximum Likelihood Estimation.*

1.4 Batasan Masalah

Untuk membatasi permasalahan agar sesuai dengan yang dimaksudkan dan tidak menimbulkan permasalahan yang baru, maka peneliti memberikan batasan pada asumsi yaitu $\varepsilon \sim N(\mu, \sigma^2)$ dimana estimasi parameter β, μ dan σ^2 akan dicari dengan metode *Maximum Likelihood Estimation*. Dalam menentukan pendugaan parameter model regresi Resiprokal digunakan sifat-sifat pendugaan yaitu unbias, efisien, dan konsisten.

1.5 Manfaat Penelitian

a. Bagi peneliti

Kegunaan bagi peneliti adalah dapat memperdalam pemahaman peneliti mengenai statistik inferensi khususnya pendugaan parameter model non linier .

b. Bagi Pembaca

Melalui penelitian ini dapat menambah penguasaan materi, sebagai pengalaman dalam melakukan penelitian dan menyusun karya ilmiah dalam bentuk skripsi, serta media untuk mengaplikasikan ilmu matematika yang telah diterima dalam bidang keilmuannya, khususnya menentukan parameter model *non-linier* secara realistis.

1.6 Metode Penelitian

Adapun metode yang digunakan dalam penulisan skripsi ini ialah menggunakan studi literatur yaitu penelitian yang dilakukan diperpustakaan dengan cara mengumpulkan data dan informasi dengan bantuan bermacam-macam material yang terdapat di ruang perpustakaan seperti buku-buku, majalah, artikel, jurnal dan lain-lain (Mardalis,1999:28).

Adapun langkah-langkah dalam penulisan ini adalah

1. Menentukan model persamaan regresi resiprokal
2. Menentukan penduga parameter pada model regresi Resiprokal dengan metode *Maximum Likelihood Estimation* dengan cara menentukan persamaan model dengan:
   a. Menentukan fungsi likelihood yang diperoleh dari fungsi distribusi peluang
   b. Mengubah bentuk fungsi likelihood menjadi log-likelihood
   c. Menentukan penduga parameter $\hat{\beta}$ dan σ^2 dengan meMaximumkan persamaan

d. Menentuka sifat-sifat penaksir unbias, efisien dan konsisten

3. Mensubstitusikan data yang ada pada model untuk menentukan pendugaan parameter yang dihasilkan dari model dan menentukan hubungan yang terjadi pada data.
4. Membuat kesimpulan, kesimpulan merupakan jawaban dari permasalahan yang telah dikemukakan dalam pembahasan.

1.7 Sistematika Pembahasan

Dalam penulisan tugas akhir ini, penulis menggunakan sistematika penulisan yang terdiri dari empat bab, dan masing-masing bab dibagi dalam subbab dengan sistematika penulisan sebagai berikut:

BAB I	Pendahuluan, yang meliputi beberapa sub bahasan yaitu latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.
BAB II	Kajian pustaka, kajian yang berisi tentang teori-teori yang ada kaitannya dengan hal-hal penulis bahas diantaranya adalah regresi, regresi resiprokal, pendugaan parameter, metode *Maximum Likelihood Estimation*, distribusi normal, dan Kajian Estimasi, Non Linier dan Ramalan dalam Al-Quran dan Al-Hadis
BAB III	Pembahasan, pada bab ini berisi tentang uraian cara menduga parameter yang meliputi: menentukan penduga parameter

model regresi Resiprokal dengan metode *maximum likelihood estimation*, menentukan penduga parameter dari data, dan menentukan sifat-sifat pendugaan parameter metode *maximum likelihood estimation*, dan Aplikasi pada data.

BAB IV Penutup, pada bab ini penulis mengkaji tentang kesimpulan yang dilengkapi dengan saran-saran yang berkaitan dengan penelitian ini.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Regresi

Istilah regresi dikemukakan untuk pertama kali oleh *Francis Galton* dalam artikelnya "*Family Likeness in Stature*" pada tahun 1886. Studinya ini menghasilkan apa yang dikenal dengan hukum regresi universal tentang tingginya anggota suatu masyarakat. Hukum tersebut menyatakan bahwa distribusi tinggi suatu masyarakat tidak mengalami perubahan yang besar sekali antargenerasi. Hal ini dijelaskan *Galton* berdasarkan fakta yang memperlihatkan adanya kecenderungan mundurnya (regress) tinggi rata-rata anak dari orang tua dengan tiggi tertentu menuju tinggi rata-rata seluruh anggota masyarakat. Ini berarti terjadi penyusutan kearah keadaan sedang. Tetapi sekarang istilah regresi telah diberikan makna yang jauh berbeda dari yang dimaksudkan oleh *Galton*. Secara luas sekarang analisis regresi diartikan sebagai suatu analisis tentang ketergantungan suatu variable kepada variabel lain dalam rangka membuat estimasi atau prediksi dari rat-rata nilai variabel tergantung dengan diketahuinya nilai variabel bebas. (Lains, 2003: 19)

Jadi analisis regresi secara modern diinterpretasikan berkenaan dengan studi ketergantungan dari suatu variabel yang disebut variabel takbebas (*dependent variable*), pada satu atau lebih variabel, yaitu varibel yang menerangkan, dengan tujuan untuk memperkirakan dan atau meramalkan nilai rata-rata dari variabel tak bebas apabila nilai variabel yang menerangkan sudah diketahui. Variabel yang menerangkan sering disebut variabel bebas (*independent variable*) atau *explanatory variable*. (Supranto, 1995: 44)

Tujuan utama dari analisis regresi adalah mendapatkan dugaan (ramalan) dari suatu variabel dengan menggunakan variabel lain yang diketahui. Analisis regresi mempunyai dua jenis model yaitu regresi linier dan regresi non linier. Namun yang akan dibahas dalam penelitian ini hanyalah mengenai regresi non linier.

2.2 Regresi Non Linier

Regresi non linier adalah regresi yang variabel-variabelnya berbentuk tidak biasa. Bentuk grafik regresi non linier adalah berupa lengkungan (Hasan, 2002: 279). Sedangkan Menurut Supranto (1994: 262) hubungan fungsi antara dua variabel X dan *Y* tidak selalu bersifat linier, akan tetapi bisa juga bukan linier (non linier). Diagram pencar dari hubungan yang linier akan menunjukkan suatu pola yang dapat didekati dengan garis lurus, sedangkan yang bukan linier harus didekati dengan garis lengkung. Dan menurut Sugiarto (1992: 29) hubungan fungsi diantara dua peubah X dan Y dikatakan tidak linier apabila laju perubahan dalam *Y* yang berhubungan dengan perubahan satu satuan *X* tidak konstan untuk suatu jangkauan nilai-nilai X tertentu

2.3 Regresi Non Linier Resiprokal

Model regresi non linier dibagi menjadi dua jenis yaitu model *linier instrinsik* dan model *nonlinier instrinsik*. Jika suatu model adalah *linier instrinsik*, maka model ini dapat dinyatakan melalui transformasi yang tepat terhadap peubahnya. jika suatu model nonlinier tidak dapat dinyatakan dalam bentuk baku ini, berarti model itu secara *nonlinier instrinsik* (Draper dan Smith,1992: 212).

Diantara bentuk-bentuk model (*linier instrinsik)* yang dapat ditransformasikan kedalam bentuk linier adalah model regresi resiprokal. Pada model regresi resiprokal terdapat dua bentuk, yang diantaranya ditunjukkan sebagai berikut:

a. Model pertama

$$Y_i = \frac{1}{\beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \ldots + \beta_k X_{ik} + \varepsilon_i}$$

transformasi modelnya ditentukan dengan membalik persamaan sehingga diperoleh

$$\frac{1}{Y_i} = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \ldots + \beta_k X_{ik} + \varepsilon_i$$

dimana:

Y	= Variabel terikat (*Dependent variable*)
β_0	= Parameter intersep
$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_p$	= Parameter slope
$X_1, X_2, \cdots X_p$	= Variabel bebas (*Independent variable*)
i	= $1,2,3,\cdots,n$ peubah acak
ε	= Galat

b. Model kedua

Pada model resiprokal yang pertma memiliki perbedaan bentuk, yang mana pada model kedua ini dapat ditunjukkan sebagai berikut:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1\left(\frac{1}{X_i}\right) + \varepsilon_i$$

Model ini memiliki variable X yang berbentuk nonlinier karena variable tersebut dimasukkan ke dalam model bentuk kebalikan atau berbanding terbalik. Namun jika dilakukan proses pengembalian model maka bentuk di atas merupakan bentuk linier..

Dari bentuk model yang ada di atas maka model resiprokal yang memiliki variable independent sebanyak n maka dapat ditentukan sebagai berikut:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 \frac{1}{X_{1i}} + \beta_2 \frac{1}{X_{2i}} + \cdots + \beta_k \frac{1}{X_{ni}} + \varepsilon_i \qquad (2.1)$$

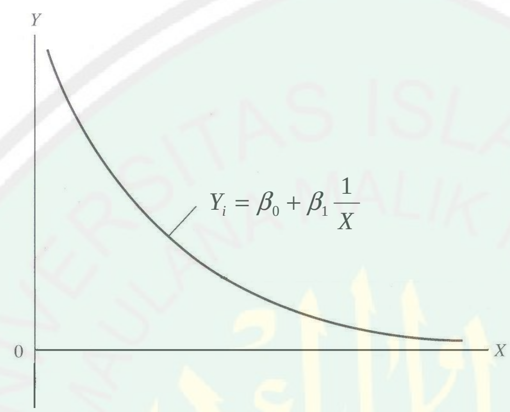
dimana:

Y	= Variabel terikat (*Dependent variable*)
β_1	= Parameter intersep
$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_p$	= Parameter slope
$X_1, X_2, \cdots X_p$	= Variabel bebas (*Independent variable*)
i	= $1,2,3,\cdots,n$ peubah acak
ε	= Galat

(Draper dan Smith,1992: 212)

Bentuk seperti model (2.1) dapat dilihat pada kurva Phillips, yang mencoba membuktikan hubungan antara laju pengangguran dan laju inflasi selain itu model ini juga dapat dilakukan untuk meramalkan biaya tetap rata-rata.

Beberapa bentuk kurva yang mungkin ditunjukan pada gambar dibawah ini:



Gambar 2.1 Model regresi non linier resiprokal

Pada gambar 2.1 dapat di lihat bahwa terdapat hubungan antara dua variable X dan Y yang mempunyai persamaan sebagai berikut:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 \frac{1}{X}. \qquad (2.2)$$

Dimana Y merupakan variabel terikat dan X sebagai variabel bebas. Selain itu terdapat β_0 dan β_1 yang keduanya merupakan konstanta. Untuk mempermudah pemahaman terhadap persamaan maka di buat visualisasinya. Sehingga bentuk visualisasi yang mungkin dari persamaan (2.2) adalah perhatikan apabila X sebagai variabel terikat naik dalam jumlah yang tak terhingga, maka faktor $\frac{1}{X_i}$ mendekati nol. Sedangkan untuk Y akan mendekati nilai batas atau nilai asimtot sebesar β_0 apabila nilai dari X sebagai variabel terikat naik dalam jumlah yang tak terhingga. Oleh karena itu, model-model di atas memuat nilai asimtot atau nilai batas yang akan menjadi nilai variable tak bebas apabila nilai variable X naik dalam jumlah tak terhingga.

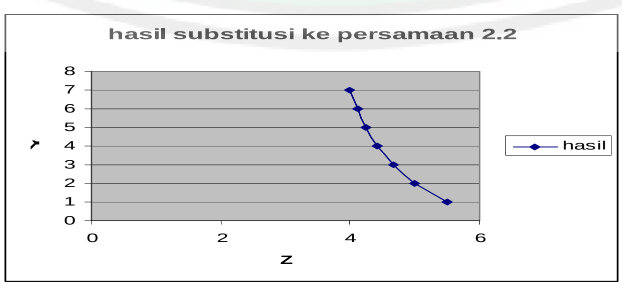
Contoh:

Data diambil dari metode statistik yaitu data dari tujuh pengamatan rata-rata dimana Y (nomor pengamatan) dan X (nilai rata-rata) dan Z (hasil substitusi ke persamaan). Penyajian datannya sebagai berikut:

Y	X	Z
1	4	5.5
2	5	5
3	6	4.666667
4	7	4.428571
5	8	4.25
6	9	4.111111
7	10	4

dengan menggunakan persamaan (2.2) yang mana untuk nilai β_0 dan β_1 berturut turut adalah 3 dan 10. Kemudian data dan konstanta β_0 dan β_1 di substitusikan ke persamaan sehingga diperoleh nilai baru hasil substitusi sebagaimana Z pada tabel di atas.

Dari hasil di atas maka dapat di buat sebuah grafik antara variable Y dengan Z sebagai berikut:



Gambar 2.2. Grafik rata-rata nilai menggunakan persamaan (2.2)

Dari hasil yang di keluarkan grafik dapat dilihat bahwa hubungan antara faktor $\frac{1}{X_i}$ dan Y adalah keterbalikan. Artinya semakin besar nilai maka nilai faktor dari $\frac{1}{X_i}$ akan mendekati nol sedangkan untuk Y semakin mendekati nilai konstanta β_0.

2.4 Pendugaan Parameter

2.4.1 Pengertian Pendugaan Parameter dan Penduga

Pendugaan (*estimasi*) adalah proses yang menggunakan sampel statistik untuk menduga atau menaksir hubungan parameter populasi yang tidak diketahui. Pendugaan merupakan suatu pernyataan mengenai parameter populasi yang diketahui berdasarkan populasi dari sampel, dalam hal ini sampel random, yang diambil dari populasi yang bersangkutan. Jadi dengan pendugaan ini, keadaan parameter populasi dapat diketahui (Hasan, 2002: 111). Menurut Yitnosumarto (1990:211-212), penduga (*estimator*) adalah anggota peubah acak dari statistik yang mungkin untuk sebuah parameter (anggota peubah diturunkan). Besaran sebagai hasil penerapan penduga terhadap data dari semua contoh disebut nilai duga (*estimate*).

2.4.2 Sifat-Sifat Penduga

1) Tak bias (*unbias*)

Satu hal yang menjadi tujuan dalam pendugaan adalah penduga harus mendekati nilai sebenarnya dari parameter yang diduga tersebut. Misalkan terdapat parameter θ. Jika $\hat{\theta}$ merupakan penduga tak bias (*unbiased estimator*) dari parameter θ, maka:

$$E\left(\hat{\theta}\right) = \theta$$

(Yitnosumarto,1990: 212)

2) Efisien

Suatu penduga (misalkan: $\hat{\theta}$) dikatakan efisien bagi parameter (θ) apabila penduga tersebut mempunyai varians yang kecil. Apabila terdapat lebih dari satu penduga, penduga yang efisien adalah penduga yang mempunyai varian terkecil. Dua buah penduga dapat dibandingkan efisiensinya dengan menggunakan efisiensi relative (*Relative efficiency*). Efisiensi relatif $\hat{\theta}_2$ terhadap $\hat{\theta}_1$ dirumuskan:

$$R\left(\hat{\theta}_2, \hat{\theta}_1\right) = \frac{E\left(\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}\right)^2}{E\left(\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}\right)^2}$$

$$= \frac{E\left(\hat{\theta}_1 - E\left(\hat{\theta}_1\right)\right)^2}{E\left(\hat{\theta}_2 - E\left(\hat{\theta}_2\right)\right)^2}$$

$$= \frac{\operatorname{var}\hat{\theta}_1}{\operatorname{var}\hat{\theta}_2}$$

$R = \frac{\hat{\theta}_1}{\hat{\theta}_2}$, Jika R>1 maka $\hat{\theta}_1 > \hat{\theta}_2$ artinya secara relatif $\hat{\theta}_2$ lebih efisien daripada $\hat{\theta}_1$, dan jika R<1 maka $\hat{\theta}_1 < \hat{\theta}_2$ artinya secara relatif $\hat{\theta}_1$ lebih efisien daripada $\hat{\theta}_2$.

3) Konsisten

Suatu penduga dikatakan konsisten apabila memenuhi syarat sebagai berikut:

1) Jika ukuran sampel semakin bertambah maka penduga akan mendekati parameternya. Jika besar sampel menjadi tak terhingga maka penduga konsisten harus dapat memberi suatu penduga titik yang sempurna terhadap parameternya. Jadi, $\left(\hat{\theta}\right)$ merupakan penduga konsisten, jika dan hanya jika:

$$E\left(\hat{\theta}-E(\theta)\right)^2 \to 0 \text{ jika } n \to \infty$$

2) Jika ukuran sampel bertambah besar maka distribusi sampling penduga akan mengecil menjadi suatu garis tegak lurus diatas parameter yang sama dengan probabilitas sama dengan 1. (Hasan, 2002: 113-115)

2.5 Maximum Likelihood

2.5.1. Fungsi likelihood

Definisi

Fungsi likelihood dari n variabel random x_1, $x_2,\ldots,x_n$ didefinisikan sebagai fungsi kepadatan bersama dari n variabel random. Fungsi kepadatan bersama $f_{x_1,\ldots,x_n}(x_1,\ldots,x_n;\theta)$, yang mempertimbangkan fungsi dari θ. Jika $x_1,\ldots,x_n$ adalah sampel random dari fungsi kepadatan $f(x;\theta)$, maka fungsi likelihoodnya adalah $f(x_1;\theta)f(x_2;\theta)\ldots f(x_n;\theta)$ (Mood, Graybill and Boes, 1986:278)

Notasi

Untuk mengingatkan dalam mempelajari fungsi likelihood sebagai fungsi dari θ, dapat dinotasikan $L(x_1,...,x_n;\theta)$ atau $L(x_1,...,x_n)$

Contoh

Jika x_1, $x_2,...,x_n$ adalah random sampel dari distribusi $x \sim N(\theta,\mu)$. Fungsi likelihoodnya adalah:

$$L(x_1,x_2,...,x_n;\theta) = f(x_1;\theta)\, f(x_2;\theta)...f(x_n;\theta)\,,\ \theta \in \Theta$$

Karena berdistribusi normal, maka fungsi $f(x;\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{1}{2}(\frac{x_i-\theta}{\sigma})^2}$

Fungsi likelihoodnya adalah:

$$L(x_1,x_2,...,x_n;\theta) = f(x_1;\theta)\, f(x_2;\theta)...f(x_n;\theta)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{1}{2}(\frac{x_1-\theta}{\sigma})^2}\ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{1}{2}(\frac{x_1-\theta}{\sigma})^2} ... \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{1}{2}(\frac{x_1-\theta}{\sigma})^2}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{\left(-\frac{1}{2}(\frac{x_1-\theta}{\sigma})^2\right)+\left(-\frac{1}{2}(\frac{x_1-\theta}{\sigma})^2\right)+...+\left(-\frac{1}{2}(\frac{x_1-\theta}{\sigma})^2\right)}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{1}{2}\left((\frac{x_1-\theta}{\sigma})^2+(\frac{x_1-\theta}{\sigma})^2+(\frac{x_1-\theta}{\sigma})^2\right)}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\frac{x_1-\theta}{\sigma})^2}$$

$$= \left(\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{1}{2}}}\right)^n e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\frac{x_1-\theta}{\sigma})^2}$$

$$= \frac{1}{\left(2\pi\sigma^2\right)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\frac{x_1-\theta}{\sigma})^2}$$

Sehingga fungsi likelihood dapat di tulis sebagai berikut:

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta) = \frac{1}{\left(2\pi\sigma^2\right)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\frac{x_1-\theta}{\sigma})^2}$$

2.5.2. Maximum Likelihood Estimation

Metode Maximum likelihuood estimation adalah suatu metode untuk memperoleh perkiraan (estimator) $\hat{\theta}$, sedemikiab rupa sehingga membuat Maximum fungsi kepadatan bersama, suatu fungsi yang dianggap sebagai fungsi θ, untuk $X_1, X_2, \cdots X_n$ yang tetap. Ringkasnya prinsip dari metode Maximum likelihuood estimation ialah untuk memilih pemerkira (estimator), yang membuat probabilita untuk memperoleh sampel yang diteliti menjadi Maximum.(Supranto, 1986: 38-39)

Kita telah membahas sifat baik yang dimiliki dalam pendugaan. Jadi untuk mengetahui apakah suatu pendugaan bersifat unbias, efisien dan konsisten dan sebagainya terlebih dahulu ditentukan pendugaannya dengan menggunakan suatu metode yaitu metode maximum likelihood estimation. Metode tersebut sering memberikan hasil yang baik (yaitu sering memberikan penaksir yang baik).

Definisi.

Andaikan $X_1, X_2, ..., X_n$ peubah acak dengan fungsi distribusi $F(x_1, x_2, ..., x_n \mid \theta)$ dengan $\theta \in \Theta$ yang tidak diketahui. Dan fungsi likelihood ialah

$$L(\theta) = \begin{cases} f(x_1, x_2, ..., x_n \mid \theta), \text{ jika } F \text{ mempunyai fungsi padat } f \\ p(x_1, x_2, ..., x_n \mid \theta), \text{ jika } F \text{ mempunyai fungsi padat } p \end{cases}$$

Setiap $\hat{\theta} = \hat{\theta}_n(X_1, X_2, ..., X_n) \in \Theta$ sehingga

$$L(\hat{\theta}) = \sup\{L(\theta) : \theta \in \Theta\}$$

disebut maximum likelihood estimation.

(Dudewicz dan Mishra, 1995: 412)

Contoh:

Andaikan bahwa sampel random berukuran n berdistribusi bernoulli

$$f(x; p) = p^x q^{1-x} I_{(0,1)}(x), \text{ untuk } 0 \le p \le 1 \text{dan } q = 1 - p$$

Nilai sampel x_1, $x_2, ..., x_n$ menjadi barisan bernilai nol dan satu, fungsi likelihoodnya adalah

$$L(p) = \prod_{i=1}^{n} p^{x_i} q^{1-x_i} = p^{\sum x_i} q^{n-\sum x_i}$$

Dimisalkan

$$y = \sum x_i$$

Maka fungsi likelihoodnya menjadi:

$$L(p) = p^{y_i} q^{n-y_i}$$

Dengan melogaritmakan persamaan di atas, diperoleh:

$$\log L(p) = y \log p + (n-y)\log q \tag{2.3}$$

Untuk mendapatkan penduga dari p maka dengan mendiferensialkan persamaan (2.6) terhadap p, diperoleh:

$$\frac{\partial \log L(p)}{\partial p} = \frac{y}{p} - \frac{n-y}{q} \tag{2.4}$$

Karena $\frac{\partial \log L(p)}{\partial p} = 0$, persamaan (2.7) menjadi

$$0 = \frac{y}{p} - \frac{n-y}{q}$$

Untuk $q = 1 - p$, maka:

$$\frac{y}{\hat{p}} - \frac{n-y}{\hat{q}} = 0$$

$$\frac{y}{\hat{p}} = \frac{n-y}{1-\hat{p}}$$

$$y - \hat{p}y = \hat{p}(n-y)$$

$$-\hat{p}y - \hat{p}(n-y) = -y$$

$$-\hat{p}(y+n-y) = -y$$

$$-\hat{p}n = -y$$

$$\hat{p} = \frac{-y}{-n} = \frac{y}{n} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{1}{n}\sum x_i = \bar{x}$$

2.6 Distribusi Normal

Distribusi yang penting dalam statistika ialah distribusi normal atau sering pula disebut distribusi *Gauss*.

$$f(y_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{(y-\mu)}{\sigma}\right)^2} \quad (2.5)$$

Distribusi ini mempunyai rataan μ dan variansi σ^2. Grafiknya mirip lonceng dan tertentu sepenuhnya bila μ dan σ^2 diketahui. Suatu peubah acak Y yang berdistribusi normal dengan rataan μ dan simpangan baku σ^2 sering disingkat dengan lambang $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Distribusi normal dengan rataan 0 dan simpangan baku 1 disebut normal baku., lambang $N(0,1)$. Untuk suatu distribusi $N(\mu, \sigma^2)$ berlaku

$$P(\mu - \sigma \leq Y \leq \mu + \sigma) = 0{,}6826 \approx 0{,}68$$

$$P(\mu - 2\sigma \leq Y \leq \mu + 2\sigma) = 0{,}9544 \approx 0{,}95$$

$$P(\mu - 3\sigma \leq Y \leq \mu + 3\sigma) = 0{,}9774 \approx 0{,}997 \quad (2.6)$$

(Sembiring, 1995: 4-5)

2.7 Kajian Regresi Nonlinier Resiprokal Baku

Pada kajian regresi nonlinier resiprokal baku, yang hanya menggunakan satu variabel bebas akan dicari estimasi parameternya dengan menggunakan *Maksimum Likelihood Estimation*. Yangmana ini merupakan dasar dalam menggunakan model dengan tiga variabel yang akan di bahas pada bab III, sehingga perlu diketahui model bakunya adalah sebagai berikut:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 \frac{1}{X_1} + \varepsilon_i \quad (2.7)$$

dimana (i = 1,2,…,n), dan ε tidak berdistribusi normal, karena yang berdistribusi normal adalah ε.

Dari model (3.1) diketahui dengan variabel bebas X_1 sedangkan untuk variabel terikat adalah (Y). Sehingga (3.1) dapat dibentuk ke dalam model berikut:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 \frac{1}{X_i} + \varepsilon_i$$

$$\varepsilon_i = Y_i - \left(\beta_0 + \beta_1 \frac{1}{X_i}\right)$$

$$\varepsilon_i = Y_i - \beta_0 - \beta_1 \frac{1}{X_i} \tag{2.8}$$

dimana $(i = 1,2,\cdots,n)$.

Menentukan Penduga Parameter Regresi Resiprokal Baku Menggunakan Metode *Maksimum Likelihood Estimation* sebagai berikut:

2.7.1 Penduga Parameter β

Dari persamaan (2.8) diketahui bahwa $Y_i = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$, adalah variabel random, dimana n = 21 dan i = 1,2,…,n . Karena diasumsikan berdistribusi normal maka $Y \sim \left(\beta_0 + \beta_1 \frac{1}{X_i}\right)$ dengan $\mu = E(Y) = E\left(\beta_0 + \beta_1 \frac{1}{X_i}\right)$, sehingga fungsi distribusi peluang dari Y_i adalah

$$f(\beta_0, \beta_1, \sigma^2 | Y_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{Y_i - \left(\beta_0 + \beta_1 \frac{1}{X_i}\right)}{\sigma}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\right)\left(Y_i - \left(\beta_0 + \beta_1 \frac{1}{X_i}\right)\right)^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(Y_i - \left(\beta_0 + \beta_1 \frac{1}{X_i}\right)\right)^2} \tag{2.9}$$

Untuk menentukan penduga parameter menggunakan metode *maksimum likelihood estimation*, terlebih dahulu ditentukan fungsi likelihood (L) yang di peroleh dari fungsi distribusi peluang pada persamaan (2.9) di atas sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{L}(\beta_0,\beta_1,\sigma^2|Y_i)\\
&\quad = f(\beta_0,\beta_1,\sigma^2|\mathrm{Y}_1)\ f(\beta_0,\beta_1,\sigma^2|\mathrm{Y}_2)\cdots f(\beta_0,\beta_1,\sigma^2|\mathrm{Y}_n)\\
&\quad = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(Y_i-\left(\beta_0+\beta_1\frac{1}{X_i}\right)\right)^2}\\
&\quad \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(Y_i-\left(\beta_0+\beta_1\frac{1}{X_{1i}}\right)\right)^2}\cdots\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(Y_i-\left(\beta_0+\beta_1\frac{1}{X_{1i}}\right)\right)^2}\\
&=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(Y_i-\left(\beta_0+\beta_1\frac{1}{X_i}\right)\right)^2-\frac{1}{2\sigma^2}\left(Y_i-\left(\beta_0+\beta_1\frac{1}{X_i}\right)\right)^2-\cdots-\frac{1}{2\sigma^2}\left(Y_i-\left(\beta_0+\beta_1\frac{1}{X_i}\right)\right)^2}\\
&=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,e^{-\left[\left(\frac{1}{2\sigma^2}\left(Y_i-\left(\beta_0+\beta_1\frac{1}{X_i}\right)\right)^2\right)+\left(\frac{1}{2\sigma^2}\left(Y_i-\left(\beta_0+\beta_1\frac{1}{X_i}\right)\right)^2\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2\sigma^2}\left(Y_i-\left(\beta_0+\beta_1\frac{1}{X_i}\right)\right)^2\right)\right]}\\
&\quad =\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right]^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\left(\beta_0+\beta_1\frac{1}{X_i}\right)\right)^2}\\
&\quad =\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\left(\sigma^2\right)^{\frac{n}{2}}}\,e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\left(\beta_0+\beta_1\frac{1}{X_i}\right)\right)^2}
\end{aligned}
$$

Sehingga fungsi likelihoodnya (L) adalah:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{L}(\beta_0,\beta_1,\sigma^2|Y_i) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\left(\sigma^2\right)^{\frac{n}{2}}}\,e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\left(\beta_0+\beta_1\frac{1}{X_{1i}}\right)\right)^2}\\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\left(\sigma^2\right)^{\frac{n}{2}}}\,e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\beta_0-\beta_1\frac{1}{X_i}\right)^2}\\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\left(\sigma^2\right)^{\frac{n}{2}}}\,e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\beta_0-\beta_1\frac{1}{X_i}\right)\left(Y_i-\beta_0-\beta_1\frac{1}{X_i}\right)} \qquad (2.10)
\end{aligned}
$$

untuk mendapatkan penduga parameter maka persamaan (2.10) diubah menjadi fungsi log-likelihood sehingga diperoleh

$$\ln L(\beta_0, \beta_1, \sigma^2 | Y_i)$$

$$= \ln\left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\left(\sigma^2\right)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\beta_0-\beta_1\frac{1}{X_i}\right)\left(Y_i-\beta_0-\beta_1\frac{1}{X_i}\right)} \right)$$

$$= \ln\left((2\pi)^{-\frac{n}{2}}\left(\sigma^2\right)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\beta_0-\beta_1\frac{1}{X_i}\right)\left(Y_i-\beta_0-\beta_1\frac{1}{X_i}\right)} \right)$$

$$= \ln\left((2\pi)^{-\frac{n}{2}} \right) + \ln\left(\left(\sigma^2\right)^{-\frac{n}{2}} \right) + \ln\left(e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\beta_0-\beta_1\frac{1}{X_i}\right)\left(Y_i-\beta_0-\beta_1\frac{1}{X_i}\right)} \right)$$

$$= -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln\left(\sigma^2\right) + \left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \beta_0 - \beta_1\frac{1}{X_i}\right)\left(Y_i - \beta_0 - \beta_1\frac{1}{X_i}\right)\right]$$

$$-\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln\left(\sigma^2\right) - \left[\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \beta_0 - \beta_1\frac{1}{X_i}\right)\left(Y_i - \beta_0 - \beta_1\frac{1}{X_i}\right)\right]$$

$$= -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln\left(\sigma^2\right)$$

$$-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i^2 - 2\beta_0 Y_i - 2\beta_1 Y_i\frac{1}{X_i} + \beta_0^2 + 2\beta_0\beta_1\frac{1}{X_i} + \left(\beta_1\frac{1}{X_i}\right)^2\right.$$

$$= -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln\left(\sigma^2\right) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}Y_i^2 + 2\frac{1}{2\sigma^2}\beta_0\sum_{i=1}^{n}Y_i + 2\frac{1}{2\sigma^2}\beta_1\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i\frac{1}{X_i}\right)$$

$$-\frac{n}{2\sigma^2}\beta_0^2 - 2\frac{1}{2\sigma^2}\beta_0\beta_1\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right) - \frac{1}{2\sigma^2}\beta_1\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_i}\right)^2$$

$$= -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln\left(\sigma^2\right) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}Y_i^2 + \frac{1}{\sigma^2}\beta_0\sum_{i=1}^{n}Y_i + \frac{1}{\sigma^2}\beta_1\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i\frac{1}{X_i}\right) - \frac{1}{2\sigma^2}\beta_0^2$$

$$-\frac{1}{\sigma^2}\beta_0\beta_1\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_i}\right) - \frac{1}{2\sigma^2}\beta_1^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_i}\right)^2 \qquad (2.11)$$

Untuk mendapatkan penduga parameter $\hat{\beta}_0$ dan $\hat{\beta}_1$ yaitu dengan memaksimumkan persamaan (2.11) terhadap β_0 dan β_1, artinya mendeferensialkan $\ln L(\beta_0, \beta_1, \sigma^2 | Y_i)$ terhadap β_0 dan β_1:

2.7.1.1 Etimasi β_0

Untuk menentukan estimasi β_0 yang kemudian dinotasikan $\hat{\beta}_0$ dengan mendeferensialkan $\ln L(\beta_0, \beta_1, \sigma^2 | Y_i)$ terhadap β_0 dan sama dengan nol sehingga diperoleh:

Mendeferensialkan $\ln L(\beta_0, \beta_1, \sigma^2 | Y_i)$ terhadap β_0

$$\frac{\partial \ln L(\beta_0, \beta_1, \sigma^2 | Y_i)}{\partial \beta_0} = -0 - 0 - 0 + \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} Y_i + 0 - \frac{2n}{2\sigma^2}\beta_0 - \frac{1}{\sigma^2}\beta_1 \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_i}\right) - 0$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} Y_i - \frac{n}{\sigma^2}\beta_0 - \frac{1}{\sigma^2}\beta_1 \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_i}\right)$$

dan menyamakanya dengan nol diperoleh:

$$\frac{\partial \ln L(\beta_0, \beta_1, \sigma^2 | \varepsilon_i)}{\partial \beta_0} = 0$$

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} Y_i - \frac{n}{\sigma^2}\beta_0 - \frac{1}{\sigma^2}\beta_1 \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_i}\right) = 0$$

$$-\frac{n}{\sigma^2}\hat{\beta}_0 - \frac{1}{\sigma^2}\beta_1 \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_i}\right) = -\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} Y_i$$

$$n\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

$$n\hat{\beta}_0 = \sum_{i=1}^{n} Y_i - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_i}\right)$$

$$\hat{\beta}_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n} - \frac{\hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_i}\right)}{n} \tag{2.12}$$

2.7.1.2 Etimasi β_1

Untuk menentukan estimasi β_1 yang kemudian dinotasikan $\hat{\beta}_1$ dengan mendeferensialkan $\ln L(\beta_0, \beta_1, \sigma^2 | Y_i)$ terhadap β_1 dan sama dengan nol sehingga diperoleh:

$$\frac{\partial \ln L(\beta_0, \beta_1, \sigma^2 | Y_i)}{\partial \beta_1}$$

$$= -0-0-0+0+\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i \frac{1}{X_{1i}}\right)-\frac{1}{\sigma^2}\beta_0\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)-\frac{2}{\sigma^2}\beta_1\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_i}\right)^2$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i \frac{1}{X_{1i}}\right)-\frac{1}{\sigma^2}\beta_0\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)-\frac{1}{\sigma^2}\beta_1\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_i}\right)^2$$

dan menyamakanya dengan nol diperoleh:

$$\frac{\partial \ln L(\beta_0, \beta_1, \sigma^2 | Y_i)}{\partial \beta_1} = 0$$

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i \frac{1}{X_{1i}}\right)-\frac{1}{\sigma^2}\beta_0\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_i}\right)-\frac{1}{\sigma^2}\beta_1\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_i}\right)^2 = 0$$

$$-\frac{1}{\sigma^2}\hat{\beta}_0\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_i}\right)-\frac{1}{\sigma^2}\hat{\beta}_1\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_i}\right)^2 = -\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i \frac{1}{X_i}\right)$$

$$\hat{\beta}_0\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_i}\right)+\hat{\beta}_1\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_i}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i \frac{1}{X_i}\right)$$

$$\hat{\beta}_1\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i \frac{1}{X_{1i}}\right)-\hat{\beta}_0\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_i}\right) \qquad (2.13)$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i \frac{1}{X_i}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_i}\right)^2}-\hat{\beta}_0\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_i}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_i}\right)^2} \qquad (2.14)$$

Untuk menentukan masing-masing nilai dari estimasi $\hat{\beta}_0$ dan $\hat{\beta}_1$ dilakukan metode substitusi pada masing-masing persamaan. Sehingga persamaan masing-masing estimasi parameter β untuk $\hat{\beta}_0$ dan $\hat{\beta}_1$ adalah sebagai berikut:

Untuk estimasi parameter $\hat{\beta}_0$ sebagaimana pada persamaan (2.12).

$$\hat{\beta}_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n} - \frac{\hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_i}\right)}{n}$$

Untuk menentukan estimasi parameter $\hat{\beta}_1$ persamaan maka dilakukan substitusi $\hat{\beta}_0$ persamaan (2.12) sehingga didapat sebagai berikut:

$$\hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_i}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i \frac{1}{X_i}\right) - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n} - \frac{\hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_i}\right)}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_i}\right)$$

$$\hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_i}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i \frac{1}{X_i}\right) - \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_i}\right)}{n} - \frac{\hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_i}\right)^2}{n}$$

$$\hat{\beta}_1 \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_i}\right)^2 - \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_i}\right)^2}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i \frac{1}{X_i}\right) - \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_i}\right)}{n}$$

$$\frac{\hat{\beta}_1 n \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_i}\right)^2}{n} - \frac{\hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_i}\right)^2}{n} = \frac{n \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i \frac{1}{X_i}\right)}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_i}\right)}{n}$$

$$\hat{\beta}_1 \left(n \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_i}\right)^2 - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_i}\right)^2\right) = n \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i \frac{1}{X_i}\right) - \sum_{i=1}^{n} Y_i \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_i}\right)$$

sehingga estimasi parameter dari $\hat{\beta}_1$ adalah sebagai berikut:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{n \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i \frac{1}{X_{1i}}\right) - \sum_{i=1}^{n} Y_i \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)}{n \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_i}\right)^2 - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_i}\right)^2} \tag{2.15}$$

2.7.2 Penduga Parameter σ^2

Untuk menentukan estimasi σ^2 yang kemudian dinotasikan $\hat{\sigma}^2$ dengan mendeferensialkan persamaan (3.6) $\ln L(\beta_0, \beta_1, \sigma^2 | Y_i)$ terhadap σ^2 dan sama dengan nol sehingga diperoleh:

$$\ln L(\beta_0, \beta_1, \sigma^2 | Y_i)$$

$$= -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln\left(\sigma^2\right) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 + \frac{1}{\sigma^2}\beta_0 \sum_{i=1}^{n} Y_i + \frac{1}{\sigma^2}\beta_1 \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i \frac{1}{X_i}\right) - \frac{1}{2\sigma^2}\beta_0^2$$

$$-\frac{1}{\sigma^2}\beta_0\beta_1 \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right) - \frac{1}{2\sigma^2}\beta_1^2 \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_i}\right)^2$$

$$\frac{\partial \ln L(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \sigma^2 | Y_i)}{\partial \sigma^2}$$

$$= -0 - \frac{n}{2}\left(\frac{2}{\sigma^2}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{(\sigma^2)^2}\right)\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 + \left(-\frac{2}{(\sigma^2)^2}\right)\beta_0 \sum_{i=1}^{n} Y_i + \left(-\frac{2}{(\sigma^2)^2}\right)\beta_1 \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i \frac{1}{X_i}\right)$$

$$-n\left(-\frac{2}{(\sigma^2)^2}\right)\beta_0^2 - \left(-\frac{2}{(\sigma^2)^2}\right)\beta_0\beta_1 \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_i}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{(\sigma^2)^2}\right)\beta_1^2 \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_i}\right)^2$$

$$= -\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma^4}\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - \frac{2}{\sigma^4}\beta_0 \sum_{i=1}^{n} Y_i - \frac{2}{\sigma^4}\beta_1 \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i \frac{1}{X_i}\right) + \frac{2n}{\sigma^4}\beta_0^2 + \frac{2}{\sigma^4}\beta_0\beta_1 \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_i}\right)$$

$$+\frac{1}{\sigma^4}\beta_1^2\beta_1^2 \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_i}\right)^2$$

dan menyamakanya dengan nol diperoleh:

$$\frac{\partial \ln L(\beta_0, \beta_1, \sigma^2 | Y_i)}{\partial \sigma^2} = 0, \text{ sehingga}$$

$$0 = -\frac{n}{\hat{\sigma}^2} + \frac{1}{\hat{\sigma}^4}\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - \frac{2}{\hat{\sigma}^4}\hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^{n} Y_i - \frac{2}{\hat{\sigma}^4}\hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i \frac{1}{X_i}\right) + \frac{2n}{\hat{\sigma}^4}\hat{\beta}_0^2 + \frac{2}{\hat{\sigma}^4}\hat{\beta}_0\hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_i}\right)$$

$$+\frac{1}{\sigma^4}\hat{\beta}_1^2\hat{\beta}_1^2 \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_i}\right)^2$$

$$\frac{n}{\hat{\sigma}^2} = \frac{1}{\hat{\sigma}^4}\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - \frac{2}{\hat{\sigma}^4}\hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^{n} Y_i - \frac{2}{\hat{\sigma}^4}\beta_1 \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i \frac{1}{X_i}\right) + \frac{2n}{\hat{\sigma}^4}\hat{\beta}_0^2 + \frac{2}{\hat{\sigma}^4}\hat{\beta}_0\hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_i}\right)$$

$$+\frac{1}{\hat{\sigma}^4}\hat{\beta}_1^2\hat{\beta}_1^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_i}\right)^2$$

$$\frac{n}{\hat{\sigma}^2}=\frac{1}{\hat{\sigma}^4}\left(\sum_{i=1}^{n}Y_i^2-2\hat{\beta}_0\sum_{i=1}^{n}Y_i-2\hat{\beta}_1\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i\frac{1}{X_i}\right)+2n\hat{\beta}_0^2+2\hat{\beta}_0\hat{\beta}_1\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_i}\right)+2\hat{\beta}_1^2\hat{\beta}_1^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_i}\right)^2\right)$$

$$\frac{n\hat{\sigma}^4}{\hat{\sigma}^2}=\frac{\hat{\sigma}^4}{\hat{\sigma}^4}\left(\sum_{i=1}^{n}Y_i^2-2\hat{\beta}_0\sum_{i=1}^{n}Y_i-2\hat{\beta}_1\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i\frac{1}{X_i}\right)+n\hat{\beta}_0^2+2\hat{\beta}_0\hat{\beta}_1\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_i}\right)+2\hat{\beta}_1^2\hat{\beta}_1^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_i}\right)^2\right)$$

$$n\hat{\sigma}^2=\sum_{i=1}^{n}Y_i^2-2\hat{\beta}_0\sum_{i=1}^{n}Y_i-2\hat{\beta}_1\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i\frac{1}{X_i}\right)+\hat{\beta}_0^2+2\hat{\beta}_0\hat{\beta}_1\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_i}\right)+2\hat{\beta}_1^2\hat{\beta}_1^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_i}\right)^2$$

$$n\hat{\sigma}^2=\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i^2-2\hat{\beta}_0Y_i-2\hat{\beta}_1Y_i\frac{1}{X_i}+2\hat{\beta}_0^2+2\hat{\beta}_0\hat{\beta}_1\frac{1}{X_i}+2\hat{\beta}_1^2\hat{\beta}_1^2\left(\frac{1}{X_i}\right)^2\right)$$

$$n\hat{\sigma}^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\left(Y_i-\hat{\beta}_0-\hat{\beta}_1\frac{1}{X_i}\right)\left(Y_i-\hat{\beta}_0-\hat{\beta}_1\frac{1}{X_i}\right)\right)$$

$$n\hat{\sigma}^2=\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\hat{\beta}_0-\hat{\beta}_1\frac{1}{X_i}\right)^2$$

Jadi penaksiran terhadap $\hat{\sigma}^2$ adalah

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\hat{\beta}_0-\hat{\beta}_1\frac{1}{X_i}\right)^2$$

2.8 Kajian Estimasi, Non Linier dan ramalan dalam Al-Quran dan Al-Hadis

Islam adalah agama yang mengatasi dan melintasi waktu karena sistem nilai yang dikandungnya adalah mutlak. Kebenaran nilai Islam bukan hanya untuk masa dahulu, namun juga sekarang dan akan datang. Nilai-nilai dalam Islam berlaku sepanjang masa. Jadi Islam memiliki pandangan hidup mutlaknya sendiri, meliputi persoalan ke-Tuhanan, ke-Nabian, kebenaran, alam semesta, dan lain-lain.

Dalam al-Qur’an pada surat al-Baqarah ayat 80 terdapat ayat yang menyinggung masalah statistika, yaitu tentang pendugaan. Surat *al-Baqarah* yang 286 ayat itu turun di Madinah yang sebagian besar diturunkan pada permulaan tahun Hijrah, kecuali ayat 281 diturunkan di Mina pada Hajji wadaa' (hajji Nabi Muhammad s.a.w. yang terakhir). Seluruh ayat dari surat al-Baqarah termasuk golongan Madaniyyah, merupakan surat yang terpanjang di antara surat-surat al-Quran yang di dalamnya terdapat pula ayat yang terpanjang (ayat 282).

2.7.1. Kajian Estimasi

وَقَالُوا۟ لَن تَمَسَّنَا ٱلنَّارُ إِلَّآ أَيَّامًا مَّعْدُودَةً ۚ قُلْ أَتَّخَذْتُمْ عِندَ ٱللَّهِ عَهْدًا فَلَن يُخْلِفَ عَهْدَهُۥٓ ۖ

أَمْ تَقُولُونَ عَلَى ٱللَّهِ مَا لَا تَعْلَمُونَ ﴿٨٠﴾

Artinya: “*Dan mereka berkata: "Kami sekali-kali tidak akan disentuh oleh api neraka, kecuali selama beberapa hari saja." Katakanlah: "Sudahkah kamu menerima janji dari Allah sehingga Allah tidak akan memungkiri janji-Nya, ataukah kamu Hanya mengatakan terhadap Allah apa yang tidak kamu ketahui?"*”(QS. al- Baqoroh:80)

Surat ini dinamai *al-Baqarah* karena di dalamnya disebutkan kisah penyembelihan sapi betina yang diperintahkan Allah kepada Bani Israil (ayat 67 sampai dengan 74), dimana dijelaskan watak orang Yahudi pada umumnya. Dinamai *Fusthaatul-Quran* (puncak Al Quran) karena memuat beberapa hukum yang tidak disebutkan dalam surat yang lain. Dinamai juga surat *alif-laam-miim* karena surat ini dimulai dengan Alif-laam-miim

Abdussyakir (2007:155-156) mengatakan bahwa pendugaan (estimasi) adalah keterampilan untuk menentukan sesuatu tanpa melakukan proses perhitungan secara eksak. Disebutkan juga bahwa dalam matematika terdapat tiga jenis estimasi yaitu estimasi banyak/jumlah (numerositas), estimasi pengukuran dan estimasi komputasional.

1. Estimasi banyak/ jumlah

   Estimasi banyak adalah menentukan banyaknya objek tanpa menghitung secara eksak. Objek disini maknanya sangat luas. Objek dapat bermakna orang, uang kelereng, titik, dan mobil.

2. Estimasi pengukuran

   Estimasi pengukuran adalah menentukan ukuran sesuatu tanpa menghitung secara eksak. Ukuran disini maknanya sangat luas. Ukuran dapat bermakna ukuran waktu, panjang, luas, usia dan volume. Ketika melihat orang berjalan tanpa menanyakan tanggal lahirnya, pembaca dapat menebak/menaksir usianya. Estimasi pada al-Baqoroh ayat 80 adalah estimasi ukuran yaitu ukuran waktu.

3. Estimasi komputasional

   Estimasi komputasional adalah menentukan hasil suatu operasi hitung tanpa menghitungnya secara eksak. Seseorang mungkin akan menghitung dengan cara membulatkan kepuluhan terdekat.

Dari pengertian diatas, maka dapat diketahui kaitan ayat diatas dengan pendugaan ṭerletak pada kalimat إِلَّآأَيَّامًامَّعۡدَ (kecuali selama beberapa hari saja)

Karena pada ayat tersebut tidak dijelaskan secara jelas lama waktu ketika orang yahudi meentukan masa akan disentuh oleh api neraka, akan tetapi hanya tertulis

”beberapa hari saja”. Sehingga terdapat perbedaan dalam menafsirkan ayat tersebut.

Dalam suatu riwayat dikemukakan bahwa di waktu Rasulullah SAW sampai ke Madinah, kaum Yahudi berkata: "Umur dunia ini tujuh ribu tahun. Manusia disiksa tiap seribu tahun dari hari dunia ini sehari di Yaumilakhir, sehingga jumlahnya hanya tujuh hari saja, dan setelah itu putuslah siksaan itu. Maka Allah turunkan ayat ini (S. 2: 80) sebagai bantahan dan peringatan kepada orang-orang yang menganggap dirinya lebih tahu dari Allah SWT.*(Diriwayatkan oleh at-Thabarani di dalam kitabnya al-Kabir, demikian juga Ibnu Jarir, Ibnu Abi Hatim, dari Ibnu Ishaq dari Muhammad bin Abi Muhammad dari Ikrimah atau Sa'id bin Jubair yang bersumber dari Ibnu Abbas.)*

Kemudian dalam riwayat lain dikemukakan bahwa turunnya ayat ini (S. 2: 80) sehubungan dengan ucapan kaum Yahudi yang berkata: "Kita tidak akan masuk neraka kecuali beberapa hari saja, selama kita menyembah anak sapi, yaitu empat puluh hari, sesuai dengan sumpah kita. Dan apabila telah habis empat puluh hari, putuslah siksaan terhadap kita." *(Diriwayatkan oleh Ibnu Jarir dari ad-Dlahhak yang bersumber dari 'Ikrimah, Ibnu Abbas dan lain-lain.)*

Sehingga terdapat perbedaan penafsiran antara riwayat satu dengan yang lain. Riwayat pertama mengungkapkan bahwasanya kata-kata beberapa hari saja dimaknai dengan hitungan dimana perbandingan antara hari diduni dengan hari yaumul akhir adalah satu berbanding 1000. berarti makna beberapa hari dimaknai dengan 7 hari saja. Kemudian di riwayat yang kedua maksud dari beberapa hari adalah empat puluh hari.

2.7.2. Kajian Non Linier

Dalam kajian non linier ini akan dibahas ayat al-Quran surat lukman ayat 29

أَلَمْ تَرَ أَنَّ ٱللَّهَ يُولِجُ ٱلَّيْلَ فِى ٱلنَّهَارِ وَيُولِجُ ٱلنَّهَارَ فِى ٱلَّيْلِ وَسَخَّرَ ٱلشَّمْسَ وَٱلْقَمَرَ كُلٌّ يَجْرِىٓ إِلَىٰٓ أَجَلٍ مُّسَمًّى وَأَنَّ ٱللَّهَ بِمَا تَعْمَلُونَ خَبِيرٌ ﴿٢٩﴾

Artinya: *"Tidakkah kamu memperhatikan, bahwa Sesungguhnya Allah memasukkan malam ke dalam siang dan memasukkan siang ke dalam malam dan Dia tundukkan matahari dan bulan masing-masing berjalan sampai kepada waktu yang ditentukan, dan Sesungguhnya Allah Maha mengetahui apa yang kamu kerjakan"*. (QS. Lukman: 29)

Ayat di atas menerangkan bahwa " *Allah memasukkan malam ke dalam siang dan memasukkan siang ke dalam malam dan Dia tundukkan matahari dan bulan masing-masing berjalan sampai kepada waktu yang ditentukan* ". Pada kalimat inilah penjelasan mengenai kajian nonlinier diambil.

Bentuk nonlinier yang dimaksud di sini adalah mengenai perubahan waktu, dimana antara siang dan malam dalam setiap harinya mengalami perubahan. Perubahan yang terjadi merupakan perubahan yang bersifat tidak linier dan selalu berubah-ubah.

Perubahan itu dapat diketahui dari perubahan waktu solat magrib dan subuh. Waktu solat magrib merupakan petanda perubahan dari siang menjadi alam begitu juga dengan waktu subuh merupakan petanda pergantian malam kepada siang. Pergantian siang menjadi malam dan malam menjadi siang dalam setiap harinya selalu mengalami perubahan. Perbadaan waktu yang tidak tetap inilah yang kemudian di sebut perubahan yang bersifat nonlinier.

2.7.3. Kajian peramalan

Ilmu peramalan merupakan ilmu yang sudah ada sejak berabad abad tahun yang lalu. Ilmu peramalan merupakan ilmu yang digunakan utnuk menafsirkan kajadian-kejadian atau kondisi yang akan terjadinamun kondisi tersebut belum dikatahui secara pasti. Terdapat dua jenis peramalan *pertama* peramalan yang bersifat ilmiah seperti peramalan cuaca, peramalan indek harga saham dan permalan lain yang bisa di tentukan dengan cara ilmiah. Kedua, peramalan non ilmiah atau yang biasa di sebut dengan ramalan bintang dan lain-lain.

Dalam agama islam telah diatur dengan tegas dan jelas mengenai ramalan. Dimana islam dengan tegas mengatakan bahwa ramalan merupakan sesuatu yang diharamkan. Hal ini sesuai dengan beberapa riwayat di bawah ini:

Dalam hadis nabawi, *Dari Abu Hurairah ra. dari Nabi SAW, beliau bersabda, "Barang siapa yang mendatangi tukang ramal lalu membenarkan apa yang dikatakannya maka ia telah kufur apa yang diturunkan kepada Muhammad SAW." (agama Islam).* (HR Abu Daud, Bukhari, Ahmad dan Tirmidzy)

Muslim meriwayatkan dalam Shahih-nya, meriwayatkan dari salah seorang isteri Nabi Shallallahu 'alaihi wa sallam, bahwa beliau bersabda: "*Barangsiapa mendatangi tukang ramal lalu menanyakan kepadanya tentang sesuatu perkara dan dia mempercayainya, maka shalatnya tidak diterima selama empat puluh hari".*

Dan diriwayatkan oleh keempat periwayat dan Al-Hakim dengan menyatakan: Hadits ini shahih menurut kriteria Al-Bukhari dan Muslim, dari Abu

Hurairah *Radhiyallahu* 'anhu, bahwa Nabi *Shallallahu 'alaihi wa sallam* bersabda:

"Barangsiapa mendatangi seorang dukun dan mempercayai apa yang dikatakannya, maka sesungguhnya dia telah kafir dengan wahyu yang diturunkan kepada Muhammad Shallallahu 'alaihi wa sallam". Abu Ya'la pun meriwayatkan hadits mauquf dari Ibnu Mas'ud seperti tersebut di atas, dengan sanad *jayyid*.

Al-Bazzar dengan *isnad jayyid* meriwayatkan hadits *marfu'* dari Imran bin Hushain.

Tidak termasuk golongan kami orang yang melakukan atau meminta tathayyur, meramal atau meminta diramalkan, menyihir atau minta disihirkan; dan barangsiapa mendatangi tukang ramal lalu mempercayai apa yang diucapkannya, maka sesungguhnya dia telah kafir dengan wahyu yang diturunkan kepada Muhammad *Shallallahu 'alaihi wa sallam*.

Hadits ini diriwayatkan pula oleh At-Thabrani dalam Al-Mu'jam al-Ausath dengan isnad hasan dari Ibnu 'Abbas tanpa menyebutkan kalimat: Dan barangsiapa mendatangi …; dan seterusnya.

Al-Baghawi berkata: al-'Arraf ialah orang yang mengaku tahu dengan menggunakan isyarat-isyarat untuk menunjukkan barang curian atau tempat barang hilang atau semacamnya. Ada pula yang mengatakan: Dia adalah kahin , padahal kahin adalah orang yang memberitahukan tentang perkara-perkara yang akan terjadi di masa mendatang. Adapula yang mengatakan: yaitu orang yang memberitahu apa yang tersimpan dalam hati seseorang.

Menurut Abu Al-'Abbas Ibnu Taimiyah: Al-'Arraf adalah sebutan untuk tukang ramal, tukang nujum, peramal nasib dan yang sebangsanya, yang menyatakan tahu tentang perkara-perkara dengan cara-cara tersebut.

Dari beberapa hadis yang ada di atas, kesemuanya melarang dan bahkan mengharamkan kepada umat islam untuk melakukan peramalan. Akan tetai peramalan yang dmaksud di sini adalah peramalan nasib, nujum. Disisi lain agama islam memperbolehkan peramalan yang bersifat ilmiah. Seperti peramalan produksi suatu barang ataupun peramalan ilmu pengetauan.

BAB III

PEMBAHASAN

3.1. Menentukan Transformasi Model *Resiprokal*

Pada pembahasan penelitian ini akan digunakan regresi nonlinier *Resiprokal* model kedua sebagaimana pada (2.1) yang dinyatakan dalam bentuk

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 \frac{1}{X_{1i}} + \beta_2 \frac{1}{X_{2i}} + \cdots + \beta_k \frac{1}{X_{ki}} + \varepsilon_i \qquad (3.1)$$

dimana (i = 1,2,…,n), dan ε berdistribusi normal

Dari model (3.1) akan diaplikasikan pada kasus data oksidasi amoniak menjadi asam nitrat yang diambil dari Brownlee (1965), pasal 13.12, dikutip oleh Daniel dan Wood, table 5.1, Draper dan Smith (1981), bab 6, dan Sembiring (2003), bab 7. Dengan variabel bebas X_1, X_2, dan X_3 berturut-turut adalah aliran udara, suhu air pendingin, dan konsentrasi pendingin. Sedangkan untuk variabel terikat adalah (Y) merupakan persentase amoniak yang hilang yang tidak terikat. Sehingga (3.1) dapat dibentuk ke dalam model berikut:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 \frac{1}{X_{1i}} + \beta_2 \frac{1}{X_{2i}} + \beta_3 \frac{1}{X_{3i}} + \varepsilon_i$$

$$\varepsilon_i = Y_i - \left(\beta_0 + \beta_1 \frac{1}{X_{1i}} + \beta_2 \frac{1}{X_{2i}} + \beta_3 \frac{1}{X_{3i}} \right)$$

$$\varepsilon_i = Y_i - \beta_0 - \beta_1 \frac{1}{X_{1i}} - \beta_2 \frac{1}{X_{2i}} - \beta_3 \frac{1}{X_{3i}} \qquad (3.2)$$

dimana $(i = 1,2,\cdots,n)$.

3.2. Menentukan Penduga Parameter Regresi Resiprokal Menggunakan Metode *Maksimum Likelihood Estimation*

3.2.1. Penduga Parameter β

Dari persamaan (3.2) diketahui bahwa $Y_i = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$, adalah variabel random, dimana $n = 21$ dan $i = 1,2,\ldots,n$. Karena ε diasumsikan berdistribusi normal maka $Y \sim \left(\beta_0 + \beta_1 \frac{1}{X_{1i}} + \beta_2 \frac{1}{X_{2i}} + \beta_3 \frac{1}{X_{3i}}, \sigma^2 \right)$ dengan $\mu = E(Y) = E\left(\beta_0 + \beta_1 \frac{1}{X_{1i}} + \beta_2 \frac{1}{X_{2i}} + \beta_3 \frac{1}{X_{3i}} \right)$ sehingga fungsi distribusi peluang dari Y_i adalah

$$f(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \sigma^2 | Y_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{Y_i - \left(\beta_0 + \beta_1 \frac{1}{X_{1i}} + \beta_2 \frac{1}{X_{2i}} + \beta_3 \frac{1}{X_{3i}}\right)}{\sigma}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\right)\left(Y_i - \left(\beta_0 + \beta_1 \frac{1}{X_{1i}} + \beta_2 \frac{1}{X_{2i}} + \beta_3 \frac{1}{X_{3i}}\right)\right)^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(Y_i - \left(\beta_0 + \beta_1 \frac{1}{X_{1i}} + \beta_2 \frac{1}{X_{2i}} + \beta_3 \frac{1}{X_{3i}}\right)\right)^2} \quad (3.3)$$

Untuk menentukan penduga parameter menggunakan metode *maksimum likelihood estimation*, terlebih dahulu ditentukan fungsi *likelihood* (L) yang di peroleh dari fungsi distribusi peluang pada persamaan (3.3) di atas sebagai berikut:

$\mathrm{L}(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \sigma^2 | Y_i)$

$$= f(\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\sigma^2|Y_1)\ f(\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\sigma^2|Y_2)\cdots f(\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\sigma^2|Y_n)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(Y_i-\left(\beta_0+\beta_1\frac{1}{X_{1i}}+\beta_2\frac{1}{X_{2i}}+\beta_3\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(Y_i-\left(\beta_0+\beta_1\frac{1}{X_{1i}}+\beta_2\frac{1}{X_{2i}}+\beta_3\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)^2}\cdots\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(Y_i-\left(\beta_0+\beta_1\frac{1}{X_{1i}}+\beta_2\frac{1}{X_{2i}}+\beta_3\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)^2}$$

$$=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(Y_i-\left(\beta_0+\beta_1\frac{1}{X_{1i}}+\beta_2\frac{1}{X_{2i}}+\beta_3\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)^2-\frac{1}{2\sigma^2}\left(Y_i-\left(\beta_0+\beta_1\frac{1}{X_{1i}}+\beta_2\frac{1}{X_{2i}}+\beta_3\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)^2-\cdots-\frac{1}{2\sigma^2}\left(Y_i-\left(\beta_0+\beta_1\frac{1}{X_{1i}}+\beta_2\frac{1}{X_{2i}}+\beta_3\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)^2}$$

$$=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\left[\left(\frac{1}{2\sigma^2}\left(Y_i-\left(\beta_0+\beta_1\frac{1}{X_{1i}}+\beta_2\frac{1}{X_{2i}}+\beta_3\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)^2\right)+\left(\frac{1}{2\sigma^2}\left(Y_i-\left(\beta_0+\beta_1\frac{1}{X_{1i}}+\beta_2\frac{1}{X_{2i}}+\beta_3\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)^2\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2\sigma^2}\left(Y_i-\left(\beta_0+\beta_1\frac{1}{X_{1i}}+\beta_2\frac{1}{X_{2i}}+\beta_3\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)^2\right)\right]}$$

$$=\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right]^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\left(\beta_0+\beta_1\frac{1}{X_{1i}}+\beta_2\frac{1}{X_{2i}}+\beta_3\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)^2}$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\left(\sigma^2\right)^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\left(\beta_0+\beta_1\frac{1}{X_{1i}}+\beta_2\frac{1}{X_{2i}}+\beta_3\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)^2}$$

Sehingga fungsi likelihoodnya (L) adalah:

$$\mathrm{L}(\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\sigma^2|Y_i)$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\left(\sigma^2\right)^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\left(\beta_0+\beta_1\frac{1}{X_{1i}}+\beta_2\frac{1}{X_{2i}}+\beta_3\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)^2}$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\left(\sigma^2\right)^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\beta_0-\beta_1\frac{1}{X_{1i}}-\beta_2\frac{1}{X_{2i}}-\beta_3\frac{1}{X_{3i}}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\left(\sigma^2\right)^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\beta_0-\beta_1\frac{1}{X_{1i}}-\beta_2\frac{1}{X_{2i}}-\beta_3\frac{1}{X_{3i}}\right)\left(Y_i-\beta_0-\beta_1\frac{1}{X_{1i}}-\beta_2\frac{1}{X_{2i}}-\beta_3\frac{1}{X_{3i}}\right)} \quad (3.4)$$

Untuk mendapatkan estimasi parameter β, karena harus diturunkan terhadap β untuk mendapatkan fungsi maksimum, maka persamaan (3.4) diubah menjadi fungsi log-likelihood sehingga diperoleh

$$\ln L(\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\sigma^2|Y_i)$$

$$=\ln\left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\left(\sigma^2\right)^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\beta_0-\beta_1\frac{1}{X_{1i}}-\beta_2\frac{1}{X_{2i}}-\beta_3\frac{1}{X_{3i}}\right)\left(Y_i-\beta_0-\beta_1\frac{1}{X_{1i}}-\beta_2\frac{1}{X_{2i}}-\beta_3\frac{1}{X_{3i}}\right)}\right)$$

$$=\ln\left((2\pi)^{-\frac{n}{2}}\left(\sigma^2\right)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\beta_0-\beta_1\frac{1}{X_{1i}}-\beta_2\frac{1}{X_{2i}}-\beta_3\frac{1}{X_{3i}}\right)\left(Y_i-\beta_0-\beta_1\frac{1}{X_{1i}}-\beta_2\frac{1}{X_{2i}}-\beta_3\frac{1}{X_{3i}}\right)}\right)$$

$$=\ln\left((2\pi)^{-\frac{n}{2}}\right)+\ln\left(\left(\sigma^2\right)^{-\frac{n}{2}}\right)+\ln\left(e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\beta_0-\beta_1\frac{1}{X_{1i}}-\beta_2\frac{1}{X_{2i}}-\beta_3\frac{1}{X_{3i}}\right)\left(Y_i-\beta_0-\beta_1\frac{1}{X_{1i}}-\beta_2\frac{1}{X_{2i}}-\beta_3\frac{1}{X_{3i}}\right)}\right)$$

$$=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln\left(\sigma^2\right)+\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\beta_0-\beta_1\frac{1}{X_{1i}}-\beta_2\frac{1}{X_{2i}}-\beta_3\frac{1}{X_{3i}}\right)\right.$$
$$\left.\left(Y_i-\beta_0-\beta_1\frac{1}{X_{1i}}-\beta_2\frac{1}{X_{2i}}-\beta_3\frac{1}{X_{3i}}\right)\right]$$

$$=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln\left(\sigma^2\right)-\left[\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\beta_0-\beta_1\frac{1}{X_{1i}}-\beta_2\frac{1}{X_{2i}}-\beta_3\frac{1}{X_{3i}}\right)\right.$$
$$\left.\left(Y_i-\beta_0-\beta_1\frac{1}{X_{1i}}-\beta_2\frac{1}{X_{2i}}-\beta_3\frac{1}{X_{3i}}\right)\right]$$

$$=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln\left(\sigma^2\right)$$
$$-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i^2-2\beta_0Y_i-2\beta_1Y_i\frac{1}{X_{1i}}-2\beta_2Y_i\frac{1}{X_{2i}}-2\beta_3Y_i\frac{1}{X_{3i}}+\beta_0^2+2\beta_0\beta_1\frac{1}{X_{1i}}\right.$$

$$+2\beta_0\beta_2\frac{1}{X_{2i}}+2\beta_0\beta_3\frac{1}{X_{3i}}+\left(\beta_1\frac{1}{X_{1i}}\right)^2+2\beta_1\beta_2\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}+2\beta_1\beta_3\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}$$

$$+\left(\beta_2\frac{1}{X_{2i}}\right)^2+2\beta_2\beta_3\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}+\left(\beta_3\frac{1}{X_{3i}}\right)^2\Bigg)$$

$$=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln\left(\sigma^2\right)-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}Y_i^2+2\frac{1}{2\sigma^2}\beta_0\sum_{i=1}^{n}Y_i+2\frac{1}{2\sigma^2}\beta_1\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i\frac{1}{X_{1i}}\right)$$

$$+2\frac{1}{2\sigma^2}\beta_2\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i\frac{1}{X_{2i}}\right)+2\frac{1}{2\sigma^2}\beta_3\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i\frac{1}{X_{3i}}\right)-\frac{n}{2\sigma^2}\beta_0^2-2\frac{1}{2\sigma^2}\beta_0\beta_1\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)$$

$$-2\frac{1}{2\sigma^2}\beta_0\beta_2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)-2\frac{1}{2\sigma^2}\beta_0\beta_3\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)-\frac{1}{2\sigma^2}\beta_1\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2$$

$$-2\frac{1}{2\sigma^2}\beta_1\beta_2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)-2\frac{1}{2\sigma^2}\beta_1\beta_3\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)-\frac{1}{2\sigma^2}\beta_2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^2$$

$$-2\frac{1}{2\sigma^2}\beta_2\beta_3\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)-\frac{1}{2\sigma^2}\beta_3\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2$$

$$=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln\left(\sigma^2\right)-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}Y_i^2+\frac{1}{\sigma^2}\beta_0\sum_{i=1}^{n}Y_i+\frac{1}{\sigma^2}\beta_1\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i\frac{1}{X_{1i}}\right)$$

$$+\frac{1}{\sigma^2}\beta_2\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i\frac{1}{X_{2i}}\right)+\frac{1}{\sigma^2}\beta_3\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i\frac{1}{X_{3i}}\right)-\frac{n}{2\sigma^2}\beta_0^2-\frac{1}{\sigma^2}\beta_0\beta_1\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)$$

$$-\frac{1}{\sigma^2}\beta_0\beta_2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)-\frac{1}{\sigma^2}\beta_0\beta_3\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)-\frac{1}{2\sigma^2}\beta_1^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2$$

$$-\frac{1}{\sigma^2}\beta_1\beta_2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)-\frac{1}{\sigma^2}\beta_1\beta_3\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)-\frac{1}{2\sigma^2}\beta_2^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^2$$

$$-\frac{1}{\sigma^2}\beta_2\beta_3\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)-\frac{1}{2\sigma^2}\beta_3^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2 \tag{3.5}$$

untuk mempermudah penulisan dan penganalisisan maka persamaan (3.5) diubah menjadi

$$= -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln\left(\sigma^2\right) - \frac{1}{2\sigma^2}\mathrm{B} + \frac{1}{\sigma^2}\beta_0\mathrm{A} + \frac{1}{\sigma^2}\beta_1\mathrm{C} + \frac{1}{\sigma^2}\beta_2\mathrm{D} + \frac{1}{\sigma^2}\beta_3\mathrm{E}$$

$$-n\frac{1}{2\sigma^2}\beta_0^2 - \frac{1}{\sigma^2}\beta_0\beta_1\mathrm{F} - \frac{1}{\sigma^2}\beta_0\beta_2\mathrm{H} - \frac{1}{\sigma^2}\beta_0\beta_3\mathrm{J} - \frac{1}{2\sigma^2}\beta_1^2\mathrm{G} - \frac{1}{\sigma^2}\beta_1\beta_2\mathrm{L}$$

$$-\frac{1}{\sigma^2}\beta_1\beta_3\mathrm{M} - \frac{1}{2\sigma^2}\beta_2^2\mathrm{I} - \frac{1}{\sigma^2}\beta_2\beta_3\mathrm{N} - \frac{1}{2\sigma^2}\beta_3^2\mathrm{K} \qquad (3.6)$$

untuk mempermudah penulisan digunakan lambang pemisalan menggunakan huruf balok yaitu huruf A sampai huruf L, dimana pelambangan ini digunakan sampai pada pembahasan selesai.

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = \mathrm{A} \qquad \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 = \mathrm{B} \qquad \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i\frac{1}{X_{1i}}\right) = \mathrm{C}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i\frac{1}{X_{2i}}\right) = \mathrm{D} \qquad \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i\frac{1}{X_{3i}}\right) = \mathrm{E} \qquad \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{1i}} = \mathrm{F}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2 = \mathrm{G} \qquad \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{2i}} = \mathrm{H} \qquad \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^2 = \mathrm{I}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{3i}} = \mathrm{J} \qquad \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2 = \mathrm{K} \qquad \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right) = \mathrm{L}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right) = \mathrm{M} \qquad \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right) = \mathrm{N}$$

Untuk mendapatkan penduga parameter $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$ dan $\hat{\beta}_3$ yaitu dengan memaksimumkan persamaan (3.6) terhadap $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ dan β_3, artinya mendeferensialkan $\ln\mathrm{L}(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \sigma^2|Y_i)$ terhadap $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ dan β_3 :

3.2.1.1. Etimasi β_0

Untuk menentukan estimasi β_0 yang kemudian dinotasikan $\hat{\beta}_0$ dengan mendeferensialkan $\ln L(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \sigma^2|Y_i)$ terhadap β_0 dan sama dengan nol sehingga diperoleh:

Mendeferensialkan $\ln L(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \sigma^2|Y_i)$ terhadap β_0 diperolah:

$$\frac{\partial \ln L(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \sigma^2|Y_i)}{\partial \beta_0}$$

$$= -0-0-0+\frac{1}{\sigma^2}\text{A}+0+0+0-\frac{2n}{2\sigma^2}\beta_0-\frac{1}{\sigma^2}\beta_1\text{F}-\frac{1}{\sigma^2}\beta_2\text{H}-\frac{1}{\sigma^2}\beta_3\text{J}-0-0$$

$$-0-0-0-0$$

$$=\frac{1}{\sigma^2}\text{A}-\frac{n}{\sigma^2}\beta_0-\frac{1}{\sigma^2}\beta_1\text{F}-\frac{1}{\sigma^2}\beta_2\text{H}-\frac{1}{\sigma^2}\beta_3\text{J}$$

dan menyamakanya dengan nol diperoleh:

$$\frac{\partial \ln L(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \sigma^2|\varepsilon_i)}{\partial \beta_0} = 0$$

$$\frac{1}{\sigma^2}\text{A}-\frac{n}{\sigma^2}\hat{\beta}_0-\frac{1}{\sigma^2}\hat{\beta}_1\text{F}-\frac{1}{\sigma^2}\hat{\beta}_2\text{H}-\frac{1}{\sigma^2}\hat{\beta}_3\text{J}=0$$

$$-\frac{n}{\sigma^2}\hat{\beta}_0-\frac{1}{\sigma^2}\hat{\beta}_1\text{F}-\frac{1}{\sigma^2}\hat{\beta}_2\text{H}-\frac{1}{\sigma^2}\hat{\beta}_3\text{J}=-\frac{1}{\sigma^2}\text{A}$$

$$n\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1\text{F}+\hat{\beta}_2\text{H}+\hat{\beta}_3\text{J}=\text{A}$$

$$n\hat{\beta}_0=\text{A}-\hat{\beta}_1\text{F}-\hat{\beta}_2\text{H}-\hat{\beta}_3\text{J}$$

$$\hat{\beta}_0=\frac{\text{A}}{n}-\frac{\hat{\beta}_1\text{F}}{n}-\frac{\hat{\beta}_2\text{H}}{n}-\frac{\hat{\beta}_3\text{J}}{n} \tag{3.7}$$

$$\hat{\beta}_0 = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n} - \hat{\beta}_1 \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_{1i}}}{n} - \hat{\beta}_2 \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_{2i}}}{n} - \hat{\beta}_3 \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_{3i}}}{n} \right)$$

3.2.1.2. Etimasi β_1

Untuk menentukan estimasi β_1 yang kemudian dinotasikan $\hat{\beta}_1$ dengan mendeferensialkan $\ln L(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \sigma^2 | Y_i)$ terhadap β_1 dan sama dengan nol sehingga diperoleh:

$$\frac{\partial \ln L(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \sigma^2 | Y_i)}{\partial \beta_1}$$

$$= -0 - 0 - 0 + 0 + \frac{1}{\sigma^2} \mathrm{C} + 0 + 0 - 0 - \frac{1}{\sigma^2} \beta_0 \mathrm{F} - 0 - 0 - \frac{2}{2\sigma^2} \beta_1 \mathrm{G} - \frac{1}{\sigma^2} \beta_2 \mathrm{L}$$

$$- \frac{1}{\sigma^2} \beta_3 \mathrm{M} - 0 - 0 - 0$$

$$= \frac{1}{\sigma^2} \mathrm{C} - \frac{1}{\sigma^2} \beta_0 \mathrm{F} - \frac{1}{\sigma^2} \beta_1 \mathrm{G} - \frac{1}{\sigma^2} \beta_2 \mathrm{L} - \frac{1}{\sigma^2} \beta_3 \mathrm{M}$$

dan menyamakanya dengan nol diperoleh:

$$\frac{\partial \ln L(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \sigma^2 | Y_i)}{\partial \beta_1} = 0$$

$$\frac{1}{\sigma^2} \mathrm{C} - \frac{1}{\sigma^2} \hat{\beta}_0 \mathrm{F} - \frac{1}{\sigma^2} \hat{\beta}_1 \mathrm{G} - \frac{1}{\sigma^2} \hat{\beta}_2 \mathrm{L} - \frac{1}{\sigma^2} \hat{\beta}_3 \mathrm{M} = 0$$

$$- \frac{1}{\sigma^2} \hat{\beta}_0 \mathrm{F} - \frac{1}{\sigma^2} \hat{\beta}_1 \mathrm{G} - \frac{1}{\sigma^2} \hat{\beta}_2 \mathrm{L} - \frac{1}{\sigma^2} \hat{\beta}_3 \mathrm{M} = -\frac{1}{\sigma^2} \mathrm{C}$$

$$\hat{\beta}_0 \mathrm{F} + \hat{\beta}_1 \mathrm{G} + \hat{\beta}_2 \mathrm{L} + \hat{\beta}_3 \mathrm{M} = \mathrm{C}$$

$$\hat{\beta}_1 \mathrm{G} = \mathrm{C} - \hat{\beta}_0 \mathrm{F} - \hat{\beta}_2 \mathrm{L} - \hat{\beta}_3 \mathrm{M} \qquad (3.8)$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{G}} - \frac{\hat{\beta}_0\mathrm{F}}{\mathrm{G}} - \frac{\hat{\beta}_2\mathrm{L}}{\mathrm{G}} - \frac{\hat{\beta}_3\mathrm{M}}{\mathrm{G}} \tag{3.9}$$

$$\hat{\beta}_1 \qquad = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i \frac{1}{X_{1i}}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2} - \hat{\beta}_0 \frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{1i}}}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2} - \hat{\beta}_2 \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2} - \hat{\beta}_3 \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2}$$

3.2.1.3. Etimasi β_2

Untuk menentukan estimasi β_2 yang kemudian dinotasikan $\hat{\beta}_2$ dengan mendeferensialkan $\ln\mathrm{L}(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \sigma^2|Y_i)$ terhadap β_2 dan sama dengan nol sehingga diperoleh:

$$\frac{\partial \ln\mathrm{L}(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \sigma^2|Y_i)}{\partial \beta_2}$$

$$= -0 - 0 - 0 + 0 + 0 + \frac{1}{\sigma^2}\mathrm{D} + 0 - 0 - 0 - \frac{1}{\sigma^2}\beta_0\mathrm{H} - 0 - 0 - \frac{1}{\sigma^2}\beta_1\mathrm{L}$$

$$-0 - \frac{2}{2\sigma^2}\beta_2\mathrm{I} - \frac{1}{\sigma^2}\beta_3\mathrm{N} - 0$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}\mathrm{D} - \frac{1}{\sigma^2}\beta_0\mathrm{H} - \frac{1}{\sigma^2}\beta_1\mathrm{L} - \frac{1}{\sigma^2}\beta_2\mathrm{I} - \frac{1}{\sigma^2}\beta_3\mathrm{N}$$

dan menyamakanya dengan nol diperoleh:

$$\frac{\partial \ln\mathrm{L}(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \sigma^2|Y_i)}{\partial \beta_2} = 0$$

$$\frac{1}{\sigma^2}\mathrm{D} - \frac{1}{\sigma^2}\hat{\beta}_0\mathrm{H} - \frac{1}{\sigma^2}\hat{\beta}_1\mathrm{L} - \frac{1}{\sigma^2}\hat{\beta}_2\mathrm{I} - \frac{1}{\sigma^2}\hat{\beta}_3\mathrm{N} = 0$$

$$-\frac{1}{\sigma^2}\hat{\beta}_0\mathrm{H} - \frac{1}{\sigma^2}\hat{\beta}_1\mathrm{L} - \frac{1}{\sigma^2}\hat{\beta}_2\mathrm{I} - \frac{1}{\sigma^2}\hat{\beta}_3\mathrm{N} = -\frac{1}{\sigma^2}\mathrm{D}$$

$$\hat{\beta}_0\mathrm{H} + \hat{\beta}_1\mathrm{L} + \hat{\beta}_2\mathrm{I} + \hat{\beta}_3\mathrm{N} = \mathrm{D}$$

$$\hat{\beta}_2\mathrm{I} = \mathrm{D} - \hat{\beta}_0\mathrm{H} - \hat{\beta}_1\mathrm{L} - \hat{\beta}_3\mathrm{N} \quad (3.10)$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{I}} - \frac{\hat{\beta}_0\mathrm{H}}{\mathrm{I}} - \frac{\hat{\beta}_1\mathrm{L}}{\mathrm{I}} - \frac{\hat{\beta}_3\mathrm{N}}{\mathrm{I}} \quad (3.11)$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i \frac{1}{X_{2i}}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^2} - \hat{\beta}_0 \frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{2i}}}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^2} - \hat{\beta}_1 \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^2} - \hat{\beta}_3 \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^2}$$

3.2.1.4. Etimasi β_3

Untuk menentukan estimasi β_3 yang kemudian dinotasikan $\hat{\beta}_3$ dengan mendeferensialkan $\ln\mathrm{L}(\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\sigma^2|Y_i)$ terhadap β_3 dan sama dengan nol sehingga diperoleh:

$$\frac{\partial \ln\mathrm{L}(\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\sigma^2|Y_i)}{\partial\beta_3}$$

$$= -0-0-0+0+0+0+\frac{1}{\sigma^2}\mathrm{E} - 0-0-0-\frac{1}{\sigma^2}\beta_0\mathrm{J} - 0 - 0 - \frac{1}{\sigma^2}\beta_1\mathrm{M} - 0$$

$$-\frac{1}{\sigma^2}\beta_2\mathrm{N} - \frac{2}{2\sigma^2}\beta_3\mathrm{K}$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}\mathrm{E} - \frac{1}{\sigma^2}\beta_0\mathrm{J} - \frac{1}{\sigma^2}\beta_1\mathrm{M} - \frac{1}{\sigma^2}\beta_2\mathrm{N} - \frac{1}{\sigma^2}\beta_3\mathrm{K}$$

dan menyamakanya dengan nol diperoleh:

$$\frac{\partial \ln\mathrm{L}(\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\sigma^2|Y_i)}{\partial\beta_3} = 0$$

$$\frac{1}{\sigma^2}\text{E}-\frac{1}{\sigma^2}\hat{\beta}_0\text{J}-\frac{1}{\sigma^2}\hat{\beta}_1\text{M}-\frac{1}{\sigma^2}\hat{\beta}_2\text{N}-\frac{1}{\sigma^2}\hat{\beta}_3\text{K}=0$$

$$-\frac{1}{\sigma^2}\hat{\beta}_0\text{J}-\frac{1}{\sigma^2}\hat{\beta}_1\text{M}-\frac{1}{\sigma^2}\hat{\beta}_2\text{N}-\frac{1}{\sigma^2}\hat{\beta}_3\text{K}=-\frac{1}{\sigma^2}\text{E}$$

$$\hat{\beta}_0\text{J}+\hat{\beta}_1\text{M}+\hat{\beta}_2\text{N}+\hat{\beta}_3\text{K}=\text{E}$$

$$\hat{\beta}_3\text{K}=\text{E}-\hat{\beta}_0\text{J}-\hat{\beta}_1\text{M}-\hat{\beta}_2\text{N} \tag{3.12}$$

$$\hat{\beta}_3=\frac{\text{E}}{\text{K}}-\frac{\hat{\beta}_0\text{J}}{\text{K}}-\frac{\hat{\beta}_1\text{M}}{\text{K}}-\frac{\hat{\beta}_2\text{N}}{\text{K}} \tag{3.13}$$

$$\hat{\beta}_3=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i\frac{1}{X_{3i}}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2}-\hat{\beta}_0\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{3i}}}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2}-\hat{\beta}_1\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2}-\hat{\beta}_2\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2}$$

Untuk menentukan masing-masing nilai dari estimasi $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$, dan $\hat{\beta}_3$ dilakukan metode substitusi pada masing-masing persamaan. Sehingga persamaan masing-masing estimasi parameter β untuk $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$, dan $\hat{\beta}_3$ adalah sebagai berikut:

Untuk estimasi parameter $\hat{\beta}_0$ sebagaimana pada persamaan (3.7).

$$\hat{\beta}_0=\frac{\text{A}}{n}-\frac{\hat{\beta}_1\text{F}}{n}-\frac{\hat{\beta}_2\text{H}}{n}-\frac{\hat{\beta}_3\text{J}}{n}$$

$$\hat{\beta}_0 \quad =\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}Y_i}{n}-\hat{\beta}_1\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{1i}}}{n}-\frac{\hat{\beta}_2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{2i}}}{n}-\hat{\beta}_3\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{3i}}}{n}\right)$$

Untuk menentukan estimasi parameter $\hat{\beta}_1$ maka dilakukan langkah-langkah sebagai berikut:

Langkah I: mensubstitusikan $\hat{\beta}_2$ persamaan (3.11) ke $\hat{\beta}_1$ persamaan (3.8) sehingga

$$\hat{\beta}_1 G = C - \hat{\beta}_0 F - \hat{\beta}_2 L - \hat{\beta}_3 M$$

$$\hat{\beta}_1 G = C - \hat{\beta}_0 F - \left(\frac{D}{I} - \frac{\hat{\beta}_0 H}{I} - \frac{\hat{\beta}_1 L}{I} - \frac{\hat{\beta}_3 N}{I}\right)L - \hat{\beta}_3 M$$

$$= C - \hat{\beta}_0 F - \left(\frac{DL}{I} - \frac{\hat{\beta}_0 HL}{I} - \frac{\hat{\beta}_1 L^2}{I} - \frac{\hat{\beta}_3 NL}{I}\right) - \hat{\beta}_3 M$$

$$= C - \hat{\beta}_0 F - \frac{DL}{I} + \frac{\hat{\beta}_0 HL}{I} + \frac{\hat{\beta}_1 L^2}{I} + \frac{\hat{\beta}_3 NL}{I} - \hat{\beta}_3 M$$

$$\hat{\beta}_1 G - \frac{\hat{\beta}_1 L^2}{I} = C - \frac{DL}{I} - \hat{\beta}_0 F + \frac{\hat{\beta}_0 HL}{I} - \hat{\beta}_3 M + \frac{\hat{\beta}_3 NL}{I}$$

$$\frac{\hat{\beta}_1 (GI - L^2)}{I} = \frac{(CI - DL)}{I} - \frac{\hat{\beta}_0 (FI - HL)}{I} - \frac{\hat{\beta}_3 (MI - NL)}{I}$$

$$\hat{\beta}_1 (GI - L^2) = (CI - DL) - \hat{\beta}_0 (FI - HL) - \hat{\beta}_3 (MI - NL) \qquad (3.14)$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{(CI - DL)}{(GI - L^2)} - \frac{\hat{\beta}_0 (FI - HL)}{(GI - L^2)} - \frac{\hat{\beta}_3 (MI - NL)}{(GI - L^2)} \qquad (3.15)$$

Langkah II: mensubstitusikan $\hat{\beta}_2$ persamaan (3.11) ke $\hat{\beta}_3$ persamaan (3.12) sehingga

$$\hat{\beta}_3 K = E - \hat{\beta}_0 J - \hat{\beta}_1 M - \hat{\beta}_2 N$$

$$\hat{\beta}_3 K = E - \hat{\beta}_0 J - \hat{\beta}_1 M - \left(\frac{D}{I} - \frac{\hat{\beta}_0 H}{I} - \frac{\hat{\beta}_1 L}{I} - \frac{\hat{\beta}_3 N}{I}\right)N$$

$$= E - \hat{\beta}_0 J - \hat{\beta}_1 M - \left(\frac{DN}{I} - \frac{\hat{\beta}_0 HN}{I} - \frac{\hat{\beta}_1 LN}{I} - \frac{\hat{\beta}_3 N^2}{I} \right)$$

$$= E - \hat{\beta}_0 J - \hat{\beta}_1 M - \frac{DN}{I} + \frac{\hat{\beta}_0 HN}{I} + \frac{\hat{\beta}_1 LN}{I} + \frac{\hat{\beta}_3 N^2}{I}$$

$$\hat{\beta}_3 K - \frac{\hat{\beta}_3 N^2}{I} = E - \frac{DN}{I} - \hat{\beta}_0 J + \frac{\hat{\beta}_0 HN}{I} - \hat{\beta}_1 M + \frac{\hat{\beta}_1 LN}{I}$$

$$\frac{\hat{\beta}_3 \left(KI - N^2\right)}{I} = \frac{(EI - DN)}{I} - \frac{\hat{\beta}_0 (JI - HN)}{I} - \frac{\hat{\beta}_1 (MI - LN)}{I}$$

$$\hat{\beta}_3 \left(KI - N^2\right) = (EI - DN) - \hat{\beta}_0 (JI - HN) - \hat{\beta}_1 (MI - LN) \tag{3.16}$$

$$\hat{\beta}_3 = \frac{(EI - DN)}{\left(KI - N^2\right)} - \frac{\hat{\beta}_0 (JI - HN)}{\left(KI - N^2\right)} - \frac{\hat{\beta}_1 (MI - LN)}{\left(KI - N^2\right)} \tag{3.17}$$

Langkah III: mensubstitusikan $\hat{\beta}_3$ persamaan (3.17) ke $\hat{\beta}_1$ persamaan (3.14) sehingga

$$\hat{\beta}_1 \left(GI - L^2\right) = (CI - DL) - \hat{\beta}_0 (FI - HL) - \hat{\beta}_3 (MI - NL)$$

$$\hat{\beta}_1 \left(GI - L^2\right) = (CI - DL) - \hat{\beta}_0 (FI - HL)$$
$$- \left(\frac{(EI - DN)}{\left(KI - N^2\right)} - \frac{\hat{\beta}_0 (JI - HN)}{\left(KI - N^2\right)} - \frac{\hat{\beta}_1 (MI - LN)}{\left(KI - N^2\right)} \right) (MI - NL)$$

$$\hat{\beta}_1 \left(GI - L^2\right) = (CI - DL) - \hat{\beta}_0 (FI - HL)$$
$$- \frac{(EI - DN)(MI - NL)}{\left(KI - N^2\right)} + \frac{\hat{\beta}_0 (JI - HN)(MI - NL)}{\left(KI - N^2\right)} + \frac{\hat{\beta}_1 (MI - LN)^2}{\left(KI - N^2\right)}$$

$$\hat{\beta}_1 \left(GI - L^2\right) - \frac{\hat{\beta}_1 (MI - LN)^2}{\left(KI - N^2\right)}$$
$$= (CI - DL) - \frac{(EI - DN)(MI - NL)}{\left(KI - N^2\right)} - \hat{\beta}_0 (FI - HL)$$

$$+\frac{\hat{\beta}_0(JI-HN)(MI-NL)}{(KI-N^2)}$$

$$\frac{\hat{\beta}_1\left[(GI-L^2)(KI-N^2)-(MI-LN)^2\right]}{(KI-N^2)}$$

$$=\frac{\left[(CI-DL)(KI-N^2)-(EI-DN)(MI-NL)\right]}{(KI-N^2)}$$

$$-\frac{\hat{\beta}_0\left[(FI-HL)(KI-N^2)-(JI-HN)(MI-NL)\right]}{(KI-N^2)}$$

$$\hat{\beta}_1\left[(GI-L^2)(KI-N^2)-(MI-LN)^2\right]$$

$$=\left[(CI-DL)(KI-N^2)-(EI-DN)(MI-NL)\right]$$

$$-\hat{\beta}_0\left[(FI-HL)(KI-N^2)-(JI-HN)(MI-NL)\right]$$

$$\hat{\beta}_1=\frac{\left[(CI-DL)(KI-N^2)-(EI-DN)(MI-NL)\right]}{\left[(GI-L^2)(KI-N^2)-(MI-LN)^2\right]}$$

$$-\frac{\hat{\beta}_0\left[(FI-HL)(KI-N^2)-(JI-HN)(MI-NL)\right]}{\left[(GI-L^2)(KI-N^2)-(MI-LN)^2\right]} \quad (3.18)$$

Untuk menentukan estimasi parameter $\hat{\beta}_2$ maka dilakukan langkah-langkah sebagai berikut:

Langkah I: mensubstitusikan $\hat{\beta}_3$ persamaan (3.13) ke $\hat{\beta}_1$ persamaan (3.8) sehingga

$$\hat{\beta}_1 G = C-\hat{\beta}_0 F-\hat{\beta}_2 L-\hat{\beta}_3 M$$

$$= C-\hat{\beta}_0 F-\hat{\beta}_2 L-\left(\frac{E}{K}-\frac{\hat{\beta}_0 J}{K}-\frac{\hat{\beta}_1 M}{K}-\frac{\hat{\beta}_2 N}{K}\right)M$$

$$= C - \hat{\beta}_0 F - \hat{\beta}_2 L - \frac{EM}{K} + \frac{\hat{\beta}_0 JM}{K} + \frac{\hat{\beta}_1 M^2}{K} + \frac{\hat{\beta}_2 NM}{K}$$

$$\hat{\beta}_1 G - \frac{\hat{\beta}_1 M^2}{K} = C - \frac{EM}{K} - \hat{\beta}_0 F + \frac{\hat{\beta}_0 JM}{K} - \hat{\beta}_2 L + \frac{\hat{\beta}_2 NM}{K}$$

$$\frac{\hat{\beta}_1 \left(GK - M^2\right)}{K} = \frac{(CK - EM)}{K} - \frac{\hat{\beta}_0 (FK - JM)}{K} - \frac{\hat{\beta}_2 (LK - NM)}{K}$$

$$\hat{\beta}_1 \left(GK - M^2\right) = (CK - EM) - \hat{\beta}_0 (FK - JM) - \hat{\beta}_2 (LK - NM) \quad (3.19)$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{(CK - EM)}{\left(GK - M^2\right)} - \frac{\hat{\beta}_0 (FK - JM)}{\left(GK - M^2\right)} - \frac{\hat{\beta}_2 (LK - NM)}{\left(GK - M^2\right)} \quad (3.20)$$

Langkah II: mensubstitusikan $\hat{\beta}_3$ persamaan (3.13) ke $\hat{\beta}_2$ persamaan (3.10) sehingga

$$\hat{\beta}_2 I = D - \hat{\beta}_0 H - \hat{\beta}_1 L - \hat{\beta}_3 N$$

$$= D - \hat{\beta}_0 H - \hat{\beta}_1 L - \left(\frac{E}{K} - \frac{\hat{\beta}_0 J}{K} - \frac{\hat{\beta}_1 M}{K} - \frac{\hat{\beta}_2 N}{K} \right) N$$

$$= D - \hat{\beta}_0 H - \hat{\beta}_1 L - \frac{EN}{K} + \frac{\hat{\beta}_0 JN}{K} + \frac{\hat{\beta}_1 MN}{K} + \frac{\hat{\beta}_2 N^2}{K}$$

$$\hat{\beta}_2 I - \frac{\hat{\beta}_2 N^2}{K} = D - \frac{EN}{K} - \hat{\beta}_0 H + \frac{\hat{\beta}_0 JN}{K} - \hat{\beta}_1 L + \frac{\hat{\beta}_1 MN}{K}$$

$$\frac{\hat{\beta}_2 \left(IK - N^2\right)}{K} = \frac{(DK - EN)}{K} - \frac{\hat{\beta}_0 (HK - JN)}{K} - \frac{\hat{\beta}_1 (LK - MN)}{K}$$

$$\hat{\beta}_2 \left(IK - N^2\right) = (DK - EN) - \hat{\beta}_0 (HK - JN) - \hat{\beta}_1 (LK - MN) \quad (3.21)$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{(DK - EN)}{\left(IK - N^2\right)} - \frac{\hat{\beta}_0 (HK - JN)}{\left(IK - N^2\right)} - \frac{\hat{\beta}_1 (LK - MN)}{\left(IK - N^2\right)} \quad (3.22)$$

Langkah III: mensubstitusikan $\hat{\beta}_1$ persamaan (3.20) ke $\hat{\beta}_2$ persamaan (3.21) sehingga

$$\hat{\beta}_2\left(\mathrm{IK}-\mathrm{N}^2\right)=\left(\mathrm{DK}-\mathrm{EN}\right)-\hat{\beta}_0\left(\mathrm{HK}-\mathrm{JN}\right)-\hat{\beta}_1\left(\mathrm{LK}-\mathrm{MN}\right)$$

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_2\left(\mathrm{IK}-\mathrm{N}^2\right)&=\left(\mathrm{DK}-\mathrm{EN}\right)-\hat{\beta}_0\left(\mathrm{HK}-\mathrm{JN}\right)\\&\quad-\left(\frac{\left(\mathrm{CK}-\mathrm{EM}\right)}{\left(\mathrm{GK}-\mathrm{M}^2\right)}-\frac{\hat{\beta}_0\left(\mathrm{FK}-\mathrm{JM}\right)}{\left(\mathrm{GK}-\mathrm{M}^2\right)}-\frac{\hat{\beta}_2\left(\mathrm{LK}-\mathrm{NM}\right)}{\left(\mathrm{GK}-\mathrm{M}^2\right)}\right)\left(\mathrm{LK}-\mathrm{MN}\right)\\&=\left(\mathrm{DK}-\mathrm{EN}\right)-\hat{\beta}_0\left(\mathrm{HK}-\mathrm{JN}\right)\\&\quad-\frac{\left(\mathrm{CK}-\mathrm{EM}\right)\left(\mathrm{LK}-\mathrm{MN}\right)}{\left(\mathrm{GK}-\mathrm{M}^2\right)}+\frac{\hat{\beta}_0\left(\mathrm{FK}-\mathrm{JM}\right)\left(\mathrm{LK}-\mathrm{MN}\right)}{\left(\mathrm{GK}-\mathrm{M}^2\right)}\\&\quad+\frac{\hat{\beta}_2\left(\mathrm{LK}-\mathrm{NM}\right)^2}{\left(\mathrm{GK}-\mathrm{M}^2\right)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_2\left(\mathrm{IK}-\mathrm{N}^2\right)-\frac{\hat{\beta}_2\left(\mathrm{LK}-\mathrm{MN}\right)^2}{\left(\mathrm{GK}-\mathrm{M}^2\right)}&=\left(\mathrm{DK}-\mathrm{EN}\right)-\frac{\left(\mathrm{CK}-\mathrm{EM}\right)\left(\mathrm{LK}-\mathrm{MN}\right)}{\left(\mathrm{GK}-\mathrm{M}^2\right)}-\hat{\beta}_0\left(\mathrm{HK}-\mathrm{JN}\right)\\&\quad+\frac{\hat{\beta}_0\left(\mathrm{FK}-\mathrm{JM}\right)\left(\mathrm{LK}-\mathrm{MN}\right)}{\left(\mathrm{GK}-\mathrm{M}^2\right)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\hat{\beta}_2\left[\left(\mathrm{IK}-\mathrm{N}^2\right)\left(\mathrm{GK}-\mathrm{M}^2\right)-\left(\mathrm{LK}-\mathrm{MN}\right)^2\right]}{\left(\mathrm{GK}-\mathrm{M}^2\right)}&=\frac{\left[\left(\mathrm{DK}-\mathrm{EN}\right)\left(\mathrm{GK}-\mathrm{M}^2\right)-\left(\mathrm{CK}-\mathrm{EM}\right)\left(\mathrm{LK}-\mathrm{MN}\right)\right]}{\left(\mathrm{GK}-\mathrm{M}^2\right)}\\&\quad-\frac{\hat{\beta}_0\left[\left(\mathrm{HK}-\mathrm{JN}\right)\left(\mathrm{GK}-\mathrm{M}^2\right)-\left(\mathrm{FK}-\mathrm{JM}\right)\left(\mathrm{LK}-\mathrm{MN}\right)\right]}{\left(\mathrm{GK}-\mathrm{M}^2\right)}\end{aligned}$$

$$\hat{\beta}_2\left[\left(\mathrm{IK}-\mathrm{N}^2\right)\left(\mathrm{GK}-\mathrm{M}^2\right)-\left(\mathrm{LK}-\mathrm{MN}\right)^2\right]$$

$$= [(DK - EN)(GK - M^2) - (CK - EM)(LK - MN)]$$

$$- \hat{\beta}_0 [(HK - JN)(GK - M^2) - (FK - JM)(LK - MN)]$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{[(DK - EN)(GK - M^2) - (CK - EM)(LK - MN)]}{[(IK - N^2)(GK - M^2) - (LK - MN)^2]}$$

$$- \frac{\hat{\beta}_0 [(HK - JN)(GK - M^2) - (FK - JM)(LK - MN)]}{[(IK - N^2)(GK - M^2) - (LK - MN)^2]} \qquad (3.23)$$

Untuk menentukan estimasi parameter $\hat{\beta}_3$ maka dilakukan langkah-langkah sebagai berikut:

Langkah I: mensubstitusikan persamaan $\hat{\beta}_1$ (3.9) ke persamaan $\hat{\beta}_2$ (3.10) sehingga

$$\hat{\beta}_2 I = D - \hat{\beta}_0 H - \hat{\beta}_1 L - \hat{\beta}_3 N$$

$$= D - \hat{\beta}_0 H - \left(\frac{C}{G} - \frac{\hat{\beta}_0 F}{G} - \frac{\hat{\beta}_2 L}{G} - \frac{\hat{\beta}_3 M}{G} \right) L - \hat{\beta}_3 N$$

$$= D - \hat{\beta}_0 H - \frac{CL}{G} + \frac{\hat{\beta}_0 FL}{G} + \frac{\hat{\beta}_2 L^2}{G} + \frac{\hat{\beta}_3 ML}{G} - \hat{\beta}_3 N$$

$$\hat{\beta}_2 I - \frac{\hat{\beta}_2 L^2}{G} = D - \frac{CL}{G} - \hat{\beta}_0 H + \frac{\hat{\beta}_0 FL}{G} - \hat{\beta}_3 N + \frac{\hat{\beta}_3 ML}{G}$$

$$\frac{\hat{\beta}_2 (IG - L^2)}{G} = \frac{(DG - CL)}{G} - \frac{\hat{\beta}_0 (HG - FL)}{G} - \frac{\hat{\beta}_3 (NG - ML)}{G}$$

$$\hat{\beta}_2 (IG - L^2) = (DG - CL) - \hat{\beta}_0 (HG - FL) - \hat{\beta}_3 (NG - ML) \qquad (3.24)$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{(DG - CL)}{(IG - L^2)} - \hat{\beta}_0 \frac{(HG - FL)}{(IG - L^2)} - \hat{\beta}_3 \frac{(NG - ML)}{(IG - L^2)} \qquad (3.24)$$

Langkah II: mensubstitusikan persamaan $\hat{\beta}_1$ (3.9) ke persamaan $\hat{\beta}_3$ (3.12) sehingga

$$\hat{\beta}_3 \mathrm{K} = \mathrm{E} - \hat{\beta}_0 \mathrm{J} - \hat{\beta}_1 \mathrm{M} - \hat{\beta}_2 \mathrm{N}$$

$$= \mathrm{E} - \hat{\beta}_0 \mathrm{J} - \left(\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{G}} - \frac{\hat{\beta}_0 \mathrm{F}}{\mathrm{G}} - \frac{\hat{\beta}_2 \mathrm{L}}{\mathrm{G}} - \frac{\hat{\beta}_3 \mathrm{M}}{\mathrm{G}} \right) \mathrm{M} - \hat{\beta}_2 \mathrm{N}$$

$$= \mathrm{E} - \hat{\beta}_0 \mathrm{J} - \frac{\mathrm{CM}}{\mathrm{G}} + \frac{\hat{\beta}_0 \mathrm{FM}}{\mathrm{G}} + \frac{\hat{\beta}_2 \mathrm{LM}}{\mathrm{G}} + \frac{\hat{\beta}_3 \mathrm{M}^2}{\mathrm{G}} - \hat{\beta}_2 \mathrm{N}$$

$$\hat{\beta}_3 \mathrm{K} - \frac{\hat{\beta}_3 \mathrm{M}^2}{\mathrm{G}} = \mathrm{E} - \frac{\mathrm{CM}}{\mathrm{G}} - \hat{\beta}_0 \mathrm{J} + \frac{\hat{\beta}_0 \mathrm{FM}}{\mathrm{G}} - \hat{\beta}_2 \mathrm{N} + \frac{\hat{\beta}_2 \mathrm{LM}}{\mathrm{G}}$$

$$\frac{\hat{\beta}_3 \left(\mathrm{KG} - \mathrm{M}^2 \right)}{\mathrm{G}} = \frac{\left(\mathrm{EG} - \mathrm{CM} \right)}{\mathrm{G}} - \frac{\hat{\beta}_0 \left(\mathrm{JG} - \mathrm{FM} \right)}{\mathrm{G}} - \frac{\hat{\beta}_2 \left(\mathrm{NG} - \mathrm{LM} \right)}{\mathrm{G}}$$

$$\hat{\beta}_3 \left(\mathrm{KG} - \mathrm{M}^2 \right) = \left(\mathrm{EG} - \mathrm{CM} \right) - \hat{\beta}_0 \left(\mathrm{JG} - \mathrm{FM} \right) - \hat{\beta}_2 \left(\mathrm{NG} - \mathrm{LM} \right) \qquad (3.25)$$

$$\hat{\beta}_3 = \frac{\left(\mathrm{EG} - \mathrm{CM} \right)}{\left(\mathrm{KG} - \mathrm{M}^2 \right)} - \frac{\hat{\beta}_0 \left(\mathrm{JG} - \mathrm{FM} \right)}{\left(\mathrm{KG} - \mathrm{M}^2 \right)} - \frac{\hat{\beta}_2 \left(\mathrm{NG} - \mathrm{LM} \right)}{\left(\mathrm{KG} - \mathrm{M}^2 \right)} \qquad (3.26)$$

Langkah III: mensubstitusikan persamaan $\hat{\beta}_2$ (3.24) ke persamaan $\hat{\beta}_3$ (3.25) sehingga

$$\hat{\beta}_3 \left(\mathrm{KG} - \mathrm{M}^2 \right) = \left(\mathrm{EG} - \mathrm{CM} \right) - \hat{\beta}_0 \left(\mathrm{JG} - \mathrm{FM} \right) - \hat{\beta}_2 \left(\mathrm{NG} - \mathrm{LM} \right)$$

$$= \left(\mathrm{EG} - \mathrm{CM} \right) - \hat{\beta}_0 \left(\mathrm{JG} - \mathrm{FM} \right)$$

$$- \left(\frac{\left(\mathrm{DG} - \mathrm{CL} \right)}{\left(\mathrm{IG} - \mathrm{L}^2 \right)} - \hat{\beta}_0 \frac{\left(\mathrm{HG} - \mathrm{FL} \right)}{\left(\mathrm{IG} - \mathrm{L}^2 \right)} - \hat{\beta}_3 \frac{\left(\mathrm{NG} - \mathrm{ML} \right)}{\left(\mathrm{IG} - \mathrm{L}^2 \right)} \right) \left(\mathrm{NG} - \mathrm{LM} \right)$$

$$= \left(\mathrm{EG} - \mathrm{CM} \right) - \hat{\beta}_0 \left(\mathrm{JG} - \mathrm{FM} \right)$$

$$- \frac{\left(\mathrm{DG} - \mathrm{CL} \right) \left(\mathrm{NG} - \mathrm{ML} \right)}{\left(\mathrm{IG} - \mathrm{L}^2 \right)} + \hat{\beta}_0 \frac{\left(\mathrm{HG} - \mathrm{FL} \right) \left(\mathrm{NG} - \mathrm{ML} \right)}{\left(\mathrm{IG} - \mathrm{L}^2 \right)}$$

$$+\hat{\beta}_3\frac{(\mathrm{NG}-\mathrm{ML})^2}{(\mathrm{IG}-\mathrm{L}^2)}$$

$$\hat{\beta}_3(\mathrm{KG}-\mathrm{M}^2)-\hat{\beta}_3\frac{(\mathrm{NG}-\mathrm{ML})^2}{(\mathrm{IG}-\mathrm{L}^2)}$$

$$=(\mathrm{EG}-\mathrm{CM})-\frac{(\mathrm{DG}-\mathrm{CL})(\mathrm{NG}-\mathrm{ML})}{(\mathrm{IG}-\mathrm{L}^2)}$$

$$-\hat{\beta}_0(\mathrm{JG}-\mathrm{FM})+\hat{\beta}_0\frac{(\mathrm{HG}-\mathrm{FL})(\mathrm{NG}-\mathrm{ML})}{(\mathrm{IG}-\mathrm{L}^2)}$$

$$\frac{\hat{\beta}_3\left[(\mathrm{KG}-\mathrm{M}^2)(\mathrm{IG}-\mathrm{L}^2)-(\mathrm{NG}-\mathrm{ML})^2\right]}{(\mathrm{IG}-\mathrm{L}^2)}$$

$$=\frac{\left[(\mathrm{EG}-\mathrm{CM})(\mathrm{IG}-\mathrm{L}^2)-(\mathrm{DG}-\mathrm{CL})(\mathrm{NG}-\mathrm{ML})\right]}{(\mathrm{IG}-\mathrm{L}^2)}$$

$$-\frac{\hat{\beta}_0\left[(\mathrm{JG}-\mathrm{FM})(\mathrm{IG}-\mathrm{L}^2)-(\mathrm{HG}-\mathrm{FL})(\mathrm{NG}-\mathrm{ML})\right]}{(\mathrm{IG}-\mathrm{L}^2)}$$

$$\hat{\beta}_3\left[(\mathrm{KG}-\mathrm{M}^2)(\mathrm{IG}-\mathrm{L}^2)-(\mathrm{NG}-\mathrm{ML})^2\right]$$

$$=\left[(\mathrm{EG}-\mathrm{CM})(\mathrm{IG}-\mathrm{L}^2)-(\mathrm{DG}-\mathrm{CL})(\mathrm{NG}-\mathrm{ML})\right]$$

$$-\hat{\beta}_0\left[(\mathrm{JG}-\mathrm{FM})(\mathrm{IG}-\mathrm{L}^2)-(\mathrm{HG}-\mathrm{FL})(\mathrm{NG}-\mathrm{ML})\right]$$

$$\hat{\beta}_3=\frac{\left[(\mathrm{EG}-\mathrm{CM})(\mathrm{IG}-\mathrm{L}^2)-(\mathrm{DG}-\mathrm{CL})(\mathrm{NG}-\mathrm{ML})\right]}{\left[(\mathrm{KG}-\mathrm{M}^2)(\mathrm{IG}-\mathrm{L}^2)-(\mathrm{NG}-\mathrm{ML})^2\right]}$$

$$-\frac{\hat{\beta}_0\left[(\mathrm{JG}-\mathrm{FM})(\mathrm{IG}-\mathrm{L}^2)-(\mathrm{HG}-\mathrm{FL})(\mathrm{NG}-\mathrm{ML})\right]}{\left[(\mathrm{KG}-\mathrm{M}^2)(\mathrm{IG}-\mathrm{L}^2)-(\mathrm{NG}-\mathrm{ML})^2\right]} \tag{3.27}$$

Menentukan persamaan $\hat{\beta}_0$

$$\hat{\beta}_0=\frac{\mathrm{A}}{n}-\frac{\hat{\beta}_1\mathrm{F}}{n}-\frac{\hat{\beta}_2\mathrm{H}}{n}-\frac{\hat{\beta}_3\mathrm{J}}{n}$$

Untuk persamaan $\hat{\beta}_1,\ \hat{\beta}_2,\ \hat{\beta}_3$ dimisalkan untuk mempermudah dalam menentukan $\hat{\beta}_0$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\left[(\mathrm{CI}-\mathrm{DL})(\mathrm{KI}-\mathrm{N}^2)-(\mathrm{EI}-\mathrm{DN})(\mathrm{MI}-\mathrm{NL})\right]}{\left[(\mathrm{GI}-\mathrm{L}^2)(\mathrm{KI}-\mathrm{N}^2)-(\mathrm{MI}-\mathrm{LN})^2\right]}$$

$$-\frac{\hat{\beta}_0\left[(\mathrm{FI}-\mathrm{HL})(\mathrm{KI}-\mathrm{N}^2)-(\mathrm{JI}-\mathrm{HN})(\mathrm{MI}-\mathrm{NL})\right]}{\left[(\mathrm{GI}-\mathrm{L}^2)(\mathrm{KI}-\mathrm{N}^2)-(\mathrm{MI}-\mathrm{LN})^2\right]}$$

misalkan:

$$\mathrm{R} = \left[(\mathrm{CI}-\mathrm{DL})(\mathrm{KI}-\mathrm{N}^2)-(\mathrm{EI}-\mathrm{DN})(\mathrm{MI}-\mathrm{NL})\right]$$

$$= \left[\left(\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i\frac{1}{X_{1i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^2-\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i\frac{1}{X_{2i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)^2\right)\right.$$
$$\left.-\left(\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i\frac{1}{X_{3i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^2-\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i\frac{1}{X_{2i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^2-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)\right)\right]$$

$$\mathrm{S} = \left[(\mathrm{FI}-\mathrm{HL})(\mathrm{KI}-\mathrm{N}^2)-(\mathrm{JI}-\mathrm{HN})(\mathrm{MI}-\mathrm{NL})\right]$$

$$= \left[\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{1i}}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^2-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{2i}}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)^2\right)\right.$$
$$\left.-\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{3i}}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^2-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{2i}}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^2-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)\right)\right]$$

$$\mathrm{T} = \left[(\mathrm{GI}-\mathrm{L}^2)(\mathrm{KI}-\mathrm{N}^2)-(\mathrm{MI}-\mathrm{LN})^2\right]$$

$$= \left[\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)\right)^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)^2\right)\right.$$
$$\left.-\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^2-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)\right)^2\right]$$

maka diperoleh:

$$\hat{\beta}_1 \quad = \frac{\mathrm{R} - \hat{\beta}_0 \mathrm{S}}{\mathrm{T}}$$

$$\hat{\beta}_2 \quad = \frac{\left[(\mathrm{DK} - \mathrm{EN})(\mathrm{GK} - \mathrm{M}^2) - (\mathrm{CK} - \mathrm{EM})(\mathrm{LK} - \mathrm{MN})\right]}{\left[(\mathrm{IK} - \mathrm{N}^2)(\mathrm{GK} - \mathrm{M}^2) - (\mathrm{LK} - \mathrm{MN})^2\right]}$$

$$- \frac{\hat{\beta}_0 \left[(\mathrm{HK} - \mathrm{JN})(\mathrm{GK} - \mathrm{M}^2) - (\mathrm{FK} - \mathrm{JM})(\mathrm{LK} - \mathrm{MN})\right]}{\left[(\mathrm{IK} - \mathrm{N}^2)(\mathrm{GK} - \mathrm{M}^2) - (\mathrm{LK} - \mathrm{MN})^2\right]}$$

misalkan

$$\mathrm{U} \quad = \left[(\mathrm{DK} - \mathrm{EN})(\mathrm{GK} - \mathrm{M}^2) - (\mathrm{CK} - \mathrm{EM})(\mathrm{LK} - \mathrm{MN})\right]$$

$$= \left[\left(\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i \frac{1}{X_{2i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2 - \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i \frac{1}{X_{3i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2 \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)^2\right)\right.$$

$$\left. - \left(\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i \frac{1}{X_{1i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2 - \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i \frac{1}{X_{3i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2 - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)\right]$$

$$\mathrm{V} \quad = \left[(\mathrm{HK} - \mathrm{JN})(\mathrm{GK} - \mathrm{M}^2) - (\mathrm{FK} - \mathrm{JM})(\mathrm{LK} - \mathrm{MN})\right]$$

$$= \left[\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{2i}}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2 - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{3i}}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2 \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)^2\right)\right.$$

$$\left. - \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{1i}}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2 - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{3i}}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2 - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)\right]$$

$$\mathrm{W} \quad = \left[(\mathrm{IK} - \mathrm{N}^2)(\mathrm{GK} - \mathrm{M}^2) - (\mathrm{LK} - \mathrm{MN})^2\right]$$

$$= \left[\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^2 \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2 \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)^2\right)\right.$$

$$\left. - \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2 - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)^2\right]$$

maka diperoleh:

$$\hat{\beta}_2 \quad = \frac{\mathrm{U} - \hat{\beta}_0 \mathrm{V}}{\mathrm{W}}$$

$$\hat{\beta}_3 \quad = \frac{\left[(\mathrm{EG}-\mathrm{CM})(\mathrm{IG}-\mathrm{L}^2)-(\mathrm{DG}-\mathrm{CL})(\mathrm{NG}-\mathrm{ML})\right]}{\left[(\mathrm{KG}-\mathrm{M}^2)(\mathrm{IG}-\mathrm{L}^2)-(\mathrm{NG}-\mathrm{ML})^2\right]}$$

$$- \frac{\hat{\beta}_0\left[(\mathrm{JG}-\mathrm{FM})(\mathrm{IG}-\mathrm{L}^2)-(\mathrm{HG}-\mathrm{FL})(\mathrm{NG}-\mathrm{ML})\right]}{\left[(\mathrm{KG}-\mathrm{M}^2)(\mathrm{IG}-\mathrm{L}^2)-(\mathrm{NG}-\mathrm{ML})^2\right]}$$

misalkan

$$\mathrm{X} \quad = \left[(\mathrm{EG}-\mathrm{CM})(\mathrm{IG}-\mathrm{L}^2)-(\mathrm{DG}-\mathrm{CL})(\mathrm{NG}-\mathrm{ML})\right]$$

$$= \left[\left(\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i \frac{1}{X_{3i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2 - \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i \frac{1}{X_{1i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^2 \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)\right)^2\right)\right.$$

$$\left. - \left(\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i \frac{1}{X_{2i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2 - \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i \frac{1}{X_{1i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2 - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)\right)\right]$$

$$\mathrm{Y} \quad = \left[(\mathrm{JG}-\mathrm{FM})(\mathrm{IG}-\mathrm{L}^2)-(\mathrm{HG}-\mathrm{FL})(\mathrm{NG}-\mathrm{ML})\right]$$

$$= \left[\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{3i}}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2 - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{1i}}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^2 \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)\right)^2\right)\right.$$

$$\left. - \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{2i}}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2 - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{1i}}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2 - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)\right)\right]$$

$$\mathrm{Z} \quad = \left[(\mathrm{KG}-\mathrm{M}^2)(\mathrm{IG}-\mathrm{L}^2)-(\mathrm{NG}-\mathrm{ML})^2\right]$$

$$= \left[\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2 \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^2 \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)\right)^2\right)\right.$$

$$\left. - \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2 - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)\right)^2\right]$$

maka diperoleh:

$$\hat{\beta}_3 = \frac{X - \hat{\beta}_0 Y}{Z}$$

Dari hasil pemisalan dapat diketahui sebagai berikut:

$$n\hat{\beta}_0 = A - \hat{\beta}_1 F - \hat{\beta}_2 H - \hat{\beta}_3 J$$

$$n\hat{\beta}_0 = A - \left(\frac{R - \hat{\beta}_0 S}{T}\right)F - \left(\frac{U - \hat{\beta}_0 V}{W}\right)H - \left(\frac{X - \hat{\beta}_0 Y}{Z}\right)J$$

$$n\hat{\beta}_0 = A - \left(\frac{FR}{T} - \frac{\hat{\beta}_0 FS}{T}\right) - \left(\frac{HU}{W} - \frac{\hat{\beta}_0 HV}{W}\right) - \left(\frac{JX}{Z} - \frac{\hat{\beta}_0 JY}{Z}\right)$$

$$n\hat{\beta}_0 = A - \frac{FR}{T} + \frac{\hat{\beta}_0 FS}{T} - \frac{HU}{W} + \frac{\hat{\beta}_0 HV}{W} - \frac{JX}{Z} + \frac{\hat{\beta}_0 JY}{Z}$$

$$n\hat{\beta}_0 - \frac{\hat{\beta}_0 FS}{T} - \frac{\hat{\beta}_0 HV}{W} - \frac{\hat{\beta}_0 JY}{Z} = A - \frac{FR}{T} - \frac{HU}{W} - \frac{JX}{Z}$$

$$\hat{\beta}_0\left(n - \frac{FS}{T} - \frac{HV}{W} - \frac{JY}{Z}\right) = A - \frac{FR}{T} - \frac{HU}{W} - \frac{JX}{Z}$$

$$\hat{\beta}_0 = \frac{\left(A - \frac{FR}{T} - \frac{HU}{W} - \frac{JX}{Z}\right)}{\left(n - \frac{FS}{T} - \frac{HV}{W} - \frac{JY}{Z}\right)}$$

$$\hat{\beta}_0\left(\frac{nTWZ - FSWZ - HVTZ - JYTW}{TWZ}\right) = \frac{ATWZ - FRWZ - HUTZ - JXTW}{TWZ}$$

$$\hat{\beta}_0(nTWZ - FSWZ - HVTZ - JYTW) = ATWZ - FRWZ - HUTZ - JXTW$$

Sehingga dapat diketahui persamaaan $\hat{\beta}_0$ adalah sebagai berikut:

$$\hat{\beta}_0 = \frac{(ATWZ - FRWZ - HUTZ - JXTW)}{(nTWZ - FSWZ - HVTZ - JYTW)} \quad (3.28)$$

Menentukan estimasi $\hat{\beta}_1$

Dari persamaaan $\hat{\beta}_0$ yang ada di atas maka dapat diketahui persamaan $\hat{\beta}_1$ adalah sebagai berikut:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{R - \hat{\beta}_0 S}{T}$$

$$= \frac{1}{T}\left(R - \hat{\beta}_0 S\right)$$

$$= \frac{1}{T}\left(R - \left(\frac{(ATWZ - FRWZ - HUTZ - JXTW)}{(nTWZ - FSWZ - HVTZ - JYTW)} \right) S \right) \qquad (3.29)$$

Menentukan estimasi $\hat{\beta}_2$

Dari persamaaan $\hat{\beta}_0$ yang ada di atas maka dapat diketahui persamaan $\hat{\beta}_2$ adalah sebagai berikut:

$$\hat{\beta}_2 = \frac{U - \hat{\beta}_0 V}{W}$$

$$= \frac{1}{W}\left(U - \hat{\beta}_0 V\right)$$

$$= \frac{1}{W}\left(U - \left(\frac{(ATWZ - FRWZ - HUTZ - JXTW)}{(nTWZ - FSWZ - HVTZ - JYTW)} \right) V \right) \qquad (3.30)$$

Menentukan estimasi $\hat{\beta}_3$

Dari persamaaan $\hat{\beta}_0$ yang ada di atas maka dapat diketahui persamaan $\hat{\beta}_2$ adalah sebagai berikut:

$$\hat{\beta}_3 = \frac{X - \hat{\beta}_0 Y}{Z}$$

$$=\frac{1}{\mathrm{Z}}\left(\mathrm{X}-\hat{\beta}_0\mathrm{Y}\right)$$

$$=\frac{1}{\mathrm{Z}}\left(\mathrm{X}-\left(\frac{(\mathrm{ATWZ}-\mathrm{FRWZ}-\mathrm{HUTZ}-\mathrm{JXTW})}{(n\mathrm{TWZ}-\mathrm{FSWZ}-\mathrm{HVTZ}-\mathrm{JYTW})}\right)\mathrm{Y}\right) \tag{3.31}$$

Untuk nilai fungsi dari $\hat{\beta}_0$ persamaan (3.28), $\hat{\beta}_1$ persamaan (3.29), $\hat{\beta}_2$ persamaan (3.30), dan $\hat{\beta}_3$ persamaan (3.31) terdapat pada lampiran.

3.2.2. Penduga Parameter σ^2

Untuk menentukan estimasi σ^2 yang kemudian dinotasikan $\hat{\sigma}^2$ dengan mendeferensialkan persamaan (3.6) $\ln\mathrm{L}(\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\sigma^2|Y_i)$ terhadap σ^2 dan sama dengan nol sehingga diperoleh:

$$\ln\mathrm{L}(\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\sigma^2|Y_i)$$

$$=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln\left(\sigma^2\right)-\frac{1}{2\sigma^2}\mathrm{B}+\frac{1}{\sigma^2}\beta_0\mathrm{A}+\frac{1}{\sigma^2}\beta_1\mathrm{C}+\frac{1}{\sigma^2}\beta_2\mathrm{D}+\frac{1}{\sigma^2}\beta_3\mathrm{E}$$

$$-n\frac{1}{2\sigma^2}\beta_0^2-\frac{1}{\sigma^2}\beta_0\beta_1\mathrm{F}-\frac{1}{\sigma^2}\beta_0\beta_2\mathrm{H}-\frac{1}{\sigma^2}\beta_0\beta_3\mathrm{J}-\frac{1}{2\sigma^2}\beta_1^2\mathrm{G}-\frac{1}{\sigma^2}\beta_1\beta_2\mathrm{L}$$

$$-\frac{1}{\sigma^2}\beta_1\beta_3\mathrm{M}-\frac{1}{2\sigma^2}\beta_2^2\mathrm{I}-\frac{1}{\sigma^2}\beta_2\beta_3\mathrm{N}-\frac{1}{2\sigma^2}\beta_3^2\mathrm{K}$$

$$\frac{\partial\ln\mathrm{L}(\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\sigma^2|Y_i)}{\partial\sigma^2}$$

$$=-0-\frac{n}{2}\left(\frac{2}{\sigma^2}\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{(\sigma^2)^2}\right)\mathrm{B}+\left(-\frac{2}{(\sigma^2)^2}\right)\beta_0\mathrm{A}+\left(-\frac{2}{(\sigma^2)^2}\right)\beta_1\mathrm{C}+\left(-\frac{2}{(\sigma^2)^2}\right)\beta_2\mathrm{D}$$

$$+\left(-\frac{2}{(\sigma^2)^2}\right)\beta_3\mathrm{E}-n\left(-\frac{2}{(\sigma^2)^2}\right)\beta_0^2-\left(-\frac{2}{(\sigma^2)^2}\right)\beta_0\beta_1\mathrm{F}-\left(-\frac{2}{(\sigma^2)^2}\right)\beta_0\beta_2\,\mathrm{H}$$

$$-\left(-\frac{2}{(\sigma^2)^2}\right)\beta_0\beta_3\,\text{J}-\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{(\sigma^2)^2}\right)\beta_1^2\text{G}-\left(-\frac{2}{(\sigma^2)^2}\right)\beta_1\beta_2\text{L}-\left(-\frac{2}{(\sigma^2)^2}\right)\beta_1\beta_3\,\text{M}$$

$$-\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{(\sigma^2)^2}\right)\beta_2^2\,\text{I}-\left(-\frac{2}{(\sigma^2)^2}\right)\beta_2\beta_3\,\text{N}-\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{(\sigma^2)^2}\right)\beta_3^2\text{K}$$

$$=-\frac{n}{\sigma^2}+\frac{1}{\sigma^4}\text{B}-\frac{2}{\sigma^4}\beta_0\text{A}-\frac{2}{\sigma^4}\beta_1\text{C}-\frac{2}{\sigma^4}\beta_2\text{D}-\frac{2}{\sigma^4}\beta_3\text{E}+\frac{2n}{\sigma^4}\beta_0^2+\frac{2}{\sigma^4}\beta_0\beta_1\text{F}$$

$$+\frac{2}{\sigma^4}\beta_0\beta_2\,\text{H}+\frac{2}{\sigma^4}\beta_0\beta_3\,\text{J}+\frac{1}{\sigma^4}\beta_1^2\text{G}+\frac{2}{\sigma^4}\beta_1\beta_2\text{L}+\frac{2}{\sigma^4}\beta_1\beta_3\,\text{M}+\frac{1}{\sigma^4}\beta_2^2\,\text{I}$$

$$+\frac{2}{\sigma^4}\beta_2\beta_3\,\text{N}+\frac{1}{\sigma^4}\beta_3^2\text{K}$$

dan menyamakanya dengan nol diperoleh:

$\frac{\partial \ln \text{L}(\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\sigma^2|Y_i)}{\partial\sigma^2}=0$, sehingga

$$0=-\frac{n}{\hat{\sigma}^2}+\frac{1}{\hat{\sigma}^4}\text{B}-\frac{2}{\hat{\sigma}^4}\hat{\beta}_0\text{A}-\frac{2}{\hat{\sigma}^4}\hat{\beta}_1\text{C}-\frac{2}{\hat{\sigma}^4}\hat{\beta}_2\text{D}-\frac{2}{\hat{\sigma}^4}\hat{\beta}_3\text{E}+\frac{2n}{\hat{\sigma}^4}\hat{\beta}_0^2+\frac{2}{\hat{\sigma}^4}\hat{\beta}_0\hat{\beta}_1\text{F}$$

$$+\frac{2}{\hat{\sigma}^4}\hat{\beta}_0\hat{\beta}_2\,\text{H}+\frac{2}{\hat{\sigma}^4}\hat{\beta}_0\hat{\beta}_3\,\text{J}+\frac{1}{\hat{\sigma}^4}\hat{\beta}_1^2\text{G}+\frac{2}{\hat{\sigma}^4}\hat{\beta}_1\hat{\beta}_2\text{L}+\frac{2}{\hat{\sigma}^4}\hat{\beta}_1\hat{\beta}_3\,\text{M}+\frac{1}{\hat{\sigma}^4}\hat{\beta}_2^2\,\text{I}$$

$$+\frac{2}{\hat{\sigma}^4}\hat{\beta}_2\hat{\beta}_3\,\text{N}+\frac{1}{\hat{\sigma}^4}\hat{\beta}_3^2\text{K}$$

$$\frac{n}{\hat{\sigma}^2}=\frac{1}{\hat{\sigma}^4}\text{B}-\frac{2}{\hat{\sigma}^4}\hat{\beta}_0\text{A}-\frac{2}{\hat{\sigma}^4}\hat{\beta}_1\text{C}-\frac{2}{\hat{\sigma}^4}\hat{\beta}_2\text{D}-\frac{2}{\hat{\sigma}^4}\hat{\beta}_3\text{E}+\frac{2n}{\hat{\sigma}^4}\hat{\beta}_0^2+\frac{2}{\hat{\sigma}^4}\hat{\beta}_0\hat{\beta}_1\text{F}$$

$$+\frac{2}{\hat{\sigma}^4}\hat{\beta}_0\hat{\beta}_2\,\text{H}+\frac{2}{\hat{\sigma}^4}\hat{\beta}_0\hat{\beta}_3\,\text{J}+\frac{1}{\hat{\sigma}^4}\hat{\beta}_1^2\text{G}+\frac{2}{\hat{\sigma}^4}\hat{\beta}_1\hat{\beta}_2\text{L}+\frac{2}{\hat{\sigma}^4}\hat{\beta}_1\hat{\beta}_3\,\text{M}+\frac{1}{\hat{\sigma}^4}\hat{\beta}_2^2\,\text{I}$$

$$+\frac{2}{\hat{\sigma}^4}\hat{\beta}_2\hat{\beta}_3\,\text{N}+\frac{1}{\hat{\sigma}^4}\hat{\beta}_3^2\text{K}$$

$$\frac{n}{\hat{\sigma}^2}=\frac{1}{\hat{\sigma}^4}\Big(\text{B}-2\hat{\beta}_0\text{A}-2\hat{\beta}_1\text{C}-2\hat{\beta}_2\text{D}-2\hat{\beta}_3\text{E}+2n\hat{\beta}_0^2+2\hat{\beta}_0\hat{\beta}_1\text{F}+2\hat{\beta}_0\hat{\beta}_2\,\text{H}+2\hat{\beta}_0\hat{\beta}_3\,\text{J}$$

$$+\hat{\beta}_1^2\text{G}+2\hat{\beta}_1\hat{\beta}_2\text{L}+2\hat{\beta}_1\hat{\beta}_3\,\text{M}+\hat{\beta}_2^2\,\text{I}+2\hat{\beta}_2\hat{\beta}_3\,\text{N}+\hat{\beta}_3^2\text{K}\Big)$$

$$\frac{n\hat{\sigma}^4}{\hat{\sigma}^2}=\frac{\hat{\sigma}^4}{\hat{\sigma}^4}\Big(\text{B}-2\hat{\beta}_0\text{A}-2\hat{\beta}_1\text{C}-2\hat{\beta}_2\text{D}-2\hat{\beta}_3\text{E}+2n\hat{\beta}_0^2+2\hat{\beta}_0\hat{\beta}_1\text{F}+2\hat{\beta}_0\hat{\beta}_2\,\text{H}$$

$$+2\hat{\beta}_0\hat{\beta}_3\,\mathrm{J}+\hat{\beta}_1^2\mathrm{G}+2\hat{\beta}_1\hat{\beta}_2\mathrm{L}+2\hat{\beta}_1\hat{\beta}_3\,\mathrm{M}+\hat{\beta}_2^2\,\mathrm{I}+2\hat{\beta}_2\hat{\beta}_3\,\mathrm{N}+\hat{\beta}_3^2\mathrm{K}\Big)$$

$$n\hat{\sigma}^2=\mathrm{B}-2\hat{\beta}_0\mathrm{A}-2\hat{\beta}_1\mathrm{C}-2\hat{\beta}_2\mathrm{D}-2\hat{\beta}_3\mathrm{E}+2n\hat{\beta}_0^2+2\hat{\beta}_0\hat{\beta}_1\mathrm{F}+2\hat{\beta}_0\hat{\beta}_2\,\mathrm{H}+2\hat{\beta}_0\hat{\beta}_3\,\mathrm{J}$$

$$+\hat{\beta}_1^2\mathrm{G}+2\hat{\beta}_1\hat{\beta}_2\mathrm{L}+2\hat{\beta}_1\hat{\beta}_3\,\mathrm{M}+\hat{\beta}_2^2\,\mathrm{I}+2\hat{\beta}_2\hat{\beta}_3\,\mathrm{N}+\hat{\beta}_3^2\mathrm{K} \quad (3.61)$$

Dari persamaan (3.61) diubah ke persamaan awal sehingga

$$n\hat{\sigma}^2=\sum_{i=1}^{n}Y_i^2-2\hat{\beta}_0\sum_{i=1}^{n}Y_i-2\hat{\beta}_1\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i\frac{1}{X_{1i}}\right)-2\hat{\beta}_2\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i\frac{1}{X_{2i}}\right)-2\hat{\beta}_3\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i\frac{1}{X_{3i}}\right)+2n\hat{\beta}_0^2$$

$$+2\hat{\beta}_0\hat{\beta}_1\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{1i}}+2\hat{\beta}_0\hat{\beta}_2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{2i}}+2\hat{\beta}_0\hat{\beta}_3\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{3i}}+\hat{\beta}_1^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2$$

$$+2\hat{\beta}_1\hat{\beta}_2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)+2\hat{\beta}_1\hat{\beta}_3\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)+\hat{\beta}_2^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^2$$

$$+2\hat{\beta}_2\hat{\beta}_3\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)+\hat{\beta}_3^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2$$

$$n\hat{\sigma}^2=\sum_{i=1}^{n}\Bigg(Y_i^2-2\hat{\beta}_0Y_i-2\hat{\beta}_1Y_i\frac{1}{X_{1i}}-2\hat{\beta}_2Y_i\frac{1}{X_{2i}}-2\hat{\beta}_3Y_i\frac{1}{X_{3i}}+\hat{\beta}_0^2+2\hat{\beta}_0\hat{\beta}_1\frac{1}{X_{1i}}$$

$$+2\hat{\beta}_0\hat{\beta}_2\frac{1}{X_{2i}}+2\hat{\beta}_0\hat{\beta}_3\frac{1}{X_{3i}}+\left(\hat{\beta}_1\frac{1}{X_{1i}}\right)^2+2\hat{\beta}_1\hat{\beta}_2\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}+2\hat{\beta}_1\hat{\beta}_3\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}$$

$$+\left(\hat{\beta}_2\frac{1}{X_{2i}}\right)^2+2\hat{\beta}_2\hat{\beta}_3\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}+\left(\hat{\beta}_3\frac{1}{X_{3i}}\right)^2\Bigg)$$

$$n\hat{\sigma}^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\left(Y_i-\hat{\beta}_0-\hat{\beta}_1\frac{1}{X_{1i}}-\hat{\beta}_2\frac{1}{X_{2i}}-\hat{\beta}_3\frac{1}{X_{3i}}\right)\left(Y_i-\hat{\beta}_0-\hat{\beta}_1\frac{1}{X_{1i}}-\hat{\beta}_2\frac{1}{X_{2i}}-\hat{\beta}_3\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)$$

$$n\hat{\sigma}^2=\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\hat{\beta}_0-\hat{\beta}_1\frac{1}{X_{1i}}-\hat{\beta}_2\frac{1}{X_{2i}}-\hat{\beta}_3\frac{1}{X_{3i}}\right)^2 \quad (3.32)$$

jadi penaksiran terhadap $\hat{\sigma}^2$ adalah

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\hat{\beta}_0-\hat{\beta}_1\frac{1}{X_{1i}}-\hat{\beta}_2\frac{1}{X_{2i}}-\hat{\beta}_3\frac{1}{X_{3i}}\right)^2$$

3.3. Menentukan Sifat-sifat Penduga Parameter Regresi Resiprokal

Untuk mengetahui apakah penduga yang dihasilkan dari metode maksimum likelihood estimation memenuhi syarat-syarat penduga yang baik, maka diperlukan suatu pengujian sifat-sifat penduga yang baik, yaitu unbias (tak bias), efisien, dan konsisten.

Untuk mengetahui sifat-sifat penduga parameter regresi resiprokal telah diketahui bahwa:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 \frac{1}{X_{1i}} + \beta_2 \frac{1}{X_{2i}} + \beta_3 \frac{1}{X_{3i}} + \varepsilon_i$$

Dan Y_i berdistribusi normal $N\left(\beta_0 + \beta_1 \frac{1}{X_{1i}} + \beta_2 \frac{1}{X_{2i}} + \beta_3 \frac{1}{X_{3i}}, \sigma^2\right)$ sehingga $E(Y_i) = \beta_0 + \beta_1 \frac{1}{X_{1i}} + \beta_2 \frac{1}{X_{2i}} + \beta_3 \frac{1}{X_{3i}}$ dan $Var(Y_i) = \sigma^2$ dari persamaan tersebut juga diasumsikan bahwa ε variabel bebas berdistribusi normal.

$$\begin{aligned}
E(\varepsilon_i) &= E\left(Y_i - \beta_0 - \beta_1 \frac{1}{X_{1i}} - \beta_2 \frac{1}{X_{2i}} - \beta_3 \frac{1}{X_{3i}}\right) \\
&= E(Y_i) - E(\beta_0) - \frac{1}{X_{1i}} E(\beta_1) - \frac{1}{X_{2i}} E(\beta_2) - \frac{1}{X_{3i}} E(\beta_3) \\
&= (E(Y_i)) - \left(E(\beta_0) - \frac{1}{X_{1i}} E(\beta_1) - \frac{1}{X_{2i}} E(\beta_2) - \frac{1}{X_{3i}} E(\beta_3)\right) \\
&= \left(\beta_0 - \beta_1 \frac{1}{X_{1i}} - \beta_2 \frac{1}{X_{2i}} - \beta_3 \frac{1}{X_{3i}}\right) - \left(\beta_0 - \frac{1}{X_{1i}} \beta_1 - \frac{1}{X_{2i}} \beta_2 - \frac{1}{X_{3i}} \beta_3\right) \\
&= \left(\beta_0 + \beta_1 \frac{1}{X_{1i}} + \beta_2 \frac{1}{X_{2i}} + \beta_3 \frac{1}{X_{3i}}\right) - \left(\beta_0 - \beta_1 \frac{1}{X_{1i}} - \beta_2 \frac{1}{X_{2i}} - \beta_3 \frac{1}{X_{3i}}\right) \\
&= 0 \qquad (3.33)
\end{aligned}$$

jadi nilai untuk $E(\varepsilon_i) = 0$

Sehingga dapat ditentukan sifat-sifat penduga parameter regresi resiprokal sebagai berikut:

3.3.1. Tak Bias (Unbias)

Untuk $E(\beta_0)$:

$$E(\hat{\beta}_0) = E\left(\frac{\mathrm{A}}{n} - \frac{\hat{\beta}_1 \mathrm{F}}{n} - \frac{\hat{\beta}_2 \mathrm{H}}{n} - \frac{\hat{\beta}_3 \mathrm{J}}{n}\right)$$

$$E(\hat{\beta}_0) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n} - \hat{\beta}_1 \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_{1i}}}{n} - \hat{\beta}_2 \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_{2i}}}{n} - \hat{\beta}_3 \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_{3i}}}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_{1i}} - \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_{2i}} - \hat{\beta}_3 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_{3i}}\right)$$

$$= \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\beta_0 + \beta_1 \frac{1}{X_{1i}} + \beta_2 \frac{1}{X_{2i}} + \beta_3 \frac{1}{X_{3i}} + \varepsilon_i\right) - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_{1i}} - \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_{2i}} - \hat{\beta}_3 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_{3i}}\right)$$

$$= \frac{1}{n} E\left(n\beta_0 + \beta_1 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_{1i}} + \beta_2 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_{2i}} + \beta_3 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_{3i}} + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_{1i}}\right.$$

$$\left. - \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_{2i}} - \hat{\beta}_3 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_{3i}}\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(E(n\beta_0) + E\left(\beta_1 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_{1i}}\right) + E\left(\beta_2 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_{2i}}\right) + E\left(\beta_3 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_{3i}}\right) + E\left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i\right)\right.$$

$$\left. - E\left(\hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_{1i}}\right) - E\left(\hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_{2i}}\right) - E\left(\hat{\beta}_3 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_{3i}}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(nE(\beta_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_{1i}} E(\beta_1) + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_{2i}} E(\beta_2) + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_{3i}} E(\beta_3) + \sum_{i=1}^{n} E(\varepsilon_i)\right.$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{1i}}E\left(\hat{\beta}_1\right)-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{2i}}E\left(\hat{\beta}_2\right)-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{3i}}E\left(\hat{\beta}_3\right)\Bigg)$$

$$=\frac{1}{n}\Bigg(n\beta_0+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{1i}}\beta_1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{2i}}\beta_2+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{3i}}\beta_3+\sum_{i=1}^{n}E(\varepsilon_i)$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{1i}}\beta_1-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{2i}}\beta_2-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{3i}}\beta_3\Bigg)$$

$$=\frac{1}{n}\left(n\beta_0+\sum_{i=1}^{n}E(\varepsilon_i)\right)$$

Karena pada persamaan (3.33) $E(\varepsilon_i)=0$ maka

$$E\left(\hat{\beta}_0\right)=\frac{1}{n}\left(n\beta_0+\sum_{i=1}^{n}0\right)$$

$$=\frac{1}{n}(n\beta_0+0)$$

$$=\beta_0 \tag{3.34}$$

dari persamaan (3.34) di peroleh $E\left(\hat{\beta}_0\right)=\beta_0$, maka $\hat{\beta}_0$ merupakan penaksir yang tak bias (*unbias*).

Untuk $E\left(\hat{\beta}_1\right)$:

$$E\left(\hat{\beta}_1\right)=\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{G}}-\frac{\hat{\beta}_0\mathrm{F}}{\mathrm{G}}-\frac{\hat{\beta}_2\mathrm{L}}{\mathrm{G}}-\frac{\hat{\beta}_3\mathrm{M}}{\mathrm{G}}$$

$$E\left(\hat{\beta}_1\right)=\frac{1}{-}E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i\frac{1}{X_{1i}}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2}-\hat{\beta}_0\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{1i}}}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2}-\hat{\beta}_2\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2}-\hat{\beta}_3\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2}\right)$$

$$=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2}E\left(\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i\frac{1}{X_{1i}}\right)-\hat{\beta}_0\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{1i}}-\hat{\beta}_2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)-\hat{\beta}_3\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2}E\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\beta_0+\beta_1\frac{1}{X_{1i}}+\beta_2\frac{1}{X_{2i}}+\beta_3\frac{1}{X_{3i}}+\varepsilon_i\right)\frac{1}{X_{1i}}\right)-\hat{\beta}_0\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{1i}}\right.$$

$$\left.-\hat{\beta}_2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)-\hat{\beta}_3\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2}E\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\beta_0\frac{1}{X_{1i}}+\beta_1\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2+\beta_2\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}+\beta_3\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}+\varepsilon_i\frac{1}{X_{1i}}\right)\right.$$

$$\left.-\hat{\beta}_0\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{1i}}-\hat{\beta}_2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)-\hat{\beta}_3\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2}E\left(\beta_0\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{1i}}+\beta_1\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2+\beta_2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)+\beta_3\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\varepsilon_i\right)-\hat{\beta}_0\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{1i}}-\hat{\beta}_2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)-\hat{\beta}_3\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2}\left(E\left(\beta_0\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{1i}}\right)+E\left(\beta_1\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2\right)+E\left(\beta_2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)\right)\right.$$

$$-E\left(\hat{\beta}_3\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)+E\left(\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\frac{1}{X_{1i}}\right)-E\left(\hat{\beta}_0\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{1i}}\right)-E\left(\hat{\beta}_2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)\right)$$

$$\left.-E\left(\hat{\beta}_3\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)\right)$$

$$=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2}\left(\beta_0\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{1i}}+\beta_1\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2+\beta_2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)+\beta_3\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}E(\varepsilon_i)\right)-\beta_0\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{1i}}-\beta_2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)-\beta_3\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2}\left(\beta_1\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}E(\varepsilon_i)\right)\right)$$

Karena pada persamaan (3.33) $E(\varepsilon_i)=0$ maka

$$E(\hat{\beta}_1)=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2}\left(\beta_1\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}(0)\right)\right)$$

$$=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2}\left(\beta_1\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2+0\right)$$

$$E(\hat{\beta}_1)=\beta_1 \tag{3.35}$$

dari persamaan (3.35) di peroleh $E(\hat{\beta}_1)=\beta_1$, maka $\hat{\beta}_1$ merupakan penaksir yang tak bias (*unbias*).

Untuk $E(\hat{\beta}_2)$:

$$\hat{\beta}_2=\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{I}}-\frac{\hat{\beta}_0\mathrm{H}}{\mathrm{I}}-\frac{\hat{\beta}_1\mathrm{L}}{\mathrm{I}}-\frac{\hat{\beta}_3\mathrm{N}}{\mathrm{I}}$$

$$E(\hat{\beta}_2)=E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i\frac{1}{X_{2i}}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^2}-\hat{\beta}_0\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{2i}}}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^2}-\hat{\beta}_1\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^2}-\hat{\beta}_3\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^2}\right)$$

$$= \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^{2}} E\left(\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i \frac{1}{X_{2i}}\right) - \hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{2i}} - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right) - \hat{\beta}_3 \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^{2}} E\Bigg(\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\beta_0 + \beta_1 \frac{1}{X_{1i}} + \beta_2 \frac{1}{X_{2i}} + \beta_3 \frac{1}{X_{3i}} + \varepsilon_i\right)\frac{1}{X_{2i}}\right)$$

$$- \hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{2i}} - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right) - \hat{\beta}_3 \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\Bigg)$$

$$= \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^{2}} E\Bigg(\beta_0 \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{2i}} + \beta_1 \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right) + \beta_2 \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^{2} + \beta_3 \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\varepsilon_i\right)$$

$$- \hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{2i}} - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right) - \hat{\beta}_3 \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\Bigg)$$

$$= \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^{2}} \Bigg(E\left(\beta_0 \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{2i}}\right) + E\left(\beta_1 \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)\right) + E\left(\beta_2 \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^{2}\right) + E\left(\beta_3 \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)$$

$$+ E\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\varepsilon_i\right)\right) - E\left(\hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{2i}}\right) - E\left(\hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)\right) - E\left(\hat{\beta}_3 \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}-\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)\Bigg)$$

$$= \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^{2}} \Bigg(\beta_0 \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{2i}} + \beta_1 \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right) + \beta_2 \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^{2} + \beta_3 \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)$$

$$+ \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}E(\varepsilon_i)\right) - \hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{2i}} - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right) - \hat{\beta}_3 \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\Bigg)$$

$$= \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^{2}} \left(\beta_2 \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^{2} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}E(\varepsilon_i)\right)\right)$$

Karena pada persamaan (3.33) $E(\varepsilon_i) = 0$ maka

$$E\left(\hat{\beta}_2\right) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^2}\left(\beta_2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}0\right)\right)$$

$$= \beta_2 + 0$$

$$E\left(\hat{\beta}_2\right) = \beta_2 \tag{3.36}$$

dari persamaan (3.36) di peroleh $E\left(\hat{\beta}_2\right) = \beta_2$, maka $\hat{\beta}_2$ merupakan penaksir yang tak bias (*unbias*).

Untuk $E\left(\hat{\beta}_3\right)$:

$$\hat{\beta}_3 = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{K}} - \frac{\hat{\beta}_0\mathrm{J}}{\mathrm{K}} - \frac{\hat{\beta}_1\mathrm{M}}{\mathrm{K}} - \frac{\hat{\beta}_2\mathrm{N}}{\mathrm{K}}$$

$$E\left(\hat{\beta}_3\right) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i\frac{1}{X_{3i}}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2} - \hat{\beta}_0\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{3i}}}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2} - \hat{\beta}_1\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2} - \hat{\beta}_2\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2}\right)$$

$$= \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2}E\left(\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i\frac{1}{X_{3i}}\right) - \hat{\beta}_0\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{3i}} - \hat{\beta}_1\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right) - \hat{\beta}_2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2}E\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\beta_0 + \beta_1\frac{1}{X_{1i}} + \beta_2\frac{1}{X_{2i}} + \beta_3\frac{1}{X_{3i}} + \varepsilon_i\right)\frac{1}{X_{3i}}\right)\right.$$

$$\left. - \hat{\beta}_0\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{3i}} - \hat{\beta}_1\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right) - \hat{\beta}_2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2}E\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\beta_0\frac{1}{X_{3i}}+\beta_1\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}+\beta_2\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}+\beta_3\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2+\frac{1}{X_{3i}}\varepsilon_i\right)\right.$$

$$\left.-\hat{\beta}_0\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{3i}}-\hat{\beta}_1\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)-\hat{\beta}_2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2}E\left(\beta_0\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{3i}}+\beta_1\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)+\beta_2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)+\sum_{i=1}^{n}\beta_3\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\varepsilon_i\right)-\hat{\beta}_0\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{3i}}-\hat{\beta}_1\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)-\hat{\beta}_2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2}\left(E\left(\beta_0\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{3i}}\right)+E\left(\beta_1\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)+E\left(\beta_2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)+E\left(\beta_3\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2\right)\right.$$

$$\left.+E\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\varepsilon_i\right)\right)-E\left(\hat{\beta}_0\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{3i}}\right)-E\left(\hat{\beta}_1\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)-E\left(\hat{\beta}_2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)\right)$$

$$=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2}\left(\beta_0\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{3i}}+\beta_1\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)+\beta_2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)+\beta_3\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}E(\varepsilon_i)\right)-\beta_0\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{3i}}-\beta_1\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)-\beta_2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2}\left(\beta_3\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}E(\varepsilon_i)\right)\right)$$

Karena pada persamaan (3.33) $E(\varepsilon_i)=0$ maka

$$E(\hat{\beta}_3)=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2}\left(\beta_3\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}0\right)\right)$$

$$= \beta_3 + 0$$

$$E(\hat{\beta}_3) = \beta_3 \quad (3.37)$$

dari persamaan (3.37) di peroleh $E(\hat{\beta}_3) = \beta_3$, maka $\hat{\beta}_3$ merupakan penaksir yang tak bias (*unbias*).

3.3.2. Efisien

Suatu penduga dikatakan efisien apabila penduga tersebut mempunyai varians yang kecil sehingga

Untuk $\hat{\beta}_0$:

$$Var(\hat{\beta}_0) = E(\beta_0 - E(\hat{\beta}_0))^2$$

Dari persamaan (3.30) diperoleh $E(\hat{\beta}_0) = \beta_0$, maka

$$\begin{aligned}
Var(\hat{\beta}_0) &= E(\hat{\beta}_0 - E(\hat{\beta}_0))^2 \\
&= E(\hat{\beta}_0 - \beta_0)^2 \\
&= E(\hat{\beta}_0 - \beta_0)(\hat{\beta}_0 - \beta_0) \\
&= (E(\hat{\beta}_0) - E(\beta_0))(\hat{\beta}_0 - \beta_0) \\
&= (\beta_0 - \beta_0)(\hat{\beta}_0 - \beta_0) \\
&= (0)(\hat{\beta}_0 - \beta_0) \\
&= 0 \quad (3.38)
\end{aligned}$$

Untuk $\hat{\beta}_1$:

$$Var(\hat{\beta}_1) = E(\beta_1 - E(\hat{\beta}_1))^2$$

Dari persamaan (3.31) diperoleh $E(\hat{\beta}_1) = \beta_1$, maka

$$Var(\hat{\beta}_1) = E(\hat{\beta}_1 - E(\hat{\beta}_1))^2$$

$$= E(\hat{\beta}_1 - \beta_1)^2$$

$$= E(\hat{\beta}_1 - \beta_1)(\hat{\beta}_1 - \beta_1)$$

$$= (E(\hat{\beta}_1) - E(\beta_1))(\hat{\beta}_1 - \beta_1)$$

$$= (\beta_1 - \beta_1)(\hat{\beta}_1 - \beta_1)$$

$$= (0)(\hat{\beta}_1 - \beta_1)$$

$$= 0 \tag{3.39}$$

Untuk $\hat{\beta}_2$:

$$Var(\hat{\beta}_2) = E(\hat{\beta}_2 - E(\hat{\beta}_2))^2$$

Dari persamaan (3.32) diperoleh $E(\hat{\beta}_2) = \beta_2$, maka

$$Var(\hat{\beta}_2) = E(\hat{\beta}_2 - E(\hat{\beta}_2))^2$$

$$= E(\hat{\beta}_2 - \beta_2)^2$$

$$= E(\hat{\beta}_2 - \beta_2)(\hat{\beta}_2 - \beta_2)$$

$$= (E(\hat{\beta}_2) - E(\beta_2))(\hat{\beta}_2 - \beta_2)$$

$$= (\beta_2 - \beta_2)(\hat{\beta}_2 - \beta_2)$$

$$= (0)(\hat{\beta}_2 - \beta_2)$$

$$= 0 \tag{3.40}$$

Untuk $\hat{\beta}_3$:

$$Var(\hat{\beta}_3) \qquad = E(\beta_3 - E(\hat{\beta}_3))^2$$

Dari persamaan (3.33) diperoleh $E(\hat{\beta}_3) = \beta_3$, maka

$$\begin{aligned} Var(\hat{\beta}_3) \quad &= E(\hat{\beta}_3 - E(\hat{\beta}_3))^2 \\ &= E(\hat{\beta}_3 - \beta_3)^2 \\ &= E(\hat{\beta}_3 - \beta_3)(\hat{\beta}_3 - \beta_3) \\ &= (E(\hat{\beta}_3) - E(\beta_3))(\hat{\beta}_3 - \beta_3) \\ &= (\beta_3 - \beta_3)(\hat{\beta}_3 - \beta_3) \\ &= (0)(\hat{\beta}_3 - \beta_3) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3.41}$$

Dari persamaan (3.38), (3.39), (3.40) dan (3.41) diperoleh $Var(\hat{\beta}_0) = 0$, $Var(\hat{\beta}_1) = 0$, $Var(\hat{\beta}_2) = 0$, dan $Var(\hat{\beta}_3) = 0$, maka $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$, dan $\hat{\beta}_3$ merupakan penaksir efisien, karena variannya mempunyai nilai yang kecil.

3.3.3. Konsisten

Penduga yang konsisten adalah

$$E(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^2 \to 0 \text{ jika } n \to \infty$$

Sehingga

Untuk $\hat{\beta}_0$:

$$E(\hat{\beta}_0 - E(\hat{\beta}_0))^2 \qquad = E[(\hat{\beta}_0 - E(\hat{\beta}_0))(\hat{\beta}_0 - E(\hat{\beta}_0))]$$

Dari persamaan (3.30) diperoleh $E(\hat{\beta}_0) = \beta_0$, maka

$$
\begin{aligned}
E\left[\left(\hat{\beta}_0 - E(\hat{\beta}_0)\right)\left(\hat{\beta}_0 - E(\hat{\beta}_0)\right)\right] &= E\left[\left(\hat{\beta}_0 - \beta_0\right)\left(\hat{\beta}_0 - \beta_0\right)\right] \\
&= E\left(\hat{\beta}_0 - \beta_0\right)\left(\hat{\beta}_0 - \beta_0\right) \\
&= \left(E(\hat{\beta}_0) - E(\beta_0)\right)\left(\hat{\beta}_0 - \beta_0\right) \\
&= (\beta_0 - \beta_0)\left(\hat{\beta}_0 - \beta_0\right) \\
&= (0)\left(\hat{\beta}_0 - \beta_0\right) \\
&= 0 \qquad (3.42)
\end{aligned}
$$

Untuk $\hat{\beta}_1$:

$$E\left(\hat{\beta}_1 - E(\hat{\beta}_1)\right)^2 = E\left[\left(\hat{\beta}_1 - E(\hat{\beta}_1)\right)\left(\hat{\beta}_1 - E(\hat{\beta}_1)\right)\right]$$

Dari persamaan (3.31) diperoleh $E(\hat{\beta}_1) = \beta_1$, maka

$$
\begin{aligned}
E\left[\left(\hat{\beta}_1 - E(\hat{\beta}_1)\right)\left(\hat{\beta}_1 - E(\hat{\beta}_1)\right)\right] &= E\left[\left(\hat{\beta}_1 - \beta_1\right)\left(\hat{\beta}_1 - \beta_1\right)\right] \\
&= E\left(\hat{\beta}_1 - \beta_1\right)\left(\hat{\beta}_1 - \beta_1\right) \\
&= \left(E(\hat{\beta}_1) - E(\beta_1)\right)\left(\hat{\beta}_1 - \beta_1\right) \\
&= (\beta_1 - \beta_1)\left(\hat{\beta}_1 - \beta_1\right) \\
&= (0)\left(\hat{\beta}_1 - \beta_1\right) \\
&= 0 \qquad (3.43)
\end{aligned}
$$

Untuk $\hat{\beta}_2$:

$$E\left(\hat{\beta}_2 - E(\hat{\beta}_2)\right)^2 = E\left[\left(\hat{\beta}_2 - E(\hat{\beta}_2)\right)\left(\hat{\beta}_2 - E(\hat{\beta}_2)\right)\right]$$

Dari persamaan (3.32) diperoleh $E(\hat{\beta}_2) = \beta_2$, maka

$$E\left[\left(\hat{\beta}_2 - E(\hat{\beta}_2)\right)\left(\hat{\beta}_2 - E(\hat{\beta}_2)\right)\right] = E\left[\left(\hat{\beta}_2 - \beta_2\right)\left(\hat{\beta}_2 - \beta_2\right)\right]$$

$$= E\left(\hat{\beta}_2 - \beta_2\right)\left(\hat{\beta}_2 - \beta_2\right)$$

$$= \left(E\left(\hat{\beta}_2\right) - E(\beta_2)\right)\left(\hat{\beta}_2 - \beta_2\right)$$

$$= (\beta_2 - \beta_2)\left(\hat{\beta}_2 - \beta_2\right)$$

$$= (0)\left(\hat{\beta}_2 - \beta_2\right)$$

$$= 0 \qquad (3.44)$$

Untuk $\hat{\beta}_3$:

$$E\left(\hat{\beta}_3 - E\left(\hat{\beta}_3\right)\right)^2 = E\left[\left(\hat{\beta}_3 - E\left(\hat{\beta}_3\right)\right)\left(\hat{\beta}_3 - E\left(\hat{\beta}_3\right)\right)\right]$$

Dari persamaan (3.33) diperoleh $E\left(\hat{\beta}_3\right) = \beta_3$, maka

$$E\left[\left(\hat{\beta}_3 - E\left(\hat{\beta}_3\right)\right)\left(\hat{\beta}_3 - E\left(\hat{\beta}_3\right)\right)\right] = E\left[\left(\hat{\beta}_3 - \beta_3\right)\left(\hat{\beta}_3 - \beta_3\right)\right]$$

$$= E\left(\hat{\beta}_3 - \beta_3\right)\left(\hat{\beta}_3 - \beta_3\right)$$

$$= \left(E\left(\hat{\beta}_3\right) - E(\beta_3)\right)\left(\hat{\beta}_3 - \beta_3\right)$$

$$= (\beta_3 - \beta_3)\left(\hat{\beta}_3 - \beta_3\right)$$

$$= (0)\left(\hat{\beta}_3 - \beta_3\right)$$

$$= 0 \qquad (3.45)$$

Dari persamaan (3.42), (3.43), (3.44) dan (3.45) diperoleh $E\left(\hat{\beta}_0 - E\left(\hat{\beta}_0\right)\right)^2 = 0$, $E\left(\hat{\beta}_1 - E\left(\hat{\beta}_1\right)\right)^2 = 0$, $E\left(\hat{\beta}_2 - E\left(\hat{\beta}_2\right)\right)^2 = 0$, dan $E\left(\hat{\beta}_3 - E\left(\hat{\beta}_3\right)\right)^2 = 0$, maka $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$, dan $\hat{\beta}_3$ merupakan penaksir konsisten

3.4. Study Kasus Oksidasi Amoniak Menjadi Asam Nitrat

Parameter yang digunakan pada data penelitian ini yaitu oksidasi amoniak menjadi asam nitrat yang diambil dari literatur Brownlee (1965), pasal 13.12, dikutip oleh Daniel dan Wood, table 5.1, Draper dan Smith (1981), bab 6, dan Sembiring (2003), bab 7.

Dari kasus diketahui oksidasi amoniak menjadi asam nitrat, perlu diketahui yaitu pertama, *amoniak* adalah gas tak berwarna, berbau tajam/pesing, dan bersifat racun dengan rumus kimia NH_3. Dibuat secara industrial melalui proses haber dengan reaksi antara N_2 dan H_2 oleh adanya katalis logam Pt. gas ini dapat dikemas sebagai amoniak cair; digunakan untuk memenuhi kebutuhan industri-industri pupuk, asam sulfat, bahan peledak, dan serat sintetis. Amoniak cair bersifat antoionisasi dan digunakan sebagai pelarut pada reaksi-reaksi bebas air.

Kedua, asam anorganik dengan rumus molekul HNO_3; zat cair tak berwarna atau agak sedikit kekuningan; berasap dan bersifat sangat korosif . asam yang bersifat oksidator ini menyerang (bereaksi) hampir semua logam. Digunakan dalam industri ammonium nitrat, industri pupuk dan dibuat untuk bahan peledak.

Proses reaksi untuk menentukan asam nitrat ini didapatkan dengan mereaksikan antara amoniak dengan oksigen dengan bentuk reaksi $NH_3 + 2O_2 \rightarrow HNO_3 + H_2O$. Dari reaksi ini akhirnya didapat sebuah data oksidasi amoniak menjadi asam nitrat sebagai berikut:

Tabel 3.1. Data dari pabrik oksidasi amoniak menjadi asam nitrat

No. Pengamatan (i)	X_1	X_2	X_3	Y
1	80	27	89	42
2	80	27	88	37
3	75	25	90	37
4	62	24	87	28
5	62	22	87	18
6	62	23	87	18
7	62	24	93	19
8	62	24	93	20
9	58	23	87	15
10	58	18	80	14
11	58	18	89	14
12	59	17	88	13
13	58	18	82	11
14	58	19	93	12
15	50	18	89	8
16	50	18	86	7
17	50	19	72	8
18	50	19	79	8
19	50	20	80	9
20	56	20	82	15
21	70	20	91	15

(Sembiring, 2003: hal 220)

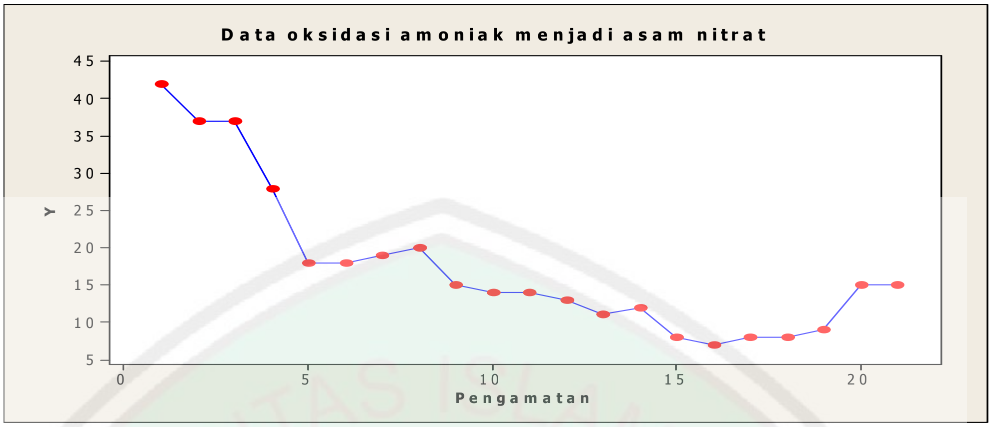
dimana:

X_1 = aliran udara

X_2 = suhu air pendingin

X_3 = konsentrasi pendingin

Y = persentasi amoniak yang hilang (yang tak terikat)



Gambar 3.1. Grafik data oksidasi amoniak menjadi asam nitrat pengamatan terhadap Y

Gambar di atas merupakan grafik dari data yang belum dianalisa menggunakan regresi resiprokal. Dan data tersebut merupakan data yang cocok untuk dianalisa dengan regresi nonlinier resiprokal karena gambar grafiknya sama dengan grafik regresi nonlinier resiprokal.

Dari tabel di atas diketahui bahwa:

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = A = 368 \qquad \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 = B = 8518$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i \frac{1}{X_{1i}}\right) = C = 5{,}783 \qquad \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i \frac{1}{X_{2i}}\right) = D = 16{,}639$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i \frac{1}{X_{3i}}\right) = E = 4{,}218 \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_{1i}} = F = 0{,}354$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2 = G = 0{,}006 \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_{2i}} = H = 1{,}016$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^2 = I = 0{,}050 \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_{3i}} = J = 0{,}244$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2 = K = 0{,}003 \qquad \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right) = L = 0{,}017$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right) = \mathrm{M} \quad = 0{,}004 \qquad \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right) = \mathrm{N} \quad = 0{,}012$$

Untuk menentukan $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$, dan $\hat{\beta}_3$ menggunakan rumus pada persamaan (3.7), (3.19), (3.25), dan (3.31) di atas sebagai berikut

$$\hat{\beta}_0 = \frac{\mathrm{A}}{n} - \frac{\hat{\beta}_1\mathrm{F}}{n} - \frac{\hat{\beta}_2\mathrm{H}}{n} - \frac{\hat{\beta}_3\mathrm{J}}{n}$$

$$= \frac{368}{21} - \frac{\hat{\beta}_1(0.354277)}{21} - \frac{\hat{\beta}_2(1.015981)}{21} - \frac{\hat{\beta}_3(0.244336)}{21}$$

$$= 17.52 - (0.0169)\hat{\beta}_1 - (0.0484)\hat{\beta}_2 - (0.0116)\hat{\beta}_3$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{[(\mathrm{CI}-\mathrm{DL})(\mathrm{KI}-\mathrm{N}^2)-(\mathrm{EI}-\mathrm{DN})(\mathrm{MI}-\mathrm{NL})]}{[(\mathrm{GI}-\mathrm{L}^2)(\mathrm{KI}-\mathrm{N}^2)-(\mathrm{MI}-\mathrm{LN})^2]}$$

$$- \frac{\hat{\beta}_0[(\mathrm{FI}-\mathrm{HL})(\mathrm{KI}-\mathrm{N}^2)-(\mathrm{JI}-\mathrm{HN})(\mathrm{MI}-\mathrm{NL})]}{[(\mathrm{GI}-\mathrm{L}^2)(\mathrm{KI}-\mathrm{N}^2)-(\mathrm{MI}-\mathrm{LN})^2]}$$

$$= \frac{[0{,}2\mathrm{x}10^{-8} - 2{,}1\mathrm{x}10^{-8}]}{[7{,}6\mathrm{x}10^{-12} - 2{,}2\mathrm{x}10^{-12}]} - \frac{\hat{\beta}_0[2{,}4\mathrm{x}10^{-10} - 2{,}9\mathrm{x}10^{-10}]}{[7{,}6\mathrm{x}10^{-12} - 2{,}2\mathrm{x}10^{-12}]}$$

$$= \frac{-1{,}9\mathrm{x}10^{-8}}{5{,}4\mathrm{x}10^{-12}} - \frac{(-0{,}5\mathrm{x}10^{-10})\hat{\beta}_0}{5{,}4\mathrm{x}10^{-12}}$$

$$= -3624 - (-9{,}34972)\hat{\beta}_0$$

$$= -3624 + (9{,}4972)\hat{\beta}_0$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{[(\mathrm{DK}-\mathrm{EN})(\mathrm{GK}-\mathrm{M}^2)-(\mathrm{CK}-\mathrm{EM})(\mathrm{LK}-\mathrm{MN})]}{[(\mathrm{IK}-\mathrm{N}^2)(\mathrm{GK}-\mathrm{M}^2)-(\mathrm{LK}-\mathrm{MN})^2]}$$

$$- \frac{\hat{\beta}_0[(\mathrm{HK}-\mathrm{JN})(\mathrm{GK}-\mathrm{M}^2)-(\mathrm{FK}-\mathrm{JM})(\mathrm{LK}-\mathrm{MN})]}{[(\mathrm{IK}-\mathrm{N}^2)(\mathrm{GK}-\mathrm{M}^2)-(\mathrm{LK}-\mathrm{MN})^2]}$$

$$=\frac{\left[-5{,}6\text{x}10^{-10}-\left(-4{,}5\text{x}10^{-10}\right)\right]}{\left[5{,}2\text{x}10^{-13}-2{,}2\text{x}10^{-13}\right]}-\frac{\hat{\beta}_0\left[5{,}5\text{x}10^{-13}-\left(-3{,}3\text{x}10^{-13}\right)\right]}{\left[5{,}2\text{x}10^{-13}-2{,}2\text{x}10^{-13}\right]}$$

$$=\frac{\left[-5{,}6\text{x}10^{-10}+4{,}5\text{x}10^{-10}\right]}{\left[5{,}2\text{x}10^{-13}-2{,}2\text{x}10^{-13}\right]}-\frac{\hat{\beta}_0\left[5{,}5\text{x}10^{-13}+3{,}3\text{x}10^{-13}\right]}{\left[5{,}2\text{x}10^{-13}-2{,}2\text{x}10^{-13}\right]}$$

$$=\frac{-1{,}1\text{x}10^{-10}}{3\text{x}10^{-13}}-\frac{\left(8{,}8\text{x}10^{-13}\right)\hat{\beta}_0}{3\text{x}10^{-13}}$$

$$=-358{,}878-(2{,}8965)\hat{\beta}_0$$

$$\hat{\beta}_3=\frac{\left[(EG-CM)\left(IG-L^2\right)-(DG-CL)(NG-ML)\right]}{\left[\left(KG-M^2\right)\left(IG-L^2\right)-(NG-ML)^2\right]}$$

$$-\frac{\hat{\beta}_0\left[(JG-FM)\left(IG-L^2\right)-(HG-FL)(NG-ML)\right]}{\left[\left(KG-M^2\right)\left(IG-L^2\right)-(NG-ML)^2\right]}$$

$$=\frac{\left[5{,}5\text{x}10^{-9}-0{,}2\text{x}10^{-9}\right]}{\left[7.1\text{x}10^{-13}-0{,}6\text{x}10^{-13}\right]}-\frac{\hat{\beta}_0\left[6{,}37\text{x}10^{-11}-0{,}73\text{x}10^{-11}\right]}{\left[7.1\text{x}10^{-13}-0{,}6\text{x}10^{-13}\right]}$$

$$=\frac{5{,}3\text{x}10^{-9}}{6{,}5\text{x}10^{-13}}-\frac{\left(5{,}64\text{x}10^{-11}\right)\hat{\beta}_0}{6{,}5\text{x}10^{-13}}$$

$$=8226{,}85-(87{,}119)\hat{\beta}_0$$

Sehingga nilai dari $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$, dan $\hat{\beta}_3$ adalah

$$\hat{\beta}_0=17.52-(0.0169)\hat{\beta}_1-(0.0484)\hat{\beta}_2-(0.0116)\hat{\beta}_3$$

$$=17{,}52-(0{,}0169)\left(-3624+(9{,}4972)\hat{\beta}_0\right)-(0{,}0484)\left(-358{,}878-(2{,}8965)\hat{\beta}_0\right)$$

$$-(0{,}0116)\left(8226{,}85-(87{,}119)\hat{\beta}_0\right)$$

$$\hat{\beta}_0=17{,}52+61{,}2456-0{,}1605\hat{\beta}_0+17{,}37+(0{,}1402)\hat{\beta}_0$$

$$-95{,}4315+(1{,}0106)\hat{\beta}_0$$

$$=17{,}52+61{,}2456+17{,}37-95{,}4315-(0{,}1605-0{,}1402-1{,}0106)\hat{\beta}_0$$

$$=0{,}7041-(-0{,}9903)\hat{\beta}_0$$

$$=0{,}7041+(0{,}9903)\hat{\beta}_0$$

$$\hat{\beta}_0-(0{,}9903)\hat{\beta}_0=0{,}7041$$

$$0{,}0097\hat{\beta}_0=0{,}7041$$

$$\hat{\beta}_0=\frac{0{,}7041}{0{,}0097}=72{,}5876$$

$$\hat{\beta}_1=-3624+(9{,}4972)\hat{\beta}_0$$

$$=-3624+(9{,}4972)\text{x}(72{,}5876)$$

$$=-3624+689{,}37895$$

$$=-2934{,}62105$$

$$\hat{\beta}_2=-358{,}878-(2{,}8965)\hat{\beta}_0$$

$$=-358{,}878-(2{,}8965)\text{x}(72{,}5876)$$

$$=-358{,}878-210{,}24998$$

$$=-569{,}12798$$

$$\hat{\beta}_3=8226{,}85-(87{,}119)\hat{\beta}_0$$

$$=8226{,}85-(87{,}119)\text{x}(72{,}5876)$$

$$=8226{,}85-6323{,}75912$$

$$=1903{,}09088$$

Sehingga dari hasil penelitian didapatkan model dengan persamaan sebagai berikut:

$$Y_i = 72,5876 - 2934,62105\frac{1}{X_{1i}} - 569,12798\frac{1}{X_{2i}} + 1903,09088\frac{1}{X_{3i}} \qquad (3.46)$$

Model (3.46) merupakan model yang dihasilkan dari pendugaan parameter regresi nonlinier resiprokal pada data oksidasi amoniak (NH_3) menjadi asam nitrat (HNO_3). Proses reaksi kimia untuk menghasilkan asam nitrat terjadi antara amoniak (NH_3) dengan oksigen (O_2). Dari persamaan di atas dapat dilakukan analisa modelnya dengan dua kemungkinan yaitu jumlah Y_i besar atau jumlah Y_i kecil.

Kedua kemungkinan yang terjadi dipengaruhi oleh X_1, X_2, X_3 yang merupakan variabel bebas. Sebagaimana di ketahui bahwa X_1, X_2, X_3 merupakan komponen reaktor pembentukan amoniak menjadi asam nitrat. Dari ketiga reaktor tersebut, merupakan komponen yang berpengaruh langsung dan tidak langsung terhadap reaksi pembentukan asam nitrat. Artinya, terdapat pengaruh yang merubah bentuk reaksi amoniak dari bentuk komponenya dan ada pengaruh dari luar bentuk komponen reaksinya. Dalam hal ini yang berpengaruh langsung terhadap reaksi adalah aliran udara dan suhu pendingin, sedangkan yang tidak langsung adalah konsentrasi pendingin.

Dengan bantuan ilmu kimia maka analisa modelnya adalah jika menginginkan jumlah Y_i kecil maka X_1, X_2 harus bernilai kecil dan untuk X_3 harus bernilai besar. Sedangkan jika menginginkan Y_i besar maka X_1 dan X_2

harus bernilai besar dan untuk X_3 harus bernilai kecil. Dalam proses untuk menentukan Y_i kecil atau besar, maka kondisi di atas harus terpenuhi.

Komponen X_1 memiliki pengaruh yang sangat besar dalam proses oksidasi amoniak menjadi asam nitrat. Hal ini karena asam nitrat akan terbentuk jika direaksikan dengan oksigen. Sedangkan oksigen dalam proses ini, didapat dari X_1 yang dialirkan. Akan tetapi jumlah besaran aliran udara tidak berpengaruh terhadap jumlah oksigen yang didapat karena jumlah oksigen dalam aliran udar tetap yaitu sebesar 21%. Jumlah besar kecilnya X_1 memiliki pengaruh yang besar terhadap proses kimia ini. Jika mengiginkan Y_i kecil maka aliran udara X_1 juga harus kecil, karena jika besar maka gas amoniak yang akan di reaksikan dengan oksigen dari aliran udara akan berhamburan terbawa oleh aliran udara. Begitu juga sebalikanya jika mengiginkan Y_i besar maka aliran udara X_1 juga harus besar.

Komponen X_2 dalam proses oksidasi amoniak menjadi asam nitrat juga memiliki pengaruh yang besar pula. Karena merupakan salah satu yang mempengaruhi reaksi secara langsung. Dalam reaksi ini, semakin kecil suhu yang bereaksi maka semakin bagus pula hasil reaksi yang didapatkan. Sehingga jika menginginkan Y_i kecil maka X_2 harus memiliki suhu yang kecil sehingga akan didapatkan sebuah reaksi yang bagus. Begitu juga sebalikanya jika mengiginkan Y_i besar maka X_2 juga harus besar.

Berbeda dengan X_1 dan X_2 yang merupakan faktor yang menentukan pembentukan reaksi, X_3 merupakan faktor pendukung eksternal dari reaksi ini.

Artinya X_3 merupakan komponen yang mendukung proses reaksi kimia antara amoniak dengan oksigen dari luar reaksi. Dimana hal ini dilakukan karena percampuran proses reaksi kimia antara amoniak dengan oksigen menghasilkan suhu panas yang tinggi sehingga perlu dilakukan pendinginan misal salah satunya adalah dengan garam. Sehingga dengan jumlah X_3 maka akan didapatkan sebuah reaksi yang bagus. Jika mengiginkan Y_i kecil maka X_3 harus besar, karena jika kecil maka proses reaksi kimia antara amoniak dan oksigen yang panas tidak dapat didinginkan sehingga akan di dapat sebuah reaksi yang tidak bagus. Begitu juga sebalikanya jika mengiginkan Y_i besar maka X_3 harus besar.

Dari hasil analisis di atas maka jika menginginkan persentase amoniak yang hilang (tidak terikat) besar sehingga asam nitrat yang dihasilkan sedikit maka peneliti harus meningkatkan aliran udara dan suhu air pendingin serta mengurangi jumlah konsentrasi pendinginya. Begitu juga sebaliknya jika menginginkan persentase amoniak yang hilang (tidak terikat) kecil sehingga asam nitrat yang dihasilkan banyak, maka peneliti harus mengurangi aliran udara dan suhu air pendingin serta menambah jumlah konsentrasi pendinginya.

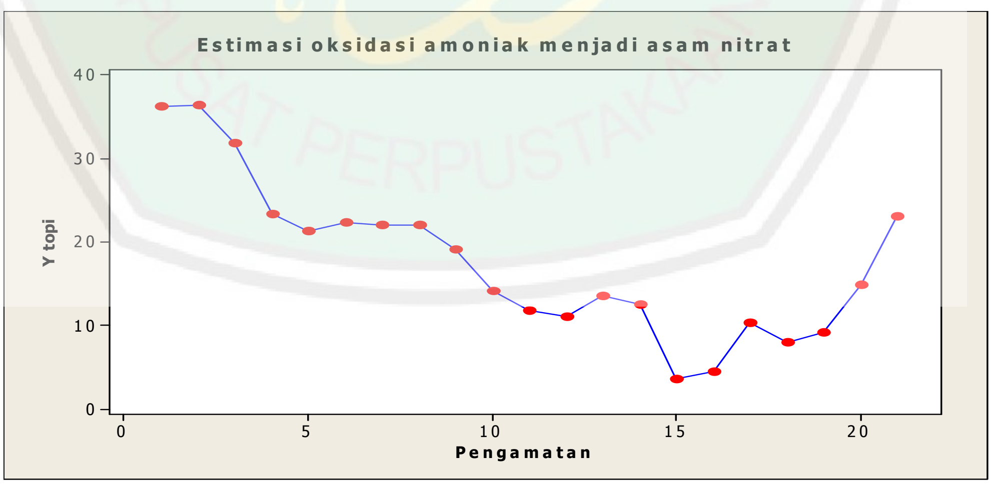
Dari hasil estimasi yang dilakukan pada data oksidasi amoniak menjadi asam nitrat maka di hasilkan data sebagai berikut:

Tabel 3.2. Data hasil estimasi oksidasi amoniak menjadi asam nitrat

No pengamatan (i)	X_1	X_2	X_3	Y	$\hat{Y}$	$\varepsilon_i = \lvert Y_i - \hat{Y}_i \rvert$
1	80	27	89	42	36.2091	5.79093
2	80	27	88	37	36.4521	0.54795
3	75	25	90	37	31.8397	5.16035

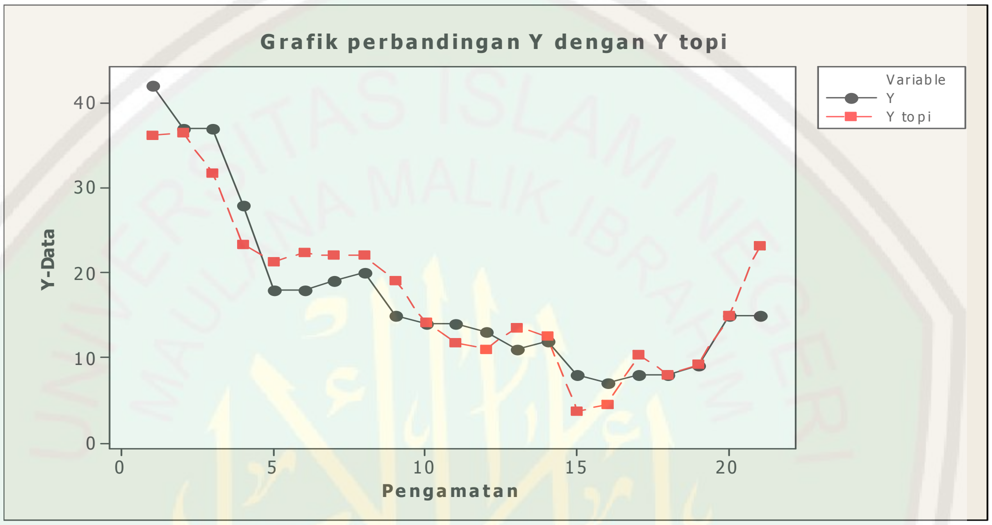
4	62	24	87	28	23.4159	4.58406
5	62	22	87	18	21.2602	3.2602
6	62	23	87	18	22.3849	4.3849
7	62	24	93	19	22.0047	3.0047
8	62	24	93	20	22.0047	2.0047
9	58	23	87	15	19.1206	4.1206
10	58	18	80	14	14.1611	0.1611
11	58	18	89	14	11.7555	2.24449
12	59	17	88	13	10.9962	2.00382
13	58	18	82	11	13.5809	2.5809
14	58	19	93	12	12.4999	0.4999
15	50	18	89	8	3.66	4.34
16	50	18	86	7	4.40592	2.59408
17	50	19	72	8	10.3729	2.3729
18	50	19	79	8	8.03083	0.0308
19	50	20	80	9	9.22741	0.2274
20	56	20	82	15	14.9357	0.06432
21	70	20	91	15	23.1211	8.1211

Dari data yang ada di atas maka dapat dibuat grafik untuk data hasil estimasi dan data galat dari penelitian. Sehingga grafiknya dapat ditunjukkan sebagai berikut:



Gambar 3.2 grafik estimasi oksidasi amoniak menjadi asam nitrat dengan regresi nonlinier resiprokal

Gambar 3.2 di atas merupakan grafik estimasi oksidasi amoniak menjadi asam nitrat yang telah dianalisis menggunakan regresi non linier resiprokal. Dimana grafik di atas merupakan hubungan antara nomor pengamatan terhadap estimasi $(\hat{Y})$. Sedangkan untuk grafik nilai galat ditunjukkan sebagai berikut:



Gambar 3.3 Grafik perbandingan Y dengan Y topi

Gambar 3.3 merupakan gambar perbandingan antara Y dengan $\hat{Y}$ atau di baca dengan Y topi, sehingga dari grafik di atas dapat di ketahui nilai galat dari penelitian yang di lakukan dengan menggunakan persamaan $\varepsilon_i = \left|Y_i - \hat{Y}_i\right|$, maka nilai dari galat pada penelitian oksidasi amoniak menjadi asam nitrat dengan menggunakan regresi resiprokal diketahui sebagaimana gambar tabel (3.2) di atas.

BAB IV
KESIMPULAN

4.1. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan di atas, dapat disimpulkan bahwa:

1. Untuk mendeteksi parameter model regresi resiprokal terlebih dahulu harus menentukan model untuk memudahkan dalam pendeteksian, kemudian dilakukan pendeteksian parameter dengan menggunakan metode *Maksimum Likelihood Estimation* yang menghasilkan suatu pendugaan parameter sebagai berikut:

$$\hat{\beta}_0 = \frac{(\mathrm{ATWZ} - \mathrm{FRWZ} - \mathrm{HUTZ} - \mathrm{JXTW})}{(n\mathrm{TWZ} - \mathrm{FSWZ} - \mathrm{HVTZ} - \mathrm{JYTW})}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{1}{\mathrm{T}}\left(\mathrm{R} - \left(\frac{(\mathrm{ATWZ} - \mathrm{FRWZ} - \mathrm{HUTZ} - \mathrm{JXTW})}{(n\mathrm{TWZ} - \mathrm{FSWZ} - \mathrm{HVTZ} - \mathrm{JYTW})}\right)\mathrm{S}\right)$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{1}{\mathrm{W}}\left(\mathrm{U} - \left(\frac{(\mathrm{ATWZ} - \mathrm{FRWZ} - \mathrm{HUTZ} - \mathrm{JXTW})}{(n\mathrm{TWZ} - \mathrm{FSWZ} - \mathrm{HVTZ} - \mathrm{JYTW})}\right)\mathrm{V}\right)$$

$$\hat{\beta}_3 = \frac{1}{\mathrm{Z}}\left(\mathrm{X} - \left(\frac{(\mathrm{ATWZ} - \mathrm{FRWZ} - \mathrm{HUTZ} - \mathrm{JXTW})}{(n\mathrm{TWZ} - \mathrm{FSWZ} - \mathrm{HVTZ} - \mathrm{JYTW})}\right)\mathrm{Y}\right)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \beta_0 - \beta_1\frac{1}{X_{1i}} - \beta_2\frac{1}{X_{2i}} - \beta_3\frac{1}{X_{3i}}\right)^2$$

Untuk nilai fungsi dari $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$, dan $\hat{\beta}_3$ terdapat pada lampiran.

2. Dari hasil estimasi pada data oksidasi amoniak menjadi asam nitrat maka di hasilkan sebuah model yang di dapat dari regresi nonlinier resiprokal yaitu:

$$Y_i = 72{,}5876 - 2934{,}62105\frac{1}{X_{1i}} - 569{,}12798\frac{1}{X_{2i}} + 1903{,}09088\frac{1}{X_{3i}}$$

4.2. Saran

Pada penelitian ini peneliti menggunakan model regresi nonlinier resiprokal yang merupakan model linier intrinsik yang di cari dengan fungsi. Bagi pembaca yang ingin melakukan penelitian serupa, peneliti menyarankan menggunakan model nonlinier intrinsik yang di jabarkan dengan fungsi.

DAFTAR PUSTAKA

Abdusysyakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN PRESS.

Abtokhi, Ahmad. 2007. *Akankah Al Quran yang Kubaca Menolongku*. Malang: UIN PRESS.

Al-Mahally, Imam Jalalud-din dan As-Suyuthi, Imam Jalalud-din. 1990. *Terjemah Tafsir Jalalain Berikut Asbaabun Nuzul*. Bandung: Sinar Baru.

Ananta, Aris. 1987. *Landasan Ekonometrika*. Jakarta: Gramedia.

Draper, Norman dan Harry Smith. 1992. *Analisis Regresi Terapan*, edisi kedua. Jakarta: PT Gramedia Pustaka Utama.

Dudewich & Mishra. 1995. *Statistik Matematika Modern*. Bandung: ITB.

Gujarat, Damodar N. 2006. *Dasar-dasar ekonometrika*, edisi ketiga. Jakarta: Erlangga

Harini, Sri. 2007. *Metode Statistika*. Jakarta: Prestasi Pustaka.

Hasan, M. Iqbal. 2002. *Pokok-Pokok Materi Statistik 1 (Statistik Deskriptif)*. Jakarta : PT Bumi Aksara.

Rencher, Alvin C. 2002 .*Methods of Multivariate Analysis.* Canada: WILEY & Sons, Interscience.

Shihab, M Quraish. 2003. *Tafsir Al-Mishbah Volume* 14. Jakarta: Lentera Hati.

Sembiring. 1995. *Analisis Regresi*. Bandung : ITB.

Steel, Robert G.D. and Torri, James H. 1989. *Prinsip dan Prosedur Statistika Suatu Pendekatan Biometrik*. Jakarta: Gramedia.

Soelistyo. 2001. *Dasar-Dasar Ekonometrika*. Yogyakarta: BPFE.

Suparman. 1989. *Statistik Matematik*. CV. Jakarta: Rajawali.

Yitnosumarto, Suntoyo. 1990. *Dasar-Dasar Statistika*. Jakarta: C.V Rajawali.

Lampiran

$$\hat{\beta}_0=\frac{(\mathrm{ATWZ}-\mathrm{FRWZ}-\mathrm{HUTZ}-\mathrm{JXTW})}{(n\mathrm{TWZ}-\mathrm{FSWZ}-\mathrm{HVTZ}-\mathrm{JYTW})}$$

$$\Bigg(\Bigg\langle\Bigg\{\Bigg[\sum_{i=1}^{n}Y_i\Bigg]\Bigg[\Bigg(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)\right)^2\Bigg)\Bigg(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)^2\Bigg)-\Bigg(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^2-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)\Bigg)^2\Bigg]$$

$$\Bigg[\Bigg(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)^2\Bigg)\Bigg(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)^2\Bigg)-\Bigg(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\Bigg)^2\Bigg]\Bigg]$$

$$\Bigg[\Bigg(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)^2\Bigg)\Bigg(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)\right)^2\Bigg)-\Bigg(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)\Bigg)^2\Bigg]\Bigg]\Bigg\}$$

$$-\Bigg\{\Bigg[\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{1i}}\Bigg]\Bigg[\Bigg(\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i\frac{1}{X_{1i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^2-\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i\frac{1}{X_{2i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)\Bigg)\Bigg(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)^2\Bigg)-\Bigg(\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i\frac{1}{X_{3i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^2-\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i\frac{1}{X_{2i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\Bigg)$$

$$\Bigg(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^2-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)\Bigg)\Bigg]\Bigg[\Bigg(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)^2\Bigg)\Bigg(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)^2\Bigg)$$

$$-\Bigg(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\Bigg)^2\Bigg]\Bigg[\Bigg(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)^2\Bigg)\Bigg(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)\right)^2\Bigg)$$

$$-\Bigg(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)\Bigg)^2\Bigg]\Bigg\}-\Bigg\{\Bigg[\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{2i}}\Bigg]\Bigg[\Bigg(\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i\frac{1}{X_{2i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2-\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i\frac{1}{X_{3i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\Bigg)\Bigg(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)^2\Bigg)$$

$$-\left(\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i\frac{1}{X_{1i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2-\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i\frac{1}{X_{3i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)\Bigg]\Bigg[\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)\right)^2\right)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)^2\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^2-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)\right)^2\Bigg]\Bigg[\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)^2\right)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)\right)^2\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)\right)^2\Bigg]\Bigg\}-\Bigg\{\Bigg[\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{3i}}\Bigg[\left(\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i\frac{1}{X_{3i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2-\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i\frac{1}{X_{1i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)\right)^2\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i\frac{1}{X_{2i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2-\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i\frac{1}{X_{1i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)\right)\Bigg]$$

$$\Bigg[\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)\right)^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)^2\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^2-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)\right)^2\Bigg]$$

$$\hat{\beta}_0=\frac{\Bigg[\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)^2\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)^2\Bigg]\Bigg\}\Bigg\rangle}{\Bigg\langle\Bigg\{[n]\Bigg[\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)\right)^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)^2\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^2-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)\right)^2\Bigg]\Bigg[\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)^2\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)^2\Bigg]}$$

$$\Bigg[\Bigg(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2-\bigg(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\bigg)^2\Bigg)\Bigg(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2-\bigg(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)\bigg)^2\Bigg)-\Bigg(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)\Bigg)^2\Bigg]\Bigg\}$$

$$-\Bigg\{\bigg[\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{1i}}\bigg]\Bigg[\Bigg(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{1i}}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^2-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{2i}}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)\Bigg)\Bigg(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^2-\bigg(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\bigg)^2\Bigg)-\Bigg(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{3i}}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^2-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{2i}}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\Bigg)$$

$$\Bigg(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^2-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)\Bigg)\Bigg]\Bigg[\Bigg(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2-\bigg(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\bigg)^2\Bigg)\Bigg(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2-\bigg(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\bigg)^2\Bigg)$$

$$-\Bigg(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\Bigg)^2\Bigg[\Bigg(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2-\bigg(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\bigg)^2\Bigg)\Bigg(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2-\bigg(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)\bigg)^2\Bigg)\Bigg]$$

$$-\Bigg(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)\Bigg)^2\Bigg]\Bigg\}-\Bigg\{\bigg[\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{2i}}\bigg]\Bigg[\Bigg(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{2i}}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{3i}}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\Bigg)$$

$$\Bigg(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2-\bigg(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\bigg)^2\Bigg)-\Bigg(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{1i}}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{3i}}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\Bigg)\Bigg(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\Bigg)\Bigg]$$

$$\Bigg[\Bigg(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^2-\bigg(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)\bigg)^2\Bigg)\Bigg(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^2-\bigg(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\bigg)^2\Bigg)-\Bigg(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^2-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)\Bigg)^2\Bigg]$$

$$\Bigg[\Bigg(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2-\bigg(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\bigg)^2\Bigg)\Bigg(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2-\bigg(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)\bigg)^2\Bigg)-\Bigg(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)\Bigg)^2\Bigg]\Bigg\}$$

$$-\Bigg\{\Bigg[\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{3i}}\Bigg]\Bigg[\Bigg(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{3i}}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{1i}}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\Bigg)\Bigg(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)\right)^2\Bigg)-\Bigg(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{2i}}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{1i}}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)\Bigg)$$

$$\Bigg(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)\Bigg)\Bigg]\Bigg[\Bigg(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)\right)^2\Bigg)\Bigg(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)^2\Bigg)$$

$$-\Bigg(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^2-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)\Bigg)^2\Bigg[\Bigg(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)^2\Bigg)\Bigg(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)^2\Bigg)\Bigg]$$

$$-\Bigg(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\Bigg)^2\Bigg]\Bigg]\Bigg\}\Bigg\rangle\Bigg)$$

Menentukan $\hat{\beta}_1$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\mathrm{R}-\hat{\beta}_0\mathrm{S}}{\mathrm{T}}$$

$$= \frac{1}{\mathrm{T}}\left(\mathrm{R}-\hat{\beta}_0\mathrm{S}\right)$$

$$=\left[\frac{1}{\Bigg(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)\right)^2\Bigg)\Bigg(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)^2\Bigg)-\Bigg(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^2-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)\Bigg)^2}\right]$$

$$\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i\frac{1}{X_{1i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^2-\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i\frac{1}{X_{2i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)^2\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i\frac{1}{X_{3i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^2-\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i\frac{1}{X_{2i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)\right.$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^2-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)\right)-\hat{\beta}_0\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{1i}}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^2-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{2i}}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)^2\right)$$

$$\left.-\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{3i}}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^2-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{2i}}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^2-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)\right)\right]$$

Dimana nilai dari $\hat{\beta}_0$ adalah persamaan yang ada di atas

Menentukan $\hat{\beta}_2$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\mathrm{U}-\hat{\beta}_0\mathrm{V}}{\mathrm{W}}$$

$$= \frac{1}{\mathrm{W}}\left(\mathrm{U}-\hat{\beta}_0\,\mathrm{V}\right)$$

$$=\left[\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)^2\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)^2}\right]$$

$$
\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i\frac{1}{X_{2i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2-\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i\frac{1}{X_{3i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)^2\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i\frac{1}{X_{1i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2-\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i\frac{1}{X_{3i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)\right.
$$

$$
\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)-\hat{\beta}_0\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{2i}}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{3i}}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)^2\right)
$$

$$
\left.-\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{1i}}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{3i}}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)\right]
$$

Dimana nilai dari $\hat{\beta}_0$ adalah persamaan yang ada di atas

Menentukan $\hat{\beta}_3$

$$
\hat{\beta}_3 = \frac{\mathrm{X}-\hat{\beta}_0\mathrm{Y}}{\mathrm{Z}}
$$

$$
= \frac{1}{\mathrm{Z}}\left(\mathrm{X}-\hat{\beta}_0\mathrm{Y}\right)
$$

$$
= \left[\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{3i}}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\right)^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)\right)^2\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)\right)^2}\right]
$$

$$
\begin{aligned}
&\Bigg[\Bigg(\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i\frac{1}{X_{3i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2-\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i\frac{1}{X_{1i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\Bigg)\Bigg(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)\right)^2\Bigg)-\Bigg(\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i\frac{1}{X_{2i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2-\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i\frac{1}{X_{1i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)\Bigg)\\
&\Bigg(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)\Bigg)-\hat{\beta}_0\Bigg(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{3i}}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{1i}}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\Bigg)\Bigg(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)\right)^2\Bigg)\\
&-\Bigg(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{2i}}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_{1i}}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)\Bigg)\Bigg(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{2i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\right)^2-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{3i}}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_{1i}}\frac{1}{X_{2i}}\right)\Bigg)\Bigg]
\end{aligned}
$$