PENYELESAIAN NUMERIK PERSAMAAN TELEGRAF MENGGUNAKAN METODE BEDA HINGGA SKEMA EKSPLISIT

SKRIPSI

OLEH
JUMROTUN NIKMAH
NIM. 10610031

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2015

PENYELESAIAN NUMERIK PERSAMAAN TELEGRAF MENGGUNAKAN METODE BEDA HINGGA SKEMA EKSPLISIT

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh
JUMROTUN NIKMAH
NIM. 10610031

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2015

PENYELESAIAN NUMERIK PERSAMAAN TELEGRAF MENGGUNAKAN METODE BEDA HINGGA SKEMA EKSPLISIT

SKRIPSI

Oleh
Jumrotun Nikmah
NIM. 10610031

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 08 Juni 2015

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd	Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19770521 200501 2 004	NIP. 19751006 200312 1 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PENYELESAIAN NUMERIK PERSAMAAN TELEGRAF MENGGUNAKAN METODE BEDA HINGGA SKEMA EKSPLISIT

SKRIPSI

Oleh
JUMROTUN NIKMAH
NIM. 10610031

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal 25 Juni 2015

Penguji Utama	: Mohammad Jamhuri, M.Si	....
Ketua Penguji	: Evawati Alisah, M.Pd	....
Sekretaris Penguji	: Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd	....
Anggota Penguji	: Dr. Abdussakir, M.Pd	....

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Jumrotun Nikmah
NIM	: 10610031
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	: Penyelesaian Numerik Persamaan Telegraf

Menggunakan Metode Beda Hingga Skema Eksplisit

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 08 April 2015
Yang membuat pernyataan,

Jumrotun Nikmah
NIM. 10610031

MOTO

عَنْ أَنَسِ ابْنِ مَالِكٍ قاَلَ: قَالَ رَسُوْ لُ اللّهِ صَلَىّ اللُّهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ مَنْ خَرَجَ فِي طَلَبِ ٱلعِلْمِ كَانَ فِيْ سَبِيْلِ اللّهِ حَتَّى يَرْجِعُ (رواه الترمذي)

"Dari Anas bin Malik berkata, telah bersabda Rasulullah Saw: "barang siapa keluar (pergi) untuk mencari ilmu maka ia berada di jalan Allah sehingga kembali"

(HR. Tirmidzi)

"Berangkat dengan penuh keyakinan, berjalan dengan penuh keistiqomahan, dan ikhlas dalam menghadapi cobaan" (M. Zainudin Abdul Madjid)

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Bapak Watum, Ibu Saroh, kakak-kakak tercinta Kartika, Syaifuddin, Suprotun Khasanah, dan adik tersayang Syawaliyyah Nurussalamah. Beliau-beliaulah yang selalu memberikan dukungan dan motivasi serta tak pernah lelah untuk selalu mendo'akan penulis.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi wabarakatuh

Segala puji bagi Allah Swt. atas rahmat, taufik serta hidayah-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis banyak mendapat bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Untuk itu ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya penulis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, sekaligus selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan dan ilmu kepada penulis.
4. Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd, selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, saran, motivasi dan kesabarannya, serta berbagi pengalaman yang berharga kepada penulis.
5. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen, terima kasih atas segenap ilmu dan bimbingannya.

6. Ayah dan Ibu, yang tak pernah lelah memberikan doa, kasih sayang, semangat, serta motivasi kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
7. Alm. Abah KH. Ahmad Masduqi Mahfudz dan Almh. Umi Nyai Hj. Chasinnah Mahfudz selaku pengasuh pondok pesantren Nurul Huda, serta segenap keluarga ndalem yang senantiasa memberikan do'a, motivasi, dan nasehat kepada penulis.
8. Kakak-kakak penulis, Kartika A.Md, Syaifuddin S.Si, M.Pd, Suprotun Khanasah, adik Syawaliyyah Nurussalamah serta Ahmad Bisri Musthofa selaku pendamping penulis, yang selalu memberikan do'a dan dukungan kepada penulis.
9. Seluruh teman-teman di Jurusan Matematika angkatan 2010, terutama Rianti Mandasari, Kholifatul Khoiriyah, Lutfiatuz Zahra', Binti Tsamrotul Fitria, Syifa'ul Amamah, Masruroh, M. Sukron, dan M. Ghozali yang telah banyak membantu, terima kasih atas kenangan-kenangan indah yang dirajut bersama dalam menggapai impian.
10. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu-persatu, yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini baik moril maupun materiil.

Akhirnya penulis berharap semoga skripsi ini bisa memberikan manfaat kepada para pembaca dan khususnya bagi penulis secara pribadi.

Wassalamu'alaikum Wr. Wb

Malang, Juni 2015

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Nikmah, Jumrotun. 2015. **Penyelesain Numerik Persamaan Telegraf Menggunakan Metode Beda Hingga Skema Eksplisit**. Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd (II) Dr. Abdussakir, M.Pd.

Kata kunci: Persamaan Telegraf, Metode Beda Hingga, Skema Eksplisit, Syarat Kestabilan, Syarat Konsistensi.

Persamaan telegraf adalah persamaan diferensial parsial yang menjelaskan masalah gelombang sinyal-sinyal listrik di transmisi kabel. Metode beda hingga merupakan sebuah metode numerik yang digunakan untuk mendekati solusi analitik. Metode yang digunakan dalam menyelesaikan persamaan telegraf pada penelitian ini adalah metode beda hingga skema eksplisit. Langkah dalam menyelesaikan persamaan telegraf dengan metode beda hingga eksplisit antara lain yaitu melakukan diskritisasi pada persamaan telegraf, kemudian mendiskritisasi syarat awal, kemudian analisis kestabilan skema eksplisist dan konsistensi untuk menunjukan bahwa metode yang digunakan tersebut mendekati solusi analitik. Dari analisis kestabilan menunjukan bahwa metode beda hingga skema eksplisit pada persamaan telegraf stabil dengan syarat. Dan konsistensi dari metode tersebut, *error* pemotongan yang dihasilkan adalah pada orde dua.

ABSTRACT

Nikmah, Jumrotun. 2015. **Numerical Solution of Telegraph Equation Using Explicit Finite Difference Method.** Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, State Islamic University Maulana Malik Ibrahim of Malang. Advisors: (I) Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd (II) Dr. Abdussakir, M.Pd.

Keywords : Telegraph Equation, Difference Methods, Explicit Scheme, Stability, Consistency.

Telegraph equation is a partial differential equation that describes the wave of electrical signals in the cable transmission. Finite Difference Method is a numerical method which is used to approximate analytic solutions. Explicit Finite Difference Schemes Method is used to solve the telegraph equations. There are some steps in solving telegraph equations using Explicit Finite Difference Schemes Method such as using discretization on telegraph equations, secondly decide the second rules, then decide the rules of stability and consistency to shows that used method is approaching the analytic solution. From the stability analysis obtained that finite difference method implementiny explicit scheme of the telegraph equation is stable with certain condition. The consistency of the method, the resulting *truncation error* is on the two order.

ملخص

النعمة ، زمرة. 2015. **الحل العددي معادلة التلغراف باستخدام طريقة الفروق المحدودة مخطط واضح**. بحث جامعي .شعبة الرياضيات كلية العلوم والتكنولوجيا. الجامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج. مشرف: (1) أري كوسوما أستوتي، الماجستير (11) الدوكتور عبد الشاكر، الماجستير.

الكلمة الرئيسية: طريقة الفروق المحدودة، مخطط واضح، معادلة التلغراف، شروط الاستقرار، شروط الإتساق.

معادلة التلغراف هي المعادلة التفاضلية الجزئية التي تصف مشكلة الموجة من الإشارات الكهربائية في نقل الكابل.كانت طريقة الفروق المحدودة طريقة عددية لتقريب الحل التحليلي. الطريقة المستخدمة في هذا البحث هي طريقة الفروق المحدودة مخطط واضح. خطوات لحل معادلة التلغراف بطريقة الفروق المحدودة وهن : القيام بتفريد على معادلة التلغراف، قيام بتفريد الشرط الأول، تحليل إستقرار خطط واضحة والثبات لإظهار ان الطريقة المستخدمة يقترب من الحل التحليلي. من تحليل الإستقرار يدلّ على أن طريقة الفروق المحدودة مخطط واضح في معادلة التلغراف مستقرّة بالشروط، والثبات من تلك الطريقة، وكان خطأ القطع المنتج في الدرجة الثانية.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Persamaan telegraf merupakan salah satu dari persamaan gelombang. Persamaan telegraf pada umumnya digunakan dalam studi propagasi gelombang sinyal-sinyal listrik di transmisi kabel *line* dan juga dalam fenomena gelombang (Javidi dan Nyamoradi, 2013).

Solusi persamaan telegraf telah diselesaikan oleh Dosti dan Nazemi (2011) menggunakan metode *B-spline quasi-interpolation*. Mereka menggunakan metode *B-spline quasi-interpolation* untuk mendekati turunan parsial dari persamaan telegraf. Langkah pertama yang dilakukan adalah dengan menentukan fungsi basis cubic B-spline menggunakan interpolasi, kemudian langkah selanjutnya menentukan skema numerik dari persamaan telegraf dengan menggunakan beda pusat terhadap waktu. Penelitian lain oleh Javidi dan Nyamoradi (2013), menjelaskan solusi numerik persamaan telegraf satu dimensi hiperbolik dengan menggunakan *Laplace transform homotopy pertubation method*. Langkah yang dilakukan adalah dengan transformasi Laplace sehingga menghasilkan solusi dari persamaan telegraf, kemudian langkah selanjutnya dengan menggunakan homotopy perturbasi yang menghasilkan solusi numerik. Hasil dari penelitian mereka diperoleh *error* yang relatif kecil dan mendekati solusi analitiknya.

Al-Quran Surah az-Zumar ayat 18, menyebutkan

ٱلَّذِينَ يَسْتَمِعُونَ ٱلْقَوْلَ فَيَتَّبِعُونَ أَحْسَنَهُۥٓ ۚ أُو۟لَٰٓئِكَ ٱلَّذِينَ هَدَىٰهُمُ ٱللَّهُ ۖ وَأُو۟لَٰٓئِكَ هُمْ أُو۟لُوا۟ ٱلْأَلْبَٰبِ ﴿١٨﴾

"Yang mendengarkan perkataan lalu mengikuti apa yang paling baik di antaranya. Mereka itulah orang-orang yang telah diberi Allah petunjuk dan mereka itulah orang-orang yang mempunyai akal"(QS.az-Zumar : 18)

Ayat tersebut menjelaskan tentang mereka yang mengikuti sesuatu yang mengandung kemaslahatan bagi mereka. Berbagai macam pengetahuan wajib diketahui, baik pengetahuan al-Quran maupun pengetahuan yang lain. Akan tetapi tidak semua pengetahuan itu baik untuk diikuti, maka sebagaimana ayat tersebut segala sesuatu harus mengikuti apa yang paling baik di antaranya. Seperti halnya dalam memilih metode numerik yang digunakan dalam menyelesaikan masalah persamaan diferensial parsial. Dalam penyelesaian numerik terdapat beberapa metode yang dapat membantu menyelesaikan permasalahan pada persamaan diferensial biasa maupun parsial, seperti halnya metode beda hingga skema eksplisit.

Dalam penelitian ini persamaan telegraf diselesaikan menggunakan metode beda hingga. Metode beda hingga adalah suatu metode yang didasarkan pada ekspansi deret Taylor (Strauss, 2007). Salah satu pendekatan metode beda hingga adalah menggunakan skema eksplisit. Pada skema eksplisit nilai setiap besaran waktu yang sebelumnya selalu diketahui, sehingga nilai $n + 1$ dapat dihitung (Triatmodjo, 2002). Dalam penelitian ini penulis menfokuskan pada skema eksplisit *Central Time Central Space* (CTCS). Skema CTCS merupakan pendekatan numerik dengan beda pusat terhadap waktu dan beda pusat terhadap ruang. Langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah mendiskritisasi persamaan kontinu telegraf dan syarat awalnya. Selanjutnya memodifikasi bentuk diskrit persamaan telegraf dengan mensubstitusi bentuk syarat awalnya pada persamaan telegraf. Kedalaman analisis numerik dilanjutkan sampai pada syarat kestabilan dan syarat konsistensi dari persamaan telegraf.

Kestabilan mengakibatkan solusi numerik dengan beda hingga itu tidak sensitif terhadap data inisial (Flaherty, Tanpa tahun). Selanjutnya Zauderer (2006) menyebutkan bahwa analisis kestabilan dari skema yang digunakan dapat dicari menggunakan stabilitas *von Neuman* dengan mensubstitusikan $u_j^n = \rho^n e^{iaj}$ ke dalam persamaan beda yang digunakan. Syarat perlu dan cukup stabilitas *von Neuman* yaitu $|\rho| \leq 1$.

Analisis konsistensi mengakibatkan persamaan beda hingga yang terjadi merupakan aproksimasi terbaik bagi bentuk persamaan diferensial parsialnya (Flaherty, Tanpa tahun). Analisis konsistensi dapat dicari dengan menggunakan ekspansi deret Taylor. Dan kriteria konsistensi akan terpenuhi jika Δx mendekati nol dan Δt mendekati nol, maka nilai limit dari *error* pemotongan mendekati nol. Jika syarat kestabilan dan konsistensi terpenuhi maka solusi numerik tersebut akan mendekati solusi analitik.

Sering kali kasus matematika memiliki bentuk persamaan yang sulit untuk diselesaikan secara analitik. Sehingga metode aproksimasi skema eksplisit CTCS ini diharapkan dapat memberikan solusi atas permasalahan tersebut.

Berdasarkan latar belakang tersebut, dalam penelitian ini tema yang diangkat penulis adalah "Penyelesaian Numerik Persamaan Telegraf Menggunakan Metode Beda Hingga Skema Eksplisit".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana penyelesaian numerik persamaan telegraf menggunakan metode beda hingga skema eksplisit CTCS?
2. Bagaimana analisis kestabilan dari skema CTCS yang digunakan?
3. Bagaimana analisis konsistensi dari skema CTCS yang digunakan?
4. Bagaimana simulasi dari metode yang digunakan?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, tujuan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mengetahui penyelesaian persamaan telegraf menggunakan metode beda hingga skema eksplisit CTCS.
2. Mengetahui analisis kestabilan dari skema CTCS yang digunakan.
3. Mengetahui analisis konsistensi dari skema CTCS yang digunakan.
4. Mengetahui simulasi dari metode yang digunakan.

1.4 Batasan Masalah

Dalam pembahasan ini penulis membatasi masalah penelitian ini adalah sebagai berikut, yaitu merujuk pada Dosti dan Nazemi (2011:04-24) bahwa persamaan yang digunakan adalah sebagai berikut:

$$u_{tt} + 2\alpha u_t + \beta^2 u = u_{xx} + f(x,t), \quad (x,t) \in [0,1] \times [0,T]$$

dengan syarat awal yang diberikan yaitu $u(x,0) = f_0(x)$, $u_t(x,0) = f_1(x)$ dan kondisi batas yang diberikan $u(0,t) = g_0(x)$, $u(1,t) = g_1(x)$, $t \geq 0$

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat penelitian ini adalah memperoleh solusi numerik dari persamaan telegraf dan pengetahuan mengenai prosedur penyelesaian persamaan telegraf dengan menggunakan metode beda hingga skema eksplisit.

1.6 Metode penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah dengan menggunakan kajian teoritis, dengan langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Melakukan diskritisasi pada persamaan telegraf dengan menggunakan metode beda hingga skema eksplisit CTCS (*Central Time Central Space*).
2. Melakukan diskritisasi syarat awal dengan metode CTCS.
3. Mensubstitusikan bentuk diskrit syarat awal pada bentuk diskrit persamaan telegraf.
4. Analisis kestabilan skema CTCS.
5. Analisis konsistensi skema CTCS.
6. Melakukan simulasi dari metode yang digunakan.

1.7 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan penelitian ini adalah sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Memuat latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Memuat identifikasi persamaan telegraf, penurunan persamaan telegraf, metode beda hingga, skema eksplisit CTCS, analisis kestabilan, analisis konsistensi, dan kajian agama.

Bab III Pembahasan

Memuat bahan mengenai diskritisasi persamaan, mendiskritisasi syarat awal, analisis kestabilan, analisis konsistensi, melakukan simulasi dari metode yang digunakan, dan kajian agama.

Bab IV Penutup

Memuat kesimpulan dan saran.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Identifikasi Persamaan Telegraf

Spiegel (1983) menyatakan bahwa persamaan telegraf merupakan salah satu dari persamaan gelombang hiperbolik. Persamaan gelombang dapat diterapkan pada getaran transversal yang kecil dari sebuah tali fleksibel yang tegang, yang mula-mula diletakkan pada sumbu x dan dibuat bergerak. Variabel $y(x,t)$ adalah pergeseran sebarang titik x dari tali pada waktu t. Konstanta $c^2 = \frac{T}{\rho}$, dimana T adalah tegangan (yang konstan) dalam tali dan ρ adalah massa (yang konstan) persatuan tali.

Pada penelitian ini penulis menggunakan persamaan telegraf hiperbolik dimensi satu, yang merujuk pada Dosti dan Nazemi (2011:04-24) yang dinyatakan berikut

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial t} + \beta^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \; (x,t) \in [0,1] \times [0,T] \tag{2.1}$$

Persamaan telegraf (2.1) memiliki dua variabel bebas yaitu x dan t, serta satu variabel terikat yaitu $u(x,t)$. Dimana $u(x,t)$ merupakan amplitudo gelombang, sedangkan α dan β diketahui koefisien konstan, serta $f_0(x)$, $f_1(x)$ dan turunannya adalah fungsi kontinu. Kedua tegangan listrik dan arus dalam konduktor ganda memenuhi persamaan telegraf, dimana x adalah jarak dan t adalah waktu. Untuk $\alpha > 0, \beta = 0$ pada persamaan (2.1) merupakan persamaan gelombang teredam sedangkan untuk $\alpha > \beta > 0$ merupakan persamaan telegraf.

2.1.1 Penurunan Persamaan Telegraf

Penurunan persamaan telegraf didekati dengan menggunakan deret Taylor. Adapun penurunannya adalah sebagai berikut

Asumsi yang mendasari model persamaan telegraf adalah $\gamma(x,t)$ sebagai peluang partikel mendesak dari kiri dan $\lambda(x,t)$ sebagai peluang partikel mendesak ke kanan. Serta asumsi dari bentuk persamaan telegraf adalah

$$\gamma(x,t+\Gamma) = p\gamma(x-\delta,t) + q\lambda(x-\delta,t) \tag{2.2}$$

$$\lambda(x,t+\Gamma) = p\lambda(x+\delta,t) + q\gamma(x+\delta,t) \tag{2.3}$$

Dengan menggunakan ekspansi deret Taylor, maka deret Taylor untuk persamaan (2.2) sebagai berikut

$$\gamma(x,t+\Gamma) = \gamma(x,t) + \Gamma\,\gamma_t(x,t) + \mathcal{O}(t^3)$$

$$\gamma(x-\delta,t) = \gamma(x,t) - \delta\gamma_x(x,t) + \frac{1}{2}\,\delta^2\,\gamma_{xx}(x,t) + \mathcal{O}(\delta^3)$$

$$\lambda(x-\delta,t) = \lambda(x,t) - \delta\,\lambda_x(x,t) + \frac{1}{2}\,\delta^2\,\lambda_{xx}(x,t) + \mathcal{O}(\delta^3)$$

Sedangkan untuk persamaan (2.3) sebagai berikut

$$\lambda(x,t+\Gamma) = \lambda(x,t) + \Gamma\,\lambda_t(x,t) + \mathcal{O}(t^3)$$

$$\lambda(x+\delta,t) = \lambda(x,t) + \delta\,\lambda_x(x,t) + \frac{1}{2}\,\delta^2\,\lambda_{xx}(x,t) + \mathcal{O}(\delta^3)$$

$$\gamma(x+\delta,t) = \gamma(x,t) + \delta\gamma_x(x,t) + \frac{1}{2}\,\delta^2\,\gamma_{xx}(x,t) + o(\delta^3)$$

Substitusikan deret Taylor γ ke persamaan (2.2) dan (2.3), sehingga diperoleh

$$\gamma(x,t) + \Gamma\,\gamma_t(x,t) = p(\gamma(x,t) - \delta\gamma_x(x,t)\,) + \frac{1}{2}\,\delta^2\,\gamma_{xx}(x,t)$$

$$+q\left(\lambda(x,t) - \delta\,\lambda_x(x,t) + \frac{1}{2}\,\delta^2\,\lambda_{xx}(x,t)\right)$$

$$\Gamma\, \gamma_t(x,t) = (-\gamma(x,t) + p\gamma(x,t) + q\gamma(x,t)\ ) - \delta(p\gamma_x(x,t) + q\lambda_x(x,t))$$
$$+\frac{1}{2}\ \delta^2\ (p\gamma_{xx}(x,t) + q\lambda_{xx}(x,t))$$

$$\Gamma\, \gamma_t(x,t) = (-\gamma(x,t) + p\gamma(x,t) + q\gamma(x,t)\ ) - \delta\big(p\gamma_x(x,t) + q\lambda_x(x,t)\big)$$
$$+\, error$$

$$\gamma_t(x,t) = -\frac{\gamma}{\Gamma}(x,t) + \frac{p}{\Gamma}\gamma(x,t) + \frac{q}{\Gamma}\lambda(x,t) - \frac{\delta}{\Gamma}\big(p\gamma_x(x,t) + q\lambda_x(x,t)\big)$$
$$= \frac{(-\gamma+p)}{\Gamma}(x,t) + \frac{q}{\Gamma}\lambda(x,t) - \frac{\delta}{\Gamma}\big(p\gamma_x(x,t) + q\lambda_x(x,t)\big)$$

$$\gamma_t(x,t) = \frac{1}{\Gamma}(p-1)\gamma(x,t) + \frac{q}{\Gamma}\lambda(x,t) - \frac{\delta p}{\Gamma}\gamma_x(x,t),\ \ \forall\, p+q=1$$

Karena $\forall\, p+q=1$, sehingga

$$\gamma_t(x,t) = \frac{1}{\Gamma}(p-(p+q))\gamma(x,t) + \frac{q}{\Gamma}\lambda(x,t) - \frac{\delta p}{\Gamma}\gamma_x(x,t)$$

$$\gamma_t(x,t) = \frac{q}{\Gamma}\gamma(x,t) + \frac{q}{\Gamma}\lambda(x,t) - \frac{\delta p}{\Gamma}\gamma_x(x,t) \tag{2.4}$$

Kemudian diasumsikan $\lim \frac{q}{\Gamma} = \ \beta$, $\forall\, \beta$ konstanta tak nol dan $\lim \frac{q}{\Gamma} = a$, $\forall\, p \to 0$

Sehingga persamaan (2.4) menjadi

$$\gamma_t(x,t) = -a\gamma_x(x,t) - \beta\gamma(x,t) + \beta\lambda(x,t) \tag{2.5}$$

Persamaaan (2.5) dapat diubah dalam bentuk

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t}(x,t) = -a\frac{\partial\gamma}{\partial x}(x,t) - \ \beta\gamma(x,t) + \beta\lambda(x,t) \tag{2.6}$$

Kemudian substitusikan deret Taylor λ ke persamaan (2.2) dan (2.3), sehingga diperoleh

$$(x,t) + \Gamma\lambda_t(x,t) = p\left(\lambda(x,t) +\ \delta\, \lambda_x(x,t)\ +\frac{1}{2}\ \delta^2\ \lambda_{xx}(x,t)\right)$$
$$+q\left(\gamma(x,t) + \delta\gamma_x(x,t)\ +\frac{1}{2}\ \delta^2\ \gamma_{xx}(x,t)\right)$$

$$\Gamma\lambda_t(x,t) = \big(-\lambda(x,t) + p\lambda(x,t) + q\gamma(x,t)\big) + \delta(p(\lambda_x(x,t) + q\gamma_x(x,t)\ )$$

$$+\frac{1}{2}\ \delta^2(p\lambda_{xx}(x,t) + q\gamma_{xx}(x,t)$$

$$\Gamma\lambda_t(x,t) = \big(-\lambda(x,t) + p\lambda(x,t) + q\gamma(x,t)\big) + \delta(p(\lambda_x(x,t) + q\gamma_x(x,t)\ )$$

$$+\ error$$

$$\lambda_t(x,t) = \frac{-\lambda}{\Gamma}(x,t) + \frac{p}{\Gamma}\lambda(x,t) + \frac{q}{\Gamma}\gamma(x,t) + \frac{\delta}{\Gamma}(p\big(\lambda_x(x,t) + q\gamma_x(x,t)\big)$$

$$= \frac{(-\lambda + p)}{\Gamma}(x,t) + \frac{q}{\Gamma}\gamma(x,t) + \frac{\delta}{\Gamma}(p\big(\lambda_x(x,t) + q\gamma_x(x,t)\big)$$

$$\lambda_t(x,t) = \tfrac{1}{\Gamma}(p-1)\lambda(x,t) + \tfrac{q}{\Gamma}\gamma(x,t) + \tfrac{\delta p}{\Gamma}\lambda_x(x,t) + \tfrac{\delta q}{\Gamma}\gamma_x(x,t),\quad \forall p + q = 1$$

Karena $\forall\ p + q = 1$, sehingga

$$\lambda_t(x,t) = \frac{1}{\Gamma}(p - (p+q))(x,t) + \frac{q}{\Gamma}\gamma(x,t) + \frac{\delta p}{\Gamma}\lambda_x(x,t)$$

Sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut

$$\lambda_t(x,t) = -\frac{q}{\Gamma}\lambda(x,t) + \frac{q}{\Gamma}\gamma(x,t) + \frac{\delta p}{\Gamma}\lambda_x(x,t) \tag{2.7}$$

Kemudian diasumsikan $\lim \frac{q}{\Gamma} = \beta$, $\frac{q}{\Gamma} \to \beta$ $\lim \frac{\delta}{\Gamma} = a$ dan $p \to 0$ maka $\lim_{n\to\infty} p = 0$

Sehingga persamaan (2.7) menjadi

$$\lambda_t(x,t) = a\lambda_x(x,t) - \beta\lambda(x,t) + \beta\gamma(x,t) \tag{2.8}$$

Persamaan (2.8) dapat diubah ke dalam bentuk

$$\frac{\partial\lambda}{\partial t}(x,t) = a\frac{\partial\lambda}{\partial x}(x,t) +\ \beta\gamma(x,t) - \beta\lambda(x,t) \tag{2.9}$$

Selanjutnya persamaan (2.6) dan (2.9) masing-masing dijumlahkan dan dikurangkan. Untuk hasil penjumlah dari persamaan (2.6) dan (2.9) diperoleh

$$\frac{\partial(\gamma+\lambda)}{\partial t}(x,t) - a\frac{\partial(\gamma-\lambda)}{\partial x}(x,t) = 0 \tag{2.10}$$

Sedangkan untuk hasil pengurangan dari persamaan (2.6) dan (2.9) diperoleh

$$\frac{\partial(\gamma-\lambda)}{\partial t}(x,t)+a\frac{\partial(\gamma-\lambda)}{\partial x}(x,t)=-2\beta(\gamma-\lambda)(x,t) \tag{2.11}$$

Kemudian persamaan (2.10) dan (2.11) diturunkan, untuk persamaan (2.10) diturunkan terhadap t, sehingga diperoleh

$$\frac{\partial^2(\gamma+\lambda)}{\partial t^2}(x,t)-a\frac{\partial^2(\gamma-\lambda)}{\partial x\partial t}(x,t)=0 \tag{2.12}$$

Persamaan (2.11) diturunkan terhadap x dan mengalikan dengan α, sehingga diperoleh

$$\alpha\frac{\partial^2(\gamma-\lambda)}{\partial x\partial t}(x,t)+a^2\frac{\partial^2(\gamma-\lambda)}{\partial x^2}(x,t)=-2\beta\alpha\frac{\partial(\gamma-\lambda)}{\partial x}(x,t) \tag{2.13}$$

Persamaan (2.13) dimanipulasi ke dalam bentuk

$$-\alpha\frac{\partial^2(\gamma-\lambda)}{\partial x\partial t}(x,t)+a^2\frac{\partial^2(\gamma-\lambda)}{\partial x^2}(x,t)=-2\beta\alpha\frac{\partial(\gamma-\lambda)}{\partial x}(x,t)$$

Setelah diperoleh persamaan (2.12) dan (2.13), selanjutnya persamaan (2.12) dan (2.13) dijumlahkan diperoleh

$$\frac{\partial^2(\gamma+\lambda)}{\partial t^2}(x,t)-2a\frac{\partial^2(\gamma-\lambda)}{\partial x\partial t}(x,t)+a^2\frac{\partial^2(\gamma-\lambda)}{\partial x^2}(x,t)$$
$$+2\beta\alpha\frac{\partial(\gamma-\lambda)}{\partial x}(x,t)=0$$

Selanjutnya diasumsikan

$$u(x,t)=\gamma(x,t)+\lambda(x,t) \text{ dan } \lim_{n\to\infty} a=0$$

Sehingga akan diperoleh

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)-2a\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}(x,t)+a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)+2\beta\alpha\frac{\partial(\gamma-\lambda)}{\partial x}(x,t)=0$$

Jika $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}(x,t)$ bernilai $-1\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)$, a^2 bernilai -1, dan $\gamma\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)$ bernilai $\frac{1}{2}\beta u$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - 2a\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}(x,t) + a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + 2\beta\alpha\frac{\partial(\gamma - \lambda)}{\partial x}(x,t) = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - 2a\left(-1\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right) + (-1)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + 2\beta\alpha\left(\frac{1}{2}\beta u\right) = 0$$

Sehingga diperoleh persamaan telegraf sebagai berikut

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) + 2a\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \beta^2(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + f(x,t) \tag{2.14}$$

2.2 Metode Beda Hingga

Strauss (2007:199) menyatakan bahwa metode beda hingga merupakan sebuah metode yang sangat populer dalam penyelesaian masalah-masalah persamaan diferensial biasa maupun persamaan diferensial parsial, yang didasarkan pada ekspansi deret Taylor. Berikut adalah ekspansi deret Taylor di sekitar (x,t) yaitu:

$$f(x+\Delta x,t) = f(x,t) + f_x(x,t)\Delta x + \frac{1}{2}f_{xx}(x,t)\Delta x^2$$
$$+\tfrac{1}{6}u_{xxx}(x,t)\Delta x^3 + \cdots \tag{2.15}$$

$$f(x-\Delta x,t) = f(x,t) - f_x(x,t)\Delta x - \frac{1}{2}f_{xx}(x,t)\Delta x^2$$
$$-\tfrac{1}{6}f_{xxx}(x,t)\Delta x^3 + \cdots \tag{2.16}$$

$$f(x,t+\Delta t) = f(x,t) + f_t(x,t)\Delta t + \frac{1}{2}f_{tt}(x,t)\Delta t^2$$
$$+\tfrac{1}{6}f_{ttt}(x,t)\Delta t^3 + \cdots \tag{2.17}$$

$$f(x,t-\Delta t) = f(x,t) - f_t(x,t)\Delta t - \frac{1}{2}f_{tt}(x,t)\Delta t^2$$
$$-\tfrac{1}{6}f_{ttt}(x,t)\Delta t^3 + \cdots \tag{2.18}$$

Sehingga turunan hampiran pertama suatu fungsi $f(x)$ untuk beda pusat terhadap t dapat diperoleh sebagai berikut

$$f(x,t+\Delta t)-f(x,t-\Delta t)=2f_t(x,t)\Delta t-\frac{1}{6}f_{ttt}(x,t)\Delta t^3 \tag{2.19}$$

Maka

$$f_t(x,t)=\frac{f(x+\Delta x,t)-f(x-\Delta x,t)}{2\Delta t} \tag{2.20}$$

Sehingga persamaan (2.20) dapat ditulis

$$\frac{\partial f}{\partial t}\approx\frac{f_j^{n+1}-f_j^{n-1}}{2\Delta t} \tag{2.21}$$

Adapun untuk memperkirakan turunan kedua $f(x)$ beda pusat terhadap t adalah dengan mengulangi prosedur untuk memperoleh turunan pertama, sehingga diperoleh

$$f(x,t+\Delta t)-f(x,t-\Delta t)=2f_t(x,t)+2\frac{1}{2}f_{tt}(x,t)\Delta t^2 \tag{2.22}$$

Maka

$$f_{tt}(x,t)=\frac{f(x+\Delta t,t)-2f(x,t)+(x-\Delta t,t)}{\Delta t^2} \tag{2.23}$$

Sehingga persamaan (2.23) dapat ditulis

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\approx\frac{f_j^{n+1}-2f_j^{n}+f_j^{n-1}}{\Delta t^2} \tag{2.24}$$

Sedangkan untuk turunan kedua $f(x)$ pada x beda pusat adalah dengan mengulangi prosedur untuk memperoleh turunan kedua terhadap t, sehingga diperoleh

$$f(x+\Delta x,t)-f(x-\Delta x,t)=2f_x(x,t)+2\frac{1}{2}f_{xx}(x,t)\Delta x^2 \tag{2.25}$$

$$f_{xx}(x,t) = \frac{f(x,t+\Delta t) - 2f(x,t) + (x,t-\Delta t)}{\Delta x^2} \tag{2.26}$$

Sehingga persamaan (2.26) dapat ditulis

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \approx \frac{f_{j+1}^n - 2f_j^n + f_{j-1}^n}{\Delta x^2} \tag{2.27}$$

2.2.1 Skema Eksplisit CTCS

Triatmodjo (2002:206) menyatakan bahwa metode beda hingga skema eksplisit banyak digunakan dalam penyelesaian persamaan diferensial parsial. Skema ini sangat sederhana dan mudah untuk memahaminya. Penggunaan skema tersebut untuk menurunkan persamaan diferensial parsial menjadi persamaan beda hingga juga mudah. Skema CTCS merupakan pendekatan numerik dengan beda pusat terhadap waktu dan beda pusat terhadap ruang.

Contoh penerapan skema eksplisit CTCS pada persamaan *forced* KdV yang telah dibahas oleh Amamah (2014) adalah

$$u_t + \gamma u_x - \frac{3}{2}uu_x - \frac{1}{6}u_{xxx} = \frac{1}{2}F_x \tag{2.28}$$

Dengan skema CTCS maka persamaan beda untuk persamaan *forced* KdV di antaranya sebagai berikut

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} \tag{2.29}$$

Sedangkan untuk turunan pertama terhadap t

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} \tag{2.30}$$

Sedangankan untuk turunan uu_x

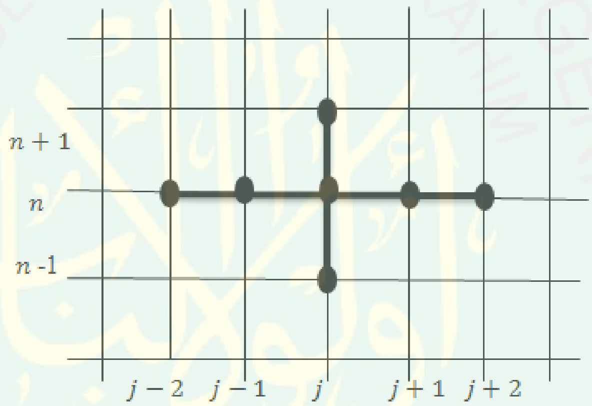
$$u\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{1}{3}\left(u_{j+1}^{n} + u_{j}^{n} + u_{j-1}^{n}\right)\frac{u_{j+1}^{n} - u_{j-1}^{n}}{2\Delta x} \tag{2.31}$$

dan turunan ketiga terhadap x

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{j+2}^{n} - 2u_{j+1}^{n} + 2u_{j-1}^{n} - u_{j-2}^{n}}{2\Delta x^{3}} \tag{2.32}$$

Sehingga

$$u_{j}^{n+1} = u_{j}^{n-1} - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\gamma - \frac{u_{j+1}^{n} + u_{j}^{n} + u_{j-1}^{n}}{2}\right)\left(u_{j+1}^{n} - u_{j-1}^{n}\right) + \frac{\Delta t}{6(\Delta x)^{3}}\left(u_{j+2}^{n} - 2u_{j+1}^{n} + 2u_{j-1}^{n} - u_{j-2}^{n}\right) + \Delta t F_{x} \tag{2.33}$$



Gambar 2.1 Skema Eksplisit untuk Persamaan (2.33)

Dalam skema eksplisit, nilai pada suatu titik dihitung secara langsung dari nilai di beberapa titik di sekitarnya pada waktu sebelumnya yang sudah diketahui nilainya atau nilai setiap besaran waktu yang lalu sudah diketahui, sehingga nilai $n+1$ dapat dihitung. Namun skema ini mempunyai kelemahan, yaitu langkah waktu Δt dibatasi berdasarkan bilangan *Courant* yaitu $|Cr| = \left|u\frac{\Delta t}{\Delta x}\right| \leq 1$. Apabila $|Cr| > 1$ maka hitungan menjadi tidak stabil. Penggunaan langkah waktu Δt yang kecil tersebut menyebabkan prosedur dan waktu hitungan menjadi sangat panjang dan lama (Triatmodjo, 2002:206).

2.3 Syarat Kestabilan

Zauderer (2006:793) menyatakan bahwa suatu permasalahan persamaan diferensial parsial dapat menjadi stabil dan tidak stabil. Suatu konsep kestabilan dan ketidakstabilan dapat diterapkan dalam skema beda hingga. Ketidakstabilan skema beda hingga menghasilkan kesalahan dalam aproksimasi numerik terhadap solusi nilai eksak dari masalah yang diberikan, sehingga solusi numerik kurang mendekati nilai eksak.

Salah satu metode untuk menganalisis kestabilan skema adalah stabilitas *von Neumann* atau juga dikenal dengan stabilitas Fourier, dengan menerapkan stabilitas *von Neumann* terhadap skema beda hinggga, maka dapat dicari kestabilan dari persamaan beda dengan mensubstitusikan $u_j^n = \rho^n e^{iaj}$ ke dalam persamaan tersebut, yang mana superskrip i menunjukkan posisi, n menunjukkan waktu, j merupakan vektor dan untuk skema semua a dalam interval $[0,2\pi]$. Syarat perlu dan cukup stabilitas *von Neumann* adalah $|\rho| \leq 1$.

Solusi dari stabilitas *von Neumann* dengan didasarkan pada dekomposisi dari kesalahan deret Fourier. Untuk menunjukkan prosedur deret Fourier diberikan interval $0 \leq x \leq l$, kemudian dipartisi sebanyak N, yang menentukan $x_n = \frac{nl}{N}, n = 0,1, \dots, N$. Kenaikan x didefinisikan sebagai $h = \frac{l}{N}$, kenaikan t didefinisikan sebagai k sehingga didapatkan $t_m = mk$. Maka $u_{n,m}$ sesuai dengan $u(x_n, t_m)$. Berlaku juga $x_n \pm h = x_{n\pm1}$ dan $t_m \pm k = t_{m\pm1}$.

Pada grid nilai x, didefinisikan deret Fourier $u(x_n, t_m)$ sebagai berikut

$$c_s(m) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} u(x_n, t_m)\ e^{\left(-\frac{2i\pi s x_n}{l}\right)}, s = 0,1, \dots, N-1 \qquad (2.34)$$

dengan $c_s(m)$ adalah koefisien Fourier. Invers dari deret Fourier diberikan

$$u(x_n, t_m) = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{n=0}^{N-1} c_s(m)\ e^{\left(-\frac{2i\pi s x_n}{l}\right)}, n = 0,1, \dots, N-1 \qquad (2.35)$$

Fungsi $u(x_n, t_m)$ yang didapatkan dari koefisien Fourier $c_s(m)$. Perhatikan bahwa $u(x_n, t_m) = u(x_0, t_m)$, sehingga $u(x_n, t_m)$ adalah periodik. Deret Fourier dari $u(x_n \pm h, t_m)$ dan $u(x_n, t_m \pm k)$ diberikan sebagai $c_s(m)\ e^{\left(\pm\frac{2i\pi s x_n}{l}\right)}$ dan $c_s(m+1)$, dengan hal serupa untuk setiap kenaikan x dan t. Sebagai hasil, jika dipertimbangkan persamaan beda hingga

$$u(x_n, t_m \pm k) = au(x_n \pm h, t_m) + bu(x_n, t_m) + cu(x_n - h, t_m) \quad (2.36)$$

deret Fourier yang menghasilkan hubungan rekursi

$$c_s(m+1) = c_s(m)\left[ae^{\left(\frac{2i\pi s x_n}{l}\right)} + b + ce^{\left(-\frac{2i\pi s x_n}{l}\right)}\right] \qquad (2.37)$$

Solusi dari hubungan rekursi adalah

$$c_s(m+1) = c_s(0)\left[ae^{\left(\frac{2i\pi s x_n}{l}\right)} + b + ce^{\left(-\frac{2i\pi s x_n}{l}\right)}\right]^m \qquad (2.38)$$

dengan $c_s(0)$ adalah kondisi awal dari deret Fourier untuk masalah tersebut. Solusi dari persamaan beda adalah

$$u(x_n, t_m) = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{n=0}^{N-1} c_s(0)\left[ae^{\left(\frac{2i\pi s x_n}{l}\right)} + b + ce^{\left(-\frac{2i\pi s x_n}{l}\right)}\right]^m e^{\left(\frac{2i\pi s x_n}{l}\right)}, n = 0,1, \dots, N-1 \qquad (2.39)$$

untuk syarat kestabilan $\left[ae^{\left(\frac{2i\pi s x_n}{l}\right)} + b + ce^{\left(-\frac{2i\pi s x_n}{l}\right)}\right]^m$ pada persamaan (2.39) harus terbatas dan bernilai mutlak pada $m \to \infty$ untuk semua s yang relevan. Sebagai hasil solusi $u(x_n, t_m)$ tidak dapat bertumbuh $t_m \to \infty$. Ini berarti bahwa

$$\left[ae^{\left(\frac{2i\pi s x_n}{l}\right)} + b + ce^{\left(-\frac{2i\pi s x_n}{l}\right)}\right] \leq 1 \qquad (2.40)$$

untuk semua s yang relevan, dan ini adalah kondisi kestabilan *Von Neumann*. Sebagai jumlah subdivisi $N \to \infty$, kenaikan $h = \frac{l}{N}$ mendekati nol, $\frac{2\pi s h}{l} = \frac{2\pi s}{N}$

berada pada interval $[0,2\pi]$. Sehingga kondisi kestabilan *Von Neumann* dapat diberikan sebagai $\beta = \frac{2\pi sh}{l}$,

$$|\rho| \equiv \left|ae^{i\beta} + b + ce^{-i\beta}\right| \leq 1, 0 \leq \beta \leq 2\pi \qquad (2.41)$$

Telah ditunjukkan $u(x_n, t_m)$ dinyatakan sebagai jumlah konstan $\rho^m e^{i\beta n}$ yang disebut sebagai deret Fourier $\rho^m e^{i\beta n} \approx \rho^n e^{iaj} = u_j^n$. Untuk lebih jelasnya akan diperlihatkan contoh penerapan kestabilan pada persamaan *forced* KdV $u_t + \gamma u_x - \frac{3}{2} u u_x - \frac{1}{6} u_{xxx} = \frac{1}{2} F_x$. Bentuk diskritisasi menggunakan skema eksplisit dari persamaan *forced* KdV adalah

$$u_j^{n+1} = u_j^{n-1} - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\gamma - \frac{u_{j+1}^n + u_j^n + u_{j-1}^n}{2}\right)\left(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n\right) + \frac{\Delta t}{6(\Delta x)^3}\left(u_{j+2}^n - 2u_{j+1}^n + 2u_{j-1}^n - u_{j-2}^n\right) + \Delta t F_x.$$

Kemudian substitusikan $u_j^n = \rho^n e^{iaj}$ dalam bentuk diskrit persamaan *forced* KdV dan kemudian dibagi dengan $\rho^n e^{iaj}$ dan diperoleh $\rho = \rho^{-1} - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\gamma - \frac{e^{ia} + 1 + e^{-ia}}{2}\right)\left(e^{ia} - e^{-ia}\right) + \frac{\Delta t}{6(\Delta x)^3}\left(e^{2ia} - 2e^{ia} + 2e^{-ia} - e^{-2ia}\right)$.

Kemudian substitusikan $e^{\pm ia} = \cos a \pm i \sin a$ sehingga menjadi $\rho^2 + \left[\left[\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\gamma - \frac{2\cos\alpha + 1}{2}\right) + \frac{\Delta t}{6(\Delta x)^3}(2\cos\alpha - 2)\right](2\, i \sin\alpha)\right]\rho - 1 = 0.$

Misalkan $\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\gamma - \frac{2\cos\alpha + 1}{2}\right) + \frac{\Delta t}{6(\Delta x)^3}(2\cos\alpha - 2) = S$, maka akar-akarnya $\rho_1 = -iS\sin\alpha + \sqrt{1 - S^2 sin^2\,\alpha}$ dan $\rho_2 = -iS\sin\alpha + \sqrt{1 - S^2 sin^2\,\alpha}$. Karena pada akar-akar tersebut S masih mengandung cos α, sehingga dalam hal ini dipilih $\cos\alpha = -1$, $\cos\alpha = 0$, dan $\cos\alpha = 1$ yang menghasilkan S yang berbeda beda. Dari hasil tersebut S yang dipilih adalah $S = \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\gamma + \frac{1}{2}\right) + \frac{2\Delta t}{3(\Delta x)^3}$, karena menghasilkan $S \leq 1$

Jadi syarat kestabilan untuk persamaan *forced* KdV skema eksplisit adalah $S = \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\gamma + \frac{1}{2}\right) + \frac{2\Delta t}{3(\Delta x)^3} \leq 1$ (Amamah, 2014:22-26).

2.4 Syarat Konsistensi

Zauderer (2006:793-795) menyatakan bahwa suatu persamaan beda dikatakan konsisten dengan persamaan diferensial yang dihampiri jika selisih antara persamaan beda dengan persamaan diferensial menuju nilai nol ketika lebar grid yang digunakan juga menuju nilai nol. Selisih antara persamaan diferensial parsial yang dihampiri dengan persamaan bedanya disebut *truncation term.* Jika nilai-nilai dari *truncation term* semakin menuju nol ketika Δx, Δt menuju nol maka dikatakan persamaan beda yang dibuat konsisten dengan persamaan yang dihampiri. Adapun ekspansi deret Taylor dari $u_j^{n\pm1}$ dan $u_{j\pm1}^{n}$ sebagai berikut

$$u_j^{n\pm1} = u_j^n \pm \Delta t\, u_t|_j^n + \frac{1}{2}\Delta t^2 u_{tt}|_j^n \pm \frac{1}{6}\Delta t^3 u_{ttt}|_j^n + \cdots \quad (2.42)$$

$$u_{j\pm1}^{n} = u_j^n \pm \Delta x\, u_x|_j^n + \frac{1}{2}\Delta x^2 u_{xx}|_j^n \pm \frac{1}{6}\Delta x^3 u_{xxx}|_j^n + \cdots \quad (2.43)$$

Menurut Zauderer (2006:742), “Solusi numerik pasti konvergen ke solusi analitiknya, jika konsistensi dari persamaan beda dan kestabilan dari skema yang diberikan terpenuhi”. Kriteria konsisten merupakan kondisi ideal dimana solusi metode beda hingga sesuai dengan solusi eksak pada persamaan diferensial parsial. Konsistensi persamaan beda dengan sendirinya akan terpenuhi jika Δx mendekati nol dan Δt mendekati nol.

Sebagai ilustrasi penerapan konsistensi, misalkan diberikan persamaan $u_t + \gamma u_x - \frac{3}{2}uu_x - \frac{1}{6}u_{xxx} = \frac{1}{2}F_x$. Skema eksplisit dari persamaan tersebut adalah

$$u_j^{n+1} = u_j^{n-1} - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\gamma - \frac{u_{j+1}^n + u_j^n + u_{j-1}^n}{2}\right)\left(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n\right) + \frac{\Delta t}{6(\Delta x)^3}\left(u_{j+2}^n - 2u_{j+1}^n + 2u_{j-1}^n - u_{j-2}^n\right) + \Delta t F_x.$$

Perhatikan ekspansi deret Taylor u_j^{n+1} dan u_{j-1}^n masing-masing di sekitar u_j^n berikut

$$u_j^{n\pm1} = u_j^n \pm \Delta t\, u_t|_j^n + \frac{1}{2}\Delta t^2 u_{tt}|_j^n \pm \frac{1}{6}\Delta t^3 u_{ttt}|_j^n + \cdots \tag{2.44}$$

$$u_{j\pm1}^n = u_j^n \pm \Delta x\, u_x|_j^n + \frac{1}{2}\Delta x^2 u_{xx}|_j^n \pm \frac{1}{6}\Delta x^3 u_{xxx}|_j^n + \cdots \tag{2.45}$$

$$u_{j\pm2}^n = u_j^n \pm 2\Delta x\, u_x|_j^n + 2\Delta x^2 u_{xx}|_j^n \pm \frac{4}{3}\Delta x^3 u_{xxx}|_j^n + \cdots \tag{2.46}$$

Substitusikan (2.44), (2.45) dan (2.46) ke dalam bentuk diskrit persamaan *forced* KdV dan didapatkan

$$\left(u_t + \gamma\, u_x - \frac{3}{2}uu_x - \frac{1}{6}u_{xxx}\right)\Big|_j^n + \frac{1}{6}\Delta t^2 u_{ttt}|_j^n + \left(\frac{1}{6}\gamma u_{xxx} - \frac{1}{4}uu_{xxx} - \frac{1}{2}u_x u_{xxx} - \frac{1}{24}u_{xxxx}\right)\Delta x^2|_j^n + \cdots.$$

Suku pertama persamaan di atas adalah persamaan *forced* KdV. Suku kedua dan seterusnya adalah suku tambahan yang didapatkan saat melakukan diskritisasi dengan metode beda hingga yang disebut *truncation error*. *Truncation error* yang didapatkan adalah $\lim_{\Delta x,\Delta t\to 0}\frac{1}{6}\Delta t^2 u_{ttt}|_j^n + \left(\frac{1}{6}\gamma u_{xxx} - \frac{1}{4}uu_{xxx} - \frac{1}{2}u_x u_{xxx} - \frac{1}{24}u_{xxxx}\right)\Delta x^2|_j^n = 0$. Perhatikan bahwa Δt mendekati 0 dan Δx mendekati 0, maka *trucation error* mendekati nol. Jadi skema eksplisit konsisten terhadap persamaan *forced* KdV (Amamah, 2014:27-31).

2.5 Kajian Agama

Metode numerik merupakan salah satu metode yang digunakan dalam penyelesaian masalah pada persamaan diferensial. Metode numerik digunakan jika permasalahan yang tidak mungkin diselesaikan secara analitik, dengan kata lain disebut sebagai aproksimasi. Sesulit apapun permasalahan dari suatu persamaan diferensial, maka selalu ada kemudahan dalam permasalahan tersebut. Sebagaimana pada persamaan telegraf, yang perlu dilakukan adanya aproksimasi dalam mendapatkan selesaian atau solusi.

Dalam al-Quran surah al-Maidah ayat 35 menyebutkan

ٱلَّذِينَ ءَامَنُواْ ٱتَّقُواْ ٱللَّهَ وَٱبۡتَغُوٓاْ إِلَيۡهِ ٱلۡوَسِيلَةَ وَجَٰهِدُواْ فِي سَبِيلِهِۦ لَعَلَّكُمۡ تُفۡلِحُونَ ٣٥

"Hai orang-orang yang beriman, bertakwalah kepada Allah dan carilah jalan yang mendekatkan diri kepada-Nya dan berjihadlah pada-Nya, supaya kamu mendapat keberuntungan."

Ayat tersebut menjelaskan bahwa mendekatkan diri kepada Allah merupakan seruan Allah kepada hamba-Nya yang beriman supaya selalu mendapatkan keberuntungan. Berkaitan dengan ayat diatas, setiap hamba-Nya yang selalu mendekatkan diri kepada Allah, maka ia termasuk orang selalu dalam keberuntungan. Sebagaimana dalam menyelesaikan persamaan telegraf, yang diberikan jalan untuk dapat menyelesaikannya yaitu dengan menggunakan metode numerik atau aproksimasi. Jalan tersebut tak lepas dari petunjuk-Nya yang diberikan kepada penulis. Petunjuk yang Allah berikan bukanlah didapat dengan begitu mudah, akan tetapi harus ada usaha yang dilakukan dalam memperoleh petunjuk tersebut. Sebagaimana dalam al-Quran yang menjelaskan mengenai petunjuk yaitu surah al-Ihsan ayat 29 yang menyebutkan

إِنَّ هَٰذِهِۦ تَذۡكِرَةٞۖ فَمَن شَآءَ ٱتَّخَذَ إِلَىٰ رَبِّهِۦ سَبِيلٗا ٢٩

"Sesungguhnya (ayat-ayat) ini adalah suatu peringatan, maka barangsiapa menghendaki (kebaikan bagi dirinya) niscaya dia mengambil jalan kepada Tuhannya."

Dalam ayat tersebut surah al-Ihsan ayat 29, *“bahwa barangsiapa yang menghendaki kebaikan bagi dirinya”.* Hal ini merupakan interpretasi dari jalan terbaik yang dilakukan dalam menyelesaikan persamaan diferensial yaitu dengan metode numerik atau aproksimasi. Maka selanjutnya kalimat, *“niscaya dia mengambil jalan kepada Tuhannya”,* interpretasinya ialah kemudahan yang diberikan Allah sehingga manusia yang berusaha untuk menghendaki kebaikan maka akan selalu berada di jalanNya.

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Analisis Skema Eksplisit CTCS pada Persamaan Telegraf

Pada subbab ini, akan dijelaskan bagaimana penyelesaian numerik persamaan telegraf menggunakan metode beda hingga skema eksplisit *Central Time Central Space* (CTCS). Adapun langkah-langkah dalam menyelesaikan persamaan telegraf adalah diskritisasi persamaan telegraf dan syarat awal dengan skema beda pusat untuk turunan terhadap waktu t dan beda pusat untuk turunan terhadap ruang x.

3.1.1 Diskritisasi Persamaan

Persamaan telegraf yang digunakan dalam penelitian ini dinyatakan pada persamaan (2.1) yang berbentuk

$$u_{tt} + 2\alpha u_t + \beta^2 u = u_{xx} + f(x,t), \qquad (x,t) \in [0,1] \times [0,T]$$

dengan kondisi awal

$$u(x,0) = f_0(x)$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = f_1(x)$$

dengan $f_0(x)$ dan $f_1(x)$ fungsi sembarang.

Kondisi batas

$$u(0,t) = g_0(t), u(1,t) = g_1(t)$$

Penyelesaian numerik persamaan tersebut dengan menggunakan metode beda hingga skema eksplisit. Adapun persamaan beda CTCS yang digunakan berdasarkan persamaan (2.21), (2.24), dan (2.27) yang telah diuraikan pada bab sebelumnya. Sehingga dapat diperoleh diskritisasi persamaan sebagai berikut

$$\frac{u_j^{n+1}-2u_j^n+u_j^{n-1}}{\Delta t^2}+2\alpha\frac{u_j^{n+1}-u_j^{n-1}}{2\Delta t}+\beta^2u_j^n=\frac{u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n}{\Delta x^2}+f_j^n \qquad (3.1)$$

$$(1+\alpha\Delta t)u_j^{n+1}=\left(2-\beta^2\Delta t^2-\frac{2\Delta t^2}{\Delta x^2}\right)u_j^n-(1-\alpha\Delta t)u_j^{n-1}+\left(\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}\right)u_{j+1}^n+\left(\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}\right)u_{j-1}^n+\Delta t^2f_j^n$$

$$(1+\alpha\Delta t)u_j^{n+1}=\left(\frac{2\Delta x^2-\beta^2\Delta t^2\Delta x^2-2\Delta t^2}{\Delta x^2}\right)u_j^n+(-1+\alpha\Delta t)u_j^{n-1}+\left(\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}\right)u_{j+1}^n$$
$$+\left(\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}\right)u_{j-1}^n+\Delta t^2f_j^n$$

$$u_j^{n+1}=\frac{1}{(1+\alpha\Delta t)}\left(\left(\frac{2\Delta x^2-\beta^2\Delta t^2\Delta x^2-2\Delta t^2}{\Delta x^2}\right)u_j^n-(1-\alpha\Delta t)u_j^{n-1}+\left(\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}\right)u_{j+1}^n\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}\right)u_{j-1}^n\right)+\Delta t^2f_j^n$$

Sehingga diperoleh persamaan beda

$$u_j^{n+1}=\left(\frac{2\Delta x^2-\beta^2\Delta t^2\Delta x^2-2\Delta t^2}{\Delta x^2+\alpha\Delta x^2\Delta t}\right)u_j^n+\left(\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2+\alpha\Delta x^2\Delta t}\right)u_{j+1}^n+\left(\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2+\alpha\Delta x^2\Delta t}\right)u_{j-1}^n$$
$$-\frac{(1-\alpha\Delta t)}{(1+\alpha\Delta t)}u_j^{n-1}+\frac{\Delta t^2}{(1+\alpha\Delta t)}f_j^n \qquad (3.2)$$

3.1.2 Diskritisasi Syarat Awal

Langkah selanjutnya adalah mendiskritisasi syarat awal, adapun proses diskritisasi syarat awal adalah sebagai berikut

$$u(x,0)=f_0(x)$$

Sehingga

$$u_j^n=f_0(x)\text{ , untuk } n,j=1,\ \ldots m$$

Perhatikan bahwa pada persamaan beda (3.2) memerlukan dua baris syarat awal, sedangkan pada persamaan (2.1) terdapat syarat awal $u(x,0)=$

$f_0(x)$, yang berarti u_j^2 , untuk $j = 1, \ldots m$ Untuk memperoleh u_j^2 dapat diperoleh dari beda pusat pada $u_t|_j^2$, yaitu

$$u_t = \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t}$$

Dengan $n = 1$ sehingga diperoleh

$$(f_1)_j = \frac{u_j^2 - u_j^0}{2\Delta t}$$

$$2\Delta t(f_1)_j = u_j^2 - u_j^0$$

$$-2\Delta t(f_1)_j + u_j^2 = u_j^0 \tag{3.3}$$

sehingga persamaan beda (3.2) untuk $n = 1$ menghasilkan

$$u_j^2 = \left(\frac{2\Delta x^2 - \beta^2\Delta t^2\Delta x^2 - 2\Delta t^2}{\Delta x^2 + \alpha\Delta x^2\Delta t}\right)u_j^1 + \left(\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2 + \alpha\Delta x^2\Delta t}\right)u_{j+1}^1 + \left(\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2 + \alpha\Delta x^2\Delta t}\right)u_{j-1}^1 - \frac{(1 - \alpha\Delta t)}{(1 + \alpha\Delta t)}u_j^0 + \frac{\Delta t^2}{(1 + \alpha\Delta t)}f_j^n$$

Karena

$$-2\Delta t(f_1)_j + u_j^2 = u_j^0$$

maka dapat diperoleh

$$u_j^2 = \left(\frac{2\Delta x^2 - \beta^2\Delta t^2\Delta x^2 - 2\Delta t^2}{\Delta x^2 + \alpha\Delta x^2\Delta t}\right)u_j^1 + \left(\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2 + \alpha\Delta x^2\Delta t}\right)u_{j+1}^1 + \left(\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2 + \alpha\Delta x^2\Delta t}\right)u_{j-1}^1 - \frac{(1 - \alpha\Delta t)}{(1 + \alpha\Delta t)}\left(-2\Delta t(f_1)_j + u_j^2\right) + \frac{\Delta t^2}{(1 + \alpha\Delta t)}f_j^n$$

$$u_j^2 = \left(\frac{(1 + \alpha\Delta t)}{(1 + \alpha\Delta t) + (1 - \alpha\Delta t)}\right)\left(\left(\frac{2\Delta x^2 - \beta^2\Delta t^2\Delta x^2 - 2\Delta t^2}{\Delta x^2 + \alpha\Delta x^2\Delta t}\right)u_j^1 + \left(\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2 + \alpha\Delta x^2\Delta t}\right)u_{j+1}^1 + \left(\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2 + \alpha\Delta x^2\Delta t}\right)u_{j-1}^1 + \frac{(1 - \alpha\Delta t)}{(1 + \alpha\Delta t)}\left(2\Delta t(f_1)_j\right) + \frac{\Delta t^2}{(1 + \alpha\Delta t)}f_j^n\right)$$

$$u_j^2 = \left(\frac{(1 + \alpha\Delta t)}{2}\right)\left(\left(\frac{2\Delta x^2 - \beta^2\Delta t^2\Delta x^2 - 2\Delta t^2}{\Delta x^2 + \alpha\Delta x^2\Delta t}\right)u_j^1 + \left(\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2 + \alpha\Delta x^2\Delta t}\right)u_{j+1}^1 + \left(\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2 + \alpha\Delta x^2\Delta t}\right)u_{j-1}^1 + \frac{(1 - \alpha\Delta t)}{(1 + \alpha\Delta t)}(2\Delta t(f_1)_j) + \frac{\Delta t^2}{(1 + \alpha\Delta t)}f_j^n\right) \tag{3.4}$$

Karena kondisi awal $u_j^1 = f_{0_j}$, maka substitusikan kondisi $u_j^1 = f_0(x)$ pada persamaan beda (3.4), sehingga diperoleh

$$u_j^2 = \left(\frac{(1+\alpha\Delta t)}{2}\right)\left(\left(\frac{2\Delta x^2 - \beta^2\Delta t^2\Delta x^2 - 2\Delta t^2}{\Delta x^2 + \alpha\Delta x^2\Delta t}\right) f_{0_j}^{\,1} + \left(\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2 + \alpha\Delta x^2\Delta t}\right) f_{0_{j+1}}^{\,1} + \left(\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2 + \alpha\Delta x^2\Delta t}\right) f_{0_{j-1}}^{\,1} + \frac{(1-\alpha\Delta t)}{(1+\alpha\Delta t)}\left(2\Delta t (f_1)_j\right) + \frac{\Delta t^2}{(1+\alpha\Delta t)} f_j^n\right) \tag{3.5}$$

3.2 Analisis Stabilitas

Setelah mendiskritisasikan persamaan sehingga diperoleh persamaan beda (3.2) langkah selanjutnya adalah analisis stabilitas. Analisis stabilitas dilakukan untuk mengetahui apakah metode yang digunakan untuk mendekati persamaan telegraf tersebut stabil atau tidak. Dalam penelitian ini melakukan uji kestabilan dengan menggunakan analisis stabilitas *von Neumann*, yang dapat dilakukan dengan mensubstitusikan $u_j^n = \rho^n e^{iaj}$, $\forall\, i = \sqrt{-1}$ pada persamaan beda (3.2), sehingga diperoleh

$$u_j^{n+1} = \left(\frac{2\Delta x^2 - \beta^2\Delta t^2\Delta x^2 - 2\Delta t^2}{\Delta x^2 + \alpha\Delta x^2\Delta t}\right) u_j^n + \left(\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2 + \alpha\Delta x^2\Delta t}\right) u_{j+1}^n + \left(\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2 + \alpha\Delta x^2\Delta t}\right) u_{j-1}^n - \frac{(1-\alpha\Delta t)}{(1+\alpha\Delta t)} u_j^{n-1} + f_j^n$$

Dengan mensubstitusikan $u_j^n = \rho^n e^{iaj}$ maka diperoleh

$$\rho^{n+1} e^{iaj} = \left(\frac{2\Delta x^2 - \beta^2\Delta t^2\Delta x^2 - 2\Delta t^2}{\Delta x^2 + \alpha\Delta x^2\Delta t}\right)\rho^n e^{iaj} + \left(\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2 + \alpha\Delta x^2\Delta t}\right)\rho^n e^{iaj+1} + \left(\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2 + \alpha\Delta x^2\Delta t}\right)\rho^n e^{iaj-1} - \left(\frac{(1-\alpha\Delta t)}{(1+\alpha\Delta t)}\right)\rho^n e^{iaj-1} \tag{3.6}$$

Kemudian disederhanakan dengan membagi persamaan (3.6) dengan $\rho^n e^{iaj}$ sehingga diperoleh

$$\rho = \left(\frac{2\Delta x^2 - \beta^2 \Delta t^2 \Delta x^2 - 2\Delta t^2}{\Delta x^2 + \alpha \Delta x^2 \Delta t}\right) + \left(\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2 + \alpha \Delta x^2 \Delta t}\right)\left(e^{ia} + e^{-ia}\right) - \left(\frac{(1-\alpha\Delta t)}{(1+\alpha\Delta t)}\right)\rho^{-1} \quad (3.7)$$

Karena $e^{\pm ia} = \cos a \pm i \sin a$, maka persamaan (3.7) dapat ditulis

$$\rho = \left(\frac{2\Delta x^2 - \beta^2 \Delta t^2 \Delta x^2 - 2\Delta t^2}{\Delta x^2 + \alpha \Delta x^2 \Delta t}\right) + \left(\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2 + \alpha \Delta x^2 \Delta t}\right)\left((\cos a + i \sin a) + (\cos a - i \sin a)\right)$$
$$- \left(\frac{(1-\alpha\Delta t)}{(1+\alpha\Delta t)}\right)\rho^{-1}$$

atau

$$\rho = \left(\frac{2\Delta x^2 - \beta^2 \Delta t^2 \Delta x^2 - 2\Delta t^2}{\Delta x^2 + \alpha \Delta x^2 \Delta t}\right) + \left(\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2 + \alpha \Delta x^2 \Delta t}\right)(2\cos a) - \left(\frac{(1-\alpha\Delta t)}{(1+\alpha\Delta t)}\right)\rho^{-1}$$

Sehingga diperoleh

$$\rho = \left(\frac{2\Delta x^2 - \beta^2 \Delta t^2 \Delta x^2 - 2\Delta t^2}{\Delta x^2 + \alpha \Delta x^2 \Delta t}\right) + \left(\frac{\Delta t^2 (2\cos a)}{\Delta x^2 + \alpha \Delta x^2 \Delta t}\right) - \left(\frac{(1-\alpha\Delta t)}{(1+\alpha\Delta t)}\right)\rho^{-1}$$

$$\rho^2 = \left(\frac{2\Delta x^2 - \beta^2 \Delta t^2 \Delta x^2 - 2\Delta t^2}{\Delta x^2 + \alpha \Delta x^2 \Delta t}\right)\rho + \left(\frac{\Delta t^2 (2\cos a)}{\Delta x^2 + \alpha \Delta x^2 \Delta t}\right)\rho - \left(\frac{(1-\alpha\Delta t)}{(1+\alpha\Delta t)}\right)(1)$$

$$\rho^2 - \left(\frac{2\Delta x^2 - \beta^2 \Delta t^2 \Delta x^2 - 2\Delta t^2 + \Delta t^2 (2\cos a)}{\Delta x^2 + \alpha \Delta x^2 \Delta t}\right)\rho + \left(\frac{(1-\alpha\Delta t)}{(1+\alpha\Delta t)}\right) = 0 \quad (3.8)$$

Sehingga akar-akar dari persamaan (3.6) adalah

$$\rho_{1,2} = \frac{\left(\left(\frac{2\Delta x^2 - \beta^2 \Delta t^2 \Delta x^2 - 2\Delta t^2 + \Delta t^2 (2\cos a)}{\Delta x^2 + \alpha \Delta x^2 \Delta t}\right)\right) \pm \sqrt{\left(\frac{2\Delta x^2 - \beta^2 \Delta t^2 \Delta x^2 - 2\Delta t^2 + \Delta t^2 (2\cos a)}{\Delta x^2 + \alpha \Delta x^2 \Delta t}\right)^2 - 4\left(\frac{(1-\alpha\Delta t)}{(1+\alpha\Delta t)}\right)}}{2} \quad (3.9)$$

Karena persamaan (3.9) mengandung $\cos a$, dalam hal ini akan diambil titik diskritnya yaitu $\cos a = -1$, $\cos a = 0$, dan $\cos a = 1$ sehingga dapat diuraikan sebagai berikut

Untuk $\cos a = -1$ disubstitusikan ke dalam persamaan (3.9), Jika $\sqrt{\left(\frac{2\Delta x^2 - \beta^2 \Delta t^2 \Delta x^2 - 4\Delta t^2}{\Delta x^2 + \alpha \Delta x^2 \Delta t}\right)^2 - 4\left(\frac{(1-\alpha\Delta t)}{(1+\alpha\Delta t)}\right)}$ bernilai imajiner maka diperoleh

$$|\rho_1| = \sqrt{\frac{\left(\frac{2\Delta x^2 - \beta^2 \Delta t^2 \Delta x^2 - 4\Delta t^2}{\Delta x^2 + \alpha \Delta x^2 \Delta t}\right)^2 + \left(\sqrt{\left(\frac{2\Delta x^2 - \beta^2 \Delta t^2 \Delta x^2 - 4\Delta t^2}{\Delta x^2 + \alpha \Delta x^2 \Delta t}\right)^2 - 4\left(\frac{(1-\alpha\Delta t)}{(1+\alpha\Delta t)}\right)}\right)^2}{2^2}}$$

$$|\rho_2| = \sqrt{\frac{\left(\frac{2\Delta x^2-\beta^2\Delta t^2\Delta x^2-4\Delta t^2}{\Delta x^2+\alpha\Delta x^2\Delta t}\right)^2 - \left(\sqrt{\left(\frac{2\Delta x^2-\beta^2\Delta t^2\Delta x^2-4\Delta t^2}{\Delta x^2+\alpha\Delta x^2\Delta t}\right)^2 - 4\left(\frac{(1-\alpha\Delta t)}{(1+\alpha\Delta t)}\right)}\right)^2}{2^2}}$$

Untuk $|\rho_1|$ diperoleh

$$\left(\sqrt{\frac{\left(\frac{2\Delta x^2-\beta^2\Delta t^2\Delta x^2-4\Delta t^2}{\Delta x^2+\alpha\Delta x^2\Delta t}\right)^2 + \left(\sqrt{\left(\frac{2\Delta x^2-\beta^2\Delta t^2\Delta x^2-4\Delta t^2}{\Delta x^2+\alpha\Delta x^2\Delta t}\right)^2 - 4\left(\frac{(1-\alpha\Delta t)}{(1+\alpha\Delta t)}\right)}\right)^2}{2^2}}\right)^2 \leq 1^2$$

$$\frac{\left(\frac{2\Delta x^2-\beta^2\Delta t^2\Delta x^2-4\Delta t^2}{\Delta x^2+\alpha\Delta x^2\Delta t}\right)^2 + \left(\sqrt{\left(\frac{2\Delta x^2-\beta^2\Delta t^2\Delta x^2-4\Delta t^2}{\Delta x^2+\alpha\Delta x^2\Delta t}\right)^2 - 4\left(\frac{(1-\alpha\Delta t)}{(1+\alpha\Delta t)}\right)}\right)^2}{4} \leq 1$$

$$\left(\frac{2\Delta x^2 - \beta^2\Delta t^2\Delta x^2-4\Delta t^2}{\Delta x^2 + \alpha\Delta x^2\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta x^2 - \beta^2\Delta t^2\Delta x^2-4\Delta t^2}{\Delta x^2 + \alpha\Delta x^2\Delta t}\right)^2 - 4\left(\frac{(1-\alpha\Delta t)}{(1+\alpha\Delta t)}\right) \leq 4$$

$$2\left(\frac{2\Delta x^2 - \beta^2\Delta t^2\Delta x^2-4\Delta t^2}{\Delta x^2 + \alpha\Delta x^2\Delta t}\right)^2 - 4\left(\frac{(1-\alpha\Delta t)}{(1+\alpha\Delta t)}\right) \leq 4$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2\Delta x^2 - \beta^2\Delta t^2\Delta x^2-4\Delta t^2}{\Delta x^2 + \alpha\Delta x^2\Delta t}\right)^2 - 2\left(\frac{(1-\alpha\Delta t)}{(1+\alpha\Delta t)}\right) \leq 1$$

Untuk $|\rho_2|$ diperoleh

$$\left(\sqrt{\frac{\left(\frac{2\Delta x^2-\beta^2\Delta t^2\Delta x^2-4\Delta t^2}{\Delta x^2+\alpha\Delta x^2\Delta t}\right)^2 - \left(\sqrt{\left(\frac{2\Delta x^2-\beta^2\Delta t^2\Delta x^2-4\Delta t^2}{\Delta x^2+\alpha\Delta x^2\Delta t}\right)^2 - 4\left(\frac{(1-\alpha\Delta t)}{(1+\alpha\Delta t)}\right)}\right)^2}{2^2}}\right)^2 \leq 1^2$$

$$\frac{\left(\frac{2\Delta x^2-\beta^2\Delta t^2\Delta x^2-4\Delta t^2}{\Delta x^2+\alpha\Delta x^2\Delta t}\right)^2 - \left(\sqrt{\left(\frac{2\Delta x^2-\beta^2\Delta t^2\Delta x^2-4\Delta t^2}{\Delta x^2+\alpha\Delta x^2\Delta t}\right)^2 - 4\left(\frac{(1-\alpha\Delta t)}{(1+\alpha\Delta t)}\right)}\right)^2}{2^2} \leq 1$$

$$\left(\frac{2\Delta x^2 - \beta^2\Delta t^2\Delta x^2-4\Delta t^2}{\Delta x^2 + \alpha\Delta x^2\Delta t}\right)^2 - \left(\frac{2\Delta x^2 - \beta^2\Delta t^2\Delta x^2-4\Delta t^2}{\Delta x^2 + \alpha\Delta x^2\Delta t}\right)^2 - 4\left(\frac{(1-\alpha\Delta t)}{(1+\alpha\Delta t)}\right) \leq 4$$

$$-4\left(\frac{(1-\alpha\Delta t)}{(1+\alpha\Delta t)}\right) \leq 4$$

$$-\left(\frac{(1-\alpha\Delta t)}{(1+\alpha\Delta t)}\right) \leq 1$$

Untuk $\cos a = 0$ disubstitusikan ke dalam persamaan (3.9), Jika $\sqrt{\left(\frac{2\Delta x^2-\beta^2\Delta t^2\Delta x^2-2\Delta t^2}{\Delta x^2+\alpha\Delta x^2\Delta t}\right)^2 - 4\left(\frac{(1-\alpha\Delta t)}{(1+\alpha\Delta t)}\right)}$ bernilai imajiner maka diperoleh

$$|\rho_1| = \sqrt{\frac{\left(\frac{2\Delta x^2-\beta^2\Delta t^2\Delta x^2-2\Delta t^2}{\Delta x^2+\alpha\Delta x^2\Delta t}\right)^2 + \left(\sqrt{\left(\frac{2\Delta x^2-\beta^2\Delta t^2\Delta x^2-2\Delta t^2}{\Delta x^2+\alpha\Delta x^2\Delta t}\right)^2 - 4\left(\frac{(1-\alpha\Delta t)}{(1+\alpha\Delta t)}\right)}\right)^2}{2^2}}$$

$$|\rho_2| = \sqrt{\frac{\left(\frac{2\Delta x^2-\beta^2\Delta t^2\Delta x^2-2\Delta t^2}{\Delta x^2+\alpha\Delta x^2\Delta t}\right)^2 - \left(\sqrt{\left(\frac{2\Delta x^2-\beta^2\Delta t^2\Delta x^2-2\Delta t^2}{\Delta x^2+\alpha\Delta x^2\Delta t}\right)^2 - 4\left(\frac{(1-\alpha\Delta t)}{(1+\alpha\Delta t)}\right)}\right)^2}{2^2}}$$

Untuk $|\rho_1|$ diperoleh

$$\left(\sqrt{\frac{\left(\frac{2\Delta x^2-\beta^2\Delta t^2\Delta x^2-2\Delta t^2}{\Delta x^2+\alpha\Delta x^2\Delta t}\right)^2 + \left(\sqrt{\left(\frac{2\Delta x^2-\beta^2\Delta t^2\Delta x^2-2\Delta t^2}{\Delta x^2+\alpha\Delta x^2\Delta t}\right)^2 - 4\left(\frac{(1-\alpha\Delta t)}{(1+\alpha\Delta t)}\right)}\right)^2}{2^2}}\right)^2 \leq 1^2$$

$$\frac{\left(\frac{2\Delta x^2-\beta^2\Delta t^2\Delta x^2-2\Delta t^2}{\Delta x^2+\alpha\Delta x^2\Delta t}\right)^2 + \left(\sqrt{\left(\frac{2\Delta x^2-\beta^2\Delta t^2\Delta x^2-2\Delta t^2}{\Delta x^2+\alpha\Delta x^2\Delta t}\right)^2 - 4\left(\frac{(1-\alpha\Delta t)}{(1+\alpha\Delta t)}\right)}\right)^2}{2^2} \leq 1$$

$$\left(\frac{2\Delta x^2 - \beta^2\Delta t^2\Delta x^2 - 2\Delta t^2}{\Delta x^2 + \alpha\Delta x^2\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta x^2 - \beta^2\Delta t^2\Delta x^2 - 2\Delta t^2}{\Delta x^2 + \alpha\Delta x^2\Delta t}\right)^2 - 4\left(\frac{(1-\alpha\Delta t)}{(1+\alpha\Delta t)}\right) \leq 4$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2\Delta x^2 - \beta^2\Delta t^2\Delta x^2 - 2\Delta t^2}{\Delta x^2 + \alpha\Delta x^2\Delta t}\right)^2 - \left(\frac{(1-\alpha\Delta t)}{(1+\alpha\Delta t)}\right) \leq 1$$

Untuk $|\rho_2|$ diperoleh

$$\left(\sqrt{\frac{\left(\frac{2\Delta x^2-\beta^2\Delta t^2\Delta x^2-2\Delta t^2}{\Delta x^2+\alpha\Delta x^2\Delta t}\right)^2 - \left(\sqrt{\left(\frac{2\Delta x^2-\beta^2\Delta t^2\Delta x^2-2\Delta t^2}{\Delta x^2+\alpha\Delta x^2\Delta t}\right)^2 - 4\left(\frac{(1-\alpha\Delta t)}{(1+\alpha\Delta t)}\right)}\right)^2}{2^2}}\right)^2 \leq 1^2$$

$$\frac{\left(\frac{2\Delta x^2-\beta^2\Delta t^2\Delta x^2-2\Delta t^2}{\Delta x^2+\alpha\Delta x^2\Delta t}\right)^2-\left(\sqrt{\left(\frac{2\Delta x^2-\beta^2\Delta t^2\Delta x^2-2\Delta t^2}{\Delta x^2+\alpha\Delta x^2\Delta t}\right)^2-4\left(\frac{(1-\alpha\Delta t)}{(1+\alpha\Delta t)}\right)}\right)^2}{2^2}\leq 1$$

$$\left(\frac{2\Delta x^2-\beta^2\Delta t^2\Delta x^2-2\Delta t^2}{\Delta x^2+\alpha\Delta x^2\Delta t}\right)^2-\left(\frac{2\Delta x^2-\beta^2\Delta t^2\Delta x^2-2\Delta t^2}{\Delta x^2+\alpha\Delta x^2\Delta t}\right)^2-4\left(\frac{(1-\alpha\Delta t)}{(1+\alpha\Delta t)}\right)\leq 4$$

$$-4\left(\frac{(1-\alpha\Delta t)}{(1+\alpha\Delta t)}\right)\leq 4$$

$$-\left(\frac{(1-\alpha\Delta t)}{(1+\alpha\Delta t)}\right)\leq 1$$

Untuk $\cos a=1$ disubstitusikan ke dalam persamaan (3.9), Jika $\sqrt{\left(\frac{2\Delta x^2-\beta^2\Delta t^2\Delta x^2}{\Delta x^2+\alpha\Delta x^2\Delta t}\right)^2-4\left(\frac{(1-\alpha\Delta t)}{(1+\alpha\Delta t)}\right)}$ bernilai imajiner maka diperoleh

$$|\rho_1|=\sqrt{\frac{\left(\frac{2\Delta x^2-\beta^2\Delta t^2\Delta x^2}{\Delta x^2+\alpha\Delta x^2\Delta t}\right)^2+\left(\sqrt{\left(\frac{2\Delta x^2-\beta^2\Delta t^2\Delta x^2}{\Delta x^2+\alpha\Delta x^2\Delta t}\right)^2-4\left(\frac{(1-\alpha\Delta t)}{(1+\alpha\Delta t)}\right)}\right)^2}{2^2}}$$

$$|\rho_2|=\sqrt{\frac{\left(\frac{2\Delta x^2-\beta^2\Delta t^2\Delta x^2}{\Delta x^2+\alpha\Delta x^2\Delta t}\right)^2-\left(\sqrt{\left(\frac{2\Delta x^2-\beta^2\Delta t^2\Delta x^2}{\Delta x^2+\alpha\Delta x^2\Delta t}\right)^2-4\left(\frac{(1-\alpha\Delta t)}{(1+\alpha\Delta t)}\right)}\right)^2}{2^2}}$$

Untuk $|\rho_1|$ diperoleh

$$\left(\sqrt{\frac{\left(\frac{2\Delta x^2-\beta^2\Delta t^2\Delta x^2}{\Delta x^2+\alpha\Delta x^2\Delta t}\right)^2+\left(\sqrt{\left(\frac{2\Delta x^2-\beta^2\Delta t^2\Delta x^2}{\Delta x^2+\alpha\Delta x^2\Delta t}\right)^2-4\left(\frac{(1-\alpha\Delta t)}{(1+\alpha\Delta t)}\right)}\right)^2}{2^2}}\right)^2\leq 1^2$$

$$\frac{\left(\frac{2\Delta x^2-\beta^2\Delta t^2\Delta x^2}{\Delta x^2+\alpha\Delta x^2\Delta t}\right)^2+\left(\sqrt{\left(\frac{2\Delta x^2-\beta^2\Delta t^2\Delta x^2}{\Delta x^2+\alpha\Delta x^2\Delta t}\right)^2-4\left(\frac{(1-\alpha\Delta t)}{(1+\alpha\Delta t)}\right)}\right)^2}{2^2}\leq 1$$

$$\left(\frac{2\Delta x^2-\beta^2\Delta t^2\Delta x^2}{\Delta x^2+\alpha\Delta x^2\Delta t}\right)^2+\left(\frac{2\Delta x^2-\beta^2\Delta t^2\Delta x^2}{\Delta x^2+\alpha\Delta x^2\Delta t}\right)^2-4\left(\frac{(1-\alpha\Delta t)}{(1+\alpha\Delta t)}\right)\leq 4$$

$$2\left(\frac{2\Delta x^2-\beta^2\Delta t^2\Delta x^2}{\Delta x^2+\alpha\Delta x^2\Delta t}\right)^2-4\left(\frac{(1-\alpha\Delta t)}{(1+\alpha\Delta t)}\right)\leq 4$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2\Delta x^2-\beta^2\Delta t^2\Delta x^2}{\Delta x^2+\alpha\Delta x^2\Delta t}\right)^2-\left(\frac{(1-\alpha\Delta t)}{(1+\alpha\Delta t)}\right)\leq 1$$

Untuk $|\rho_2|$ diperoleh

$$\left(\sqrt{\frac{\left(\frac{2\Delta x^2-\beta^2\Delta t^2\Delta x^2}{\Delta x^2+\alpha\Delta x^2\Delta t}\right)^2-\left(\sqrt{\left(\frac{2\Delta x^2-\beta^2\Delta t^2\Delta x^2}{\Delta x^2+\alpha\Delta x^2\Delta t}\right)^2-4\left(\frac{(1-\alpha\Delta t)}{(1+\alpha\Delta t)}\right)}\right)^2}{2^2}}\right)^2 \leq 1^2$$

$$\frac{\left(\frac{2\Delta x^2-\beta^2\Delta t^2\Delta x^2}{\Delta x^2+\alpha\Delta x^2\Delta t}\right)^2-\left(\sqrt{\left(\frac{2\Delta x^2-\beta^2\Delta t^2\Delta x^2}{\Delta x^2+\alpha\Delta x^2\Delta t}\right)^2-4\left(\frac{(1-\alpha\Delta t)}{(1+\alpha\Delta t)}\right)}\right)^2}{2^2} \leq 1$$

$$\left(\frac{2\Delta x^2-\beta^2\Delta t^2\Delta x^2}{\Delta x^2+\alpha\Delta x^2\Delta t}\right)^2-\left(\frac{2\Delta x^2-\beta^2\Delta t^2\Delta x^2}{\Delta x^2+\alpha\Delta x^2\Delta t}\right)^2-4\left(\frac{(1-\alpha\Delta t)}{(1+\alpha\Delta t)}\right) \leq 4$$

$$-4\left(\frac{(1-\alpha\Delta t)}{(1+\alpha\Delta t)}\right) \leq 4$$

$$-\left(\frac{(1-\alpha\Delta t)}{(1+\alpha\Delta t)}\right) \leq 1$$

Dari perhitungan di atas pada saat $\cos a = -1$, $\cos a = 0$, dan $\cos a = 1$ diperoleh $|\rho_1|$ sebagai berikut

Saat $\cos a = -1$ diperoleh $|\rho_1|$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2\Delta x^2-\beta^2\Delta t^2\Delta x^2-4\Delta t^2}{\Delta x^2+\alpha\Delta x^2\Delta t}\right)^2-2\left(\frac{(1-\alpha\Delta t)}{(1+\alpha\Delta t)}\right) \leq 1 \tag{3.10}$$

Saat $\cos a = 0$ diperoleh $|\rho_1|$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2\Delta x^2-\beta^2\Delta t^2\Delta x^2-2\Delta t^2}{\Delta x^2+\alpha\Delta x^2\Delta t}\right)^2-\left(\frac{(1-\alpha\Delta t)}{(1+\alpha\Delta t)}\right) \leq 1 \tag{3.11}$$

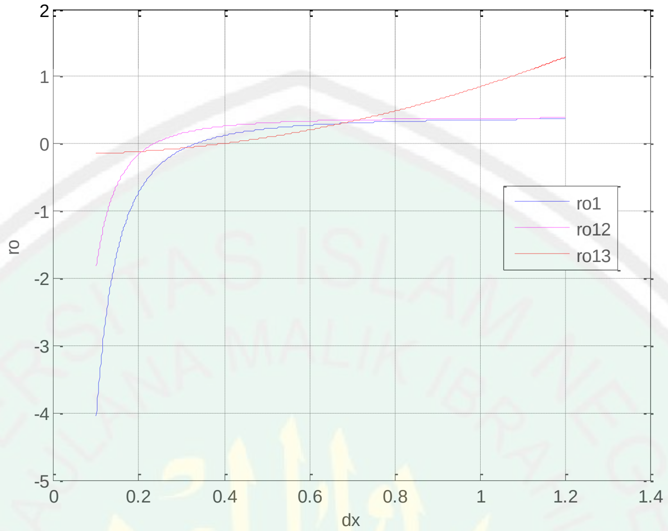
Saat $\cos a = 1$ diperoleh $|\rho_1|$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2\Delta x^2-\beta^2\Delta t^2\Delta x^2}{\Delta x^2+\alpha\Delta x^2\Delta t}\right)^2-\left(\frac{(1-\alpha\Delta t)}{(1+\alpha\Delta t)}\right) \leq 1 \tag{3.12}$$

Sedangkan untuk $|\rho_2|$ pada saat $\cos a = -1$, $\cos a = 0$, dan $\cos a = 1$ diperoleh yaitu

$$-\left(\frac{(1-\alpha\Delta t)}{(1+\alpha\Delta t)}\right) \leq 1 \tag{3.13}$$

Selanjutnya persamaan (3.10), (3.11), dan (3.12) disajikan ke dalam bentuk grafik sebagai berikut

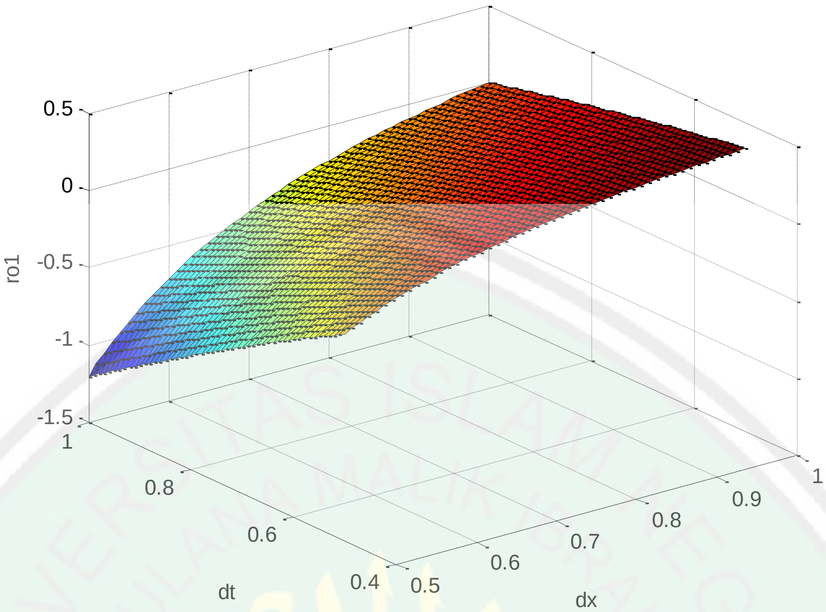


Gambar 3.1 Persamaan (3.10), (3.11), dan (3.12)

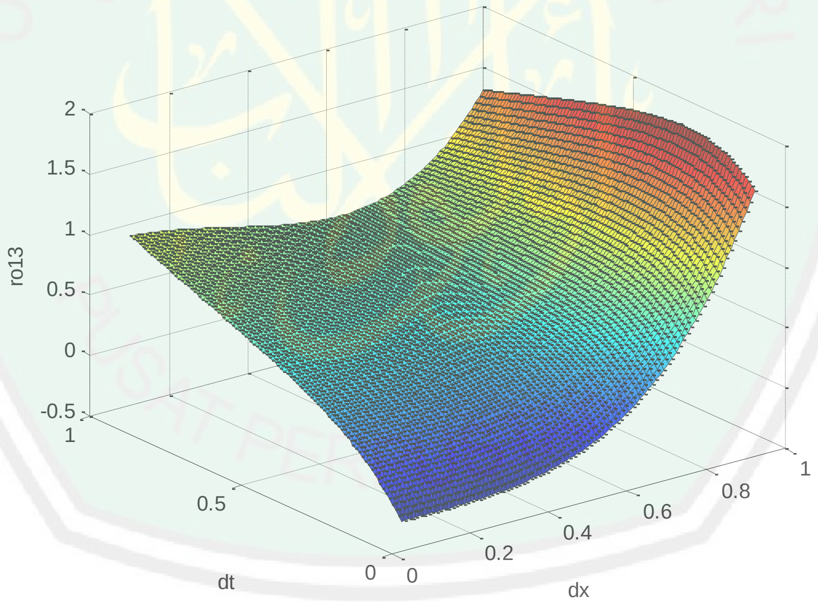
Dari Gambar 3.1 tersebut diperoleh bahwa pada saat $\Delta x \leq 0{,}8$ hasil dari persamaan (3.11) lebih besar dari persamaan (3.10) dan persamaan (3.12) namun pada saat tersebut terdapat $|\rho| \geq 1$. Sedangkan pada saat $\Delta x \leq 1$ hasil dari persamaan (3.12) lebih besar dari persamaan (3.10) dan persamaan (3.11) dengan $|\rho| \leq 1$. Oleh karena itu, untuk syarat kestabilan akan diambil yang menghasilkan $|\rho| \leq 1$ sehingga jika persamaan (3.12) terpenuhi, maka persamaan (3.10) dan (3.11) juga akan terpenuhi. Sehingga syarat kestabian dari persamaan telegraf dengan metode beda hingga skema eksplisit yaitu

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2\Delta x^2 - \beta^2 \Delta t^2 \Delta x^2}{\Delta x^2 + \alpha \Delta x^2 \Delta t}\right)^2 - \left(\frac{(1-\alpha\Delta t)}{(1+\alpha\Delta t)}\right) \leq 1$$

Untuk lebih memperjelas hasil dari persamaan (3.10) dan (3.12) dapat disajikan dengan gambar sebagai berikut



Gambar 3.2 Persamaan (3.10)



Gambar 3.3 Persamaan (3.12)

Dari Gambar 3.2 dan Gambar 3.3 hasil persamaan (3.10) dan persamaan (3.13) terdapat $|\rho| \leq 1$ pada saat $\Delta x \leq 1$. Jika terdapat $|\rho| \geq 1$ maka syarat kestabilan tidak akan terpenuhi, sehingga dalam hal ini syarat kestabilan diambil dari hasil persamaan (3.13) dengan $|\rho| \leq 1$.

3.3 Analisis Konsistensi

Dalam mencari analisis konsistensi metode beda hingga eksplisit dapat menggunakan ekspansi deret Taylor yang diuraikan pada persamaan (2.40) dan (2.41) yang berbentuk

$$u_j^{n\pm1} = u_j^n \pm \Delta t\, u_t|_j^n + \tfrac{1}{2}\Delta t^2 u_{tt}|_j^n \pm \tfrac{1}{6}\Delta t^3 u_{ttt}|_j^n + \cdots$$

$$u_{j\pm1}^n = u_j^n \pm \Delta x\, u_x|_j^n + \tfrac{1}{2}\Delta x^2 u_{xx}|_j^n \pm \tfrac{1}{6}\Delta x^3 u_{xxx}|_j^n + \cdots$$

Kemudian disubstitusikan kedalam persamaan (3.1) yang dapat diuraikan sebagai berikut

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} - u_j^{n-1} = & \left(u_j^n + \Delta t\, u_t|_j^n + \frac{1}{2}\Delta t^2 u_{tt}|_j^n + \frac{1}{6}\Delta t^3 u_{ttt}|_j^n + \frac{1}{24}\Delta t^4 u_{tttt}|_j^n \right. \\ & \left. + \frac{1}{120}\Delta t^5 u_{ttttt}|_j^n + \cdots \right) \\ & - \left(u_j^n - \Delta t\, u_t|_j^n + \frac{1}{2}\Delta t^2 u_{tt}|_j^n - \frac{1}{6}\Delta t^3 u_{ttt}|_j^n + \frac{1}{24}\Delta t^4 u_{tttt}|_j^n \right. \\ & \left. - \frac{1}{120}\Delta t^5 u_{ttttt}|_j^n + \cdots \right) \\ = & \ 2\Delta t\, u_t|_j^n + \tfrac{1}{3}\Delta t^3 u_{ttt}|_j^n + \tfrac{1}{60}\Delta t^5 u_{ttttt}|_j^n + \cdots \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} &= \frac{2\Delta t\, u_t|_j^n + \tfrac{1}{3}\Delta t^3 u_{ttt}|_j^n + \tfrac{1}{60}\Delta t^5 u_{ttttt}|_j^n + \cdots}{2\Delta t} \\ &= u_t|_j^n + \tfrac{1}{6}\Delta t^2 u_{ttt}|_j^n + \tfrac{1}{120}\Delta t^5 u_{ttttt}|_j^n + \cdots \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$u_j^{n+1} + u_j^{n-1} = \left(u_j^n + \Delta t\, u_t|_j^n + \frac{1}{2}\Delta t^2 u_{tt}|_j^n + \frac{1}{6}\Delta t^3 u_{ttt}|_j^n + \frac{1}{24}\Delta t^4 u_{tttt}|_j^n + \frac{1}{120}\Delta t^5 u_{ttttt}|_j^n + \cdots\right)$$

$$+ \left(u_j^n - \Delta t\, u_t|_j^n + \frac{1}{2}\Delta t^2 u_{tt}|_j^n - \frac{1}{6}\Delta t^3 u_{ttt}|_j^n + \frac{1}{24}\Delta t^4 u_{tttt}|_j^n - \frac{1}{120}\Delta t^5 u_{ttttt}|_j^n + \cdots\right)$$

$$= 2u_j^n + \Delta t^2 u_{tt}|_j^n + \frac{1}{12}\Delta t^4 u_{tttt}|_j^n + \cdots$$

$$u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1} = 2u_j^n - 2u_j^n + \Delta t^2 u_{tt}|_j^n + \frac{1}{12}\Delta t^4 u_{tttt}|_j^n \cdots$$

$$= \Delta t^2 u_{tt}|_j^n + \frac{1}{12}\Delta t^4 u_{tttt}|_j^n + \cdots$$

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} = \frac{\Delta t^2 u_{tt}|_j^n + \frac{1}{12}\Delta t^4 u_{tttt}|_j^n + \cdots}{\Delta t^2}$$

$$= u_{tt}|_j^n + \tfrac{1}{12}\Delta t^2 u_{tttt}|_j^n + \cdots \tag{3.15}$$

$$u_{j+1}^n + u_{j-1}^n = \left(u_j^n + \Delta x\, u_x|_j^n + \frac{1}{2}\Delta x^2 u_{xx}|_j^n + \frac{1}{6}\Delta x^3 u_{xxx}|_j^n + \frac{1}{24}\Delta x^4 u_{xxxx}|_j^n + \frac{1}{120}\Delta x^5 u_{xxxxx}|_j^n + \cdots\right)$$

$$+ \left(u_j^n - \Delta x\, u_x|_j^n + \frac{1}{2}\Delta x^2 u_{xx}|_j^n - \frac{1}{6}\Delta x^3 u_{xxx}|_j^n + \frac{1}{24}\Delta x^4 u_{xxxx}|_j^n - \frac{1}{120}\Delta x^5 u_{xxxxx}|_j^n + \cdots\right)$$

$$= 2u_j^n + \Delta x^2 u_{xx}|_j^n + \frac{1}{12}\Delta x^4 u_{xxxx}|_j^n + \cdots$$

$$u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n = 2u_j^n - 2u_j^n + \Delta x^2 u_{xx}|_j^n + \frac{1}{12}\Delta x^4 u_{xxxx}|_j^n + \cdots$$

$$= \Delta x^2 u_{xx}|_j^n + \frac{1}{12}\Delta x^4 u_{xxxx}|_j^n + \cdots$$

Sehingga diperoleh

$$\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = \frac{\Delta x^2 u_{xx}|_j^n + \frac{1}{12}\Delta x^4 u_{xxxx}|_j^n + \cdots}{\Delta x^2}$$

$$= u_{xx}|_j^n + \frac{1}{12}\Delta x^2 u_{xxxx}|_j^n + \cdots \tag{3.16}$$

Selanjutnya substitusikan persamaan (3.14), (3.15), dan (3.16) ke dalam persamaan (3.1) untuk mengetahui *firts truncation term* sehingga diperoleh

$$\left(u_{tt}|_j^n + \frac{1}{12}\Delta t^2 u_{tttt}|_j^n\right) + 2\alpha\left(u_t|_j^n + \frac{1}{6}\Delta t^3 u_{ttt}|_j^n + \frac{1}{120}\Delta t^5 u_{ttttt}|_j^n\right) + \beta^2 u_j^n$$

$$= u_{xx}|_j^n + \frac{1}{12}\Delta x^2 u_{xxxx}|_j^n + f(x,t)$$

$$\left(u_{tt}|_j^n + \frac{1}{12}\Delta t^2 u_{tttt}|_j^n\right) + \left(2\alpha u_t|_j^n + 2\alpha\frac{1}{6}\Delta t^3 u_{ttt}|_j^n + 2\alpha\frac{1}{120}\Delta t^5 u_{ttttt}|_j^n\right) +$$

$$\beta^2 u_j^n = u_{xx}|_j^n + \frac{1}{12}\Delta x^2 u_{xxxx}|_j^n + f(x,t)$$

Sehingga menjadi

$$\left(u_{tt}|_j^n + 2\alpha u_t|_j^n + \beta^2 u|_j^n - u_{xx}|_j^n - f(x,t)\right) + \frac{1}{12}\Delta t^2 u_{tttt}|_j^n + 2\alpha\frac{1}{6}\Delta t^3 u_{ttt}|_j^n +$$

$$2\alpha\frac{1}{120}\Delta t^5 u_{ttttt}|_j^n - \frac{1}{12}\Delta x^2 u_{xxxx}|_j^n = 0 \tag{3.17}$$

Dari persamaan (3.17) dapat diketahui bahwa *error* pemotongan yang dihasilkan mempunyai orde dua $O(\Delta t^2, \Delta x^2)$. Persamaan (3.17) dikatakan konsisten jika

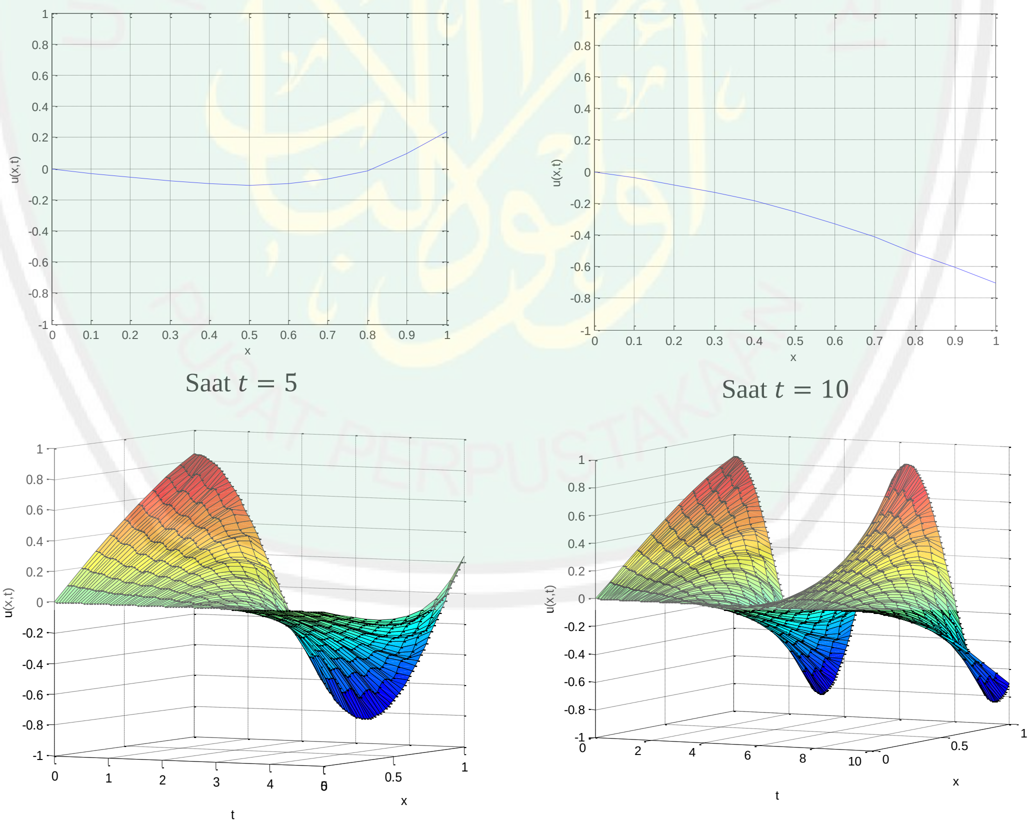
$$\lim_{(\Delta t,\Delta x)\to 0} \frac{1}{12}\Delta t^2 u_{tttt}|_j^n + 2\alpha\frac{1}{6}\Delta t^3 u_{ttt}|_j^n + 2\alpha\frac{1}{120}\Delta t^5 u_{ttttt}|_j^n - \frac{1}{12}\Delta x^2 u_{xxxx}|_j^n = 0$$

Jika Δt dan Δx sangat kecil maka jumlah limit tersebut akan semakin kecil, dan *error* pemotongan yang dihasilkan akan menuju nol Δt mendekati nol dan Δx mendekati nol maka dikatakan persamaan beda yang dibuat konsisten dengan persamaan yang dihampiri.

3.4 Simulasi

Penjelasan mengenai cara menyelesaikan persamaan telegraf menggunakan skema eksplisit telah dibahas pada subbab sebelumnya. Untuk lebih memahami proses skema ini, akan ditunjukan simulasi penyelesaian numerik persamaan telegraf menggunakan skema eksplisit. Pada subbab ini simulasi dilakukan menggunakan program MATLAB R2010a dan akan dilakukan interpretasi grafik terhadap hasil simulasi.

Simulasi pertama dilakukan dari persamaan beda (3.2) dengan mengambil $\Delta t = 0.05$, $\Delta t = 0.1$, $\alpha = 4$, dan $\beta = 2$. Sehingga gelombang yang terjadi pada persamaan telegraf dapat dilihat sebagai berikut

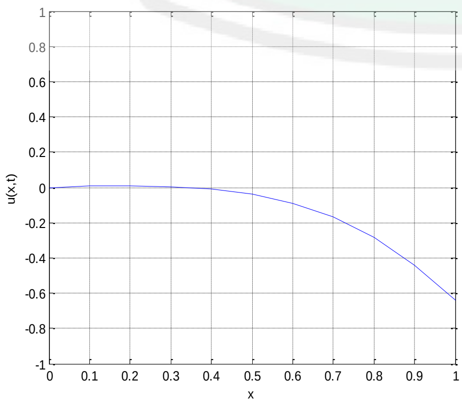


Gambar 3.4 Simulasi Pertama Persamaan Beda (3.2) dengan Waktu Berbeda

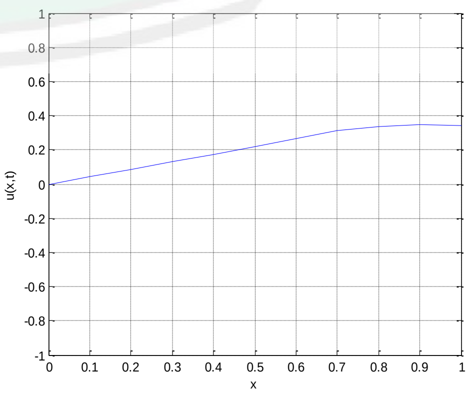
Gambar 3.4 menunjukkan hasil simulasi dari persamaan beda (3.2) terhadap ruang x dan gelombang $u(x,t)$. Dari Gambar tersebut pada saat waktu $t = 5$

menunjukkan gelombang perlahan mulai menaik yang kemudian merambat turun, saat ruang $\Delta x = 0{,}1$ gelombang mengalami kenaikan dengan menghasilkan gelombang $u(x,t)$ sebesar $u(x,t) = 1$. Kemudian gelombang $u(x,t)$ mengalami penurunan sampai pada saat ruang $\Delta x = 0{,}8$ dan waktu $t = 1$ dengan $u(x,t) = -0{,}8$, akan tetapi gelombang $u(x,t)$ perlahan mengalami kenaikan kembali pada saat ruang $\Delta x = 1$ dan waktu $t = 5$, gelombang $u(x,t)$ naik sebesar $u(x,t) = 2$. Sedangkan pada saat waktu $t = 10$ dari Gambar 3.4 menunjukkan bahwa gelombang $u(x,t)$ mengalami penurunan secara signifikan berbeda dari yang dialami gelombang $u(x,t)$ saat $t = 5$. Penurunan gelombang terjadi pada saat ruang $\Delta x = 0{,}1$ dengan gelombang $u(x,t)$ sebesar $u(x,t) = 0{,}3$, kemudian mengalami kenaikan pada saat $t = 8$ dan $x = 0{,}8$. Pada saat $t = 5$ mengalami kenaikan kembali hingga pada puncak sebesat $t = 6$ dengan gelombang sebesar $u(x,t) = 0{,}9$, kemudian mengalami penurunan kembali hingga mencapai $t = 10$ dan $x = 1$ dengan $u(x,t)$sebesar $u(x,t) = -0{,}5$.

Simulasi kedua dilakukan dari persamaan beda (3.2) dengan mengambil $\Delta t = 0.05$, $\Delta t = 0.1$, $\alpha = 4$, dan $\beta = 2$. Sehingga gelombang yang terjadi pada persamaan telegraf dapat dilihat sebagai berikut



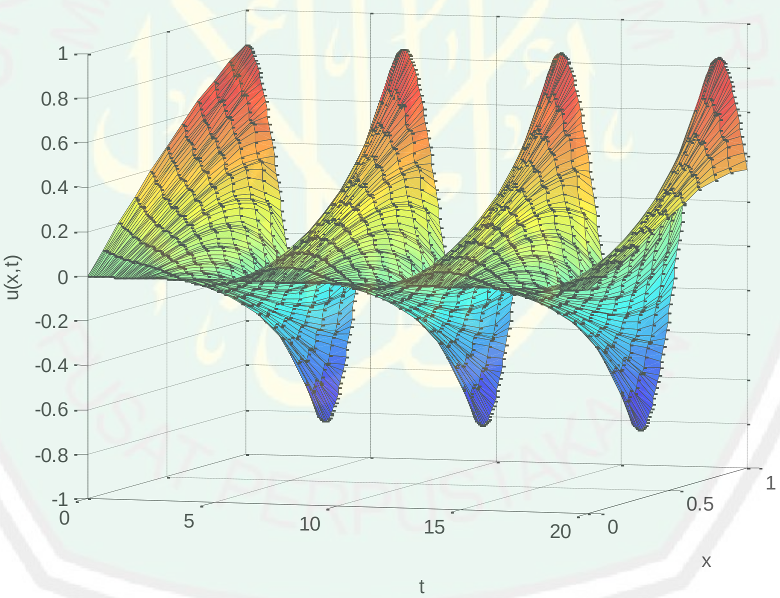
Saat $t = 15$



Saat $t = 20$

Gambar 3.5 Simulasi Kedua Persamaan Beda (3.2) dengan Waktu Berbeda

Gambar 3.5 menunjukkan simulasi kedua dari persamaan beda (3.2) saat $t = 15$ dan $t = 20$. Pada saat waktu $t = 15$ gelombang $u(x,t)$ mulai mengalami penurunan pada ruang $x = 0{,}5$ dengan $u(x,t) = -0{,}1$, kemudian mengalami penurunan secara terus menerus sampai pada saat ruang $x = 1$ dengan $u(x,t) = -0{,}6$. Sedangkan pada saat waktu $t = 20$ gelombang $u(x,t)$ mengalami kenaikan secara signifikan berbeda dengan pada waktu $t = 15$. Gelombang mulai mengalami kenaikan pada saat ruang $x = 0{,}3$ kemudian mengalami kenaikan secara terus menerus sampai pada saat kondisi batas ruang $x = 1$ dengan menghasilkan $u(x,t)$ sebesar $u(x,t) = 0{,}3$.



Gambar 3.6 Grafik 3D Solusi Numerik Persamaan Telegraf Mnggunakan Skema CTCS

Gambar 3.6 menunjukkan hasil simulasi tiga dimensi persamaan telegraf terhadap ruang x, waktu t, dan gelombang $u(x,t)$. Dari grafik tersebut menunjukkan pada waktu $t = 0$ gelombang mulai menaik hingga mencapai $u(x,t) = 0{,}8$, kemudian saat waktu $t = 3$ gelombang menurun dengan $u(x,t) = -0{,}8$. Gelombang $u(x,t)$ berjalan naik turun hingga saat waktu $t = 20$ dan $x = 1$ dengan gelombang yang dihasilkan sebesar $u(x,t) = 0{,}4$.

3.5 Kajian Agama

Berdasarkan hasil pembahasan di atas, bahwa dalam penyelesaian persamaan teegraf dapat diselesaikan dengan menggunakan metode numerik, karena persamaan telegraf lebih mudah diselesaikan dengan metode numerik daripada dengan menggunakan solusi analitik. Dalam al-Quran dijelaskan bahwa Allah memberikan kemudahan bagi umatnya untuk menyelesaikan segala masalah. Dalam hal ini kemudahan sangat dibutuhkan dalam menyelesaiakn persamaan, terutama dalam bidang ilmu matematika. Seperti yang tercantum dalam QS. al-Baqarah ayat 185, yang menyebutkan

يُرِيدُ ٱللَّهُ بِكُمُ ٱلْيُسْرَ وَلَا يُرِيدُ بِكُمُ ٱلْعُسْرَ وَلِتُكْمِلُوا۟ ٱلْعِدَّةَ وَلِتُكَبِّرُوا۟ ٱللَّهَ عَلَىٰ مَا هَدَىٰكُمْ وَلَعَلَّكُمْ تَشْكُرُونَ ١٨٥

"... Allah menghendaki kemudahan bagimu, dan tidak menghendaki kesukaran bagimu. dan hendaklah kamu mencukupkan bilangannya dan hendaklah kamu mengagungkan Allah atas petunjuk-Nya yang diberikan kepadamu, supaya kamu bersyukur" (Q.S al-Baqarah: 185).

Kemudahan dalam ilmu matematika dapat memberikan jalan yang benar untuk penyelesaian persamaan tersebut. Dalam menyelesaikan langkah-langkahnya harus teliti, untuk memeperoleh hasil yang tepat dalam perhitungan secara matematis. Untuk memperoleh solusi yang mendekati solusi analitiknya maka diperlukan syarat kestabilan dan syarat konsistensi dari metode beda hingga skema eksplisit, sehingga untuk memeperoleh syarat tersebut harus teliti dan cermat dalam setiap langkah yang dilakukan. Adapun kemudahan dalam menyelesaikan permasalahan itu, tidak lepas dari adanya usaha yang telah dilakukan.

Sebagaimana ayat yang menjelaskan mengenai manusia dianjurkan untuk selalu berusaha. Hal ini merupakan perintah Allah yang dijelaskan dalam al-Quran surah Yusuf ayat 87

... وَلَا تَاْيْـَٔسُواْ مِن رَّوْحِ ٱللَّهِ ۖ إِنَّهُۥ لَا يَاْيْـَٔسُ مِن رَّوْحِ ٱللَّهِ إِلَّا ٱلْقَوْمُ ٱلْكَٰفِرُونَ ﴿٨٧﴾

“ ...jangan kamu berputus asa dari rahmat Allah. Sesungguhnya tiada berputus asa dari rahmat Allah, melainkan kaum yang kafir"(Q.S Yusuf: 87).

Ayat di atas menjelaskan bahwa manusia janganlah berputus asa dari rahmat Allah, sesungguhnya mereka yang berputus asa merupakan sifat dari kaum kafir. Dalam hal ini sangat jelas bahwa setiap manusia harus berusaha dalam melakukan sesuatu, karena Allah selalu memberikan rahmat-Nya (kemudahan) pada setiap permasalahan. Sehingga manusia tidak diperkenankan untuk berputus asa, karena berputus asa merupakan sifat dari kaum kafir.

Ilmu matematika banyak memberikan manfaat bagi manusia dalam hal ilmu hitung-menghitung dalam kehidupan sehari-hari dan juga banyak menemukan nikmat dari Allah yang sebelumnya tidak ia ketahui. al-Quran memberikan petunjuk tentang jalan yang benar menuju ilmu pengetahuan serta mampu mendapatkan kesimpulan yang benar berdasarkan penalaran dan observasi tentang keajaiban dan rahasia Allah.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan, dapat diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Penyelesaian numerik persamaan telegraf menggunakan metode beda hingga skema eksplisit *Central Time Central Space* (CTCS), dapat dilakukan dengan langkah-langkah antara lain yaitu, melakukan diskritisasi pada persamaan telegraf dengan menggunakan metode beda hingga skema eksplisit untuk menghampiri solusi analitiknya, menentukan syarat awal kedua, selanjutnya menentukan syarat kestabilan dan syarat konsistensi untuk menunjukan bahwa metode yang digunakan tersebut memiliki solusi yang dapat mendekati solusi analitiknya. Setelah itu dari skema yang digunakan maka simulasi dari skema dapat dilakukan. Adapun skema numerik persamaan telegraf yang didapat dengan menggunakan metode beda hingga skema eksplisit *Central Time Central Space* (CTCS), sebagai berikut:

$$u_j^{n+1} = \left(\frac{2\Delta x^2 - \beta^2\Delta t^2\Delta x^2 - 2\Delta t^2}{\Delta x^2 + \alpha\Delta x^2\Delta t}\right)u_j^n + \left(\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2 + \alpha\Delta x^2\Delta t}\right)u_{j+1}^n$$
$$+ \left(\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2 + \alpha\Delta x^2\Delta t}\right)u_{j-1}^n - \frac{(1-\alpha\Delta t)}{(1+\alpha\Delta t)}u_j^{n-1} + f_j^n$$

2. Dengan syarat kestabilan *Von Neumann* diketahui bahwa skema eksplisit *Central Time Central Space* (CTCS) untuk persamaan telegraf akan stabil jika

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2\Delta x^2-\beta^2\Delta t^2\Delta x^2}{\Delta x^2+\alpha\Delta x^2\Delta t}\right)^2-\left(\frac{(1-\alpha\Delta t)}{(1+\alpha\Delta t)}\right)\leq 1$$

3. Model diskrit yang digunakan tersebut memenuhi syarat konsistensi karena *error* pemotongannya menuju nol untuk Δx mendekati nol dan Δt mendekati nol, dengan *error* pemotongan pertama dari model diskrit yang digunakan memiliki orde $\mathcal{O}(\Delta t^2, \Delta x^2)$.
4. Hasil simulasi menunjukan bahwa gelombang $u(x,t)$ bergerak naik turun. Pada saat $t=0$ gelombang mulai menaik hingga mencapai $u(x,t)=0{,}8$, kemudian saat waktu $t=3$ gelombang menurun dengan $u(x,t)=-0{,}8$. Gelombang $u(x,t)$ berjalan naik turun hingga saat waktu $t=20$ dan $x=1$ dengan gelombang yang dihasilkan sebesar $u(x,t)=0{,}4$.

4.2 Saran

Berdasarkan analisis dari penelitian, maka saran untuk penelitian selanjutnya yaitu untuk mencari solusi numerik dari persamaan telegraf dengan metode yang berbeda.

DAFTAR PUSTAKA

Amamah, S.. 2014. *Penyelesaian Numerik Persamaan forced KdV Menggunakan Metode Beda Hingga Skema Ekslpisit*. Skripsi tidak diterbitkan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dosti, M. dan Nazemi, A.. 2011. Solving One-dimensional Hyperbolic Telegraph Equation Using Cubic B-spline Quasi-interpolation. *International Scholarly and Scientific Research*, 5(4).

Flaherty, J.E.. Tanpa Tahun. *Partial Differential Equations*. Rensselaer Polytechnic Institute.

Javidi, M. dan Nyamoradi, N.. 2013. Numerical Solution of Telegraph Equation by Using LT Inversion Technique. *International Journal of Advanced Mathematical Sciences*, 1 (2):64-77.

Spiegel, M.R.. 1983. *Advanced Mathematics for Engineers and Scientists*, Terjemahan Koko Martono ITB. Jakarta: Erlangga.

Strauss, A.W.. 2007. *Partial Differential Equations an Introduction Second Edition*. New York: John Wiley & Sons, Ltd.

Triatmodjo, B.. 2002. *Metode Numerik Dilengkapi dengan Program Komputer*. Yogyakarta: Beta Offset.

Zauderer, E.. 2006. *Partial Differential Equations of Applied Mathematics Third Edition*. New York: John Wiley & Sons, Inc.

LAMPIRAN

Lampiran 1. Grafik 2D Solusi Numerik Persamaan Telegraf

```
clc, clear all
clf
dx=0.1;
dt=0.05;
alpa=4;
beta=2;
t=0:dt:20;
x=0:dx:1;

N=length(x);
M=length(t);
u=zeros(N,M);

for i=1:M
    F(:,i)=(-2.*alpa.*sin(i).*sin(x)+beta.^2.*cos(i).*sin(x));
end

%nilai awal pertama
u(:,1)=sin(x);

%kondisi batas
u(length(x),:)=cos(t).*sin(1);

A=(1+alpa*dt)/(2);
B=(2*dx^2-beta^2*dt^2*dx^2-2*dt^2)/(dx^2+alpa*dx^2*dt);
C=(dt^2)/(dx^2+alpa*dx^2*dt);
D=(1-alpa*dt)/(1+alpa*dt);
E=(dt^2)/(1+alpa*dt);

%nilai awal kedua
for j=2:N-1
    u(j,2)=((A).*(B.*u(j,1)+C.*(u(j+1,1)+u(j-
1,1))+D.*(0)*2*dt+E.*F(j,1)));
end

for i=2:M-1

    for j=2:N-1
        u(j,i+1)=((B*u(j,i))+(C*(u(j+1,i)+u(j-1,i)))-(D*u(j,i-
1))+(E*F(j,i)));
    end

    subplot (1,2,1)
    plot(x,u(:,i+1))
    grid
    ylim([-1 1])
    pause(0.01)
    subplot (1,2,2)
    surf(t,u)
end
xlabel('x')
ylabel('u(x,t)')
```

Lampiran 2. Grafik 3D Solusi Numerik Persamaan Telegraf

```
clc, clear all
clf

dx=0.1;
dt=0.05;
alpa=4;
beta=2;
t=0:dt:20;
x=0:dx:1;

N=length(x);
M=length(t);
u=zeros(N,M);

for i=1:M
    F(:,i)=(-2.*alpa.*sin(i).*sin(x)+beta.^2.*cos(i).*sin(x));
end

%nilai awal pertama
u(:,1)=sin(x);

%kondisi batas
u(length(x),:)=cos(t).*sin(1);

A=(1+alpa*dt)/(2);
B=(2*dx^2-beta^2*dt^2*dx^2-2*dt^2)/(dx^2+alpa*dx^2*dt);
C=(dt^2)/(dx^2+alpa*dx^2*dt);
D=(1-alpa*dt)/(1+alpa*dt);
E=(dt^2)/(1+alpa*dt);

%nilai awal kedua
for j=2:N-1
    u(j,2)=((A).*(B.*u(j,1)+C.*(u(j+1,1)+u(j-
1,1))+D.*(0)*2*dt+E.*F(j,1)));
end

figure (1)
for i=2:M-1

    for j=2:N-1
        u(j,i+1)=((B*u(j,i))+(C*(u(j+1,i)+u(j-1,i)))-(D*u(j,i-
1))+(E*F(j,i)));
    end

    plot(x,u(:,i+1))
    grid
    xlabel('x')
    ylabel('u(x,t)')
    ylim([-1 1])
    pause(0.01)

end

   figure (2)
```

```
[X,Y]=meshgrid(t,x);
surf(X,Y,u)

xlabel('t')
ylabel('x')
zlabel('u(x,t)')
```

Lampiran 3. Grafik 2D Rho

```
clc,clear
beta=2;
alfa=4;
dx=0.1:0.01:1.2;
dt=0.2;
%untuk cos a = -1
ro1 = (1/2).*(((2.*(dx.^2))-((beta.^2).*(dt.^2).*(dx.^2))-
(4.*(dt.^2)))./((dx.^2)+alfa.*(dx.^2).*dt))-((1-
alfa.*dt)./(1+alfa.*dt));
%untuk cos a = 0
ro12 = (1/2).*(((2.*(dx.^2))-((beta.^2).*(dt.^2).*(dx.^2))-
(2.*(dt.^2)))./((dx.^2)+alfa.*(dx.^2).*dt))-((1-
alfa*dt)/(1+alfa*dt));
%untuk cos a = 1
ro13=(1/2).*(((2.*(dx.^2))-
((beta.^2).*(dt.^2).*(dx.^2))./((dx.^2)+alfa.*(dx.^2).*dt)))-((1-
alfa.*dt)./(1+alfa.*dt));

plot(dx, ro1, 'b')
hold on
plot(dx, ro12, 'm')
plot(dx, ro13, 'r')

grid on
legend('ro1','ro12','ro13')
xlabel('dx')
ylabel('ro')
```

Lampiran 4. Grafik 3D Rho

```
clc,clear
beta=2;
alfa=4;
[dx,dt]=meshgrid(0.1:0.01:1,0.1:0.01:1);
figure (1)
%untuk cos a = -1
ro1 = (1/2).*(((2.*(dx.^2))-((beta.^2).*(dt.^2).*(dx.^2))-
(4.*(dt.^2)))./((dx.^2)+alfa.*(dx.^2).*dt))-((1-
alfa.*dt)./(1+alfa.*dt));
surf(dx,dt,ro1)
xlabel('dx')
ylabel('dt')
zlabel('ro1')
%untuk cos a = 0
figure(2)
ro12 = (1/2).*(((2.*(dx.^2))-((beta.^2).*(dt.^2).*(dx.^2))-
(2.*(dt.^2)))./((dx.^2)+alfa.*(dx.^2).*dt))-((1-
alfa*dt)/(1+alfa*dt));
```

```
surf(dx,dt,ro12)
xlabel('dx')
ylabel('dt')
zlabel('ro12')
%untuk cos a = 1
figure(3)
ro13=(1/2).*(((2.*(dx.^2))-
((beta.^2).*(dt.^2).*(dx.^2))./((dx.^2)+alfa.*(dx.^2).*dt)))-((1-
alfa.*dt)./(1+alfa.*dt));
surf(dx,dt,ro13)
xlabel('dx')
ylabel('dt')
zlabel('ro13')
```

RIWAYAT HIDUP

Jumrotun Nikmah, lahir di kota Tegal pada tanggal 27 juli 1991, biasa di panggil Ni'mah. Tinggal di Desa Semboja Rt. 05/Rw. 01 Kec. Pagerbarang Kab. Tegal. Anak ke-4 dari Bapak Watum dan Ibu Saroh.

Pendidikan dasar ditempuh di SDN 01 Semboja dan lulus pada tahun 2003, setelah itu melanjutkan ke SMP Negeri 01 Balapung dan lulus pada tahun 2006. Kemudian melanjutkan pendidikan ke SMA Negeri 01 Bojong dan lulus pada tahun 2009. Selanjutnya, pada tahun 2010 menempuh kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang mengambil Jurusan Matematika. Sampai saat ini dia mondok di pesantren salafiyyah syaf'iiyah Nurul Huda Mergosono dan menjabat sebagai bendahara di staf pengurus pondok.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341) 558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Jumrotun Nikmah
NIM : 10610031
Fakultas/ Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Penyelesaian Numerik Persamaan Telegraf Menggunakan Metode Beda Hingga Skema Eksplisit
Pembimbing I : Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd
Pembimbing II : Dr. Abdussakir, M.Pd

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	11 April 2014	Konsultasi Bab I dan Bab II	1.
2.	19 Mei 2014	Konsultasi Kajian Keagamaan	2.
3.	04 Juli 2014	Revisi Bab I, Bab II	3.
4.	19 Juni 2014	Revisi Kajian Keagamaan	4.
5.	30 September 2014	Revisi Bab III	5.
6.	10 Oktober 2014	Revisi Kajian Keagamaan	6.
7.	5 Desember 2014	Acc Kajian Agama	7.
8.	03 Desember 2014	Revisi Bab III	8.
9.	19 Maret 2015	Revisi Kajian Keagamaan	9.
10.	19 Maret 2015	Revisi Bab II dan Bab III	10.
11.	13 April 2015	Revisi Kajian Kagamaan	11.
12.	05 Juni 2015	ACC Bab III dan Konsultasi Bab IV	12.
13.	08 Juni 2015	ACC Kajian Keagamaan	13.
14.	05 Juni 2015	ACC Keseluruhan	14.

Malang, 08 Juni 2015
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001