# PENYELESAIAN MULTIKOLINIERITAS PADA MODEL FUNGSI PRODUKSI *CONSTANT ELASTICITY OF SUBSTITUTION* DENGAN METODE *RIDGE*

**SKRIPSI**

**OLEH**
**RISTA UMDAH MASRIFAH**
**NIM. 10610032**

**JURUSAN MATEMATIKA**
**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**
**UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM**
**MALANG**
**2015**

**PENYELESAIAN MULTIKOLINIERITAS PADA MODEL FUNGSI PRODUKSI *CONSTANT ELASTICITY OF SUBSTITUTION* DENGAN METODE *RIDGE***

**SKRIPSI**

**Diajukan Kepada**
**Fakultas Sains dan Teknologi**
**Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang**
**untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam**
**Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)**

**Oleh**
**Rista Umdah Masrifah**
**NIM. 10610032**

**JURUSAN MATEMATIKA**
**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**
**UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM**
**MALANG**
**2015**

**PENYELESAIAN MULTIKOLINIERITAS PADA MODEL FUNGSI PRODUKSI *CONSTANT ELASTICITY OF SUBSTITUTION* DENGAN METODE *RIDGE***

**SKRIPSI**

**Oleh**
**Rista Umdah Masrifah**
**NIM. 10610032**

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 18 Mei 2015

| Pembimbing I, | Pembimbing II, |
|---|---|
| Dr. Sri Harini, M.Si | Ach. Nashichuddin, MA |
| NIP. 19731014 200112 2 002 | NIP. 19730705 200003 1 002 |

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

**PENYELESAIAN MULTIKOLINIERITAS PADA MODEL FUNGSI PRODUKSI *CONSTANT ELASTICITY OF SUBSTITUTION* DENGAN METODE *RIDGE***

**SKRIPSI**

**Oleh**
**Rista Umdah Masrifah**
**NIM. 10610032**

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal 29 Juni 2015

| | | | |
|---|---|---|---|
| Penguji Utama | : | Abdul Aziz, M.Si | ..................................... |
| Ketua Penguji | : | Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd | ..................................... |
| Sekretaris Penguji | : | Dr. Sri Harini, M.Si | ..................................... |
| Anggota Penguji | : | Ach. Nashichuddin, MA | ..................................... |

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

## PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertandatangan di bawah ini:

| | |
|---|---|
| Nama | :Rista Umdah Masrifah |
| NIM | :10610032 |
| Jurusan | :Matematika |
| Fakultas | :Sains dan Teknologi |
| Judul Skripsi | :Penyelesaian Multikolinieritas pada Model Fungsi Produksi *Constant Elasticity of Substitution* dengan Metode *Ridge* |

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 08 Juli 2015
Yang membuat pernyataan,

Rista Umdah Masrifah
NIM. 10610032

## MOTO

فَتَعَٰلَى ٱللَّهُ ٱلۡمَلِكُ ٱلۡحَقُّۗ وَلَا تَعۡجَلۡ بِٱلۡقُرۡءَانِ مِن قَبۡلِ أَن يُقۡضَىٰٓ إِلَيۡكَ وَحۡيُهُۥۖ
وَقُل رَّبِّ زِدۡنِي عِلۡمٗا ١١٤

"*Maka Maha Tinggi Allah raja yang sebenar-benarnya, dan janganlah kamu tergesa-gesa membaca al-Quran sebelum disempurnakan mewahyukannya kepadamu, dan katakanlah: 'Ya Tuhanku, tambahkanlah kepadaku ilmu pengetahuan'*" (QS. Thaahaa/20:114).

**PERSEMBAHAN**

Alhamdulillahirabbil ‘alamin. Segala puji bagi Allah Swt. atas limpahan rahmat, taufik dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Kedua orang tua penulis (Bapak Jumirin dan Ibu Sumartin) yang senantiasa memberikan do’anya dan berjuang lahir dan batin demi mengantarkan kesuksesan penulis.

Untuk kedua kakak penulis (Arinda Masfufah dan Hanik Dwi Wahyudi ) dan adik penulis Indri Styaningrum yang selalu memberikan semangat dan motivasi untuk menyelesaikan skripsi ini.

Serta untuk nenek tersayang (Ibu Jumilah) yang selalu memperhatikan dan mendo’akan penulis.

## KATA PENGANTAR

*Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh*

Segala puji bagi Allah Swt., karena atas limpahan rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis mampu menyelesaikan skripsi yang berjudul "Penyelesaian Multikolinieritas pada Model Fungsi Produksi *Constant Elasticity of Substitution* dengan Metode *Ridge*" ini dengan baik. Sholawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad Saw. yang telah mengantar manusia dari jaman jahiliyah menuju jaman syar'iyyah yakni agama Islam. Penulisan skripsi ini tidak akan mendapatkan hasil yang maksimal tanpa adanya bimbingan, bantuan, dorongan, serta do'a dari berbagai pihak. Untuk itu ucapan terimakasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan yang setinggi-tingginya penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Drh. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang dengan sabar telah meluangkan waktunya untuk menerima konsultasi dan senantiasa memberikan bimbingan dan mengarahkan dalam penyelesaian skripsi ini.
5. Ach. Nashichuddin, MA, selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan banyak arahan dan bimbingan hingga selesainya skripsi ini.

6. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang, terutama seluruh dosen, terimakasih atas segenap ilmu yang telah diberikan dan bimbingannya.
7. Bapak dan Ibu yang selalu memberikan do'a, semangat, serta motivasi kepada penulis.
8. Sahabat-sahabat mahasiswa Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang angkatan 2010, terutama sahabat "5 mm" (Binti Tsamrotul Fitriyah, Fatma Mufidah, Laila Fitriyah, dan Wahyudi) dan sahabat "Sweety Twenty" (Alaili Ayu Faradila, Nila Kartika Putri, Titis Isma Yudha, Erma Fatimah, Faridatul Lailia, Novi Novitasari, dan Miftakhul Chusnia) yang telah memberikan motivasi, semangat, dan pengalaman berharga saat menuntut ilmu bersama.
9. Serta semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu yang turut mendukung kelancaran penyelesaian skripsi ini.

Akhirnya penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat bagi penulis dan bagi pembaca.

*Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh*

Malang, Juli 2015

Penulis

# DAFTAR ISI

**HALAMAN JUDUL**
**HALAMAN PENGAJUAN**
**HALAMAN PERSETUJUAN**
**HALAMAN PENGESAHAN**
**HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN**
**HALAMAN MOTO**
**HALAMAN PERSEMBAHAN**
**KATA PENGANTAR** ........ viii
**DAFTAR ISI** ........ x
**DAFTAR TABEL** ........ xiii
**DAFTAR GAMBAR** ........ xiv
**DAFTAR SIMBOL** ........ xv
**ABSTRAK** ........ xvi
**ABSTRACT** ........ xvii
ملخص ........ xviii

**BAB I PENDAHULUAN**
1.1 Latar Belakang ........ 1
1.2 Rumusan Masalah ........ 3
1.3 Tujuan Penelitian ........ 4
1.4 Batasan Masalah ........ 4
1.5 Manfaat Penelitian ........ 5
1.6 Sistematika Penulisan ........ 5

**BAB II KAJIAN PUSTAKA**
1.2 Regresi Nonlinier ........ 7
2.2 Fungsi Produksi *Constant Elasticity of Substitution* ........ 8
2.3 Metode *Nonlinear Least Square* ........ 8
2.3.1 Iterasi *Gauss-Newton* ........ 9
2.4 Estimasi dan Sifat-sifatnya ........ 12
2.5 Nilai Eigen dan Vektor Eigen ........ 13
2.6 Pemusatan dan Penskalaan ........ 15
2.7 Matriks Korelasi ........ 18
2.8 Koefisien Determinasi ........ 18
2.9 Pengali *Langrange* ........ 20
2.10 Multikolinieritas ........ 20

2.11 Metode *Ridge* .................................................................. 25
2.12 Uji Regresi ......................................................................... 26
2.13 Hubungan Manusia dalam Islam ............................................ 27

**BAB III METODE PENELITIAN**

3.1 Pendekatan Penelitian ............................................................ 32
3.2 Sumber Data ......................................................................... 32
3.3 Variabel Penelitian ................................................................ 32
3.4 Analisis Data ......................................................................... 33
3.4.1 Penyelesaian Model Fungsi Produksi *Constant Elasticity of Substitution* dengan Metode *Nonlinear Least Square* ........................................ 33
3.4.1.1 Estimasi Parameter Model Fungsi Produksi *Constant Elasticity of Substitution* dengan Metode *Nonlinear Least Square* ............................. 33
3.4.1.2 Menentukan Sifat-sifat Estimasi Parameter ............ 33
3.4.2 Penyelesaian Multikolinieritas pada Model Fungsi Produksi *Constant Elasticity of Substitution* dengan Metode *Ridge* ..................................................... 34
3.4.2.1 Deteksi Multikolinieritas pada Model Fungsi Produksi *Constant Elasticity of Substitution* pada Data Pengaruh Kapital dan Tenaga Kerja terhadap *Output Drachmas* ............................................. 34
3.4.2.2 Penyelesaian Multikolinieritas pada Model Fungsi Produksi *Constant Elasticity of Substitution* dengan Metode *Ridge* ........................................... 35

**BAB IV PEMBAHASAN**

4.1 Penyelesaian Model Fungsi Produksi *Constant Elasticity of Substitution* dengan Metode *Nonlinear Least Square* ............ 37
4.1.1 Fungsi Produksi *Constant Elasticity of Substitution* ........... 37
4.1.2 Estimasi Parameter Fungsi Produksi *Constant Elasticity of Substitution* dengan Metode *Nonlinear Least Square* ................................................................ 37
4.1.3 Sifat-sifat Estimasi Parameter ............................................ 52
4.2 Penyelesaian Multikolinieritas pada Fungsi Produksi *Constant Elasticity of Substitution* dengan Metode *Ridge* ........... 56
4.2.1 Deteksi Multikolinieritas pada Model Fungsi Produksi *Constant Elasticity of Substitution* pada Data Pengaruh Kapital dan Tenaga Kerja terhadap *Output Drachmas* ....... 56
4.2.1.1 Data ................................................................. 56
4.2.1.2 Deteksi Multikolinieritas ...................................... 56
4.2.2 Penyelesaian Multikolinieritas pada Model Fungsi Produksi *Constant Elasticity of Substitution* dengan Metode *Ridge* .................................................................... 61
4.2.2.1 Uji Parameter ...................................................... 64
4.3 Integrasi al-Quran dengan Multikolinieritas ................................ 66

**BAB V PENUTUP**

5.1 Kesimpulan ........ 69
5.2 Saran ........ 72

**DAFTAR PUSTAKA** ........ 73

**LAMPIRAN-LAMPIRAN** ........ 75

**RIWAYAT HIDUP** ........ 82

## DAFTAR TABEL


Tabel 4.1 Hasil Iterasi *Gauss-Newton* pada Fungsi *Produksi Constant Elasticity of Substitution* dengan Metode *Nonlinear Least Square* ........ 59
Tabel 4.2 Nilai Konvergensi $\beta$ ........ 60
Tabel 4.3 Hasil Pemusatan dan Penskalaan Data ........ 61
Tabel 4.4 Hasil Iterasi *Gauss-Newton* pada Fungsi *Produksi Constant Elasticity of Substitution* dengan Metode *Nonlinear Least Square* ........ 63
Tabel 4.5 Nilai Konvergensi $\beta$ ........ 63

## DAFTAR GAMBAR

Gambar 4.1 Plot Variabel Bebas ........................................................................ 57

## DAFTAR SIMBOL

**Lambang Khusus**

$\mu$ : Nilai tengah (rataan)
$\overline{Z}$ : Rata-rata pada pengamatan $Z$
$\overline{Y}$ : Rata-rata pada pengamatan $Y$
$\rightarrow$ : Menuju
$s^2$ : Ragam untuk sampel
$\sigma^2$ : Ragam (varian) untuk populasi
$Z$ : Matriks $f(X,\beta)$ yang entri-entrinya merupakan peubah acak
$I$ : Matriks identitas
$Z^*$ : Matriks $Z$ hasil pemusatan
$Y^*$ : Matriks $Y$ hasil pemusatan
$S_Y$ : Standar deviasi dari $Y$
$S_Z$ : Standar deviasi dari $Z$
$E$ : *Expectation* (nilai harapan)
$\widehat{\beta}_R$ : Penduga dari parameter $\beta_R$
$T$ : *Transpose*
$a^{-1}$ : *Inverse* dari $a$
$L, K$ : Peubah bebas
$Q$ : Peubah terikat
$c$ : Konstanta pengali *Langrange*

# ABSTRAK


Masrifah, Rista Umdah. 2015. **Penyelesaian Multikolinieritas pada Model Fungsi Produksi *Constant Elasticity of Substitution* dengan Metode *Ridge***. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. Sri Harini, M.Si. (II) Ach. Nashichuddin, MA.

**Kata Kunci**: Fungsi Produksi *Constant Elasticity of Substitution*, Multikolinieritas, Metode *Nonlinear Least Square*, Iterasi *Gauss*-Newton, Metode *Ridge*.

Model fungsi produksi *Constant Elasticity of Substitution* merupakan salah satu bentuk model nonlinier yang tidak hanya dalam variabel-variabelnya tetapi juga dalam parameter-parameternya. Terdapat banyak cara yang digunakan untuk mengestimasi parameter model fungsi produksi *Constant Elasticity of Substitution*, salah satunya dengan menggunakan metode *Nonlinear Least Square*. Dalam menganalisis data dengan menggunakan model fungsi produksi *Constant Elasticity of Substitution*, terkadang ditemukan adanya multikolinieritas yang menyebabkan estimasi parameter menjadi bias. Oleh karena itu, pada penelitian ini untuk menyelesaikan multikolinieritas digunakan metode *ridge regression* dengan estimasi parameter menggunakan metode *Nonlinear Least Square*.

Bentuk estimasi parameter model fungsi produksi *Constant Elasticity of Substitution* yang dikenai multikolinieritas dengan metode *Nonlinear Least Square* menggunakan iterasi *Gauss-Newton* adalah

$$\beta^{*n+1} = Z\left(\beta^{*n}\right)\beta^{*n} + \left(Z\left(\beta^{*n}\right)^{T} Z\left(\beta^{*n}\right)\right)^{-1} Z\left(\beta^{*n}\right)^{T}\left(y - f\left(X^{*}, \beta^{*n}\right)\right)$$

Sedangkan bentuk estimasi parameter model fungsi produksi *Constant Elasticity of Substitution* yang tidak dikenai multikolinieritas dengan metode *Nonlinear Least Square* menggunakan iterasi *Gauss-Newton* adalah

$$\beta^{n+1} = \beta^{n} + \left(Z\left(\beta^{n}\right)^{T} Z\left(\beta^{n}\right)\right)^{-1} Z\left(\beta^{n}\right)^{T}\left(y - f\left(X, \beta^{n}\right)\right)$$

dan bentuk estimasi parameter model fungsi produksi *Constant Elasticity of Substitution* dengan metode *ridge* adalah

$$\widehat{\beta}_{R}^{n+1} = \widehat{\beta}_{R}^{n} + Z\left(\widehat{\beta}_{R}^{n}\right)\widehat{\beta}_{R}^{n}(cI)^{-1} + \left(Z\left(\widehat{\beta}_{R}^{n}\right) + cI\right)^{-1} y - \left(Z\left(\widehat{\beta}_{R}^{n}\right) + cI\right)^{-1} f\left(X, \widehat{\beta}_{R}^{n}\right)$$

Aplikasi pada data sektor industri Yunani tahun 1961-1987 menghasilkan model fungsi produksi *Constant Elasticity of Substitution*

$$Q_t^{*} = \beta_1\left[\beta_2 L_t^{*\beta_3} + (1-\beta_2) K_t^{*\beta_3}\right]^{\frac{\beta_4}{\beta_3}}$$

dengan

$$\beta_1 = 2.130803396224976$$

$$\beta_2 = 0.393056542158127$$

$$\beta_3 = 0.104102352261543$$

$$\beta_4 = 1.291856502532959$$

Perhitungan VIF menghasilkan VIF=2,644, sehingga multikolinieritas antara kapital ($K$) dengan tenaga kerja ($L$) dapat diatasi.

# ABSTRACT

Masrifah, Rista Umdah. 2015. **The Multicolinearity Solution to a Single Model of Production *Constant Elasticity of Substitution* with *Ridge* Method**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advissors: (I) Dr. Sri Harini, M.Si. (II) Ach. Nashichuddin, MA

**Keyword**: Production Function *Constant Elasticity of Substitution*, Multicolinearity, *Nonlinear Least Square* Method, *Gauss-Newton* Iteration, *Ridge* Method.

Production function model of *Constant Elasticity of Substitution* is one form of nonlinear model which is the multicolinearity is not only in the variables but also the parameters. There are many methods that are used in estimating the parameters of the production function model of *Constant Elasticity of Substitution*, one of them is *Nonlinear Least Square* method. In analyzing the data the model of the production function of *Constant Elasticity of Substitution*, sometimes a multicolinearity that caused the biased parameter estimates is found. Therefore, in this study in solving multicolinearity was used *ridge regression* method with parameter estimates optained using *Nonlinear Least Square* method.

The form of parameter estimation of the production function model of *Constant Elasticity of Substitution* of multicolinearity implementing with *Nonlinear Least Square* method using the *Gauss-Newton iteration* was

$$\beta^{*n+1} = Z\left(\beta^{*n}\right)\beta^{*n} + \left(Z\left(\beta^{*n}\right)^{T} Z\left(\beta^{*n}\right)\right)^{-1} Z\left(\beta^{*n}\right)^{T}\left(y - f\left(\rho X, \beta^{*n}\right)\right)$$

While the for in of the production function model parameter estimation of *Constant Elasticity of Substitution* which has no multicolinearity subject with *Nonlinear Least Square* method using the *Gauss-Newton iteration* was

$$\beta^{n+1} = \beta^{n} + \left(Z\left(\beta^{n}\right)^{T} Z\left(\beta^{n}\right)\right)^{-1} Z\left(\beta^{n}\right)^{T}\left(y - f\left(X, \beta^{n}\right)\right)$$

and the shape of the production function model parameter estimation of *Constant Elasticity of Substitution* with ridge method was

$$\widehat{\beta}_R^{n+1} = \widehat{\beta}_R^{n} + Z\left(\widehat{\beta}_R^{n}\right)\widehat{\beta}_R^{n}(cI)^{-1} + \left(Z\left(\widehat{\beta}_R^{n}\right) + cI\right)^{-1} y - \left(Z\left(\widehat{\beta}_R^{n}\right) + cI\right)^{-1} f\left(X, \widehat{\beta}_R^{n}\right)$$

Application on data of Greek industrial sector in 1961-1987 resulted in the production function model of *Constant Elasticity of Substitution*

$$Q_t^{*} = \beta_1\left[\beta_2 L_t^{*\beta_3} + \left(1-\beta_2\right) K_t^{*\beta_3}\right]^{\frac{\beta_4}{\beta_3}}$$

with

$$\beta_1 = 2.130803396224976$$
$$\beta_2 = 0.393056542158127$$
$$\beta_3 = 0.104102352261543$$
$$\beta_3 = 0.104102352261543$$
$$\beta_4 = 1.291856502532959$$

VIF calculation resulted VIF = 2.644, so that multicolinearity between capital (K) and labor (L) can be overcome.

# ملخص

مسرفة، ريستا عمدة. ٢٠١٥. الحل متعددة الخطية على نموذج دالة الانتاج المرونة الدائمة في الاستبدال باستخدام طريقة *Ridge*. بحث جامعي. شعبة الرياضيات كلية العلوم و التكنولوجيا ، الجامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج. المشرف: (١) الدكتورة سري حرني الماجستيرة، (٢) أحمد ناصح الدين الماجستير.

**الكلماتا الرئسية**: دالة إنتاج المرونة الدائمة في الاستبدال ، متعددة الخطية، طريقة *Nonlinear Least Square*، تكرار *Gauss-Newton*، طريقة *Ridge*

نموذج دالة إنتاج المرونة الدائمة في الاستبدال هي واحدة من نموذج غير الخطية وهي ليست في المتغيرات ولكن في المعلمات أيضا. هناك كثير من الطرق المستخدمة لتقدير معالم نموذج دالة إنتاج المرونة الدائمة في الاستبدال، واحدة منها طريقة *Nonlinear Least Square*. في تحليل البيانات باستخدام دالة إنتاج المرونة الدائمة في الاستبدال، وجدت الخطية المتعددة التي تسبب تقديرات المعلمة متحيزة. لذلك، في هذا البحث لحل متعددة الخطية بطريقة *ridge regression* بتقدير المعلمات باستخدام طريقة *Nonlinear Least Square*.

شكل تقديرات معلمة نموذج دالة إنتاج *Constant Elasticity of Substitution* تعرض متعددة الخطية بطريقة *Nonlinear Least Square* باستخدام تكرار *Gauss-Newton* وهي

$$\beta^{*n+1} = Z\left(\beta^{*n}\right)\beta^{*n} + \left(Z\left(\beta^{*n}\right)^T Z\left(\beta^{*n}\right)\right)^{-1} Z\left(\beta^{*n}\right)^T \left(y - f\left(\rho X, \beta^{*n}\right)\right)$$

أما شكل تقديرات معلمة نموذج وظيفة إنتاج *Constant Elasticity of Substitution* لا تعرض متعددة الخطية بطريقة *Nonlinear Least Square* باستخدام تكرار *Gauss-Newton* وهي

$$\beta^{n+1} = \beta^n + \left(Z\left(\beta^n\right)^T Z\left(\beta^n\right)\right)^{-1} Z\left(\beta^n\right)^T \left(y - f\left(X, \beta^n\right)\right)$$

شكل تقديرات معلمة نموذج دالة إنتاج *Constant Elasticity of Substitution* بطريقة *Ridge* وهي

$$\widehat{\beta}_R^{n+1} = \widehat{\beta}_R^n + Z\left(\widehat{\beta}_R^n\right)\widehat{\beta}_R^n (cI)^{-1} + \left(Z\left(\widehat{\beta}_R^n\right) + cI\right)^{-1} y - \left(Z\left(\widehat{\beta}_R^n\right) + cI\right)^{-1} f\left(X, \widehat{\beta}_R^n\right)$$

التطبيق في بيانات القطاع الصناعي في اليوناني في 1961–1987 في إنتاج نموذج وظيفة إنتاج *Constant Elasticity of Substitution*

$$Q_t^* = \beta_1 \left[\beta_2 L_t^{*\beta_3} + (1-\beta_2) K_t^{*\beta_3}\right]^{\frac{\beta_4}{\beta_3}}$$

بـ

$$\beta_1 = 2.130803396224976$$
$$\beta_2 = 0.393056542158127$$
$$\beta_3 = 0.104102352261543$$

$\beta_4 = 1.291856502532959$

(K) حساب VIF تنتج اءلي VIF=2،644، بحيث يمكن التغلب على هذه الخطية المتعددة بين رأس المال والعمال (L).

# BAB I

# PENDAHULUAN

## 1.1 Latar Belakang

Analisis regresi pertama kali diperkenalkan oleh Francis Galton pada tahun 1886. Analisis regresi merupakan analisis ketergantungan dari satu atau lebih variabel bebas terhadap satu variabel tergantung, dengan tujuan untuk menduga atau memprediksi nilai rata-rata populasi berdasarkan nilai-nilai variabel bebasnya (Suliyanto, 2011:37). Menurut Setiawan dan Endah (2010:61), analisis regresi merupakan suatu analisis yang bertujuan untuk menunjukkan hubungan matematis antara variabel respons dengan variabel penjelas. Pada analisis regresi terdapat dua jenis model regresi yaitu model regresi linier dan model regresi nonlinier. Dalam statistika sebuah model regresi dikatakan baik atau cocok, jika dipenuhi asumsi-asumsi ideal (klasik), yaitu tidak adanya autokorelasi, heteroskedastisitas dan multikolinieritas sehingga proses kontrol terhadap model perlu dilakukan untuk menelaah dipenuhi tidaknya asumsi tersebut.

Multikolinieritas merupakan salah satu penyimpangan dari asumsi klasik yang harus dihindari. Multikolinieritas terjadi akibat situasi di mana terdapat hubungan linier yang hampir sempurna atau tepat di antara sebagian atau seluruh variabel penjelas dalam sebuah model regresi (Setiawan dan Endah, 2010:82). Dalam al-Quran telah disinggung tentang hubungan linier, yaitu pada surat al-Hujuraat/49:13 yang berbunyi:

يَٰٓأَيُّهَا ٱلنَّاسُ إِنَّا خَلَقۡنَٰكُم مِّن ذَكَرٖ وَأُنثَىٰ وَجَعَلۡنَٰكُمۡ شُعُوبٗا وَقَبَآئِلَ لِتَعَارَفُوٓاْۚ إِنَّ أَكۡرَمَكُمۡ عِندَ ٱللَّهِ
أَتۡقَىٰكُمۡۚ إِنَّ ٱللَّهَ عَلِيمٌ خَبِيرٞ ١٣

*"Hai manusia, Sesungguhnya Kami menciptakan kamu dari seorang laki-laki dan seorang perempuan dan menjadikan kamu berbangsa - bangsa dan bersuku-suku supaya kamu saling kenal-mengenal. Sesungguhnya orang yang paling mulia di antara kamu disisi Allah ialah orang yang paling taqwa di antara kamu. Sesungguhnya Allah Maha mengetahui lagi Maha Mengenal"* (QS. al-Hujuraat/49:13*)*.

Dalam ayat tersebut dijelaskan bahwa manusia dikodratkan sebagai makhluk sosial. Allah menjelaskan secara lugas bahwa rahasia dijadikannya manusia dalam kelompok-kelompok umat, suku dan bangsa-bangsa yang berbeda, tak lain hanyalah agar tercipta hubungan, saling kenal-mengenal dan saling bekerjasama antar mereka. Namun ketika manusia telah saling mengenal satu sama lain dan mengetahui kelebihan juga kelemahan antar mereka, selain tetap menimbulkan keadaan yang berdampak positif juga terkadang dapat menimbulkan keadaan yang berdampak negatif, misalkan persekutuan. Persekutuan ini timbul akibat antara mereka saling mengolok-olok, mengejek serta menghina dan panggil-memanggil dengan gelar yang buruk yang telah ditegaskan Allah Swt. pada ayat-ayat sebelumnya, sehingga dapat merusak kepercayaan, kedekatan, persahabatan, dan kasih sayang di antara mereka. Allah Swt. telah menolak adanya persekutuan juga melarang hal tersebut pada ayat-ayat sebelumnya, sehingga harus dihilangkan keberadaannya (Al-Hamdani, 2006:692). Persekutuan yang diakibatkan oleh hubungan linier antar manusia tersebut merupakan suatu bentuk penyimpangan, yang dalam statistika dikenal dengan istilah multikolinieritas.

Montgomery dan Peck (1992) dalam Agriska (2011:20) menyatakan adanya multikolinieritas dapat menyebabkan nilai determinan matriks $\left(Z^T Z\right)=0$, atau $\left(Z^T Z\right)$ mendekati nol sehingga terdapat akar-akar karakteristik yang kecil dalam matriks dan variansi $\hat{\beta}$ membesar. Hingga saat ini penelitian tentang multikolinieritas masih terus dilakukan untuk mendeteksi keberadaannya pada model suatu data tertentu dan mendapatkan metode yang tepat untuk menyelesaikan multikolinieritas. Telah ada beberapa metode yang digunakan peneliti sebelumnya pada penelitian untuk mengatasi masalah multikolinieritas yaitu metode *ridge* dengan judul penelitian "*Penyelesaian Multikolinieritas Melalui Metode Regresi Ridge (Ridge Regression)*" oleh Soemartini (2008), dan metode PCR (*Principal Componen Regression*) dengan judul penelitian "*Estimasi Principal Componen Regression Untuk Penanganan Kasus Multikoliniertas*" oleh Istikhomah (2009). Selain itu metode *ridge* dengan judul penelitian *"Mengatasi Multikolinieritas Dengan Regresi Ridge"* oleh Siti Fatimah (2010), dan metode JRR (*Jackknifed Ridge Regression*) dengan judul "Metode Estimasi *Jackknifed Ridge Regression* Pada Model Regresi Linier Berganda" oleh Nisa' (2014). Pada penelitian tersebut estimasi parameter  masih menggunakan metode OLS (*Ordinarry Least Square*). Sehingga pada penelitian ini, peneliti akan mengkaji multikolinieritas pada model regresi nonlinier dengan estimasi parameter menggunakan *Nonlinear Least Square*. Adapun fokus penelitian ini adalah "*Penyelesaian Multikolinieritas pada Model Fungsi Produksi Constant Elasticity of Substitution dengan Metode Ridge*".

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah

1. Bagaimana penyelesaian model fungsi produksi *Constant Elasticity of Substitution* dengan metode *Nonlinear Least Square*?
2. Bagaimana penyelesaian multikolinieritas pada model fungsi produksi *Constant Elasticity of Substitution* dengan metode *ridge*?
3. Bagaimana integrasi al-Quran dengan multikolinieritas?

## 1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan penelitian ini adalah

1. Mengetahui penyelesaian model fungsi produksi *Constant Elasticity of Substitution* dengan metode *Nonlinear Least Square*.
2. Menjelaskan penyelesaian multikolinieritas pada model fungsi produksi *Constant Elasticity of Substitution* dengan metode *ridge*.
3. Menjelaskan integrasi al-Quran dengan multikolinieritas.

## 1.4 Batasan Masalah

Untuk membatasi masalah agar sesuai dengan apa yang dimaksudkan dan tidak menimbulkan permasalahan yang baru, maka peneliti memberikan batasan

1. Model fungsi produksi *Constant Elasticity of Substitution* yang dianalisis diasumsikan memuat multikolinieritas.
2. Estimasi parameter pada penelitian ini menggunakan metode *Nonlinear Least Square* dengan iterasi *Gauss-Newton* dan aproksimasi model menggunakan deret *Taylor*.

## 1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan melalui penulisan skripsi ini, antara lain:

1. Bagi Penulis

   Penyusunan skripsi ini diharapkan mampu memberikan tambahan pengetahuan yang baru sehingga memperluas wawasan yang dimiliki penulis.

2. Bagi Pembaca

   Penulisan skipsi ini diharapkan dapat menambah wawasan baru bagi pembaca mengenai penggunaan metode *ridge*, khususnya untuk penyelesaian multikolinieritas pada model fungsi produksi *Constant Elasticity of Substitution*.

3. Bagi Lembaga Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang

   Skripsi ini dapat dijadikan sebagai bahan kepustakaan sebagai sarana bagi civitas akademika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang khususnya pada jurusan Matematika.

## 1.6 Sistematika Penulisan

Untuk memudahkan pemahaman akan penelitian ini secara menyeluruh, maka akan dipaparkan sistematika penulisannya, yaitu sebagai berikut

Bab I Pendahuluan

Dalam bab ini dijelaskan mengenai latar belakang masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Dalam bab ini dijelaskan beberapa hal yang menjadi dasar dalam penelitian ini yaitu tentang regresi nonlinier, fungsi produksi *Constant Elasticity of Substitution*, metode *Nonlinear Least Square*, iterasi *Gauss-Newton*, estimasi dan sifat-sifatnya, nilai eigen dan vektor eigen, pemusatan dan penskalaan, matriks korelasi, koefisien determinasi, pengali *Langrange*, multikolinieritas, metode *ridge*, uji regresi, dan hubungan manusia dalam islam.

Bab III Metode Penelitian

Dalam bab ini dijelaskan apakah pendekatan penelitian yang digunakan, sumber data, variabel penelitian, dan bagaimana penyelesaian model fungsi produksi *Constant Elasticity of Substitution* dengan metode *Nonlinear Least Square*, serta penyelesaian multikolinieritas pada model fungsi produksi *Constant Elasticity of Substitution* dengan metode *ridge*.

Bab IV Pembahasan

Dalam bab ini diuraikan bagaimana penyelesaian model fungsi produksi *Constant Elasticity of Substitution* dengan metode *Nonlinear Least Square*, bagaimana penyelesaian multikolinieritas pada model fungsi produksi *Constant Elasticity of Substitution* dengan metode *ridge*, dan bagaimana integrasi al-Quran dengan multikolinieritas.

Bab V Penutup

Dalam bab ini dijabarkan kesimpulan dari hasil-hasil penelitian yang telah diperoleh dari pembahasan dan saran bagi peneliti untuk melakukan penelitian lebih lanjut tentang masalah yang terkait.

## BAB II

## KAJIAN PUSTAKA

### 2.1 Regresi Nonlinier

Supranto (1995:57) menyatakan hubungan fungsi antara dua variabel $X$ dan $Y$ tidak selalu bersifat linier, akan tetapi bisa juga bukan linier (nonlinier). Diagram pencar dari hubungan yang linier akan menunjukkan suatu pola yang dapat didekati dengan garis lurus, sedangkan yang bukan linier harus didekati dengan garis lengkung.

Bentuk umum model nonlinier adalah

$$y = f\left(X, \beta\right) + e \tag{2.1}$$

dengan $e_i \sim iid.N\left(0, \sigma^2\right)$ (Aziz, 2010:55). Akibatnya, $y_i \sim iid.N\left(f\left(X_i, \beta\right), \sigma^2\right)$, dengan $f\left(X_i, \beta\right)$ adalah fungsi nonlinier dalam parameter $\beta$. Ada dua cara untuk menaksir $\beta$ pada model regresi nonlinier yaitu dengan metode *Nonlinear Least Square* dan *Maximum Likelihood*. Namun pada penelitian ini akan digunakan metode *Nonlinear Least Square* untuk menaksir parameter $\beta$-nya.

Model-model nonlinier ini dapat juga ditransformasikan (direduksi) ke dalam bentuk linier, yaitu apabila variabel-variabelnya yang nonlinier. Pada kenyataanya hal ini tidak selalu terpenuhi, sehingga keadaan-keadaan khusus nonlinier tidak dapat dihindarkan, yaitu tidak sekedar variabel-variabelnya yang nonlinier tetapi juga parameter-parameternya, seperti fungsi produksi *Cobb-Douglas* atau fungsi produksi *Constant Elasticity of Substitution*. Pada penelitian ini yang akan dikaji adalah model fungsi produksi *Constant Elasticity of Substitution* (Aziz, 2010:127-128).

## 2.2 Fungsi Produksi *Constant Elasticity of Substitution*

Fungsi produksi *Constant Elasticity of Substitution* pertama kali dikenalkan oleh Robert M Sollow pada tahun 1956. Aziz (2010:128) menyatakan bentuk umum dari fungsi produksi *Constant Elasticity of Substitution* adalah

$$Q_t = \beta_1 \left[ \beta_2 L_t^{\beta_3} + (1-\beta_2) K_t^{\beta_3} \right]^{\frac{\beta_4}{\beta_3}} \quad (2.2)$$

dengan

$Q_t$ = output jumlah produksi (*Quantity of Product*)

$L_t$ = output tenaga kerja (*Labour of Product*)

$K_t$ = output modal (*Capital of Product*)

$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ = parameter yang berhubungan tak linier dengan variabelnya

Bentuk persamaan di atas tidak dapat ditransformasikan dalam bentuk fungsi linier. Dengan kata lain fungsi tersebut adalah fungsi produksi *Constant Elasticity of Substitution* nonlinier sehingga harus diestimasi dengan menggunakan teknik statistik nonlinier.

## 2.3 Metode *Nonlinear Least Square*

Aziz (2010:55-56) menyatakan pada penaksiran $\beta$ dengan menggunakan metode *Nonlinear Least Square* ada dua cara yaitu

1. $f(X, \beta)$ diaproksimasikan dengan deret *Taylor*.

2. $S(\beta)=(y-f(X,\beta))^t(y-f(X,\beta))$ diaproksimasi dengan deret *Taylor* orde 1.

Cara penaksiran pertama ini dikenal sebagai iterasi *Gauss-Newton*. Secara umum untuk mendapatka taksiran $\hat{\beta}$ dengan *Nonlinear Least Square* dapat ditulis dengan

$$\beta^{i+1}=\beta^{i}-t_i P_i \gamma_i \tag{2.3}$$

dimana

$$t_i=\frac{1}{2}, P_i=\left(Z(\beta^i)^t Z(\beta^i)\right)^{-1}, \gamma_i=\left.\frac{\partial S}{\partial \beta}\right|_{\beta^i}$$

Penaksiran $\beta$ dengan metode *Nonlinear Least Square* bertujuan untuk mendapatkan nilai $\beta$ yang meminimumkan *sum of square error* $S(\beta)$.

### 2.3.1 Iterasi *Gauss-Newton*

Menurut Aziz (2010:56) iterasi *Gauss-Newton* mengaproksimasikan $f(X,\beta)$ di sekitar $f(X,\beta^{(1)})$ dengan nilai awal $\beta^{(1)}$ yang menggunakan deret *Taylor* orde 1. Adapun bentuk deret *Taylor* orde 1 yaitu

$$f(x)\approx f(x_0)+\frac{f'(x_0)(x-x_0)}{1!} \tag{2.4}$$

Deret *Taylor* ini merupakan metode linierisasi yang menggunakan hasil-hasil kuadrat terkecil dalam beberapa iterasi. Proses iterasi ini akan terus dilanjutkan sampai diperoleh solusi yang konvergen (Draper dan Smith, 1992:441-443).

Menurut Aziz (2010:56-57) aproksimasi $f(X,\beta)$ disekitar interval *value* $\beta^1$ dilakukan dengan menggunakan deret *Taylor* orde 1, yaitu

$$f(X,\beta) = f(X,\beta^1) + \left.\frac{\partial f(X,\beta)}{\partial \beta^1}\right|_{\beta^1} (\beta - \beta^1) \tag{2.5}$$

Misalkan $\left.\frac{\partial f(X,\beta)}{\partial \beta^1}\right|_{\beta^1} = Z(\beta^1)$, maka dari persamaan di atas diperoleh

$$\begin{aligned} y &= f(X,\beta) + e \\ &= f(X,\beta^1) + \left.\frac{\partial f(X,\beta)}{\partial \beta^1}\right|_{\beta^1} (\beta - \beta^1) + e \\ &= f(X,\beta^1) + \left.\frac{\partial f(X,\beta)}{\partial \beta^1}\right|_{\beta^1} \beta - \left.\frac{\partial f(X,\beta)}{\partial \beta^1}\right|_{\beta^1} \beta^1 + e \\ &= f(X,\beta^1) + Z(\beta^1)\beta - Z(\beta^1)\beta^1 + e \end{aligned} \tag{2.6}$$

Dari persamaan (2.6) dapat dikonstruksi model *pseudo linear*, yaitu

$$y - f(X,\beta^1) - Z(\beta^1)\beta^1 = Z(\beta^1)\beta + e \tag{2.7}$$

Misalkan $y - f(X,\beta^1) - Z(\beta^1) = y^*$ maka persamaan (2.7) menjadi

$$y^*\beta^1 = Z(\beta^1)\beta + e \tag{2.8}$$

Selanjutnya berdasarkan persamaan (2.8) dilakukan estimasi dengan *least squares* untuk taksiran $\beta^2$, yaitu

$$\begin{aligned} S(\beta^2) &= e^T e \\ &= \left(y^*\beta^1 - Z(\beta^1)\beta\right)^T \left(y^*\beta^1 - Z(\beta^1)\beta\right) \\ &= \left(\beta^{1T} y^{*T} - \beta^T Z(\beta^1)^T\right)\left(y^*\beta^1 - Z(\beta^1)\beta\right) \\ &= \beta^{1T} y^{*T} y^* \beta^1 - \beta^{1T} y^{*T} Z(\beta^1)\beta - \beta^T Z(\beta^1)^T y^*\beta^1 + \beta^T Z(\beta^1)^T Z(\beta^1)\beta \\ &= \beta^{1T} y^{*T} y^* \beta^1 - \beta^T Z(\beta^1)^T y^*\beta^1 - \beta^T Z(\beta^1)^T y^*\beta^1 + \beta^T Z(\beta^1)^T Z(\beta^1)\beta \\ &= \beta^{1T} y^{*T} y^* \beta^1 - 2\beta^T Z(\beta^1)^T y^*\beta^1 + \beta^T Z(\beta^1)^T Z(\beta^1)\beta \end{aligned}$$

Untuk meminimumkannya dapat diperoleh dengan melakukan turunan parsial pertama S terhadap $\beta^T$

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial \beta^T} &= 0-2Z\left(\beta^1\right)^T y^*\beta^1+\beta^T Z\left(\beta^1\right)^T Z\left(\beta^1\right)\beta+\left(\beta^T Z\left(\beta^1\right)^T Z\left(\beta^1\right)\beta\right)^T \\ &= -2Z\left(\beta^1\right)^T y^*\beta^1+\beta^T Z\left(\beta^1\right)^T Z\left(\beta^1\right)\beta+\beta^T Z\left(\beta^1\right)^T Z\left(\beta^1\right)\beta \\ &= -2Z\left(\beta^1\right)^T y^*\beta^1+Z\left(\beta^1\right)^T Z\left(\beta^1\right)\beta+Z\left(\beta^1\right)^T Z\left(\beta^1\right)\beta \\ &= -2Z\left(\beta^1\right)^T y^*\beta^1+2Z\left(\beta^1\right)^T Z\left(\beta^1\right)\beta\end{aligned} \tag{2.9}$$

Dengan menyamadengankan persamaan (2.9) dengan nol, diperoleh

$$Z\left(\beta^1\right)^T Z\left(\beta^1\right)\beta = Z\left(\beta^1\right)^T y^*\beta^1$$

$$\begin{aligned}\beta^2 &= \left(Z\left(\beta^1\right)^T Z\left(\beta^1\right)\right)^{-1} Z\left(\beta^1\right)^T y^*\beta^1 \\ &= \left(Z\left(\beta^1\right)^T Z\left(\beta^1\right)\right)^{-1} Z\left(\beta^1\right)^T \left(y-f\left(X,\beta^1\right)\right)+Z\left(\beta^1\right)\beta^1 \\ &= \beta^1+\left(Z\left(\beta^1\right)^T Z\left(\beta^1\right)\right)^{-1} Z\left(\beta^1\right)^T \left(y-f\left(X,\beta^1\right)\right)\end{aligned} \tag{2.10}$$

Bila proses di atas dilanjutkan sampai *n* maka diperoleh bentuk umum iterasi sebagai berikut

$$\beta^{n+1} = \beta^n+\left(Z\left(\beta^n\right)^T Z\left(\beta^n\right)\right)^{-1} Z\left(\beta^n\right)^T \left(y-f\left(X,\beta^n\right)\right) \tag{2.11}$$

Bila iterasi $\beta^{n+1} \approx \beta^n$ (konvergen) maka diperoleh

$$Z\left(\beta^n\right)^T \left(y-f\left(X,\beta^n\right)\right)=0 \tag{2.12}$$

Aziz (2010:58) menyatakan persamaan (2.12) memenuhi *first order condition* (FOC) dari masalah residual *sum of squares* $S(\beta)$, dalam hal ini $\beta^n$ dikatakan sebagai titik minimum. Dengan demikian, iterasi umum pada persamaan (2.11) dapat ditulis menjadi

$$\beta^{n+1} = \beta^n+\left(Z\left(\beta^n\right)^T Z\left(\beta^n\right)\right)^{-1} \left.\frac{\partial f\left(X,\beta\right)}{\partial \beta^1}\right|_{\beta^1} \tag{2.13}$$

Persamaan (2.13) merupakan bentuk iterasi *Gauss-Newton*.

## 2.4 Estimasi dan Sifat-sifatnya

Menurut Subagyo (2010:163) estimasi adalah pendugaan, yaitu menduga nilai suatu populasi dengan dasar nilai sampel. Estimasi merupakan suatu pernyataan mengenai parameter populasi yang diketahui berdasarkan dari sampel, dalam hal ini peubah acak yang diambil dari populasi yang bersangkutan. Jadi dengan estimasi ini keadaan parameter populasi dapat diketahui (Hasan, 2002:11).

Adiningsih (2009:117) menyatakan, estimator adalah variabel *random* yang tergantung pada informasi sampel, dan memberikan perkiraan kepada parameter (populasi) yang tidak diketahui. Suatu estimator dikatakan baik jika memenuhi kriteria-kriteria sebagai berikut

1. Tak Bias (*Unbiased*)

   Estimator bias merupakan estimator yang memiliki kecenderungan menyimpang dari nilai yang diharapkan. Meskipun diusahakan dengan jalan apapun, maka kalau sudah memiliki sifat bias tidak akan mendekati ketepatan (Subagyo, 2010:164). Satu hal yang menjadi tujuan dalam estimasi adalah estimator harus mendekati nilai sebenarnya dari parameter yang diestimasi tersebut. Misalkan terdapat parameter $\theta$. Jika estimator $\hat{\theta}$ dikatakan estimator tak bias (*unbiased estimator*) dari parameter $\theta$, jika mean distribusi sampel $\hat{\theta}$ adalah $\theta$, sehingga $E\left(\hat{\theta}\right)=\theta$ (Adiningsih, 2009:119).

2. Efisien

   Estimator yang efisien adalah estimator yang *variance*-nya (demikian juga standar deviasinya) kecil. Semakin efisien berarti semakin menunjukkan keseragaman data yang diambil di dalam *sampling* (Subagyo, 2010: 165).

3. Konsisten

Subagyo (2010:166) menyatakan bahwa estimator dikatakan konsisten apabila jumlah sampelnya semakin ditambah maka nilai estimatornya akan semakin mendekati nilai populasinya. Menurut Hasan (2002:113-115), suatu penaksir dikataan konsisten jika memenuhi syarat-syarat sebagai berikut

a. Jika ukuran sampel semakin bertambah maka penaksir akan mendekati parameternya. Jika besar sampel menjadi tak terhingga maka penaksir konsisten harus dapat memberi suatu penaksir titik yang sempurna terhadap parameternya. Jadi $\hat{\beta}$ merupakan penaksir konsisten jika dan hanya jika

$$E\left(\hat{\beta}-E(\beta)\right)^2 \rightarrow 0 \text{ jika } n \rightarrow \infty$$

b. Jika ukuran sampel bertambah besar maka distribusi *sampling* penaksir akan mengecil menjadi suatu garis tegak lurus di atas parameter yang samadengan probabilitas sama dengan 1.

## 2.5 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Anton (1991:279-280) menyatakan bahwa jika $A$ adalah matriks $n \times n$, maka vektor tak nol di dalam $R^n$ dinamakan vektor eigen dari $A$ jika $AX$ adalah kelipatan skalar dari $X$, yaitu

$$AX = \lambda X \tag{2.14}$$

untuk suatu skalar $\lambda$. Skalar $\lambda$ dinamakan nilai eigen dari $A$ dan $X$ dinamakan vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda$.

Untuk mencari nilai eigen matriks $A$ yang berukuran $n \times n$, dilakukan dengan langkah berikut, misal

$$A_{n\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, I_{n\times n}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Dari $AX=\lambda X$, $X\neq 0$, maka

$$\begin{aligned} AX &= \lambda IX \\ IX - AX &= 0 \\ (\lambda I - A)X &= 0 \end{aligned} \qquad (2.15)$$

Karena $X\neq 0$, maka $|\lambda I - A| = 0.$

Sehingga untuk memperoleh nilai $\lambda$ dihitung dari

$$|\lambda I - A| = 0$$

$$\begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & \lambda - a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ \lambda - a_{21} & \lambda - a_{22} & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & \cdots & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{bmatrix} = 0$$

$$f(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

dimana $n$ menyatakan banyaknya vektor eigen.

Jika nilai eigen $\lambda_n$ disubstitusikan pada persamaan $(\lambda I - A)X = 0$, maka solusi dari vektor eigen adalah $(\lambda_n I - A)X_n = 0$. Misalkan $A = [a_{ij}]$ matriks $n\times n$. Maka determinan matriks

$$f(\lambda) = \det(\lambda_n I - A) \qquad (2.16)$$

dikatakan polinomial karakteristik dari $A$. Persamaan $f(\lambda) = \det(\lambda_n I - A) = 0$ dikatakan persamaan karakteristik dari $A$.

## 2.6 Pemusatan dan Penskalaan

Statistika adalah pengetahuan yang berhubungan dengan cara-cara pengumpulan data, pengolahan atau penganalisaan dan penarikan kesimpulan berdasarkan kumpulan data. Kumpulan data yang lengkap dan jelas yang ingin dipelajari sifat-sifatnya dinamakan populasi. Sedangkan sebagian data yang diambil dari populasi dinamakan sampel, dimana sampel diharapkan dapat mewakili populasi.

Kutner (2005:272) dalam Agriska (2011:20) menyatakan bahwa pemusatan dan penskalaan data merupakan bagian dari membakukan (*standardized*) variabel. Modifikasi sederhana dari pembakuan atau standarisasi variabel ini adalah transformasi korelasi (*correlation transformation*).

Dalam hal ini yang akan dibakukan (distandarisasi) adalah model nonlinier fungsi produksi *Constant Elasticity of Substitution* yang akan ditunjukkan sebagai berikut

$$Y = \beta_1 \left[ \beta_2 L^{\beta_3} + (1-\beta_2) K^{\beta_3} \right]^{\frac{\beta_4}{\beta_3}} + e$$
$$Y = Q + e$$
$$Y = f(X,\beta) + e$$

Bila ditetapkan

$$f' = f(X,\beta)$$
$$\beta' = \beta - \beta^n$$

$$Z_{ij} = \left[ \frac{\partial f(X,\beta)}{\partial \beta_i} \right] \quad \text{dimana } i = 1, 2, \ldots, p \qquad (2.17)$$
$$Y - f' = \sum_{i=1}^{p} \beta' Z_{ij} + e$$

Maka bentuk matriks $Z'Z$ adalah

$$Z'Z = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & \cdots & Z_{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{21} \\ Z_{12} & Z_{22} \\ \vdots & \vdots \\ Z_{1n} & Z_{2n} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} Z_{1i}^{\ 2} & \sum_{i=1}^{n} Z_{1i} Z_{2i} \\ \sum_{i=1}^{n} Z_{2i} Z_{1i} & \sum_{i=1}^{n} Z_{2i}^{\ 2} \end{bmatrix} \tag{2.18}$$

Pemusatan merupakan perbedaan antara masing-masing pengamatan dan rata-rata dari semua pengamatan untuk variabel. Misal $U$ adalah matriks $Z$ yang sudah dipusatkan maka

$$U = \begin{bmatrix} Z_{11} - \overline{Z}_1 & Z_{21} - \overline{Z}_2 \\ Z_{12} - \overline{Z}_1 & Z_{22} - \overline{Z}_2 \\ \vdots & \vdots \\ Z_{1n} - \overline{Z}_1 & Z_{2n} - \overline{Z}_2 \end{bmatrix}, \text{ dengan } \overline{Z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_{ji} \quad \text{dimana } j = 1, 2 \tag{2.19}$$

Bentuk $U'U$ dari matriks $U$ adalah

$$U'U = \begin{bmatrix} Z_{11} - \overline{Z}_1 & Z_{12} - \overline{Z}_1 & \cdots & Z_{1n} - \overline{Z}_1 \\ Z_{21} - \overline{Z}_2 & Z_{22} - \overline{Z}_2 & \cdots & Z_{2n} - \overline{Z}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{11} - \overline{Z}_1 & Z_{21} - \overline{Z}_2 \\ Z_{12} - \overline{Z}_1 & Z_{22} - \overline{Z}_2 \\ \vdots & \vdots \\ Z_{1n} - \overline{Z}_1 & Z_{2n} - \overline{Z}_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} \left(Z_{1i} - \overline{Z}_1\right)^2 & \sum_{i=1}^{n} \left(Z_{1i} - \overline{Z}_1\right)\left(Z_{2i} - \overline{Z}_2\right) \\ \sum_{i=1}^{n} \left(Z_{2i} - \overline{Z}_2\right)\left(Z_{1i} - \overline{Z}_1\right) & \sum_{i=1}^{n} \left(Z_{2i} - \overline{Z}_2\right)^2 \end{bmatrix} \tag{2.20}$$

Sedangkan penskalaan meliputi gambaran pengamatan pada kesatuan (unit) standar deviasi dari pengamatan untuk variabel. Bentuk umum standar deviasi adalah akar dari variansi sebagai berikut

$$S_{z_j} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(Z_{ji} - \overline{Z}_j\right)^2$$

$$S_{yy} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2 \tag{2.21}$$

Transformasi korelasi merupakan fungsi sederhana dari membakukan variabel. Adapun matriks $Y^*$ dan matriks $V$ merupakan pembakuan variabel terikat $Y$ dan variabel bebas $[L,K] = X$ yang dinotasikan dengan matriks $Z$ adalah sebagai berikut

$$Y^* = \begin{bmatrix} \dfrac{Y_1 - \overline{Y}}{\sqrt{S_{yy}}} \\ \dfrac{Y_2 - \overline{Y}}{\sqrt{S_{yy}}} \\ \vdots \\ \dfrac{Y_n - \overline{Y}}{\sqrt{S_{yy}}} \end{bmatrix} \text{ dan } V = \begin{bmatrix} \dfrac{Z_{11} - \overline{Z}_1}{\sqrt{S_{11}}} & \dfrac{Z_{21} - \overline{Z}_2}{\sqrt{S_{22}}} \\ \dfrac{Z_{12} - \overline{Z}_1}{\sqrt{S_{11}}} & \dfrac{Z_{22} - \overline{Z}_2}{\sqrt{S_{22}}} \\ \vdots & \vdots \\ \dfrac{Z_{1n} - \overline{Z}_1}{\sqrt{S_{11}}} & \dfrac{Z_{2n} - \overline{Z}_2}{\sqrt{S_{22}}} \end{bmatrix} \tag{2.22}$$

$$V'V = \begin{bmatrix} \left(\dfrac{\sum_{i-1}^{n}\left(Z_{1i} - \overline{Z}_1\right)}{\sqrt{S_{11}}}\right)^2 & \left(\dfrac{\sum_{i-1}^{n}\left(Z_{1i} - \overline{Z}_1\right)\left(Z_{2i} - \overline{Z}_2\right)}{\sqrt{S_{11}}\sqrt{S_{22}}}\right) \\ \left(\dfrac{\sum_{i-1}^{n}\left(Z_{2i} - \overline{Z}_2\right)\left(Z_{1i} - \overline{Z}_1\right)}{\sqrt{S_{22}}\sqrt{S_{11}}}\right) & \left(\dfrac{\sum_{i-1}^{n}\left(Z_{2i} - \overline{Z}_2\right)}{\sqrt{S_{22}}}\right)^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{S_{12}}{\sqrt{S_{11}}\sqrt{S_{22}}} \\ \dfrac{S_{21}}{\sqrt{S_{22}}\sqrt{S_{11}}} & 1 \end{bmatrix} \tag{2.23}$$

dimana:

$\overline{Y}$ = rata-rata dari $Y$

$\overline{Z}_j$ = rata-rata dari pengamatan $Z_j$

$S_Y$ = standar deviasi dari $Y$

$S_{Z_j}$ = standar deviasi dari $Z_j$

(Draper dan Smith, 1992:248-251)

## 2.7 Matriks Korelasi

Draper dan Smith (1992:142) menyatakan matriks $V'V$ yang diperoleh melalui prosedur pemusatan dan penskalaan di atas dapat ditulis dalam bentuk matriks korelasi dari peubah $Z$ dan dinotasikan dengan $r_{ZZ}$. Matriks tersebut didefinisikan sebagai berikut

$$r_{ZZ} = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} \\ r_{21} & 1 \end{bmatrix} \tag{2.24}$$

dalam hal ini

$$r_{12} = \frac{S_{12}}{\sqrt{S_{11}S_{22}}} = r_{21} \tag{2.25}$$

dimana $r_{12}$ adalah koefisien korelasi antara $Z_1$ dan $Z_2$. Nilai $r_{12}$ yang membesar akan menyebabkan determinan matriks $Z'Z$ mendekati nol (multikolinieritas mendekati sempurna) atau sama dengan nol (multikolinieritas sempurna) sehingga mengakibatkan matriks menjadi singular (tidak memiliki invers).

## 2.8 Koefisien Determinasi

Koefisien determinasi, $R^2$ adalah bilangan yang menyatakan prosentase variansi total $Y$ yang dijelaskan oleh garis regresi. Koefisien determinasi ini dapat diperoleh dari rasio varians $\hat{Y}$ dengan varians $Y$ (Yuwono, 2005:85). Sudjana (2003:107) menyatakan koefisien determinasi (*coefficient of determination*), $R^2$ didefinisikan sebagai berikut:

$$R^2 = \frac{JKR}{JKT} \qquad (2.26)$$

dimana

$$JKR = \hat{\beta}^t \left( X^t \underline{Y} \right) - n\overline{Y}^2 \qquad (2.27)$$

$$JKT = \underline{Y}^t \underline{Y} - n\overline{Y}^2 \qquad (2.28)$$

$$\begin{aligned} JKS &= JKT - JKR \\ &= e^T e \\ &= \left( y - f(X,\beta) \right)^T \left( y - f(X,\beta) \right) \end{aligned} \qquad (2.29)$$

dengan:

$JKR$ = Jumlah Kuadrat Regresi

$JKS$ = Jumlah Kuadrat Sisa

$JKT$ = Jumlah Kuadrat Total

$\hat{\beta}$ = Vektor estimasi parameter $\beta$

$X$ = Matriks variabel bebas yang berukuran $(n \times k)$

$\underline{Y}$ = Vektor variabel terikat berukuran $(n \times 1)$

$\overline{Y}$ = Vektor rata-rata variabel terikat

Koefisien determinasi $(R^2)$ adalah besaran yang mengukur proporsi variabel bebas dalam model yang mampu menerangkan jumlah kuadrat total variabel terikat $Y$. $R^2$ bernilai antara 0 sampai 1. Apabila nilai $R^2$ semakin besar, ini menunjukkan bahwa ketepatan model semakin besar dalam menerangkan keragaman data.

### 2.9 Pengali *Langrange*

Menurut Siegel (1985) dalam Agriska (2011:28) metode Pengali *Langrange* adalah metode untuk mendapatkan nilai maksimum relatif atau nilai minimum relatif dari sebuah fungsi $F(x,y,z)$ yang memenuhi syarat pembatas (*constrain condition*) $\phi(x,y,z)$.

$$G(x,y,z)=F(x,y,z)+c\phi(x,y,z) \tag{2.30}$$

dengan syarat:

$$\frac{\partial G}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial G}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial G}{\partial z}=0 \tag{2.31}$$

yang merupakan syarat-syarat perlu untuk memaksimumkan relatif atau untuk meminimumkan relatif. $c$ yang tergantung $x,y,z$ dinamakan dengan pengali *Langrange*.

### 2.10 Multikolinieritas

Gujarati dan Porter (2010:407) menyatakan bahwa asumsi 8 dari *classical linear regression model* (CLRM) adalah tidak ada multikolinieritas di antara regresor-regresor yang terlibat dalam model regresi. Istilah multikolinieritas pertama kali ditemukan oleh Ragnar Frisch pada tahun 1934 yang berarti adanya hubungan linier yang sempurna atau pasti di antara beberapa atau semua variabel bebas dari model regresi (Setiawan dan Endah, 2010:82). Multikolinieritas adalah suatu kondisi dimana terjadi korelasi yang kuat diantara variabel-variabel bebas $(X)$ yang diikutsertakan dalam pembentukan model regresi linier. Kolinieritas (*collinearity*) sendiri berarti hubungan linier tunggal (*single linear relationship*), sedangkan kolinieritas ganda (*multicollinearity*) menunjukkan adanya lebih dari satu hubungan linier yang sempurna (Firdaus, 2004:111-112).

Menurut tinggi-rendahnya, masalah multikolinieritas dibedakan menjadi dua macam yaitu sebagai berikut

1. Multikolinieritas sempurna, yaitu nisbah antara dua atau lebih variabel bebas yang sifatnya deterministik. Nisbah demikian dapat terjadi apabila nilai satu variabel dapat dinyatakan dengan penjumlahan nilai beberapa variabel bebas yang lain atau perkalian nilai variabel penjelas dengan suatu bilangan tertentu. Multikolinieritas sempurna mengakibatkan koefisien regresi tidak dapat ditentukan (Yuwono, 2005:152). Menurut Setiawan dan Endah (2010:84) menyatakan apabila terjadi multikolinieritas sempurna di antara variabel penjelas, maka determinan matriks $\left(Z^T Z\right)=0$ yang merupakan matriks singular (tidak berpangkat penuh). Akibatnya, matriks $\left(Z^T Z\right)^{-1}$ tidak dapat ditentukan secara unik.
2. Multikolinieritass tinggi atau hampir sempurna, yaitu nisbah antara dua atau lebih variabel bebas yang korelasinya kuat, tetapi tidak deterministik. Pada kasus multikolinieritas yang hampir sempurna, estimasinya menjadi tidak stabil, koefisien estimasi mempunyai standar eror yang tinggi serta *level of significance* yang buruk, sementara $R^2$ cukup tinggi (Yuwono, 2005:152-154). Setiawan dan Endah (2010:84-85) menyatakan adanya multikolinieritas kurang

sempurna yaitu apabila determinan matriks $Z^T Z$ mendekati nol yang disebut matriks hampir singular. Akibatnya, variansi dari koefisien regresi membesar, sehingga standar error dari koefisien regresi membesar.

Beberapa teknik untuk mendeteksi adanya multikolinieritas adalah sebagai berikut

1. Plot Variabel Bebas

Plot variabel bebas ini untuk mengetahui hubungan antara variabel-variabel bebas. Pengujian ini dilakukan berpasangan tiap dua variabel. Jika hubungan antara kedua variabel mengikuti garis regresi atau membentuk garis lurus maka terdapat hubungan linier diantara kedua variabel tersebut.

2. Pemeriksaan Matriks Korelasi

Pada teknik ini, untuk mengukur adanya multikolinieritas dengan melakukan pemeriksaan terhadap elemen-elemen yang berada di luar diagonal $r_{ij}\left(i \neq j\right)$ dalam matriks korelasi $Z'Z$, dimana $V$ adalah hasil dari pemusatan dan penyekalaan dari matriks $Z$. Jika variabel bebas $Z_i$ dan $Z_j$ mempunyai hubungan linier yang erat, maka $\left|r_{ij}\right|$ mengindikasikan korelasi berpasangan dari variabel-variabel bebas mendekati satu, dimana $-1 \leq r_{ij} \leq 1$. Jika dua variabel mempunyai $\left|r_{ij}\right| = 0$, maka antara variabel bebas tidak terdapat hubungan. Budiono dan Koster (2002) dalam Agriska (2011:36) menyatakan arti koefisien korelasi $r_{ij}$ adalah sebagai berikut

a. Jika $0,7 < r_{ij} < 0,9$ atau $-0,9 < r_{ij} < -0,7$ maka terdapat kolinieritas sangat kuat.

b. Jika $0,5 < r_{ij} < 0,7$ atau $-0,7 < r_{ij} < -0,5$ maka terdapat kolinieritas kuat.

c. Jika $0,3 < r_{ij} < 0,5$ atau $-0,5 < r_{ij} < -0,3$ maka terdapat kolinieritas lemah.

d. Jika $0 < r_{ij} < 0,3$ atau $-0,3 < r_{ij} < 0$ maka terdapat kolinieritas sangat lemah.

3. *Variance Inflation Factors* (VIF) dan *Tolerance*

Montgomery (1992) dalam Agriska (2011:37) menyatakan salah satu ukuran yang dapat digunakan untuk menguji adanya multikolinieritas adalah VIF. Besarnya nilai VIF bergantung pada nilai koefisien determinasi $\left(R^2\right)$ yang dihasilkan. Semakin besar nilai VIF yang dihasilkan maka semakin besar pula nilai koefisien determinasinya.

$$VIF = \left(1 - R_j^{\,2}\right)^{-1} \tag{2.32}$$

$$\begin{aligned} Tollerance &= \frac{1}{VIF} \\ &= \frac{1}{\left(1 - R_j^{\,2}\right)^{-1}} \end{aligned} \tag{2.33}$$

Dalam Nisa' (2014:56) pengujian multikolinieritas juga dapat dilakukan dengan menghitung nilai VIF dengan persamaan

$$VIF = \left(\frac{1}{n-1}\left(Z'Z\right)\right)^{-1} \tag{2.34}$$

Ghozali (2005) menyatakan pengujian multikolinieritas dapat dilihat melalui:

1. Nilai *Tolerance*

Nilai *Tolerance*, nilai *outoff* yang umum dipakai untuk menunjukkan adanya multikolinieritas adalah nilai *Tolerance* $<$ 0,10.

2. Nilai VIF, apabila:

   a. Jika nilai *Varian Inflation Factor* (VIF) $>$ 10 maka terdapat persoalan multikolinieritas di antara variabel bebas.

   b. Jika nilai *Varian Inflation Factor* (VIF) $<$ 10 maka tidak terdapat persoalan multikolinieritas di antara variabel bebas.

4. Nilai Eigen (*Eigen Value*)

Pada teknik ini akar-akar karakteristik (*Eigen Value*) dari $Z^T Z$ adalah $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_k$ dapat digunakan untuk mengukur adanya multikolinieritas. Jika ada satu atau lebih hubungan linier di dalam data, maka terdapat satu atau lebih nilai eigen yang kecil. Multikolinieritas dapat diukur dalam bentuk rasio dari nilai terbesar dan terkecil dari nilai eigen, yaitu

$$\varphi = \frac{\lambda_{maks}}{\lambda_{\min}} \tag{2.35}$$

yang disebut nilai kondisi dari matriks korelasi. Nilai $\varphi$ mengindikasikan multikolinieritas yang serius. Nilai kondisi yang terlalu besar menunjukkan ketidakstabilan koefisien regresi terhadap perubahan kecil pada data variabel bebas.

Montgomery dan Peck (1992) dalam Agriska (2011:38-39) memberikan kategori multikolinieritas berdasarkan harga $\varphi$ jika

a. $\varphi < 100$ maka disebut multikolinieritas rendah.

b. $100 \le \varphi < 1000$ maka disebut multikolinieritas agak kuat.

c. $\varphi \ge 1000$ maka disebut multikolinieritas sangat kuat.

## 2.11 Metode *Ridge*

Regresi *ridge* pertama kali dikemukakan oleh A. E. Hoerl pada tahun 1962. Metode ini digunakan untuk mengatasi kondisi buruk (*ill conditioned*) yang diakibatkan oleh korelasi yang tinggi antara beberapa peubah bebas di dalam model regresi, sehingga menyebabkan hasil matriks $Z^T Z$-nya hampir singular, akibatnya menghasilkan nilai dugaan parameter model regresi yang tidak stabil. Umumnya sifat dari penafsiran *ridge* ini memiliki variansi yang minimum (Draper dan Smith, 1992).

Regresi *ridge* adalah suatu teknik yang dikembangkan untuk menstabilkan koefisien regresi karena adanya multikolinieritas dengan cara memodifikasi metode kuadrat terkecil, sehingga dihasilkan penduga koefisien regresi lain yang bias. Modifikasi tersebut dengan cara menambah tetapan bias yang relatif kecil pada diagonal utama matriks $Z^T Z$, sehingga koefisien estimator ridge dipenuhi dengan besarnya tetapan bias tersebut.

Dengan membentuk $Z^T Z$ menjadi bentuk matriks korelasi, maka kesalahan yang disebabkan pengaruh pembulatan menjadi lebih kecil (Draper dan Smith, 1992). Terutama jika variabel *regressor*-nya lebih dari dua dan data yang ada besar. Jika $Z^T Z$ matriks korelasi merupakan matriks identitas maka nilai dengan variabel *regressand* akan sama dengan nilai sebenarnya. Apabila $Z^T Z$ menjauhi matriks identitas, maka $Z^T Z$ dikatakan hampir singular (buruk/*ill conditioned*). Kondisi ini terjadi jika terdapat korelasi antar variabel *regresor* yang cukup tinggi sehingga menyebabkan determinan $Z^T Z$ mendekati nol. Maka antara variabel *regressor* terjadi multikolinieritas ganda tidak sempurna. Jika terjadi masalah ini, penaksiran parameter koefisien regresi masih mungkin dilakukan dengan metode kuadrat terkecil, tetapi dengan konsekuensi simpangan bakunya menjadi sangat sensitif sekalipun terjadi perubahan yang sangat kecil dalam data. Simpangan baku ini cenderung membesar sejalan dengan meningkatnya multikolinieritas (Draper dan Smith, 1992).

Menurut Hoerl dan Kennard (1970:3), estimasi *ridge* untuk koefisien regresi dapat diperoleh dengan menyelesaikan suatu bentuk dari persamaan normal regresi. Parameter penting yang membedakan regresi *ridge* dari metode kuadrat terkecil adalah $c$. Parameter $c$ yang relatif kecil ditambahkan pada diagonal utama matriks $Z^T Z$, sehingga koefisien estimator regresi *ridge* dipenuhi dengan besarnya parameter *ridge* $c$.

Secara umum model regresi *ridge* dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\hat{\beta}_R^{n+1} = \hat{\beta}_R^{n} + Z\left(\hat{\beta}_R^{n}\right)\hat{\beta}_R^{n}\left(cI\right)^{-1} + \left(Z\left(\hat{\beta}_R^{n}\right) + cI\right)^{-1}\left(y - f\left(X, \hat{\beta}_R^{n}\right)\right) \qquad (2.36)$$

## 2.12 Uji Regresi

Untuk menguji keberartian model regresi dapat dilakukan melalui uji t dan uji F. Uji t digunakan untuk mengetahui pengaruh masing-masing variabel bebas secara individu terhadap model regresi yang dihasilkan. Sedangkan uji F digunakan untuk mengetahui pengaruh-pengaruh variabel bebas secara bersama-sama terhadap model.

Harini (2008:250) menyatakan bahwa prosedur pengujian hipotesis untuk uji model regresi adalah sebagai berikut

a. Merumuskan hipotesis nol $(H_0)$ dan hipotesis alternatif $(H_1)$.

b. Rumusan $H_0$ dan $H_1$ selanjutnya diterjemahkan ke dalam rumusan statistik.

c. Memilih nilai $\alpha$ (tungkat kesalahan yang dikehendaki dalam penelitian).

d. Menggunakan uji statistik yang sesuai.

e. Menentukan daerah kritis yang ditentukan oleh bentuk distribusi statistik uji oleh nilai $\alpha$.

f. Menghitung statistik uji dari data yang dimiliki.

g. Memeriksa hasil statistik uji jatuh pada daerah kritis atau tidak. Jika ya, maka $H_0$ ditolak, dan jika tidak maka $H_0$ diterima.

$H_0 : \beta_i = 0$

$H_1 : \beta_i \neq 0$ dengan $i = 1, 2, \ldots, n$

Statistik uji yang digunakan adalah

$$t_{hitung} = \frac{b_i}{S_{b_i}} \text{ dimana } i = 1, 2 \tag{2.37}$$

dengan $b_i$ : parameter regresi variabel ke-$i$

$S_{b_i}$ : standar *error* variabel ke-$i$

Kriteria uji yang digunakan adalah $H_0$ diterima jika $\left|t_{hitung}\right| < t_{\left(\frac{\alpha}{2}, n-k-1\right)}$ dan $H_0$ ditolak jika $\left|t_{hitung}\right| < t_{\left(\frac{\alpha}{2}, n-k-1\right)}$. Jika $H_0$ ditolak, artinya parameter regresi tersebut berpengaruh terhadap model.

## 2.13 Hubungan Manusia dalam Islam

Secara umum hubungan manusia terbagi menjadi 3 macam, yaitu

1. Hubungan manusia dengan Allah.
2. Hubungan manusia dengan manusia.

3. Hubungan manusi dengan makhluk lainnya.

Dalam skripsi ini lebih menitikberatkan pada hubungan manusia dengan manusia yaitu menjelaskan dampak hubungan linier yang terjalin di antara mereka yang dapat menimbulkan pertentangan, perselisihan dan persekutuan sebagai wujud penyimpangan yang harus dihilangkan keberadaannya.

Effendy (1993:58) menyatakan bahwa manusia tidak pernah hidup sendiri. Sejak ia dilahirkan ia tergantung dari orang lain. Ia mangadakan interaksi dengan orang lain. Dan dalam interaksinya itu terjadi pengaruh mempengaruhi. Semakin lama ia hidup dan tumbuh, semakin banyak ia berinteraksi. Dan semakin luas ruang lingkup interaksinya. Ia berada dalam kehidupan kelompok. Ia berinteraksi dengan masyarakat dan lingkungannya. Selain itu manusia diciptakan dari berbagai karakteristik, bersuku-suku dan berbangsa-bangsa agar saling mengenal satu sama lain. Hal ini dijelaskan dalam firman Allah Swt. surat al-Hujuraat/49:13 yaitu sebagai berikut:

يَٰٓأَيُّهَا ٱلنَّاسُ إِنَّا خَلَقۡنَٰكُم مِّن ذَكَرٖ وَأُنثَىٰ وَجَعَلۡنَٰكُمۡ شُعُوبٗا وَقَبَآئِلَ لِتَعَارَفُوٓاْۚ إِنَّ أَكۡرَمَكُمۡ عِندَ ٱللَّهِ أَتۡقَىٰكُمۡۚ إِنَّ ٱللَّهَ عَلِيمٌ خَبِيرٞ ١٣

*"Hai manusia, Sesungguhnya Kami menciptakan kamu dari seorang laki-laki dan seorang perempuan dan menjadikan kamu berbangsa - bangsa dan bersuku-suku supaya kamu saling kenal-mengenal. Sesungguhnya orang yang paling mulia di antara kamu disisi Allah ialah orang yang paling taqwa diantara kamu. Sesungguhnya Allah Maha mengetahui lagi Maha Mengenal*" (QS. al-Hujuraat/49:13).

Tafsir Al-Mishbah (Shihab, 2003:260-264) menyatakan, setelah memberi petunjuk tata krama pergaulan dengan sesama muslim, ayat di atas beralih kepada uraian tentang prinsip dasar hubungan antar manusia. karena itu ayat di atas tidak lagi menggunakan panggilan yang ditujukan kepada orang-orang beriman, tetapi kepada jenis manusia. Allah Swt. berfirman: *Hai manusia, sesungguhnya Kami* *menciptakan kamu dari seorang laki-laki dan seorang perempuan* yakni Adam dan Hawa, atau dari sperma (benih laki-laki) dan ovum (indung telur perempuan) *serta menjadikan kamu berbangsa-bangsa juga bersuku-suku supaya kamu saling kenal-mengenal* yang mengantar kamu untuk bantu-membantu serta saling melengkapi, *sesungguhnya yang paling mulia di antara kamu di sisi Allah Swt. ialah yang paling bertakwa di antara kamu. Sesungguhnya Allah Swt. Maha Mengetahui lagi Maha Mengenal* sehingga tidak ada sesuatu pun yang tersembunyi bagi-Nya.

Penggalan pertama ayat di atas "*sesungguhnya Kami mencipatakan kamu dari dari seorang laki-laki dan seorang perempuan"* adalah pengantar untuk menegaskan bahwa semua manusia derajat kemanusiaannya sama di sisi Allah Swt., tidak ada perbedaan antara satu suku dengan yang lain. Tidak ada juga perbedaan pada nilai kemanusiaan antara laki-laki dan perempuan karena semua diciptakan dari seorang laki-laki dan seorang perempuan. Oleh karena itu, tidak wajar seseorang berbangga dan merasa diri lebih tinggi dari yang lain, bukan saja antar satu bangsa, suku, atau warna kulit dengan selainnya, tetapi antara jenis kelamin mereka. Pengantar tersebut mengantar pada kesimpulan yang disebut oleh penggalan terakhir ayat ini yakni *"Sesungguhnya yang paling mulia di antara kamu di sisi Allah Swt. ialah yang paling bertakwa".* Karena itu berusahalah untuk meningkatkan ketakwaan agar menjadi yang termulia di sisi Allah Swt..

Dalam terjemahan tafsir al-Maraghi (Al-Maraghi, 1993:234-237) tentang ayat di atas, Ishaq Al-Mushilli berkata: "Manusia di alam nyata ini adalah sama. Ayah mereka adalah Adam dan ibunya adalah Hawa. Jika mereka mempunyai kemuliaan pada asal-usul mereka yang patut dibanggakan, maka tak lebih dari tanah dan air. Asbabul Nuzul ayat tersebut, setelah Allah Swt. melarang pada ayat-ayat yang lalu mengolok-olok sesama manusia, mengejek serta menghina dan panggil-memanggil dengan gelar yang buruk, maka di sini Allah Swt. menyebutkan ayat yang lebih menegaskan lagi larangan tersebut dan memperkuat cegahan tersebut. Allah Swt. menerangkan bahwa manusia seluruhnya berasal dari seorang ayah dan seorang ibu. Maka kenapakah saling mengolok-olok sesama saudara hanya saja Allah Swt. menjadikan mereka bersuku-suku dan berkabilah-kabilah yang berbeda-beda, agar di antara mereka terjadi saling kenal-mengenal dan tolong-menolong dalam kemaslahatan-kemaslahatan mereka yang bermacam-macam. Namun tetap tidak ada kelebihan bagi seseorang pun atas yang lain, kecuali dengan takwa dan kesalehan, disamping kesempurnaan jiwa bukan dengan hal-hal yang bersifat keduniaan yang tiada abadi.

Dijelaskan dalam tafsir Muyassar (al-Qarni, 2007:157-158) tentang ayat tersebut bahwa Allah Swt. menciptakan manusia dari satu ayah, yaitu Adam a.s. dan dari seorang ibu, yaitu Hawa. Asal manusia adalah sama. Dengan tersebarnya keturunan Adam dan Hawa, Allah Swt. menjadikan manusia berbangsa-bangsa dan bersuku-suku yang berbeda satu sama lain supaya manusia saling mengenal. Al-Hamdani (2006:32) menyatakan bahwa manusia dituntut berhubungan antar sesamanya dengan bergaul dengan baik. Karena kodrat manusia yang tak luput dari kesalahan, di antara mereka ada juga yang ceroboh dan keterlaluan dalam bersikap, hingga akhirnya ia harus bergaul dengan cara yang tidak santun. Bergaul dengan cara yang tidak santun ini dapat merusak hubungan yang telah terjalin antar sesama manusia, sehingga dapat menimbulkan persekutuan di antara mereka. Oleh karena itu, Allah Swt. menyuruh manusia untuk segera bertaubat dan menganjurkan agar manusia dapat menjalin hubungan yang baik antar sesamanya.

Ibnu Umar ra. meriwatkan bahwa Nabi Saw. pernah berkhutbah kepada orang-orang banyak pada *Fathu Makkah*, sedang beliau berada di atas kendaraannya. Beliau memuji dan menyanjung Allah Swt. dengan pujian dan sanjungan yang patut diterima-Nya. Kemudian beliau bersabda, "*Hai manusia sesungguhnya Allah Swt. benar-benar telah menghilangkan dari kalian keangkuhan dan kesombongan jahiliyyah dengan nenek moyang mereka. Karena manusia itu ada dua macam, yaitu orang baik dan bertakwa serta mulia di sisi Allah Swt., dan orang yang berdosa, sengsara dan hina di sisi Allah Swt.. Sesungguhnya Allah Swt. berfirman, 'Inna khalaqnakum min zakarin wa unsa ... al-ayah"*. Kemudian beliau bersabda, "*Aku ucapkan kata-kataku ini dan aku memohon ampun kepada Allah Swt. untuk diriku dan untuk kalian". Sesungguhnya Allah Swt. Maha Tahu tentang kamu dan tentang amal perbuatanmu, juga Maha Waspada tentang sikap-sikap hatimu. Karenanya, jadikanlah takwa itu bekalmu untuk akhiratmu* (Al-Maraghi, 1993:238).

# BAB III

# METODE PENELITIAN

## 3.1 Pendekatan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah dan tujuan penelitian dalam bab I, pendekatan yang digunakan dalam penelitian ini adalah pendekatan deskriptif kuantitatif yaitu suatu pendekatan yang menggambarkan suatu data yang sudah ada dan disusun kembali untuk dijelaskan dan dianalisis. Selain itu pada penelitian ini juga menggunakan pendekatan studi literatur, dimana peneliti mengumpulkan berbagai referensi yang mendukung sebagai acuan dalam menyelesaikan penelitian.

## 3.2 Sumber Data

Data dalam penelitian ini merupakan data sekunder yang diadopsi dari buku Dasar-dasar Ekonometrika Edisi 5 (Gujarati, 2010) yaitu data sektor industri Yunani 1961-1987 yang bersumber dari Goerge K. Zestos dari Christopher Newport University, Virginia. Data tersebut berjumlah 27 dengan 1 variabel terikat dan 2 variabel bebas.

## 3.3 Variabel Penelitian

Pada penelitian ini variabel yang digunakan adalah variabel kapital $(K)$ dan variabel tenaga kerja $(L)$ sebagai variabel bebas, dan variabel output *drachmas* $(Q)$ sebagai variabel terikat.

### 3.4 Analisis Data

Pada penelitian ini, analisis data menggunakan alat bantu *software* MATLAB (R2010a), SPSS 16.0, dan Ms.Excel 2007.

#### 3.4.1 Penyelesaian Model Fungsi Produksi *Constant Elasticity of Substitution* dengan Metode *Nonlinear Least Square*

##### 3.4.1.1 Estimasi Parameter Model Fungsi Produksi *Constant Elasticity of Substitution* dengan Metode *Nonlinear Least Square*

1. Menentukan bentuk estimasi parameter model fungsi produksi *Constant Elasticity of Substitution* dengan metode *Nonlinear Least Square*.
2. Menentukan bentuk estimasi parameter model fungsi produksi *Constant Elasticity of Substitution* yang dikenai multikolinieritas dengan metode *Nonlinear Least Square*.
3. Menentukan bentuk estimasi parameter model fungsi produksi *Constant Elasticity of Substitution* dengan metode *ridge*.

##### 3.4.1.2 Menentukan Sifat-sifat Estimasi Parameter

Model yang digunakan untuk menentukan sifat-sifat estimasi parameter adalah model fungsi produksi *Constant Elasticity of Substitution* yang tidak dikenai multikolinieritas, model yang dikenai multikolinieritas, dan model yang diestimasi dengan metode *ridge*. Adapun sifat-sifat estimasi yaitu sebagai berikut:

1. Tak Bias (*Unbiased*)
2. Matriks Variansi-Kovariansi $\widehat{\beta}_R$
3. *Mean Square Error*

### 3.4.2 Penyelesaian Multikolinieritas pada Model Fungsi Produksi *Constant Elasticity of Substitution* dengan Metode *Ridge*

#### 3.4.2.1 Deteksi Multikolinieritas pada Model Fungsi Produksi *Constant Elasticity of Substitution* pada Data Pengaruh Kapital dan Tenaga Kerja terhadap *Output Drachmas*

1. Deteksi multikolinieritas pada data yaitu sebagai berikut:
   a. Melihat plot variabel bebas pada data.
   b. Melakukan pemeriksaan koefisien korelasi parsialnya.
   c. Menghitung determinan matriks korelasinya.
   d. Menghitung besarnya nilai eigen pada data. Pada langkah ini multikolinieritas dapat diukur dalam bentuk rasio dari nilai terbesar dan terkecil dari nilai eigen, yaitu $\varphi = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}$ dengan kategori multikolinieritas berdasarkan harga $\varphi$ yaitu sebagai berikut:
      i. $\varphi < 100$ disebut multikolinieritas rendah.
      ii. $100 \leq \varphi < 1000$ disebut multikolinieritas agak kuat.
      iii. $\varphi \geq 1000$ disebut multikolinieritas sangat kuat.
   e. Menghitung besarnya nilai VIF dengan kategori sebagai berikut:
      i. Jika nilai $VIF > 10$ maka terdapat multikolinieritas di antara variabel bebas.
      ii. Jika nilai $VIF < 10$ maka tidak terdapat multikolinieritas di antara variabel bebas.

2. Menentukan nilai estimasi parameter $\beta$ model fungsi produksi *Constant Elasticity of Substitution* yang dikenai multikolinieritas dengan metode *Nonlinear Least Square*.

**3.4.2.2 Penyelesaian Multikolinieritas pada Model Fungsi Produksi *Constant Elasticity of Substitution* dengan Metode *Ridge***

1. Melakukan pemusatan data untuk mendapatkan nilai VIF yang tidak memenuhi multikolinieritas.
2. Melakukan uji VIF.
3. Menentukan nilai estimasi parameter $\beta$ model fungsi produksi *Constant Elasticity of Substitution* dengan metode *ridge*.
4. Melakukan uji parameter sebagai berikut:
   a. Hipotesis

      $H_0 : \beta_i = 0$ (koefisien regresi tidak signifikan)

      $H_1 : \beta_i \neq 0$ (koefisien regresi signifikan)

   b. Menentukan tingkat signifikansi $(\alpha)$.

   c. Melakukan uji statistik yaitu statistik $uji - t$ dimana $t = \frac{b_i}{S_{b_i}}$, untuk $b_i$ = koefisien regresi variabel ke-*i*, dan $S_{b_i}$ = Simpangan baku variabel ke-*i*.

   d. Menentukan kriteria keputusan:

      $H_0$ diterima jika $\left|t_{hitung}\right| \leq t_{\left(\frac{\alpha}{2}, n-k-1\right)}$

$H_0$ ditolak jika $\left| t_{hitung} \right| > t_{\left(\frac{\alpha}{2}, n-k-1\right)}$

5. Membuat kesimpulan.

# BAB IV

# PEMBAHASAN

## 4.1 Penyelesaian Model Fungsi Produksi *Constant Elasticity of Substitution* dengan Metode *Nonlinear Least Square*

### 4.1.1 Fungsi Produksi *Constant Elasticity of Substitution*

Adapun model awal dari fungsi produksi *Constant Elasticity of Substitution* (Aziz, 2010) adalah

$$Q_t = \beta_1 \left[ \beta_2 L_t^{\beta_3} + (1-\beta_2) K_t^{\beta_3} \right]^{\frac{\beta_4}{\beta_3}} \tag{4.1}$$

misalkan

$$X = [L, K] \text{ dan } \beta = \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$$

maka persamaan (4.1) dapat dituliskan menjadi

$$Q = f(X, \beta) \tag{4.2}$$

berdasarkan persamaan (4.2), maka persamaan (4.1) dapat dituliskan sebagai berikut

$$y = Q + e \tag{4.3}$$

atau

$$y = f(X, \beta) + e \tag{4.4}$$

### 4.1.2 Estimasi Parameter Model Fungsi Produksi *Constant Elasticity of Substitution* dengan Metode *Nonlinear Least Square*

Menurut Aziz (2010) penaksiran parameter $\beta$ pada fungsi produksi *Constant Elasticity of Substitution* yang tidak dikenai multikolinieritas dengan menggunakan metode *Nonlinear Least Square* bertujuan untuk menghasilkan nilai parameter $\beta$, yaitu dengan meminimumkan fungsi *sum of square error* $S(\beta)$. Dari persamaan (4.4) dengan memindahruaskan *error*-nya, maka diperoleh

$$e = y - f(X,\beta) \tag{4.5}$$

Dari persamaan (4.5) selanjutnya dibuat model nonlinier fungsi produksi *Constant Elasticity of Substitution* yang tidak dikenai multikolinieritas adalah sebagai berikut

$$e = y - f(X,\beta) \tag{4.6}$$

Sehingga untuk meminimumkan fungsi *sum of square error* $S(\beta)$ adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned} S = e^T e &= (y - f(X,\beta))^T (y - f(X,\beta)) \\ &= y^T y - y^T f(X,\beta) - [f(X,\beta)]^T y + [f(X,\beta)]^T f(X,\beta) \\ &= y^T y - (y^T f(X,\beta))^T - [f(X,\beta)]^T y + [f(X,\beta)]^T f(X,\beta) \\ &= y^T y - 2[f(X,\beta)]^T y + [f(X,\beta)]^T f(X,\beta) \end{aligned} \tag{4.7}$$

Menurut Aziz (2010), selanjutnya untuk meminimumkan fungsi tersebut, dilakukan dengan cara mencari turunan pertama $S$ terhadap $\beta$ yaitu

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \beta} &= 0 - 2\frac{\partial [f(X,\beta)]^T y}{\partial \beta^T} + \frac{\partial [f(X,\beta)]^T f(X,\beta)}{\partial \beta^T} + \left[\frac{\partial [f(X,\beta)]^T f(X,\beta)}{\partial \beta}\right]^T \\ &= -2\frac{\partial [f(X,\beta)]^T y}{\partial \beta^T} + 2\frac{\partial [f(X,\beta)]^T f(X,\beta)}{\partial \beta^T} \end{aligned} \tag{4.8}$$

dari hasil estimasi parameter persamaan (4.8) di atas disamadengankan dengan nol, sehingga diperoleh

$$0 = -2\frac{\partial [f(X,\beta)]^T y}{\partial \beta^T} + 2\frac{\partial [f(X,\beta)]^T f(X,\beta)}{\partial \beta^T}$$

$$2\frac{\partial\left[f\left(X,\beta\right)\right]^{T}y}{\partial\beta^{T}}=2\frac{\partial\left[f\left(X,\beta\right)\right]^{T}f\left(X,\beta\right)}{\partial\beta^{T}}$$

$$\frac{\partial\left[f\left(X,\beta\right)\right]^{T}y}{\partial\beta^{T}}=\frac{\partial\left[f\left(X,\beta\right)\right]^{T}f\left(X,\beta\right)}{\partial\beta^{T}}$$

$$f\left(X,\beta\right)=\left[\frac{\partial\left[f\left(X,\beta\right)\right]^{T}}{\partial\beta^{T}}\right]^{-1}\frac{\partial\left[f\left(X,\beta\right)\right]^{T}y}{\partial\beta^{T}} \tag{4.9}$$

$$=\left[\left[f'\left(X,\beta\right)\right]^{T}\right]^{-1}\left[f'\left(X,\beta\right)\right]^{T}y$$

Aziz (2010) menyatakan pada persamaan (4.9) fungsi $f\left(X,\beta\right)$ adalah fungsi nonlinier, sehingga penaksiran nilai parameter $\beta$ diperlukan proses iterasi yang memberikan bentuk umum dari persamaan tersebut dengan menggunakan metode *Gauss-Newton* yaitu dengan mengaproksimasikan $f\left(X,\beta\right)$ di sekitar $f\left(X,\beta^{1}\right)$ dengan nilai awal $\beta^{1}$ yang menggunakan deret *Taylor* orde 1 sebagai berikut

$$f\left(x\right)\approx f\left(x_0\right)+\frac{f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)}{1!} \tag{4.10}$$

sehingga

$$f\left(X,\beta\right)\approx f\left(X,\beta^{1}\right)+\left.\frac{\partial f\left(X,\beta\right)}{\partial\beta^{T}}\right|_{\beta^{1}}\left(\beta-\beta^{1}\right)$$

$$=f\left(X,\beta^{1}\right)+\left.\frac{\partial f\left(X,\beta\right)}{\partial\beta^{T}}\right|_{\beta^{1}}\beta-\left.\frac{\partial f\left(X,\beta\right)}{\partial\beta^{T}}\right|_{\beta^{1}}\beta^{1} \tag{4.11}$$

Jika dimisalkan

$$Z\left(\beta^{1}\right)=\left.\frac{\partial f\left(X,\beta\right)}{\partial\beta^{T}}\right|_{\beta^{1}}$$

maka persamaan (4.11) diperoleh hasil sebagai berikut

$$y=f\left(X,\beta\right)+e$$

$$=f\left(X,\beta^{1}\right)+Z\left(\beta^{1}\right)\beta-Z\left(\beta^{1}\right)\beta^{1}+e \tag{4.12}$$

Dari persamaan (4.12) , menurut Aziz (2010) dapat dikonstruksi menjadi

$$y - f\left(X, \beta^1\right) + Z\left(\beta^1\right)\beta^1 = Z\left(\beta^1\right)\beta + e \tag{4.13}$$

Jika dimisalkan $y - f\left(X, \beta^1\right) + Z\left(\beta^1\right)\beta^1 = y^*\left(\beta^1\right)$ maka persamaan (4.13) dapat ditulis kembali menjadi

$$y^*\left(\beta^1\right) = Z\left(\beta^1\right)\beta + e \tag{4.14}$$

Pada persamaan (4.14) ini, menurut Aziz (2010) dikenal sebagai persamaan *Pseudo-Linier*, kemudian dapat dilakukan estimasi parameter dengan metode *Least Square* untuk estimasi $\beta^2$ yaitu

$$\begin{aligned}
y^*\left(\beta^1\right) &= Z\left(\beta^1\right)\beta \\
Z\left(\beta^1\right)^T y^*\left(\beta^1\right) &= Z\left(\beta^1\right)^T Z\left(\beta^1\right)\beta \\
\left(Z\left(\beta^1\right)^T Z\left(\beta^1\right)\right)^{-1} Z\left(\beta^1\right)^T y^*\left(\beta^1\right) &= \left(Z\left(\beta^1\right)^T Z\left(\beta^1\right)\right)^{-1} Z\left(\beta^1\right)^T Z\left(\beta^1\right)\beta \\
\left(Z\left(\beta^1\right)^T Z\left(\beta^1\right)\right)^{-1} Z\left(\beta^1\right)^T y^*\left(\beta^1\right) &= \beta
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Selanjutnya setelah parameter $\beta$ diperoleh, maka akan dicari fungsi $y^*\left(\beta^1\right) = Z\left(\beta^1\right)\beta$ sebagai berikut

$$\begin{aligned}
\beta &= \left(Z\left(\beta^1\right)^T Z\left(\beta^1\right)\right)^{-1} Z\left(\beta^1\right)^T y^*\left(\beta^1\right) \\
&= \left(Z\left(\beta^1\right)^T Z\left(\beta^1\right)\right)^{-1} Z\left(\beta^1\right)^T \left(y - f\left(X, \beta^1\right) + Z\left(\beta^1\right)\beta^1\right) \\
&= \left(Z\left(\beta^1\right)^T Z\left(\beta^1\right)\right)^{-1} Z\left(\beta^1\right)^T y - \left(Z\left(\beta^1\right)^T Z\left(\beta^1\right)\right)^{-1} Z\left(\beta^1\right)^T \\
&\quad f\left(X, \beta^1\right) + \beta^1 \\
&= \beta^1 + \left(Z\left(\beta^1\right)^T Z\left(\beta^1\right)\right)^{-1} Z\left(\beta^1\right)^T \left(y - f\left(X, \beta^1\right)\right)
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Menurut Aziz (2010) dengan langkah yang sama, maka itersi ke-2 untuk $\beta^2$, iterasi ke-3 untuk $\beta^3$, dan iterasi ke-4 untuk $\beta^4$ dapat ditulis sebagai berikut:

$$\beta^2 = \beta^1 + \left( Z\left(\beta^1\right)^T Z\left(\beta^1\right) \right)^{-1} Z\left(\beta^1\right)^T \left( y - f\left(X, \beta^1\right) \right) \tag{4.17}$$

$$\beta^3 = \beta^2 + \left( Z\left(\beta^2\right)^T Z\left(\beta^2\right) \right)^{-1} Z\left(\beta^2\right)^T \left( y - f\left(X, \beta^2\right) \right) \tag{4.18}$$

$$\beta^4 = \beta^3 + \left( Z\left(\beta^3\right)^T Z\left(\beta^3\right) \right)^{-1} Z\left(\beta^3\right)^T \left( y - f\left(X, \beta^3\right) \right) \tag{4.19}$$

Aziz (2010) menyatakan dari keseluruhan proses di atas akan diperoleh bentuk umum iterasi sebagai berikut

$$\beta^{n+1} = \beta^n + \left( Z\left(\beta^n\right)^T Z\left(\beta^n\right) \right)^{-1} Z\left(\beta^n\right)^T \left( y - f\left(X, \beta^n\right) \right) \tag{4.20}$$

Jika iterasi di atas dilakukan secara terus menerus, akan didapatkan sifat $\beta$ yang konvergen, yaitu

$$\beta_{NLS} = \beta^{n+1} \approx \beta^n \tag{4.25}$$

maka akan diperoleh

$$Z\left(\beta^n\right)^T \left( y - f\left(X, \beta^n\right) \right) = 0 \tag{4.26}$$

Aziz (2010) menyatakan persamaan (4.24) telah memenuhi syarat *firts order condition* (FOC), untuk mendapatkan nilai parameter $\beta$ yang konvergen dengan cara meminimumkan nilai *sum of square error* $S\left(\beta\right)$ sebagai berikut

$$\begin{aligned}
S &= e^T e \\
&= \left( y - f\left(X,\beta\right) \right)^T \left( y - f\left(X,\beta\right) \right) \\
&= \left( y^T - f^T\left(X,\beta\right) \right) \left( y - f\left(X,\beta\right) \right) \\
&= y^T y - y^T f\left(X,\beta\right) - f^T\left(X,\beta\right) y + f^T\left(X,\beta\right) f\left(X,\beta\right) \\
&= y^T y - \left( y^T f\left(X,\beta\right) \right)^T - f^T\left(X,\beta\right) y + f^T\left(X,\beta\right) f\left(X,\beta\right) \\
&= y^T y - 2 f^T\left(X,\beta\right) y + f^T\left(X,\beta\right) f\left(X,\beta\right)
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Kemudian untuk meminimumkan persamaan (4.28) di atas, dapat diperoleh dengan cara melakukan turunan pertama $S$ terhadap $\beta$ yaitu

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial \beta} &= 0-2\left(f^T(X,\beta)y\right)+f^T(X,\beta)f(X,\beta)+\left(f^T(X,\beta)f^T(X,\beta)\right)^T \\ &= -2\left(f^T(X,\beta)y\right)+f^T(X,\beta)f(X,\beta)+f^T(X,\beta)f(X,\beta) \\ &= -2f^T(X,\beta)\left(y-f(X,\beta)\right) \\ &= -2\left.\frac{\partial f^T}{\partial \beta}\right|_{\beta_{NLS}}\left(y-f(X,\beta_{NLS})\right) \\ &= -2Z(\beta_{NLS})^T\left(y-f(X,\beta_{NLS})\right) \\ &\cong 0\end{aligned} \tag{4.29}$$

Berdasarkan persamaan (4.29) di atas, maka persamaan (4.26) terbukti kekonvergenannya, artinya suatu fungsi yang modelnya adalah nonlinier dapat dipenuhi.

Setelah didapatkan model estimasi parameter $\beta$ yang tidak dikenai multikolinieritas dengan metode *Nonlinier Least Square*, langkah selanjutnya menentukan parameter $\beta$ yang dikenai multikolinieritas. Penaksiran parameter $\beta$ pada fungsi produksi *Constant Elasticity of Substitution* yang dikenai multikolinieritas dengan menggunakan metode *Nonlinear Least Square* bertujuan untuk menghasilkan nilai parameter $\beta$, yaitu dengan meminimumkan fungsi *sum of square error* $S(\beta)$. Dalam Arofah (2015), dari persamaan (4.5) dengan memberikan $\rho$ sebagai penduga multikolinieritas, maka diperoleh

$$e = y - f(\rho X, \rho\beta) \tag{4.30}$$

Misalkan

$$\rho\beta = \beta^* \text{ dan } \rho X = X^*$$

sehingga untuk meminimumkan fungsi *sum of square error* $S\left(\beta^*\right)$ adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned} S &= e^T e \\ &= \left(y - f\left(X^*, \beta^*\right)\right)^T \left(y - f\left(X^*, \beta^*\right)\right) \\ &= y^T y - y^T f\left(X^*, \beta^*\right) - \left[f\left(X^*, \beta^*\right)\right]^T y + \left[f\left(X^*, \beta^*\right)\right]^T f\left(X^*, \beta^*\right) \\ &= y^T y - \left(y^T f\left(X^*, \beta^*\right)\right)^T - \left[f\left(X^*, \beta^*\right)\right]^T y + \left[f\left(X^*, \beta^*\right)\right]^T f\left(X^*, \beta^*\right) \\ &= y^T y - 2\left[f\left(X^*, \beta^*\right)\right]^T y + \left[f\left(X^*, \beta^*\right)\right]^T f\left(X^*, \beta^*\right) \end{aligned} \tag{4.31}$$

Selanjutnya untuk meminimumkan fungsi tersebut, dilakukan dengan cara mencari turunan pertama $S$ terhadap $\beta^*$ yaitu

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \beta^*} &= 0 - 2\frac{\partial\left[f\left(X^*, \beta^*\right)\right]^T y}{\partial \beta^{*T}} + \frac{\partial\left[f\left(X^*, \beta^*\right)\right]^T f\left(X^*, \beta^*\right)}{\partial \beta^{*T}} + \left[\frac{\partial\left[f\left(X^*, \beta^*\right)\right]^T f\left(X^*, \beta^*\right)}{\partial \beta^*}\right]^T \\ &= -2\frac{\partial\left[f\left(X^*, \beta^*\right)\right]^T y}{\partial \beta^{*T}} + 2\frac{\partial\left[f\left(X^*, \beta^*\right)\right]^T f\left(X^*, \beta^*\right)}{\partial \beta^{*T}} \end{aligned} \tag{4.32}$$

Dari hasil estimasi parameter persamaan (4.32) di atas disamadenganKan dengan nol, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} 0 &= -2\frac{\partial\left[f\left(X^*, \beta^*\right)\right]^T y}{\partial \beta^{*T}} + 2\frac{\partial\left[f\left(X^*, \beta^*\right)\right]^T f\left(X^*, \beta^*\right)}{\partial \beta^{*T}} \\ 2\frac{\partial\left[f\left(X^*, \beta^*\right)\right]^T y}{\partial \beta^{*T}} &= 2\frac{\partial\left[f\left(X^*, \beta^*\right)\right]^T f\left(X^*, \beta^*\right)}{\partial \beta^{*T}} \\ \frac{\partial\left[f\left(X^*, \beta^*\right)\right]^T y}{\partial \beta^{*T}} &= \frac{\partial\left[f\left(X^*, \beta^*\right)\right]^T f\left(X^*, \beta^*\right)}{\partial \beta^{*T}} \\ f\left(X^*, \beta^*\right) &= \left[\frac{\partial\left[f\left(X^*, \beta^*\right)\right]^T}{\partial \beta^{*T}}\right]^{-1} \frac{\partial\left[f\left(X^*, \beta^*\right)\right]^T y}{\partial \beta^{*T}} \\ &= \left[\left[f'\left(X^*, \beta^*\right)\right]^T\right]^{-1} \left[f'\left(X^*, \beta^*\right)\right]^T y \end{aligned} \tag{4.33}$$

Pada persamaan (4.33) fungsi $f\left(X^{*},\beta^{*}\right)$ adalah fungsi nonlinier, sehingga penaksiran nilai parameter $\beta^{*}$ diperlukan proses iterasi yang memberikan bentuk umum dari persamaan tersebut dengan menggunakan metode *Gauss-Newton* yaitu dengan mengaproksimasikan $f\left(X^{*},\beta^{*}\right)$ di sekitar $f\left(X^{*},\beta^{*1}\right)$ dengan nilai awal $\beta^{*1}$ yang menggunakan deret *Taylor* orde 1 sebagai berikut

$$\begin{aligned} f\left(X^{*},\beta^{*}\right) &\approx f\left(X^{*},\beta^{*1}\right)+\left.\frac{\partial f\left(X^{*},\beta^{*}\right)}{\partial \beta^{*T}}\right|_{\beta^{*1}}\left(\beta^{*}-\beta^{*1}\right) \\ &= f\left(X^{*},\beta^{*1}\right)+\left.\frac{\partial f\left(X^{*},\beta^{*}\right)}{\partial \beta^{*T}}\right|_{\beta^{*1}}\beta^{*}-\left.\frac{\partial f\left(X^{*},\beta^{*}\right)}{\partial \beta^{*T}}\right|_{\beta^{*1}}\beta^{*1} \end{aligned} \tag{4.34}$$

Jika dimisalkan

$$Z\left(\beta^{*1}\right)=\left.\frac{\partial f\left(X^{*},\beta^{*}\right)}{\partial \beta^{*T}}\right|_{\beta^{*1}}$$

maka persamaan (4.34) diperoleh hasil sebagai berikut

$$\begin{aligned} y &= f\left(X^{*},\beta^{*}\right)+e \\ &= f\left(X^{*},\beta^{*1}\right)+Z\left(\beta^{*1}\right)\beta^{*}-Z\left(\beta^{*1}\right)\beta^{*1}+e \end{aligned} \tag{4.35}$$

Dari persamaan (4.35) dapat dikonstruksi menjadi

$$y-f\left(X^{*},\beta^{*1}\right)+Z\left(\beta^{*1}\right)\beta^{*1}=Z\left(\beta^{*1}\right)\beta^{*}+e \tag{4.36}$$

Jika dimisalkan $y-f\left(X^{*},\beta^{1}\right)+Z\left(\beta^{*1}\right)\beta^{*1}=y^{*}\left(\beta^{*1}\right)$ maka persamaan (4.36) dapat ditulis kembali menjadi

$$y^{*}\left(\beta^{*1}\right)=Z\left(\beta^{*1}\right)\beta^{*}+e \tag{4.37}$$

Persamaan (4.37) di atas adalah bentuk fungsi produksi *Constant Elasticity of Substitution* yang dikenai multikolinieritas yang dikenal sebagai persamaan

*Pseudo-Linier*, selanjutnya dilakukan estimasi parameter $\beta^*$ yang dikenai multikolinieritas dengan metode *Least Square* untuk estimasi $\beta^{*n}$ yaitu

$$\begin{aligned} y^*\left(\beta^{*1}\right) &= Z\left(\beta^{*1}\right)\beta^* + e \\ y^*\left(\beta^{*1}\right) - Z\left(\beta^{*1}\right)\beta^* &= e \end{aligned} \tag{4.38}$$

Sehingga untuk meminimumkan fungsi *sum of square error* $S\left(\beta^*\right)$ dengan menggunakan metode *Least Squares* untuk taksiran $\beta^{*n}$ adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned} S &= e^T e \\ &= \left(y^*\beta^{*n} - Z\left(\beta^{*n}\right)\beta^*\right)^T \left(y^*\beta^{*n} - Z\left(\beta^{*n}\right)\beta^*\right) \\ &= \left(\beta^{*nT} y^{*T} - \beta^{*T} Z\left(\beta^{*n}\right)^T\right)\left(y^*\beta^{*n} - Z\left(\beta^{*n}\right)\beta^*\right) \\ &= \beta^{*nT} y^{*T} y^* \beta^{*n} - \beta^{*nT} y^{*T} Z\left(\beta^{*n}\right)\beta^* - \beta^{*T} Z\left(\beta^{*n}\right)^T \\ &\quad\; y^*\beta^{*n} + \beta^{*T} Z\left(\beta^{*n}\right)^T Z\left(\beta^{*n}\right)\beta^* \\ &= \beta^{*nT} y^{*T} y^* \beta^{*n} - \left(\beta^{*nT} y^{*T} Z\left(\beta^{*n}\right)\beta^*\right)^T - \beta^{*T} Z\left(\beta^{*n}\right)^T \\ &\quad\; y^*\beta^{*n} + \beta^{*T} Z\left(\beta^{*n}\right)^T Z\left(\beta^{*n}\right)\beta^* \\ &= \beta^{*nT} y^{*T} y^* \beta^{*n} - 2\beta^{*T} Z\left(\beta^{*n}\right)^T y^*\beta^{*n} + \beta^{*T} Z\left(\beta^{*n}\right)^T Z\left(\beta^{*n}\right)\beta^* \end{aligned} \tag{4.39}$$

Selanjutnya untuk meminimumkan fungsi tersebut, dilakukan dengan cara mencari turunan pertama $S$ terhadap $\beta^*$ yaitu

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \beta^{*T}} &= \beta^{*nT} y^{*T} y^* \beta^{*n} - 2\beta^{*T} Z\left(\beta^{*n}\right)^T y^*\beta^{*n} + \beta^{*T} Z\left(\beta^{*n}\right)^T Z\left(\beta^{*n}\right)\beta^* \\ &= 0 - 2Z\left(\beta^{*n}\right)^T y^*\beta^{*n} + Z\left(\beta^{*n}\right)^T Z\left(\beta^{*n}\right)\beta^* + \left(\beta^{*T} Z\left(\beta^{*n}\right)^T Z\left(\beta^{*n}\right)\beta^*\right)^T \\ &= -2Z\left(\beta^{*n}\right)^T y^*\beta^{*n} + 2Z\left(\beta^{*n}\right)^T Z\left(\beta^{*n}\right)\beta^* \end{aligned} \tag{4.40}$$

Dari hasil estimasi parameter persamaan (4.40) di atas disamadenganakan dengan nol, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} -2Z\left(\beta^{*n}\right)^T y^*\beta^{*n} + 2Z\left(\beta^{*n}\right)^T Z\left(\beta^{*n}\right)\beta^* &= 0 \\ Z\left(\beta^{*n}\right)^T Z\left(\beta^{*n}\right)\beta^* &= Z\left(\beta^{*n}\right)^T y^*\beta^{*n} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\beta^{*} &= \left(Z\left(\beta^{*n}\right)^{T} Z\left(\beta^{*n}\right)\right)^{-1} Z\left(\beta^{*n}\right)^{T} y^{*}\beta^{*n} \\
&= \left(Z\left(\beta^{*n}\right)^{T} Z\left(\beta^{*n}\right)\right)^{-1} Z\left(\beta^{*n}\right)^{T} \left(y-\left(f\left(X^{*},\beta^{*1}\right)\right)+Z\left(\beta^{*n}\right)\right)\beta^{*n} \\
&= Z\left(\beta^{*n}\right)\beta^{*n} + \left(Z\left(\beta^{*n}\right)^{T} Z\left(\beta^{*n}\right)\right)^{-1} Z\left(\beta^{*n}\right)^{T} \left(y-f\left(X^{*},\beta^{*n}\right)\right)
\end{aligned} \tag{4.41}
$$

Dari keseluruhan proses di atas akan diperoleh bentuk umum iterasi sebagai berikut

$$\beta^{*n+1} = Z\left(\beta^{*n}\right)\beta^{*n} + \left(Z\left(\beta^{*n}\right)^{T} Z\left(\beta^{*n}\right)\right)^{-1} Z\left(\beta^{*n}\right)^{T} \left(y-f\left(X^{*},\beta^{*n}\right)\right) \tag{4.42}$$

Selanjutnya menentukan estimasi parameter $\beta$ dengan metode *ridge* yang akan digunakan untuk menyelesaikan masalah multikolinieritas tersebut. Dalam menentukan parameter estimator *ridge* langkah pertama yaitu dengan meminimumkan jumlah kuadrat *error* untuk persamaan (4.4) sebagai berikut

$$
\begin{aligned}
y &= f\left(X,\beta\right)+e \\
e &= y-f\left(X,\beta\right)
\end{aligned}
$$

dengan menggunakan metode pengali *Langrange* yang meminimumkan fungsi

$$e^{t}e = \left(y-f\left(X,\beta_R\right)\right)^{T}\left(Y-f\left(X,\beta_R\right)\right) \tag{4.43}$$

dengan syarat pembatas

$$\beta_R{}^{T}\beta_R - k^{2} = 0 \tag{4.44}$$

Dimisalkan $e^{T}e = G$, maka persamaan (4.43) dengan syarat pembatas persamaan (4.44) dapat ditulis sebagai berikut

$$G = \left(y-f\left(X,\beta_R\right)\right)^{T}\left(y-f\left(X,\beta_R\right)\right)+c\left(\beta_R{}^{T}\beta_R-k^{2}\right) \tag{4.45}$$

dimana turunan $G$ terhadap $\widehat{\beta}_R$ memenuhi syarat

$$\left.\frac{\partial G}{\partial \beta_R}\right|_{\hat{\beta}_R}=0$$

dengan $c$ adalah pengali *Langrange* yang tidak bergantung pada $\hat{\beta}_R$ dan $c$ adalah konstanta positif berhingga.

Selanjutnya untuk mencari $\hat{\beta}_R$ yaitu dengan cara menjabarkan $\left.\frac{\partial G}{\partial \beta_R}\right|_{\hat{\beta}_R}=0$ sebagai berikut

$$\begin{aligned}
G &= e^T e \\
&= \left(y - f\left(X,\beta_R\right)\right)^T \left(y - f\left(X,\beta_R\right)\right) + c\left(\beta_R{}^T \beta_R - k^2\right) \\
&= y^T y - y^T f\left(X,\beta_R\right) - \left[f\left(X,\beta_R\right)\right]^T y \\
&\quad + \left[f\left(X,\beta_R\right)\right]^T f\left(X,\beta_R\right) + c\left(\beta_R{}^T \beta_R - k^2\right) \\
&= y^T y - \left(y^T f\left(X,\beta_R\right)\right)^T - \left[f\left(X,\beta_R\right)\right]^T y \\
&\quad + \left[f\left(X,\beta_R\right)\right]^T f\left(X,\beta_R\right) + c\left(\beta_R{}^T \beta_R - k^2\right) \\
&= y^T y - 2\left[f\left(X,\beta_R\right)\right]^T y + \left[f\left(X,\beta_R\right)\right]^T \\
&\quad f\left(X,\beta_R\right) + c\left(\beta_R{}^T \beta_R - k^2\right)
\end{aligned} \tag{4.46}$$

Untuk meminimumkan fungsi tersebut, dapat dilakukan dengan mencari turunan pertama $G$ terhadap $\beta_R$ yaitu

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial \beta_R} &= 0 - 2\frac{\partial\left[f\left(X,\beta_R\right)\right]^T y}{\partial \beta_R{}^T} + \frac{\partial\left[f\left(X,\beta_R\right)\right]^T f\left(X,\beta_R\right)}{\partial \beta_R{}^T} + \left[\frac{\partial\left[f\left(X,\beta_R\right)\right]^T f\left(X,\beta_R\right)}{\partial \beta_R}\right]^T \\
&\quad + \frac{\partial c\left(\beta_R{}^T \beta_R - k^2\right)}{\partial \beta_R{}^T} + \left[\frac{\partial c\left(\beta_R{}^T \beta_R - k^2\right)}{\partial \beta_R}\right]^T \\
&= -2\frac{\partial\left[f\left(X,\beta_R\right)\right]^T y}{\partial \beta_R{}^T} + \frac{\partial\left[f\left(X,\beta_R\right)\right]^T f\left(X,\beta_R\right)}{\partial \beta_R{}^T} + \left[\frac{\partial\left[f\left(X,\beta_R\right)\right] f\left(X,\beta_R\right)^T}{\partial \beta_R{}^T}\right]
\end{aligned}$$

$$+\frac{\partial c\left(\beta_R{}^T\beta_R-k^2\right)}{\partial\beta_R{}^T}+\left[\frac{\partial c\left(\beta_R\beta_R{}^T-k^2\right)}{\partial\beta_R{}^T}\right]$$

$$=-2\frac{\partial\left[f\left(X,\beta_R\right)\right]^T y}{\partial\beta_R{}^T}+2\frac{\partial\left[f\left(X,\beta_R\right)\right]^T f\left(X,\beta_R\right)}{\partial\beta_R{}^T}+2\frac{\partial c\left(\beta_R{}^T\beta_R-k^2\right)}{\partial\beta_R{}^T} \tag{4.47}$$

Kemudian dari hasil estimasi parameter persamaan (4.47) di atas disamadenganakan dengan nol, sehingga diperoleh

$$0=-2\frac{\partial\left[f\left(X,\beta_R\right)\right]^T y}{\partial\beta_R{}^T}+2\frac{\partial\left[f\left(X,\beta_R\right)\right]^T f\left(X,\beta_R\right)}{\partial\beta_R{}^T}+2\frac{\partial c\left(\beta_R{}^T\beta_R-k^2\right)}{\partial\beta_R{}^T}$$

$$2\frac{\partial\left[f\left(X,\beta_R\right)\right]^T y}{\partial\beta_R{}^T}=2\frac{\partial\left[f\left(X,\beta_R\right)\right]^T f\left(X,\beta_R\right)}{\partial\beta_R{}^T}+2\frac{\partial c\left(\beta_R{}^T\beta_R-k^2\right)}{\partial\beta_R{}^T}$$

$$\frac{\partial\left[f\left(X,\beta_R\right)\right]^T y}{\partial\beta_R{}^T}=\frac{\partial\left[f\left(X,\beta_R\right)\right]^T f\left(X,\beta_R\right)}{\partial\beta_R{}^T}+\frac{\partial c\left(\beta_R{}^T\beta_R-k^2\right)}{\partial\beta_R{}^T} \tag{4.48}$$

$$f\left(X,\beta_R\right)=\left[\frac{\partial\left[f\left(X,\beta_R\right)\right]^T}{\partial\beta_R{}^T}\right]^{-1}\frac{\partial\left[f\left(X,\beta_R\right)\right]^T y}{\partial\beta_R{}^T}+\frac{\partial c\left(\beta_R{}^T\beta_R-k^2\right)}{\partial\beta_R{}^T}$$

$$=\left[\left[f'\left(X,\beta_R\right)\right]^T\right]^{-1}\left[f'\left(X,\beta_R\right)\right]^T y+cI\hat{\beta}_R$$

Penaksiran nilai parameter $\hat{\beta}_R$ diperlukan proses iterasi yang memberikan bentuk umum dari persamaan tersebut menggunakan metode *Gauss-Newton* yaitu dengan mengaproksimasikan $f\left(X,\hat{\beta}_R\right)$ di sekitar $f\left(X,\hat{\beta}_R^1\right)$ dengan nilai awal $\hat{\beta}_R^1$ yang menggunakan deret *Taylor* orde 1 sebagai berikut

$$f\left(X,\hat{\beta}_R\right)\approx f\left(X,\hat{\beta}_R^1\right)+\left.\frac{\partial f\left(X,\hat{\beta}_R\right)}{\partial\hat{\beta}_R^T}\right|_{\hat{\beta}_R^1}\left(\hat{\beta}_R-\hat{\beta}_R^1\right)+cI\hat{\beta}_R$$

$$=f\left(X,\hat{\beta}_R^1\right)+\left.\frac{\partial f\left(X,\hat{\beta}_R\right)}{\partial\hat{\beta}_R^T}\right|_{\hat{\beta}_R^1}\hat{\beta}_R-\left.\frac{\partial f\left(X,\hat{\beta}_R\right)}{\partial\hat{\beta}_R^T}\right|_{\hat{\beta}_R^1}\hat{\beta}_R^1+cI\hat{\beta}_R \tag{4.49}$$

Jika dimisalkan

$$Z\left(\hat{\beta}_R^1\right)=\left.\frac{\partial f\left(X,\hat{\beta}_R\right)}{\partial \hat{\beta}_R^T}\right|_{\hat{\beta}_R^1}$$

maka persamaan (4.49) diperoleh hasil sebagai berikut

$$\begin{aligned} y &= f\left(X,\hat{\beta}_R\right)+e \\ &= f\left(X,\hat{\beta}_R^1\right)+Z\left(\hat{\beta}_R^1\right)\hat{\beta}_R-Z\left(\hat{\beta}_R^1\right)\hat{\beta}_R^1+cI\hat{\beta}_R+e \end{aligned} \quad (4.50)$$

Dari persamaan (4.50) dapat dikonstruksi menjadi

$$y-f\left(X,\hat{\beta}_R^1\right)+Z\left(\hat{\beta}_R^1\right)\hat{\beta}_R^1=Z\left(\hat{\beta}_R^1\right)\hat{\beta}_R+cI\hat{\beta}_R+e \quad (4.51)$$

Jika dimisalkan $y-f\left(X,\hat{\beta}_R^1\right)+Z\left(\hat{\beta}_R^1\right)\hat{\beta}_R^1=y^*\left(\hat{\beta}_R^1\right)$ maka persamaan (4.52) dapat ditulis kembali menjadi

$$y^*\left(\hat{\beta}_R^1\right)=Z\left(\hat{\beta}_R^1\right)\hat{\beta}_R+cI\hat{\beta}_R+e \quad (4.53)$$

Pada persamaan (4.53) ini dikenal sebagai persamaan *Pseudo-Linier*, kemudian dapat dilakukan estimasi parameter dengan metode *Least Square* untuk estimasi $\beta^2$ yaitu

$$\begin{aligned} y^*\left(\hat{\beta}_R^1\right) &= Z\left(\hat{\beta}_R^1\right)\hat{\beta}_R+cI\hat{\beta}_R \\ y^*\left(\hat{\beta}_R^1\right) &= \left(Z\left(\hat{\beta}_R^1\right)+cI\right)\hat{\beta}_R \\ \hat{\beta}_R &= \left(Z\left(\hat{\beta}_R^1\right)+cI\right)^{-1} y^*\left(\hat{\beta}_R^1\right) \end{aligned} \quad (4.54)$$

Selanjutnya setelah parameter $\hat{\beta}_R$ diperoleh, maka akan dicari fungsi $y^*\left(\hat{\beta}_R^1\right)=\left(Z\left(\hat{\beta}_R^1\right)+cI\right)\hat{\beta}_R$ sebagai berikut

$$
\begin{aligned}
\widehat{\beta}_R &= \left( Z\left(\widehat{\beta}_R^1\right) + cI \right)^{-1} y^*\left(\widehat{\beta}_R^1\right) \\
&= \left( Z\left(\widehat{\beta}_R^1\right) + cI \right)^{-1} \left( y - f\left(X, \widehat{\beta}_R^1\right) + Z\left(\widehat{\beta}_R^1\right)\widehat{\beta}_R^1 \right) \\
&= \left( Z\left(\widehat{\beta}_R^1\right) + cI \right)^{-1} y - \left( Z\left(\widehat{\beta}_R^1\right) + cI \right)^{-1} f\left(X, \widehat{\beta}_R^1\right) \\
&\quad + \left( Z\left(\widehat{\beta}_R^1\right) + cI \right)^{-1} Z\left(\widehat{\beta}_R^1\right)\widehat{\beta}_R^1 \\
&= \widehat{\beta}_R^1 + Z\left(\widehat{\beta}_R^1\right)\widehat{\beta}_R^1 (cI)^{-1} + \left( Z\left(\widehat{\beta}_R^1\right) + cI \right)^{-1} y \\
&\quad - \left( Z\left(\widehat{\beta}_R^1\right) + cI \right)^{-1} f\left(X, \widehat{\beta}_R^1\right)
\end{aligned}
\tag{4.55}
$$

Dengan langkah yang sama, maka itersi ke-2 untuk $\widehat{\beta}_R^2$, iterasi ke-3 untuk $\widehat{\beta}_R^3$, dan iterasi ke-4 untuk $\widehat{\beta}_R^4$ dapat ditulis sebagai berikut

$$\widehat{\beta}_R^2 = \widehat{\beta}_R^1 + Z\left(\widehat{\beta}_R^1\right)\widehat{\beta}_R^1 (cI)^{-1} + \left( Z\left(\widehat{\beta}_R^1\right) + cI \right)^{-1} y - \left( Z\left(\widehat{\beta}_R^1\right) + cI \right)^{-1} f\left(X, \widehat{\beta}_R^1\right) \tag{4.56}$$

$$\widehat{\beta}_R^3 = \widehat{\beta}_R^2 + Z\left(\widehat{\beta}_R^2\right)\widehat{\beta}_R^2 (cI)^{-1} + \left( Z\left(\widehat{\beta}_R^2\right) + cI \right)^{-1} y - \left( Z\left(\widehat{\beta}_R^2\right) + cI \right)^{-1} f\left(X, \widehat{\beta}_R^2\right) \tag{4.57}$$

$$\widehat{\beta}_R^4 = \widehat{\beta}_R^3 + Z\left(\widehat{\beta}_R^3\right)\widehat{\beta}_R^3 (cI)^{-1} + \left( Z\left(\widehat{\beta}_R^3\right) + cI \right)^{-1} y - \left( Z\left(\widehat{\beta}_R^3\right) + cI \right)^{-1} f\left(X, \widehat{\beta}_R^3\right) \tag{4.58}$$

Dari keseluruhan proses di atas akan diperoleh bentuk umum iterasi sebagai berikut

$$\widehat{\beta}_R^{n+1} = \widehat{\beta}_R^n + Z\left(\widehat{\beta}_R^n\right)\widehat{\beta}_R^n (cI)^{-1} + \left( Z\left(\widehat{\beta}_R^n\right) + cI \right)^{-1} y - \left( Z\left(\widehat{\beta}_R^n\right) + cI \right)^{-1} f\left(X, \widehat{\beta}_R^n\right) \tag{4.59}$$

Jika iterasi di atas dilakukan secara terus menerus, akan didapatkan sifat $\widehat{\beta}_R$ yang konvergen, yaitu

$$\widehat{\beta}_R = \widehat{\beta}_R^{n+1} \approx \widehat{\beta}_R^n \tag{4.60}$$

Maka akan diperoleh

$$\left(Z\left(\widehat{\beta}_R^n\right)+cI\right)^{-1}\left(y-f\left(X,\widehat{\beta}_R^n\right)\right)=0 \tag{4.61}$$

Persamaan (4.59) telah memenuhi syarat *firts order condition* (FOC), untuk mendapatkan nilai parameter $\beta$ yang konvergen dengan cara meminimumkan nilai *sum of square error* $S(\beta)$ sebagai berikut

$$\begin{aligned} G &= e^T e \\ &= \left(y-f(X,\beta_R)\right)^T\left(y-f(X,\beta_R)\right)+c\left(\beta_R{}^T\beta_R-k^2\right) \\ &= y^T y - y^T f(X,\beta_R) - \left[f(X,\beta_R)\right]^T y \\ &\quad + \left[f(X,\beta_R)\right]^T f(X,\beta_R) + c\left(\beta_R{}^T\beta_R-k^2\right) \\ &= y^T y - \left(y^T f(X,\beta_R)\right)^T - \left[f(X,\beta_R)\right]^T y \\ &\quad + \left[f(X,\beta_R)\right]^T f(X,\beta_R) + c\left(\beta_R{}^T\beta_R-k^2\right) \\ &= y^T y - 2\left[f(X,\beta_R)\right]^T y + \left[f(X,\beta_R)\right]^T \\ &\quad f(X,\beta_R) + c\left(\beta_R{}^T\beta_R-k^2\right) \end{aligned} \tag{4.62}$$

Kemudian untuk meminimumkan persamaan (4.62) di atas, dapat diperoleh dengan cara melakukan turunan pertama $S$ terhadap $\beta$ yaitu

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \beta_R} &= 0 - 2\frac{\partial\left[f(X,\beta_R)\right]^T y}{\partial \beta_R{}^T} + \frac{\partial\left[f(X,\beta_R)\right]^T f(X,\beta_R)}{\partial \beta_R{}^T} + \left[\frac{\partial\left[f(X,\beta_R)\right]^T f(X,\beta_R)}{\partial \beta_R}\right]^T \\ &\quad + \frac{\partial c\left(\beta_R{}^T\beta_R-k^2\right)}{\partial \beta_R{}^T} + \left[\frac{\partial c\left(\beta_R{}^T\beta_R-k^2\right)}{\partial \beta_R}\right]^T \\ &= -2\frac{\partial\left[f(X,\beta_R)\right]^T y}{\partial \beta_R{}^T} + \frac{\partial\left[f(X,\beta_R)\right]^T f(X,\beta_R)}{\partial \beta_R{}^T} + \left[\frac{\partial\left[f(X,\beta_R)\right] f(X,\beta_R)^T}{\partial \beta_R{}^T}\right] \\ &\quad + \frac{\partial c\left(\beta_R{}^T\beta_R-k^2\right)}{\partial \beta_R{}^T} + \left[\frac{\partial c\left(\beta_R\beta_R{}^T-k^2\right)}{\partial \beta_R{}^T}\right] \\ &= -2\frac{\partial\left[f(X,\beta_R)\right]^T y}{\partial \beta_R{}^T} + 2\frac{\partial\left[f(X,\beta_R)\right]^T f(X,\beta_R)}{\partial \beta_R{}^T} + 2\frac{\partial c\left(\beta_R{}^T\beta_R-k^2\right)}{\partial \beta_R{}^T} \end{aligned}$$

$$= -2\frac{\partial f^T}{\partial \hat{\beta}_R}\bigg|_{\hat{\beta}_R}\left(y - f\left(X, \hat{\beta}_R\right)\right) + 2cI$$

$$= -2Z\left(\hat{\beta}_R\right)^T\left(y - f\left(X, \hat{\beta}_R\right)\right) + 2cI \tag{4.63}$$

$$\cong 0$$

Berdasarkan persamaan (4.63) di atas, maka persamaan (4.61) terbukti kekonvergenannya, artinya suatu fungsi yang modelnya adalah nonlinier dapat dipenuhi.

Berdasarkan hasil tersebut, untuk estimasi parameter *ridge* dengan penyelesaian menggunakan iterasi *Gauss-newton* diperoleh hasil estimasi pada parameter $\hat{\beta}_R$ adalah sebagai berikut

$$\hat{\beta}_R^{n+1} = \hat{\beta}_R^n + Z\left(\hat{\beta}_R^n\right)\hat{\beta}_R^n\left(cI\right)^{-1} + \left(Z\left(\hat{\beta}_R^n\right) + cI\right)^{-1}\left(y - f\left(X, \hat{\beta}_R^n\right)\right) \tag{4.64}$$

### 4.1.3 Sifat-sifat Estimasi Parameter

Metode *Nonlinear Least Square* merupakan salah satu metode estimasi parameter yang digunakan untuk mengetahui hasil suatu estimasi, apakah telah memenuhi syarat-syarat estimasi yang baik atau tidak. Suatu estimasi dikatakan baik jika memenuhi sifat-sifat estimatornya, yaitu tak bias (*unbiased*), efisien, dan konsisten.

1. Tak Bias (*Unbiased*)

   a. Tak Bias (*Unbiased*) parameter $\beta$ yang tidak dikenai multikolinieritas

$$E[\beta] = E\left[\beta^n + \left(Z\left(\beta^n\right)^T Z\left(\beta^n\right)\right)^{-1} Z\left(\beta^n\right)^T\left(y - f\left(X, \beta^n\right)\right)\right]$$

$$= E\left[\beta^n\right] + \left(Z\left(\beta^n\right)^T Z\left(\beta^n\right)\right)^{-1} Z\left(\beta^n\right)^T E\left[\left(y - f\left(X, \beta^n\right)\right)\right]$$

$$= E\left[\beta^{n}\right] + \left(Z\left(\beta^{n}\right)^{T} Z\left(\beta^{n}\right)\right)^{-1} Z\left(\beta^{n}\right)^{T} E\left[e\right]$$
$$= \beta^{n}$$

Berdasarkan pembuktian estimasi parameter di atas bahwa estimasi parameter $\beta$ yang tidak dikenai multikolinieritas bersifat tak bias (*unbiased*), karena $E\left[\beta\right] = \beta^{n}$.

b. Tak Bias (*Unbiased*) parameter $\beta$ yang dikenai multikolinieritas

$$E\left[\beta^{*}\right] = E\left[Z\left(\beta^{*n}\right)\beta^{*n} + \left(Z\left(\beta^{*n}\right)^{T} Z\left(\beta^{*n}\right)\right)^{-1} Z\left(\beta^{*n}\right)^{T}\left(y - f\left(X^{*}, \beta^{*n}\right)\right)\right]$$
$$= E\left[Z\left(\beta^{*n}\right)\beta^{*n}\right] + \left(Z\left(\beta^{*n}\right)^{T} Z\left(\beta^{*n}\right)\right)^{-1} Z\left(\beta^{*n}\right)^{T} E\left[\left(y - f\left(X^{*}, \beta^{*n}\right)\right)\right]$$
$$= E\left[Z\left(\beta^{*n}\right)\beta^{*n}\right] + \left(Z\left(\beta^{*n}\right)^{T} Z\left(\beta^{*n}\right)\right)^{-1} Z\left(\beta^{*n}\right)^{T} E\left[e\right]$$
$$= Z\left(\beta^{*n}\right)\beta^{*n}$$

Berdasarkan pembuktian estimasi parameter di atas bahwa estimasi parameter $\beta^{*}$ yang dikenai multikolinieritas bersifat bias karena $E\left[\beta^{*}\right] = Z\left(\beta^{*n}\right)\beta^{*n}$.

c. Tak Bias (*Unbiased*) parameter $\widehat{\beta}_{R}$ *ridge*

$$E\left[\widehat{\beta}_{R}\right] = E\left[\widehat{\beta}_{R}^{n} + Z\left(\widehat{\beta}_{R}^{n}\right)\widehat{\beta}_{R}^{n}\left(cI\right)^{-1} + \left(Z\left(\widehat{\beta}_{R}^{n}\right) + cI\right)^{-1}\left(y - f\left(X, \widehat{\beta}_{R}^{n}\right)\right)\right]$$
$$= E\left[\widehat{\beta}_{R}^{n}\right] + Z\left(\widehat{\beta}_{R}^{n}\right)\widehat{\beta}_{R}^{n}\left(cI\right)^{-1} + \left(Z\left(\widehat{\beta}_{R}^{n}\right) + cI\right)^{-1} E\left[\left(y - f\left(X, \widehat{\beta}_{R}^{n}\right)\right)\right]$$
$$= E\left[\widehat{\beta}_{R}^{n}\right] + Z\left(\widehat{\beta}_{R}^{n}\right)\widehat{\beta}_{R}^{n}\left(cI\right)^{-1} + \left(Z\left(\widehat{\beta}_{R}^{n}\right) + cI\right)^{-1} E\left[e\right]$$
$$= \widehat{\beta}_{R}^{n} + Z\left(\widehat{\beta}_{R}^{n}\right)\widehat{\beta}_{R}^{n}\left(cI\right)^{-1}$$

Berdasarkan pembuktian estimasi parameter di atas bahwa estimasi parameter $\widehat{\beta}_R$ yang tidak dikenai multikolinieritas bersifat bias, karena $E\left[\widehat{\beta}_R\right]=\widehat{\beta}_R^n+Z\left(\widehat{\beta}_R^n\right)\widehat{\beta}_R^n(cI)^{-1}$.

2. Matriks Variansi-Kovariansi Parameter $\widehat{\beta}_R$ *Ridge*

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}\left[\widehat{\beta}_R\right] &= E\left[\widehat{\beta}_R\widehat{\beta}_R^T\right] \\
&= E\left[\left(\widehat{\beta}_R^n+Z\left(\widehat{\beta}_R^n\right)\widehat{\beta}_R^n(cI)^{-1}+\left(Z\left(\widehat{\beta}_R^n\right)+cI\right)^{-1}\left(y-f\left(X,\widehat{\beta}_R^n\right)\right)\right)\right. \\
&= E\left[\left(\widehat{\beta}_R^n+Z\left(\widehat{\beta}_R^n\right)\widehat{\beta}_R^n(cI)^{-1}+\left(Z\left(\widehat{\beta}_R^n\right)+cI\right)^{-1}-f\left(X,\widehat{\beta}_R^n\right)\right)E\left[y^Ty\right]\right. \\
&\qquad \left.\left(\widehat{\beta}_R^n+Z\left(\widehat{\beta}_R^n\right)\widehat{\beta}_R^n(cI)^{-1}+\left(Z\left(\widehat{\beta}_R^n\right)+cI\right)^{-1}-f\left(X,\widehat{\beta}_R^n\right)\right)^T\right] \\
&= \sigma^2A^TA
\end{aligned}$$

Persamaan di atas disederhanakan menjadi $\operatorname{cov}\left[\widehat{\beta}_R\right]=\sigma^2A^TA$ dengan $E\left[y^Ty\right]=\sigma^2$, dan $A=\widehat{\beta}_R^n+Z\left(\widehat{\beta}_R^n\right)\widehat{\beta}_R^n(cI)^{-1}+\left(Z\left(\widehat{\beta}_R^n\right)+cI\right)^{-1}-f\left(X,\widehat{\beta}_R^n\right)$.

Dari pembuktian di atas diperoleh bahwa kovariansi dari $\widehat{\beta}_R$ adalah $\sigma^2$ maka variansi dari $\widehat{\beta}_R$ adalah $\sigma^2 trace$, sehingga

$$\begin{aligned}
\operatorname{var}\left[\widehat{\beta}_R\right] &= \sigma^2 trace\left(\widehat{\beta}_R^n+Z\left(\widehat{\beta}_R^n\right)\widehat{\beta}_R^n(cI)^{-1}+\left(Z\left(\widehat{\beta}_R^n\right)+cI\right)^{-1}-f\left(X,\widehat{\beta}_R^n\right)\right) \\
&\qquad \left(\widehat{\beta}_R^n+Z\left(\widehat{\beta}_R^n\right)\widehat{\beta}_R^n(cI)^{-1}+\left(Z\left(\widehat{\beta}_R^n\right)+cI\right)^{-1}-f\left(X,\widehat{\beta}_R^n\right)\right)^T
\end{aligned}$$

Bukti:

$$\operatorname{var}\left[\hat{\beta}_R\right] = \left(\hat{\beta}_R^n + Z\left(\hat{\beta}_R^n\right)\hat{\beta}_R^n(cI)^{-1} + \left(Z\left(\hat{\beta}_R^n\right) + cI\right)^{-1} - f\left(X, \hat{\beta}_R^n\right)\right)$$

$$\left[\sigma^2 trace\left(\hat{\beta}_R^n + Z\left(\hat{\beta}_R^n\right)\hat{\beta}_R^n(cI)^{-1} + \left(Z\left(\hat{\beta}_R^n\right) + cI\right)^{-1} - f\left(X, \hat{\beta}_R^n\right)\right)^T\right]$$

$$= \left(\hat{\beta}_R^n + Z\left(\hat{\beta}_R^n\right)\hat{\beta}_R^n(cI)^{-1} + \left(Z\left(\hat{\beta}_R^n\right) + cI\right)^{-1} - f\left(X, \hat{\beta}_R^n\right)\right)$$

$$\left[\sigma^2 trace\, I\left(\hat{\beta}_R^n + Z\left(\hat{\beta}_R^n\right)\hat{\beta}_R^n(cI)^{-1} + \left(Z\left(\hat{\beta}_R^n\right) + cI\right)^{-1} - f\left(X, \hat{\beta}_R^n\right)\right)^T\right]$$

$$= \sigma^2 trace\left(\hat{\beta}_R^n + Z\left(\hat{\beta}_R^n\right)\hat{\beta}_R^n(cI)^{-1} + \left(Z\left(\hat{\beta}_R^n\right) + cI\right)^{-1} - f\left(X, \hat{\beta}_R^n\right)\right)$$

$$\left(\hat{\beta}_R^n + Z\left(\hat{\beta}_R^n\right)\hat{\beta}_R^n(cI)^{-1} + \left(Z\left(\hat{\beta}_R^n\right) + cI\right)^{-1} - f\left(X, \hat{\beta}_R^n\right)\right)^T$$

$$= \sigma^2 trace\, A^T A$$

3. *Means Square Error*

   a. *Sum of Square Regression* (JKR)

$$JKR = \sum_{i=1}^{n}\left(\hat{y}_i - \bar{\hat{y}}\right)^2$$

   b. *Sum of Square Error* (JKS)

$$JKS = e^T e$$

$$= \left(y - f\left(X, \hat{\beta}_R\right)\right)^T \left(y - f\left(X, \hat{\beta}_R\right)\right)$$

   c. *Sum of Square Total* (JKT)

$$JKT = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \bar{y}\right)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - 2\bar{y}\sum_{i=1}^{n} y_i + n\bar{y}^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - 2\bar{y}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i + n\bar{y}^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - 2\bar{y}n\bar{y} + n\bar{y}^2$$

$$= y_i^T y_i - 2\bar{y}n\bar{y} + n\bar{y}^2$$

$$= \hat{y}_i^T \hat{y}_i - n\bar{\hat{y}}^2 + \hat{e}^T \hat{e}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left( \hat{y}_i - \bar{\hat{y}} \right)^2 + \hat{e}^T \hat{e}$$

$$= JKR + JKS$$

## 4.2 Penyelesaian Multikolinieritas pada Model Fungsi Produksi *Constant Elasticity of Substitution* dengan Metode *Ridge*

### 4.2.1 Deteksi Multikolinieritas pada Model Fungsi Produksi *Constant Elasticity of Substitution* pada Data Pengaruh Kapital dan Tenaga Kerja terhadap *Output Drachmas*

#### 4.2.1.1 Data

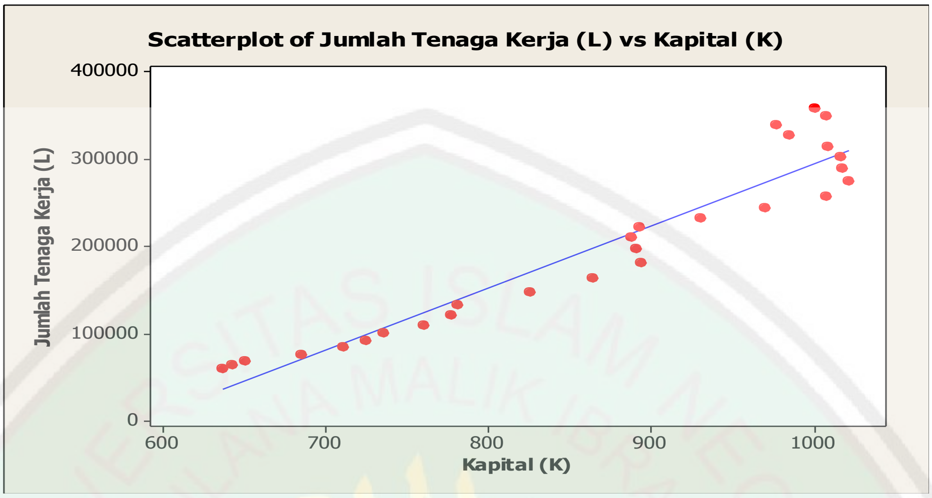
Contoh kasus pada penelitian yang berjudul penyelesaian multikolinieritas pada model fungsi produksi *Constant Elasticity of Substitution* dengan metode *ridge* yaitu menggunakan data yang diadopsi dari "*Gujarati (2010:289)*, yaitu kapital sebagai variabel $K$, tenaga kerja sebagai variabel $L$, dan *output drachmas* sebagai variabel $Q$. Data tersebut merupakan data sektor industri dari perekonomian Yunani periode 1961-1987 (data dalam Lampiran 1).

#### 4.2.1.2 Deteksi Multikolinieritas

Untuk deteksi multikolinieritas ada beberapa langkah yang dilakukan yaitu sebagai berikut

1. Plot Variabel Bebas

Pada langkah ini akan dilihat apakah terdapat hubungan yang linier antara variabel-variabel bebas pada data sebagai berikut




Gambar 4.1. Plot Variabel Bebas Jumlah Tenaga Kerja dengan Banyaknya Usaha Mikro

Dari Gambar 4.1 di atas, dapat dilihat bahwa hubungan antara variabel bebas jumlah tenaga kerja dengan kapital terlihat membentuk pola garis lurus maka dapat disimpulkan bahwa antara variabel bebas tersebut memiliki hubungan yang linier. Hal ini juga ditunjukkan dengan tingginya nilai $R-square$ yang mendekati 1 yaitu sebesar $0,979$.

2. Koefisien Korelasi Parsial

Cara kedua adalah dengan melihat keeratan hubungan antara dua variabel bebas atau yang dikenal dengan istilah korelasi. Dengan bantuan *software* SPSS.16 di diperoleh koefisien korelasi parsial sebagai berikut

$$r_{KK} = 1 \qquad r_{LK} = -0,955$$

$$r_{KL} = -0,955 \qquad r_{LL} = 1$$

sehingga korelasi parsial antar variabel bebasnya dapat dibuat dalam bentuk matriks korelasi $R$ sebagai berikut

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -0,955 \\ -0,955 & 1 \end{bmatrix}$$

Dari matriks $R$ terlihat bahwa korelasi antara variabel bebasnya sangat tinggi mendekati nilai $1$. Ini menunjukkan bahwa adanya multikolinieritas antara variabel bebasnya.

3. Determinan Matriks Korelasi

Dari matriks korelasi $R$ dapat dihitung determinannya, yaitu:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -0,955 \\ -0,955 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|R| = 0,08798$$

Nilai determinan dari matriks korelasi $R$ mendekati nol, hal ini menunjukkan bahwa pada data tersebut memuat tingkat multikolinieritas tinggi.

4. Nilai Eigen dari Matriks $Z^T Z$

Dengan menggunakan bantuan *software* SPSS.16, diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = 0.109$ dan $\lambda_2 = 0,001$. Kedua nilai eigen tersebut mendekati nol, ini berarti bahwa terdapat multikolinieritas. Selain itu multikolinieritas dapat diukur dalam bentuk rasio dari nilai terbesar dan terkecil dari nilai eigen, yaitu $\varphi = \frac{\lambda_{maks}}{\lambda_{\min}}$, yang disebut nilai kondisi dari matriks korelasi. Nilai $\varphi$ yang besar mengindikasikan multikolinieritas yang serius meskipun tergolong multikolinieritas agak kuat.

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{\lambda_{maks}}{\lambda_{\min}} \\ &= \frac{0.109}{0,001} \\ &= 109 \end{aligned}$$

5. Uji *Variance Inflation Vactors* (VIF)

Pada uji ini akan dilihat apakah nilai *Variance Inflation Vactors* (VIF) untuk masing-masing variabel lebih besar dari $10$ atau tidak. Apabila nilai *Variance Inflation Vactors* (VIF) lebih besar dari $10$, maka diindikasikan model tersebut memiliki gejala multikolinieritas. Dengan menggunakan bantuan *software* SPSS.16, bahwa seluruh variabel bebas memiliki nilai *Variance Inflation Vactors* (VIF) sebesar $11{,}303$. Dapat disimpulkan bahwa model ini memiliki masalah multikolinieritas.

Dari berbagai uji di atas, setiap proses pemeriksaan menunjukkan masalah multikolinieritas dalam data yang dianalisis. Selanjutnya menentukan nilai parameter $\beta$ pada model fungsi produksi *Constant Elasticity of Substitutions* dengan metode *Nonlinear Least Square* menggunakan iterasi *Gauss-Newton*. Dengan jumlah iterasi sebanyak 2000 iterasi untuk mencapai $S$ yang konvergen, dan diberikan nilai awal parameter $\beta_1 = 0.1$ $\beta_2 = 0.9$ $\beta_3 = 0.1$ dan $\beta_4 = 1.5$ diperoleh hasil sebagai berikut

Tabel 4.1 Hasil Iterasi *Gauss-Newton* pada Fungsi Produksi *Constant Elasticity of Substitution* dengan Metode *Nonlinear Least Square*

| $n$ | $\beta_1$ | $\beta_2$ | $\beta_3$ | $\beta_4$ | $S$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.1 | 0.9 | 0.1 | 1.5 | |
| 792 | 0.0446248 81021258 | 0.9999938 02119420 | 7.3726614 81132685 | 1.1602063 39717265 | 3.8047974256 31195 |
| 800 | 0.0446246 94313335 | 0.9999938 02213958 | 7.3726700 75841134 | 1.1602068 91342668 | 3.8047973867 97729 |
| 815 | 0.0446244 12956771 | 0.9999938 02356818 | 7.3726830 52772436 | 1.1602077 23306817 | 3.8047973295 65705 |
| 890 | 0.0446237 69990504 | 0.9999938 02685499 | 7.3727128 21594229 | 1.1602096 29686061 | 3.8047972041 55295e |
| 935 | 0.0446236 54664649 | 0.9999938 02745137 | 7.3727181 96717337 | 1.1602099 73185979 | 3.8047971822 59889 |

Lanjutan Tabel 4.1

| $n$ | $\beta_1$ | $\beta_2$ | $\beta_3$ | $\beta_4$ | $S$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1008 | 0.04462359 1428036 | 0.9999938 02778075 | 7.372722 359773285 | 1.1602101 62198601 | 3.8047971702 64601 |
| 1030 | 0.04462358 4634019 | 0.9999938 02782119 | 7.3727215 22413324 | 1.1602101 82477906 | 3.8047971687 96111 |
| 1083 | 0.00044623 5763651 | 0.0099999 38027870 | 0.0737272 19644074 | 0.0116021 02072208 | 3.8047971670 34370 |

Hasil pengolahan data dengan bantuan *Software* MATLAB.7.10.0 (R2010a) dengan waktu hitung 1.697510248171237

Dari Tabel 4.1 di atas menunjukkan bahwa dengan jumlah iterasi sebanyak 2000 iterasi, diperoleh nilai optimum (konvergen) pada iterasi ke-1083. Sehingga nilai konvergensi $\beta$ pada model fungsi produksi *Constant Elasticity of Substitutions* yang dikenai multikolinieritas adalah sebagai berikut

Tabel 4.2 Nilai Konvergensi $\beta$

| | |
|---|---|
| $\beta_1$ | 0.000446235763651 |
| $\beta_2$ | 0.009999938027870 |
| $\beta_3$ | 0.073727219644074 |
| $\beta_4$ | 0.011602102072208 |
| $S$ | 3.804797167034370 |

Hasil pengolahan data dengan *Software* MATLAB.7.10.0 (R2010a) dengan waktu hitung 0.636732370707977

Dari data pada Tabel 4.2 di atas diperoleh persamaan fungsi produksi *Constant Elasticity of Substitution* yang dikenai multikolinieritas sebagai berikut

$$Q_t = \beta_1 \left[ \beta_2 L_t^{\beta_3} + (1-\beta_2) K_t^{\beta_3} \right]^{\frac{\beta_4}{\beta_3}}$$

dengan

$\beta_1 =$ 0.000446235763651

$\beta_2 = 0.009999938027870$

$\beta_3 = 0.073727219644074$

$\beta_4 = 0.011602102072208$

### 4.2.2 Penyelesaian Multikolinieritas pada Model Fungsi Produksi *Constant Elasticity of Substitution* dengan Metode *Ridge*

Untuk menghilangkan kondisi buruk yang ditimbulkan oleh adanya multikolinieritas dalam data yang dianalisis, dan juga memudahkan dalam penangan multikolinieritas, maka akan dilakukan proses pemusatan dan penskalaan yang diperoleh hasil sebagai berikut.

Tabel 4.3 Hasil Pemusatan dan Peskalaan Data

| No. | $Q^*$ | $K^*$ | $L^*$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 5,09901975 | 5,099018732 | 5,099322799 |
| 2 | 5,09902098 | 5,099019838 | 5,099814299 |
| 3 | 5,099017539 | 5,099021023 | 1,612633181 |
| 4 | 5,099020342 | 5,099021513 | 5,099280576 |
| 5 | 5,099020949 | 5,099020838 | 5,098827471 |
| 6 | 5,09901988 | 5,099021079 | 5,099337748 |
| 7 | 5,099024905 | 5,099021024 | 5,099840256 |
| 8 | 5,099042889 | 5,099021644 | 5,099403579 |
| 9 | 5,099014852 | 5,09901952 | 5,101674641 |
| 10 | 5,099023786 | 5,099018587 | 5,099378882 |
| 11 | 5,099040199 | 5,099020611 | 5,096153846 |
| 12 | 5,099068183 | 5,099021299 | 5,217391304 |
| 13 | 5,099084328 | 5,099020508 | 5,099380906 |
| 14 | 5,099021435 | 5,099257725 | 5,099099099 |
| 15 | 5,099024752 | 5,099028445 | 5,10373444 |
| 16 | 5,099025521 | 5,099012114 | 5,104166667 |
| 17 | 5,099021257 | 5,099022347 | 5,102505695 |
| 18 | 5,099022184 | 5,09902028 | 5,100095329 |
| 19 | 5,099021734 | 5,099019725 | 5,099150142 |
| 20 | 5,099024871 | 5,099019498 | 5,100064558 |
| 21 | 5,099019698 | 5,099020521 | 5,099206349 |
| 22 | 5,099017667 | 5,781123997 | 5,099866844 |
| 23 | 5,099024323 | 5,729754644 | 5,098314607 |

Tabel Lanjutan 4.3

| | | | |
|---|---|---|---|
| 24 | 5,099026504 | 5,651687513 | 5,100166945 |
| 25 | 5,099021167 | 5,099021107 | 5,100491291 |
| 26 | 5,099019466 | 5,099019986 | 5,098939929 |
| 27 | 5,099021167 | 5,099019784 | 5,096654275 |

Data hasil pengolahan Excel 2007.

Dalam proses pengestimasian regresi *ridge*, pemilihan tetapan bias $c$ merupakan hal yang paling penting. Penentuan tetapan bias $c$ ditentukan dengan persamaan sebagai berikut

$$c = \max\left(\frac{1}{q_j}\right) \tag{4.64}$$

dengan

$$\begin{aligned} q_j &= \frac{\lambda_{\max}}{(n-p)\varphi^2 + \lambda_{\max}\alpha_j{}^2} \\ &= \frac{0{,}109}{(27-2)0{,}092451909 + (0{,}109)(0{,}08798)} \\ &= 0{,}045035782 \end{aligned} \tag{4.65}$$

sehingga diperoleh $c$

$$\begin{aligned} c &= \max\left(\frac{1}{q_j}\right) \\ &= \max\left(\frac{1}{0{,}045035782}\right) \\ &= 0{,}430869649 \end{aligned}$$

Harga $c = 0{,}430869649$ ini setelah data dipusatkan dan dilakukan pengujian kembali memberikan nilai $VIF = 2{,}644$. Besarnya nilai $VIF = 2{,}644$ ini tidak memenuhi multikolinieritas karena $VIF = 2{,}644 < 10$, dan pada nilai $c$ ini menunjukkan koefisien $\widehat{\beta}_R$ lebih stabil.

Dari berbagai uji di atas, setiap proses pemeriksaan menunjukkan masalah multikolinieritas dalam data yang dianalisis. Selanjutnya menentukan nilai parameter $\beta$ pada model fungsi produksi *Constant Elasticity of Substitutions* dengan metode *Nonlinear Least Square* menggunakan iterasi *Gauss-Newton*. Dengan jumlah iterasi sebanyak 100 iterasi untuk mencapai $S$ yang konvergen, dan diberikan nilai awal parameter $\beta_1 = 1$ $\beta_2 = 0.3$ $\beta_3 = 0.2$ dan $\beta_4 = 1$ diperoleh hasil sebagai berikut

Tabel 4.4 Hasil Iterasi *Gauss-Newton* pada Fungsi Produksi *Constant Elasticity of Substitution* dengan Metode *Nonlinear Least Square*

| $N$ | $\beta_1$ | $\beta_2$ | $\beta_3$ | $\beta_4$ | $S$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0.3 | 0.2 | 1 | |
| 1 | 2.1308033 96224976 | 0.3930565 42158127 | 0.10410235 2261543 | 1.2918565 02532959 | 7.2219570034 40120 |
| 2 | 2.1308033 96224976 | 0.3930565 42158127 | 0.10410235 2261543 | 1.2918565 02532959 | 7.2219570034 40121 |

Hasil pengolahan data dengan bantuan *Software* MATLAB.7.10.0 (R2010a) dengan waktu hitung 0.028402061701370

Dari Tabel 4.4 di atas menunjukkan bahwa dengan jumlah iterasi sebanyak 100 iterasi, diperoleh nilai optimum (konvergen) pada iterasi ke-2. Sehingga nilai konvergensi $\beta$ pada model fungsi produksi *Constant Elasticity of Substitutions* adalah sebagai berikut

Tabel 4.5 Nilai Konvergensi $\beta$

| | |
|---|---|
| $\beta_1$ | 2.130803396224976 |
| $\beta_2$ | 0.393056542158127 |
| $\beta_3$ | 0.104102352261543 |
| $\beta_4$ | 1.291856502532959 |
| $S$ | 7.221957003440121 |

Hasil pengolahan data dengan *Software* MATLAB.7.10.0 (R2010a) dengan waktu hitung 0.028402061701370

Dari data pada Tabel 4.5 di atas diperoleh persamaan fungsi produksi *Constant Elasticity of Substitution* sebagai berikut

$$Q_t^* = \beta_1\left[\beta_2 L_t^{*\beta_3} + (1-\beta_2)K_t^{*\beta_3}\right]^{\frac{\beta_4}{\beta_3}}$$

dengan

$\beta_1 = 2.130803396224976$

$\beta_2 = 0.393056542158127$

$\beta_3 = 0.104102352261543$

$\beta_4 = 1.291856502532959$

Dari proses di atas dapat disimpulkan bahwa dengan tetapan bias $c$ sebesar $c = 0,430869649$ memberikan nilai VIF yang tidak memenuhi multikolinieritas sebesar $VIF = 2,644$. Artinya multikolinieritas pada model fungsi produksi *Constant Elasticity of Substitution* untuk Data Pengaruh Kapital dan Tenaga Kerja terhadap *Output Drachmas* dapat diselesaikan dengan metode *ridge*.

#### 4.2.2.1 Uji Parameter

Persamaan fungsi produksi *Constant Elasticity of Substitution* yang diperoleh:

$$Q_t^* = \beta_1\left[\beta_2 L_t^{*\beta_3} + (1-\beta_2)K_t^{*\beta_3}\right]^{\frac{\beta_4}{\beta_3}}$$

dengan

$\beta_1 = 2.130803396224976$

$\beta_2 = 0.393056542158127$

$\beta_3 = 0.104102352261543$

$\beta_4 = 1.291856502532959$

Kemudian akan dilakukan uji parameter sebagai berikut:

1. Hipotesis

$H_0 : \beta_i = 0$ (koefisien regresi tidak signifikan)

$H_1 : \beta_i \neq 0$ (koefisien regresi signifikan)

2. Tingkat signifikansi $(\alpha)$

$\alpha = 0,05$

3. Uji statistik yang digunakan dalam hal ini yaitu $uji - t$

$$t = \frac{b_i}{S_{b_i}}$$

dengan

$b_i$ = Koefisien regresi variabel-$i$

$S_{b_i}$ = Simpangan baku variabel-$i$

4. Kriteria keputusan

$H_0$ diterima jika $\left|t_{hitung}\right| \leq t_{\left(\frac{\alpha}{2}, n-k-1\right)}$

$H_0$ ditolak jika $\left|t_{hitung}\right| > t_{\left(\frac{\alpha}{2}, n-k-1\right)}$

5. Hasil: dengan taraf signifikansi $\alpha = 0,05$ maka $t_{(0.10,24)} = 2,064$, maka dapat disimpulkan

| No | $\beta_i$ | $\left\|t_{hitung}\right\|$ | $t_{tabel}$ | Kesimpulan |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2.130803396224976 | 2,623 | 2,064 | Signifikan |
| 2 | 0.393056542158127 | 2,086 | | Signifikan |
| 3 | 0.104102352261543 | 2,128 | | Signifikan |
| 4 | 1.291856502532959 | 2,294 | | Signifikan |

## 4.3 Integrasi al-Quran dengan Multikolinieritas

Pada bab sebelumnya telah dijelaskan tentang hubungan linier yang terjadi antar manusia. Terjalinnya hubungan linier ini tidak hanya berdampak positif bagi umat manusia, melainkan juga dapat menimbulkan dampak yang negatif seperti terjadinya perselisihan dan persekutuan di antara mereka. Perselisihan dan persekutuan ini timbul akibat antara mereka saling mengolok-olok, mengejek serta menghina dan panggil-memanggil dengan gelar yang buruk yang telah ditegaskan Allah Swt. pada ayat-ayat sebelumnya, sehingga dapat merusak kepercayaan, kedekatan, persahabatan dan kasih sayang yang ada di antara mereka. Perbuatan tersebut dapat dikatakan sebagai penyimpangan, karena selain melenceng dari komitmen diciptakannya manusia sebagai makhluk sosial, yaitu dijadikannya manusia dalam berkelompok-kelompok umat, suku dan bangsa-bangsa yang berbeda yang tak lain hanyalah agar tercipta hubungan, saling kenal-mengenal, dan saling bekerjasama antar mereka. Hal ini juga telah melanggar apa yang diperintahkan Allah Swt..

Penyimpangan tersebut merupakan bentuk ujian dari Allah Swt. yaitu untuk menguji seberapa besar pengabdian juga keimanan mereka kepada Allah Swt.. Allah Swt. telah memberi kesempatan kepada manusia untuk segera bertaubat terhadap penyimpangan yang telah mereka lakukan terdapat pada surat al-Nisaa'/4:110 yaitu sebagai berikut

وَمَن يَعۡمَلۡ سُوٓءًا أَوۡ يَظۡلِمۡ نَفۡسَهُۥ ثُمَّ يَسۡتَغۡفِرِ ٱللَّهَ يَجِدِ ٱللَّهَ غَفُورٗا رَّحِيمٗا ١١٠

*"dan barangsiapa yang mengerjakan kejahatan dan menganiaya dirinya, kemudian ia mohon ampun kepada Allah, niscaya ia mendapati Allah Maha Pengampun lagi Maha Penyayang"* (QS. Al-Nisaa'/4:110).

Dalam tafsir Ibnu Kasir (Kasir, 2001:479-485), ayat di atas menyatakan Allah Swt. memberitakan tentang kemurahan dan kedermawanan-Nya bahwa semua orang yang bertobat kepada-Nya, pasti Dia menerima tobatnya atas semua dosa yang telah ia lakukan. Ali ibnu Abu Thalhah meriwayatkan dari Ibnu Abbas. Ibnu Abbas telah mengatakan sehubungan dengan ayat ini, bahwa Allah Swt. memberitahukan kepada hamba-hamba-Nya tentang ampunan-Nya, sifat penyantun-Nya, kemurahan-Nya, keluasan rahmat-Nya, dan pemaaf-Nya yaitu baik yang melakukan dosa kecil atau sekalipun dosa-dosa yang lebih besar daripada langit, bumi, dan gunung. Imam Ahmad mengatakan, telah menceritakan kepada kami Abdur-Razzaq, telah menceritakan kepada kami Abdur-Rahman ibnu Mahdi, telah menceritakan kepada kami Syu'bah, dari Usman ibnu Mugirah yang menceritakan bahwa ia pernah mendengar Ali ibnu Rabi'ah dari Bani Asad menceritakan hadits kepada Asma atau Ibnu Asma dari Bani Fazzarah, bahwa Ali r.a. pernah mengatakan, "Apabila aku mendengar dari RasulullahSaw. sesuatu hal, maka Allah memberikan manfaat kepadaku mengenainya menurut apa yang dikehendaki-Nya. Telah menceritakan kepadaku Abu Bakar As-Siddiq, dan memang Abu Bakar itu orangnya *siddiq*, ia mengatakan bahwa Rasulullah Saw. pernah bersabda: "*Tidak sekali-kali seorang muslim melakukan suatu dosa, lalu ia melakukan wudu dan salat dua rakaat, kemudian memohon ampun kepada Allah untuk dosa tersebut, melainkan Allah memberikan ampun baginya".*

Berdasarkan uraian di atas, dapat diambil kesimpulan bahwa hubungan yang linier antar sesama manusia tidak hanya menimbulkan dampak positif melainkan juga berdampak negatif. Dampak negatif tersebut merupakan bentuk penyimpangan yang dilakukan olehnya. Dalam hal ini Allah Swt. telah memberikan kesempatan manusia yang melakukan penyimpangan atau penyalahgunaan hubungan yang linier tersebut untuk bertaubat kepada-Nya sampai datangnya hari kiamat. Hal ini suatu wujud bahwa Allah Swt. Maha Pengampun dan Maha Penyayang. Begitu pula multikolinieritas pada model fungsi produksi *Constant Elasticity of Substitutions* dengan contoh kasus data sektor industri dari perekonomian Yunani periode 1961-1987. Multikolinieritas ini tidak langsung dihilangkan. Akan tetapi, multikolinieritas diolah dengan menentukan nilai konstanta pengali *Langrange* dan estimator parameter *ridge* yang dapat mengurangi tingkat multikolinieritas, sehingga pengambilan keputusan untuk ketepatan model fungsi tersebut menjadi lebih baik dalam menjelaskan sektor industri dari perekonomian Yunani periode 1961-1987 yaitu dengan melihat nilai koefisien korelasi model fungsi produksi *Constant Elasticity of Substitutions* tanpa multikolinieritas.

## BAB V

## PENUTUP

### 5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada bab sebelumnya, maka dapat dibuat kesimpulan sebagai berikut

1. Penyelesaian model fungsi produksi *Constant Elasticity of Substitutions* dengan metode *Nonlinear Least Square* menggunakan iterasi *Gauss*-Newton diperoleh bentuk estimasi parameter sebagai berikut
   a. Estimasi model fungsi produksi *Constant Elasticity of Substitutions* yang tidak dikenai multikolinieritas

$$\beta^{n+1} = \beta^n + \left( Z(\beta^n)^T Z(\beta^n) \right)^{-1} Z(\beta^n)^T \left( y - f(X, \beta^n) \right)$$

   b. Estimasi model fungsi produksi *Constant Elasticity of Substitutions* yang dikenai multikolinieritas

$$\beta^{*n+1} = Z(\beta^{*n})\beta^{*n} + \left( Z(\beta^{*n})^T Z(\beta^{*n}) \right)^{-1} Z(\beta^{*n})^T \left( y - f(X^*, \beta^{*n}) \right)$$

   c. Estimasi model fungsi produksi *Constant Elasticity of Substitutions* dengan metode *ridge*

$$\widehat{\beta}_R^{n+1} = \widehat{\beta}_R^n + Z\left(\widehat{\beta}_R^n\right)\widehat{\beta}_R^n (cI)^{-1} + \left( Z\left(\widehat{\beta}_R^n\right) + cI \right)^{-1} y - \left( Z\left(\widehat{\beta}_R^n\right) + cI \right)^{-1} f\left(X, \widehat{\beta}_R^n\right)$$

2. Untuk menyelesaikan multikolinieritas pada model fungsi produksi *Constant Elasticity of Substitutions* dengan metode *ridge* pada data pengaruh kapital dan tenaga kerja terhadap *output drachmas* yaitu dengan melakukan uji kenonlinieran data, melakukan deteksi multikolinieritas yaitu diperoleh uji

$VIF = 11{,}303 > 10$, dan menentukan nilai estimasi parameter $\beta$ dengan metode *Nonlinear Least Square* menggunakan iterasi *Gauss-Newton* sehingga diperoleh model yang dikenai multikolinieritas sebagai berikut

$$Q_t = \beta_1 \left[ \beta_2 L_t^{\beta_3} + (1-\beta_2) K_t^{\beta_3} \right]^{\frac{\beta_4}{\beta_3}}$$

dengan

$\beta_1 =$ 0.000446235763651

$\beta_2 =$ 0.009999938027870

$\beta_3 =$ 0.073727219644074

$\beta_4 =$ 0.011602102072208

Selanjutnya dilakukan pemusatan data untuk mendapatkan nilai *VIF* yang tidak memenuhi multikolinieritas yaitu diperoleh $VIF = 2{,}644 < 10$ pada nilai $c = 0{,}430869649$, dan menentukan nilai estimasi parameter $\beta$ dengan metode *Nonlinear Least Square* menggunakan iterasi *Gauss-Newton* sehingga diperoleh model yang dikenai multikolinieritas sebagai berikut

$$Q_t^* = \beta_1 \left[ \beta_2 L_t^{*\beta_3} + (1-\beta_2) K_t^{*\beta_3} \right]^{\frac{\beta_4}{\beta_3}}$$

dengan

$\beta_1 =$ 2.130803396224976

$\beta_2 =$ 0.393056542158127

$\beta_3 =$ 0.104102352261543

$\beta_4 =$ 1.291856502532959

Pada nilai $c = 0{,}430869649$ menunjukkan koefisien $\widehat{\beta}_R$ lebih stabil. Sehingga penggunaan tetapan bias $c$ pada metode *ridge* dapat mengatasi masalah multikolinieritas pada model fungsi produksi *Constant Elasticity of Substitutions*.

3. Hubungan linier telah disinggung dalam al-Quran yaitu pada surat al Hujuraat/13 ayat 13. Pada ayat tersebut manusia diciptakan berbangsa-bangsa dan bersuku-suku untuk saling kenal dan bertaqwa kepada Allah. Namun hal itu dapat berdampak positif dan berdampak negatif. Dampak negatif dari hubungan linier antar manusia ini di antaranya mereka saling mengolok-olok, mengejek, dan menghina satu dengan yang lainnya. Sehingga hal ini dapat merusak kepercayaan, kedekatan, persahabatan, dan kasih sayang di antara mereka. Dampak negatif ini jika dalam statistika disebut dengan multikolinieritas. Allah telah memberikan kesempatan untuk hamba-Nya yang telah menyimpang yaitu terdapat dalam al-Quran surat al-Nisaa'/4 ayat 110. Dalam ayat ini Allah memberitakan tentang kemurahan dan kedermawanan-Nya bahwa semua orang yang bertobat kepada-Nya, pasti Allah akan menerima tobatnya atas semua dosa yag telah ia lakukan. Begitu pula multikolinieritas pada model fungsi produksi *Constant Elasticity of Substitutions* dengan contoh kasus data sektor industri dari perekonomian Yunani periode 1961-1987, multikolinieritas ini tidak langsung dihilangkan. Akan tetapi, multikolinieritas diolah dengan menentukan nilai konstanta pengali *Langrange* dan estimator parameter *ridge* yang dapat mengurangi tingkat multikolinieritas. Sehingga masalah multikolinieritas dapat diselesaikan dengan menggunakan metode *ridge*.

## 5.2 Saran

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan, beberapa saran yang dapat dilakukan untuk penelitian selanjutnya antara lain:

1. Untuk mengatasi masalah multikolinieritas dapat dilakukan dengan memperbesar ukuran sampel, spesifikasi model, penggunaan informasi tambahan, pengaplikasian estimator bias, dan metode lainnya.
2. Pada penelitian selanjutnya juga dapat digunakan metode *Jacknifed Ridge Regression* (JRR) untuk mengatasi multikolinieritas pada model fungsi produksi *Constant Elasticity of Substitution* atau model regresi lainnya dengan estimasi parameter menggunakan metode *Nonlinear Least Square* atau *Maximum Likelihood*.

## DAFTAR PUSTAKA

Adiningsih, S. 2009. *Statistik Edisi 1*. Yogyakarta: BPFE-Yogyakarta.

Agriska, P. P. 2011. *Penggunaan Metode Ridge Trace dan Variance Inflation Factors (VIF) pada Regresi Ridge*. Skripsi tidak dipublikasikan. Yogyakarta: Universitas Negeri Yogyakarta.

Al-Hamdani, ‘A. 2006. *Hamblum Minannas 100 Langkah Sukses dalam Hubungan Sosial*. Yogyakarta: Mitra Pustaka.

Al-Maraghi, A. M. 1993. *Terjemahan Tafsir Al-Maraghi*. Semarang: CV. Toha Putra Semarang.

Al-Qarni, ‘A. 2007a. *Tafsir al-Muyassar Jilid 1*. Jakarta: Qisthi Press.

Al-Qarni, ‘A. 2007b. *Tafsir al-Muyassar Jilid 4*. Jakarta: Qisthi Press.

Anton. 1991. *Aljabar Linier Elementer*. Terjemahan: Pantur-Nyoman Susila. Jakarta: Erlangga.

Arofah, N. L. 2015. *Estimasi Nonlinear Least Trimmed Squares (NLTS) pada Model Regresi Nonlinier yang Dikenai Outlier*. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Aziz, A. 2010. *Ekonometrika Teori dan Praktik Eksperimen dengan MATLAB*. Malang: UIN MALIKI PRESS.

Draper, N. dan Harry, S. 1992. *Analisis Regresi Terapan*. Jakarta: PT. Gramedia Pustaka Umum.

Effendy. 1993. *Human Relations dan Public Relations*. Bandung: CV. Mandar Maju.

Firdaus, M. 2004. *Ekonometri Suatu Pendekatan Aplikatif*. Jakarta: Bumi Aksara.

Gujarati dan Porter, D. C. 2010. *Dasar-dasar Ekonometrika*. Jakarta: Penerbit Salemba Empat.

Harini, S. 2008. *Metode Statistika Pendekatan Teoritis dan Aplikatif*. Malang: UIN-Malang Press.

Hasan, M. I. 2002. *Pokok-Pokok Materi Statistik 1 (Statistik Deskriptif)*. Jakarta: PT. Bumi Aksara.

Hoerl, A. E. dan Kennard, R. W. 1970. Ridge Regression: Biased Estimation For Nonorthogonal Problems. *Technometrics*, 12: 55-67.

Katsir. 2001. *Tafsir Ibnu Kasir Juz 5*. Bandung: Sinar Baru Algensindo.

Montgomery, D. C. dan Peck. 1992. *Introduction to Linear Regression Analisys*. New York: John Wiley and sons.

Nisa', H. M. 2014. *Metode Estimasi Jackknifed Riedge Regression pada Model Regresi Linier Berganda*. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Shihab, Q. M. 2003. *Tafsir Al-Mishbah Pesan, Kesan, dan Keserasian al-Qur'an*. Jakarta: Lentera Hati.

Setiawan dan Endah. 2010. *Ekonometrika*. Yogyakarta: Penerbit Andi.

Siegel. 1985. *Statistik Nonparametrik*. Jakarta: Gramedia Pustaka.

Subagyo, P. 2010. *Statistika Terapan Edisi 2*. Yogyakarta: BPFE-Yogyakarta.

Sudjana. 2003. *Teknik Analisis Regresi dan Korelasi*. Bandung: Tarsito Bandung.

Suliyanto. 2011. *Ekonometrika Terapan: Teori & Aplikasi dengan SPSS*. Yogyakarta: CV. ANDI OFFSET.

Supranto, J. 1995. *Ekonometrika Edisi 1*. Jakarta: Fakultas Ekonomi Universitas Indonesia.

Yuwono, P. 2005. *Pengantar Ekonometri*. Yogyakarta: ANDI.

## Lampiran 1 Data Penelitian

Data sektor industri dari perekonomian Yunani periode 1961-1987

| No. | *Output Drachmas* (Q) | Kapital (K) | Jumlah Tenaga Kerja (L) |
|---|---|---|---|
| 1 | 35,858 | 59,600 | 637,0 |
| 2 | 37,504 | 64,200 | 643,2 |
| 3 | 40,378 | 68,800 | 651,0 |
| 4 | 46,147 | 75,500 | 685,7 |
| 5 | 51,047 | 84,400 | 710,7 |
| 6 | 53,871 | 91,800 | 724,3 |
| 7 | 56,834 | 99,900 | 735,2 |
| 8 | 65,439 | 109,100 | 760,3 |
| 9 | 74,939 | 120,700 | 777,6 |
| 10 | 80,976 | 132,000 | 780,8 |
| 11 | 90,802 | 146,600 | 825,8 |
| 12 | 101,955 | 162,700 | 864,1 |
| 13 | 114,367 | 180,600 | 894,2 |
| 14 | 101,823 | 197,100 | 891,2 |
| 15 | 107,572 | 209,600 | 887,5 |
| 16 | 117,600 | 221,900 | 892,3 |
| 17 | 123,224 | 232,500 | 930,1 |
| 18 | 130,971 | 243,500 | 969,9 |
| 19 | 138,842 | 257,700 | 1006,9 |
| 20 | 135,486 | 274,400 | 1020,9 |
| 21 | 133,441 | 289,500 | 1017,1 |
| 22 | 130,388 | 301,900 | 1016,1 |
| 23 | 130,615 | 314,900 | 1008,1 |
| 24 | 132,244 | 327,700 | 985,1 |
| 25 | 137,318 | 339,400 | 977,1 |
| 26 | 137,468 | 349,492 | 1007,2 |
| 27 | 135,750 | 358,231 | 1000,0 |
| Rata-rata | 97883,66667 | 196804,5556 | 862,9407407 |

(Sumber: Daftar data sektor industri dari perekonomian Yunani periode 1961-1987 yang diambil dari "*Gujarati (2010:289)*).

dengan:

$L$ = Input Tenaga Kerja

$K$ = Input Kapital

$Q$ = *Output Drachmas*

**Lampiran 2 Output Deteksi Multikolinieritas dengan SPSS 16**

1. Uji Multikolinieritas dengan VIF

**Coefficients[a]**

| Model | | Unstandardized Coefficients | | Standardized Coefficients | t | Sig. | 95% Confidence Interval for B | | Correlations | | | Collinearity Statistics | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | B | Std. Error | Beta | | | Lower Bound | Upper Bound | Zero-order | Partial | Part | Tolerance | VIF |
| 1 | (Constant) | -135842.736 | 17068.196 | | -7.959 | .000 | -171069.760 | -100615.711 | | | | | |
| | Kapital | .011 | .037 | .030 | .304 | .763 | -.065 | .088 | .947 | .062 | .009 | .088 | 11.303 |
| | Jumlah Tenaga Kerja | 268.276 | 27.649 | .961 | 9.703 | .000 | 211.211 | 325.340 | .989 | .893 | .286 | .088 | 11.303 |

a. Dependent Variable: Output Drachmas

**Collinearity Diagnostics[a]**

| Model | Dimension | Eigenvalue | Condition Index | Variance Proportions | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | (Constant) | Kapital | Jumlah Tenaga Kerja |
| 1 | 1 | 2.890 | 1.000 | .00 | .00 | .00 |
| | 2 | .109 | 5.155 | .01 | .10 | .00 |
| | 3 | .001 | 48.213 | .99 | .90 | 1.00 |

a. Dependent Variable: Output Drachmas

2. Uji Korelasi Parsial

**Correlations**

| Control Variables | | | Kapital | Jumlah Tenaga Kerja |
|---|---|---|---|---|
| Output Drachmas | Kapital | Correlation | 1.000 | .374 |
| | | Significance (2-tailed) | . | .060 |
| | | df | 0 | 24 |
| | Jumlah Tenaga Kerja | Correlation | .374 | 1.000 |
| | | Significance (2-tailed) | .060 | . |
| | | df | 24 | 0 |

## Lampiran 3 *Source Software* MATLAB.7.10.0 (R2010a)

```
%NonLinier Least Square dengan iterasi Gauss-Newton
%Constant Elasticity of Substitution (CES)Production function
%Oleh Abdul Aziz (Aziz,2010:260-262)
%Linked files : f2, numgradf2, numgradS2
%Program ini akan menaksir parameter b1, b2, b3 dan b4
%pada fungsi produksi CES yaitu : y= b1*(b2*L.^b3+(1-
b2).*K.^b3).^(b4/b3)

clc; tic; format long;
KLy=[35.858 59.600  637.0
37.504  64.200  643.2
40.378  68.800  651.0
46.147  75.500  685.7
51.047  84.400  710.7
53.871  91.800  724.3
56.834  99.900  735.2
65.439  109.100 760.3
74.939  120.700 777.6
80.976  132.000 780.8
90.802  146.600 825.8
101.955 162.700 864.1
114.367 180.600 894.2
101.823 197.100 891.2
107.572 209.600 887.5
117.600 221.900 892.3
123.224 232.500 930.1
130.971 243.500 969.9
138.842 257.700 1006.9
135.486 274.400 1020.9
133.441 289.500 1017.1
130.388 301.900 1016.1
130.615 314.900 1008.1
132.244 327.700 985.1
137.318 339.400 977.1
137.468 349.492 1007.2
135.750 358.231 1000.0
];

K=KLy(:,2);L=KLy(:,3); y=KLy(:,1); x=[L K];
%Gauss Newton Iterations
%Definisi initial values
b=[0.1;0.9;0.1;1.5]; %Nilai awal untuk b
k=length(b)
T=length(x);
e=eye(k); %matriks identitas berukuran k
f=f2(b,x); %memanggil fungsi f2 dg variabel b dan x
S=(y-f)'*(y-f); %nilai awal S
repkon =2000; %Jumlah iterasi untuk konvergensi S
tn=0.02;
for i = 1:repkon;
    z=numgradf2(b,x); %numerical gradient of f2
    zS=numgradS2(b,x,y);%Numerical gradient of S2
    step=-0.5*inv(z'*z)*zS; %Gauss-Newton iteration
    bnew=b+tn*step;
```

```
    fnew=f2(bnew,x);
    Snew=(y-fnew)'*(y-fnew);

    %jika S sudah konvergen maka program dihentikan
    if norm(bnew-b) <= 1e-9 & abs(S-Snew) <= 1e-9
        disp('S sudah konvergen dengan jumlah iterasinya adalah:
');
        disp(i);
        disp(' ');
        break;
    end
    %Melanjutkan iterasi hingga S konvergen atau iterasi terakhir
    iterasi=i
    b=bnew
    f=f2(b,x);
    S=(y-f)'*(y-f)

    %Melanjutkan hasil iterasi b dan S setiap 10% jumlah iterasi
    if mod(i,repkon/10)==0
        disp('Hasil iterasi untuk i b1 b2 b3 b4 S :'); [i b' Snew]
    end;

    %jika S belum konvergen hingga iterasi terakhir
    %maka perlu ditambah iterasinya pada repkon
    %atau dengan merubah initial values pada b
    if i==repkon
        disp('S belum konvergen, banyak iterasi perlu ditambah!');
        disp('atau ubahlah initial values untuk b');
        disp(' ');
    end;
end;
bnls=bnew;
Snls=S;
% Hasil akhir iterasi Gauss-Newton
disp('Hasil Nonlinier Least square untuk fungsi CES dg iterasi
Gauss Newton adalah:');
disp('b1 b2 b3 b4 S');[bnls' Snls]
waktu_hitung=toc
```

**Lampiran 4** ***Source Software*** **MATLAB.7.10.0 (R2010a)**

```
%NonLinier Least Square dengan iterasi Gauss-Newton
%Constant Elasticity of Substitution (CES)Production function
%Oleh Abdul Aziz (Aziz,2010:260-262)
%Linked files : f2, numgradf2, numgradS2
%Program ini akan menaksir parameter b1, b2, b3 dan b4
%pada fungsi produksi CES yaitu : y= b1*(b2*L.^b3+(1-
b2).*K.^b3).^(b4/b3)

clc; tic; format long;
KLy=[5.09901975 5.099018732 5.099322799
     5.09902098 5.099019838 5.099814299
    5.099017539 5.099021023 1.612633181
    5.099020342 5.099021513 5.099280576
    5.099020949 5.099020838 5.098827471
    5.09901988  5.099021079 5.099337748
    5.099024905 5.099021024 5.099840256
    5.099042889 5.099021644 5.099403579
    5.099014852 5.09901952  5.101674641
    5.099023786 5.099018587 5.099378882
    5.099040199 5.099020611 5.096153846
     5.099068183    5.099021299     5.217391304
     5.099084328    5.099020508     5.099380906
     5.099021435    5.099257725     5.099099099
     5.099024752    5.099028445     5.10373444
     5.099025521    5.099012114     5.104166667
     5.099021257    5.099022347     5.102505695
     5.099022184    5.09902028      5.100095329
     5.099021734    5.099019725     5.099150142
     5.099024871    5.099019498     5.100064558
     5.099019698    5.099020521     5.099206349
     5.099017667    5.781123997     5.099866844
     5.099024323    5.729754644     5.098314607
     5.099026504    5.651687513     5.100166945
     5.099021167    5.099021107     5.100491291
     5.099019466    5.099019986     5.098939929
     5.099021167    5.099019784     5.096654275
];
K=KLy(:,1);L=KLy(:,3); y=KLy(:,2); x=[L K];
%Gauss Newton Iterations
%Definisi initial values
b=[1;0.3;0.2;1]; %Nilai awal untuk b
k=length(b);
T=length(x);
e=eye(k); %matriks identitas berukuran k
f=f2(b,x); %memanggil fungsi f2 dg variabel b dan x
S=(y-f)'*(y-f); %nilai awal S
repkon = 100; %Jumlah iterasi untuk konvergensi S
tn=0.1;
for i = 1:repkon;
    z=numgradf2(b,x); %numerical gradient of f2
    zS=numgradS2(b,x,y);%Numerical gradient of S2
    step=-0.5*inv(z'*z)*zS; %Gauss-Newton iteration
    bnew=b+tn*step;
    fnew=f2(bnew,x);
```

```
    Snew=(y-fnew)'*(y-fnew);

    %jika S sudah konvergen maka program dihentikan
    if norm(bnew-b) <= 1e-9 & abs(S-Snew) <= 1e-9
        disp('S sudah konvergen dengan jumlah iterasinya adalah:
');
        disp(i);
        disp(' ');
        break;
    end
    %Melanjutkan iterasi hingga S konvergen atau iterasi terakhir
    iterasi=i
    b=bnew
    f=f2(b,x);
    S=(y-f)'*(y-f)

    %Melanjutkan hasil iterasi b dan S setiap 10% jumlah iterasi
    if mod(i,repkon/10)==0
        disp('Hasil iterasi untuk i b1 b2 b3 b4 S :'); [i b' Snew]
    end;

    %jika S belum konvergen hingga iterasi terakhir
    %maka perlu ditambah iterasinya pada repkon
    %atau dengan merubah initial values pada b
    if i==repkon
        disp('S belum konvergen, banyak iterasi perlu ditambah!');
        disp('atau ubahlah initial values untuk b');
        disp(' ');
    end;
end;
bnls=bnew;
Snls=S;
% Hasil akhir iterasi Gauss-Newton
disp('Hasil Nonlinier Least square untuk fungsi CES dg iterasi
Gauss Newton adalah:');
disp('b1 b2 b3 b4 S');
[bnls' Snls]
waktu_hitung=toc
```

# RIWAYAT HIDUP

Rista Umdah Masrifah, lahir di kota Trenggalek pada tanggal 10 Agustus 1992, biasa dipanggil Rista, tinggal di RT 47 RW 10 Dsn. Gunung Kembar Ds. Tawing Kec. Munjungan Kab. Trenggalek. Anak kedua dari Bapak Jumirin dan Ibu Sumartin.

Pendidikan dasarnya ditempuh di TK SDN 3 TAWING, kemudian melanjutkan ke SDN 4 TAWING dan lulus pada tahun 2004. Kemudian melanjutkan pendidikan ke SMP Negeri 1 Munjungan dan lulus pada tahun 2007. Kemudian melanjutkan ke Madrasah Aliyah Nurul Ulum Munjungan dan lulus pada tahun 2010. Selanjutnya, pada tahun 2010 menempuh kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang mengambil Jurusan Matematika.

**KEMENTERIAN AGAMA RI**
**UNIVERSITAS ISLAM NEGERI**
**MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG**
**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**
**Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax. (0341)558933**

## BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Rista Umdah Masrifah
NIM : 10610032
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi : Penyelesaian Multikolinieritas Pada Model Fungsi Produksi *Constant Elasticity of Substitution* Dengan Metode *Ridge*
Pembimbing I : Dr. Sri Harini, M.Si
Pembimbing II : Ach. Nashichuddin, MA

| No. | Tanggal | Hal | Tanda Tangan |
|---|---|---|---|
| 1. | 17 September 2014 | Konsultasi Bab I, Bab II, Bab III, dan Bab IV Matematika | 1. |
| 2. | 20 Oktober 2014 | Konsultasi Kajian Keagamaan | 2. |
| 3. | 28 November 2014 | ACC Bab I, Bab II Keagamaan | 3. |
| 4. | 11 Desember 2014 | ACC Bab I, Bab II, Bab III, dan Revisi Bab IV Matematika | 4. |
| 5. | 10 Februari 2015 | Konsultasi Bab III dan Bab IV | 5. |
| 6. | 17 Februari 2015 | Konsultasi Bab IV Keagamaan | 6. |
| 7. | 16 Maret 2015 | Konsultasi Bab IV | 7. |
| 8. | 23 Maret 2015 | Konsultasi Bab II dan Bab IV Keagamaan | 8. |
| 9. | 10 April 2015 | Revisi Bab IV Keagamaan | 9. |
| 10. | 13 April 2015 | Revisi Bab IV | 10. |
| 11. | 06 Mei 2015 | Revisi Bab IV dan Bab V | 11. |
| 12. | 08 Mei 2015 | Revisi Bab V | 12. |
| 13. | 11 Mei 2015 | ACC Keseluruhan Matematika | 13. |
| 14. | 11 Mei 2015 | ACC Keseluruhan Keagamaan | 14. |

Malang, 18 Mei 2015
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001