

**SOLUSI ANALITIK DAN SOLUSI NUMERIK
PERSAMAAN CAUCHY-EULER**

SKRIPSI

Oleh:
INAYATUL HASANAH
NIM. 03510003



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MALANG
MALANG
2009**

**SOLUSI ANALITIK DAN SOLUSI NUMERIK
PERSAMAAN CAUCHY-EULER**

SKRIPSI

Diajukan Kepada :
Universitas Islam Negeri Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan Dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh :
INAYATUL HASANAH
NIM. 03510003



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MALANG
MALANG
2009**

**SOLUSI ANALITIK DAN SOLUSI NUMERIK
PERSAMAAN CAUCHY-EULER**

SKRIPSI

Oleh:
INAYATUL HASANAH
NIM. 03510003

Telah diperiksa dan disetujui untuk diuji
Tanggal: 14 Januari 2009

Dosen Pembimbing Matematika

Dosen Pembimbing Keagamaan

Drs. H. Turmudi, M. Si
NIP.150 209 630

Munirul Abidin, M.Ag
NIP.150 321 634

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M. Si
NIP. 150 318 321

LEMBAR PENGESAHAN**SOLUSI ANALITIK DAN SOLUSI NUMERIK
PERSAMAAN CAUCHY-EULER****SKRIPSI**

Oleh:
INAYATUL HASANAH
NIM. 03510003

Telah Dipertahankan di depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal 19 Januari 2009

Susunan Dewan Penguji**Tanda Tangan**

- | | | |
|------------------|---|-----|
| 1. Penguji Utama | : <u>Usman Pagalay, M. Si</u>
NIP. 150 327 240 | () |
| 2. Ketua | : <u>Sri Harini, M. Si</u>
NIP. 150 318 321 | () |
| 3. Sekretaris | : <u>Drs. H. Turmudi, M. Si</u>
NIP. 150 209 630 | () |
| 4. Anggota | : <u>Munirul Abidin, M. Ag</u>
NIP. 150 321 634 | () |

**Mengetahui dan Mengesahkan
Ketua Jurusan Matematika**

Sri Harini, M. Si
NIP. 150 318 321

SURAT PERNYATAAN

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Inayatul Hasanah
NIM : 03510003
Fakultas : Sains dan Teknologi
Judul Skripsi : Solusi Analitik dan Solusi Numerik Persamaan Cauchy-Euler

Menyatakan bahwa skripsi tersebut adalah karya saya sendiri dan bukan karya orang lain, baik sebagian maupun keseluruhan, kecuali dalam bentuk kutipan yang telah disebutkan sumbernya.

Selanjutnya apabila dikemudian hari ada “klaim” dari pihak lain, bukan menjadi tanggung jawab Dosen Pembimbing dan/atau Pengelola Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Malang, tetapi menjadi tanggung jawab saya sendiri

Demikian surat pernyataan ini saya buat dengan sebenar-benarnya dan apabila pernyataan ini tidak benar, saya bersedia mendapat sanksi akademis.

Malang, 14 Januari 2009

Yang menyatakan,

Inayatul Hasanah

MOTTO

فَإِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٥﴾ إِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٦﴾

*Karena Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan,
Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan.*

(QS: Al-Insyirah 94:5-6)





Untuk

Bapak M. Fatich, Ibu Muzaro'ah

Adikku M. Fajar Wahyudi dan Anna Riswanda

*Upiex, Urifah, Mey
yang selalu mensuport penulis dalam segala hal*

dan

Seseorang yang telah memiliki seutuhnya hati penulis

KATA PENGANTAR



Alhamdulillahirrobbil 'alamin, segala puji syukur ke hadirat Allah SWT atas limpahan rahmat, taufiq dan hidayah-Nya, hingga penulis mampu menyelesaikan penulisan skripsi yang berjudul “**Solusi Analitik dan Solusi Numerik Persamaan Cauchy-Euler**” ini dengan baik. Sholawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada junjungan Nabi besar Muhammad SAW sebagai *uswatun hasanah* dalam meraih kesuksesan di dunia dan akhirat.

Penulis menyadari bahwa banyak pihak yang telah berpartisipasi dan membantu dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Oleh karena itu, iringan doa dan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya penulis sampaikan, terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo selaku Rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Malang.
2. Prof. Dr. Sutiman Bambang Sumitro, SU., D.Sc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Malang.
3. Sri Harini, M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Malang.
4. Drs. H. Turmudi, M.Si selaku dosen pembimbing, yang telah meluangkan waktunya untuk memberikan pengarahan selama penulisan skripsi ini.
5. Munirul Abidin, M.Ag selaku dosen pembimbing keagamaan, yang telah memberikan saran dan bantuan selama penulisan skripsi ini.

6. Ari Kusumastuti, S. Si yang selalu memberikan masukan dan motivasi kepada penulis.
7. Seluruh Dosen Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Malang yang telah memberikan ilmu pengetahuan kepada penulis selama di bangku kuliah, serta seluruh karyawan dan staf UIN Malang.
8. Ayahanda dan Ibunda tercinta yang tiada lelah memberikan do'a dan kasih sayang serta kepercayaan.
9. Teman-teman matematika angkatan 2003, beserta semua pihak yang telah banyak membantu dalam penyelesaian skripsi ini.

Akhirnya, semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Amien.

Malang, 13 Januari 2009

Penulis

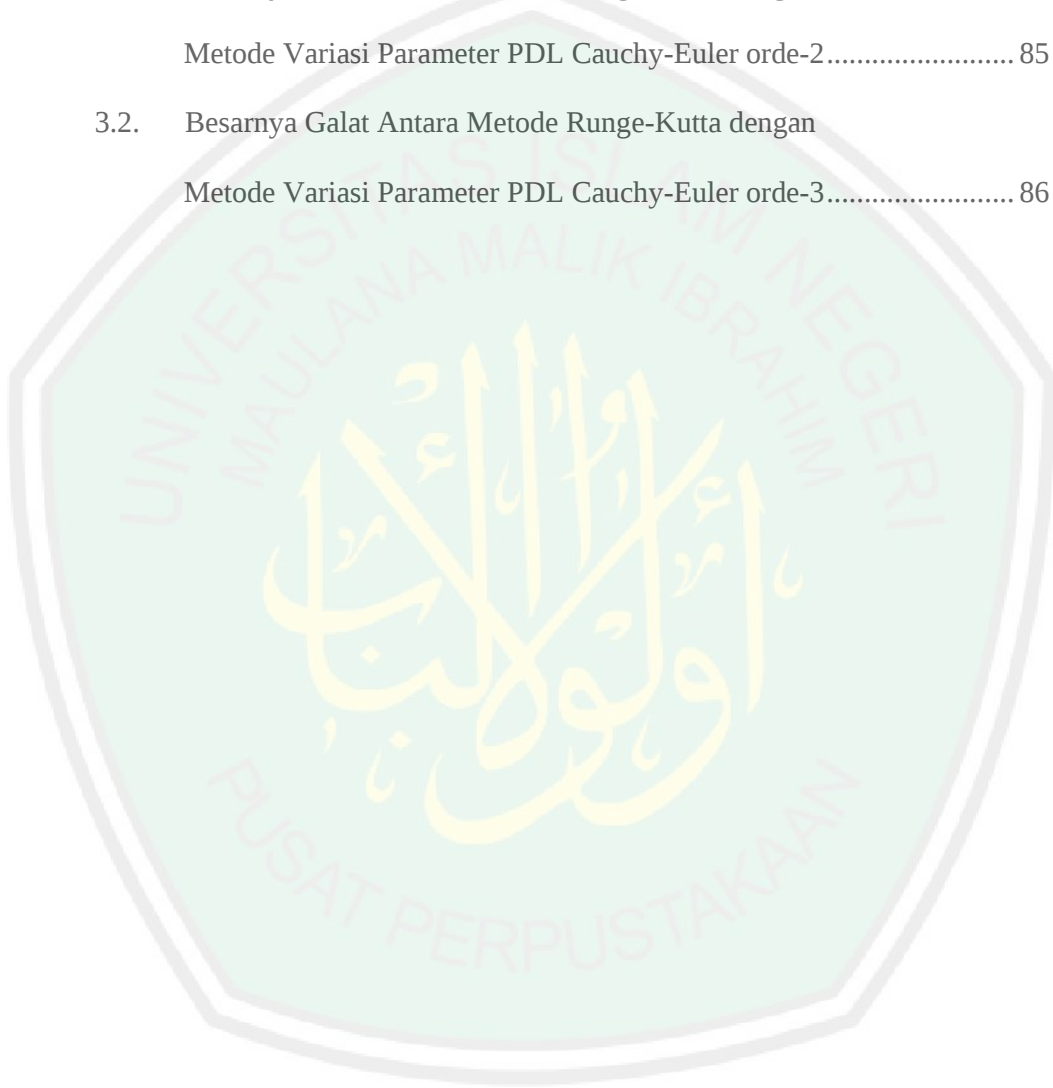
DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
SURAT PERNYATAAN	
MOTTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR.....	i
DAFTAR ISI.....	iii
DAFTAR TABEL	v
DAFTAR LAMPIRAN	vi
ABSTRAK	vii
 BAB I PENDAHULUAN.....	 1
1.1. Latar Belakang	1
1.2. Rumusan Masalah	5
1.3. Batasan Masalah	5
1.4. Tujuan Penelitian	5
1.5. Manfaat Penulisan.....	6
1.6. Metode Penelitian	6
1.7. Sistematika Pembahasan	7
 BAB II KAJIAN TEORI	 9
2.1 Persamaan Diferensial.....	9
2.2 Persamaan Diferensial Linear	11
2.3 Operator Diferensial.....	12
2.4 Matriks, Determinan dan Aturan Cramer.....	13
2.5 Kombinasi Linear, Kebebaslinearan, dan Nilai Wronski.....	19
2.6 Masalah Nilai Awal	27
2.7 Metode Variasi Parameter.....	28

2.8 Metode Penyelesaian Persamaan Diferensial Linear Homogen	33
A. Penyelesaian PDL Homogen dengan Koefisien Variabel dalam Bentuk Persamaan Cauchy-Euler	33
2.9 Metode Numerik	35
2.10 Penyelesaian PDB secara Numerik.....	37
2.11 Metode Runge-Kutta.....	39
2.12 Galat	44
2.13 Kajian Keagamaan	47
BAB III PEMBAHASAN	55
3.1 Solusi Analitik Persamaan Diferensial Linear Cauchy-Euler.....	55
3.2 Solusi Numerik Persamaan Diferensial Linear Cauchy-Euler.....	72
3.3 Analisis Galat Persamaan Diferensial Linear Cauchy-Euler	84
3.4 Tinjauan Agama Terhadap Hasil Pembahasan	87
BAB IV PENUTUP	91
4.1. Kesimpulan	91
4.2. Saran.....	93
DAFTAR PUSTAKA	
LAMPIRAN	

DAFTAR TABEL

No	Judul	Halaman
3.1.	Besarnya Galat Antara Metode Runge-Kutta dengan Metode Variasi Parameter PDL Cauchy-Euler orde-2.....	85
3.2.	Besarnya Galat Antara Metode Runge-Kutta dengan Metode Variasi Parameter PDL Cauchy-Euler orde-3.....	86



DAFTAR LAMPIRAN

- | No | Judul |
|----|---|
| 1. | Program Penyelesaian PDL Cauchy-Euler Orde-2 dengan Metode Runge-Kutta Orde 4 Menggunakan Software Matlab |
| 2. | Output Program Penyelesaian PDL Cauchy-Euler Orde-2 dengan Metode Runge-Kutta Orde 4 Menggunakan <i>Software</i> Matlab |
| 3. | Grafik Program Penyelesaian PDL Cauchy-Euler Orde-2 dengan Metode Runge-Kutta Orde 4 Menggunakan <i>Software</i> Matlab |
| 4. | Program Penyelesaian PDL Cauchy-Euler Orde-3 dengan Metode Runge-Kutta Orde 4 Menggunakan <i>Software</i> Matlab |
| 5. | Output Program Penyelesaian PDL Cauchy-Euler Orde-3 dengan Metode Runge-Kutta Orde 4 Menggunakan <i>Software</i> Matlab |
| 6. | Grafik Program Penyelesaian PDL Cauchy-Euler Orde-3 dengan Metode Runge-Kutta Orde 4 Menggunakan <i>Software</i> Matlab |

ABSTRAK

Hasanah, Inayatul. 2009. *Solusi Analitik dan Solusi Numerik Persamaan Cauchy-Euler*. Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Malang.
Pembimbing: (I) Drs.H. Turmudi, M. Si; (II) Munirul Abidin, M. Ag

Kata Kunci: Persamaan Cauchy-Euler, Metode Variasi Parameter, Metode Runge-Kutta

Persamaan diferensial merupakan model matematika yang cukup penting. Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat turunan satu (atau beberapa) fungsi yang tak diketahui. Jenis persamaan diferensial sangat banyak sekali, baik dilihat dari bentuknya, ordernya, koefisiennya maupun kelinearannya, sehingga banyak juga cara menyelesaikannya. Salah satu bentuk persamaan diferensial linear dengan koefisien variabel adalah persamaan Cauchy-Euler yang dapat diselesaikan secara numerik maupun analitik.

Skripsi ini bertujuan untuk menjelaskan solusi analitik dan solusi numerik persamaan diferensial linear tak homogen dengan koefisien variabel, khususnya persamaan Cauchy-Euler. Penulisan skripsi ini menggunakan metode kajian literatur atau kepustakaan.

Secara analitik penulis menggunakan metode variasi parameter sedangkan secara numerik penulis menggunakan metode Runge-Kutta orde 4 dengan bantuan software Matlab. Dari hasil analisis dan pembahasan menunjukkan bahwa solusi secara analitik dan hasil iterasi secara numerik untuk persamaan diferensial linear Cauchy-Euler sama-sama mendapatkan nilai tetapi besarnya nilai antara kedua solusi itu terdapat selisih yang disebut galat. Jadi solusi analitik sebagai pengontrol galat untuk solusi numerik. Besarnya galat pada penyelesaian persamaan diferensial linear Cauchy-Euler ini naik tetapi kenaikan setiap langkah tidak terlalu besar sehingga tidak terlalu mempengaruhi pertumbuhan kesalahan. Sehingga kesalahan pada persamaan diferensial linear Cauchy-Euler ini stabil. Hal ini berarti bahwa metode Runge-Kutta orde 4 merupakan metode yang nilainya mendekati solusi eksak.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Berkembangnya berbagai ilmu pengetahuan telah banyak memberikan sumbangan pemikiran untuk dapat menyelesaikan berbagai permasalahan yang muncul. Dalam perkembangan dan kemajuan ilmu pengetahuan dan teknologi, ilmu matematika terapan memberikan sumbangan yang besar dalam pemecahan masalah. Kemajuan teknologi yang sangat mengagumkan dewasa ini tidak mungkin dapat terjadi tanpa bantuan matematika. Matematika mempunyai peranan yang utama yaitu matematika memberikan cara berfikir yang jelas, logis, tepat, dan konsisten sebagai sarana pengembangan pengetahuan.

Matematika itu pada dasarnya berkaitan dengan pekerjaan menghitung, sehingga tidak salah jika kemudian ada yang menyebut matematika adalah ilmu hitung atau *ilmu hisab* (Abdusysykir, 2007:83). Banyak ayat-ayat Al Qur'an yang berisi tentang perhitungan atau matematika. Sebagaimana dalam surat Al-Kahfi ayat 25 dan surat Al-Ankabut ayat 14:

وَلَبِثُوا فِي كَهْفِهِمْ ثَلَاثَ مِائَةٍ سِنِينَ وَازْدَادُوا تِسْعًا ﴿٢٥﴾

Artinya: “Dan mereka tinggal dalam gua mereka tiga ratus tahun dan ditambah sembilan tahun (lagi)” (Q.S Al-Kahfi: 25)

وَلَقَدْ أَرْسَلْنَا نُوحًا إِلَىٰ قَوْمِهِ فَلَبِثَ فِيهِمْ أَلْفَ سَنَةٍ إِلَّا خَمْسِينَ عَامًا فَأَخَذَهُمُ الطُّوفَانُ وَهُمْ ظَالِمُونَ ﴿١٤﴾

Artinya: “Dan Sesungguhnya kami Telah mengutus Nuh kepada kaumnya, Maka ia tinggal di antara mereka seribu tahun kurang lima puluh tahun. Maka mereka ditimpa banjir besar, dan mereka adalah orang-orang yang zalim” (Q.S. Al-Ankabuut: 14)

Dari kedua ayat di atas, dapat diketahui bahwa Al-Qur'an telah berbicara tentang matematika. Konsep matematika yang disebutkan dari ayat tersebut adalah konsep bilangan, operasi penjumlahan, operasi pengurangan. Adapun makna yang tersirat dibalik 2 ayat tersebut adalah setiap muslim perlu memahami tentang bilangan dan operasi bilangan. Bagaimana mungkin seorang muslim dapat mengetahui bahwa Ashabul kahfi tertidur di dalam gua selama 309 tahun, jika tidak dapat menghitung $300 + 9$, juga bagaimana mungkin seorang muslim dapat mengetahui bahwa Nabi Nuh tinggal bersama kaumnya selama 950 tahun jika tidak dapat menghitung $1000 - 50$ (Abdusysyahir, 2006: 60-61).

Salah satu cabang dari matematika yang termasuk topik penting untuk dibahas adalah persamaan diferensial. Topik ini digunakan untuk memecahkan masalah-masalah yang dihadapi dalam bidang sains dan teknik. Persamaan diferensial membantu memecahkan masalah-masalah dalam bidang tersebut. Dalam sains dan teknik sering ditemukan masalah-masalah yang penyelesaiannya tidak dapat diatasi dengan hanya menggunakan rumus atau konsep yang ada. Terdapat banyak fenomena-fenomena yang melahirkan model matematika, namun model matematikanya mengandung laju perubahan. Dalam situasi seperti ini dibutuhkan penyelesaian atau perhitungan matematika secara khusus. Perhitungan-perhitungan matematis untuk memecahkan masalah-masalah tersebut memerlukan persamaan diferensial (Kusumah, 1989:1)

Persamaan diferensial adalah sebuah persamaan yang mengandung derivatif/diferensial dari suatu atau lebih variabel terikat terhadap satu atau lebih variabel bebas (Baiduri, 2002:2). Persamaan diferensial yang terbentuk dari permasalahan yang ada tersebut juga bermacam-macam. Ada dua macam persamaan diferensial yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial. Berdasarkan bentuknya, terdapat persamaan diferensial homogen dan persamaan diferensial tak homogen. Di samping itu, berdasarkan orde (tingkat)-nya, terdapat persamaan diferensial orde satu, persamaan diferensial orde dua, persamaan diferensial orde tiga, sampai dengan persamaan diferensial orde- n (orde tinggi). Sedangkan berdasarkan koefisiennya, terdapat persamaan diferensial dengan koefisien konstanta dan persamaan diferensial dengan koefisien variabel (peubah). Serta berdasarkan kelinearannya, terdapat persamaan diferensial linear dan persamaan diferensial tidak linear.

Oleh karena banyaknya jenis persamaan diferensial, maka banyak pula cara mencari penyelesaiannya. Penyelesaian persamaan diferensial adalah suatu fungsi yang memenuhi persamaan diferensial dan juga memenuhi kondisi awal yang diberikan pada persamaan tersebut (Aziz, 2006:51). Di dalam penyelesaian persamaan diferensial secara analitis, biasanya dicari penyelesaian umum yang mengandung konstanta sebarang dan kemudian mengevaluasi konstanta tersebut sedemikian sehingga hasilnya sesuai dengan kondisi awal. Atau dengan kata lain solusi analitik merupakan solusi kontinu sehingga solusi dari nilai variabel bebas dapat ditemukan, sangat akurat dan tepat (Lam, 1994:20). Metode penyelesaian persamaan diferensial secara analitis terbatas pada persamaan-persamaan dengan

bentuk tertentu, dan biasanya hanya untuk menyelesaikan persamaan linear dengan koefisien konstan.

Metode penyelesaian numerik tidak ada batasan mengenai bentuk persamaan diferensial. Penyelesaian yang diperoleh berupa iterasi numerik dari fungsi untuk berbagai variabel bebas. Penyelesaian suatu persamaan diferensial dilakukan pada titik-titik yang ditentukan secara berurutan. Untuk mendapatkan hasil yang lebih teliti maka jarak (interval) antara titik-titik yang berurutan tersebut dibuat semakin kecil. Atau dengan kata lain solusi analitik adalah selesaian yang memenuhi persamaan semula secara eksak sedangkan numerik adalah selesaian yang berupa hampiran (Susila, 1993:2).

Menurut pandangan islam setiap masalah ada beberapa penyelesaian yang dapat diambil jalan keluar atau solusi pemecahan dari suatu masalah. Ketika suatu masalah itu sulit untuk diselesaikan dengan satu cara maka hal tersebut pasti ada cara atau penyelesaian yang lain. Sebagaimana dalam firman-Nya pada al-Qur'an surat Al-Insyiroh, ayat 5-6:

فَإِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٥﴾ إِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٦﴾

Artinya: "Karena Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan (5) Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan (6). (Al-Insyiroh: 5-6)

Berdasarkan latar belakang diatas, maka penulis mengangkat permasalahan tentang **"Solusi Analitik dan Solusi Numerik Persamaan Cauchy-Euler"**

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang diatas, maka rumusan masalah yang akan digunakan yaitu:

1. Bagaimana menentukan solusi analitik persamaan Cauchy-Euler?
2. Bagaimana menentukan solusi numerik persamaan Cauchy-Euler?
3. Bagaimana perbandingan hasil penyelesaian dari solusi analitik dan solusi numerik persamaan Cauchy-Euler?

1.3 Batasan Masalah

Adapun batasan masalahnya adalah sebagai berikut:

1. Persamaan diferensial yang dipakai berjenis persamaan diferensial tak homogen orde-3.
2. Solusi analitik dengan menggunakan metode variasi parameter.
3. Solusi numerik dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde-4.

1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah diatas, maka tujuan penulisan skripsi ini adalah

1. Mendeskripsikan solusi analitik persamaan Cauchy-Euler.
2. Mendeskripsikan solusi numerik persamaan Cauchy-Euler.
3. Mendeskripsikan perbandingan hasil penyelesaian dari solusi analitik dan solusi numerik persamaan Cauchy-Euler.

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penulisan skripsi ini adalah:

1. Bagi penulis, sebagai tambahan informasi dan wawasan mengenai bagaimana menentukan solusi analitik dan solusi numerik persamaan Cauchy-Euler.
2. Bagi pemerhati matematika, sebagai masukan dan sumbangan pemikiran untuk memecahkan permasalahan dalam menentukan penyelesaian persamaan diferensial linear tak homogen dengan koefisien variabel menggunakan metode yang lebih efisien.
3. Bagi lembaga UIN Malang, untuk bahan kepustakaan yang dijadikan sarana pengembangan wawasan keilmuan khususnya di bidang matematika.

1.6 Metode Penelitian

Metode merupakan cara utama yang akan ditempuh untuk menemukan jawaban dari suatu permasalahan. Metode penelitian yang digunakan dalam skripsi ini adalah studi literatur. Studi literatur adalah penelitian yang dilakukan dengan bantuan bermacam-macam material yang terdapat di ruangan perpustakaan seperti buku, majalah, dokumen, catatan kisah-kisah, sejarah dan sebagainya (Mardalis, 2003: 28).

Adapun langkah-langkah umum dalam penulisan skripsi ini adalah mengumpulkan data-data dan informasi dengan cara membaca dan memahami literatur-literatur yang berkaitan dengan kajian persamaan diferensial, yaitu

mengkaji buku-buku diantaranya adalah Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern, Persamaan Diferensial dan Matematika Pemodelan serta beberapa artikel yang terkait dengan pembahasan yang ada. Kemudian mengaitkan kajian-kajian tersebut dengan pokok bahasan penulisan skripsi ini.

1.7 Sistematika Pembahasan

Agar penulisan skripsi ini lebih terarah, mudah ditelaah dan dipahami, maka digunakan sistematika pembahasan yang terdiri dari empat bab, masing-masing bab dibagi ke dalam beberapa subbab dengan rumusan sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN

Pendahuluan meliputi: latar belakang permasalahan, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika pembahasan.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Bagian ini terdiri atas konsep-konsep (teori-teori) yang mendukung bagian pembahasan. Konsep-konsep tersebut antara lain membahas tentang Persamaan Diferensial, Persamaan Diferensial Linear, Operator Diferensial, Persamaan Diferensial Linear Homogen dengan Koefisien Konstan, Matriks, Determinan dan Aturan Cramer, Kombinasi Linear, Kebebaslinearan, Dan Nilai Wronski, MNA, Metode Variasi Parameter, Penyelesaian PDB secara Numerik, metode Runge-Kutta dan Galat, serta Kajian Keagamaan.

BAB III PEMBAHASAN

Pembahasan berisi tentang solusi analitik, solusi numerik, analisis galat, dan keterkaitan antara hasil penelitian dengan kajian keagamaan.

BAB IV PENUTUP

Pada bab ini akan dibahas tentang kesimpulan dan saran.



BAB II

KAJIAN TEORI

Pada bab ini akan diberikan beberapa definisi dan teorema yang berhubungan dengan penjelasan pada bab selanjutnya.

2.1 Persamaan Diferensial

Definisi 2.1

Persamaan diferensial adalah persamaan yang menyangkut turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas. (Ross, 1984:3)

Berdasarkan jumlah variabel bebasnya, persamaan diferensial dikelompokkan menjadi persamaan diferensial biasa (PDB) atau *Ordinary Differential Equation (ODE)* dan persamaan diferensial parsial (PDP) atau *Partial Differential Equation (PDE)*.

Definisi 2.2

Persamaan diferensial parsial (PDP) adalah persamaan diferensial yang menyangkut turunan parsial dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas. (Ross, 1984: 4)

Contoh:

$$1) \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} = v$$

$$2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

Variabel bebas pada contoh 1 adalah s dan t sedangkan variabel tak bebasnya adalah v . Selanjutnya pada contoh 2 variabel x , y dan z adalah variabel bebasnya, sedangkan variabel u adalah variabel tak bebasnya.

Definisi 2.3

Persamaan diferensial biasa (PDB) adalah persamaan diferensial yang menyangkut turunan biasa dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu variabel bebas. (Ross, 1984: 4)

Contoh:

$$1) \frac{d^2 y}{dx^2} + xy \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 0$$

$$2) \frac{d^4 x}{dt^4} + 5 \frac{d^2 x}{dt^2} + 3x = \sin t$$

Pada contoh 1, variabel x adalah variabel bebas dan y adalah variabel tak bebas. Sedangkan pada contoh 2, variabel bebasnya adalah t dan variabel tak bebasnya adalah x .

Definisi 2.4

Orde suatu persamaan diferensial adalah orde (tingkat) tertinggi dari turunan yang terdapat pada persamaan tersebut, yang tingkatnya paling tinggi. (Pamuntjak dan Santosa, 1990: 3)

Pada beberapa contoh diatas, contoh 1 adalah persamaan diferensial yang berorde satu, sedangkan contoh 2 adalah persamaan diferensial berorde dua.

2.2 Persamaan Diferensial Linear

Seperti yang telah dijelaskan pada subbab 1.1, persamaan diferensial linear dapat dibagi menjadi persamaan diferensial linear homogen dan persamaan diferensial linear tak homogen. Agar lebih mudah, berikut diberikan definisi dari persamaan diferensial linear, persamaan diferensial linear homogen, dan persamaan diferensial linear tak homogen.

Definisi 2.5

Persamaan diferensial linear berorde n adalah persamaan diferensial yang memiliki bentuk umum:

$$a_0(x)y^n + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x) \quad (2.1)$$

dengan $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ dan b fungsi-fungsi kontinu pada interval I yang hanya bergantung pada x saja dan $a_0(x) \neq 0$. (Ross, 1984:5)

Apabila masing-masing ruas pada (2.1) dibagi dengan $a_0(x)$ maka diperoleh:

$$y^n + f_1(x)y^{(n-1)} + \dots + f_{n-1}(x)y' + f_n(x)y = g(x) \quad (2.2)$$

dengan $f_1 = \frac{a_1}{a_0}, \dots, f_n = \frac{a_n}{a_0}$, dan $g = \frac{b}{a_0}$

bentuk (2.2) disebut sebagai bentuk baku persamaan diferensial linear.

Contoh:

$$1) \frac{d^2 y}{dx^2} + 5 \frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

$$2) \frac{d^4 y}{dx^4} + x^2 \frac{d^3 y}{dx^3} + x^3 \frac{dy}{dx} = xe^x$$

Definisi 2.6

Persamaan diferensial linear homogen adalah persamaan yang memenuhi (2.1) dengan $b(x) = 0$. Bentuk umum persamaan diferensial linear homogen yaitu:

$$a_0(x)y^n + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0 \quad (2.3)$$

dan persamaan yang memenuhi (2.1) dengan $b(x) \neq 0$ disebut persamaan diferensial linear tak homogen, yang bentuk umumnya adalah seperti pada (2.1) dengan $b(x) \neq 0$.

Persamaan (2.3) merupakan persamaan diferensial linear homogen yang bersesuaian dengan persamaan diferensial linear tak homogen (2.1). Hal ini akan digunakan dalam menyelesaikan persamaan diferensial linear orde-n pada bab III.

Definisi 2.7

Jika semua koefisien $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x)$ adalah tetap, maka persamaan (2.1) disebut persamaan diferensial linear dengan koefisien konstanta. Dan jika semua koefisien $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x)$ adalah berupa fungsi, maka persamaan (2.1) disebut persamaan diferensial linear dengan koefisien variabel (peubah). (Finizio Ladas, 1988:58)

2.3 Operator Diferensial

Dalam pembahasannya, persamaan diferensial tidak lepas dari operator diferensial. Berikut ini dijelaskan mengenai operator diferensial.

Perhatikan ruas kiri dari (2.1), yaitu

$$a_0(x)y^n + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y \quad (2.4)$$

Jika y adalah fungsi yang memiliki turunan ke- n , maka (2.4) dapat dinyatakan dengan:

$$L[y] = a_0(x)y^n + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y \quad (2.5)$$

L pada (2.5) adalah fungsi yang baru yang didefinisikan pada himpunan fungsi yang memiliki turunan ke- n . Di sini L disebut sebagai operator. Dan karena L melibatkan diferensial, maka L disebut operator diferensial (Siswanto, 1997: 20).

Jika didefinisikan

$$D^n y = y^{(n)}$$

Maka (2.5) dapat ditulis sebagai:

$$L[y] = a_0(x)D^n y + a_1(x)D^{(n-1)} y + \dots + a_{n-1}(x)Dy + a_n(x)y \quad (2.6)$$

Dan operatornya adalah:

$$L = a_0(x)D^n + a_1(x)D^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)D + a_n(x) \quad (2.7)$$

Jika $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ adalah konstanta, maka operatornya ditulis dengan:

$$P(D) = a_0 D^n + a_1 D^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} D + a_n \quad (2.8)$$

Menurut (Goode, 1991:306), operator suatu persamaan diferensial linear membentuk suatu transformasi linear.

2.4 Matriks, Determinan dan Aturan Cramer

Metode penyelesaian yang diungkapkan pada bab selanjutnya berhubungan dengan determinan matriks. Dibawah ini diberikan pengertian dari determinan suatu matriks.

Definisi 2.8

Jika diketahui matriks $A_{2 \times 2}$, yaitu $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, maka determinan dari

matriks A adalah $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. (Anton, 1997:63)

Contoh:

Hitunglah determinan dari

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan definisi diatas maka akan memberikan

$$\det(A) = (3)(-2) - (1)(4) = -10$$

Definisi 2.9

Jika diketahui matriks persegi $A_{n \times n}$, maka determinan A dapat dihitung dengan menggunakan minor-minor M_{ij} dari A, dimana minor M_{ij} dari $A_{n \times n}$ merupakan matriks $(n-1) \times (n-1)$ yang diperoleh dengan mencoret baris ke-i dan kolom ke-j dari A. (Anton, 1997:79)

Perhitungan determinan adalah:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(M_{ij}) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(M_{ij}) \quad (2.9)$$

Contoh:

Misalkan $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$. Hitunglah $\det(A)$.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}\det(A) &= \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - (1) \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 3(-4) - (1)(-11) = -1\end{aligned}$$

Untuk mengetahui ada dan tidaknya invers suatu matriks persegi, dapat juga digunakan determinan matriks. Berikut ini adalah teorema yang merupakan pengujian terhadap keberadaan invers suatu matriks persegi.

Teorema 2.1

Matriks persegi A memiliki invers jika dan hanya jika $\det(A) \neq 0$.

Bukti:

Jika A dapat dibalik, maka $I = AA^{-1}$ sehingga $1 = \det(I) = \det(A) \det(A^{-1})$. Jadi, $\det(A) \neq 0$. Sebaliknya, anggaplah bahwa $\det(A) = 0$. Kita akan perlihatkan bahwa A ekuivalen baris pada I , dan dengan demikian kita dapat menyimpulkan bahwa A dapat dibalik. Misalkan R adalah bentuk eselon baris tereduksi dari A . Karena R dapat diperoleh dari A dengan menggunakan urutan berhingga dari operasi baris elementer, maka kita dapat mencari matriks-matriks elementer $E_1, E_2, \dots, E_k$ sehingga $E_k, \dots, E_2, E_1 A = R$ atau $A = E_1^{-1} E_2^{-1} \dots E_k^{-1} R$. Jadi,

$$\det(A) = \det(E_1^{-1}) \det(E_2^{-1}) \dots \det(E_k^{-1}) \det(R)$$

Karena kita menganggap bahwa $\det(A) \neq 0$, maka dari persamaan ini diperoleh bahwa $\det(R) \neq 0$. Maka, R tidak mempunyai suatu barisan bilangan nol, sehingga dengan demikian $R = I$. Jadi teorema terbukti. (Anton, 1997:74-75)

Contoh:

Karena baris pertama dan baris ketiga dari

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

sebanding, maka $\det(A) = 0$. Jadi, A tidak dapat dibalik.

Untuk mencari selesaian suatu sistem linear diperlukan aturan perhitungan tertentu. Salah satunya adalah dengan menggunakan aturan Cramer yang memanfaatkan determinan matriks. Aturan Cramer digunakan untuk menyelesaikan sistem linear yang memuat n persamaan dan n peubah. Aturan Cramer dituangkan dalam teorema berikut.

Teorema 2.2

Misalnya diketahui sistem n persamaan linear dalam n variabel, yaitu:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \tag{2.10}$$

dengan a_{ij} dan b_i konstanta, x_i variabel, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, n$. Jika matriks

koefisien dari sistem (2.10), yaitu $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$, memiliki determinan tak

nol, maka sistem (2.10) memiliki selesaian tunggal, yaitu:

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

di mana A_i adalah matriks yang kita dapatkan dengan menggantikan entri-entri dalam kolom ke i dari A dengan entri-entri dalam matriks

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Bukti:

Jika $\det(A) \neq 0$, maka A dapat dibalik. Dan $X=A^{-1}B$ adalah pemecahan tunggal dari $AX=B$. Sehingga diperoleh:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)B = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \dots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Dengan mengalikan matriks-matriks ini akan memberikan

$$X = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} b_1 C_{11} + b_2 C_{21} + \dots + b_n C_{n1} \\ b_1 C_{12} + b_2 C_{22} + \dots + b_n C_{n2} \\ \vdots \\ b_1 C_{1n} + b_2 C_{2n} + \dots + b_n C_{nn} \end{bmatrix}$$

Entri dalam baris ke j dari X dengan demikian adalah

$$x_j = \frac{b_1 C_{1j} + b_2 C_{2j} + \dots + b_n C_{nj}}{\det(A)}$$

Sekarang dimisalkan

$$A_j = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Karena A_j berbeda dari A hanya dalam kolom ke j , maka kofaktor dari entri-entri $b_1, b_2, \dots, b_n$ dalam A_j adalah sama seperti kofaktor dari entri-entri yang bersesuaian dalam kolom ke j dari A . Perluasan kofaktor $\det(A_j)$ sepanjang kolom ke j dengan demikian adalah

$$\det(A_j) = b_1 C_{1j} + b_2 C_{2j} + \dots + b_n C_{nj}$$

Dengan mensubstitusikan hasil ini ke dalam

$$x_j = \frac{b_1 C_{1j} + b_2 C_{2j} + \dots + b_n C_{nj}}{\det(A)} \text{ maka akan memberikan } x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)} \text{ terbukti.}$$

(Anton, 1997:83-84)

Contoh:

Gunakan aturan Cramer untuk memecahkan

$$x_1 + 2x_3 = 6$$

$$-3x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 30$$

$$-x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 8$$

Penyelesaian:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 30 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 30 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 30 \\ -1 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

Maka

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{-40}{44} = \frac{-10}{11}$$

$$x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{72}{44} = \frac{18}{11}$$

$$x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{152}{44} = \frac{38}{11}$$

2.5 Kombinasi Linear, Kebebaslinearan, Dan Nilai Wronski

Dalam penyelesaian persamaan diferensial linear tak homogen dengan menggunakan metode variasi parameter, diperlukan pengetahuan tentang kebebasan linear dan nilai Wronski. Metode variasi parameter akan dibahas pada bab selanjutnya. Berikut ini diberikan definisi dan teorema tentang kombinasi linear, kebebasan linear, dan nilai Wronski.

Definisi 2.10

Jika diketahui himpunan vektor $f_1, f_2, \dots, f_n$ dan $c_1, c_2, \dots, c_n$ adalah konstanta, maka bentuk $c_1 f_1, c_2 f_2, \dots, c_n f_n$ disebut sebagai kombinasi linear dari $f_1, f_2, \dots, f_n$. (Finzio Ladas, 1988:65-66)

Contoh:

Selesaikan persamaan diferensial homogen

$$y'' = 0 \tag{2.11}$$

Karena persamaan ini sederhana, kita dapat langsung mengintegalkannya untuk memperoleh penyelesaiannya. Dengan mengintegalkan persamaan (2.11) menurut x , kita peroleh

$$y' = c_1 \quad (2.12)$$

Dimana c_1 adalah suatu konstanta pengintegralan. Dengan mengintegalkan persamaan (2.12) menurut x , kita dapatkan

$$y = c_1 x + c_2 \quad (2.13)$$

Dimana c_2 adalah konstanta pengintegralan lain. Tanpa menghiraukan nilai-nilai yang diberikan kepada konstanta-konstanta c_1 dan c_2 , pernyataan untuk y yang diberikan oleh (2.13) adalah suatu penyelesaian persamaan diferensial (2.11). Perhatikan bahwa $y_1 = x$ dan $y_2 = 1$ adalah penyelesaian persamaan (2.11) dan persamaan (2.13) menunjukkan bahwa penyelesaian-penyelesaian itu berperan khusus dalam setiap penyelesaian, yaitu dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari kedua penyelesaian itu. Jadi, jika y suatu penyelesaian persamaan (2.11), maka ada konstanta-konstanta c_1 dan c_2 sehingga $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$. Tentu saja, jika $y = y_1$, maka $c_1 = 1$ dan $c_2 = 0$, dan jika $y = y_2$, maka $c_1 = 0$ dan $c_2 = 1$.

Definisi 2.11

Suatu kumpulan m fungsi $f_1, f_2, \dots, f_m$, masing-masing terdefinisi dan kontinu pada selang $a \leq x \leq b$, dikatakan tergantung linear (tidak bebas linear) pada selang $a \leq x \leq b$. Jika ada konstanta-konstanta $c_1, c_2, \dots, c_m$ yang tidak semuanya bersama-sama dengan nol, sehingga

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_m f_m(x) = 0 \quad (2.14)$$

untuk setiap x dalam selang $a \leq x \leq b$. Dalam hal lain, fungsi-fungsi itu disebut bebas linear dalam selang itu. (Finizio Ladas, 1988:66)

Contoh:

- a Tunjukkan bahwa fungsi-fungsi $f_1(x) = 3x + (12/5)$ dan $f_2(x) = 5x + 4$ tergantung linear pada selang $(-\infty, \infty)$
- b Sebaliknya, buktikan bahwa fungsi-fungsi $f_1(x) = x$ dan $f_2(x) = x^2$ bebas linear pada selang $-1 \leq x \leq 1$

Penyelesaian:

- a Untuk menunjukkan bahwa fungsi-fungsi f_1 dan f_2 tergantung linear, kita harus menunjukkan ada konstanta c_1 dan c_2 tidak kedua-duanya nol, sehingga

$$c_1 \left(3x + \frac{12}{5} \right) + c_2 (5x + 4) = 0$$

untuk setiap x dalam selang $-\infty \leq x \leq \infty$. Ini dimungkinkan jika kita pilih misalnya $c_1 = 5$ dan $c_2 = -3$.

- b Kita misalkan f_1 dan f_2 tergantung linear pada selang $-1 \leq x \leq 1$. Yaitu ada konstanta c_1 dan c_2 , tidak kedua-duanya nol, sedemikian hingga

$$c_1 x + c_2 x^2 = 0$$

untuk setiap x dalam selang $-1 \leq x \leq 1$. Tetapi untuk $x = 1$ dan $x = -1$, didapatkan

$$c_1 + c_2 = 0 \text{ dan } -c_1 + c_2 = 0.$$

Satu-satunya penyelesaian sistem ini adalah $c_1 = c_2 = 0$. Ini berlawanan dengan pemisalan awal bahwa f_1 dan f_2 tergantung linear. Jadi, f_1 dan f_2 bebas linear pada selang $-1 \leq x \leq 1$.

Definisi 2.12

Misalkan $f_1, f_2, \dots, f_n$ kumpulan n buah fungsi yang semuanya dan turunan-turunannya sampai dengan turunan ke $n-1$ kontinyu pada selang $a \leq x \leq b$. Wronski dari $f_1, f_2, \dots, f_n$ dihitung pada x , dinyatakan oleh $W(f_1, f_2, \dots, f_n; x)$ dan ditentukan sebagai determinan

$$W(f_1, f_2, \dots, f_n; x) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ f_1'' & f_2'' & \cdots & f_n'' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1^{n-1} & f_2^{n-1} & \cdots & f_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Tiap fungsi yang muncul dalam determinan ini dihitung pada x . (Finizio Ladas, 1988:67)

Contoh:

Diketahui $f_1(x) = x^2$ dan $f_2(x) = \cos x$, cari $W(f_1, f_2; x)$

Penyelesaian:

Dari definisi di atas dan fungsi-fungsi yang diketahui, dapat dihitung:

$$W(x^2, \cos x; x) = \begin{vmatrix} x^2 & \cos x \\ 2x & -\sin x \end{vmatrix} = -x^2 \sin x - 2x \cos x$$

Teorema 2.3

Jika setiap fungsi $y_1, y_2, \dots, y_m$ merupakan penyelesaian-penyelesaian persamaan diferensial homogen yang sama,

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-2}(x)y'' + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$$

Maka untuk setiap pilihan konstanta-konstanta $c_1, c_2, \dots, c_m$, kombinasi linear

$$c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_my_m$$

merupakan suatu penyelesaian juga.

Bukti:

Bukti ini tergantung pada dua sifat penurunan

$$(f_1 + f_2 + \dots + f_k)' = f_1' + f_2' + \dots + f_k'$$

Dan

$$(cf)' = cf',$$

di mana c suatu konstanta.

Di sini disajikan secara terperinci untuk $m = 2$ dan $n = 3$. Andaikan bahwa y_1 dan y_2 merupakan penyelesaian persamaan diferensial

$$a_3(x)y''' + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

Dengan mensubstitusikan $c_1y_1 + c_2y_2$ ke dalam persamaan diferensial ini, akan diperoleh:

$$a_3(x)(c_1y_1 + c_2y_2)''' + a_2(x)(c_1y_1 + c_2y_2)'' + a_1(x)(c_1y_1 + c_2y_2)' + a_0(x)(c_1y_1 + c_2y_2) = 0$$

$$a_3(x)(c_1y_1''' + c_2y_2''') + a_2(x)(c_1y_1'' + c_2y_2'') + a_1(x)(c_1y_1' + c_2y_2') + a_0(x)(c_1y_1 + c_2y_2) = 0$$

$$c_1[a_3(x)y_1''' + a_2(x)y_1'' + a_1(x)y_1' + a_0(x)y_1] + c_2[a_3(x)y_2''' + a_2(x)y_2'' + a_1(x)y_2' + a_0(x)y_2] = 0$$

$$c_1(0) + c_2(0) = 0$$

$$0 + 0 = 0$$

Misalkan diberi n fungsi-fungsi $y_1, y_2, \dots, y_n$ yang masing-masing merupakan penyelesaian persamaan diferensial linear homogen orde- n , di sini,

terdapat ketentuan berikut untuk menguji kebebasan linear (atau ketergantungan linear).

Teorema 2.4

$y_1, y_2, \dots, y_n$ merupakan n buah penyelesaian persamaan diferensial (2.3) yang didefinisikan pada selang $a \leq x \leq b$, bebas linear jika dan hanya jika $W(y_1, y_2, \dots, y_n; x) \neq 0$ untuk setiap x dalam selang $a \leq x \leq b$. (Finzio Ladas, 1988:69)

Contoh:

$y_1(x) = \cos x$ dan $y_2(x) = \sin x$ merupakan penyelesaian persamaan diferensial $y'' + y = 0$ yang bebas linear karena Wronskiannya

$$\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

tidak pernah nol. Selain itu, juga e^x dan e^{-x} merupakan penyelesaian persamaan diferensial $y'' - y = 0$ yang bebas linear karena Wronskiannya

$$\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -e^0 - e^0 = -2$$

juga tidak pernah nol.

Teorema 2.5

Jika $y_1, y_2, \dots, y_n$ merupakan penyelesaian-penyelesaian persamaan diferensial (2.3), di mana tiap $a_i(x)$ didefinisikan dan kontinu pada $a \leq x \leq b$ dan $a_n(x) \neq 0$ pada $a \leq x \leq b$, maka baik $W(y_1, y_2, \dots, y_n; x)$ identik nol pada $a \leq x \leq b$ atau $W(y_1, y_2, \dots, y_n; x)$ tidak pernah nol pada $a \leq x \leq b$.

Bukti:

Bukti ini untuk kasus $n = 2$. Untuk singkatnya kita nyatakan $W(y_1, y_2; x)$, $p(x) = a_1(x)/a_2(x)$, dan $q(x) = a_0(x)/a_2(x)$. Ingat bahwa p dan q keduanya adalah fungsi yang kontinu, karena $a_2(x) \neq 0$. Sekarang

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

Jadi

$$\begin{aligned} W' &= y_1 y_2'' - y_1' y_2' - (y_1' y_2' + y_1'' y_2) = y_1 y_2'' - y_1'' y_2 \\ &= y_1(-p y_2' - y_2) - (-p y_1' - q y_1) y_2 = -p(y_1 y_2' - y_1' y_2) \\ &= -pW \end{aligned}$$

Dengan menggunakan persamaan $y(x) = y_0 e^{-\int_{x_0}^x a_s ds} + \int_{x_0}^x b(s) e^{-\int_s^x a(t) dt} ds$

dengan $a(x) = p(x)$ dan $b(x) = 0$ kita dapatkan bahwa persamaan diferensial

$W' = -pW$ mempunyai penyelesaian

$$W(x) = W(x_0) \exp \left[- \int_{x_0}^x p(s) dx \right] \quad (2.17)$$

karena fungsi eksponen tidak pernah nol, menurut persamaan di atas, jika W nol pada titik x_0 pada selang $a \leq x \leq b$, maka W identik nol, dan jika W tidak nol pada titik x_0 , maka W tidak pernah nol. (Finizio Ladas, 1988:70)

Definisi 2.13

Misalkan bahwa $y_1, y_2, \dots, y_n$ merupakan n buah penyelesaian persamaan diferensial (2.3). Misalkan juga bahwa fungsi-fungsi itu bebas linear pada selang

definisi persamaan diferensial ini. Dikatakan bahwa fungsi-fungsi itu membentuk himpunan fundamental (atau sistem fundamental) penyelesaian persamaan diferensial tersebut.

Contoh:

Fungsi $\cos x$ dan $\sin x$ merupakan suatu himpunan fundamental penyelesaian persamaan diferensial $y'' + y = 0$. Juga fungsi e^x dan e^{-x} membentuk suatu himpunan fundamental penyelesaian persamaan diferensial $y'' - y = 0$.

Determinan Wronski digunakan terutama sebagai penguji untuk menentukan apakah suatu himpunan penyelesaian suatu persamaan diferensial bebas linear atau tidak. (Finizio Ladas, 1988:71)

2.6 Masalah Nilai Awal

Definisi 2.14:

Masalah nilai awal persamaan diferensial linear orde- n

$F\left[x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right] = 0$ diartikan sebagai: carilah sebuah penyelesaian

persamaan diferensial dalam interval $a < x < b$ sedemikian hingga di titik x_0

berlaku kondisi awal

$$y(x_0) = y_0$$

$$\frac{dy}{dx}(x_0) = y_1$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^{(n-1)}y}{dx^{(n-1)}}(x_0) = y_{n-1}$$

dengan x_0 dalam selang $a < x < b$ dan $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ merupakan konstanta.

(Kusumah, 1989)

Jika persamaan diferensialnya orde satu, maka kondisi awalnya hanya berupa persamaan tunggal $y(x_0) = y_0$. Sedangkan untuk persamaan diferensial orde dua, kondisi awalnya dalam bentuk: $y(x_0) = y_0$; $\frac{dy}{dx}(x_0) = y_1$, di mana terdapat dua persamaan.

Istilah kondisi awal berasal dari mekanika. Dalam mekanika, $y(x_0) = y_0$ menyatakan kedudukan sebuah obyek pada saat x_0 , dan $\frac{dy}{dx}(x_0) = y_1$ menyatakan kecepatan obyek pada saat x_0 . (Kusumah, 1989)

2.7 Metode Variasi Parameter

Metode variasi parameter digunakan untuk menentukan solusi khusus dari persamaan diferensial linear tak homogen orde- n . Metode ini dapat digunakan untuk menentukan solusi khusus dari persamaan diferensial linear tak homogen yang koefisiennya konstanta atau fungsi dalam suatu variabel tertentu, dengan syarat penyelesaian persamaan homogen yang korespondensinya telah diketahui (Finizio Ladas, 1988:122)

Teorema 2.6

Bentuk persamaan diferensial linear non homogen orde n adalah

$$a_0(x)y^n + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x) \quad (2.18)$$

Dengan $a_0 \neq 0$. Misalkan $y_1, y_2, \dots, y_n$ penyelesaian bebas linear dari persamaan homogen (2.18) dengan $b(x) = 0$ maka penyelesaian persamaan diferensial (2.18) berbentuk

$$y_p = \sum_{i=1}^n y_i \int \frac{W_i}{W(y_1, y_2, \dots, y_n)} \frac{b(x)}{a_0} dx$$

Bukti:

Akan dicari fungsi-fungsi $u_1, u_2, \dots, u_n$ agar persamaan

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 + \dots + u_n y_n \quad (2.19)$$

adalah penyelesaian persamaan diferensial (2.19)

Penurunan dari persamaan (2.19) menjadi

$$y_p' = (u_1 y_1' + u_2 y_2' + \dots + u_n y_n') + (u_1' y_1 + u_2' y_2 + \dots + u_n' y_n)$$

jika diambil $(u_1' y_1 + u_2' y_2 + \dots + u_n' y_n) = 0$ maka

$$y_p' = u_1 y_1' + u_2 y_2' + \dots + u_n y_n'$$

penurunan y_p' memberikan

$$y_p'' = (u_1 y_1'' + u_2 y_2'' + \dots + u_n y_n'') + (u_1' y_1' + u_2' y_2' + \dots + u_n' y_n')$$

dan jika diambil $(u_1' y_1' + u_2' y_2' + \dots + u_n' y_n') = 0$ maka

$$y_p'' = u_1 y_1'' + u_2 y_2'' + \dots + u_n y_n''$$

proses ini dilanjutkan sampai penurunan ke- n dari y_p , sehingga menghasilkan

$$y_p^{(n)} = (u_1 y_1^{(n)} + u_2 y_2^{(n)} + \dots + u_n y_n^{(n)}) + (u_1' y_1^{(n-1)} + u_2' y_2^{(n-1)} + \dots + u_n' y_n^{(n-1)})$$

dan jika diambil $(u_1' y_1^{(n-1)} + u_2' y_2^{(n-1)} + \dots + u_n' y_n^{(n-1)}) = 0$ maka

$$y_p^{(n)} = (u_1 y_1^{(n)} + u_2 y_2^{(n)} + \dots + u_n y_n^{(n)})$$

jika diambil $u_1, u_2, \dots, u_n$ memenuhi sistem persamaan

$$\begin{cases} u_1' y_1 + u_2' y_2 + \dots + u_n' y_n = 0 \\ u_1 y_1' + u_2 y_2' + \dots + u_n y_n' = 0 \\ \vdots \\ u_1 y_1^{(n-1)} + u_2 y_2^{(n-1)} + \dots + u_n y_n^{(n-1)} = \frac{b(x)}{a_0} \end{cases} \quad (2.20)$$

maka persamaan (2.19) adalah penyelesaian persamaan diferensial (2.18). Karena

$y_1, y_2, \dots, y_n$ bebas linear maka $W(y_1, y_2, \dots, y_n) \neq 0$.

$$\text{Misal } A = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix}; X = \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \\ \vdots \\ u_n' \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \frac{b(x)}{a_0} \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

maka

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{\det A} (\text{adj } A)B$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}}{W_{(y_1, y_2, \dots, y_n)}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \frac{b(x)}{a_0} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} a_{n1} \\ a_{n2} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix}}{W_{(y_1, y_2, \dots, y_n)}} \frac{b(x)}{a_0}$$

sehingga

$$u_i' = \frac{a_{ni}}{W_{(y_1, y_2, \dots, y_n)}} \frac{b(x)}{a_0}$$

$$= (-1)^{n+i} \frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_{i-1} & y_{i+1} & \dots & y_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_{i-1} & y_{i+1} & \dots & y_n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_{i-1}^{(n-1)} & y_{i+1}^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} b(x)}{W_{(y_1, y_2, \dots, y_n)} a_0}$$

atau

$$u_i' = \frac{W_i}{W_{(y_1, y_2, \dots, y_n)}} \frac{b(x)}{a_0} \quad ; i = 1, 2, \dots, n \quad (2.21)$$

dengan W_i adalah determinan $n \times n$ yang mempunyai kolom i diganti dengan $(0, 0, \dots, 1)$ yaitu

$$W_i = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_{i-1} & y_{i+1} & \dots & y_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_{i-1} & y_{i+1} & \dots & y_n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_{i-1}^{(n-1)} & y_{i+1}^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Jadi dari (2.21) diperoleh

$$y_p = \sum_{i=1}^n y_i \int \frac{W_i}{W_{(y_1, y_2, \dots, y_n)}} \frac{b(x)}{a_0} dx$$

(Boyce dan DiPrima, 2001:237-239)

Teorema 2.7

Jika y_p merupakan selesaian khusus dari (2.1), $y_1, y_2, \dots, y_n$ selesaian fundamental dari persamaan diferensial linear homogen yang bersesuaian dengan (2.1), yaitu (2.3), dan $c_1, c_2, \dots, c_n$ konstanta, maka $Y = y_p + c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$ juga merupakan selesaian (2.1). (Bear, 1962: 63)

Bukti:

Misalkan diketahui persamaan diferensial tak homogen:

$$L[y] = y^n + f_1(x)y^{(n-1)} + \dots + f_{n-1}(x)y' + f_n(x)y = g(x) \quad (2.22)$$

Dan persamaan diferensial linear homogen yang bersesuaian dengan (2.22) misalkan

$$L[y] = y^n + f_1(x)y^{(n-1)} + \dots + f_{n-1}(x)y' + f_n(x)y = 0 \quad (2.23)$$

Karena y_p selesaian dari (2.16), maka $L[y_p] = g(x)$

Mialnya u sebarang selesaian dari (2.22), maka $L[u] = g(x)$

Karena (2.22) linear, maka $L[u - y_p] = g(x) - g(x) = 0$

Berarti $u - y_p$ adalah selesaian dari (2.23) sehingga sesuai teorema 2.3, $u - y_p$

dapat ditulis sebagai $u - y_p = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$ sehingga $u = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n + y_p$.

Karena u sebarang selesaian dari (2.22) maka $c_1 y_1 + \dots + c_n y_n + y_p$ merupakan selesaian dari (2.22).

Misalnya u diganti dengan Y , maka Y adalah selesaian dari (2.16).

Selanjutnya Y merupakan selesaian umum dari (2.1).

2.8 Metode Penyelesaian Persamaan Diferensial Linear Homogen

A. Penyelesaian Persamaan Diferensial Linear Homogen dengan Koefisien Variabel dalam bentuk Persamaan Cauchy-Euler

Persamaan Cauchy-Euler dikemukakan oleh Leonhard Euler tahun 1789, kemudian dikembangkan oleh Agustin Cauchy. Penyelesaian persamaan ini dipecahkan oleh John Bernoulli tahun 1700. (Kusumah, 1989: 238)

Persamaan dalam bentuk:

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0 \quad (2.24)$$

dengan $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ konstanta, $a_0 \neq 0$, dan $x \neq 0$ dinamakan Persamaan Cauchy-Euler.

Penyelesaian persamaan Cauchy-Euler dilakukan dengan jalan mencari 2 penyelesaian yang bebas linear bagi persamaan diferensial homogen yang berkorespondensi dengan persamaan yang diberikan. Langkah selanjutnya adalah dengan mensubstitusi $x = e^t$ atau $y = x^r$, sehingga persamaan diferensial (2.24) berubah menjadi persamaan diferensial dengan koefisien konstanta (Kusumah, 1989: 239). Disini akan menggunakan substitusi $y = x^r$ sebagai solusi (2.24) sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} y' &= r x^{r-1} \\ y'' &= r(r-1) x^{r-2} \\ &\vdots \\ y^n &= r(r-1)(r-2)\dots(r-n+1) x^{r-n} \end{aligned}$$

Selanjutnya $y, y', \dots, y^n$ disubstitusikan (2.24) dan diperoleh:

$$x^r [r(r-1)(r-2)\dots(r-n+1) + a_1 r(r-1)\dots(r-n+2) + \dots + a_n] = 0$$

Karena $x \neq 0$, maka $x^r \neq 0$ sehingga diperoleh:

$$r(r-1)(r-2)\dots(r-n+1) + a_1 r(r-1)\dots(r-n+2) + \dots + a_n = 0 \quad (2.25)$$

persamaan (2.25) disebut persamaan karakteristik (2.24). Sebagai ilustrasi (2.25)

maka diambil beberapa nilai n . Misal $n = 2$, maka (2.25) berbentuk:

$$r(r-1) + a_1 r + a_2$$

Untuk $n = 3$, maka (2.25) berbentuk:

$$r(r-1)(r-2) + a_1 r(r-1) + r a_2 + a_3 = 0 \text{ dan seterusnya.}$$

Seperti pada persamaan orde- n dengan koefisien konstanta, solusi umum (2.24) tergantung dari jenis akar-akar persamaan karakteristik (2.25) sebagai berikut:

- a. Akar-akarnya real dan berbeda; $r_1, r_2, \dots, r_n$

Selesaian dari (2.24) adalah:

$$y_1 = x^{r_1}, y_2 = x^{r_2}, \dots, y_n = x^{r_n} \quad (2.26)$$

dan selesaian umum dari (2.24) adalah:

$$y_h = c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_2} + \dots + c_n x^{r_n} \quad (2.27)$$

- b. Akar-akarnya real dan kembar yang berkelipatan n

Selesaian dari (2.24) adalah:

$$y_1 = x^{r_1}, y_2 = x^{r_1} \ln x, \dots, y_n = x^{r_1} (\ln x)^{n-1} \quad (2.28)$$

dan selesaian umum dari (2.24) adalah:

$$y_h = c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_1} \ln x + \dots + c_n x^{r_1} (\ln x)^{n-1} \quad (2.29)$$

- c. Akar-akarnya kompleks, $r = \alpha \pm \beta_i$ yang berkelipatan n

Selesaian dari (2.24) adalah:

$$\begin{aligned}
y_{11} &= x^\alpha \cos(\beta \ln x), y_{12} = x^\alpha \sin(\beta \ln x) \\
y_{21} &= x^\alpha \ln x \cos(\beta \ln x), y_{22} = x^\alpha \ln x \sin(\beta \ln x) \dots \\
y_{n1} &= x^\alpha \ln^{n-1} x \cos(\beta \ln x), y_{n2} = x^\alpha \ln^{n-1} x \sin(\beta \ln x)
\end{aligned} \tag{2.30}$$

sedangkan selesaian umumnya merupakan kombinasi linear selesaiannya.

(Baiduri, 2002: 160-161)

Contoh:

Misalnya diketahui persamaan diferensial linear homogen:

$$x^3 y''' + 2x^2 y'' + xy' - y = 0 \quad x > 0$$

Misalnya $y = x^r$ adalah selesaian.

Berarti, $y' = rx^{r-1}$, $y'' = r(r-1)x^{r-2}$, dan $y''' = r(r-3r+2)x^{r-3}$

y, y', y'', y''' disubstitusi ke persamaan diferensial diatas.

$$\begin{aligned}
x^3 \cdot r(r-3r+2)x^{r-3} + 2x^2 \cdot r(r-1)x^{r-2} + x \cdot rx^{r-1} - x^r &= 0 \\
= (r^3 - r^2 + r - 1)x^r &= 0
\end{aligned}$$

$x^r \neq 0$, maka $r^3 - r^2 + r - 1 = 0$ yang akar-akarnya adalah $r_1 = 1, r_2 = i, r_3 = -i$.

Sesuai (2.27) dan (2.30) selesaian umum persamaan diferensial homogen diatas adalah:

$$y_h = c_1 x + x(c_2 \cos(\ln x) + c_3 \sin(\ln x))$$

2.9 Metode Numerik

Metode artinya cara, sedangkan numerik artinya angka, sehingga metode numerik secara harfiah berarti cara berhitung dengan menggunakan angka-angka. Sedangkan secara istilah, metode numerik adalah teknik yang digunakan untuk

memformulasikan persoalan matematik sehingga dapat dipecahkan dengan operasi perhitungan atau aritmetika biasa (tambah, kurang, kali dan bagi) (Munir, 2008:5).

Metode numerik disebut juga sebagai alternatif dari metode analitik, yang merupakan metode penyelesaian persoalan matematika dengan rumus-rumus aljabar yang sudah baku atau lazim. Disebut demikian, karena adakalanya persoalan matematik sulit diselesaikan atau bahkan tidak dapat diselesaikan secara analitik sehingga dapat dikatakan bahwa persoalan matematik tersebut tidak mempunyai solusi analitik. Sehingga sebagai alternatifnya, persoalan matematik tersebut diselesaikan dengan metode numerik.

Perbedaan utama antara metode numerik dengan metode analitik terletak pada dua hal, yaitu:

- a) Solusi dengan metode numerik selalu berbentuk angka, sedangkan dengan metode analitik biasanya menghasilkan solusi dalam bentuk fungsi matematik yang selanjutnya fungsi matematik tersebut dapat dievaluasi untuk menghasilkan nilai dalam bentuk angka.
- b) Dengan metode numerik hanya diperoleh solusi yang menghampiri atau mendekati solusi sejati sehingga solusi numerik dinamakan juga solusi hampiran (*approximation*) atau solusi pendekatan. Akan tetapi, solusi hampiran tersebut dapat dibuat seteliti yang diinginkan. Solusi hampiran tentu tidak tepat sama dengan solusi sejati, sehingga ada selisih antara keduanya, dan selisih tersebut dinamakan sebagai galat (*error*). Sedangkan dengan solusi analitik

sudah pasti dihasilkan solusi sejati yang sesuai dengan kenyataannya (Munir, 2008:5).

2.10 Penyelesaian PDB secara Numerik

Secara umum, problem persamaan diferensial selalu melibatkan harga awal (nilai awal/initial value), yang dapat ditulis sebagai berikut:

$$y' = f(x, y) \quad y(x_0) = y_0 \quad (2.31)$$

$$x_0 \leq x \leq x_n$$

secara numerik, solusi problem tersebut adalah berada dalam interval $[x_0, x_n]$ yang dibagi secara tetap (*equidistance*) sebanyak n buah langkah, sehingga ukuran langkah (step) yang dilambangkan dengan h , dapat didefinisikan sebagai

$$h = \frac{x_n - x_0}{n}, \quad n = \frac{x_n - x_0}{h} \quad (\text{www.chemeng.ui.ac.id/~bismo/S1/mater/mod-04.pdf})$$

Berarti, penyelesaian numerik PDB dengan nilai awal adalah menghitung nilai fungsi di $x_{i+1} = x_i + h$. Pada metode analitik, nilai awal berfungsi untuk memperoleh solusi yang unik, sedangkan pada metode numerik, nilai awal pada persamaan (2.24) berfungsi untuk memulai lelaran atau iterasi.

Terdapat beberapa metode numerik yang sering digunakan untuk menghitung solusi PDB, mulai dari metode yang paling dasar sampai dengan metode yang lebih teliti. Dari beberapa metode yang ada, metode yang paling dasar dan merupakan metode yang umum untuk menurunkan rumus-rumus solusi PDB adalah **metode deret Taylor**. Dalam menyelesaikan PDB dengan nilai awal, metode tersebut dijabarkan sebagai:

Diberikan PDB:

$$y'(x) = f(x, y) \text{ dengan nilai awal } y(x_0) = y_0$$

Misalkan $y_{i+1} = y(x_{i+1})$, dengan $i = 0, 1, 2, \dots, n$. y_{i+1} adalah hampiran nilai y di x_{i+1} . Maka hampiran ini dapat diperoleh dengan menguraikan y_{i+1} di sekitar x_i sebagai berikut:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \frac{(x_{i+1} - x_i)}{1!} y'(x_i) + \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2!} y''(x_i) + \frac{(x_{i+1} - x_i)^3}{3!} y'''(x_i) + \dots + \frac{(x_{i+1} - x_i)^n}{n!} y^{(n)}(x_i)$$

atau

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + h y'(x_i) + \frac{h^2}{2} y''(x_i) + \frac{h^3}{6} y'''(x_i) + \dots + \frac{h^{(n)} y^{(n)}}{n!} x_i$$

Secara garis besar, terdapat 2 kelompok metode dalam menyelesaikan PDB secara numerik, yaitu:

a) Metode satu langkah (*one-step*)

Disebut metode satu langkah, karena untuk menaksir nilai $y(x_{i+1})$ dibutuhkan satu taksiran nilai sebelumnya yaitu $y(x_i)$. Metode yang termasuk metode satu langkah adalah metode deret Taylor, metode Euler, metode Heun dan metode Runge Kutta.

b) Metode banyak langkah (*multi-step*)

Pada metode ini, perkiraan nilai $y(x_{i+1})$ memerlukan beberapa taksiran nilai sebelumnya, yaitu $y(x_i), y(x_{i-1}), y(x_{i-2}), \dots$. Salah satu metode banyak langkah adalah metode *predictor corrector*. Terdapat beberapa metode

predictor corrector, diantaranya adalah metode Adam-Bashforth-Moulton, metode Milne-Simpson dan metode Hamming. Selain itu, dikenal juga metode Heun yang merupakan metode *predictor corrector*, akan tetapi bukan termasuk metode banyak langkah, karena taksiran nilai $y(x_{i+1})$ hanya didasarkan pada taksiran $y(x_i)$. Tujuan utama metode banyak langkah adalah menggunakan informasi dari beberapa titik sebelumnya, yaitu titik $y_i, y_{i-1}, y_{i-2}, \dots$ untuk menghitung taksiran nilai $y(x_{i+1})$ yang lebih baik (Munir, 2008: 379, 392).

2.11 Metode Runge-Kutta

Penyelesaian PDB dengan metode deret Taylor tidak praktis, karena metode tersebut membutuhkan perhitungan turunan $f(x, y)$. Di samping itu, tidak semua fungsi mudah dihitung turunannya, terutama bagi fungsi yang bentuknya rumit. Semakin tinggi orde metode deret Taylor, maka semakin tinggi turunan fungsi yang harus dihitung (Munir, 2008: 384). Selain itu, untuk mendapatkan hasil yang lebih teliti diperlukan Δx atau h yang kecil, padahal penggunaan Δx yang kecil menyebabkan waktu hitungan yang lebih panjang. Oleh karena itu, metode Runge Kutta merupakan alternatif dari metode deret Taylor yang memberikan ketelitian hasil yang lebih besar dan tidak memerlukan turunan fungsi (Triatmodjo, 2002: 182).

Metode ini mempunyai 3 sifat utama yaitu:

1. Metodenya satu langkah; untuk mencari y_{i+1} hanya diperlukan keterangan yang tersedia pada titik sebelumnya yaitu x_i, y_i .
2. Mendekati ketelitian metode deret Taylor sampai suku dalam h^p , dimana nilai p berbeda untuk metode yang berbeda, dan p ini disebut derajat dari metode.
3. Tidak memerlukan perhitungan turunan $f(x, y)$ tetapi hanya memerlukan fungsi itu sendiri.

(Djojodihardjo, 2000:268)

Metode Runge-Kutta mempunyai bentuk umum persamaan:

$$y_{i+1} = y_i + h\phi(x_i, y_i, h) \quad (2.32)$$

Dimana $\phi(x_i, y_i, h)$ disebut suatu fungsi inkremen yang dapat diinterpretasikan sebagai sebuah slope rata-rata sepanjang interval. Fungsi inkremen dapat ditulis dalam bentuk umum yaitu:

$$\phi = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \dots + a_n k_n \quad (2.33)$$

Dengan setiap a adalah konstanta dan besar setiap k adalah:

$$k_1 = f(x_i, y_i) \quad (2.33a)$$

$$k_2 = f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h) \quad (2.33b)$$

$$k_3 = f(x_i + p_2 h, y_i + q_{21} k_1 h + q_{22} k_2 h) \quad (2.33c)$$

$\vdots$

$$k_3 = f(x_i + p_{n-1} h, y_i + q_{n-1,1} k_1 h + q_{n-1,2} k_2 h + \dots + q_{n-1,n-1} k_{n-1} h) \quad (2.34d)$$

Persamaan tersebut menunjukkan bahwa nilai k mempunyai hubungan berurutan. Nilai k_1 muncul dalam persamaan untuk menghitung k_2 , yang juga muncul dalam persamaan untuk menghitung k_3 , dan seterusnya. Hubungan yang berurutan ini membuat metode Runge-Kutta adalah efisien dalam hitungan.

Ada beberapa tipe mode Runge-Kutta yang tergantung pada nilai n yang digunakan. Untuk $n = 1$, yang disebut metode Runge-Kutta orde satu,

$$\phi = a_1 k_1 = a_1 f(x_i, y_i)$$

Untuk $a_1 = 1$ maka

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h \quad (2.34)$$

Yang sama dengan metode Euler.

Di dalam metode Runge-Kutta, setelah nilai n ditetapkan, kemudian nilai a , p dan q dicari dengan menyamakan persamaan (2.32) dengan suku-suku dari deret Taylor. Selanjutnya akan diturunkan metode Runge-Kutta orde dua.

Metode Runge-Kutta orde dua mempunyai bentuk

$$y_{i+1} = y_i + (a_1 k_1 + a_2 k_2)h \quad (2.34a)$$

Dengan

$$k_1 = f(x_i, y_i) \quad (2.34b)$$

$$k_2 = f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h) \quad (2.34c)$$

Nilai a_1, a_2, p_1 , dan q_{11} dievaluasi dengan menyamakan persamaan (2.34a) dengan deret Taylor orde 2, yang mempunyai bentuk:

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h + f'(x_i, y_i)\frac{h}{2} \quad (2.35)$$

Dengan $f'(x_i, y_i)$ dapat ditentukan dari hukum berantai (*chain rule*) berikut:

$$f'(x_i, y_i) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} \quad (2.36)$$

Substitusi persamaan (2.36) ke dalam persamaan (2.35) menghasilkan:

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h + \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} \right) \frac{h}{2} \quad (2.37)$$

Di dalam metode Runge-Kutta ini dicari nilai a_1, a_2, p_1 , dan q_{11} sedemikian sehingga persamaan (2.34a) ekuivalen dengan persamaan (2.37). Untuk itu digunakan deret Taylor untuk mengembangkan persamaan (2.34c). deret Taylor untuk fungsi dengan dua variable mempunyai bentuk:

$$g(x+r, y+s) = g(x, y) + \frac{\partial g}{\partial x}r + \frac{\partial g}{\partial y}s + \dots$$

Dengan cara tersebut persamaan (2.34c) dapat ditulis dalam bentuk:

$$f(x_i, p_1h, y_i + q_{11}k_1h) = f(x_i, y_i) + p_1h \frac{\partial f}{\partial x} + q_{11}k_1h \frac{\partial f}{\partial y} + 0(h^2)$$

Bentuk diatas dan persamaan (2.34b) disubstitusikan kedalam persamaan (2.34a) sehingga menjadi:

$$y_{i+1} = y_i + a_1h f(x_i, y_i) + a_2h f(x_i, y_i) + a_2p_1h^2 \frac{\partial f}{\partial x} + a_2q_{11}h^2 f(x_i, y_i) \frac{\partial f}{\partial x} + 0(h^3)$$

Atau

$$y_{i+1} = y_i + \left[a_1 f(x_i, y_i) + a_2 f(x_i, y_i) \right] h + \left[a_2p_1 \frac{\partial f}{\partial x} + a_2q_{11} f(x_i, y_i) \frac{\partial f}{\partial x} \right] h^2 + 0(h^3) \quad (2.38)$$

Dengan membandingkan persamaan (2.37) dan (2.38), dapat disimpulkan bahwa kedua persamaan ekuivalen apabila:

$$a_1 + a_2 = 1 \quad (2.39a)$$

$$a_2 p_1 = \frac{1}{2} \quad (2.39b)$$

$$a_2 q_{11} = \frac{1}{2} \quad (2.39c)$$

Sistem persamaan diatas terdiri dari tiga persamaan mengandung empat bilangan tak diketahui, sehingga tidak bisa diselesaikan. Untuk itu salah satu bilangan tak diketahui ditetapkan, dan kemudian di cari ketiga bilangan lain. Dianggap bahwa a_2 ditetapkan, sehingga persamaan (2.39a) sampai (2.39c) dapat diselesaikan dengan menghasilkan:

$$a_1 = 1 - a_2 \quad (2.40a)$$

$$p_1 = q_{11} = \frac{1}{2a_2} \quad (2.40b)$$

Bila dipilih $a_2 = \frac{1}{2}$, maka

$$a_1 = \frac{1}{2}$$

$$p_1 = q_{11} = 1$$

Sehingga persamaan (2.34a) menjadi

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{2} k_1 + \frac{1}{2} k_2 \right) h \quad (2.41a)$$

Dengan

$$k_1 = f(x_i, y_i) \quad (2.41b)$$

$$k_2 = f(x_i + h, y_i + k_1 h) \quad (2.41c)$$

Dengan k_1 adalah kemiringan pada awal interval dan k_2 adalah kemiringan pada akhir interval. Persamaan (2.41a) adalah salah satu dari rumus Runge Kutta order dua yang sama dengan metode huen (Triatmodjo. B., 2002).

Rumus-rumus Runge-Kutta untuk order yang lebih tinggi dapat diturunkan dengan cara yang sama dengan pada order dua. Rumus Runge-Kutta yang dipakai dalam permasalahan disini adalah rumus Runge-Kutta orde empat yang didefinisikan sebagai berikut

$$y_{i+1} = y_i + \left[\frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \right] h \quad (2.42)$$

Dengan

$$k_1 = f(x_i, y_i) \quad (2.43a)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_1\right) \quad (2.43b)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_2\right) \quad (2.43c)$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + hk_3) \quad (2.43d)$$

(Chapra, 2002)

2.12 Galat

Penyelesaian secara numerik suatu persamaan matematik hanya memberikan nilai perkiraan yang mendekati nilai eksak (yang benar) yang sesuai dengan kenyataan. Berarti dalam penyelesaian numerik terdapat beberapa

kesalahan terhadap nilai eksak. Terdapat tiga macam galat, yaitu galat bawaan, galat pembulatan dan galat pemotongan.

Galat bawaan adalah galat dari nilai data. Galat tersebut bisa terjadi karena kekeliruan dalam menyalin data, salah membaca skala atau galat karena kurangnya pengertian mengenai hukum-hukum fisika dari data yang diukur.

Galat pembulatan terjadi karena tidak diperhitungkannya beberapa angka terakhir dari suatu bilangan. Galat ini terjadi apabila bilangan perkiraan digunakan untuk menggantikan bilangan eksak. Suatu bilangan dibulatkan pada posisi ke n dengan membuat semua angka di sebelah kanan dari posisi tersebut nol. Sedangkan angka pada posisi ke n tersebut tidak berubah atau dinaikkan satu digit yang tergantung apakah nilai tersebut lebih kecil atau lebih besar setengah dari angka posisi ke n . Sebagai contoh, nilai:

8632574 dapat dibulatkan menjadi 8633000

3,1415926 dapat dibulatkan menjadi 3,14

Sedangkan galat pemotongan terjadi karena tidak dilakukannya hitungan sesuai dengan prosedur matematik yang benar. Sebagai contoh, suatu proses tak terhingga diganti dengan proses berhingga. Di dalam matematika, suatu fungsi dapat dipresentasikan dalam bentuk deret tak terhingga, misalkan:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Nilai eksak dari e^x diperoleh apabila semua suku deret tersebut diperhitungkan. Dalam praktek, sulit memperhitungkan semua suku pertama sampai tak terhingga. Apabila hanya diperhitungkan beberapa suku pertama saja, maka hasilnya tidak sama dengan nilai eksak (Triatmodjo, 2002: 2-3).

Ada dua jenis kesalahan hubungan antara nilai eksak dan nilai perkiraan yaitu:

1. Galat absolut adalah kesalahan perbedaan (selisih) antara nilai eksak dan nilai perkiraan (pendekatan pada nilai sebenarnya).

Dituliskan:

$$x = \bar{x} + e$$

Dimana x adalah nilai sebenarnya

$\bar{x}$ adalah pendekatan pada nilai sebenarnya

e adalah galat

Disini e adalah galat absolut yaitu

$$e = \bar{x} - x$$

2. Kesalahan relatif adalah tingkat kesalahan yang dilakukan dengan membandingkan kesalahan yang terjadi dengan nilai eksak.

$$e_R = \frac{e}{x}$$

Dengan e_R = galat relatif

e = galat absolut

x = nilai eksak

Galat relatif sering diberikan dalam bentuk persen sebagai berikut:

$$e_R = \frac{e}{x} \times 100\%$$

(Djojodiharjo, 2000:15)

2.13 Kajian Keagamaan

Kehidupan zaman sekarang ini ilmu pengetahuan dan teknologi semakin menguasai dunia, maka untuk dapat menguasai ilmu pengetahuan dan teknologi yang sempurna harus didasari dengan Al-qur'an dan hadist sebagai pegangan dalam kehidupan sehari-hari. Karena Al-qur'an dan hadist merupakan sumber agama Islam yang telah memberikan kepada kita tentang fakta-fakta ilmiah yang kelak ditemukan dan dibuktikan oleh eksperimen Sains umat Islam.

Di dalam Al-Qur'an terdapat perintah-perintah yang menyeru kepada manusia untuk menyakinkan eksistensi Tuhan melalui ciptaan-Nya, memperhatikan kekuasaan-Nya melalui akan realitas yang terhampar luas di langit dan di bumi. Maka kita sebagai makhluk Allah SWT harus bisa menggunakan apa yang ada di langit dan di bumi dengan sebaik-baiknya dalam kehidupan sehari-hari. Seperti yang dijelaskan pada QS. Al-A'laa:2-3, yang berbunyi sebagai berikut:

الَّذِي خَلَقَ فَسَوَّى ۖ وَالَّذِي قَدَّرَ فَهَدَى ۖ

Artinya:

“Yang Menciptakan, dan menyempurnakan (penciptaan-Nya), Dan yang menentukan kadar (masing-masing) dan memberi petunjuk”.

Alam semesta serta segala isinya diciptakan Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan, dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi.

Semua yang ada di alam ini ada ukurannya, ada hitungan-hitungannya, ada rumusnya atau ada persamaannya. Seorang ahli matematika atau fisika tidak

membuat rumus, tetapi menemukan dan menyimbolkan karena Allah telah menyediakan. Persamaan diferensial dalam perkembangan ilmu dan teknologi sekarang merupakan salah satu materi yang dapat dijadikan dalam pemodelan-pemodelan matematika. Manusia sebenarnya bukan membuat sesuatu yang baru, tetapi mereka hanya mencari persamaan-persamaan atau rumus-rumus yang berlaku pada suatu fenomena. Seperti demam berdarah, tuberkolosis, bahkan flu burung ternyata mempunyai aturan-aturan yang matematis. Segala sesuatu telah diciptakan dengan ukuran, perhitungan, rumus atau persamaan tertentu yang rapi dan teliti (Abdusysyahir, 2007:79-81).

Dalam Al-Qur'an terdapat banyak ayat-ayat yang menjelaskan berbagai konsep dalam matematika. Sesuai dalam pembahasan ini mengenai persamaan maka ayat yang digunakan yaitu Al Baqarah ayat 261 berikut:

مَثَلُ الَّذِينَ يُنْفِقُونَ أَمْوَالَهُمْ فِي سَبِيلِ اللَّهِ كَمَثَلِ حَبَّةٍ أَنْبَتَتْ سَبْعَ سَنَابِلٍ فِي كُلِّ
سُنْبُلَةٍ مِائَةُ حَبَّةٍ وَاللَّهُ يُضَعِفُ لِمَنْ يَشَاءُ وَاللَّهُ وَاسِعٌ عَلِيمٌ

Artinya: Perumpamaan (nafkah yang dikeluarkan oleh) orang-orang yang menafkahkan hartanya di jalan Allah adalah serupa dengan sebutir benih yang menumbuhkan tujuh bulir, pada tiap-tiap bulir seratus biji. Allah melipat gandakan (ganjaran) bagi siapa yang Dia kehendaki. Dan Allah Maha Luas (karunia-Nya) lagi Maha Mengetahui.

Pada QS Al-Baqarah ayat 261 di atas, nampak jelas bahwa Allah menetapkan pahala menafkahkan harta di jalan Allah dengan rumus matematikanya. Pahala menafkahkan harta adalah tujuh ratus kali. Secara matematika, diperoleh persamaan

$$y = 700x$$

Dengan x menyatakan nilai nafkah dan y menyatakan nilai pahala yang diperoleh (Abdusysyahir, 2007: 81).

Selain ayat di atas, Allah menjelaskan pula sifat Maha matematisNya itu dalam surat Al-An'am ayat 160.

مَنْ جَاءَ بِالْحَسَنَةِ فَلَهُ عَشْرُ مَثَالٍهَا وَمَنْ جَاءَ بِالسَّيِّئَةِ فَلَا تُجْزَىٰ إِلَّا مِثْلَهَا وَهُمْ لَا يُظْلَمُونَ ﴿١٦٠﴾

Artinya:Barangsiapa membawa amal yang baik, maka baginya (pahala) sepuluh kali lipat amalnya; dan barangsiapa yang membawa perbuatan jahat maka dia tidak diberi pembalasan melainkan seimbang dengan kejahatannya, sedang mereka sedikitpun tidak dianiaya (dirugikan).

Pada QS Al-An'am ayat 160 tersebut, sekali lagi Allah menggunakan rumus matematika untuk menentukan balasan perbuatan kebaikan dan kejahatan mendapatkan balasan 1 kali amal kejahatan tersebut.

Secara matematika diperoleh rumus

$$y = 10x$$

Untuk amal kebaikan, dan

$$y = x$$

Untuk amal kejahatan. Variabel x menyatakan nilai amal dan y menyatakan nilai balasan yang diperoleh (Abusysyahir, 2007: 82).

Ada ayat lain dalam Alqur'an yang secara tersirat memerintahkan umat Islam untuk mempelajari matematika, yakni berkenaan dengan masalah *faraidh*. Masalah *faraidh* adalah masalah yang berkenaan dengan pengaturan dan

pembagian harta warisan bagi ahli waris menurut bagian yang ditentukan dalam al-Qur'an. Sebelum dilakukan pembagian harta warisan beberapa hak dan kewajiban yang bertalian dengan harta warisan harus diselesaikan terlebih dahulu, misalnya wasiat dan utang. Sedangkan untuk pembagian harta warisan perlu diketahui terlebih dahulu beberapa jumlah semua harta warisan yang ditinggalkan, berapa jumlah ahli waris yang berhak menerima dan beberapa bagian yang berhak diterima ahli waris.

Berkenaan dengan bagian yang berhak diterima oleh ahli waris, al-Qur'an menjelaskan dalam surat An-Nisa' ayat 11, 12, dan 176. Yang artinya:

11. *Allah mensyari'atkan bagimu tentang (pembagian pusaka untuk) anak-anakmu. Yaitu : bahagian seorang anak lelaki sama dengan bagahian dua orang anak perempuan; dan jika anak itu semuanya perempuan lebih dari dua, Maka bagi mereka dua pertiga dari harta yang ditinggalkan; jika anak perempuan itu seorang saja, Maka ia memperoleh separo harta. dan untuk dua orang ibu-bapa, bagi masing-masingnya seperenam dari harta yang ditinggalkan, jika yang meninggal itu mempunyai anak; jika orang yang meninggal tidak mempunyai anak dan ia diwarisi oleh ibu-bapanya (saja), Maka ibunya mendapat sepertiga; jika yang meninggal itu mempunyai beberapa saudara, Maka ibunya mendapat seperenam. (Pembagian-pembagian tersebut di atas) sesudah dipenuhi wasiat yang ia buat atau (dan) sesudah dibayar hutangnya. (Tentang) orang tuamu dan anak-anakmu, kamu tidak mengetahui siapa di antara mereka yang lebih dekat (banyak) manfaatnya bagimu. ini adalah ketetapan dari Allah. Sesungguhnya Allah Maha mengetahui lagi Maha Bijaksana.*
12. *Dan bagimu (suami-suami) seperdua dari harta yang ditinggalkan oleh isteri-isterimu, jika mereka tidak mempunyai anak. jika isteri-isterimu itu mempunyai anak, Maka kamu mendapat seperempat dari harta yang ditinggalkannya sesudah dipenuhi wasiat yang mereka buat atau (dan) sesudah dibayar hutangnya. Para isteri memperoleh seperempat harta yang kamu tinggalkan jika kamu tidak mempunyai anak. jika kamu mempunyai anak, Maka Para isteri memperoleh seperdelapan dari harta yang kamu tinggalkan sesudah dipenuhi wasiat yang kamu buat atau (dan) sesudah dibayar hutang-hutangmu. jika seseorang mati, baik laki-laki maupun perempuan yang tidak meninggalkan ayah dan tidak meninggalkan anak, tetapi mempunyai seorang saudara laki-laki (seibu saja) atau seorang saudara perempuan (seibu saja), Maka bagi masing-masing dari kedua jenis saudara itu seperenam harta. tetapi jika saudara-saudara seibu itu lebih dari*

seorang, Maka mereka bersekutu dalam yang sepertiga itu, sesudah dipenuhi wasiat yang dibuat olehnya atau sesudah dibayar hutangnya dengan tidak memberi mudharat (kepada ahli waris). (Allah menetapkan yang demikian itu sebagai) syari'at yang benar-benar dari Allah, dan Allah Maha mengetahui lagi Maha Penyantun.

176. Mereka meminta fatwa kepadamu (tentang kalalah)[387]. Katakanlah: "Allah memberi fatwa kepadamu tentang kalalah (yaitu): jika seorang meninggal dunia, dan ia tidak mempunyai anak dan mempunyai saudara perempuan, Maka bagi saudaranya yang perempuan itu seperdua dari harta yang ditinggalkannya, dan saudaranya yang laki-laki mempusakai (seluruh harta saudara perempuan), jika ia tidak mempunyai anak; tetapi jika saudara perempuan itu dua orang, Maka bagi keduanya dua pertiga dari harta yang ditinggalkan oleh yang meninggal. dan jika mereka (ahli waris itu terdiri dari) saudara-saudara laki dan perempuan, Maka bahagian seorang saudara laki-laki sebanyak bahagian dua orang saudara perempuan. Allah menerangkan (hukum ini) kepadamu, supaya kamu tidak sesat. dan Allah Maha mengetahui segala sesuatu.

Ayat diatas menjelaskan bagian-bagian yang berhak diterima oleh ahli waris, masalah *faraidh* jika dalam matematika bisa di buat persamaan. Misal:

$x =$ anak laki-laki

$y =$ anak perempuan

bagian warisan yang diterima oleh anak laki-laki

$$x = 2y$$

bagian warisan yang diterima oleh anak perempuan

$$x = \frac{1}{2}y$$

Persaman diatas merupakan salah satu contoh yang dijelaskan dalam surat An-Nisa'.

Selanjutnya ketentuan bagian yang berhak diterima oleh ahli waris disebut *furudhul muqaddarah*. Terdapat enam macam *furudhul muqaddarah*, yaitu

$$\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6} \text{ dan } \frac{1}{8}$$

Masalah faraidh merupakan ketentuan Allah SWT yang wajib dilaksanakan oleh umat Islam. Berkenaan dengan masalah *faraidh* ini, Allah berfirman dalam surat An-Nisa' ayat 13 dan 14 sebagai berikut.

تِلْكَ حُدُودُ اللَّهِ وَمَنْ يُطِيعِ اللَّهَ وَرَسُولَهُ يُدْخِلْهُ جَنَّاتٍ تَجْرِي مِنْ تَحْتِهَا
الْأَنْهَارُ خَالِدِينَ فِيهَا ذَلِكَ الْفَوْزُ الْعَظِيمُ ﴿١٣﴾ وَمَنْ يَعَصِ اللَّهَ وَرَسُولَهُ
وَيَتَعَدَّ حُدُودَهُ يُدْخِلْهُ نَارًا خَالِدًا فِيهَا وَلَهُ عَذَابٌ مُهِينٌ ﴿١٤﴾

Artinya: 13. (Hukum-hukum tersebut) itu adalah ketentuan-ketentuan dari Allah. Barangsiapa taat kepada Allah dan Rasul-Nya, niscaya Allah memasukkannya kedalam surga yang mengalir didalamnya sungai-sungai, sedang mereka kekal di dalamnya; dan Itulah kemenangan yang besar.
14. Dan Barangsiapa yang mendurhakai Allah dan Rasul-Nya dan melanggar ketentuan-ketentuan-Nya, niscaya Allah memasukkannya ke dalam api neraka sedang ia kekal di dalamnya; dan baginya siksa yang menghinakan.

Bukanlah telah disebutkan dengan tegas bahwa masalah faraidh adalah ketentuan dari Allah yang wajib dilaksanakan. Untuk dapat memahami dan dapat melaksanakan masalah faraidh dengan baik maka hal yang perlu dipahami lebih dahulu adalah konsep matematika. Jadi, adanya masalah faraidh dapat diartikan bahwa umat Islam perlu mempelajari matematika.

Dalam surah Al-Qadr juga terdapat ilmu matematika mengenai persamaan yaitu

إِنَّا أَنْزَلْنَاهُ فِي لَيْلَةِ الْقَدْرِ ﴿١﴾ وَمَا أَدْرَاكَ مَا لَيْلَةُ الْقَدْرِ ﴿٢﴾ لَيْلَةُ الْقَدْرِ خَيْرٌ مِّنْ أَلْفِ شَهْرٍ ﴿٣﴾ تَنَزَّلُ الْمَلَائِكَةُ وَالرُّوحُ فِيهَا بِإِذْنِ رَبِّهِمْ مِّنْ كُلِّ أَمْرٍ ﴿٤﴾ سَلَامٌ هِيَ حَتَّىٰ مَطْلَعِ الْفَجْرِ ﴿٥﴾

Artinya:

1. Sesungguhnya Kami telah menurunkannya (Al Quran) pada malam kemuliaan
2. Dan tahukah kamu Apakah malam kemuliaan itu?
3. Malam kemuliaan itu lebih baik dari seribu bulan.
4. Pada malam itu turun malaikat-malaikat dan Malaikat Jibril dengan izin Tuhannya untuk mengatur segala urusan.
5. Malam itu (penuh) Kesejahteraan sampai terbit fajar.

Surah al-Qadr diatas menerangkan mengenai lailatul qodar malam kemuliaan, dalam sebuah hadist yang diriwayakan oleh bukhori dan muslim menjeslakan “ barang siapa yang beribadah pada lailah al-qadar karena iman dan mengharapankeridoan Allah, diampuni dosa-dosanya yang terdahulu. Hadist tersebut sudah tentu mendorong kaum muslim untuk beribadah yang sebanyak-banyaknya pada malam-malam yang dipercayainya sebagai *lailatul al-qadar*. Apalagi karena Al-Qur’an menerangkan bahwa malam itu lebih baik dari pada seribu bulan. Banyak yang beranggapan barang siapa beribadah pada malam itu akan dihitung oleh Allah sebagai ibadah yang memberi pahala besar selama seribu bulan atau lebih dari 83 tahun.

Al-Qur’an merupakan salah satu keindahan mukjizat dan bukti bahwa ia benar-benar berasal dari Sang Pencipta manusia dan Sang Pencipta alam raya.

Manusia diharapkan dapat bekerja sebagai khalifah-Nya di atas bumi, menjadi cerminan citra Allah Sang Pencipta dan mengatasi segala kelemahannya, sehingga ia dapat lebih dekat kepada kesempurnaan Tuhan. Salah satu cara yang digunakan sebagai seorang khalifah dalam mengatur apa yang ada di bumi, yaitu dengan menggunakan ilmu hitung yang disebut juga dengan ilmu matematika. Karena penciptaan manusia bertujuan untuk mencapai kesempurnaan tertinggi tergantung pada kerja keras dan usaha yang terus-menerus.



BAB III

PEMBAHASAN

Penyelesaian persamaan diferensial linear tak homogen dengan koefisien variabel yang akan dibahas pada tugas akhir ini adalah persamaan diferensial linear Cauchy-Euler orde-3. Persamaan Cauchy-Euler orde-3 ini berbentuk:

$$a_0 x^3 y''' + a_1 x^2 y'' + a_2 x y' + a_3 y = b(x) \quad (3.1)$$

Dengan syarat awal

$$y(0) = y_0, y'(0) = y_1, y''(0) = y_2.$$

dengan a_0, a_1, a_2, a_3 dan y_0, y_1, y_2 adalah konstanta, $a_0 \neq 0$, dan $x \neq 0$.

Untuk lebih memahami solusi analitik dengan metode variasi parameter dan solusi numerik dengan metode Runge-Kutta orde-4 untuk menyelesaikan persamaan diferensial linear Cauchy-Euler orde-3 diatas maka diberikan soal sebagai berikut:

1. $x^2 y'' + xy' + 4y = x^2$,
 $x > 0, y(1) = 0, y'(1) = 1.$
2. $x^3 y''' + x^2 y'' - 2xy' + 2y = 6x^3 + 6 \ln x$,
 $x > 0, y(1) = \frac{19}{16}, y'(1) = \frac{17}{16}, y''(1) = \frac{45}{8}.$

3.1 Solusi Analitik Persamaan Diferensial Linear Cauchy-Euler

Persamaan (3.1) merupakan persamaan diferensial linear Cauchy-Euler tak homogen. Jika $b(x) = 0$, maka disebut persamaan Cauchy-Euler homogen;

$$a_0 x^3 y''' + a_1 x^2 y'' + a_2 x y' + a_3 y = 0 \quad (3.2)$$

Misalnya diasumsikan bahwa y_1, y_2, y_3 merupakan penyelesaian fundamental dari persamaan (3.2). Maka sesuai Teorema 2.3 selesaian umum dari (3.2) adalah:

$$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 \quad (3.3)$$

Dengan c_1, c_2, c_3 konstanta.

Menurut Teorema 2.7 selesaian umum suatu persamaan diferensial tak homogen berbentuk $y(x) = y_h + y_p$, dengan y_h sebagai selesaian persamaan diferensial linear homogen yang bersesuaian dengan persamaan diferensial tak homogen yang diketahui, seperti (3.3) dan y_p sebagai selesaian khususnya, pada bab ini akan dicari selesaian khusus dari (3.1) dengan mencari fungsi-fungsi u_1, u_2, u_3 sebagai pengganti c_1, c_2, c_3 yang merupakan parameter (konstanta) pada selesaian umum persamaan diferensial homogen (3.2). Dengan demikian selesaian khusus dari (3.1) berbentuk:

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3 \quad (3.4)$$

Dari (3.3) dan (3.4) diperoleh selesaian umum dari (3.1), yaitu

$$Y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 + u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3 \quad (3.5)$$

Langkah-langkah untuk mencari fungsi-fungsi u_1, u_2, u_3 pada (3.4) sebagai pengganti c_1, c_2, c_3 pada (3.3) sehingga diperoleh (3.5) disebut sebagai metode variasi konstanta atau variasi parameter.

Pada (3.4) terdapat 3 fungsi yang belum diketahui, yaitu u_1, u_2, u_3 . Jadi akan dibutuhkan 3 persamaan untuk menentukan fungsi-fungsi tersebut. Dari y_p bisa diperoleh persamaan-persamaan yang akan memenuhi (3.1). Dengan begitu akan diperoleh persamaan-persamaan yang dibutuhkan dengan cara menurunkan y_p sampai turunan ke 3. Jika (3.4) diturunkan, maka akan diperoleh:

$$y_p' = (u_1 y_1' + u_2 y_2' + u_3 y_3') + (u_1' y_1 + u_2' y_2 + u_3' y_3) \quad (3.6)$$

Mencari y_p yang merupakan selesaian khusus dari persamaan diferensial homogen orde tinggi sangat rumit dan sulit. Jalan yang ditempuh untuk mengetahui pemecahannya adalah dengan mengasumsikan adanya syarat tentu yang sifatnya mencegah munculnya suku-suku yang akan mengiring ke turunan orde tinggi dari u .

Syarat pertama untuk y_p' adalah $u_1' y_1 + u_2' y_2 + u_3' y_3 = 0$.

Berarti $y_p' = u_1 y_1' + u_2 y_2' + u_3 y_3'$.

Begitu juga untuk $y_p'' = u_1 y_1'' + u_2 y_2'' + u_3 y_3'' + u_1' y_1' + u_2' y_2' + u_3' y_3'$, diambil syarat

kedua, yaitu $u_1' y_1' + u_2' y_2' + u_3' y_3' = 0$ sehingga $y_p'' = u_1 y_1'' + u_2 y_2'' + u_3 y_3''$.

maka diperoleh:

$$\begin{aligned} u_1' y_1 + u_2' y_2 + u_3' y_3 &= 0 \\ u_1' y_1' + u_2' y_2' + u_3' y_3' &= 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

dan juga

$$\begin{aligned} y_p &= u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3 \\ y_p' &= u_1 y_1' + u_2 y_2' + u_3 y_3' \\ y_p'' &= u_1 y_1'' + u_2 y_2'' + u_3 y_3'' \end{aligned} \quad (3.8)$$

Dari (3.7) diperoleh 2 persamaan sebagai syarat-syarat untuk mencari y_p .

Kemudian akan dicari persamaan ke-3.

y_p merupakan selesaian dari (3.1) berarti,

$$a_0 x^3 y''' + a_1 x^2 y'' + a_2 x y' + a_3 y = b(x) \quad (3.9)$$

(3.8) disubstitusikan pada (3.9), sehingga:

$$\begin{aligned} & a_0 x^3 (u_1 y_1''' + u_2 y_2''' + u_3 y_3''' + u_1' y_1'' + u_2' y_2'' + u_3' y_3'') + a_1 x^2 (u_1 y_1'' + u_2 y_2'' + u_3 y_3'') \\ & + a_2 x (u_1 y_1' + u_2 y_2' + u_3 y_3') + a_3 (u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3) = b(x) \\ \Leftrightarrow & u_1 (a_0 x^3 y_1''' + a_1 x^2 y_1'' + a_2 x y_1' + a_3 y_1) + u_2 (a_0 x^3 y_2''' + a_1 x^2 y_2'' + a_2 x y_2' + a_3 y_2) \\ & + u_3 (a_0 x^3 y_3''' + a_1 x^2 y_3'' + a_2 x y_3' + a_3 y_3) \\ & + a_0 x^3 (u_1' y_1'' + u_2' y_2'' + u_3' y_3'') = b(x) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Sesuai fakta bahwa y_1, y_2, y_3 merupakan selesaian fundamental dari (3.2) untuk masing-masing i , $i = 1, 2, 3$ berlaku:

$$a_0 x^3 y_i''' + a_1 x^2 y_i'' + a_2 x y_i' + a_3 y_i = 0$$

Sehingga diperoleh:

$$u_1' y_1'' + u_2' y_2'' + u_3' y_3'' = \frac{b(x)}{a_0 x^3} \quad (3.11)$$

(3.11) adalah syarat ke-3 untuk mencari y_p .

Dari (3.7) dan (3.11) 3 syarat untuk menentukan y_p sebagai selesaian khusus dari (3.1) adalah:

$$\begin{aligned} u_1' y_1 + u_2' y_2 + u_3' y_3 &= 0 \\ u_1' y_1' + u_2' y_2' + u_3' y_3' &= 0 \\ u_1' y_1'' + u_2' y_2'' + u_3' y_3'' &= \frac{b(x)}{a_0 x^3} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Dari (3.12) dapat dibentuk:

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \\ u_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{b(x)}{a_0 x^3} \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

Misalkan $A = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{pmatrix}$

Karena y_1, y_2, y_3 merupakan selesaian bebas linear dari (3.2), sesuai Teorema 2.4 determinan A yaitu $W[y_1, y_2, y_3]$, tidak nol.

Sesuai Teorema 2.2 sistem (3.13) dapat diselesaikan dengan menggunakan aturan Cramer untuk mencari u_1', u_2', u_3' , yaitu:

$$u_i'(x) = \frac{W_i}{W[y_1, y_2, y_3](x)} \frac{b(x)}{a_0 x^3} \quad ; i = 1, 2, 3 \quad (3.14)$$

dengan $W_i(x)$ adalah determinan matriks yang diperoleh dengan menggantikan

kolom ke i dari A dengan $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{b(x)}{a_0 x^3} \end{pmatrix}$.

Selanjutnya

$$u_i(x) = \int \frac{W_i}{W[y_1, y_2, y_3](x)} \frac{b(x)}{a_0 x^3} dx \quad ; i = 1, 2, 3 \quad (3.15)$$

Jadi selesaian khusus dari (3.1) adalah:

$$y_p(x) = \sum_{i=1}^3 y_i(x) \int \frac{W_i}{W[y_1, y_2, y_3](x)} \frac{b(x)}{a_0 x^3} dx \quad (3.16)$$

Sebelum sampai pada contoh soal, penulis ungkapkan kembali langkah-langkah penyelesaian secara singkat. Secara garis besar metode variasi parameter dapat dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Menyatakan persamaan Cauchy-Euler homogen orde-3 dalam bentuk

$$a_0 x^3 y''' + a_1 x^2 y'' + a_2 x y' + a_3 y = 0$$

2. Mencari fungsi komplementer $y_h(x)$ dari persamaan Cauchy-Euler homogen dengan menggunakan persamaan karakteristik,

$y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + c_3 y_3(x)$, dimana c_1, c_2, c_3 adalah konstanta sebarang dan $\{y_1, y_2, y_3\}$ adalah himpunan fundamental dari persamaan Cauchy-Euler homogen.

3. Mencari integral partikular $y_p(x) = u_1 y_1(x) + u_2 y_2(x) + u_3 y_3(x)$ dengan cara:

- a. Menentukan Wronski dari himpunan fundamental persamaan Cauchy-Euler $W[y_1, y_2, y_3](x)$

- b. Menentukan

$$u_i = \int \frac{b(x) W_i}{a_0 x^3 W(y_1, y_2, y_3)} dx \quad i = 1, 2, 3$$

Dimana W_i adalah determinan yang diperoleh dengan mengganti kolom ke- i dari $W[y_1, y_2, y_3](x)$ dengan kolom $[0, 0, 1]$

c. Integral partikular:

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \sum_{i=1}^3 y_i(x) u_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^3 y_i(x) \int \frac{b(x) W_i(x)}{a_0 x^3 W[y_1, y_2, y_3](x)} dx \end{aligned}$$

4. Penyelesaian masalah nilai awal persamaan Cauchy-Euler tak homogen orde-3 diperoleh dengan memasukkan syarat awal $y(0)=y_0, y'(0)=y_1, y''(0)=y_2$ pada penyelesaian umum $y(x)$ persamaan Cauchy-Euler tak homogen dimana $y(x)=y_h(x)+y_p(x)$.

Contoh 1

Selesaikan masalah nilai awal

$$\begin{aligned} x^2 y'' + xy' + 4y &= x^2, \quad x > 0, \\ y(1) &= 0, \quad y'(1) = 1. \end{aligned} \tag{1}$$

Penyelesaian:

Persamaan homogen yang bersesuaian dengan (1) adalah

$$x^2 y'' + xy' + 4y = 0 \tag{2}$$

Sesuai penjelasan pada sub bab 2.8.a dilakukan langkah-langkah berikut.

Misalkan $y = x^r$ adalah selesaian dari (2) yang lalu disubstitusikan pada (2).

$$\begin{aligned} r(r-1)x^2 \cdot x^{r-2} + rx \cdot x^{r-1} + 4x^r &= 0 \\ \Leftrightarrow (r^2 - r)x^r + rx^r + 4x^r &= 0 \\ \Leftrightarrow x^r(r^2 + 4) &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Persamaan karakteristik dari (3) adalah $r^2 + 4 = 0$ yang akar-akarnya adalah

$$r_1 = 2i \text{ dan } r_2 = -2i.$$

Sesuai dengan (2.29) selesaian dari (2) adalah $y_1 = \cos(2 \ln x)$, $y_2 = \sin(2 \ln x)$.

Selesaian umum dari (2) adalah

$$y_h = c_1 \cos(2 \ln x) + c_2 \sin(2 \ln x) \quad (4)$$

Dari persamaan (1) ditentukan turunan dari y_h sebagai berikut:

$$y'_h = -2c_1 x^{-1} \sin(2 \ln x) + 2c_2 x^{-1} \cos(2 \ln x) \quad (5)$$

Untuk mencari nilai c_1, c_2 maka substitusi syarat awal $y(1) = 0$ ke persamaan (4)

akan didapatkan:

$$c_1 \cos(2 \ln 1) + c_2 \sin(2 \ln 1) = 0$$

Sehingga diperoleh:

$$c_1 = 0$$

Dari syarat awal yang diberikan $y'(1) = 1$ disubstitusi ke persamaan (5), maka

diperoleh:

$$-2c_1 1^{-1} \sin(2 \ln 1) + 2c_2 1^{-1} \cos(2 \ln 1) = 1$$

Sehingga diperoleh:

$$c_2 = \frac{1}{2}$$

Kemudian substitusi nilai c_1 dan c_2 pada persamaan (4):

$$y_h = 0 \cdot \cos(2 \ln x) + \frac{1}{2} \sin(2 \ln x)$$

Jadi selesaian umum dari (2) adalah:

$$y_h = \frac{1}{2} \sin(2 \ln x) \quad (6)$$

Syarat untuk menentukan y_p adalah:

$$\begin{aligned} u_1' \cos(2 \ln x) + u_2' \sin(2 \ln x) &= 0 \\ -2u_1' x^{-1} \sin(2 \ln x) + 2u_2' x^{-1} \cos(2 \ln x) &= \frac{x^2}{x^2} = 1 \end{aligned}$$

Maka,

$$\begin{aligned} W[y_1, y_2](x) &= \begin{vmatrix} \cos(2 \ln x) & \sin(2 \ln x) \\ -2x^{-1} \sin(2 \ln x) & 2x^{-1} \cos(2 \ln x) \end{vmatrix} \\ &= 2x^{-1} \cos^2(2 \ln x) + 2x^{-1} \sin^2(2 \ln x) \\ &= 2x^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_1(x) &= \begin{vmatrix} 0 & \sin(2 \ln x) \\ 1 & 2x^{-1} \cos(2 \ln x) \end{vmatrix} \\ &= -\sin(2 \ln x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_2(x) &= \begin{vmatrix} \cos(2 \ln x) & 0 \\ -2x^{-1} \sin(2 \ln x) & 1 \end{vmatrix} \\ &= \cos(2 \ln x) \end{aligned}$$

Sesuai (3.15) maka

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \int \frac{-\sin(2 \ln x) \cdot x^2}{2x^{-1} \cdot x^2} dx \\ &= -\frac{1}{2} \int x \sin(2 \ln x) dx \end{aligned} \quad (7)$$

Untuk $\int x \sin(2 \ln x) dx$ digunakan integral parsial,

Dimisalkan: $u = \sin(2 \ln x)$, maka $du = 2x^{-1} \cos(2 \ln x) dx$

$$dv = x dx, \text{ maka } v = \frac{1}{2} x^2$$

$$\begin{aligned} \int x \sin(2 \ln x) dx &= uv - \int v du \\ &= \sin(2 \ln x) \frac{1}{2} x^2 - \int \frac{1}{2} x^2 2x^{-1} \cos(2 \ln x) dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 \sin(2 \ln x) - \int x \cos(2 \ln x) dx \end{aligned} \quad (8)$$

Kemudian untuk $\int x \cos(2 \ln x) dx$ diintegrasikan parsial lagi,

Misal: $u = \cos(2 \ln x)$, maka $du = -2x^{-1} \sin(2 \ln x) dx$

$$dv = x dx, \text{ maka } v = \frac{1}{2} x^2$$

$$\begin{aligned} \int x \cos(2 \ln x) dx &= uv - \int v du \\ &= \cos(2 \ln x) \frac{1}{2} x^2 - \int \frac{1}{2} x^2 \cdot -2x^{-1} \sin(2 \ln x) dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 \cos(2 \ln x) + \int x \sin(2 \ln x) dx \end{aligned} \quad (9)$$

Kemudian dengan mensubstitusikan persamaan (9) ke (8), diperoleh:

$$\begin{aligned} \int x \sin(2 \ln x) dx &= \frac{1}{2} x^2 \sin(2 \ln x) - \left[\frac{1}{2} x^2 \cos(2 \ln x) + \int x \sin(2 \ln x) dx \right] \\ &= \frac{1}{2} x^2 \sin(2 \ln x) - \frac{1}{2} x^2 \cos(2 \ln x) - \int x \sin(2 \ln x) dx \\ 2 \int x \sin(2 \ln x) dx &= \frac{1}{2} x^2 \sin(2 \ln x) - \frac{1}{2} x^2 \cos(2 \ln x) \\ \int x \sin(2 \ln x) dx &= \frac{1}{4} x^2 \sin(2 \ln x) - \frac{1}{4} x^2 \cos(2 \ln x) \\ &= \frac{1}{4} x^2 (\sin(2 \ln x) - \cos(2 \ln x)) \end{aligned} \quad (10)$$

Kemudian dengan mensubstitusikan persamaan (10) ke (7), diperoleh:

$$\begin{aligned} u_1(x) &= -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{4} x^2 (\sin(2 \ln x) - \cos(2 \ln x)) \right] \\ &= -\frac{1}{8} x^2 (\sin(2 \ln x) - \cos(2 \ln x)) \end{aligned}$$

Sesuai (3.15) maka

$$\begin{aligned} u_2(x) &= \int \frac{\cos(2 \ln x) \cdot x^2}{2x^{-1} \cdot x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int x \cos(2 \ln x) dx \end{aligned} \quad (11)$$

Untuk $\int x \cos(2 \ln x) dx$ digunakan integral parsial,

$$\begin{aligned} \text{Dimisalkan: } u &= \cos(2 \ln x), \text{ maka } du = -2x^{-1} \sin(2 \ln x) dx \\ dv &= x dx, \text{ maka } v = \frac{1}{2} x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int x \cos(2 \ln x) dx &= uv - \int v du \\ &= \cos(2 \ln x) \frac{1}{2} x^2 - \int \frac{1}{2} x^2 \cdot -2x^{-1} \sin(2 \ln x) dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 \cos(2 \ln x) + \int x \sin(2 \ln x) dx \end{aligned} \quad (12)$$

Kemudian untuk $\int x \sin(2 \ln x) dx$ diintegrasikan parsial lagi,

$$\begin{aligned} \text{Misal: } u &= \sin(2 \ln x), \text{ maka } du = 2x^{-1} \cos(2 \ln x) dx \\ dv &= x dx, \text{ maka } v = \frac{1}{2} x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int x \sin(2 \ln x) dx &= uv - \int v du \\ &= \sin(2 \ln x) \frac{1}{2} x^2 - \int \frac{1}{2} x^2 \cdot 2x^{-1} \cos(2 \ln x) dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 \sin(2 \ln x) - \int x \cos(2 \ln x) dx \end{aligned} \quad (13)$$

Kemudian dengan mensubstitusikan persamaan (13) ke (12), diperoleh:

$$\begin{aligned}
 \int x \cos(2 \ln x) dx &= \frac{1}{2} x^2 \cos(2 \ln x) + \left[\frac{1}{2} x^2 \sin(2 \ln x) - \int x \cos(2 \ln x) dx \right] \\
 &= \frac{1}{2} x^2 \cos(2 \ln x) + \frac{1}{2} x^2 \sin(2 \ln x) - \int x \cos(2 \ln x) dx \\
 2 \int x \cos(2 \ln x) dx &= \frac{1}{2} x^2 \cos(2 \ln x) + \frac{1}{2} x^2 \sin(2 \ln x) \\
 \int x \cos(2 \ln x) dx &= \frac{1}{4} x^2 \cos(2 \ln x) + \frac{1}{4} x^2 \sin(2 \ln x) \\
 &= \frac{1}{4} x^2 (\sin(2 \ln x) + \cos(2 \ln x))
 \end{aligned} \tag{14}$$

Kemudian dengan mensubstitusikan persamaan (14) ke (11), diperoleh:

$$\begin{aligned}
 u_2(x) &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4} x^2 (\sin(2 \ln x) + \cos(2 \ln x)) \right] \\
 &= \frac{1}{8} x^2 (\sin(2 \ln x) + \cos(2 \ln x))
 \end{aligned}$$

Sesuai Teorema 2.6 selesaian khusus dari (1) adalah

$$\begin{aligned}
 y_p(x) &= -\frac{1}{8} x^2 (\sin(2 \ln x) - \cos(2 \ln x)) \cdot \cos(2 \ln x) + \frac{1}{8} x^2 (\sin(2 \ln x) + \cos(2 \ln x)) \cdot \sin(2 \ln x) + C \\
 &= \frac{1}{8} x^2 + C
 \end{aligned} \tag{15}$$

Dari (6) dan (15) selesaian umum untuk (1) adalah:

$$y(x) = \frac{1}{2} \sin(2 \ln x) + \frac{1}{8} x^2 + C$$

Contoh 2

Selesaikan masalah nilai awal

$$x^3 y''' + x^2 y'' - 2xy' + 2y = 6x^3 + 6 \ln x, \quad x > 0, \tag{16}$$

$$y(1) = \frac{19}{16}, \quad y'(1) = \frac{17}{16}, \quad y''(1) = \frac{45}{8}.$$

Penyelesaian:

Persamaan homogen yang bersesuaian dengan (16) adalah

$$x^3 y''' + x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0 \quad (17)$$

Sesuai penjelasan pada sub bab 2.8.a dilakukan langkah-langkah berikut.

Misalkan $y = x^r$ adalah selesaian dari (17) yang lalu disubstitusikan pada (17).

$$\begin{aligned} r(r-1)(r-2)x^3 \cdot x^{r-3} + r(r-1)x^2 \cdot x^{r-2} - 2rx \cdot x^{r-1} + 2x^r &= 0 \\ \Leftrightarrow (r^3 - 3r^2 + 2r)x^r + (r^2 - r)x^r - 2rx^r + 2x^r &= 0 \\ \Leftrightarrow x^r(r^3 - 2r^2 - r + 2) &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

Persamaan karakteristik dari (18) adalah

$$r^3 - 2r^2 - r + 2 = (r-1)(r+1)(r-2) = 0$$

yang akar-akarnya adalah $r_1 = 1$, $r_2 = -1$ dan $r_3 = 2$.

Sesuai dengan (2.27) selesaian dari (17) adalah $y_1 = x$, $y_2 = \frac{1}{x}$, $y_3 = x^2$.

Selesaian umum dari (17) adalah

$$y_h = c_1 x + c_2 \frac{1}{x} + c_3 x^2 \quad (19)$$

Dari persamaan (19) ditentukan turunan pertama dan kedua dari y_h sebagai berikut:

$$y'_h = c_1 - c_2 x^{-2} + 2c_3 x \quad (20)$$

$$y''_h = 0 + 2c_2 x^{-3} + 2c_3 \quad (21)$$

Untuk mencari nilai c_1, c_2, c_3 maka substitusi syarat awal $y(1) = \frac{19}{16}$ ke persamaan

(19) akan didapatkan:

$$c_1 \cdot 1 + c_2 \frac{1}{1} + c_3 \cdot 1^2 = \frac{19}{16}$$

Sehingga diperoleh:

$$c_1 + c_2 + c_3 = \frac{19}{16} \quad (22)$$

Dari syarat awal yang diberikan $y'(1) = \frac{17}{16}$ disubstitusi ke persamaan (20), maka diperoleh:

$$c_1 - c_2 \cdot 1^{-2} + 2c_3 \cdot 1 = \frac{17}{16}$$

Sehingga diperoleh:

$$c_1 - c_2 + 2c_3 = \frac{17}{16} \quad (23)$$

Dari syarat awal yang diberikan $y''(1) = \frac{45}{8}$ disubstitusi ke persamaan (21), maka diperoleh:

$$0 + 2c_2 \cdot 1^{-3} + 2c_3 = \frac{45}{8}$$

Sehingga diperoleh:

$$2c_2 + 2c_3 = \frac{45}{8} \quad (24)$$

Dari persamaan (22) dan (23), dikerjakan dengan menggunakan metode eliminasi, apabila persamaan (22) dikurangi dengan (23) maka diperoleh:

$$2c_2 - c_3 = \frac{2}{16} \quad (25)$$

Dari persamaan (24) dan (25), dikerjakan dengan menggunakan metode eliminasi, apabila persamaan (24) dikurangi dengan (25) maka diperoleh:

$$c_3 = \frac{44}{24}$$

Kemudian untuk menentukan nilai c_2 maka nilai c_3 disubstitusikan pada persamaan (24) diperoleh:

$$2c_2 + 2\frac{44}{24} = \frac{45}{8}$$

$$2c_2 = \frac{45}{8} - 2\frac{44}{24} = \frac{135 - 88}{24} = \frac{47}{24}$$

Sehingga diperoleh:

$$c_2 = \frac{47}{24} \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{47}{48}$$

Kemudian untuk menentukan nilai c_1 maka nilai c_2 dan c_3 disubstitusikan pada persamaan (22) diperoleh:

$$c_1 + \frac{47}{48} + \frac{44}{24} = \frac{19}{16}$$

Sehingga diperoleh:

$$c_1 = \frac{19}{16} - \frac{47}{48} - \frac{44}{24} = -\frac{13}{8}$$

Maka dengan metode eliminasi diperoleh:

$$c_1 = -\frac{13}{8}, c_2 = \frac{47}{48} \text{ dan } c_3 = \frac{44}{24}$$

Kemudian substitusi nilai-nilai tersebut pada persamaan (19):

$$y_h = -\frac{13}{8}x + \frac{47}{48}x^{-1} + \frac{44}{24}x^2$$

Jadi selesaian umum dari (17) adalah:

$$y_h = -\frac{13}{8}x + \frac{47}{48}x^{-1} + \frac{44}{24}x^2 \quad (26)$$

Syarat untuk menentukan y_p adalah:

$$u_1'x + u_2' \frac{1}{x} + u_3'x^2 = 0$$

$$u_1' - u_2'x^{-2} + 2u_3'x = 0$$

$$0 + 2u_2'x^{-3} + 2u_3' = \frac{6x^3 + 6\ln x}{x^3}$$

Maka,

$$\begin{aligned} W[y_1, y_2, y_3](x) &= \begin{vmatrix} x & x^{-1} & x^2 \\ 1 & -x^{-2} & 2x \\ 0 & 2x^{-3} & 2 \end{vmatrix} \\ &= (-2x^{-1} + 2x^{-1}) - (2x^{-1} + 4x^{-1}) \\ &= -6x^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_1(x) &= \begin{vmatrix} 0 & x^{-1} & x^2 \\ 0 & -x^{-2} & 2x \\ 1 & 2x^{-3} & 2 \end{vmatrix} \\ &= 2 - 1 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_2(x) &= \begin{vmatrix} x & 0 & x^2 \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\
 &= x^2 - 2x^2 = -x^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_3(x) &= \begin{vmatrix} x & x^{-1} & 0 \\ 1 & -x^{-2} & 0 \\ 0 & 2x^{-3} & 1 \end{vmatrix} \\
 &= -x^{-1} - x^{-1} = -2x^{-1}
 \end{aligned}$$

Sesuai (3.15) maka

$$\begin{aligned}
 u_1(x) &= \int \frac{(6x^3 + 6 \ln x) \cdot 1}{x^3(-6x^{-1})} dx \\
 &= \int \frac{6x^3 + 6 \ln x}{-6x^2} dx \\
 &= -\int x + \frac{\ln x}{x^2} dx \\
 &= -\int x dx - \int \frac{\ln x}{x^2} dx \\
 &= -\frac{1}{2}x^2 - \int x^{-2} \ln x dx \\
 &= -\frac{1}{2}x^2 - \left(\frac{x^{-1}}{-1} \ln x - \frac{x^{-1}}{(-1)^2} \right) + C \\
 &= -\frac{1}{2}x^2 - (-x^{-1} \ln x - x^{-1}) + C \\
 &= -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x} \ln x + \frac{1}{x} + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_2(x) &= \int \frac{(6x^3 + 6 \ln x)(-x^2)}{x^3(-6x^{-1})} dx \\
 &= \int \frac{-6x^5 - 6x^2 \ln x}{-6x^2} dx \\
 &= \int x^3 + \ln x dx \\
 &= \int x^3 dx + \int \ln x dx \\
 &= \frac{1}{4}x^4 + x \ln x - x + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_3(x) &= \int \frac{(6x^3 + 6\ln x)(-2x^{-1})}{x^3(-6x^{-1})} dx \\
&= \int \frac{-12x^2 - 12x^{-1} \ln x}{-6x^2} dx \\
&= \int 2 + 2x^{-3} \ln x \, dx \\
&= \int 2 dx + \int 2x^{-3} \ln x \, dx \\
&= 2x - \frac{1}{x^2} \ln x - \frac{1}{2x^2} + C
\end{aligned}$$

Sesuai Teorema 2.6 selesaian khusus dari (16) adalah

$$\begin{aligned}
y_p(x) &= \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x} \ln x + \frac{1}{x}\right)x + \left(\frac{1}{4}x^4 + x \ln x - x\right)\frac{1}{x} + \left(2x - \frac{1}{x^2} \ln x - \frac{1}{2x^2}\right)x^2 + C \\
&= -\frac{1}{2}x^3 + \ln x + 1 + \frac{1}{4}x^3 + \ln x - 1 + 2x^3 - \ln x - \frac{1}{2} + C \\
&= \frac{7}{4}x^3 - \ln x - \frac{1}{2} + C
\end{aligned} \tag{27}$$

Dari (26) dan (27) selesaian umum untuk (16) adalah:

$$y(x) = -\frac{13}{8}x + \frac{47}{48}x^{-1} + \frac{44}{24}x^2 + \frac{7}{4}x^3 - \ln x - \frac{1}{2} + C$$

3.2 Solusi Numerik Persamaan Diferensial Linear Cauchy-Euler

Persamaan diferensial linear Cauchy-Euler (3.1) diatas akan dibahas dengan menggunakan metode numerik yaitu metode Runge-Kutta orde-4. Penyelesaian persamaan diferensial linear Cauchy-Euler tersebut menggunakan program dalam bahasa Matlab yang dapat dilihat pada lampiran. Secara umum, algoritma atau langkah-langkah dalam menyelesaikan persamaan diferensial linear Cauchy-Euler dengan metode Runge-Kutta Orde-4 adalah:

- 1) Menentukan persamaan diferensial linear Cauchy-Euler yang akan diselesaikan dan merubahnya menjadi persamaan diferensial linear Cauchy-Euler tingkat satu.
- 2) Mengambil besarnya nilai awal variabel bebas (x) dan variabel terikatnya (y), (z), dan (w)
- 3) Menentukan nilai (x) yang akan ditentukan penyelesaiannya beserta besarnya h (ukuran langkah).
- 4) Menuliskan formulasi rumus metode Runge-Kutta orde-4.
- 5) Menghitung variabel-variabel yang terdapat dalam rumus dengan menggunakan formulasi rumus yang telah ditentukan, yaitu variabel k_1 sampai k_4 dan m_1 sampai m_2 serta t_1 sampai t_4 .
- 6) Menghitung y_{i+1} , z_{i+1} dan w_{i+1} dengan mensubstitusikan variabel-variabel yang telah didapatkan pada langkah 5 ke dalam formulasi rumus metode Runge-Kutta Orde-4.

Contoh 1

$$x^2 y'' + xy' + 4y = x^2 \quad (20)$$

$$y(1) = 0, y'(1) = 1.$$

Penyelesaian

Langkah 1

Diketahui Persamaan diferensial linear Cauchy-Euler orde-2:

$$y'' = \frac{x^2 - xy' - 4y}{x^2} = 1 - \frac{y'}{x} - 4 \frac{y}{x^2} = f(x, y, y')$$

Misalkan $y' = z$

$$\text{Maka } z' = y'' = g(x, y, y') = g(x, y, z) = 1 - \frac{z}{x} - 4 \frac{y}{x^2}$$

Sehingga diperoleh sistem PD orde-1

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, z) = z$$

$$\frac{dz}{dx} = g(x, y, z) = 1 - \frac{z}{x} - 4 \frac{y}{x^2}$$

Langkah 2

Diberikan nilai awal $y(1) = 0$, $y'(1) = z(1) = 1$ atau dapat ditulis diberikan nilai

$$x_0 = 1, y_0 = 0 \text{ dan } z_0 = 1$$

Langkah 3

Penulis menentukan x yang akan diselesaikan adalah pada saat $x = 2$ dengan ukuran langkah $h = 0.1$

Langkah 4

Sesuai dengan formulasi rumus (2.52) yang terdapat pada bab II dan dengan

$h = 0.1$, maka

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = y_i + \frac{1}{6}(0.1)(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$z_{i+1} = z_i + \frac{1}{6}h(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4) = y_i + \frac{1}{6}(0.1)(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4)$$

Langkah 5

Karena $h = 0.1$, maka

$$k_1 = f(x_i, y_i, z_i)$$

$$m_1 = g(x_i, y_i, z_i)$$

$$\begin{aligned} k_2 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_1, z_i + \frac{1}{2}hm_1\right) \\ &= f\left(x_i + \frac{1}{2}(0.1), y_i + \frac{1}{2}(0.1)k_1, z_i + \frac{1}{2}(0.1)m_1\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_2 &= g\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_1, z_i + \frac{1}{2}hm_1\right) \\ &= g\left(x_i + \frac{1}{2}(0.1), y_i + \frac{1}{2}(0.1)k_1, z_i + \frac{1}{2}(0.1)m_1\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_3 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_2, z_i + \frac{1}{2}hm_2\right) \\ &= f\left(x_i + \frac{1}{2}(0.1), y_i + \frac{1}{2}(0.1)k_2, z_i + \frac{1}{2}(0.1)m_2\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_3 &= g\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_2, z_i + \frac{1}{2}hm_2\right) \\ &= g\left(x_i + \frac{1}{2}(0.1), y_i + \frac{1}{2}(0.1)k_2, z_i + \frac{1}{2}(0.1)m_2\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_4 &= f(x_i + h, y_i + hk_3, z_i + hm_3) \\ &= f(x_i + (0.1), y_i + (0.1)k_3, z_i + (0.1)m_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m_4 &= g(x_i + h, y_i + hk_3, z_i + hm_3) \\
 &= g(x_i + (0.1), y_i + (0.1)k_3, z_i + (0.1)m_3)
 \end{aligned}$$

Untuk iterasi yang pertama

dengan $x_i = x_0 = 1$, $y_i = y_0 = 0$, $z_i = z_0 = 1$ maka didapat:

$$k_1 = f(x_0, y_0, z_0) = f(1, 0, 1) = 1$$

$$m_1 = g(x_0, y_0, z_0) = g(1, 0, 1) = 1 - \frac{1}{1} - 4\left(\frac{0}{1^2}\right) = 0$$

$$\begin{aligned}
 k_2 &= f\left(x_0 + \frac{1}{2}(0.1), y_0 + \frac{1}{2}(0.1)k_1, z_0 + \frac{1}{2}(0.1)m_1\right) \\
 &= f\left(1 + \frac{1}{2}(0.1), 0 + \frac{1}{2}(0.1)(1), 1 + \frac{1}{2}(0.1)(0)\right) \\
 &= f(1.05, 0.05, 1) \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m_2 &= g\left(x_0 + \frac{1}{2}(0.1), y_0 + \frac{1}{2}(0.1)k_1, z_0 + \frac{1}{2}(0.1)m_1\right) \\
 &= g\left(1 + \frac{1}{2}(0.1), 0 + \frac{1}{2}(0.1)(1), 1 + \frac{1}{2}(0.1)(0)\right) \\
 &= g(1.05, 0.05, 1) \\
 &= 1 - \frac{1}{1.05} - 4\frac{0.05}{1.05^2} \\
 &= -0.133786848
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_3 &= f\left(x_0 + \frac{1}{2}(0.1), y_0 + \frac{1}{2}(0.1)k_2, z_0 + \frac{1}{2}(0.1)m_2\right) \\
 &= f\left(1 + \frac{1}{2}(0.1), 0 + \frac{1}{2}(0.1)(1), 1 + \frac{1}{2}(0.1)(-0.133786848)\right) \\
 &= f(1.05, 0.05, 0.993310658) \\
 &= 0.993310658
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m_3 &= g\left(x_0 + \frac{1}{2}(0.1), y_0 + \frac{1}{2}(0.1)k_2, z_0 + \frac{1}{2}(0.1)m_2\right) \\
 &= g\left(1 + \frac{1}{2}(0.1), 0 + \frac{1}{2}(0.1)(1), 1 + \frac{1}{2}(0.1)(-0.133786848)\right) \\
 &= g(1.05, 0.05, 0.993310658) \\
 &= 1 - \frac{0.993310658}{1.05} - 4\frac{0.05}{1.05^2}
 \end{aligned}$$

$$= -0.127416046$$

$$\begin{aligned} k_4 &= f(x_0 + (0.1), y_0 + (0.1)k_3, z_0 + (0.1)m_3) \\ &= f(1 + (0.1), 0 + (0.1)(0.993310658), 1 + (0.1)(-0.127416046)) \\ &= f(1.1, 0.099331066, 0.987258395) \\ &= 0.987258395 \\ m_4 &= g(x_i + (0.1), y_i + (0.1)k_3, z_i + (0.1)m_3) \\ &= g(1 + (0.1), 0 + (0.1)(0.993310658), 1 + (0.1)(-0.127416046)) \\ &= f(1.1, 0.099331066, 0.987258395) \\ &= 1 - \frac{0.987258395}{1.1} - 4 \frac{0.099331066}{1.1^2} \\ &= -0.225874792 \end{aligned}$$

Langkah 6

Berdasarkan variabel-variabel yang telah didapat pada langkah 5, maka besarnya

y_{i+1} dan z_{i+1} adalah:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(0.1)(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$y_{0+1} = y_0 + \frac{1}{6}(0.1)(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$\begin{aligned} y_1 &= 0 + \frac{1}{6}(0.1)(1 + 2 \times 1 + 2 \times 0.993310658 + 0.987258395) \\ &= 0.099564662 \end{aligned}$$

$$z_{i+1} = z_i + \frac{1}{6}(0.1)(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4)$$

$$z_{0+1} = z_0 + \frac{1}{6}(0.1)(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4)$$

$$\begin{aligned} z_1 &= 1 + \frac{1}{6}(0.1)(0 + 2 \times (-0.133786848) + 2 \times (-0.127416046) + (-0.225874792)) \\ &= 0.987528657 \end{aligned}$$

Dan

$$x_{i+1} = x_i + h$$

$$x_{0+1} = x_0 + 0.1$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 + 0.1 \\ &= 1.1 \end{aligned}$$

Jadi pada saat $x=1.1$, besarnya y adalah 0.099564662 dan z adalah 0.987528657.

Iterasi terus berulang hingga mencapai $x=2$ atau iterasi ke 11 sehingga pada akhirnya diperoleh penyelesaian $y(2)=0.845703994$. Secara keseluruhan, penyelesaian numerik persamaan diferensial linear Cauchy-Euler (20) dikerjakan dengan Matlab.

Contoh 2

$$x^3 y''' + x^2 y'' - 2xy' + 2y = 6x^3 + 6 \ln x \quad (21)$$

$$y(1) = \frac{19}{16}, y'(1) = \frac{17}{16}, y''(1) = \frac{45}{8}.$$

Penyelesaian

Langkah 1

Diketahui Persamaan diferensial linear Cauchy-Euler orde-3:

$$y''' = \frac{6x^3 + 6 \ln x - x^2 y'' + 2xy' - 2y}{x^3}$$

Misalkan $y' = z$

$$y'' = z' = w$$

$$\text{Maka } w' = y''' = q(x, y, y', y'') = q(x, y, z, w) = \frac{6x^3 + 6 \ln x - x^2 w + 2xz - 2y}{x^3}$$

Sehingga diperoleh sistem PD orde-1

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, z, w) = z$$

$$\frac{dz}{dx} = g(x, y, z, w) = w$$

$$\frac{dw}{dx} = q(x, y, z, w) = \frac{6x^3 + 6\ln x - x^2w + 2xz - 2y}{x^3}$$

Langkah 2

Diberikan nilai awal $y(1) = \frac{19}{16}$, $y'(1) = z(1) = \frac{17}{16}$, $y''(1) = w(1) = \frac{45}{8}$ atau dapat

ditulis diberikan nilai $x_0 = 1$, $y_0 = \frac{19}{16}$, $z_0 = \frac{17}{16}$ dan $w_0 = \frac{45}{8}$.

Langkah 3

Penulis menentukan x yang akan diselesaikan adalah pada saat $x = 3.5$ dengan ukuran langkah $h = 0.25$

Langkah 4

Sesuai dengan formulasi rumus (2.47) yang terdapat pada bab II dan dengan $h = 0.25$, maka

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = y_i + \frac{1}{6}(0.25)(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$z_{i+1} = z_i + \frac{1}{6}h(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4) = z_i + \frac{1}{6}(0.25)(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4)$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{1}{6}h(t_1 + 2t_2 + 2t_3 + t_4) = w_i + \frac{1}{6}(0.25)(t_1 + 2t_2 + 2t_3 + t_4)$$

Langkah 5

Karena $h = 0.25$, maka

$$k_1 = f(x_i, y_i, z_i, w_i)$$

$$m_1 = g(x_i, y_i, z_i, w_i)$$

$$t_1 = q(x_i, y_i, z_i, w_i)$$

$$\begin{aligned} k_2 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_1, z_i + \frac{1}{2}hm_1, w_i + \frac{1}{2}ht_1\right) \\ &= f\left(x_i + \frac{1}{2}(0.25), y_i + \frac{1}{2}(0.25)k_1, z_i + \frac{1}{2}(0.25)m_1, w_i + \frac{1}{2}(0.25)t_1\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_2 &= g\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_1, z_i + \frac{1}{2}hm_1, w_i + \frac{1}{2}ht_1\right) \\ &= g\left(x_i + \frac{1}{2}(0.25), y_i + \frac{1}{2}(0.25)k_1, z_i + \frac{1}{2}(0.25)m_1, w_i + \frac{1}{2}(0.25)t_1\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_2 &= q\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_1, z_i + \frac{1}{2}hm_1, w_i + \frac{1}{2}ht_1\right) \\ &= q\left(x_i + \frac{1}{2}(0.25), y_i + \frac{1}{2}(0.25)k_1, z_i + \frac{1}{2}(0.25)m_1, w_i + \frac{1}{2}(0.25)t_1\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_3 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_2, z_i + \frac{1}{2}hm_2, w_i + \frac{1}{2}ht_2\right) \\ &= f\left(x_i + \frac{1}{2}(0.25), y_i + \frac{1}{2}(0.25)k_1, z_i + \frac{1}{2}(0.25)m_1, w_i + \frac{1}{2}(0.25)t_1\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_3 &= g\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_2, z_i + \frac{1}{2}hm_2, w_i + \frac{1}{2}ht_2\right) \\ &= g\left(x_i + \frac{1}{2}(0.25), y_i + \frac{1}{2}(0.25)k_2, z_i + \frac{1}{2}(0.25)m_2, w_i + \frac{1}{2}(0.25)t_2\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_3 &= q\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_2, z_i + \frac{1}{2}hm_2, w_i + \frac{1}{2}ht_2\right) \\ &= q\left(x_i + \frac{1}{2}(0.25), y_i + \frac{1}{2}(0.25)k_2, z_i + \frac{1}{2}(0.25)m_2, w_i + \frac{1}{2}(0.25)t_2\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_4 &= f(x_i + h, y_i + hk_3, z_i + hm_3, w_i + ht_3) \\ &= f(x_i + (0.25), y_i + (0.25)k_3, z_i + (0.25)m_3, w_i + (0.25)t_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_4 &= g(x_i + h, y_i + hk_3, z_i + hm_3, w_i + ht_3) \\ &= g(x_i + (0.25), y_i + (0.25)k_3, z_i + (0.25)m_3, w_i + (0.25)t_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 t_4 &= q(x_i + h, y_i + hk_3, z_i + hm_3, w_i + ht_3) \\
 &= q(x_i + (0.25), y_i + (0.25)k_3, z_i + (0.25)m_3, w_i + (0.25)t_3)
 \end{aligned}$$

Untuk iterasi yang pertama

Dengan $x_i = x_0 = 1$, $y_i = y_0 = \frac{19}{16}$, $z_i = z_0 = \frac{17}{16}$ dan $w_i = w_0 = \frac{45}{8}$ maka didapat:

$$k_1 = f(x_0, y_0, z_0, w_0) = f\left(1, \frac{19}{16}, \frac{17}{16}, \frac{45}{8}\right) = \frac{17}{16}$$

$$m_1 = g(x_0, y_0, z_0, w_0) = g\left(1, \frac{19}{16}, \frac{17}{16}, \frac{45}{8}\right) = \frac{45}{8}$$

$$\begin{aligned}
 t_1 &= q(x_0, y_0, z_0, w_0) \\
 &= q\left(1, \frac{19}{16}, \frac{17}{16}, \frac{45}{8}\right) \\
 &= \frac{6 \times 1^3 + 6 \ln 1 - 1^2 \times \frac{45}{8} + 2 \times 1 \times \frac{17}{16} - 2 \times \frac{19}{16}}{1^3} \\
 &= 0.125
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_2 &= f\left(x_0 + \frac{1}{2}(0.25), y_0 + \frac{1}{2}(0.25)k_1, z_0 + \frac{1}{2}(0.25)m_1, w_0 + \frac{1}{2}(0.25)t_1\right) \\
 &= f\left(1 + \frac{1}{2}(0.25), \frac{19}{16} + \frac{1}{2}(0.25)\left(\frac{17}{16}\right), \frac{17}{16} + \frac{1}{2}(0.25)\left(\frac{45}{8}\right), \frac{45}{8} + \frac{1}{2}(0.25)(0.125)\right) \\
 &= f(1.125, 1.3203125, 1.765625, 5.640625) \\
 &= 1.765625
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m_2 &= g\left(x_0 + \frac{1}{2}(0.25), y_0 + \frac{1}{2}(0.25)k_1, z_0 + \frac{1}{2}(0.25)m_1, w_0 + \frac{1}{2}(0.25)t_1\right) \\
 &= g\left(1 + \frac{1}{2}(0.25), \frac{19}{16} + \frac{1}{2}(0.25)\left(\frac{17}{16}\right), \frac{17}{16} + \frac{1}{2}(0.25)\left(\frac{45}{8}\right), \frac{45}{8} + \frac{1}{2}(0.25)(0.125)\right) \\
 &= g(1.125, 1.3203125, 1.765625, 5.640625) \\
 &= 5.640625
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 t_2 &= q\left(x_0 + \frac{1}{2}(0.25), y_0 + \frac{1}{2}(0.25)k_1, z_0 + \frac{1}{2}(0.25)m_1, w_0 + \frac{1}{2}(0.25)t_1\right) \\
 &= q\left(1 + \frac{1}{2}(0.25), \frac{19}{16} + \frac{1}{2}(0.25)\left(\frac{17}{16}\right), \frac{17}{16} + \frac{1}{2}(0.25)\left(\frac{45}{8}\right), \frac{45}{8} + \frac{1}{2}(0.25)(0.125)\right) \\
 &= q(1.125, 1.3203125, 1.765625, 5.640625) \\
 &= \frac{6 \times 1.125^3 + 6 \ln 1.125 - 1.125^2 \times 5.640625 + 2 \times 1.125 \times 1.765625 - 2 \times 1.3203125}{1.125^3} \\
 &= 2.417975975
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_3 &= f\left(x_0 + \frac{1}{2}(0.25), y_0 + \frac{1}{2}(0.25)k_2, z_0 + \frac{1}{2}(0.25)m_2, w_0 + \frac{1}{2}(0.25)t_2\right) \\
 &= f\left(1 + \frac{1}{2}(0.25), \frac{19}{16} + \frac{1}{2}(0.25)(1.765625), \frac{17}{16} + \frac{1}{2}(0.25)(5.640625), \frac{45}{8} + \frac{1}{2}(0.25)(2.417975975)\right) \\
 &= f(1.125, 1.408203125, 1.767578125, 5.927246997) \\
 &= 1.767578125
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m_3 &= g\left(x_0 + \frac{1}{2}(0.25), y_0 + \frac{1}{2}(0.25)k_2, z_0 + \frac{1}{2}(0.25)m_2, w_0 + \frac{1}{2}(0.25)t_2\right) \\
 &= g\left(1 + \frac{1}{2}(0.25), \frac{19}{16} + \frac{1}{2}(0.25)(1.765625), \frac{17}{16} + \frac{1}{2}(0.25)(5.640625), \frac{45}{8} + \frac{1}{2}(0.25)(2.417975975)\right) \\
 &= g(1.125, 1.408203125, 1.767578125, 5.927246997) \\
 &= 5.927246997
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 t_3 &= q\left(x_0 + \frac{1}{2}(0.25), y_0 + \frac{1}{2}(0.25)k_2, z_0 + \frac{1}{2}(0.25)m_2, w_0 + \frac{1}{2}(0.25)t_2\right) \\
 &= q\left(1 + \frac{1}{2}(0.25), \frac{19}{16} + \frac{1}{2}(0.25)(1.765625), \frac{17}{16} + \frac{1}{2}(0.25)(5.640625), \frac{45}{8} + \frac{1}{2}(0.25)(2.417975975)\right) \\
 &= q(1.125, 1.408203125, 1.767578125, 5.927246997) \\
 &= \frac{6 \times 1.125^3 + 6 \ln 1.125 - x^2 \times 5.927246997 + 2 \times 1.125 \times 1.767578125 - 2 \times 1.408203125}{1.125^3} \\
 &= 2.042830496
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_4 &= f(x_0 + (0.25), y_0 + (0.25)k_3, z_0 + (0.25)m_3, w_0 + (0.25)t_3) \\
 &= f\left(1 + (0.25), \frac{19}{16} + (0.25)(1.767578125), \frac{17}{16} + (0.25)(5.927246997), \frac{45}{8} + (0.25)(2.042830496)\right) \\
 &= f(1.25, 1.629394531, 2.544311749, 6.135707624) \\
 &= 2.544311749
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m_4 &= g(x_0 + (0.25), y_0 + (0.25)k_3, z_0 + (0.25)m_3, w_0 + (0.25)t_3) \\
 &= g\left(1 + (0.25), \frac{19}{16} + (0.25)(1.767578125), \frac{17}{16} + (0.25)(5.927246997), \frac{45}{8} + (0.25)(2.042830496)\right) \\
 &= g(1.25, 1.629394531, 2.544311749, 6.135707624) \\
 &= 6.135707624
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 t_4 &= q(x_0 + (0.25), y_0 + (0.25)k_3, z_0 + (0.25)m_3, w_0 + (0.25)t_3) \\
 &= q\left(1 + (0.25), \frac{19}{16} + (0.25)(1.767578125), \frac{17}{16} + (0.25)(5.927246997), \frac{45}{8} + (0.25)(2.042830496)\right) \\
 &= q(1.25, 1.629394531, 2.544311749, 6.135707624) \\
 &= \frac{6 \times 1.25^3 + 6 \ln 1.25 - 1.25^2 \times 6.135707624 + 2 \times 1.25 \times 2.544311749 - 2 \times 1.629394531}{1.25^3} \\
 &= 3.365149929
 \end{aligned}$$

Langkah 6

Berdasarkan variabel-variabel yang telah didapat pada langkah 5, maka besarnya

y_{i+1} , z_{i+1} dan w_{i+1} adalah:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(0.25)(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$y_{0+1} = y_0 + \frac{1}{6}(0.25)(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{19}{16} + \frac{1}{6}(0.25)\left(\frac{17}{16} + 2 \times 1.765625 + 2 \times 1.767578125 + 2.544311749\right) \\ &= 1.632217417 \end{aligned}$$

$$z_{i+1} = z_i + \frac{1}{6}(0.25)(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4)$$

$$z_{0+1} = z_0 + \frac{1}{6}(0.25)(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4)$$

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{17}{16} + \frac{1}{6}(0.25)\left(\frac{45}{8} + 2 \times 5.640625 + 2 \times 5.927246997 + 6.135707624\right) \\ &= 2.516518817 \end{aligned}$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{1}{6}(0.25)(t_1 + 2t_2 + 2t_3 + t_4)$$

$$w_{0+1} = w_0 + \frac{1}{6}(0.25)(t_1 + 2t_2 + 2t_3 + t_4)$$

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{45}{8} + \frac{1}{6}(0.25)(0.125 + 2 \times 2.417975975 + 2 \times 2.042830496 + 3.365149929) \\ &= 6.142156786 \end{aligned}$$

Dan

$$x_{i+1} = x_i + h$$

$$x_{0+1} = x_0 + 0.25$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 + 0.25 \\ &= 1.25 \end{aligned}$$

Jadi pada saat $x=1.25$, besarnya y adalah 1.632217417, z adalah

2.516518817 dan w adalah 6.142156786.

Iterasi terus berulang hingga mencapai $x = 3.5$ atau iterasi ke 11 sehingga pada akhirnya diperoleh penyelesaian $y(3.5) = 31.05125645$. Secara keseluruhan, penyelesaian numerik persamaan diferensial linear Cauchy-Euler (21) dikerjakan dengan Matlab.

3.3 Analisis Galat Persamaan Diferensial Linear Cauchy-Euler

Penyelesaian secara numerik dari suatu persamaan matematika hanya memberikan nilai perkiraan yang mendekati nilai eksak (benar) dari penyelesaian analitik. Berarti dalam penyelesaian numerik tersebut terdapat kesalahan (galat) terhadap nilai eksak dan ketidakpastian dapat terjadi. Untuk menghitung nilai y dari persamaan diferensial linear Cauchy-Euler orde-2 pada contoh 1 dan untuk menghitung nilai y dari persamaan diferensial linear Cauchy-Euler orde-3 pada contoh 2 penulis menggunakan program Matlab. Hal ini dilakukan untuk menghindari ketidakteelitian dalam menghitung nilai-nilai tersebut pada semua x yang diinginkan. Hasilnya dapat dilihat pada Tabel 3.1. dan Tabel 3.2.

Galat kesalahan dari penyelesaian secara analitik dan numerik dari persamaan diferensial linear Cauchy-Euler terdiri dari galat absolut dan galat relatif seperti yang telah dijelaskan pada BAB II. Galat absolut merupakan selisih antara nilai eksak dan nilai perkiraan. Yang dimaksud nilai eksak di sini adalah nilai hasil penyelesaian yang dicari secara analitik dengan metode variasi parameter. Sedangkan nilai perkiraan adalah nilai hasil penyelesaian yang dicari dengan metode numerik Runge-Kutta orde-4. Selanjutnya galat absolut dirumuskan dengan bentuk:

$$e = \bar{x} - x$$

Dan dari hasil iterasi dapat dihitung pula kesalahan relaif dengan bentuk:

$$e_R = \frac{e}{x} \times 100\%$$

Hasil dari pencarian galat secara keseluruhan ditabelkan yaitu pada tabel 3.1 dan tabel 3.2 sebagai berikut:

Tabel 3.1.

Perbandingan solusi metode Runge-Kutta dan metode variasi parameter
persamaan diferensial linear Cauchy-Euler orde-2

Iterasi	x	Numerik	Analitik	% Galat
1	1	0	0	0
2	1.1	0.09956466	0.12500000	0.20348271
3	1.2	0.19694969	0.24598403	0.19933954
4	1.3	0.29093453	0.35830795	0.18803216
5	1.4	0.38098587	0.46173904	0.17488920
6	1.5	0.46699553	0.55664562	0.16105415
7	1.6	0.54911370	0.64371412	0.14696030
8	1.7	0.62764209	0.72378119	0.13282896
9	1.8	0.70296545	0.79773453	0.11879776
10	1.9	0.77550769	0.86645537	0.10496521
11	2	0.84570399	0.93078617	0.09140894

Dari solusi secara analitik didapat nilai $y = 0.93078617$ dan hasil iterasi secara numerik didapat nilai $y = 0.84570399$ untuk $x = 2$, besarnya nilai antara kedua solusi itu terdapat selisih yang disebut dengan galat. Jadi solusi analitik sebagai pengontrol galat untuk solusi numerik. Kesalahan relatifnya 0.09140894 pada iterasi ke-11. Pada tabel galat ini semakin turun, dan penurunan nilainya pada setiap langkah tidak terlalu besar sehingga tidak terlalu mempengaruhi pertumbuhan kesalahan. Sehingga kesalahan pada persamaan diferensial linear Cauchy-Euler ini stabil karena pertumbuhan dari kesalahan kecil. Hal ini berarti

bahwa metode Runge-Kutta orde-4 merupakan metode yang nilainya mendekati solusi eksaknya.

Tabel 3.2.

Perbandingan solusi metode Runge-Kutta dengan metode variasi parameter persamaan diferensial linear Cauchy-Euler orde-3

Iterasi	x	Numerik	Analitik	% Galat
1	1	1.18750000	2.43750000	0.51282051
2	1.25	1.63221742	4.31149187	0.62142630
3	1.5	2.46274797	7.34106267	0.66452432
4	1.75	3.73812351	11.64964760	0.67912132
5	2	5.52663289	17.37976949	0.68200770
6	2.25	7.89948008	24.68284872	0.67996076
7	2.5	10.92871984	33.71495927	0.67584953
8	2.75	14.68653996	44.63482428	0.67096230
9	3	19.24501321	57.60277660	0.66590129
10	3.25	24.67602327	72.78017914	0.66095133
11	3.5	31.05125645	90.32908227	0.65624298

Dari solusi secara analitik didapat nilai $y = 90.32908227$ dan hasil iterasi secara numerik didapat nilai $y = 31.05125645$ untuk $x = 3.5$, besarnya nilai antara kedua solusi itu terdapat selisih yang disebut dengan galat. Jadi solusi analitik sebagai pengontrol galat untuk solusi numerik. Kesalahan relatifnya 0.65624298 pada iterasi ke-11. Pada tabel galat ini naik, tetapi kenaikan setiap langkah tidak terlalu besar sehingga tidak terlalu mempengaruhi pertumbuhan kesalahan. Sehingga kesalahan pada persamaan diferensial linear Cauchy-Euler ini stabil karena pertumbuhan dari kesalahan kecil. Hal ini berarti bahwa metode Runge-Kutta orde-4 merupakan metode yang nilainya mendekati solusi eksaknya.

3.4 Tinjauan Agama Terhadap Hasil Pembahasan

Berdasarkan hasil pembahasan di atas, bahwa dalam penyelesaian persamaan diferensial linear tak homogen dengan koefisien variabel dapat diselesaikan baik secara analitik maupun numerik. Penyelesaian secara analitik yaitu dengan menggunakan metode variasi parameter untuk mencari keakuratan hasilnya, sedangkan penyelesaian secara numerik yaitu dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde-4 memberikan nilai perkiraan yang mendekati nilai eksak (benar) dari penyelesaian analitik. Dan dari hasil pembahasan di atas, persamaan diferensial linear tak homogen dengan koefisien variabel lebih mudah dan lebih cepat diselesaikan dengan metode numerik dari pada dengan menggunakan solusi analitik. Sedangkan di dalam agama, Allah memberikan kemudahan bagi umatnya untuk menyelesaikan segala masalah. Dalam hal ini kemudahan sangat dibutuhkan dalam menyelesaikan persamaan, terutama dalam bidang ilmu matematika. Seperti yang tercantum dalam QS Al-Baqarah:185 sebagai berikut:

يُرِيدُ اللَّهُ بِكُمُ الْيُسْرَ وَلَا يُرِيدُ بِكُمُ الْعُسْرَ وَلِتُكْمِلُوا الْعِدَّةَ وَلِتُكَبِّرُوا اللَّهَ عَلَىٰ مَا هَدَانَا وَلَعَلَّكُمْ تَشْكُرُونَ ﴿١٨٥﴾

Artinya:

....Bahwasannya Allah menghendaki kemudahan dan tidak menghendaki kesukaran bagimu dan hendaklah kamu mencukupkan bilangannya dan hendaklah kamu mengagungkan Allah atas petunjuk-Nya yang diberikan kepadamu, supaya kamu bersyukur.

Kemudahan dalam ilmu matematika dapat memberikan jalan yang benar untuk penyelesaian persamaan tersebut. Dalam menyelesaikan langkah-

langkahnya harus teliti, untuk memperoleh hasil yang tepat dalam perhitungan secara matematis. Adapun kemudahan dalam penyelesaian permasalahan itu, khususnya dalam ilmu matematika perlu adanya penjelasan yang berkaitan dengan hadits diriwayatkan oleh Bukhari, sebagai berikut:

“Dari Anas r.a dari Rosulullah saw bersabda: Hendaklah kamu memudahkan dan jangan mempersulit, hendaklah kamu memberikan kabar gembira dan jangan menyebabkan orang lari.” (HR. Bukhari)

Berdasarkan hadist di atas bahwasannya ilmu matematika itu harus diberikan dengan kesenangan agar dapat diselesaikan dengan mudah. Pada hadits yang lain riwayat Muslim (3264) dijelaskan juga bahwa disampaikan dengan bertahap (Fachruddin, 1996 :561).

Masalah matematika khususnya persamaan diferensial linear tak homogen dapat diselesaikan baik secara analitik maupun numerik. Solusi analitik merupakan solusi kontinyu sehingga solusi dari nilai variabel bebas dapat ditemukan, sangat akurat dan tepat. Sedangkan solusi numerik solusi dapat diperoleh dari poin-poin grid terpisah, aproksimasi, kesalahan kuantitatif harus dikendalikan dengan baik untuk ketelitian (Lam, 1994:20), sehingga dalam pengerjaan langkah demi langkah harus teliti dan cermat. Dalam Islam sangat menekankan keharusan melakukan penyelidikan yang teliti dan pengamatan yang benar terhadap fakta-fakta konkret dalam alam semesta untuk kemudian merenungkan temuannya itu untuk mencapai Kebenaran Hakiki. Sebagai manusia yang tidak lepas dari kesalahan, maka dalam melakukan perhitungan harus dengan teliti untuk mendapatkan kebenaran dalam hasil perhitungannya. Seperti dalam QS Maryam:94 sebagai berikut:

لَقَدْ أَحْصَيْنَاهُمْ وَعَدَّاهُمْ عَدًّا ۝

Artinya:

Sesungguhnya Allah telah menentukan jumlah mereka dan menghitung mereka dengan hitungan yang teliti.

Ayat di atas dipahami oleh banyak ulama sebagai “Dia yang mengetahui kadar setiap peristiwa dan rinciannya, baik apa yang terjangkau oleh makhluk maupun yang tidak terjangkau, seperti hembusan nafas, rincian perolehan rezeki dan kadarnya untuk masa kini dan mendatang.” Allahlah yang mengetahui dengan amat teliti rincian segala sesuatu dari segi jumlah dan kadarnya, panjang dan lebarnya, jauh dan dekatnya, tempat dan waktunya, kadar cahaya dan gelapnya, sebelum, sedang atau ketika dan saat wujudnya dan lain-lain sebagainya (Shihab, 2002:257).

Al-Qur’an mengajak manusia untuk menyelidiki, mengungkap keajaiban, dan rahasia-Nya, serta memerintahkan manusia untuk memanfaatkan kekayaan alam yang melimpah untuk kesejahteraan hidupnya. Dengan demikian bahwasannya al-Qur’an mengajak manusia untuk menyaksikan eksistensi Tuhan melalui ciptaan-Nya, mengungkap rahasia-rahasia akan realitas konkret yang terdapat di langit dan di bumi untuk dimanfaatkan bagi kesejahteraan hidup (Rahman, 2007:21). Salah satunya, yaitu dengan mempelajari ilmu matematika.

Dalam ilmu matematika banyak memberikan manfaat bagi manusia dalam hal ilmu hitung-menghitung dalam kehidupan sehari-hari (misalkan perhitungan ilmu waris, perdagangan dan sebagainya), dan juga banyak menemukan nikmat

dari Allah yang sebelumnya tidak ia ketahui. Al-Qur'an memberikan petunjuk tentang jalan yang benar menuju ilmu pengetahuan serta mampu mendapatkan kesimpulan yang benar berdasarkan penalaran dan observasi tentang keajaiban dan rahasia Allah.

Salah satu ciri insan Ulul Albab adalah selalu sadar akan kehadiran Tuhan pada dirinya dalam segala situasi dan kondisi, sambil berusaha mengenali Allah dengan kalbu (dzikir) serta mengenali alam semesta dengan akal (pikir), sehingga sampai kepada bukti yang sangat nyata akan keagungan Allah Swt dalam segala ciptaan-Nya. Dengan adanya kemajuan ilmu pengetahuan, semua nikmat yang dikaruniakan Allah kepada manusia dapat dengan mudah dirasakan, dibuka keajaiban dan rahasianya, sehingga akan membawa manusia lebih dekat kepada Allah melalui hasil-hasil perhitungan yang telah dilakukan dalam menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan ilmu matematika. Karena penciptaan manusia bertujuan untuk mencapai kesempurnaan tertinggi tergantung pada kerja keras dan usaha yang terus-menerus. Terutama dalam belajar matematika perlu adanya kerja keras dan terus-menerus dalam menyelesaikan permasalahan, sampai mendapatkan hasil yang tepat dan benar. Sebagai seorang ahli matematika, ketepatan serta akurasi dalam perhitungan yang dilakukan harus mempunyai hasil yang seksama dan akurat, sehingga menghasilkan kebenaran yang shahih. Semangat inilah yang ditekankan dalam Al-Qur'an. Seperti yang tercantum dalam Q.S An-Nisa':86 sebagai berikut:

إِنَّ اللَّهَ كَانَ عَلَى كُلِّ شَيْءٍ حَسِيبًا ﴿٨٦﴾

Artinya:

...Sesungguhnya Allah selalu membuat perhitungan atas tiap-tiap sesuatu.

BAB IV

KESIMPULAN DAN SARAN

4.1 Kesimpulan

Dari uraian dan pembahasan di atas, dapat disimpulkan bahwa

1. Solusi analitik dengan metode variasi parameter diperoleh dengan menggunakan langkah-langkah sebagai berikut:

- a. Menyatakan persamaan Cauchy-Euler homogen orde-3 dalam bentuk

$$a_0 x^3 y''' + a_1 x^2 y'' + a_2 x y' + a_3 y = 0$$

- b. Mencari fungsi komplementer $y_h(x)$ dari persamaan Cauchy-Euler homogen dengan menggunakan persamaan karakteristik,

$$y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + c_3 y_3(x), \text{ dimana } c_1, c_2, c_3 \text{ adalah konstanta}$$

sebarang dan $\{y_1, y_2, y_3\}$ adalah himpunan fundamental dari persamaan Cauchy-Euler homogen.

- c. Mencari integral partikular $y_p(x) = u_1 y_1(x) + u_2 y_2(x) + u_3 y_3(x)$ dengan cara:

- Menentukan Wronski dari himpunan fundamental persamaan Cauchy-Euler $W[y_1, y_2, y_3](x)$

- Menentukan

$$u_i = \int \frac{b(x) W_i}{a_0 x^3 W(y_1, y_2, y_3)} dx \quad i = 1, 2, 3$$

Dimana W_i adalah determinan yang diperoleh dengan mengganti kolom ke- i dari $W[y_1, y_2, y_3](x)$ dengan kolom $[0, 0, 1]$

- Integral partikular:

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \sum_{i=1}^3 y_i(x) u_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^3 y_i(x) \int \frac{b(x) W_i(x)}{a_0 x^3 W[y_1, y_2, y_3](x)} dx \end{aligned}$$

- d. Penyelesaian masalah nilai awal persamaan Cauchy-Euler tak homogen orde-3 diperoleh dengan memasukkan syarat awal $y(0) = y_0, y'(0) = y_1, y''(0) = y_2$ pada penyelesaian umum $y(x)$ persamaan Cauchy-Euler tak homogen dimana $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$.
2. Solusi numerik dengan metode Runge-Kutta orde-4 diperoleh dengan menggunakan langkah-langkah sebagai berikut:
 - a. Menentukan persamaan diferensial linear Cauchy-Euler yang akan diselesaikan dan merubahnya menjadi persamaan diferensial linear Cauchy-Euler tingkat satu.
 - b. Mengambil besarnya nilai awal variabel bebas (x) dan variabel terikatnya (y), (z), dan (w).
 - c. Menentukan nilai (x) yang akan ditentukan penyelesaiannya beserta besarnya h (ukuran langkah).
 - d. Menuliskan formulasi rumus metode Runge-Kutta orde-4.

- e. Menghitung variabel-variabel yang terdapat dalam rumus dengan menggunakan formulasi rumus yang telah ditentukan, yaitu variabel k_1 sampai k_4 dan m_1 sampai m_2 serta t_1 sampai t_4 .
 - f. Menghitung y_{i+1} , z_{i+1} dan w_{i+1} dengan mensubstitusikan variabel-variabel yang telah didapatkan pada langkah 5 ke dalam formulasi rumus metode Runge-Kutta Orde-4.
3. Dari solusi secara analitik dan hasil iterasi secara numerik untuk persamaan diferensial linear Cauchy-Euler sama-sama mendapatkan nilai tetapi besarnya nilai antara kedua solusi itu terdapat selisih yang disebut dengan galat. Jadi solusi analitik sebagai pengontrol galat untuk solusi numerik. Besarnya galat pada penyelesaian persamaan diferensial linear Cauchy-Euler ini naik tetapi kenaikan setiap langkah tidak terlalu besar sehingga tidak terlalu mempengaruhi pertumbuhan kesalahan. Sehingga kesalahan pada persamaan diferensial linear Cauchy-Euler ini stabil karena pertumbuhan dari kesalahan kecil. Hal ini berarti bahwa metode Runge-Kutta orde-4 merupakan metode yang nilainya mendekati solusi eksaknya.

4.2 Saran

Skripsi ini merupakan penelitian dengan kajian literatur tentang solusi persamaan diferensial linear tak homogen dengan koefisien variabel yang diterapkan pada persamaan diferensial linear Cauchy-Euler. Oleh karena, itu penulis mengharapkan agar ada penelitian tentang solusi persamaan diferensial linear tak homogen dengan koefisien variabel yang diterapkan pada persamaan

lain. Misalnya diterapkan pada persamaan diferensial linear Legendre dan dengan metode yang berbeda.



DAFTAR PUSTAKA

- Abdusysykir. 2006. *Ada Matematika dalam Al-Qur'an*. Malang: UIN Press.
- Abdusysykir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Press.
- Anton, Howard. 1997. *Aljabar Linear Elementer*. Jakarta: Erlangga
- Arhami, Muhammad dan Desiani, Anita. 2005. *Pemrograman Matlab*. Yogyakarta: Andi
- Aziz, Abdul. 2006. *Modul Praktikum Metode Numerik dengan Matlab*. Malang: UIN
- Baiduri. 2002. *Persamaan Diferensial dan Matematika Model*. Malang: UMM Press.
- Bear, H. S. 1962. *Differential Equations*. Massachussets: Addison-Wesley Publishing Company
- Boyce, William C dan Di Prima, Richad C. 2001. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problem*. Sevent Edition. New York: John Wiley&Sons. Inc
- Chapra, Steven C. 2002. *Numerical Methods for Engineers With Software Programming Application, Fourth Edition*. Amerika: McGraw hill Companies, Inc.
- Djojodihardjo, Harijono. 2000. *Metode Nmerik*. Jakarta: PT. Gramedia Pustaka Utama
- Fachruddin dan Irfan Fachruddin. 1996. *Pilihan Sabda Rasul (Hadis-hadis Pilhan)*. Jakarta: Bumi Aksara.
- Finizio dan Ladas. 1988. *Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern*. Jakarta: Erlangga.
- Goode, Stephen W. 1991. *An Introduction to Differential Equation and Linear Algebra*. New Jersey: Prentice Hall.
- Kusumah, Yahya S. 1989. *Persamaan Diferensial*. Jakarta: Depdikbud.
- Lam C. Y. 1994. *Applied Numerical Methods for Partial Differential Equation*. Prentice-Hall. Inc, Singapore

Mardalis. 2003. *Metode Penelitian Suatu Pendekatan Proposal*. 2003. Jakarta: PT Bumi Aksara.

Munir, Rinaldi. 2008. *Metode Numerik*. Bandung: Informatika.

Pamuntjak & Santosa. 1990. *Persamaan Diferensial biasa*, fakultas MIPA. Bandung: Institut Teknologi Bandung.

Purcell, J. Edann. 1984. *Kalkulus dan Geometri*. Jakarta: Erlangga

Rahman, Fazlur. 2007. *Ensiklopedia Ilmu Dalam Al-Qur'an*. Bandung: PT Mizan Pustaka.

Ross, Shepley L. 1984. *Differential Equations*. Third Edition. New York: John Wiley&Sons. Inc

Shihab, Quraish. 2002. *Tafsir Al-Mishbah*, Jakarta: Lentera Hati.

Siswanto, Rudi Agus P. 1997. *Persamaan Diferensial Linear Orde Tinggi*. Malang: Skripsi, Jurusan Pendidikan Matematika IKIP Malang.

Susila, I Nyoman. 1993. *Dasar-dasar Metode Numerik*. Bandung: F. MIPA ITB

Triatmodjo, Bambang. 2002. *Metode Numerik Dilengkapi dengan Program Komputer*. Yogyakarta: Beta Offset.

Bismo, Setijo. *Pemodelan dan Matematika Terapan*
(www.chemeng.ui.ac.id/~bismo/S1/mater/mod-04.pdf diakses pada 5
Oktober 2008)

Lampiran 1. Program Penyelesaian PDL Cauchy-Euler Orde-2 dengan Metode Runge-Kutta Orde 4 Menggunakan Software Matlab

```

clc;clear;format long;
disp('=====')
disp('Program Solusi Numerik Persamaan Diferensial Linear Cauchy-Euler Orde 2')
disp('          Dengan Metode Runge Kutta orde-4          ')
disp('          Inayatul Hasanah          ')
disp('          03510003          ')
disp('=====')

f=inline('z','x','y','z')
g=inline('(x.^2-x*z-4*y)/(x.^2)','x','y','z')

y0=input('nilai awal, y(0)=');
z0=input('nilai awal, z(0)=');

h=input('masukkan jarak interval, h=');

a=input('masukkan batas bawah interval pencarian=');
b=input('masukkan batas atas interval pencarian=');
n=(b-a)/h;
y=zeros(n,1);
y(1)=y0;
z=zeros(n,1);
z(1)=z0;
gal=zeros(n,1);
gal(1)=0;
galrel(1)=0;

x=[a:h:b];

for i = 1:n
    k1=f(x(i),y(i),z(i));
    m1=g(x(i),y(i),z(i));
    k2=f(x(i)+(h/2),y(i)+(h/2)*k1,z(i)+(h/2)*m1);
    m2=g(x(i)+(h/2),y(i)+(h/2)*k1,z(i)+(h/2)*m1);
    k3=f(x(i)+(h/2),y(i)+(h/2)*k2,z(i)+(h/2)*m2);
    m3=g(x(i)+(h/2),y(i)+(h/2)*k2,z(i)+(h/2)*m2);
    k4=f(x(i)+h,y(i)+h*k3,z(i)+h*m3);
    m4=g(x(i)+h,y(i)+h*k3,z(i)+h*m3);

    y(i+1)=y(i)+(h/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4);
    z(i+1)=z(i)+(h/6)*(m1+2*m2+2*m3+m4);
end

```

```

disp('hasil komputasi')
disp('      iterasi      x          y          ya          galat relatif')

for j=1:n
    ya(j)=0.5*sin(2*log(x(j)))+1/8*x(j).^2;
end

ya = [0 ya];

for i = 1:n
    gal(i) = ya(i)-y(i);
end

for i = 2:n
    galrel(i) = gal(i)/ya(i);
end

gal = abs([gal' ya(n+1)-y(n+1)]);
galrel = [galrel gal(n+1)/ya(n+1)];

A=[1:i+1] x' y ya' galrel';

disp('=====')
for i=1:n+1
    fprintf('%8.0f %8.3f %8.8f %8.8f %8.8f \n',A(i,1),A(i,2),A(i,3),A(i,4),A(i,5))
end
disp('=====')

plot(x',y,'-o',x',ya,'-^',x',gal,'-*')
grid on
axis([1 1+n*h min(ya) ceil(max(ya))])
title('Grafik PDL Cauchy-Euler Orde 2')
legend('y numerik','y analitik','galat relatif')
xlabel('x')
ylabel('y')

```

Lampiran 2. Output Program Penyelesaian PDL Cauchy-Euler Orde-2 dengan Metode Runge-Kutta Orde 4 Menggunakan Software Matlab

```
=====
Program Solusi Numerik Persamaan Diferensial Linear Cauchy-Euler Orde 2
Dengan Metode Runge Kutta orde-4
Inayatul Hasanah
03510003
=====

f =

Inline function:
f(x,y,z) = z

g =

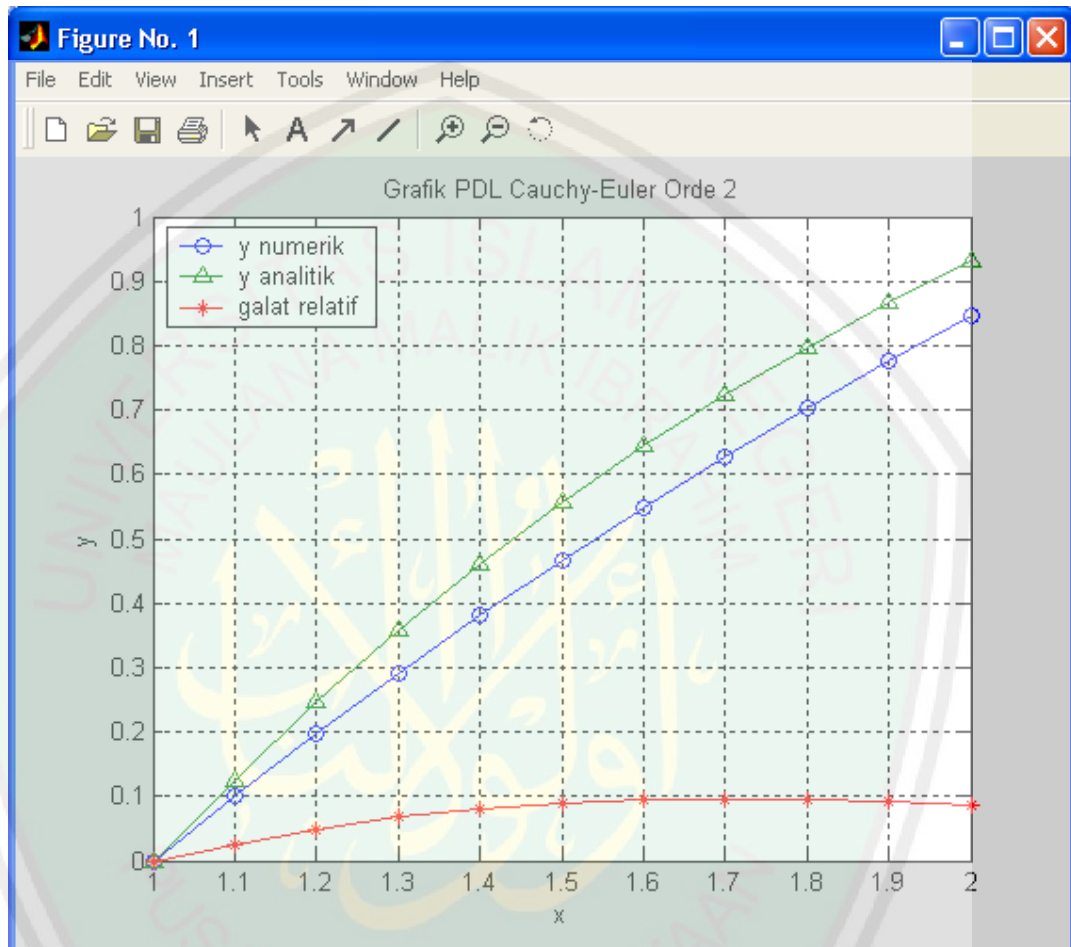
Inline function:
g(x,y,z) = (x.^2-x*z-4*y)/(x.^2)

nilai awal, y(0)=0
nilai awal, z(0)=1
masukkan jarak interval, h=0.1
masukkan batas bawah interval pencarian=1
masukkan batas atas interval pencarian=2
hasil komputasi
```

iterasi	x	y	ya	galat relatif
1	1.000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
2	1.100	0.09956466	0.12500000	0.20348271
3	1.200	0.19694969	0.24598403	0.19933954
4	1.300	0.29093453	0.35830795	0.18803216
5	1.400	0.38098587	0.46173904	0.17488920
6	1.500	0.46699553	0.55664562	0.16105415
7	1.600	0.54911370	0.64371412	0.14696030
8	1.700	0.62764209	0.72378119	0.13282896
9	1.800	0.70296545	0.79773453	0.11879776
10	1.900	0.77550769	0.86645537	0.10496521
11	2.000	0.84570399	0.93078617	0.09140894

```
=====
```

Lampiran 3. Grafik Program Penyelesaian PDL Cauchy-Euler Orde-2 dengan Metode Runge-Kutta Orde 4 Menggunakan Software Matlab



Lampiran 4. Program Penyelesaian PDL Cauchy-Euler Orde-3 dengan Metode Runge-Kutta Orde 4 Menggunakan *Software* Matlab

```
clc;clear;format long;
disp('=====')
disp('Program Solusi Numerik Persamaan Diferensial Linear Cauchy-Euler Orde 3')
disp('          Dengan Metode Runge Kutta orde-4          ')
disp('          Inayatul Hasanah          ')
disp('          03510003          ')
disp('=====')

f=inline('z','x','y','z','w')
g=inline('w','x','y','z','w')
q=inline('(6*x.^3+6*log(x)-x.^2*w+2*x*z-2*y)/x.^3','x','y','z','w')

y0=input('nilai awal, y(0)=');
z0=input('nilai awal, z(0)=');
w0=input('nilai awal, w(0)=');

h=input('masukkan jarak interval, h=');

a=input('masukkan batas bawah interval pencarian=');
b=input('masukkan batas atas interval pencarian=');
n=(b-a)/h;
y=zeros(n,1);
y(1)=y0;
z=zeros(n,1);
z(1)=z0;
w=zeros(n,1);
w(1)=w0;

x=[a:h:b];
```

```

for i = 1:n
    k1=f(x(i),y(i),z(i),w(i));
    m1=g(x(i),y(i),z(i),w(i));
    t1=q(x(i),y(i),z(i),w(i));
    k2=f(x(i)+(h/2),y(i)+(h/2)*k1,z(i)+(h/2)*m1,w(i)+(h/2)*t1);
    m2=g(x(i)+(h/2),y(i)+(h/2)*k1,z(i)+(h/2)*m1,w(i)+(h/2)*t1);
    t2=q(x(i)+(h/2),y(i)+(h/2)*k1,z(i)+(h/2)*m1,w(i)+(h/2)*t1);
    k3=f(x(i)+(h/2),y(i)+(h/2)*k2,z(i)+(h/2)*m2,w(i)+(h/2)*t2);
    m3=g(x(i)+(h/2),y(i)+(h/2)*k2,z(i)+(h/2)*m2,w(i)+(h/2)*t2);
    t3=q(x(i)+(h/2),y(i)+(h/2)*k2,z(i)+(h/2)*m2,w(i)+(h/2)*t2);
    k4=f(x(i)+h,y(i)+h*k3,z(i)+h*m3,w(i)+h*t3);
    m4=g(x(i)+h,y(i)+h*k3,z(i)+h*m3,w(i)+h*t3);
    t4=q(x(i)+h,y(i)+h*k3,z(i)+h*m3,w(i)+h*t3);

    y(i+1)=y(i)+(h/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4);
    z(i+1)=z(i)+(h/6)*(m1+2*m2+2*m3+m4);
    w(i+1)=w(i)+(h/6)*(t1+2*t2+2*t3+t4);
end

for j=1:n+1
    ya(j)=(-13/8)*(x(j))+(47/48)/(x(j))+(44/24)*(x(j).^2)+(7/4)*(x(j).^3)-log(x(j))-(1/2);
end

for i = 1:n
    gal(i) = ya(i)-y(i);
    galrel(i) = (gal(i)/ya(i));
end

gal = abs([gal ya(n+1)-y(n+1)]);
galrel = [galrel (ya(n+1)-y(n+1))/ya(n+1)];

disp('hasil komputasi')
disp('      iterasi      x      y      y analitik      galat relatif')
A=[1:i+1] ' x' y ya' galrel';

disp('-----')
for i=1:n+1
    fprintf('%8.0f      %8.3f      %8.8f      %8.8f      %8.8f \n',A(i,1),A(i,2),A(i,3),A(i,4),A(i,5))
end
disp('-----')

plot(x',y,'-o',x',ya,'-*',x',galrel,'-^')
grid on
axis([1 1+n*h min(ya) ceil(max(ya))])
title('Grafik PDL Cauchy-Euler Orde 3')
legend('y numerik','y analitik','galat relatif')
xlabel('x')
ylabel('y')

```

Lampiran 5. Output Program Penyelesaian PDL Cauchy-Euler Orde-3 dengan Metode Runge-Kutta Orde 4 Menggunakan Software Matlab

```

=====
Program Solusi Numerik Persamaan Diferensial Linear Cauchy-Euler Orde 3
      Dengan Metode Runge Kutta orde-4
      Inayatul Hasanah
      03510003
=====

f =

    Inline function:
    f(x,y,z,w) = z

g =

    Inline function:
    g(x,y,z,w) = w

q =

    Inline function:
    q(x,y,z,w) = (6*x.^3+6*log(x)-x.^2*w+2*x*z-2*y)/x.^3

nilai awal, y(0)=19/16
nilai awal, z(0)=17/16
nilai awal, w(0)=45/8
masukkan jarak interval, h=0.25
masukkan batas bawah interval pencarian=1
masukkan batas atas interval pencarian=3.5
hasil komputasi

    iterasi      x      y      y analitik      galat relatif
=====
    1      1.000      1.18750000      2.43750000      0.51282051
    2      1.250      1.63221742      4.31149187      0.62142630
    3      1.500      2.46274797      7.34106267      0.66452432
    4      1.750      3.73812351      11.64964760      0.67912132
    5      2.000      5.52663289      17.37976949      0.68200770
    6      2.250      7.89948008      24.68284872      0.67996076
    7      2.500      10.92871984      33.71495927      0.67584953
    8      2.750      14.68653996      44.63482428      0.67096230
    9      3.000      19.24501321      57.60277660      0.66590129
   10      3.250      24.67602327      72.78017914      0.66095133
   11      3.500      31.05125645      90.32908227      0.65624298
=====

```

Lampiran 6. Grafik Program Penyelesaian PDL Cauchy-Euler Orde-3 dengan Metode Runge-Kutta Orde 4 Menggunakan Software Matlab

