SPECTRUM MATRIKS DETOUR DARI GRAF KOMPLIT DENGAN *n* TITIK K_n

SKRIPSI

Oleh:

LAILATUL KHUSNAH
NIM. 05510012

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG

2011

SPECTRUM MATRIKS DETOUR DARI GRAF KOMPLIT DENGAN *n* TITIK K_n

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:

LAILATUL KHUSNAH
NIM. 05510012

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2011

SPECTRUM MATRIKS DETOUR DARI GRAF KOMPLIT DENGAN _n_ TITIK K_n

SKRIPSI

Oleh:

LAILATUL KHUSNAH
NIM. 05510012

Telah Disetujui untuk Diuji

Malang, 07 Januari 2011

Dosen Pembimbing I,	Dosen Pembimbing II,
Evawati Alisah, M.Pd	**Abdul Aziz, M.Si**
NIP. 19720604 199903 2 001	**NIP. 19760318 200604 1 002**

Mengetahui,

Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

SPECTRUM MATRIKS DETOUR DARI GRAF KOMPLIT DENGAN *n* TITIK K_n

SKRIPSI

Oleh:
LAILATUL KHUSNAH
NIM. 05510012

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal, 21 Januari 2011

Susunan Dewan Penguji:			Tanda Tangan
1. Penguji Utama	: Abdussakir, M.Pd NIP. 19751006 200312 1 001	(	)
2. Ketua	: Hairur Rahman, S.Pd, M.Si NIP. 19710420 200003 1 003	(	)
3. Sekretaris	: Evawati Alisah, M.Pd NIP. 19720604 199903 2 001	(	)
4. Anggota	: Abdul Aziz, M.Si NIP. 19760318 200604 1 002	(	)

Mengetahui dan Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : LAILATUL KHUSNAH

NIM : 05510012

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan hasil tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri.

Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 11 Januari 2011

Yang Membuat Pernyataan

Lailatul Khusnah

NIM. 05510012

MOTTO

إِنَّ ٱللَّهَ لَا يُغَيِّرُ مَا بِقَوْمٍ حَتَّىٰ يُغَيِّرُوا۟ مَا بِأَنفُسِهِمْ ۗ

"...Sesungguhnya Allah tidak akan mengubah nikmat yang ada pada suatu kaum (kecuali) bila mereka sendiri mengubah keadaannya..."(QS. Ar-Ra'd:11)

PERSEMBAHAN

Penulis persembahkan karya tulis ini untuk:

Keluarga tercinta, khususnya Ibu dan Bapak yang selalu memberikan dorongan moral, spiritual, finansial dan tak henti-hentinya mencurahkan kasih sayangnya.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr.Wb.

Puji syukur ke hadirat Allah SWT, karena atas taufik dan hidayah-Nya penulisan skripsi yang berjudul " *Spectrum* Matriks Detour dari Graf Komplit dengan n Titik K_n " dapat diselesaikan. Sholawat serta salam semoga tetap tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW yang telah mengantarkan umat manusia dari zaman kebodohan menuju zaman yang terang benderang, yaitu agama Islam.

Dalam penyusunan skripsi ini, penulis tidak dapat menyelesaikan sendiri tanpa bantuan dari berbagai pihak, untuk itu penulis mengucapkan rasa hormat dan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Prof. Dr. Imam Suprayogo, selaku Rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU., D.Sc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Evawati Alisah, M.Pd, selaku dosen pembimbing yang senantiasa sabar memberi arahan dan bimbingan dalam penyusunan skripsi ini.

5. Abdul Aziz, M.Si, selaku dosen pembimbing agama yang telah membimbing dan memberikan penjelasan dalam penyusunan skripsi ini.
6. Seluruh dosen dan staf Fakultas Sains dan Teknologi yang telah memberikan ilmunya selama ini dan memberi motivasi agar penulis dapat menyelesaikan studi dengan baik.
7. Bapak dan Ibu tercinta dan seluruh keluarga, yang selalu memberikan semangat dan motivasi baik moril maupun spirituil dalam mendidik dan membimbing penulis hingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
8. Adik-adik yang telah memberi semangat dan motivasi dalam proses penyusunan skripsi ini.
9. Teman-teman Mahasiswa Jurusan Matematika angkatan 2005 Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah banyak memberikan dukungan dalam penelitian dan penyusunan skripsi ini.
10. Semua pihak yang telah membantu penulis, yang tidak dapat disebutkan satu persatu.

Penulis berdo'a semoga bantuan yang telah diberikan dicatat sebagai amal baik oleh Allah SWT dan mendapatkan balasan yang setimpal. Penulis berharap, semoga skripsi ini bermanfaat. Amin.

Malang, 11 Januari 2011

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Khusnah, Lailatul. 2011. ***Spectrum* Matriks *Detour* dari Graf Komplit dengan *n* Titik (K_n).** Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: (I) Evawati Alisah, M.Pd
(II) Abdul Aziz, M.Si

Kata Kunci: graf komplit, matriks detour, nilai eigen, vektor eigen, dan *spectrum*

Salah satu pengembangan permasalahan aplikasi dalam topik graf adalah menentukan *spectrum* suatu graf. *Spectrum* graf *G* adalah himpunan dari bilangan-bilangan yang mana elemennya terdiri dari nilai-nilai eigen dan dimensi ruang vektor eigen dari matriks *adjacency* graf *G*. Jika nilai-nilai eigen dari matriks *adjacency* graf *G* adalah $\lambda_0 > \lambda_1 > ... > \lambda_{s-1}$, dan dimensi ruang vektor eigennya adalah $m(\lambda_0), m(\lambda_1), ..., m(\lambda_{s-1})$, *spectrum* dapat ditulis

$$specG = \begin{bmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_{s-1} \\ m(\lambda_0) & m(\lambda_1) & \cdots & m(\lambda_{s-1}) \end{bmatrix}$$

Matriks detour adalah salah satu permasalahan yang dibahas dalam teori graf. Matriks detour pada graf komplit adalah susunan segi empat siku-siku yang elemen-elemennya merupakan lintasan terpanjang antara titik *i* ke titik *j*. Nilai eigen matriks detour dari graf terhubung *G* adalah nilai eigen dari matriks detour, dan merupakan bentuk *spectrum* matriks detour dari G.

Berdasarkan hasil pembahasan dapat diperoleh langkah-langkah operasional menentukan *spectrum* matriks detour yaitu: (1) menentukan matriks detour pada graf komplit dengan *n* titik K_n ; (2) mencari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks detour dari graf komplit dengan *n* titik K_n ; (3) mencari pola *spectrum* matriks detour dari graf komplit dengan *n* titik K_n ; dan (4) bentuk umum *spectrum* matriks detour graf komplit dengan *n* titik K_n adalah

$$spec_{DD}(K_n) = \begin{bmatrix} (n-1)^2 & -(n-1) \\ 1 & n-1 \end{bmatrix}$$

Pada skripsi ini, penulis hanya memfokuskan pada graf komplit, untuk penulis skripsi selanjutnya disarankan menggunakan sembarang graf. Penulis masih menggunakan cara manual, maka untuk penulis skripsi selanjutnya disarankan untuk menggunakan program.

ABSTRACT

Khusnah, Lailatul. 2011. ***The Spectrum of Detour Matrix from The Complete Graph with n Point (Kn)***. Thesis, Mathematics Department, Faculty of Science and Technology, The State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim of Malang.
Advisors : (1) Evawati Alisah, M.Pd
(2) Abdul Aziz, M.Si

Key words: Complete Graph, Detour Matrix, Eigenvalue, Eigenvector, and Spectrum.

One of development of the application problems in graph topic are to determine spectrum of a graph. The spectrum of a graph *G* is the set of numbers which the elements consist of eigenvalues and space dimension of eigenvector from adjacency matrix of graph *G*. If the eigenvalues from the adjacency matrix of graph *G* are $\lambda_0 > \lambda_1 > \ldots > \lambda_{s-1}$, and the space dimension of the eigenvector is $m(\lambda_0)$, $m(\lambda_1)$,...., $m(\lambda_{s-1})$, the spectrum can be written as follows:

$$specG = \begin{bmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & .... & \lambda_{s-1} \\ m(\lambda_0) & m(\lambda_1) & .... & m(\lambda_{s-1}) \end{bmatrix}$$

Detour matrix is one of problems that is discussed within graph theory. Detour matrix on the complete graph is the formation of a right angle quadrangle which the elements are the longest path between *i* point to *j* point. The eigenvalue of detour matrix from the graph which is connected by *G* is eigenvalue from detour matrix, and the spectrum form of detour matrix from *G*.

Based on the discussion above, it can be obtained the operational steps to determine the spectrum of detour matrix as follows: (1) to determine detour matrix on the complete graph with *n* point (K_n); (2) to look for the eigenvalue and eigenvector from matrix detour from complete graph with *n* point (K_n); (3) to look for the spectrum pattern from the complete graph with *n* point (K_n); and (4) the spectrum common form of detour matrix of the complete graph with *n* point (K_n) is

$$spec(DD(K_n)) = \begin{bmatrix} (n-1)^2 & -(n-1) \\ 1 & (n-1) \end{bmatrix}$$

Based on the findings mentioned above, the researcher focuses on the complete graph and suggests to the next researcher to apply any graph. The researcher does manually, therefore she also suggests to the next researcher to apply the computer program.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan penelaahan tentang bilangan-bilangan, bentuk-bentuk dan lambang-lambang. Berkaitan dengan definisi tersebut, matematika seringkali dibagi menjadi tiga cabang, yaitu aljabar, analisis dan geometri. Aljabar membahas tentang bilangan dan pengabstrakannya, analisis membahas kekonvergenan dan limit, sedangkan geometri membahas tentang bentuk dan konsep-konsep yang berkaitan. Dalam perkembangan selanjutnya, cabang matematika menjadi semakin banyak dan salah satunya adalah teori graf. Teori graf berkembang sangat pesat, bahkan dalam perkembangannya dapat disejajarkan dengan aljabar yang lebih dahulu berkembang (Hasanah, 2008:1).

Menurut catatan sejarah, teori graf pertama kali digunakan oleh seorang ahli matematika dari Swiss yang bernama Euler untuk merepresentasikan Jembatan Konigsberg, dan menyelesaikan permasalahan jembatan tersebut. Konigsberg adalah sebuah kota di sebelah timur Prussia (Jerman) dimana terdapat sungai Pregel dan merupakan tempat tinggal Duke of Prussia pada abad ke-16 (tahun 1736). Kota tersebut saat ini bernama Kaliningrad, dan merupakan pusat ekonomi dan industri utama di Russia Barat. Sungai Pregel membagi kota menjadi 4 daratan dengan mengalir mengitari pulau Kneiphof lalu bercabang menjadi dua anak sungai. Pada abad ke-18 dibangunlah tujuh jembatan yang menghubungkan keempat daratan tersebut. Pada hari Minggu, masyarakat Konigsberg biasanya berjalan-jalan dari daratan satu ke daratan lainnya melalui jembatan tersebut. Mereka berpikir apakah mungkin untuk berjalan menyeberangi ketujuh jembatan tanpa melalui jembatan yang sama dari suatu daratan dan kembali ke tempat semula. Masalah ini pertama kali dipecahkan oleh Leonhard Euler. Solusi Euler merepresentasikan masalah ini ke dalam graf dengan keempat daratan sebagai titik (*vertex*) dan ketujuh jembatan sebagai sisi (*edge*) (Wirawan, 2008:1).

Dengan graf tersebut, Euler berhasil menemukan jawaban kenapa orang-orang tidak dapat melalui ketujuh jembatan tersebut masing-msing sekali dan kembali ke tempat semula. Jawaban yang ditemukan Euler adalah karena tidak semua titik pada graf tersebut berderajat genap (Wirawan, 2008:2).

Teori graf yang merupakan salah satu cabang dari matematika tersebut menurut definisinya adalah himpunan tidak kosong yang memuat elemen-elemen yang disebut titik, dan suatu daftar pasangan tidak terurut elemen itu yang disebut sisi. Dalam Islam elemen-elemen yang dimaksud meliputi Pencipta (Allah) dan hamba-hambaNya, sedangkan sisi atau garis yang menghubungkan elemen-elemen tersebut adalah bagaimana hubungan antara Allah dengan hambaNya dan juga hubungan sesama hamba yang terjalin. Sehingga dengan demikian, hal ini menunjukkan adanya suatu hubungan atau keterkaitan antara titik yang satu dengan titik yang lain (Rahman,1992).

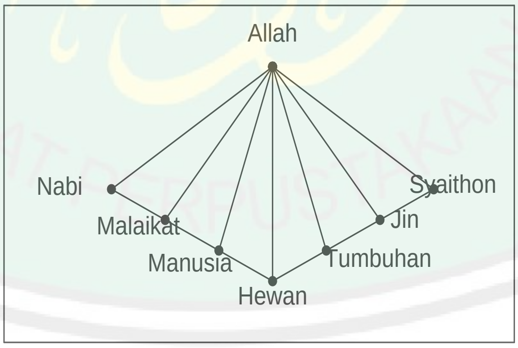
Hubungan atau keterkaitan antara titik yang satu dengan titik yang lain dikuatkan oleh firman Allah dalam al-Qur’an surat al-Hujurat ayat 10 yaitu:

إِنَّمَا ٱلۡمُؤۡمِنُونَ إِخۡوَةٞ فَأَصۡلِحُواْ بَيۡنَ أَخَوَيۡكُمۡۚ وَٱتَّقُواْ ٱللَّهَ
لَعَلَّكُمۡ تُرۡحَمُونَ ١٠

Artinya:

> *”Orang-orang beriman itu sesungguhnya bersaudara, sebab itu damaikanlah (perbaikilah hubungan) antara kedua saudaramu itu dan takutlah terhadap Allah, supaya kamu mendapat rahmat”* (Q.S.Al-Hujurat:10).

Hal ini menunjukkan adanya suatu hubungan atau keterkaitan antara titik yang satu dengan titik yang lain. Jika dikaitkan dengan kehidupan nyata, maka banyaknya titik yang terhubung dalam suatu graf dapat diasumsikan sebagai Allah dan hamba-hambaNya dan sisi merupakan hubungan antara Pencipta dan hamba-hambaNya.



Gambar 1.1 Hubungan timbal balik antara Allah dengan hambaNya

Penelitian aljabar dalam teori graf merupakan topik dari matematika yang mengkaji graf melalui sifat-sifat aljabar representasi matriksnya. Lebih spesifik lagi, teori spektra graf membahas sifat-sifat graf yang berhubungan dengan polinomial karakteristik, nilai eigen, dan vektor eigen.

Misal G adalah graf terhubung dengan himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$. Biasanya *spectrum* graf dibentuk oleh nilai eigen dari matriks terhubung langsung. Pada pengertian kita biasanya menotasikan nilai eigen dari graf G dengan λ_i, i = 1, 2, …, n dan *spectrum* ditulis dengan $spec(G)$. Matriks detour didefinisikan $DD=DD(G)$ dari G sehingga unsur/entry (i,j) adalah panjang lintasan terpanjang antara titik i dan j. Nilai eigen dari $DD(G)$ disebut DD-nilai eigen dari G dan membentuk DD-*spectrum* dari G, dinotasikan dengan $spec_{DD}(G)$. Selama matriks detour simetris, semua nilai eigen μ_i, i = 1, 2, …, n adalah real dan dapat diberi label $\mu_1 \geq \mu_2 \geq ... \geq \mu_n$. Jika $\mu_{i_1} \geq \mu_{i_2} \geq ... \geq \mu_{i_g}$ adalah nilai eigen dari matriks detour, maka DD-*spectrum* dapat ditulis sebagai

$$spec_{DD}(G) = \begin{bmatrix} \mu_{i_1} & \mu_{i_2} & \cdots & \mu_{i_g} \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_g \end{bmatrix}$$

(Ayyaswamy dan Balachandran, 2010:28).

Dalam teori graf, bahasan mengenai *spectrum* matriks detour dari suatu graf merupakan bahasan yang masih jarang. Graf komplit (K_n) akan diketahui *spectrum* matriks detournya dengan cara merepresentasikan graf tersebut dalam matriks, kemudian setelah didapatkan matriksnya akan ditentukan nilai eigen dari matriks tersebut dan nilai eigen juga berfungsi untuk menentukan vektor eigen dari matriks tersebut. Hubungan nilai eigen dan dimensi ruang vektor eigen kemudian direpresentasikan dalam bentuk matriks yang disebut dengan *spectrum* matriks detour dari graf komplit (K_n).

Oleh sebab itu, dalam penelitian ini penulis tertarik untuk meneliti mengenai *spectrum* matriks detour graf komplit (K_n) yang dikemas dalam judul penelitian : ***"Spectrum Matriks Detour dari Graf Komplit dengan n titik (K_n)".***

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, maka rumusan masalah dalam penulisan skripsi ini adalah:

1. Bagaimanakah langkah-langkah operasional menentukan *spectrum* matriks detour dari graf komplit dengan *n* titik (K_n)?
2. Bagaimana hasil atau bentuk umum *spectrum* matriks detour dari graf komplit dengan *n* titk (K_n)?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan penulisan skripsi ini adalah:

1. untuk menentukan langkah-langkah operasional menentukan *spectrum* matriks detour dari graf komplit dengan *n* titik (K_n).
2. untuk menentukan hasil atau bentuk umum *spectrum* matriks detour dari graf komplit dengan *n* titik (K_n).

1.4 Batasan Masalah

Pada skripsi ini, dibatasi pada graf komplit dengan *n* titik, untuk $n \geq 2$ dan *n* bilangan asli.

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penulisan skripsi ini adalah:

1. Bagi peneliti, sebagai tambahan informasi dan wawasan pengetahuan mengenai *spectrum* matriks detour dari graf komplit dengan *n* titik (K_n).
2. Bagi pemerhati matematika, sebagai tambahan pengetahuan bidang matematika, khususnya Teori Graf mengenai *spectrum* matriks detour dari graf komplit dengan *n* titik (K_n).
3. Bagi lembaga UIN Maulana Malik Ibrahim Malang, untuk bahan kepustakaan yang dijadikan sarana pengembangan wawasan keilmuan khususnya di Jurusan Matematika untuk mata kuliah Teori Graf.

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam skripsi ini adalah metode penelitian pustaka (*Library Research*), yaitu dengan literatur utama *On Detour Spectra of Some Graphs (Ayyaswamy and Balachandran)* dan buku yang mendukung, serta mengumpulkan data dan informasi dari berbagai sumber seperti jurnal atau makalah-makalah. Penelitian dilakukan dengan melakukan kajian terhadap buku-buku teori graf dan jurnal-jurnal atau makalah-makalah yang memuat topik tentang *spectrum* graf. Langkah selanjutnya adalah menentukan *spectrum* matriks detour dari beberapa contoh graf komplit dengan *n* titik (K_n).

Adapun langkah-langkah yang digunakan oleh peneliti dalam membahas penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. menggambar graf komplit dengan *n* titik (K_n)
2. menentukan matriks detour pada graf komplit dengan *n* titik (K_n)
3. mencari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks detour dari graf komplit dengan *n* titik (K_n)
4. melihat pola *spectrum* matriks detour dari graf komplit dengan *n* titik (K_n)
5. merumuskan pola.
6. membuktikan teorema.

1.7 Sistematika Penulisan

Untuk mempermudah dalam memahami skripsi ini secara keseluruhan maka penulis menggunakan sistematika penulisan yang terdiri dari 4 bab dan masing-masing akan dijelaskan sebagai berikut :

BAB I. PENDAHULUAN

Dalam bab ini dijelaskan latar belakang masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II. KAJIAN PUSTAKA

Bagian ini terdiri atas konsep-konsep (teori-teori) yang mendukung bagian pembahasan. Konsep-konsep tersebut antara lain membahas tentang pengertian graf, *adjacent* dan *incident*, graf komplit, derajat titik, matriks, matriks detour, *spectrum* graf, operasi matriks, determinan, nilai eigen dan vektor eigen dan representasi graf dalam Islam.

BAB III. PEMBAHASAN

Dalam bab ini dipaparkan langkah-langkah operasionalisasi *spectrum* matriks detour dan hasil *spectrum* matriks detour dari graf komplit dengan n titik (K_n).

BAB IV. PENUTUP

Dalam bab ini dikemukakan kesimpulan akhir penelitian dan beberapa saran.

BAB II

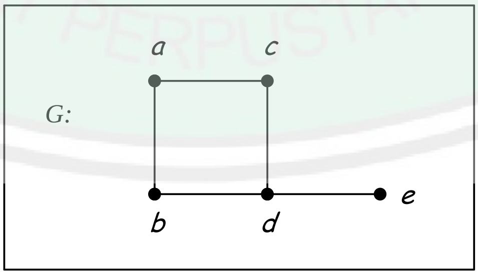
KAJIAN TEORI

2.1. Graf

2.1.1 Definisi Graf

Graf G adalah pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari obyek-obyek yang disebut sebagai titik dan E adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di V yang disebut sebagai sisi. Himpunan titik di G dinotasikan dengan $V(G)$ dan himpunan sisi dinotasikan dengan $E(G)$. Sedangkan banyaknya unsur di $V(G)$ disebut order dari G dan dilambangkan dengan $p(G)$ dan banyaknya unsur di $E(G)$ disebut ukuran dari G dan dilambangkan dengan $q(G)$. Jika graf yang dibicarakan hanya graf G, maka order dan ukuran dari G tersebut cukup ditulis dengan p dan q (Chartrand dan Lesniak, 1986:4).

Contoh:



Gambar 2.1 Graf G

Dari Gambar 2.1 graf G mempunyai 5 titik sehingga order G adalah $p = 5$. Graf G mempunyai 5 sisi sehingga ukuran graf G adalah $q = 5$ dengan

$V(G) = \{a, b, c, d, e\}$

$E(G) = \{(a,b), (a,c), (b,d), (c,d), (d,e)\}$.

Graf G dapat juga ditulis dengan

$V(G) = \{a, b, c, d, e\}$

$E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$

untuk

$e_1 = (a, b)$

$e_2 = (a, c)$

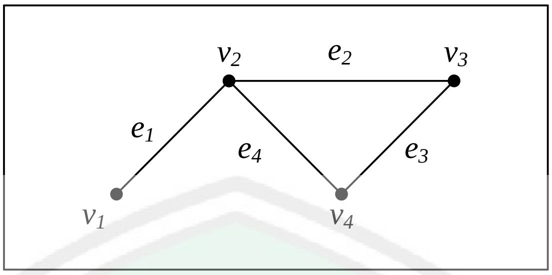
$e_3 = (b, d)$

$e_4 = (c, d)$

$e_5 = (d, e)$

2.1.2 Terhubung Langsung (*Adjacent*) dan Terkait Langsung (*Incident*)

Chartrand dan Lesniak (1986:4) menyatakan sisi $e = (u, v)$ menghubungkan titik u dan v, jika $e = (u, v)$ adalah sisi graf G, maka u dan v disebut terhubung langsung (*adjacent*). Jika sisi $e = (u, v)$ menghubungkan titik u dan v , maka u dan e serta v dan e disebut terkait lansung (*incident*) (Chartrand dan Lesniak, 1986:4). Pada Gambar 2.2 titik v_3 *adjacent* dengan titik v_2 dan v_4, tetapi tidak *adjacent* dengan titik v_1. Sisi e_4 *incident* dengan titik v_4 dan v_2, tetapi tidak *incident* dengan titik v_1.

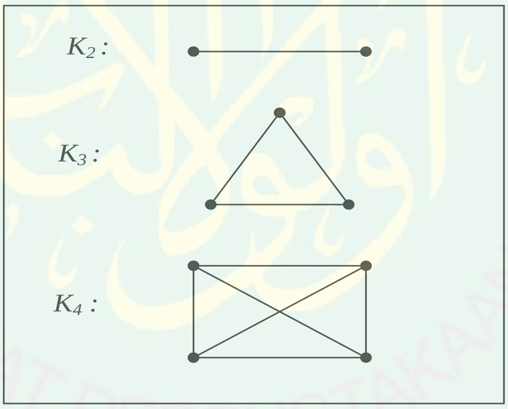


Gambar 2.2 Graf untuk Mengilustrasikan *Adjacent* dan *Incident*

2.1.3 Graf Komplit

Graf komplit (*Complete Graph*) adalah graf dengan dua titik yang berbeda saling *adjacent*. Graf komplit dengan n titik dinyatakan dengan K_n (Chartrand dan Lesniak, 1986:9).

Contoh:



Gambar 2.3 Graf Komplit

Gambar 2.3 K_2, K_3, K_4 adalah graf komplit karena tiap titik dalam graf tersebut selalu *adjecent* dengan semua titik yang lain.

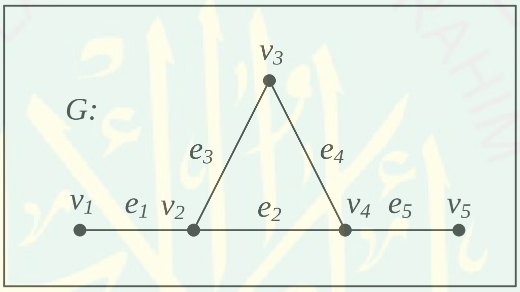
2.1.4 Derajat Titik

Derajat titik v pada graf G adalah banyaknya sisi dari graf G yang *incident* dengan v. Derajat titik v pada graf G dinotasikan dengan $\deg_G(v)$ atau secara sederhana dapat juga dinotasikan dengan $\deg(v)$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:7).

Titik yang berderajat genap sering disebut titik genap (*even vertices*) dan titik yang berderajat ganjil disebut titik ganjil (*odd vertices*). Titik yang berderajat nol disebut *isolated vertices* dan titik yang berderajat satu disebut titik ujung (*end vertices*) (Chartrand dan Lesniak, 1986:7).

Contoh:

Perhatikan graf G berikut yang mempunyai himpunan titik $V(G)=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$ dan himpunan sisi $E(G)=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5\}$



Gambar 2.4 Graf untuk Mengilustrasikan Derajat Titik

Berdasarkan Gambar 2.4, diperoleh bahwa:

$\deg(v_1)=1$

$\deg(v_2)=3$

$\deg(v_3)=2$

$\deg(v_4)=3$

$\deg(v_5)=1$

Titik v_2 dan v_4 adalah titik ganjil, titik v_3 adalah titik genap, titik v_1 dan v_3 adalah titik ujung. Hubungan antara jumlah derajat semua titik dalam suatu graf G dengan banyak sisi, yaitu q, adalah

$$\sum_{v\in G}\deg(v) = 2q.$$

Hal ini dinyatakan dalam teorema berikut:

Teorema 1

Jika G graf dengan $V(G)=\{v_1,v_2,\ldots,v_P\}$ maka $\sum_{i=1}^{p}\deg(v_i)=2q$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:7).

Bukti:

Setiap menghitung derajat suatu titik di G, maka suatu sisi dihitung 1 kali. Karena setiap sisi menghubungkan dua titik berbeda maka ketika menghitung derajat semua titik, sisi akan terhitung dua kali. Dengan demikian diperoleh bahwa jumlah semua derajat titik di G sama dengan 2 kali jumlah sisi di G.

Akibat 1.

Pada sebarang graf, jumlah derajat titik ganjil adalah genap.

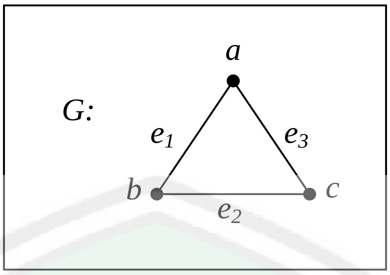
Bukti:

Misalkan graf G dengan size q, dan misalkan W himpunan yang memuat titik ganjil pada G serta U himpunan yang memuat titik genap di G. Dari teorema 1 maka diperoleh:

$$\sum_{v\in v(\mathrm{G})}\deg(v)=\sum_{v\in \mathrm{W}}\deg(v)+\sum_{v\in \mathrm{U}}\deg(v)=2q$$

Dengan demikian karena $\sum_{v\in U}\deg(v)$ genap, maka $\sum_{v\in W}\deg(v)$ juga genap.

Graf G berikut mempunyai himpunan titik $V(G)=\{a,b,c\}$ dan himpunan sisi $E(G)=\{e_1,e_2,e_3\}$.



Gambar 2.5 Graf Derajat Titik

Berdasarkan gambar diperoleh derajat titiknya sebagai berikut:

$\deg(a) = 2$

$\deg(b) = 2$

$\deg(c) = 2$

Derajat titik *a* ada 2 yaitu sisi e_1 dan e_3, derajat titik *b* ada 2 yaitu e_1 dan e_2. sisi e_1 dilalui dua kali yaitu oleh titik *a* dan *b*.

2.2 Matriks

2.2.1 Definisi matriks

Matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan entri dalam matriks. Ukuran matriks dijelaskan dengan menyatakan banyaknya baris (garis horisontal) dan banyaknya kolom (garis vertikal) yang terdapat dalam matriks tersebut.

Contoh:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & \pi & e \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix}$$

Matriks pertama pada contoh di atas mempunyai 3 baris dan 2 kolom sehingga ukurannya adalah 3 kali 2 (yang ditulis 3×2). Angka pertama selalu menunjukkan banyaknya baris dan angka kedua menunjukkan banyaknya kolom. Jadi, matriks selebihnya dalam contoh di atas berturut-turut mempunyai ukuran 1×3, 3×3, 2×1, dan 1×1 (Anton, 1997:22).

2.2.2 Operasi Matriks

Jika A dan B adalah sebarang dua matriks yang ukurannya sama, maka jumlah $A+B$ adalah matriks yang diperoleh dengan menambahkan bersama-sama entri yang bersesuaian dalam kedua matriks tersebut. Matriks-matriks yang ukurannya berbeda tidak bisa ditambahkan (Anton, 1997:23).

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 7 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

Maka $A+B$ adalah:

$$A+B = \begin{bmatrix} 2+(-4) & 1+3 & 0+5 \\ -1+2 & 0+2 & 2+0 \\ 4+3 & -2+2 & 7+(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \\ 7 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A-B = \begin{bmatrix} 2-(-4) & 1-3 & 0-5 \\ -1-2 & 0-2 & 2-0 \\ 4-3 & -2-2 & 7-(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -5 \\ -3 & -2 & 2 \\ 1 & -4 & 11 \end{bmatrix}$$

Jika A adalah suatu matriks dan c adalah suatu skalar, maka hasil kali (*product*) cA adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan masing-masing entri dari A oleh c (Anton, 1997:24).

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Maka 2*A* adalah:

$$2A = 2\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times 4 & 2\times 2 \\ 2\times 1 & 2\times 3 \\ 2\times -1 & 2\times 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 6 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Jika *A* adalah matriks $m\times r$ dan *B* adalah matriks $r\times n$, maka hasil kali *AB* adalah matriks $m\times n$ yang entri-entrinya ditentukan sebagai berikut. Untuk mencari entri dalam baris *i* dan kolom *j* dari *AB*, pilih baris *i* dari matriks *A* dan kolom *j* dari matriks *B*, kalikan entri-entri yang bersesuaian dari baris dan kolom tersebut bersama-sama dan kemudian tambahkanlah hasil kali yang dihasilkan (Anton, 1997:25).

Sifat-Sifat Operasi Matriks:

1. $A+B=B+A$
2. $A+(B+C)=(A+B)+C$
3. $k(A+B)=kA+kB$
4. $A(B+C)=AB+AC$
5. $A(BC)=(AB)C$

Misalkan $A=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 6 & -6 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ -2 & 10 \end{bmatrix}$$

Sehingga $AB \neq BA$ (Gazali, 2005:15).

2.2.3 Determinan

Jika A adalah suatu matriks $n \times n$, maka anakmatriks (*submatriks*) berukuran $(n-1)\times(n-1)$ yang diperoleh dari A dengan menghapus baris ke-*i* dan kolom ke-*j* dinamakan MINOR UNSUR (*i*,*j*) dari matriks A dan dilambangkan dengan $M_{i,j}$ atau $M_{i,j}(A)$.

jika

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix},$$

maka

$$M_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix},$$

sedangkan

$$M_{34} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix},$$

dan

$$M_{22}\left(M_{11}(A)\right) = \begin{bmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Definisi: Jika matriks A berukuran $n \times n$, determinan matriks A didefinisikan sebagai

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(-1)^{1+j}\det(M_{1j}) \tag{2.1}$$

dan

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{2.2}$$

Jika definisi di atas diterapkan ke matriks A yang berukuran 3×3, maka akan diperoleh, denga menggunakan persamaan 2.1,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1}\det(M_{11}) + a_{12}(-1)^{1+2}\det(M_{12}) + a_{13}(-1)^{1+3}\det(M_{13})$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

dan selanjutnya dari persamaan 2.2 diperoleh rumus

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned} \tag{2.3}$$

yang terdiri dari enam suku (Charles G. Cullen, 1993:106-107).

Contoh:

$$B = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(B) = \begin{vmatrix} -3 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det(B) = -3\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= -3\left(1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}\right) + 2\left(2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}\right) + 0 - 2\left(2\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right)$$

$$= -3\left((1+6) - 0 - 0(0-1)\right) + 2\left(2(1+6) - 0 - 3 - 2\right) + 0 - 2\left(2(0-1) - 3 - 2 + 0\right)$$

= - 24 + 38 – 6 = 8 (Charles G. Cullen, 1993:106-107).

2.2.4 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Definisi. Jika A adalah matriks $n \times n$, maka vektor taknol x di dalam R^n dinamakan ***vektor eigen (eigenvector)*** dari A jika Ax adalah kelipatan skalar dari x; yakni,

$$Ax = \lambda x$$

untuk suatu skalar λ. Skalar λ dinamakan ***nilai eigen (eigenvalue)*** dari A dan x dikatakan ***vektor eigen yang bersesuaian*** dengan λ.

Untuk mencari nilai eigen matriks A yang berukuran $n \times n$ maka dituliskan kembali $Ax = \lambda x$ sebagai

$$Ax = \lambda I x$$

atau secara ekuivalen

$$(\lambda I - A)x = 0.$$

Supaya λ menjadi nilai eigen, maka harus ada selesaian taknol dari persamaan ini. Akan tetapi persamaan di atas akan mempunyai selesaian taknol jika dan hanya jika $\det(\lambda I - A) = 0$.

Persamaan di atas dinamakan persamaan karakteristik *A* dan skalar yang memenuhi persamaan ini adalah nilai eigen dari *A* (Anton, 1997:277-278).

2.3 Matriks Detour dari Graf

2.3.1 Definisi Matriks Detour

Matriks detour adalah salah satu permasalahan yang dibahas dalam teori graf. Matriks detour pada graf komplit adalah susunan segi empat siku-siku yang elemen-elemennya merupakan lintasan terpanjang antara titik *i* ke titik *j*. Nilai eigen matriks detour dari graf terhubung *G* adalah nilai eigen dari matriks detour, dan merupakan bentuk *spectrum* matriks detour dari *G* (Ayyaswamy dan Balachandran, 2010:28).

2.3.2 *Spectrum* Matriks Detour

Misal *G* adalah graf terhubung dengan himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$. Biasanya *spectrum* graf dibentuk oleh nilai eigen dari matriks terhubung langsung. Pada pengertian kita biasanya menotasikan nilai eigen dari graf *G* dengan λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ dan *spectrum* ditulis dengan *spec(G)*. Matriks detour didefinisikan *DD=DD(G)* dari *G* sehingga unsur/entry (*i,j*) adalah panjang lintasan terpanjang antara titik *i* dan *j*. Nilai eigen dari *DD(G)* disebut *DD*-nilai eigen dari *G* dan membentuk *DD-spectrum* dari *G*, dinotasikan dengan $spec_{DD}(G)$. Selama matriks detour simetris, semua nilai eigen μ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$

adalah real dan dapat diberi label $\mu_1 \geq \mu_2 \geq ... \geq \mu_n$. Jika $\mu_{i_1} \geq \mu_{i_2} \geq ... \geq \mu_{i_g}$ adalah nilai eigen dari matriks detour, maka *DD-spectrum* dapat ditulis sebagai

$$spec_{DD}(G) = \begin{bmatrix} \mu_{i_1} & \mu_{i_2} & \cdots & \mu_{i_g} \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_g \end{bmatrix}$$

(Ayyaswamy dan Balachandran, 2010:28).

2.4 Kajian Agama Tentang Graf

Dalam Islam, definisi graf komplit dapat direpresentasikan untuk menggambarkan hubungan antara ibadah shalat yang menjadi kewajiban bagi umat Islam. Shalat mempunyai kedudukan yang amat penting dalam Islam dan merupakan pondasi yang kokoh bagi tegaknya agama Islam. Ibadah shalat dalam Islam sangat penting, sehingga shalat harus dilakukan pada waktunya, dimanapun, dan bagaimanapun keadaan seorang muslim yang mukalaf. Shalat wajib disebut juga shalat *maktubah* atau shalat *mafrudhah*, mulai diperlakukan pada malam Isra' tahun 621 M. Shalat wajib dilaksanakan lima kali sehari semalam, yaitu pada waktu: *Dzuhur, Ashar, Magrib, Isya', dan Shubuh*. Shalat wajib yang mula-mula dilakukan Rasulullah SAW adalah shalat Dzuhur pada esoknya malam Isra' tersebut (Depag RI, 1988:833).

Allah berfirman dalam Al-Qur'an surat An- Nisaa' ayat 103:

فَإِذَا قَضَيْتُمُ ٱلصَّلَوٰةَ فَٱذْكُرُوا۟ ٱللَّهَ قِيَـٰمًا وَقُعُودًا وَعَلَىٰ جُنُوبِكُمْ ۚ فَإِذَا ٱطْمَأْنَنتُمْ فَأَقِيمُوا۟ ٱلصَّلَوٰةَ ۚ إِنَّ ٱلصَّلَوٰةَ كَانَتْ عَلَى ٱلْمُؤْمِنِينَ كِتَـٰبًا مَّوْقُوتًا ﴿١٠٣﴾

Artinya:

"Maka apabila kamu telah menyelesaikan shalat(mu), ingatlah Allah di waktu duduk dan di waktu berbaring. Kemudian apabila kamu telah merasa aman, maka dirikanlah shalat itu (sebagaimana biasa). Sesungguhnya shalat itu adalah kewajiban yang ditentukan waktunya atas orang-orang yang beriman".

Perintah shalat lima waktu bagi umat muslim diterima oleh Rasulullah langsung dari Allah di malam Mi'raj. Pada ayat di atas terdapat kata "*kitaaban maukuutan*" yang berarti "*kewajiban yang telah ditentukan waktunya*" bermakna bahwa kewajiban shalat mempunyai waktu tertentu untuk dilaksanakan tidak mendahului dan juga tidak mengakhirkannya (Al-Jaziri, 2007:480).

Allah berfirman dalam Al-Qur'an surat Al- Israa' ayat 78:

أَقِمِ ٱلصَّلَوٰةَ لِدُلُوكِ ٱلشَّمْسِ إِلَىٰ غَسَقِ ٱلَّيْلِ وَقُرْءَانَ ٱلْفَجْرِ ۖ إِنَّ قُرْءَانَ ٱلْفَجْرِ كَانَ مَشْهُودًا ﴿٧٨﴾

Artinya:

"Dirikanlah shalat dari sesudah matahari tergelincir sampai gelap malam dan (dirikanlah pula shalat) subuh[865]. Sesungguhnya shalat subuh itu disaksikan (oleh malaikat)".

Dalam ayat tersebut dijelaskan bahwa waktu-waktu shalat telah ditentukan waktunya dan telah menjadi suatu ketetapan, baik itu shalat fardhu maupun shalat sunnah. Shalat lima waktu yang diwajibkan dalam sehari (isya', subuh, dhuhur, ashar dan maghrib) merupakan shalat yang wajib ditunaikan dan tidak boleh ditinggalkan. Waktu pelaksanaan antara satu waktu shalat fardhu berbeda dengan empat waktu shalat yang lain dan telah ditetapkan oleh Allah SWT. Akan tetapi, kelima waktu shalat tersebut saling mengikat dan tidak diperbolehkan hanya melaksanakan satu shalat saja.

Rasulullah bersabda:

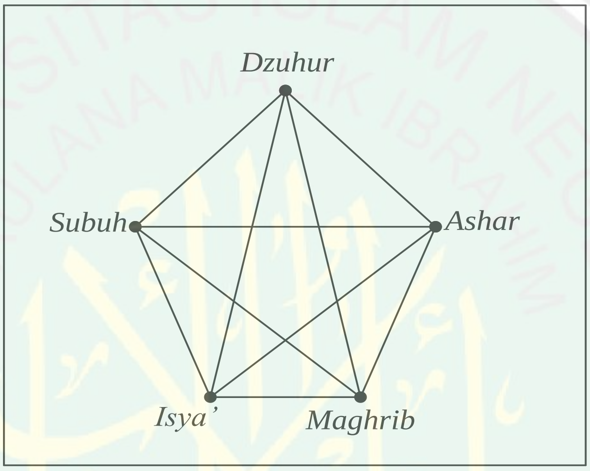
1. *"Waktu shalat subuh dari terbit fajar selama belum terbit matahari"*(H.R. Bukhori) .
2. *"Waktu dzuhur ialah apabila telah tergelincir matahari hingga terjadilah bayangan seseorang itu sama dengan panjangnya selama belum lagi datang waktu ashar"*(H.R. Muslim).
3. *"Ashar waktunya sebelum terbenam matahari"* (H.R. Bukhori).
4. *"Maghrib waktunya sebelum hilang syafaq, yaitu cahaya matahari sesudah terbenamnya yang kita lihat mula-mula merah sesudah merah hilang datang cahaya putih"* (H.R. Bukhori).
5. *"Waktu 'isya hingga separuh malam"* (H.R. Bukhori).

(Siddik, 1980:82-83).

Dari hadits-hadits di atas terlihat bahwa shalat terikat dengan waktu yaitu harus dikerjakan tepat pada waktunya, tidak dapat dilaksanakan mendahului dan juga mengakhirinya. Bila seseorang membaca Al-Qur'an dan mencermati ayat-ayatnya, maka ia akan tahu bahwa shalat telah diwajibkan atas umat-umat terdahulu.

Terfokusnya perintah shalat, baik kepada umat-umat terdahulu maupun umat sekarang, disebabkan oleh pentingnya kewajiban shalat ini dibanding kewajiban-kewajiban lain. Dalam arti, penting di sisi Allah dan penting bagi hambaNya. Begitu perhatiannya Islam terhadap shalat, sehingga manusia diperintahkan untuk selalu mengerjakan shalat dalam segala keadaan.

Shalat dapat direpresentasikan dalam suatu graf komplit K_5 menunjukkan lima titik yang dapat diartikan sebagai waktu-waktu shalat yang saling berhubungan satu dengan yang lain.



Gambar 2.6 Representasi Graf terhadap Waktu-Waktu Shalat

Dari gambar graf di atas direpresentasikan bahwa sholat lima waktu diwajibkan dalam sehari (Dhuhur, Ashar, Maghrib, Isya', dan Subuh) merupakan sholat yang wajib ditunaikan dan tidak boleh ditinggalkan. Waktu pelaksanaan antara satu waktu sholat fardhu berbeda dengan empat waktu sholat yang lain dan telah ditetapkan oleh Allah SWT. Akan tetapi kelima waktu sholat tersebut saling mengikat dan tidak diperbolehkan hanya melaksanakan satu sholat saja (Siddik, 1980:82-83).

BAB III

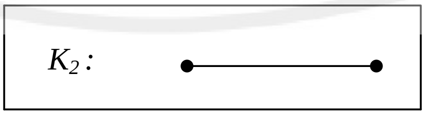
PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas mengenai *spectrum* matriks detour dari graf komplit (K_n) untuk $n \geq 2$ dan n bilangan asli. Adapun langkah-langkah menentukan *spectrum* matriks detour dari graf komplit (K_n) untuk $n \geq 2$ dan n bilangan asli adalah sebagai berikut:

1. menggambar graf komplit dengan n titik (K_n)
2. menentukan matriks detour pada graf komplit dengan n titik (K_n)
3. mencari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks detour dari graf komplit dengan n titik (K_n)
4. melihat pola *spectrum* matriks detour dari graf komplit (K_n)
5. merumuskan pola.
6. membuktikan teorema.

3.1. *Spectrum* Matriks Detour dari Graf Komplit (K_2)

Graf komplit K_2 dapat digambarkan seperti Gambar 3.1 berikut



Gambar 3.1 Graf Komplit K_2

Pada graf komplit K_2 menghasilkan matriks detour sebagai berikut,

$$DD(K_2) = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks detour maka akan dicari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks tersebut, yaitu :

$$\det\left(\lambda I - DD\left(K_2\right)\right) = 0$$

karena $DD\left(K_2\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, maka

$$\det\left(\lambda I - DD\left(K_2\right)\right) = 0$$

$$\left|\lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right| = 0$$

$$\left|\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda^2 = 1$$

$$\lambda = 1 \quad \text{atau} \quad \lambda = -1$$

Jadi nilai eigen *DD*(K_2) adalah $\lambda = 1$ dan $\lambda = -1$.

Setelah mendapatkan nilai eigen maka selanjutnya mencari vektor eigen, yaitu:

$$Ax = \lambda x = 0$$

$$\begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kemudian substitusikan nilai eigen $\lambda = 1$ dan $\lambda = -1$ ke dalam persamaan di atas.

Untuk $\lambda = 1$ vektor eigennya adalah:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga didapatkan

$$x_1 - x_2 = 0$$

$$-x_1 + x_2 = 0$$

$$x_1 = x_2$$

Misal $x_2 = s$, maka $x_1 = s$ diperoleh bahwa solusi umum bagi $\left[(1)I - DD(K_2)\right]x = 0$ adalah

$$x = \begin{bmatrix} s \\ s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jadi basis untuk ruang vektor eigennya sebanyak 1.

Untuk $\lambda = -1$ vektor eigennya adalah:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga didapatkan

$$-x_1 - x_2 = 0$$

$$-x_1 = x_2$$

$$x_1 = -x_2$$

Misal $x_1 = s$, maka $x_2 = -s$ diperoleh bahwa solusi umum bagi $\left[(-1)I - DD(K_2)\right]x = 0$ adalah

$$x = \begin{bmatrix} s \\ -s \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

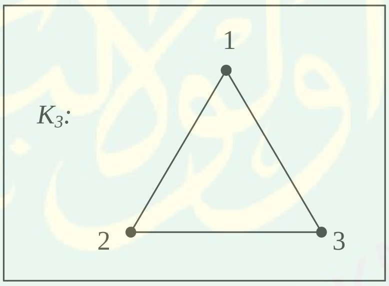
Jadi basis untuk ruang vektor eigennya sebanyak 1.

Dari pembahasan di atas dapat disimpulkan bahwa untuk $\lambda = 1$ terdapat satu basis ruang vektor eigen, dan untuk $\lambda = -1$ juga terdapat satu basis ruang vektor eigen, maka *spectrum* matriks detour graf komplit K_2 adalah

$$spec_{DD}(K_2) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

3.2. *Spectrum* Matriks Detour dari Graf Komplit (K_3)

Graf komplit K_3 dapat digambarkan seperti Gambar 3.2 berikut



Gambar 3.2 Graf Komplit K_3

Pada graf komplit K_3 menghasilkan matriks detour sebagai berikut,

$$DD(K_3) = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks detour maka akan dicari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks tersebut, yaitu :

$$\det\left(\lambda I - DD(K_3)\right) = 0$$

$$\left|\lambda\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&2&2\\2&0&2\\2&2&0\end{bmatrix}\right|=0$$

$$\left|\begin{bmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&2&2\\2&0&2\\2&2&0\end{bmatrix}\right|=0$$

$$\begin{vmatrix}\lambda&-2&-2\\-2&\lambda&-2\\-2&-2&\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$\lambda\begin{vmatrix}\lambda&-2\\-2&\lambda\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}-2&-2\\-2&\lambda\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}-2&\lambda\\-2&-2\end{vmatrix}=0$$

$$\lambda\left(\lambda^2-4\right)+2\left(-2\lambda-4\right)-2\left(4+2\lambda\right)=0$$

$$\lambda^3-4\lambda-4\lambda-8-8-4\lambda=0$$

$$\lambda^3-12\lambda-16=0$$

$$(\lambda-4)(\lambda+2)(\lambda+2)=0$$

$$\lambda-4=0 \text{ atau } \lambda+2=0$$

$$\lambda=4 \qquad\qquad \lambda=-2$$

Jadi nilai eigen *DD(K_3)* adalah $\lambda=4$ dan $\lambda=-2$.

Setelah mendapatkan nilai eigen maka selanjutnya mencari vektor eigen, yaitu:

$$Ax=\lambda x=0$$

$$\begin{bmatrix}\lambda&-2&-2\\-2&\lambda&-2\\-2&-2&\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Kemudian substitusikan nilai eigen $\lambda = 4$ dan $\lambda = -2$ ke dalam persamaan di atas.

Untuk $\lambda = 4$ diperoleh:

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$4x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0$$

$$-2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0$$

$$-2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0$$

Misal $x_1 = s$, maka $x_2 = s$ dan $x_3 = s$ diperoleh bahwa solusi umum bagi $\left[(4)I - DD(K_3)\right]x = 0$ adalah

$$x = \begin{bmatrix} s \\ s \\ s \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jadi basis untuk ruang vektor eigennya sebanyak 1.

Untuk $\lambda = -2$ diperoleh:

$$\left((-2)I - DD(K_3)\right)x = 0$$

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0$$

$$x_1 = \frac{2x_2 + 2x_3}{-2} = -x_2 - x_3$$

Misal $x_2 = s$ dan $x_3 = t$, maka solusi umum dari $\left((-2)I - DD(K_3)\right)x = 0$ adalah

$$x = \begin{bmatrix} -s-t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

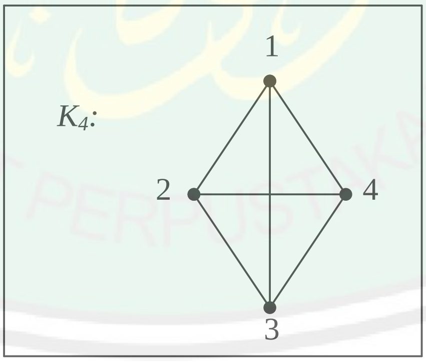
Jadi basis untuk ruang vektor eigennya sebanyak 2.

Dari pembahasan di atas dapat disimpulkan bahwa untuk $\lambda = 4$ terdapat satu basis ruang vektor eigen, dan untuk $\lambda = -2$ terdapat dua basis ruang vektor eigen, maka *spectrum* matriks detour graf komplit K_3 adalah

$$spec_{DD}(K_3) = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

3.3. *Spectrum* Matriks Detour dari Graf Komplit (K_4)

Untuk graf komplit K_4 dapat digambarkan seperti Gambar 3.3 berikut



Gambar 3.3 Graf Komplit K_4

Pada graf komplit K_4 menghasilkan matriks detour sebagai berikut,

$$DD(K_4) = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks detour maka akan dicari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks tersebut, yaitu :

$$\det\left(\lambda I - DD\left(K_4\right)\right) = 0$$

$$\left|\lambda\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&3&3&3\\3&0&3&3\\3&3&0&3\\3&3&3&0\end{bmatrix}\right| = 0$$

$$\left|\begin{bmatrix}\lambda&0&0&0\\0&\lambda&0&0\\0&0&\lambda&0\\0&0&0&\lambda\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&3&3&3\\3&0&3&3\\3&3&0&3\\3&3&3&0\end{bmatrix}\right| = 0$$

$$\begin{vmatrix}\lambda&-3&-3&-3\\-3&\lambda&-3&-3\\-3&-3&\lambda&-3\\-3&-3&-3&\lambda\end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda\begin{vmatrix}\lambda&-3&-3\\-3&\lambda&-3\\-3&-3&\lambda\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}-3&-3&-3\\-3&\lambda&-3\\-3&-3&\lambda\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}-3&\lambda&-3\\-3&-3&-3\\-3&-3&\lambda\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}-3&\lambda&-3\\-3&-3&\lambda\\-3&-3&-3\end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda\left(\lambda\begin{vmatrix}\lambda&-3\\-3&\lambda\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}-3&-3\\-3&\lambda\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}-3&\lambda\\-3&-3\end{vmatrix}\right)+3\left(-3\begin{vmatrix}\lambda&-3\\-3&\lambda\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}-3&-3\\-3&\lambda\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}-3&\lambda\\-3&-3\end{vmatrix}\right)$$

$$-3\left(-3\begin{vmatrix}-3&-3\\-3&\lambda\end{vmatrix}-\lambda\begin{vmatrix}-3&-3\\-3&\lambda\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}-3&-3\\-3&-3\end{vmatrix}\right)+3\left(-3\begin{vmatrix}-3&\lambda\\-3&-3\end{vmatrix}-\lambda\begin{vmatrix}-3&\lambda\\-3&-3\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}-3&-3\\-3&-3\end{vmatrix}\right) = 0$$

$$\lambda\left(\lambda\left(\lambda^2-9\right)+3(-3\lambda-9)-3(9+3\lambda)\right)+3\left(-3\left(\lambda^2-9\right)+3(-3\lambda-9)-3(9+3\lambda)\right)$$

$$-3\left(-3(-3\lambda-9)-\lambda(-3\lambda-9)-3(0)\right)+3\left(-3(9+3\lambda)-\lambda(9+3\lambda)-3(0)\right) = 0$$

$$\lambda\left(\lambda^3-27\lambda-54\right)+3\left(-3\lambda^2-18\lambda-27\right)-3\left(3\lambda^2+18\lambda+27\right)+3\left(-3\lambda^2-18\lambda-27\right) = 0$$

$$\lambda^4 - 27\lambda^2 - 54\lambda - 9\lambda^2 - 54\lambda - 81 - 9\lambda^2 - 54\lambda - 81 - 9\lambda^2 - 54\lambda - 81 = 0$$

$$\lambda^4 - 54\lambda^2 - 216\lambda - 243 = 0$$

$$(\lambda - 9)(\lambda + 3)(\lambda + 3)(\lambda + 3) = 0$$

$$(\lambda - 9) = 0 \text{ atau } (\lambda + 3) = 0$$

$$\lambda_1 = 9 \qquad \lambda_2 = -3$$

Jadi nilai eigen *DD(K_4)* adalah $\lambda = 9$ dan $\lambda = -3$.

Setelah mendapatkan nilai eigen maka selanjutnya mencari vektor eigen, yaitu:

$$Ax = \lambda x = 0$$

$$\begin{bmatrix} \lambda & -3 & -3 & -3 \\ -3 & \lambda & -3 & -3 \\ -3 & -3 & \lambda & -3 \\ -3 & -3 & -3 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Disubstitusikan nilai eigen $\lambda = 9$ dan $\lambda = -3$ ke dalam persamaan di atas.

Untuk $\lambda = 9$ diperoleh:

$$\begin{bmatrix} 9 & -3 & -3 & -3 \\ -3 & 9 & -3 & -3 \\ -3 & -3 & 9 & -3 \\ -3 & -3 & -3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$9x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 = 0$$

$$-3x_1 + 9x_2 - 3x_3 - 3x_4 = 0$$

$$-3x_1 - 3x_2 + 9x_3 - 3x_4 = 0$$

$$-3x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 9x_4 = 0$$

Misal $x_1 = s,$ maka $x_2 = s,$ $x_3 = s$ dan $x_4 = s$ diperoleh bahwa solusi umum bagi $\left[(9)I - DD(K_4)\right]x = 0$ adalah

$$x = \begin{bmatrix} s \\ s \\ s \\ s \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jadi basis untuk ruang vektor eigennya sebanyak 1.

Untuk $\lambda = -3$ diperoleh:

$$\left((-3)I - DD(K_4)\right)x = 0$$

$$\begin{bmatrix} -3 & -3 & -3 & -3 \\ -3 & -3 & -3 & -3 \\ -3 & -3 & -3 & -3 \\ -3 & -3 & -3 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-3x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 = 0$$

$$x_1 = \frac{3x_2 + 3x_3 + 3x_4}{-3}$$

$$x_1 = -x_2 - x_3 - x_4$$

Misal $x_2 = s,$ $x_3 = t,$ dan $x_4 = u$ maka solusi umum dari $\left((-3)I - DD(K_4)\right)x = 0$ adalah

$$x = \begin{bmatrix} -s-t-u \\ s \\ t \\ u \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

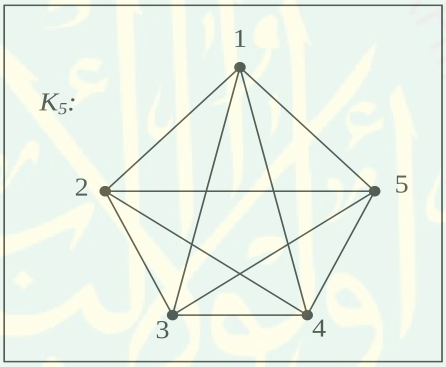
Jadi basis untuk ruang vektor eigennya sebanyak 3.

Dari pembahasan di atas dapat disimpulkan bahwa untuk $\lambda = 9$ terdapat satu basis ruang vektor eigen, dan untuk $\lambda = -3$ terdapat tiga basis ruang vektor eigen, maka *spectrum* matriks detour graf komplit K_4 adalah

$$spec_{DD}(K_4) = \begin{bmatrix} 9 & -3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

3.4. *Spectrum* Matriks Detour dari Graf Komplit (K_5)

Untuk graf komplit K_5 dapat digambarkan seperti Gambar 3.4 berikut



Gambar 3.4 Graf Komplit K_5

Pada graf komplit K_5 menghasilkan matriks detour sebagai berikut,

$$DD(K_5) = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 0 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 0 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks detour maka akan dicari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks tersebut, yaitu :

$$\det\left(\lambda I - DD\left(K_5\right)\right) = 0$$

$$\left|\lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 0 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 0 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}\right| = 0$$

$$\left|\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 0 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 0 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}\right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & -4 & -4 & -4 & -4 \\ -4 & \lambda & -4 & -4 & -4 \\ -4 & -4 & \lambda & -4 & -4 \\ -4 & -4 & -4 & \lambda & -4 \\ -4 & -4 & -4 & -4 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

diperoleh:

$$\lambda^5 - 160\lambda^3 - 1280\lambda^2 - 3840\lambda - 4096 = 0$$

$$(\lambda - 16)(\lambda + 4)(\lambda + 4)(\lambda + 4)(\lambda + 4) = 0$$

$$(\lambda - 16) = 0 \text{ atau } (\lambda + 4) = 0$$

$$\lambda_1 = 16 \qquad\qquad \lambda_2 = -4$$

Jadi nilai eigen *DD(K_5)* adalah $\lambda = 16$ dan $\lambda = -4$.

Setelah mendapatkan nilai eigen maka selanjutnya mencari vektor eigen, yaitu:

$$Ax = \lambda x = 0$$

$$\begin{bmatrix} \lambda & -4 & -4 & -4 & -4 \\ -4 & \lambda & -4 & -4 & -4 \\ -4 & -4 & \lambda & -4 & -4 \\ -4 & -4 & -4 & \lambda & -4 \\ -4 & -4 & -4 & -4 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Disubstitusikan nilai eigen $\lambda = 16$ dan $\lambda = -4$ ke dalam persamaan di atas.

Untuk $\lambda = 16$ diperoleh:

$$\left(16I - DD\left(K_5\right)\right)x = 0$$

$$\begin{bmatrix} 16 & -4 & -4 & -4 & -4 \\ -4 & 16 & -4 & -4 & -4 \\ -4 & -4 & 16 & -4 & -4 \\ -4 & -4 & -4 & 16 & -4 \\ -4 & -4 & -4 & -4 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$16x_1 - 4x_2 - 4x_3 - 4x_4 - 4x_5 = 0$$

$$-4x_1 + 16x_2 - 4x_3 - 4x_4 - 4x_5 = 0$$

$$-4x_1 - 4x_2 + 16x_3 - 4x_4 - 4x_5 = 0$$

$$-4x_1 - 4x_2 - 4x_3 + 16x_4 - 4x_5 = 0$$

$$-4x_1 - 4x_2 - 4x_3 - 4x_4 + 16x_5 = 0$$

Misal $x_1 = s$ maka $x_2 = s,\ x_3 = s,\ x_4 = s$ dan $x_5 = s$ diperoleh bahwa solusi umum bagi $\left[(16)I - DD\left(K_5\right)\right]x = 0$ adalah

$$x = \begin{bmatrix} s \\ s \\ s \\ s \\ s \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jadi basis untuk ruang vektor eigennya sebanyak 1.

Untuk $\lambda = -4$ diperoleh:

$$\left((-4)I - DD(K_5)\right)x = 0$$

$$\begin{bmatrix} -4 & -4 & -4 & -4 & -4 \\ -4 & -4 & -4 & -4 & -4 \\ -4 & -4 & -4 & -4 & -4 \\ -4 & -4 & -4 & -4 & -4 \\ -4 & -4 & -4 & -4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-4x_1 - 4x_2 - 4x_3 - 4x_4 - 4x_5 = 0$$

$$x_1 = \frac{4x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 4x_5}{-4}$$

$$x_1 = -x_2 - x_3 - x_4 - x_5$$

Misal $x_2 = s,$ $x_3 = t,$ $x_4 = u$ dan $x_5 = v$ maka solusi umum dari $\left((-4)I - DD(K_5)\right)x = 0$ adalah

$$x = \begin{bmatrix} -s-t-u-v \\ s \\ t \\ u \\ v \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + u\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + v\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

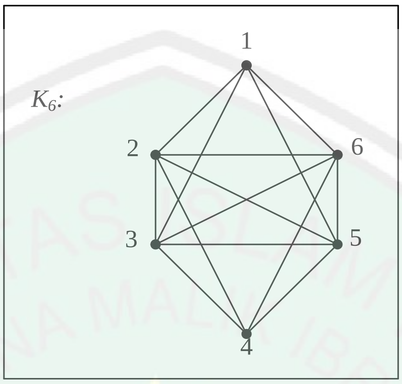
Jadi basis untuk ruang vektor eigennya sebanyak 4.

Dari pembahasan di atas dapat disimpulkan bahwa untuk $\lambda = 16$ terdapat satu basis ruang vektor eigen, dan untuk $\lambda = -4$ terdapat empat basis ruang vektor eigen, maka *spectrum* matriks detour graf komplit K_5 adalah

$$spec_{DD}(K_5) = \begin{bmatrix} 16 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

3.5. *Spectrum* Matriks Detour dari Graf Komplit (K_6)

Untuk graf komplit K_6 dapat digambarkan seperti Gambar 3.5 berikut



Gambar 3.5 Graf Komplit K_6

Pada graf komplit K_6 menghasilkan matriks detour sebagai berikut,

$$DD(K_6) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 0 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 0 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 0 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 0 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks detour maka akan dicari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks tersebut, yaitu :

$$\det(\lambda I - DD(K_6)) = 0$$

$$\left| \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 0 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 0 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 0 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 0 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 0 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\left|\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 0 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 0 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 0 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 0 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 0 \end{bmatrix}\right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & -5 & -5 & -5 & -5 & -5 \\ -5 & \lambda & -5 & -5 & -5 & -5 \\ -5 & -5 & \lambda & -5 & -5 & -5 \\ -5 & -5 & -5 & \lambda & -5 & -5 \\ -5 & -5 & -5 & -5 & \lambda & -5 \\ -5 & -5 & -5 & -5 & -5 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

diperoleh

$$\lambda^6 - 375\lambda^4 - 4000\lambda^3 - 28125\lambda^2 - 75000\lambda - 78125 = 0$$

$$(\lambda - 25)(\lambda + 5)(\lambda + 5)(\lambda + 5)(\lambda + 5)(\lambda + 5) = 0$$

$$(\lambda - 25) = 0 \text{ atau } (\lambda + 5) = 0$$

$$\lambda_1 = 25 \qquad \lambda_2 = -5$$

Jadi nilai eigen $DD(K_6)$ adalah $\lambda = 25$ dan $\lambda = -5$.

Setelah mendapatkan nilai eigen maka selanjutnya mencari vektor eigen, yaitu:

$$Ax = \lambda x = 0$$

$$\begin{bmatrix} \lambda & -5 & -5 & -5 & -5 & -5 \\ -5 & \lambda & -5 & -5 & -5 & -5 \\ -5 & -5 & \lambda & -5 & -5 & -5 \\ -5 & -5 & -5 & \lambda & -5 & -5 \\ -5 & -5 & -5 & -5 & \lambda & -5 \\ -5 & -5 & -5 & -5 & -5 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Disubstitusikan nilai eigen $\lambda = 25$ dan $\lambda = -5$ ke dalam persamaan di atas.

Untuk $\lambda = 25$ diperoleh:

$$(25I - DD(K_6))x = 0$$

$$\begin{bmatrix} 25 & -5 & -5 & -5 & -5 & -5 \\ -5 & 25 & -5 & -5 & -5 & -5 \\ -5 & -5 & 25 & -5 & -5 & -5 \\ -5 & -5 & -5 & 25 & -5 & -5 \\ -5 & -5 & -5 & -5 & 25 & -5 \\ -5 & -5 & -5 & -5 & -5 & 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$25x_1 - 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 - 5x_5 - 5x_6 = 0$$

$$-5x_1 + 25x_2 - 5x_3 - 5x_4 - 5x_5 - 5x_6 = 0$$

$$-5x_1 - 5x_2 + 25x_3 - 5x_4 - 5x_5 - 5x_6 = 0$$

$$-5x_1 - 5x_2 - 5x_3 + 25x_4 - 5x_5 - 5x_6 = 0$$

$$-5x_1 - 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 25x_5 - 5x_6 = 0$$

$$-5x_1 - 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 - 5x_5 + 25x_6 = 0$$

Misal $x_1 = s$ maka $x_2 = s$, $x_3 = s$, $x_4 = s$, $x_5 = s$ dan $x_6 = s$ diperoleh bahwa solusi umum bagi $[(25)I - DD(K_6)]x = 0$ adalah

$$x = \begin{bmatrix} s \\ s \\ s \\ s \\ s \\ s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jadi basis untuk ruang vektor eigennya sebanyak 1.

Untuk $\lambda = -5$ diperoleh:

$$\left((-5)I - DD(K_6)\right)x = 0$$

$$\begin{bmatrix} -5 & -5 & -5 & -5 & -5 & -5 \\ -5 & -5 & -5 & -5 & -5 & -5 \\ -5 & -5 & -5 & -5 & -5 & -5 \\ -5 & -5 & -5 & -5 & -5 & -5 \\ -5 & -5 & -5 & -5 & -5 & -5 \\ -5 & -5 & -5 & -5 & -5 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-5x_1 - 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 - 5x_5 - 5x_6 = 0$$

$$x_1 = \frac{5x_2 + 5x_3 + 5x_4 + 5x_5 + 5x_6}{-5}$$

$$x_1 = -x_2 - x_3 - x_4 - x_5 - x_6$$

Misal $x_2 = s$, $x_3 = t$, $x_4 = u$, $x_5 = v$ dan $x_6 = w$ maka solusi umum dari $\left((-5)I - DD(K_6)\right)x = 0$ adalah

$$x = \begin{bmatrix} -s-t-u-v-w \\ s \\ t \\ u \\ v \\ w \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + u\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + v\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + w\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jadi basis untuk ruang vektor eigennya sebanyak 5.

Dari pembahasan di atas dapat disimpulkan bahwa untuk $\lambda = 25$ terdapat satu basis ruang vektor eigen, dan untuk $\lambda = -5$ terdapat lima basis ruang vektor eigen, maka *spectrum* matriks detour graf komplit K_6 adalah

$$spec_{DD}(K_6) = \begin{bmatrix} 25 & -5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

3.6. *Spectrum* Matriks Detour dari Graf Komplit (K_n)

Matriks detour dari graf komplit K_n adalah

$$DD(K_n) = \begin{bmatrix} 0 & (n-1) & (n-1) & \cdots & (n-1) \\ (n-1) & 0 & (n-1) & \cdots & (n-1) \\ (n-1) & (n-1) & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & (n-1) \\ (n-1) & \cdots & (n-1) & (n-1) & 0 \end{bmatrix}_{nxn}$$

$$= (n-1) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{nxn}$$

$$= (n-1) \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{nxn} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{nxn} \right)$$

Jadi,

$DD(K_n) = (n\text{-}1)(J_{nxn} - I_{nxn})$

dimana J_{nxn} adalah matriks yang semua elemennya 1, dan I_{nxn} adalah matriks identitas.

Persamaan karakteristik dari matriks detour dari graf komplit K_n diperoleh dengan cara $f(\lambda) = \det\left(I\lambda - DD(K_n)\right)$.

$$\det\left(I\lambda - DD(K_n)\right) = 0$$

$$\left|\lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & (n-1) & (n-1) & \cdots & (n-1) \\ (n-1) & 0 & (n-1) & \cdots & (n-1) \\ (n-1) & (n-1) & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & (n-1) \\ (n-1) & (n-1) & \cdots & (n-1) & 0 \end{bmatrix}\right| = 0$$

$$\left|\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & (n-1) & (n-1) & \cdots & (n-1) \\ (n-1) & 0 & (n-1) & \cdots & (n-1) \\ (n-1) & (n-1) & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & (n-1) \\ (n-1) & (n-1) & \cdots & (n-1) & 0 \end{bmatrix}\right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & -(n-1) & -(n-1) & \cdots & -(n-1) \\ -(n-1) & \lambda & -(n-1) & \cdots & -(n-1) \\ -(n-1) & -(n-1) & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -(n-1) \\ -(n-1) & -(n-1) & \cdots & -(n-1) & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Melalui operasi baris elementer, matriks $\det\left(I\lambda - DD(K_n)\right)$ direduksi menjadi matriks segitiga atas diperoleh:

$$\begin{bmatrix} \lambda & -(n-1) & -(n-1) & -(n-1) & -(n-1) & \cdots & -(n-1) \\ 0 & \frac{\lambda^2-(n-1)^2}{\lambda} & \frac{-(n-1)(\lambda+(n-1))}{\lambda} & \frac{-(n-1)(\lambda+(n-1))}{\lambda} & \frac{-(n-1)(\lambda+(n-1))}{\lambda} & \cdots & \frac{-(n-1)(\lambda+(n-1))}{\lambda} \\ 0 & 0 & \frac{\lambda^2-(n-1)\lambda-2(n-1)^2}{\lambda-(n-1)} & \frac{-(n-1)(\lambda+(n-1))}{\lambda-(n-1)} & \frac{-(n-1)(\lambda+(n-1))}{\lambda-(n-1)} & \cdots & \frac{-(n-1)(\lambda+(n-1))}{\lambda-(n-1)} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda^2-2(n-1)\lambda-3(n-1)^2}{\lambda-2(n-1)} & \frac{-(n-1)(\lambda+(n-1))}{\lambda-2(n-1)} & \cdots & \frac{-(n-1)(\lambda+(n-1))}{\lambda-2(n-1)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda^2-3(n-1)\lambda-4(n-1)^2}{\lambda-3(n-1)} & \ddots & \frac{-(n-1)(\lambda+(n-1))}{\lambda-3(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{\lambda^2-(n-2)(n-1)\lambda-(n-1)^3}{\lambda-(n-2)(n-1)} \end{bmatrix}$$

$\det\left(\lambda I - DD(K_n)\right)$ merupakan hasil perkalian diagonal matriks segitiga atas tersebut. Jadi:

$$\lambda\left(\frac{\lambda^2-(n-1)^2}{\lambda}\right)\left(\frac{\lambda^2-(n-1)\lambda-2(n-1)^2}{\lambda-(n-1)}\right)\left(\frac{\lambda^2-2(n-1)\lambda-3(n-1)^2}{\lambda-2(n-1)}\right)\left(\frac{\lambda^2-3(n-1)\lambda-4(n-1)^2}{\lambda-3(n-1)}\right)\cdots\left(\frac{\lambda^2-(n-2)(n-1)\lambda-(n-1)^3}{\lambda-(n-2)(n-1)}\right)$$

$$\left(\lambda-(n-1)\right)\left(\lambda+(n-1)\right)\left(\frac{\lambda^2-(n-1)\lambda-2(n-1)^2}{\lambda-(n-1)}\right)\left(\frac{\lambda^2-2(n-1)\lambda-3(n-1)^2}{\lambda-2(n-1)}\right)\left(\frac{\lambda^2-3(n-1)\lambda-4(n-1)^2}{\lambda-3(n-1)}\right)\cdots\left(\frac{\lambda^2-(n-2)(n-1)\lambda-(n-1)^3}{\lambda-(n-2)(n-1)}\right)$$

$$(\lambda+(n-1))(\lambda-2(n-1))(\lambda+(n-1))\left(\frac{\lambda^2-2(n-1)\lambda-3(n-1)^2}{\lambda-2(n-1)}\right)\left(\frac{\lambda^2-3(n-1)\lambda-4(n-1)^2}{\lambda-3(n-1)}\right)\cdots\left(\frac{\lambda^2-(n-2)(n-1)\lambda-(n-1)^3}{\lambda-(n-2)(n-1)}\right)$$

$$(\lambda+(n-1))(\lambda+(n-1))(\lambda-3(n-1))(\lambda+(n-1))\left(\frac{\lambda^2-3(n-1)\lambda-4(n-1)^2}{\lambda-3(n-1)}\right)\cdots\left(\frac{\lambda^2-(n-2)(n-1)\lambda-(n-1)^3}{\lambda-(n-2)(n-1)}\right)$$

$$(\lambda+(n-1))(\lambda+(n-1))(\lambda+(n-1))(\lambda-4(n-1))(\lambda+(n-1))\cdots\left(\frac{\lambda^2-(n-2)(n-1)\lambda-(n-1)^3}{\lambda-(n-2)(n-1)}\right)$$

$$(\lambda+(n-1))(\lambda+(n-1))(\lambda+(n-1))(\lambda-4(n-1))(\lambda+(n-1))\cdots\left(\frac{(\lambda-(n-1)^2)(\lambda+(n-2)(n-1))}{\lambda-(n-2)(n-1)}\right)$$

$$\det(\lambda I-DD(K_n))=\left(\lambda-(n-1)^2\right)(\lambda+(n-1))^{n-1}$$

Karena $\det(\lambda I-DD(K_n))=0$, maka

$$\left(\lambda-(n-1)^2\right)(\lambda+(n-1))^{n-1}=0$$

Sehingga untuk setiap *n* bilangan asli diperoleh:

$$\lambda-(n-1)^2=0$$
$$\lambda=(n-1)^2$$

atau untuk $n\geq 2$, *n* bilangan asli diperoleh:

$$\lambda+(n-1)^{n-1}=0$$
$$\lambda+(n-1)^{n-1}=0^{n-1}$$
$$\lambda=-(n-1)$$

Akan dibuktikan untuk nilai eigen $\lambda=(n-1)^2$ didapatkan banyaknya basis ruang vektor eigen adalah 1.

Solusi nontrivial dari $\left((n-1)^2 I-DD(K_n)\right)x=0$ adalah:

$$
\begin{bmatrix}
(n-1)^2 & -(n-1) & -(n-1) & -(n-1) & -(n-1) & \cdots & -(n-1) \\
0 & \frac{(n-1)^4-(n-1)^2}{(n-1)^2} & \frac{-(n-1)((n-1)^2+(n-1))}{(n-1)^2} & \frac{-(n-1)((n-1)^2+(n-1))}{(n-1)^2} & \frac{-(n-1)((n-1)^2+(n-1))}{(n-1)^2} & \cdots & \frac{-(n-1)((n-1)^2+(n-1))}{(n-1)^2} \\
0 & 0 & \frac{(n-1)^4-(n-1)^3-2(n-1)^2}{(n-1)^2-(n-1)} & \frac{-(n-1)((n-1)^2+(n-1))}{(n-1)^2-(n-1)} & \frac{-(n-1)((n-1)^2+(n-1))}{(n-1)^2-(n-1)} & \cdots & \frac{-(n-1)((n-1)^2+(n-1))}{(n-1)^2-(n-1)} \\
0 & 0 & 0 & \frac{(n-1)^4-2(n-1)^3-3(n-1)^2}{(n-1)^2-2(n-1)} & \frac{-(n-1)((n-1)^2+(n-1))}{(n-1)^2-2(n-1)} & \cdots & \frac{-(n-1)((n-1)^2+(n-1))}{(n-1)^2-2(n-1)} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(n-1)^4-3(n-1)^3-4(n-1)^2}{(n-1)^2-3(n-1)} & \ddots & \frac{-(n-1)((n-1)^2+(n-1))}{(n-1)^2-3(n-1)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{(n-1)^4-(n-2)(n-1)^3-(n-1)^3}{(n-1)^2-(n-2)(n-1)}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix}
(n-1)^2 & -(n-1) & -(n-1) & -(n-1) & -(n-1) & \cdots & -(n-1) \\
0 & n^2-2 & -n & -n & -n & \cdots & -n \\
0 & 0 & \frac{(n-1)^3-(n-1)^2-2(n-1)}{(n-2)} & \frac{-(n-1)^2-(n-1)}{(n-2)} & \frac{-(n-1)^2-(n-1))}{(n-2)} & \cdots & \frac{-(n-1)^2-(n-1))}{(n-2)} \\
0 & 0 & 0 & \frac{(n-1)^3-2(n-1)^2-3(n-1)}{(n-3)} & \frac{-(n-1)^2+(n-1)}{(n-3)} & \cdots & \frac{-(n-1)^2+(n-1)}{(n-3)} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(n-1)^3-3(n-1)^2-4(n-1)}{(n-4)} & \ddots & \frac{-(n-1)^2+(n-1)}{(n-4)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{(n-1)^3-(n-2)(n-1)^2-(n-1)^2}{(n-1)-(n-2)}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$(n-1)^2 x_1 - (n-1)x_2 - (n-1)x_3 - (n-1)x_4 - (n-1)x_5 + \cdots - (n-1)x_n = 0$$

$$\left(n^2-2\right) x_2 - nx_3 - nx_4 - nx_5 + \cdots - nx_n = 0$$

$$\frac{(n-1)^3-(n-1)^2-2(n-1)}{(n-2)} x_3 - \frac{(n-1)^2-(n-1)}{(n-2)} x_4 - \frac{(n-1)^2-(n-1)}{(n-2)} x_5 + \cdots - \frac{(n-1)^2-(n-1)}{(n-2)} x_n = 0$$

$$\frac{(n-1)^3-2(n-1)^2-3(n-1)}{(n-3)} x_4 - \frac{(n-1)^2+(n-1)}{(n-3)} x_5 + \cdots - \frac{(n-1)^2+(n-1)}{(n-3)} x_n = 0$$

$$\frac{(n-1)^3-3(n-1)^2-4(n-1)}{(n-4)} x_5 + \cdots - \frac{(n-1)^2+(n-1)}{(n-4)} x_n = 0$$

Sehingga vektor eigennya adalah

$$x=\begin{bmatrix} s \\ s \\ s \\ s \\ s \\ \vdots \\ s \end{bmatrix}=s\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jadi didapatkan banyaknya basis ruang vektor eigen untuk $\lambda=(n-1)^2$ adalah 1.

Akan dibuktikan untuk $\lambda=-(n-1)$ didapatkan banyaknya basis ruang vektor eigen adalah $(n-1)$.

Solusi nontrivial dari $\left(-(n-1)I-DD(K_n)\right)x=0$ adalah:

$$\begin{bmatrix} -(n-1) & -(n-1) & -(n-1) & -(n-1) & -(n-1) & \cdots & -(n-1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-(n-1)x_1-(n-1)x_2-(n-1)x_3-(n-1)x_4\cdots-(n-1)x_{n-1}-(n-1)x_n=0$$

$$-(n-1)x_1=(n-1)x_2+(n-1)x_3+(n-1)x_4\cdots+(n-1)x_{n-1}+(n-1)x_n$$

$$x_1=\frac{(n-1)x_2+(n-1)x_3+(n-1)x_4\cdots+(n-1)x_{n-1}+(n-1)x_n}{-(n-1)}$$

$$x_1=-x_2-x_3-x_4\cdots-x_{n-1}-x_n$$

Sehingga vektor eigennya adalah:

$$x=\begin{bmatrix}-x_2-x_3-x_4-\cdots-x_{n-1}-x_n\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ \vdots\\ x_{n-1}\\ x_n\end{bmatrix}$$

$$=x_2\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\\\vdots\\0\\0\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}-1\\0\\1\\0\\\vdots\\0\\0\end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}+\cdots+x_{n-1}\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\0\\\vdots\\1\\0\end{bmatrix}+x_n\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}$$

Jadi didapatkan banyaknya basis ruang vektor eigen untuk $\lambda=-(n-1)$ adalah $(n-1)$.

Dari pembahasan di atas dapat disimpulkan bahwa untuk $\lambda=(n-1)^2$ terdapat satu basis ruang vektor eigen, dan untuk $\lambda=-(n-1)$ terdapat $(n-1)$ basis ruang vektor eigen, maka *spectrum* matriks detour graf komplit dengan n titik (K_n) adalah

$$spec_{DD}(K_n)=\begin{bmatrix}(n-1)^2 & -(n-1)\\ 1 & (n-1)\end{bmatrix}.$$

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan perumusan masalah dan pembahasan, maka dapat diambil kesimpulan langkah-langkah operasional menentukan *spectrum* matriks detour dan hasil/bentuk umum *spectrum* matriks detour dari graf komplit dengan *n* titik $\left(K_n\right)$, adalah sebagai berikut:

a. menentukan matriks detour pada graf komplit dengan *n* titik $\left(K_n\right)$

$$DD\left(K_n\right)=\begin{bmatrix} 0 & (n-1) & (n-1) & \cdots & (n-1) \\ (n-1) & 0 & (n-1) & \cdots & (n-1) \\ (n-1) & (n-1) & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & (n-1) \\ (n-1) & \cdots & (n-1) & (n-1) & 0 \end{bmatrix}_{nxn}$$

b. mencari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks detour dari graf komplit dengan *n* titik $\left(K_n\right)$

Nilai eigen $DD(K_2)$ adalah $\lambda=1$ dengan basis 1, dan $\lambda=-1$ dengan basis 1.

Nilai eigen $DD(K_3)$ adalah $\lambda=4$ dengan basis 1, dan $\lambda=-2$ dengan basis 2.

Nilai eigen $DD(K_4)$ adalah $\lambda=9$ dengan basis 1, dan $\lambda=-3$ dengan basis 3.

Nilai eigen $DD(K_5)$ adalah $\lambda=16$ dengan basis 1, dan $\lambda=-4$ dengan basis 4.

Nilai eigen $DD(K_6)$ adalah $\lambda=25$ dengan basis 1, dan $\lambda=-5$ dengan basis 5.

Nilai eigen $DD(K_n)$ adalah $\lambda=\left(n-1\right)^2$ dengan basis 1, dan $\lambda=-\left(n-1\right)$ dengan basis $\left(n-1\right)$

c. mencari pola *spectrum* dari graf komplit dengan *n* titik (K_n)

Spectrum matriks detour graf komplit (K_2) adalah

$$spec_{DD}(K_2) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Spectrum matriks detour graf komplit (K_3) adalah

$$spec_{DD}(K_3) = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Spectrum matriks detour graf komplit (K_4) adalah

$$spec_{DD}(K_4) = \begin{bmatrix} 9 & -3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Spectrum matriks detour graf komplit (K_5) adalah

$$spec_{DD}(K_5) = \begin{bmatrix} 16 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Spectrum matriks detour graf komplit (K_6) adalah

$$spec_{DD}(K_6) = \begin{bmatrix} 25 & -5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Spectrum matriks detour graf komplit (K_n) adalah

$$spec_{DD}(K_n) = \begin{bmatrix} (n-1)^2 & -(n-1) \\ 1 & (n-1) \end{bmatrix}.$$

4.2 Saran

1) Pada skripsi ini, penulis hanya memfokuskan pada graf komplit, untuk penulis skripsi selanjutnya disarankan menggunakan graf yang lainnya.
2) Pada skripsi ini, penulis masih menggunakan cara manual, maka untuk penulis skripsi selanjutnya disarankan untuk menggunakan program.

DAFTAR PUSTAKA

Al-Jazairi, Abu Bakar Jabir. 2007. *Tafsir Al-Qur'an Al-Aisar, Surat Ali 'Imron-Al-An'aam*. Jakarta: Darus Sunnah Press

Anton, Howard. 1997. *Aljabar Linear Elementer*. Jakarta: Erlangga

Anton, Howard. 2000. *Dasar-dasar Aljabar Linear jilid I*. Jakarta: CV Rajawali.

Ayyaswami dan Balachandran. 2010. *On Detour Spectra of Some Graphs*. India: Sastra University.

Biggs, Norman. 1974. *Algebraic Graph Theory*. Cambridge: Cambridge University Press.

Chartrand, Gery and Lesniak, Linda. 1986. *Graphs and Digraphs Second Edition*. California: a Division of Wadsworth, Inc.

Cullen, Charles G. 1993. *Aljabar Linear dan Penerapannya*. Jakarta: Gramedia Pustaka Utama

Gazali, Wikaria. 2005. *Matriks dan Transformasi Linear*. Jogjakarta: Graha Ilmu

Rahman, Afzalur. 1992. *Al-Qur'an Sumber Ilmu Pengetahuan.* Jakarta: Rineka Cipta

Siang, Jong Jek. 2002. *Matematika Diskrit dan Aplikasinya pada Ilmu Computer*. Jogjakarta: ANDI Jogjakarta.

Siddik, Abdullah. 1980. *Asas-Asas Hukum Islam*. Jakarta: Widjaya.

Wirawan, Teddy P. 2008. *Pemodelan Sistem Lalu Lintas dengan Graf Ganda BerarahBerbobot*. (Online): (*http://www*. Combinatoric. Com. Diakses tanggal 25 September 2010).

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN)
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang (0341)551345
Fax. (0341)572533

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Lailatul Khusnah
NIM : 05510012
Fakultas/ jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
Judul skripsi : *Spectrum* Matriks Detour dari Graf Komplit dengan n titik K_n
Pembimbing I : Evawati Alisah, M.Pd
Pembimbing II : Abdul Aziz, M.Si

No	Tanggal	HAL	Tanda Tangan	
1	29 Agustus 2010	Konsultasi Masalah	1.	
2	02 September 2010	Konsultasi Bab III		2.
3	20 September 2010	Revisi Bab III	3.	
4	25 September 2010	Revisi Bab III		4.
5	30 September 2010	Konsultasi Bab I dan II	5.	
6	06 Oktober 2010	Revisi Bab I dan II		6.
7	20 Oktober 2010	Konsultasi Bab IV	7.	
8	30 Oktober 2010	Revisi Bab IV		8.
9	15 November 2010	Konsultasi Keagamaan	9.	
10	09 Desember 2010	Revisi Keagamaan		10.
11	16 Desember 2010	Konsultasi Keseluruhan	11.	
12	23 Desember 2010	ACC Keseluruhan		12.

Malang, 07 Januari 2011
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001