KARAKTERISTIK RING MATRIKS BERUKURAN nxn MODULO k

SKRIPSI

Oleh:
HASIBULLAH
NIM. 04510037

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2011

KARAKTERISTIK RING MATRIKS BERUKURAN nxn MODULO k

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Universitas Islam Negeri Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan
Dalam Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
HASIBULLAH
NIM. 04510037

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2011

KARAKTERISTIK RING MATRIKS BERUKURAN nxn MODULO k

SKRIPSI

Oleh:
HASIBULLAH
NIM. 04510037

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal: 21 Juli 2011

Pembimbing I,	**Pembimbing II,**
WAHYU HENKY IRAWAN, M.Pd	**FACHRUR ROZI, M.Si**
NIP. 19710420 200003 1 003	**NIP. 19800527 200801 1 012**

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

ABDUSSAKIR, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

KARAKTERISTIK RING MATRIKS BERUKURAN nxn MODULO k

SKRIPSI

Oleh:
HASIBULLAH
NIM. 04510037

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 21 Juli 2011

Susunan Dewan Penguji		**Tanda Tangan**
1. Penguji Utama	**: Sri Harini, M.Si** **NIP. 19731014 200112 2 002**	( )
2. Ketua	**: Abdul Aziz, M.Si** **NIP. 19760318 200604 1 002**	( )
3. Sekretaris	**: Wahyu Henky Irawan, M.pd** **NIP.19710420 200003 1 003**	( )
4. Anggota	**: Fachrur Rozi, M.Si** **NIP.19800527 200801 1 012**	( )

Mengetahui dan Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama	: HASIBULLAH
NIM	: 04510037
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi

Menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa dalam penulisan skripsi ini merupakan hasil karya penulis sendiri dan bukan hasil jiplakan atau plagiat dari tulisan atau pikiran orang lain serta penulis mengakui sepenuhnya bahwa hasil karya ini sebagai hasil tulisan atau pikiran penulis sendiri.

Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa penulisan skripsi ini adalah hasil jiplakan atau hasil karya orang lain sepenuhnya, maka pennulis bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 26 Mei 2011
Yang membuat pernyataan

Hasibullah
NIM. 04510037

MOTTO

"Andai kata penduduk suatu negeri itu benar benar beriman dan bertakwa, maka kami akan bukakan kepada mereka keberkahan kami yang datang dari langit maupun yang tumbuh dari bumi. Akan tetapi jika mereka mendustakan ayat kami, maka kami akan azab mereka akibat perbuatan mereka sendiri"

(Surah al-A'raf 7:96)

"Sebaik-baik Manusia adalah yang Paling Bermanfaat Bagi Orang Lain"

(HR. Bukhari dan Muslim)

"Kita Datang Bukanlah Untuk Saling Bersaing Melainkan Untuk Saling Melengkapi"

(Bill McCartney)

PERSEMBAHAN

Segala hormat dan sembah sujud

serta iringan doa dan rasa syukur yang teramat besar,

Karya Tulis ini Penulis persembahkan kepada:

Ayahanda dan Ibunda tercinta, yang telah memberikan segalanya.

Saudara-saudara tercinta, yang selalu memberikan dukungan moril dan spirituil.

KATA PENGANTAR

بسم الله الرحمن الرحيم

Assalamu'alaikum warahmatullahi wabarkatu

Alhamdulillahirrobbil'alamin, segala puja dan puji syukur ke hadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat, taufiq dan hidayah-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan penulisan skripsi yang berjudul "KARAKTERISTIK RING MATRIKS BERUKURAN nxn MODULO k" ini dengan baik. Sholawat serta salam semoga senantiasa tercurah limpahkan kepada junjungan Nabi besar Muhammad SAW sebagai *uswatun hasanah* dalam meraih kesuksesan di dunia dan akhirat.

Penulis menyadari bahwa banyak pihak yang telah berpartisipasi dan membantu dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Oleh karena itu, iringan do'a dan ucapan *jazakumullah khaira ahsanal jaza'* terima kasih yang sebesar besarnya penulis sampaikan, terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang .
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU, D.Sc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Wahyu Henky Irawan, M.Pd, selaku dosen pembimbing, yang telah meluangkan waktunya untuk memberikan pengarahan selama penulisan skripsi ini.

5. Fachrur Rozi M.Si, selaku dosen pembimbing keagamaan, yang telah memberikan saran dan bantuan selama penulisan skripsi ini.
6. Seluruh Dosen Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah memberikan ilmu pengetahuan kepada penulis selama berada di bangku perkuliahan, serta seluruh karyawan dan staf.
7. Bapak dan Ibu tercinta beserta kelurga, yang selalu memberikan semangat dan motivasi baik moril maupun spirituil dan perjuangannya yang tak pernah kenal lelah dalam mendidik dan membimbing penulis hingga penulis sukses dalam meraih cita-cita serta ketulusan do’anya kepada penulis sampai dapat menyelesaikan skripsi ini.
8. Kakak-kakak dan adik-adik tingkat tercinta, yang selalu memberikan bantuan, semangat dan do‘a selama menjalani perkuliahan serta dalam menyelesaikan skripsi ini.
9. Teman-teman matematika semua angkatan, terima kasih atas do‘a serta kenangan yang kalian berikan.
10. Semua pihak yang tidak mungkin penulis sebut satu-persatu, atas keikhlasan bantuan moril dan sprituil penulis ucapkan terima kasih.

Semoga skripsi ini bermanfaat dan dapat menambah wawasan keilmuan khususnya matematika *amin ya rabbal ‘alamin*.

Wassalamu’alaikum warahmatullahi wabarkatu.

Malang, 26 Mei 2011

Penulis

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR SIMBOL DAN LAMBANG

DAFTAR ISI

ABSTRAK

Hasibullah, 2011. **Karakteristik Ring Matriks Berukuran *nxn* Modulo *k***. Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: (I) Wahyu Henky Irawan, M.Pd.
(II) Fachrur Rozi, M.Si.

Pada kajian skripsi ini yang menjadi pokok permasalahan adalah bagaimana order elemen ring matriks berukuran *nxn* modulo *k* dengan mengambil konsep dari order elemen grup dan bagaimana karakteristik yang terbentuk pada ring matriks tersebut jika matriknya berordo 2*x*2 sampai *nxn* dan entri-entrinya berupa bilangan modulo 2 hingga *k*. Adapun yang menjadi tujuan dari penulisan skripsi ini adalah menentuan order elemen ring matriks *nxn* modulo *k* serta mengetahui karakteristik ring matriksnya. Kajian ini dibatasi hanya pada definisi dan teorema ring, matriks serta bilangan modulo.

Untuk mendapatkan hasil akhir dalam menentukan order elemen ring matriks *nxn* modulo *k* dan pencarian karakteristiknya yaitu, $ka = I$, $\forall a \in R$, I adalah identitas penjumlahan pada *R,* dengan *k* adalah bilangan modulo, sedemikian hingga $ka = (\bar{0})$ maka order elemen ring matriksnya adalah *k*. Oleh karena $ka = a + a + a + \cdots + a = (\bar{0})$, dimana $(\bar{0})$ adalah unsur kesatuan aditif grup dan untuk setiap a adalah elemen dari R, maka karakteristik ring tersebut adalah *k*. Dengan unsur ring berupa matriks kolom dan baris berordo 2*x*2 sampai *nxn* dan entri-entrinya berupa bilangan modulo 2 hingga *k* akan dapat diketahui karakteristik ring matriksnya adalah *k*.

Hasil yang diperoleh adalah bahwa setiap ring matriks dengan entri-entrinya merupakan anggota bilangan modulo menghasilkan karakteristik ring matriks mengikuti bilangan modulo yang ditentukan yaitu, $na = (\bar{0})$ dengan $n = k$ atau $ka = (\bar{0})$, dimana bilangan modulonya adalah k untuk setiap a elemen modulo *k* maka karakteristik ring matriksnya adalah k.

Kata Kunci: order elemen, bilangan modulo, karakteristik ring matriks.

ABSTRACT

Hasibullah, 2011. **Characteristics of Matrix Ring Size *nxn* Modulo *k*.** Thesis, Mathematic Departement Faculty of Science and Technology The State of Islamic University Maulana Malik Ibrahim Malang.
Adviser: (I) Wahyu Henky Irawan, M.Pd
(II) Fachrur Rozi, M.Si

The issue on the study of this thesis are how order of elements of matrix ring ize *nxn* modulo k by taking the concept of order of elements of group and how characteristics formed on the matrix ring if the matrix have ordo 2*x*2 until *nxn* and its entries in the form of modulo numbers 2 to k. Wheres the purpose of writing this thesis are to determin order of elements of matrix ring *nxn* modulo k and to find its characteristics. The review was limited to the definitions and theorems of ring, matrix and modulo numbers.

To get the final in determining the order of elements of matrix ring *nxn* modulo k and searching the characteristics, that is $ka = I$, $\forall a \in R$, I is a additive identity on R, where k is a number of modulo, so that $ka = (\bar{0})$, then order of elements of matrix ring is k. Therefore $ka = a + a + a + \cdots + a = (\bar{0})$ where $(\bar{0})$ is the unity element of additive group and for each a is an element of R, then the characteristic of ring matrix is k. With the members of ring form a matrix columns and rows ordo 2*x*2 until *nxn* and its entries in the form of modulo numbers 2 to k, that will be known the characteristic of matrix ring is k.

The result is that each matrix ring with entries are members of modulo numbers produce characteristic of matrix ring following modulo numbers have determined that is, $na = (\bar{0})$, with $n = k$ or $ka = (\bar{0})$ where modulo number is k for each a members of modulo k then the characteristic of matrix ring is k.

Keyword: order of elements, modulo numbers, characteristics of matrix ring.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Dunia ilmu pengetahuan dan teknologi (sains dan teknologi) semakin berkembang dengan cepat seiring waktu berjalan tidak terkecuali dalam hal ini adalah ilmu matematika yang notabene merupakan ratu dari ilmu pengetahuan (*Queen of Science*). Sebagai ratu dari ilmu pengetahuan ilmu matematika telah banyak melahirkan penemuan di bidang teknologi hingga akhir zaman ini.

Sains adalah pengetahuan yang disusun secara bersistem malalui pengamatan, pengkajian dan percobaan, sedangkan teknologi merupakan kumpulan pengetahuan yang diturunkan dari sains yang kemudian diterapkan untuk memberikan manfaat langsung kepada manusia.

Matematika merupakan dasar ilmu pengetahuan (*basic of science*) yang dewasa ini sangat berkembang pesat baik konsep, teori, maupun aplikasinya. Dalam kehidupan sehari-hari banyak permasalahan yang harus diselesaikan oleh setiap orang untuk mempertahankan dan memperbaiki kualitas hidupnya. Tetapi tidak banyak yang menyadari bahwa dibalik kemajuan ilmu pengetahuan dan teknologi yang menghemat tenaga, sumber daya dan pikiran itu sangat membutuhkan peranan dari matematika.

Banyaknya fenomena dalam kehidupan sehari-hari yang sulit diselesaikan secara langsung sehingga dibutuhkan matematika sebagai alat bantu dalam menyelesaikan suatu masalah baik algoritma berfikir dari matematika, cara berhitung, ataupun hanya sebagai simbol-simbol untuk menyederhanakannya. Karena semakin hari semakin canggihnya sains dan teknologi yang ada, maka hampir semua masalah tersebut dapat diselesaikan. Salah satu disiplin yang dari zaman dahulu sampai sekarang yang masih unggul digunakan di kalangan berbagai disiplin ilmu lainnya adalah matematika. Matematika merupakan salah satu disiplin ilmu yang sangat dibutuhkan untuk disiplin ilmu lainnya, apalagi keberadaannya dilengkapi dengan teknologi yang semakin canggih, yaitu komputer.

Matematika seringkali didefinisikan sebagai ilmu pengetahuan yang mempelajari tentang bilangan dan bangun (datar dan ruang). Definisi tersebut benar, jika dipandang dari segi wilayah kajian. Namun kecenderungan pada saat ini, definisi matematika lebih dikaitkan dengan kemampuan berpikir yang digunakan para matematikawan. NRC (*National Research Council*) dari Amerika Serikat menyatakan dengan singkat bahwa "*Mathematics is a science of patterns and order*" artinya, matematika adalah ilmu yang membahas pola atau keteraturan dan tingkatan (Shadiq, 2007: 6).

Alam semesta memuat pola-pola atau keteraturan-keteraturan. Matahari, bumi, bulan, serta planet planet yang lain berbentuk bola. Lintasan bumi saat mengelilingi matahari, demikian juga lintasan lintasan planet lain saat mengelilingi matahari, berbentuk elip. Alam semesta diciptakan Allah dengan perhitungan perhitungan yang cermat, sehingga membentuk pola pola tertentu. Allah berfirman dalam al-Quran surat al-Qamar ayat 49

إِنَّا كُلَّ شَيۡءٍ خَلَقۡنَٰهُ بِقَدَرٖ ۝٤٩

Artinya: “*Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran*” (Q.S.. Al-Qamar 54: 49).

Dan firman Allah dalam surart al-Jin

وَأَحۡصَىٰ كُلَّ شَيۡءٍ عَدَدَۢا ۝٢٨

Artinya: ”*Dia menghitung segala sesuatu satu persatu*” (Q.S. al-Jin 72:28).

Semua yang ada di alam ini ada ukurannya, ada hitung-hitungannya, ada rumusnya, atau ada persamaannya. Ahli matematika tidak membuat suatu rumus sedikitpun, melainkan hanya menemukan rumus atau persamaan. Rumus-rumus yang ada sekarang bukan diciptakan manusia, tetapi sudah disediakan. Manusia hanya menemukan dan menyimbolkan dalam bahasa matematika (Abdusysyakir, 2007 : 79, 80).

Dengan demikian, dunia matematika lahir dari rahim kesadaran bahwa alam semesta diatur oleh hukum hukum yang teratur. Dari kesadaran yang sedemikian itu, manusia lalu berusaha mencandra hukum-hukum keteraturan yang diikuti oleh alam tersebut. Dari pencandraan itu, manusia lalu bisa menentukan dan mengatur apa yang harus dilakukannya. Hukum keteraturan di alam menjadi petunjuk dan landasan bagi manusia untuk bertindak di alam ini (Alisah, 2007: 16, 17).

Aljabar merupakan cabang dari ilmu matematika yang materinya cukup kompleks. Salah satunya adalah aljabar linear yang mana salah satu bahan kajiannya adalah matriks kemudian struktur aljabar (aljabar abstrak) yang mana salah satu bahan kajiannya adalah ring. Kemudian cabang ilmu matematika lainnya adalah teori bilangan yang salah satu kajiannya berupa keterbagian (bilangan modulo).

Di dalam kajian struktur aljabar selalu melibatkan 3 unsur yaitu sebuah himpunan tidak kosong, satu atau lebih operasi *biner*, dan beberapa aksioma. Banyaknya operasi dan aksioma yang berlaku menjadi pembeda antara struktur aljabar yang satu dengan struktur aljabar yang lain (Arifin, 2000 : 5).

Ring merupakan kajian struktur aljabar dengan menggunakan dua buah operasi *biner* yang memenuhi syarat-syarat tertentu. Sedangkan Matriks merupakan struktur aljabar yang tersusun oleh bilangan (elemen atau unsur) sehingga membentuk baris dan kolom. Dalam pembahasan grup terdapat order elemen yang menentukan tingkatan masing-masing anggota suatu grup. Dari konsep order elemen grup akan dibawa ke konsep ring untuk menentukan tingkatan anggota-anggota suatu ring.

Dari kajian ring dan matriks, dimana ring menggunakan dua operasi tertentu yaitu operai *biner* dengan syarat tertentu dan matriks membentuk sebuah baris dan kolom tersirat pesan bahwa Allah menciptakan makhluk-Nya secara berpasang-pasangan dan menjadikannya bergolong-golongan, bersuku-suku, dan berbangsa-bangsa. Hal ini sesuai dengan apa yang difirmankan Allah dalam al-Quran.

يَٰٓأَيُّهَا ٱلنَّاسُ إِنَّا خَلَقۡنَٰكُم مِّن ذَكَرٖ وَأُنثَىٰ وَجَعَلۡنَٰكُمۡ شُعُوبٗا وَقَبَآئِلَ لِتَعَارَفُوٓاْۚ إِنَّ أَكۡرَمَكُمۡ عِندَ ٱللَّهِ أَتۡقَىٰكُمۡۚ إِنَّ ٱللَّهَ عَلِيمٌ خَبِيرٞ ١٣

Artinya: "*Hai manusia, Sesungguhnya kami menciptakan kamu dari seorang laki-laki dan seorang perempuan dan menjadikan kamu berbangsa-bangsa dan bersuku-suku supaya kamu saling kenal mengenal. Sesungguhnya orang yang paling mulia diantara kamu di sisi Allah ialah orang yang paling taqwa diantara kamu. Sesungguhnya Allah Maha Mengetahui lagi Maha Mengenal*" (Q.S. al-Hujurat 49:13).

Dari uraian sepintas tentang ring dan matriks diatas, penulis ingin mengkaji lebih lanjut keterkaitan antara keduanya dengan pola tertentu. Oleh karena itu, penulis disini mengambil judul **Karakteristik Ring Matriks Berukuran nxn Modulo k**.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah yang telah diuraikan di atas, maka penulis akan mengkaji

1. Bagaimana order elemen ring matriks berukuran nxn modulo k?
2. Bagaimana karakteristik ring matriks berukuran nxn modulo k?

1.3 Tujuan Penelitian

Sesuai latar belakang dan rumusan masalah, maka tujuan dari kajian ring matriks ini adalah

1. Menentukan order elemen ring matriks berukuran nxn modulo k
2. Mencari karakteristik ring matriks berukuran nxn modulo k

1.4 Batasan Masalah

Dalam kajian ini, permasalahan yang akan dibahas dibatasi hanya pada definisi dan teorema tentang ring, matriks dan bilangan modulo.

1.5 Manfaat Penelitian

Hasil kajian yang berupa pembahasan masalah ini diharapkan dapat bermafaat bagi:

1. Bagi penulis
   a. Menambah pengetahuan dan keilmuan tentang hal-hal yang berkaitan dengan ring dan matriks serta bilangan modulo
   b. Mengembangkan wawasan keilmuan tentang pendeskripsian ring matriks dan bilangan modulo
2. Bagi lembaga: sebagai bahan informasi tentang pembelajaran aljabar linear, aljabar abstrak dan teori bilanga.
3. Sebagai tambahan bahan kepustakaan
4. Bagi mahasiswa: sebagai bahan informasi untuk kajian lebih lanjut mengenai aljabar pada ring, matriks dan bilangan modulo.

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam kajian ini adalah metode kepustakaan (*library research*) atau kajian pustaka, yakni melakukan penelitian untuk memperoleh data-data dan beberapa informasi serta objek yang digunakan dalam pembahasan masalah tersebut. Studi kepustakaan merupakan penampilan argumentasi penalaran keilmuan untuk memaparkan hasil olah pikir mengenai suatu permasalahan atau topik kajian kepustakaan yang dibahas dalam penelitian ini.

Adapun langkah-langkah yang akan digunakan oleh peneliti dalam membahas penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mendeskripsikan konsep tentang ring, matriks dan bilangan modulo
2. Menerapkan konsep ring, matriks dan bilangan modulo untuk menjelaskan karakteristik dari ring matriks, dengan langkah-langkah sebagai berikut:
   a. Menentukan definisi yang berkaitan dengan ring, matriks dan bilangan modulo, kemudian memberikan contoh dari definisi tersebut
   b. Menentukan teorema yang berkaitan dengan ring, matriks dan bilangan modulo, kemudian membuktikan teorema tersebut
   c. Membuat kesimpulan (prinsip baru) tentang ring, matriks dan bilangan modulo, dari gabungan antara definisi dan teorema yang telah ada
   d. Menjelaskan karakteristik dari ring matriks kemudian memberikan contoh
3. Menyimpulkan karakteristik ring matriks.

1.7 Sistematika Penulisan

Agar dalam membaca hasil penelitian ini pembaca mudah memahami dan tidak menemukan kesulitan, maka dalam penyajiannya ditulis berdasarkan suatu sistematika yang secara garis besar dibagi menjadi empat bab, yaitu:

1. BAB I PENDAHULUAN

   Pendahuluan meliputi: latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

2. BAB II TINJAUAN PUSTAKA

   Bagian ini terdiri atas beberapa konsep (teori teori) yang mendukung bagian pembahasan, membahas tentang ring, matriks, bilangan modulo disertai integrasi agama.

3. BAB III PEMBAHASAN

   Pembahasan ini akan membahas tentang karakteristik ring matriks berordo yang berentrikan bilangan modulo dan disertai kajian integrasi agama.

4. BAB IV PENUTUP

   Bab ini akan diisi mengenai kesimpulan secara keseluruhan dan saran saran.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Ring

Sistem aljabar yang masing-masing terdiri dari himpunan tidak kosong serta melibatkan di dalamnya satu operasi (penjumlahan atau perkalian) yang memenuhi sifat-sifat tertentu disebut grup. Ring merupakan sistem aljabar yang menjadi bagian dari pada grup tetapi melibatkan di dalamnya dua operasi (*biner*) yang sesuai dan saling berhubungan. Benar jika dikatakan bahwa suatu himpunan itu ring maka sudah tentu himpunan itu grup.

Definisi Ring (Sukirman, 1993 : 279)

Misalkan R adalah suatu himpunan tidak kosong. Operasi-operasi yang disajikan dengan tanda-tanda $+$ dan . (sebutlah berturut-turut penjumlahan dan perkalian), didefinisikan pada elemen R. R terhadap operasi operasi $+$ dan . disebut ring, apabila:

(1) $(R, +)$ merupakan grup abelian, yaitu

(i) $\forall a, b \in R$ berlaku $a + b \in R$ (sifat tertutup terhadap operasi +)

(ii) $\forall a, b, c \in R$ berlaku $(a + b) + c = a + (b + c)$ (sifat asosiatif terhadap operasi $+$)

(iii) Ada $z \in R$ sedemikian hingga $\forall a \in R$ berlaku $a + z = z + a = a$ (z disebut elemen nol, atau elemen identitas terhadap operasi $+$) (R memuat elemen identitas terhadap operasi $+$)

(iv) $\forall a \in R$, ada $(-a) \in R$ sedemikian hingga $a + (-a) = (-a) + a = z$ (setiap elemen R mempunyai invers terhadap operasi +)

(v) $\forall a, b \in R$ berlaku $a + b = b + a$ (sifat komutatif terhadap operasi $+$)

(2) $(R, \ .)$ suatu semigrup, yaitu:

(vi) $\forall a, b \in R$ berlaku $\forall a, b \in R$ (sifat tertutup terhadap operasi .)

(vii) $\forall a, b, c \in R$ berlaku $(a.b).c = a.(b.c)$ (sifar asosiatif terhadap operasi .)

(3) Berlaku sifat distributif . terhadap $+$, yaitu: $\forall a, b, c \in R$ berlaku

(viii) $a.(b + c) = a.b + a.c$ (sifat distributif kanan)

(ix) $(a + b).c = a.c + b.c$ (sifat distributif kiri)

Definisi Ring (Mardiana, 2007 : 3)

Suatu himpunan tak kosong R dilengkapi dengan operasi penjumlahan $(+)$ dan perkalian $(.)$ disebut ring jika dipenuhi sifat-sifat berikut:

1) R tertutup terhadap penjumlahan:

untuk setiap $x, y \in R$ berlaku $x + y \in R$

2) Penjumlahan di R assosiatif:

untuk setiap $x, y, z \in R$ berlaku $x + (y + z) = (x + y) + z$

3) R memiliki elemen netral 0 terhadap penjumlahan:

untuk setiap $x \in R$ berlaku $x + 0 = 0 + x$

4) R memuat invers invers terhadap penjumlahan: untuk setiap x di R terdapat $-x$ di R sedemikian sehingga $x + (-x) = 0 = (-x) + x$

5) Penjumlahan di R komutatif:

untuk setiap $x, y \in R$, berlaku $x + y = y + x$.

6) R tertutup terhadap perkalian: untuk setiap $x, y \in R$ berlaku $x . y \in R$

7) Perkalian di R assosiatif:

untuk setiap $x, y, z \in R$ berlaku $x . (y . z) = (x . y) . z$.

8) Dua hukum distributif dipenuhi di R: untuk setiap $x, y, z \in R$ berlaku

$x . (y + z) = x . y + x . z$ dan $(x + y) . z = x . z + y . z$,

Dalam beberapa literatur, dari definisi ring diatas dapat ditulis secara singkat menjadi

$(R, +, \ .)$ adalah ring apabila:

1. $(R, +)$ suatu grup abelian (grup komutatif)
2. $(R, +)$ suatu semigrup, dan
3. Memenuhi sifat distributif kanan dan sifat distributif kiri.

Catatan:

Perlu diperhatikan bahwa operasi-operasi yang diberikan di atas tidak harus berupa penjumlahan dan perkalian $(R, +, \ .)$ saja, tetapi operasi-operasi dalam ring dapat berupa apa saja misalnya $(R, \oplus, \otimes), (R, *, \circ), (R, \circledast, \diamond)$ atau yang lain. Demikian pula operasi-operasi yang akan digunakan operasi yang mana yang akan digunakan sebagai operasi pertama maupun operasi yang kedua, namun yang penting diperhatikan adalah:

a. *R* dengan salah satu dari dua operasi itu membentuk suatu grup abelian (grup komutatif)

b. *R* dengan operasi yang lainnya merupakan suatu tanda semigrup, dan

c. Salah satu operasi yang membuat *R* menjadi suatu semigrup yang distributif kiri dan distributif kanan terhadap operasi yang membuat *R* sebagai grup komutatif (abelian).

Definisi Ring Komutatif (Raisinghania, 1980 : 314)

Suatu Ring $(R,+,.)$ disebut ring komutatif (RK) jika dan hanya jika operasi kedua (operasi .) bersifat komutatif di *R*.

Definisi Ring Satuan (Raisinghania, 1980 : 314)

Suatu Ring $(R,+,.)$ disebut ring dengan elemen satuan (RS) jika dan hanya jika *R* punya elemen identitas terhadap operasi kedua (operasi .).

Definisi Ring Komutatif Satuan (Raisinghania, 1980 : 314)

Suatu Ring $(R,+,.)$ disebut ring komutatif dengan elemen satuan (RKS) jika dan hanya jika operasi kedua bersifat komutatif dan *R* punya elemen identitas terhadap operasi kedua, dengan kata lain merupakan Ring Komutatif (RK) sekaligus Ring dengan Elemen Satuan (RS).

Contoh Ring

1. Z = Himpunan semua bilangan bulat

    Didefinisikan operasi pada Z seperti berikut:

    $+$ adalah operasi penjumlahan biasa

    $\bullet$ adalah operasi perkalian biasa.

    (Z, $+$, $\bullet$) merupakan ring.

Bukti:

a. Ditunjukkan (Z, $+$) grup abelian

   i. $\forall a, b \in Z, a + b \in Z$ (sifat ketertutupan penjumlahan bilangan bulat)

   ii. $\forall a, b, c \in Z,\ (a + b) + c = a + (b + c)$ (sifat assosiatif penjumlahan bilangan bulat)

   iii. $\exists e = 0 \in Z,\ \forall a \in Z$, berlaku $a + 0 = 0 + a = a$, jadi 0 adalah elemen identitas pada Z

   iv. $\forall a \in Z, \exists a^{-1} = -a \in Z$, berlaku $a + (-a) = (-a) + a = 0$, jadi setiap elemen di Z mempunyai invers terhadap operasi $+$

   v. $\forall a, b \in Z,\ a + b = b + a$ (sifat komutatif penjumlahan bilangan bulat)

   Dari a (i, ii, iii, iv, dan v), diperoleh (Z, $+$) grup abelian

b. Ditunjukkan (Z , $\bullet$) semigrup

   i. $\forall a, b \in Z$ berlaku $a \bullet b \in Z$ (sifat ketertutupan perkalian bilangan bulat)

   ii. $\forall a, b, c \in Z,\ (a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$ (sifat assosiatif perkalian bilangan bulat)

   Dari b (i dan ii), diperoleh (Z , $\bullet$) semigrup

c. Ditunjukkan berlaku sifat distributif kiri dan kanan

i. $\forall a, b, c \in Z, a \bullet (b + c) = (a \bullet b) + (a \bullet c)$

ii. $(a + b) \bullet c = (a \bullet c) + (b \bullet c)$.

2. Misalkan R adalah himpunan bilangan real dan S himpunan fungsi-fungsi bernilai real yang didefinisikan pada R, berarti $S = \{f : R \longrightarrow R \mid f \text{ fungsi}\}$. Pada S didefinisikan penjumlahan dan perkalian fungsi biasa, yaitu: untuk setiap $f, g \in S$ dan $x \in R$,

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{dan} \quad (fg)(x) = f(x)g(x).$$

Menggunakan definisi penjumlahan dan perkalian fungsi di atas, maka dapat dibuktikan dengan mudah bahwa penjumlahan dan perkalian fungsi di atas merupakan operasi *biner* pada S. Dengan kata lain, pada S berlaku sifat tertutup terhadap penjumlahan dan perkalian. Selanjutnya diselidiki sifat-sifat ring yang lain, sebagai berikut:

a. Sifat assosiatif terhadap penjumlahan

Untuk sebarang $f, g \in S$ dan $x \in R$, berlaku

$$
\begin{aligned}
\{(f + g) + h\}(x) &= (f + g)(x) + h(x) && \text{definisi penjumlahan fungsi} \\
&= \{f(x) + g(x)\} + h(x) && \text{definisi penjumlahan fungsi} \\
&= f(x) + \{g(x) + h(x)\} && \text{sifat assosiatif pada } R \\
&= f(x) + \{(g + h)(x)\} && \text{definisi penjumlahan fungsi} \\
&= \{f + (g + h)\}(x) && \text{definisi penjumlahan fungsi}
\end{aligned}
$$

Ini berarti $(f + g) + h = f + (g + h)$, untuk setiap f, g, h di S.

b. Terdapat elemen netral (nol) terhadap penjumlahan

Dalam S terdapat fungsi nol θ yang didefinisikan dengan $\theta(x) = 0$ untuk setiap x di R, sedemikian hingga untuk sebarang fungsi f di S dan x di R berlaku:

$(\theta + f)(x) = \theta(x) + f(x)$	definisi penjumlahan fungsi
$= 0 + f(x)$	definisi fungsi nol
$= f(x)$	

dan

$(f + \theta)(x) = f(x) + \theta(x)$	definisi penjumlahan fungsi
$= f(x) + 0$	definisi fungsi nol
$= f(x)$	

Ini berarti $(\theta + f) = f = (f + \theta)$, untuk setiap f di S. Fungsi nol θ disebut elemen netral (nol) di S.

c. Terdapat elemen invers terhadap penjumlahan

Untuk setiap fungsi f di S terdapat fungsi $-f$ di S yang didefinisikan dengan $(-f)(x) = -f(x)$, untuk setiap x di R, sedemikian hingga berlaku:

$((-f) + f)(x) = (-f)(x) + f(x)$	definisi penjumlahan fungsi
$= -f(x) + f(x)$	definisi fungsi $(-f)$
$= 0$	definisi elemen nol di R
$= \theta(x)$	definisi operator nol

dan

$(f + (-f))(x) = f(x) + (-f)(x)$	definisi penjumlahan fungsi
$= f(x) - f(x)$	definisi fungsi $(-f)$

$= 0$ definisi elemen nol di R

$= \theta(x)$ definisi operator nol.

Ini berarti $((-f) + f) = \theta = (f + (-f))$, untuk setiap f di S. Fungsi $(-f)$ disebut elemen invers terhadap penjumlahan di S dari f.

d. Sifat komutatif terhadap penjumlahan

Untuk sebarang $f, g \in S$ dan $x \in R$, berlaku

$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ definisi penjumlahan fungsi

$= g(x) + f(x)$ sifat komutatif terhadap + di R

$= (g + f)(x)$ definisi penjumlahan fungsi

Ini berarti $(f + g) = (g + f)$, untuk setiap f, g di S.

e. Sifat assosiatif terhadap perkalian.

Untuk sebarang $f, g \in S$ dan $x \in R$, berlaku

$\{(fg)h\}(x) = (fg)(x)h(x)$ definisi perkalian fungsi

$= \{f(x)g(x)\}h(x)$ definisi perkalian fungsi

$= f(x)\{g(x)h(x)\}$ sifat assosiatif pada R

$= f(x)\{(gh)(x)\}$ definisi perkalian fungsi

$= \{f(gh)\}(x)$ definisi perkalian fungsi

Ini berarti $(fg)h = f(gh)$, untuk setiap f, g, h di S.

f. Sifat distributif kanan dipenuhi

Untuk sebarang $f, g \in S$ dan $x \in R$, berlaku

$\{(f + g)h\}(x) = (f + g)(x)h(x)$ definisi perkalian fungsi

$= \{f(x) + g(x)\}h(x)$ definisi penjumlahan fungsi

$= f(x)h(x) + g(x)h(x)$ sifat distributif kanan pada R

$= (fh)(x) + (gh)(x)$ definisi perkalian fungsi

$= \{fh + gh\}(x)$ definisi penjumlahan fungsi

Ini berarti $(f + g)h = (fh + gh)$, untuk setiap f, g, h di S. Dengan cara yang serupan dapat ditunjukkan bahwa $f(g + h) = fg + fh$, untuk setiap f, g, h di S.

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa $(S, +, .)$ merupakan ring.

2.1.1 Sifat-sifat Ring

Teorema (Raisinghania, 1980 : 314)

Misal $(R, *, \bullet)$ adalah ring, maka untuk setiap $a,b \in R$ berlaku:

i. $I \bullet a = a \bullet I = I$ (I = identitas operasi $*$)

ii. $a \bullet b^{-1} = a^{-1} \bullet b = (a \bullet b)^{-1}$

iii. $a^{-1} \bullet b^{-1} = a \bullet b$

iv. $(a * b)^{-1} = a^{-1} * b^{-1}$

v. $a \bullet (b * c^{-1}) = (a \bullet b) * (a \bullet c)^{-1}$

vi. $(b * c^{-1}) \bullet a = (b \bullet a) * (c \bullet a)^{-1}$

vii. $i^{-1} \bullet a = a^{-1}$ (i = identitas terhadap operasi kedua atau operasi $\bullet$)

Bukti:

(i) $(a \bullet I) * (a \bullet I) = a \bullet (I * I)$ .... sifat distributif

$= a \bullet I$ …..................... sifat identitas

$(a \bullet I) * (a \bullet I) = (a \bullet I) * I$ …..................... sifat identitas

Sehingga diperoleh bahwa $(a \bullet I) = I$ .... hukum kanselasi

Secara analog dapat kita buktikan bahwa $I \bullet a = I$

(ii) $(a \bullet b^{-1}) * (a \bullet b) = a \bullet (b^{-1} * b)$ .... sifat distributif

$= a \bullet I$ .... sifat identitas

$= I$ ………………………. sifat ke (i)

Karena $(a \bullet b^{-1}) * (a \bullet b) = I$ maka dapat kita peroleh bahwa

$(a \bullet b^{-1}) = (a \bullet b)^{-1}$ atau $(a \bullet b^{-1})$ adalah invers kiri dari $a \bullet b$.

Selanjutnya kita tunjukkan invers kanannya.

Kemudian secara analog dapat kita buktikan bahwa $(a^{-1} \bullet b) = (a \bullet b)^{-1}$.

Oleh karena $(a \bullet b^{-1}) = (a \bullet b)^{-1}$ dan $(a^{-1} \bullet b) = (a \bullet b)^{-1}$ sehingga dapat kita simpulkan bahwa $a \bullet b^{-1} = a^{-1} \bullet b = (a \bullet b)^{-1}$.

(iii) $a^{-1} \bullet b^{-1} = (a \bullet b^{-1})^{-1}$ ………………………………. sifat ke (ii)

$= [(a \bullet b)^{-1}]^{-1}$ ………………………………. sifat ke (ii)

$= (a \bullet b)$ ………………………………. sifat ke (ii)

(iv) Karena $(a^{-1} * b^{-1}) * (a * b) = (b^{-1} * a^{-1}) * (a * b)$ .... sifat komutatif

$= b^{-1} * [(a^{-1}) * (a * b)]$ .. sifat assosiatif

$= b^{-1} * [(a^{-1} * a) * b]$ ..... sifat assosiatif

$= b^{-1} * (I * b)$ ………………. sifat invers

$= b^{-1} * b$ .... sifat identitas

$= I$ ………………………………. sifat invers

Maka $(a^{-1} * b^{-1}) = (a * b)^{-1}$.

(v) $a \bullet (b * c^{-1}) = (a \bullet b) * (a \bullet c^{-1})$ ………………… sifat distributif

$= (a \bullet b) * (a \bullet c)^{-1}$ ………………………. sifat ke (ii)

(vi) $(b * c^{-1}) \bullet a = (b \bullet a) * (c^{-1} \bullet a)$ .... sifat distributif

$= (b \bullet a) * (c \bullet a)^{-1}$ ……..................... sifat ke (ii)

(vii) $a * (i^{-1} \bullet a) = (i \bullet a) * (i^{-1} \bullet a)$ .... sifat identitas operasi $\bullet$

$= (i * i^{-1}) \bullet a$ .... sifat distributif

$= I \bullet a$ .... sifat Identitas operasi $*$

$= I$ ………................. sifat ke (i)

Maka $(i^{-1} \bullet a) = a^{-1}$ ……..................... sifat invers

2.1.2 Order Elemen

Order elemen adalah banyaknya anggota dalam suatu grup yang dapat ditulis dengan notasi $n(G)$. Jika suatu grup mempunyai banyak anggota tak berhingga (*infinite*) disebut grup tak berhingga (grup infinit). Sedangkan suatu grup yang mempunyai banyak anggota berhingga (*finite*) disebut grup berhingga (grup finit). Jika suatu grup yang mempunyai order kecil atau mempunyai anggota yang sedikit, maka untuk melihat sifat-sifatnya akan mudah apabila menggunakan tabel hasil operasi *biner* dari setiap pasang elemen (anggota) G.

Definisi Order Elemen (Raisinghania, 1980 : 91)

Misal $(G, \bullet)$ adalah sebarang grup. Misal a adalah sebarang elemen dari G. Untuk suatu bilangan bulat terkecil m yang memenuhi $a^m = e$ (e adalah elemen identitas di G maka m dikatakan sebagai order dari a, dan dituliskan sebagai $|a| = m$.

Dalam kasus ini, jika tidak ada m yang memenuhi $a^m = e$, kita katakan bahwa a berorder *infinite* atau nol.

Contoh Order Elemen

1. Diberikan grup modulo 6 dengan operasi jumlah atau $(M_6, +)$, $M_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Elemen identitas adalah 0, maka

$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 0$ maka $|1| = 6$

$2 + 2 + 2 = 0$ maka $|2| = 3$

$3 + 3 = 0$ maka $|3| = 2$

$4 + 4 + 4 = 0$ maka $|4| = 3$

$5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 0$ maka $|5| = 6$

dan $|0| = 1$

2. Diberikan grup (K, x) dengan $K = \{i, -i, 1, -1\}$

Dengan membuat Tabel Cayley berikut maka kita mudah menentukan order masing-masing elemennya

Tabel 2.1.2.1 Cayley grup (K, x) dengan $K = \{i, -i, 1, -1\}$

X	**I**	**-i**	**1**	**-1**
I	-1	1	I	-i
-i	1	-1	-i	i
1	I	-i	1	-1
-1	-i	I	-1	1

Elemen identitas adalah 1

$i \; x \; i \; x \; i \; x \; i = 1$ maka $|i| = 4$

$(-i) \; x \; (-i) \; x \; (-i) \; x \; (-i) = 1$ maka $|-i| = 4$

$(-1)\ x\ (-1) = 1$ maka $|-1| = 2$

dan $|1| = 1$

Teorema (Raisinghania, 1980 : 93)

Pada grup terhingga (grup finit), order dari setiap elemen adalah *finite* (terhingga).

Bukti:

Misal (G, o) adalah grup. Misal $a \in G$ dan $e \in G$ adalah elemen identitas. Karena G tertutup terhadap operasi o maka a o a, a o a o a, dan seterusnya adalah termuat di G. Juga elemen-elemen $a, a^2, \ldots, a^k, \ldots, a^h$ tidak semuanya dapat berbeda.

Misal $a^k = a^h$ dengan $k > h$

maka a^k o $(a^{-h}) = a^h$ o (a^{-h}) $a^{k-h} = e$, akibatnya $|a| = k - h$

karena $k > h$ maka $k - h$ adalah bilangan bulat positif.

Misal $k - h = m$ maka m adalah bilangan bulat positif terhingga sedemikian hingga $a^m = e$. Akibatnya $|a| \leq m$.

Order dari a adalah *finite* dan a adalah sebarang elemen dari G, maka order dari grup *finite* adalah finit.

Teorema (Raisinghania, 1980 : 94)

Order elemen dari suatu grup adalah selalu sama dengan order dari inversnya.

Bukti:

Misal (G, o) adalah grup, maka akan kita tunjukkan bahwa $|a| = |a^{-1}|$ untuk setiap $a \in G$.

Andaikan $|a| = m$ dan $|a^{-1}| = n$ $(m \neq n)$

$|a| = m$ berarti $a^m = e$ (e = elemen identitas di G)

Sehingga $(a^m)^{-1} = e$

$$a^{-m} = e$$

$$(a^{-1})^m = e$$

ini berarti $|a^{-1}| \leq m$ atau $n \leq m$

Begitu pula $|a^{-1}| = n$ berarti $(a^{-1})^n = e$

$$(a^n)^{-1} = e$$

$$[(a^n)^{-1}]^{-1} = e^{-1}$$

$$a^n = e$$

Ini menujukkan bahwa $|a| \leq n$ atau $m \leq n$

Karena $m \leq n$ dan $n \leq m$ maka $m = n$.

Kontradiksi dengan pengandaian.

Jadi $|a| = |a^{-1}|$.

2.1.3 Karakteristik Ring

Suatu sistem bilangan yang mempunyai kelipatan dari suatu elemen R misalkan $A \in R$ dan n suatu bilangan bulat positif, maka $na = a + a + a + \cdots + a$ sebanyak n suku. Mengingat sifat ketertutupan pada penjumlahan dari ring R maka $na \in R$ juga.

Dalam buku *Modern Algebra* didefinisikan

Definisi (Raisinghania, 1980 : 330)

Karakteristik dari suatu ring adalah suatu bilangan positif terkecil n jika ada, sedemikian hingga $na = 0$, $\forall a \in R$ dimana 0 merupakan nilai nol dari R, dalam hal ini identitas penjumlahan grup $(R, +)$.

Definisi (Sukirman, 1993 : 344)

Karakteristik suatu ring R adalah suatu bilangan bulat positif terkecil, misalnya n (jika ada) sedemikian hingga $na = z$, $\forall a \in R$ jika bilangan bulat positif n tersebut tidak ada, maka dikatakan bahwa karakteristik dari ring R adalah nol atau tidak berhingga.

Beberapa definisi dari sumber literatur lainnya diantaranya:

Misalkan R ring. Jika untuk setiap $a \in R$ ada bilangan bulat positif terkecil n, sedemikian sehingga $n.a = 0$ (0 = unsur kesatuan aditif), maka dikatakan ring R mempunyai karakteristik n. Jika tidak ada n yang demikian, dikatakan ring R mempunyai karakteristik nol atau tak berhingga.

Contoh Karakteristik Ring

1. Misalkan Z_6 dengan operasi penjumlahan dan perkalian modulo 6 merupakan ring yang berkarakteristik 6.

$$Z_6 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}\}$$

Dengan mengguanakan tabel akan lebih mudah dicari yaitu,

Table 2.1.3.1 Operasi Penjumlahan dan Perkalian Modulo 6

$+_6$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$

$\cdot_6$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

Dapat terlihat bahwa $6x\overline{1} = \overline{0}, 3x\overline{2} = \overline{0}, 2x\overline{3} = \overline{0}, 3x\overline{4} = \overline{0}$ dan $\overline{6}x5 = \overline{0}$. Demikian pula $6x\overline{2} = 6x\overline{3} = 6x\overline{1} = \overline{0}$. Maka Z_6 mempunyai karakteristik 6.

Teorema (Raisinghania, 1980 : 93)

Misalkan R suatu ring dengan elemen kesatuan u. $(R, +)$ suatu grup komutatif dan misalkan order u, yaitu $p(u) = n$ berarti n suatu bilangan bulat positif terkecil, sedemikian hingga $nu = 0$.

Bukti:

Ambil sebarang $a \in R$, maka

$$(nu)a = 0a$$

$$n(ua) = 0$$

jadi

$$na = 0$$

Hal ini bahwa karakteristik dari ring R kurang dari atau sama dengan n. Misalkan karakteristik dari R adalah m, yaitu $m \leq n$, maka m suatu bilangan bulat positif terkecil, sedemikian hingga $ma = 0$, $\forall a \in R$. Karena $u \in R$, maka $mu = 0$. Hal ini berarti $p(u) = n$, maka $n \leq m$. Disimpulkan bahwa $m = n$, yaitu karakteristik suatu ring R dengan elemen kesatuan sama dengan periode kesatuan terhadap grup aditif R.

2.2 Matriks

Matriks merupakan kajian struktur aljabar linier dimana di dalamnya memuat variabel-variabel dari yang sederhana hingga yang kompleks. Untuk memecahkan suatu persoalan yang memuat banyak variabel digunakanlah kajian matriks sebagai alat untuk mempermudah analisa persoalan yang kompleks sehingga tidak heran jika beberapa literatur mengkaji matriks secara terperinci.

Definisi Matriks (Supranto, 2003: 3)

Matriks adalah suatu kumpulan angka-angka (sering disebut elemen-elemen) yang disusun menurut baris dan kolom sehingga berbentuk empat persegi panjang, dimana panjangnya dan lebarnya ditunjukkan oleh banyaknya kolom-kolom dan baris-baris.

Definisi Matriks (Hadley,G. 1992: 51)

Matriks adalah susunan persegi panjang dari bilangan-bilangan yang diatur dalam baris dan kolom. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan entri dalam matriks. Matriks ditulis sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Susunan di atas disebut sebuah matriks m kali n (ditulis $m \times n$) karena memiliki m baris dan n kolom.

Pada umumnya ukuran (*size*) suatu matriks dinyatakan dalam jumlah baris (arah horizontal) dan kolom (arah vertikal) yang dimilikinya. Matriks dinotasikan dengan huruf-huruf besar. Sedangkan entri-entri di dalam matriks dinotasikan dengan huruf kecil. Jika A adalah sebuah matriks, maka a_{ij} menyatakan entri yang terdapat dalam baris i dan kolom j dari A sehingga $A = [a_{ij}]$.

2.2.1 Macam-macam Matriks

1. Matriks Bujur Sangkar

Definisi Matriks Bujur Sangkar (Anton, 2004 : 66)

Matriks bujur sangkar adalah matriks dengan jumlah baris dan kolom yang sama. Matriks bujur sangkar *nxn* dikatakan berordo *n* dan kadang-kadang disebut matriks–*n*.

Contoh Matriks Bujur Sangkar

Jika $n = 3$ maka

$$\begin{bmatrix} 2i & 1-i & -1+i \\ i & 2-4i & -i \\ 3i & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

Contoh di atas adalah matriks bujur sangkar dengan ordo 3*x*3 dengan unsur bilangan kompleks.

2. Matriks Identitas

Definisi Matriks Identitas (Anton, 2004 : 45)

Matriks identitas bujur sangkar atau matriks satuan, dinotasikan dengan I_n atau singkatnya *I*, adalah matriks bujur sangkar dengan entri 1 pada diagonalnya dan entri nol pada bagian lainnya. Matriks identitas mirip dengan skalar 1 sehingga di dalam sebarang matriks bujur sangkar *A*, $AI = IA = A$.

Contoh Matriks Identitas

Jika $n = 3$ maka

$$I_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Contoh di atas adalah matriks identitas karena diagonal utamanya 1.

3. Matriks Diagonal

Definisi Matriks Diagonal (Anton, 2004 : 74)

Matriks bujur sangkar $D = \lfloor d_{ij} \rfloor$ disebut matriks diagonal jika seluruh entri tak diagonalnya adalah nol. Matriks diagonal kadang-kadang dinotasikan dengan:

$D = diag\ (d_{11}, d_{22,\ldots,}\ d_{nn})$

dengan d_{11} tidak boleh nol semua.

Contoh

Jika $n = 3$ maka

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Contoh di atas adalah matriks diagonal karena sumbu utamanya taknol.

2.2.2 Operasi dalam Matriks

1. Penjumlahan Matriks

Definisi (Anton, 1997: 23)

Jika A dan B adalah sebarang dua matriks yang ukurannya sama, maka jumlah $A + B$ adalah matriks yang diperoleh dengan menambahkan bersama-sama entri yang bersesuaian dengan matriks tersebut. Matriks yang ukurannya berbeda tidak dapat dijumlahkan.

Contoh

Jika $A = \begin{bmatrix} -i & 3 \\ 2+i & i \end{bmatrix}$ $\qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 1-i \\ 1-i & 3i \end{bmatrix}$ maka

$$A + B = \begin{bmatrix} -i+5 & 3+(1-i) \\ (2+1)(1-i) & i+3i \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -i+5 & (4-i) \\ 3 & 4i \end{bmatrix}$$

2. Perkalian Matriks

Definisi (Anton, 1997: 24)

Jika A adalah suatu matriks dan c adalah suatu skalar, maka hasil kali (*product*) $c \bullet A$ adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan masing-masing entri dari A dengan c.

Contoh

Jika A adalah matriks

$$A = \begin{bmatrix} -i & 3 \\ 2+i & i \end{bmatrix}$$

maka

$$iA = i\begin{bmatrix} -i & 3 \\ 2+i & i \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -i^2 & 3i \\ 2i+i^2 & i^2 \end{bmatrix}$$

Definisi (Supranto, 1993: 7)

Apabila $A_{mxn} = (a_{ij})$, $B_{nxp} = (b_{ij})$, perkalian matriks $A \; x \; B = AB = C$, dimaksudkan suatu matriks $(m \; x \; p)$; $(AB = C)$, yaitu matriks dengan m baris dan p kolom, di mana elemen C dari baris ke-i kolom ke-j diperoleh dengan rumus

$$C_{ij} = a_{i1}\, b_{1j} + a_{i2}\, b_{2j} + \ldots + a_{in}\, b_{nj},\; 1 \le i \le m,\; 1 \le j \le n.$$

Contoh

Diketahui matriks

$$A = \begin{bmatrix} -i & 3 \\ 2+i & i \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 1-i \\ 1-i & 3i \end{bmatrix}$$

maka

$$A \bullet B = \begin{bmatrix} -i & 3 \\ 2+i & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1-i \\ 1-i & 3i \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -i \cdot 5 + 3 \cdot (1-i) & -i \cdot (1-i) + 3 \cdot 3i \\ (2+i) \cdot 5 + i \cdot (1-i) & (2+i) \cdot (1-i) + i \cdot 3i \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -5i + 3 - 3i & -2i + 9i \\ 10 + 5i & 2 - 2i \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 - 8i & 7i \\ 10 + 5i & 2 - 2i \end{bmatrix}$$

2.2.3 Determinan Matriks

Definisi (Anton, 1997: 63)

Misalkan A adalah matriks kuadrat. Fungsi determinan dinyatakan oleh det, dan definisikan det(A) sebagai jumlah hasil kali elementer dari A, jumlah det(A) dinamakan determinan A.

Permutasi himpunan bilangan-bilangan bulat $\{1, 2, . . . , n\}$ adalah susunan bilangan-bilangan bulat ini menurut suatu aturan tanpa menghilangkan atau mengulangi bilangan-bilangan tersebut.

Untuk menyatakan permutasi umum dari himpunan $\{1, 2, . . . n\}$, maka dituliskan $(j_1, j_2, . . . , j_n)$ dimana j_1 adalah bilangan bulat pertama dalam permutasian, j_2 adalah bilangan bulat kedua dan seterusnya. Sebuah inversi (*inversion*) terjadi dalam permutasian $(j_1, j_2, . . . , j_n)$ jika sebuah bilangan bulat yang lebih besar mendahului sebuah bilangan bulat yang lebih kecil. Jumlah inversi dihitung dengan mencari banyak bilangan bulat yang lebih kecil dari j_1 dan yang membawa j_1 dalam permutasi tersebut kemudian mencari banyak bilangan bulat yang lebih kecil dari j_2 dan yang membawa j_2 dalam permutasi tersebut. Proses ini diteruskan untuk $j_3, . . . , j_{n-1}$. Jumlah bilangan-bilangan ini akan sama dengan jumlah inversi seluruhnya dalam permutasi tersebut.

Contoh

Ada enam permutasi dari himpunan bilangan-bilangan bulat $\{1, 2, 3\}$. Permutasi-permutasi tersebut adalah

(1, 2, 3) (2, 1, 3) (3, 1, 2)

(1, 3, 2) (2, 1, 3) (3, 2, 1).

Definisi (Anton. 1997: 61-62)

Sebuah permutasi dinamakan genap (*even*) jika jumlah inversi seluruhnya adalah sebuah bilangan bulat yang genap dan dinamakan ganjil (*odd*) jika jumlah inversi seluruhnya adalah sebuah bilangan bulat yang ganjil.

Hasil kali elementer A adalah setiap hasil kali n elemen A, sedangkan dua diantaranya tidak boleh berasal dari baris yang sama atau dari kolom yang sama. Matriks A yang berukuran $n \times n$ mempunyai $n!$ hasil kali elementer. Hasil kali elementer tersebut adalah hasil kali yang berbentuk $a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$, dimana ($j_1, j_2, \dots, j_n$) adalah permutasi himpunan {1, 2, . . . n}. Hasil kali elementer bertanda A adalah hasil kali elementer $a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$ dikalikan dengan +1 atau -1. Jika ($j_1, j_2, \dots, j_n$) permutasi genap, digunakan tanda + dan jika permutasi ganjil digunakan tanda $-$.

Contoh

Tabel berikut mengklasifikasikan berbagai permutasi dari {1, 2, 3} sebagai genap atau ganjil.

Tabel 2.2.3.1 Permutasi Himpunan {1, 2, 3}

Permutasi	***Banyaknya inversi***	***Klasifikasi***
(1, 2, 3)	0	genap
(1, 3, 2)	1	ganjil
(2, 1, 3)	1	ganjil
(2, 3, 1)	2	genap
(3, 1, 2)	2	genap
(3, 2, 1)	3	ganjil

Contoh

Daftarkan semua hasil kali elementer dari matriks berikut

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Karena setiap hasil kali elementer mempunyai dua faktor, dan karena setiap faktor berasal dari baris yang yang berbeda, maka hasil kali elementer dapat dituliskan dalam bentuk

$$a_{1\_}a_{2\_}$$

di mana titik kosong menandakan nomor kolom. Karena tidak terdapat dua faktor dalam hasil kali tersebut berasal dari kolom yang sama, nomor kolom haruslah $\underline{1}\ \underline{2}$ atau $\underline{2}\ \underline{1}$. Maka, hasil kali elementernya adalah $a_{11}a_{22}$ dan $a_{12}a_{21}$.

Contoh

Daftarkanlah semua hasil kali elementer bertanda dari matriks berikut

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Tabel 2.2.3.2 Hasil Kali Elementer Bertanda

Hasil kali elementer	*Permutasi terasosiasi*	*Genap atau ganjil*	*Hasil kali elementer bertanda*
$a_{11}a_{22}$	(1, 2)	Genap	$a_{11}a_{22}$
$a_{12}a_{21}$	(2, 1)	Ganjil	$-a_{12}a_{21}$

Definisi (Anton. 1997: 61-62)

Misalkan A adalah matriks bujur sangkar. Fungsi determinan dinyatakan oleh det, dan didefinisikan det(A) sebagai jumlah semua hasil kali elementer bertanda dari A. Nilai det(A) dinamakan determinan A.

Contoh

1. Hitunglah determinan determinan dari matriks

$$(i)\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad (ii)\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

$$(i)\ \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{22}$$

$$(ii)\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Rumus pertama dalam contoh di atas, didapatkan dari

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

(a) (b)

Gambar 2.2.3.1 Arah Perkalian Elemen Elemen Matriks

Gambar *a* dengan mengalikan elemen-elemen pada panah yang mengarah ke kanan dan mengurangkan hasil kali elemen-elemen pada panah yang mengarah ke kiri. Rumus kedua dalam contoh (*ii*) didapatkan dengan menyalin kembali kolom pertama dan kolom kedua seperti yang diperlihatkan dalam gambar *b*. Determinan tersebut kemudian dihitung dengan menjumlahkan hasil kali pada panah-panah yang mengarah ke kanan dan mengurangkan hasil kali pada panah-panah yang mengarah ke kiri.

2. Hitunglah determinan determinan dari

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan metode dari Gambar *a* maka akan memberikan

$\det(A) = (3)(-2) - (1)(4) = -10$

Dengan menggunakan metode dari Gambar *b* maka akan memberikan

$\det(B) = (45) + (84) + (96) - (105) - (-48) - (-72) = 240$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ -4 & 5 \\ 7 & -8 \end{matrix}$$

Simbol $|A|$ merupakan notasi alternatif untuk det(A). Sebagai contoh, determinan matriks 3x3 dapat ditulis sebagai

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \text{atau} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

2.3 Bilangan Modulo (Keterbagian)

Definisi (Muhsetyo, 1997 : 43)

Misalkan $a, b \in Z$, dengan $a \neq 0$. a dikatakan membagi b, ditulis $a \mid b$, jika $b = ax$, untuk suatu $x \in Z$. Suatu bilangan bulat a, $a \neq 0$, membagi bilangan bulat b jika terdapat suatu bilangan bulat x sehingga $b = ax$. Notasi $a \mid b$ dapat dibaca dengan "a membagi b", "b habis dibagi a", "a pembagi b", "a faktor dari b", atau "b kelipatan dari a". Jika a tidak membagi b, maka ditulis $a \nmid b$.

Contoh

1. Beberapa hasil operasi dengan operator modulo (keterbagian):

(i) 23 mod 5 = 3 $\quad$ $(23 = 5 \cdot 4 + 3)$

(ii) 27 mod 3 = 0 $\quad$ $(27 = 3 \cdot 9 + 0)$

(iii) 6 mod 8 = 6 $\quad$ $(6 = 8 \cdot 0 + 6)$

(iv) 0 mod 12 = 0 $\quad$ $(0 = 12 \cdot 0 + 0)$

(v) – 41 mod 9 = 4 $\quad$ $(-41 = 9\,(-5) + 4)$

(vi) – 39 mod 13 = 0 $\quad$ $(-39 = 13(-3) + 0)$

Penjelasan untuk (v): Karena a negatif, bagi $|a|$ dengan m mendapatkan sisa r'. Maka a mod $m = m - r'$ bila $r' \neq 0$. Jadi $|-41|$ mod 9 = 5, sehingga -41 mod 9 = 9 – 5 = 4.

2. Ditentukan berikut

$2 \mid 6$, karena ada $3 \in Z$ sehingga $6 = 2 \cdot 3$.

$5 \mid 30$, karena ada $6 \in Z$ sehingga $30 = 5 \cdot 6$.

$3 \mid 8$, karena tidak ada ada $x \in Z$ sehingga $8 = 3x$.

Jika $a \mid b$ dan $0 < a < b$, maka a disebut pembagi sejati dari b. Sebagai contoh, karena $2 \mid 6$ dan $0 < 2 < 6$, maka 2 dikatakan pembagi sejati dari 6. Untuk selanjutnya, notasi $a \mid b$ sudah memuat pengertian bahwa $a \neq 0$.

Teorema (Muhsetyo, 1997 : 43)

Untuk suatu bilangan bulat a, b, c berlaku:

1. $a \mid b$, maka $a \mid bc$ untuk setiap bilangan bulat c
2. $a \mid b$ dan $b \mid c$, maka $a \mid c$

   Tambahan, $a \mid b$ dan $a \mid c$, maka $a \mid b \pm c$
3. $a \mid b$ dan $a \mid c$, maka $a \mid (bx \pm cy)$ untuk setiap bilangan bulat x dan y;
4. $a \mid b$ dan $b \mid a$, maka $a = \pm b$
5. $a \mid b$, $a > 0$, $b > 0$, maka $a \leq b$
6. bilangan bulat $m \neq 0$, $a \mid b$ jika dan hanya jika $ma \mid mb$.

Bukti:

1. $a \mid b$, maka $\exists$ bilangan bulat x sehingga $b = ax$.

Akibatnya berlaku pula bahwa $bc = (ax)c = a(xc)$ untuk setiap bilangan bulat c. Karena pada bilangan bulat berlaku sifat tertutup pada perkalian, maka berarti terdapatlah bilangan bulat $p = xc$ sehingga berlaku $bc = ap$. Jadi $a \mid bc$.

Untuk bukti selanjutnya bilangan bukat x disingkat $x \in Z$.

2. $a \mid b$, maka $b = ax$ untuk suatu $x \in Z$.

$b \mid c$, maka $c = by$ untuk suatu $y \in Z$.

sehingga $c = (ax)\, y = a\,(xy)$ untuk suatu $xy \in Z$. Jadi $a \mid c$.

3. $a \mid b$, maka $b = ak_1$ untuk suatu $k_1 \in Z$.

$a \mid c$, maka $c = ak_2$ untuk suatu $k_2 \in Z$.

Akibatnya berlaku $bx = (ak_1)\, x$ untuk setiap $x \in Z$ dan $cy = (ak_2)$ yang untuk setiap $y \in Z$ sehingga $bx + cy = (ak_1)\, x + (ak_2)$

$bx + cy = a\,(k_1x + k_2y)$ untuk suatu $k_1 x + k_2 y \in Z$. Jadi $a \mid (bx + cy)$.

4. $a \mid b$, maka $b = ax$ untuk suatu $x \in Z$.

$b \mid a$, maka $a = by$ untuk suatu $y \in Z$

akibatnya $b = (by)\, x$

$= b(yx)$

$= b(1 - yx) = 0.$

karena $b \neq 0$, maka $1 - yx = 0$ atau $xy = 1$.

Persamaan terakhir dipenuhi untuk $x = y = 1$ atau $x = y = -1$.

Sehingga didapatkan $a = \pm\, b$.

5. $a \mid b$, maka $b = ax$ untuk suatu $x \in Z$.

karena $a > 0$, $b > 0$ dan $b = ax$, maka $x > 0$.

untuk $x = 1$ maka dipenuhi $a = b$, sedangkan untuk $x > 1$ maka $b > a$. Jadi $a \leq b$.

6. ($\Rightarrow$) Jika $a \mid b$, maka $b = ax$ untuk suatu $x \in Z$. Akibatnya untuk $m \in Z$ dan $m \neq 0$ maka berlaku $mb = m\,(ax) = (ma)\,x$ untuk suatu $x \in Z$. Jadi $ma \mid mb$.

($\Leftarrow$) Jika $ma \mid mb$ dan $m \neq 0$, maka $mb = (ma)\,x$ untuk suatu $x \in Z$ atau $mb = m\,(ax)$ atau $m\,(b-ax) = 0$ karena $m \neq 0$, maka $b - ax = 0$ atau $b = ax$ untuk suatu $x \in Z$.

Jadi $a \mid b$.

Teorema Algoritma Pembagian (Muhsetyo, 1997 : 43)

Jika bilangan bulat a dan b dengan $a > 0$, maka terdapatlah dengan tunggal bilangan bulat q dan r sehingga $b = qa + r$, $0 \leq r < a$.

Jika $a \mid b$, maka r memenuhi ketaksamaan $0 < r < a$.

Bukti:

Perhatikan barisan aritmatika

$$\ldots, b - 3a, b - 2a, b - a, b, b + a, b + 2a, b + 3a, \ldots$$

Jika diketahui bilangan bulat a dan b, maka barisan ini mempunyai bentuk umum $b\text{-}qa$, $q \in Z$. Barisan bilangan ini dapat ditulis sebagai himpunan $S = \{(b\text{-}qa) \mid q \in Z\}$. Selanjutnya kita ambil himpunan P yang semua elemen-elemennya adalah elemen-elemen himpunan S yang tidak negatif, yaitu:

$$P = \{(b - qa) \mid q \in Z,\ b\text{-}qa \geq 0\}$$

Maka (1) $P \neq \varnothing$

(2) Jika $b \geq 0$ dan $q = 0$, maka $b \in P$.

(3) Jika $b < 0$ dan $q = b$, maka b- $ba = b\ (1$-$a) \in S$.

Dipihak lain b-$ba = b(1$-$a) \geq 0$, karena $b<0$ dan $a>0$ atau $a \geq 1$, sehingga

1-$a \leq 0$. sehingga $b<0$ dan $b \geq 0$ maka b-$ba \in P$.

Menurut prinsip urutan, maka P mempunyai elemen terkecil. Misalkan r menyatakan bilangan terkecil dari P. maka r ini dapat dinyatakan sebagai $r = b$-qa atau $b = qa + r$, dan berlaku bahwa $r \geq 0$.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa r < a.

Andaikan $r \geq a$, maka $0 \leq r$-$a = b - qa - a = b - a\ (q + 1) \in P$.

Tetapi $b - a\ (q + 1) = b - qa - a = r - a < r$ (karena $a > 0$).

Sehingga terlihat disini ada elemen $r - a \in P$ yang lebih kecil dari r, yang kontradiksi bahwa r adalah elemen terkecil di P.

Jadi pengandaian harus di ingkar, sehingga di dapat $r < a$.

Dari $r \geq 0$ dan $r < 0$, maka $0 \leq r < a$.

Sehingga $b = qa + r$ untuk $0 \leq r < a$.

Bukti ketunggalan untuk q dan r.

Andaikan terdapatlah q_1 dan q_2 dengan $q_1 \neq q_2$ terdapatlah r_1 dan r_2 dengan $r_1 \neq r_2$ sehingga:

$b = q_1a + r_1a$ untuk $0 \leq r_1 < a$ dan $b = q_2\ a + r_2$ untuk $0 \leq r_2 < a$

Maka $q_1a + r_1 = q_2a + r_2$

$a\ (q_1 - q_2) = r_2 - r_1$ yang berarti $a \mid (r_2 - r_1)$

Di pihak lain $0 \leq r_1 < a$ dan $0 \leq r_2 < a$ sehingga

$-a < (r_2 - r_1) < a$

Satu satunya kelipatan a yang terletak diantara $-a$ dan a adalah 0, sehingga $r_2 - r_1 = 0$.

Akibatnya $r_2 = r_1$ dan $a\ (q_1 - q_2) = 0$

Karena $a > 0$ maka $q_1 - q_2 = 0$ atau $q_1 = q_2$

Jadi q dan r masing masing adalah tunggal.

2.4 Kajian Integrasi Agama dan Sains

1. Allah Maha Matematis

Matematika disebut sebagai ilmu hitung karena pada hakikatnya matematika berkaitan dengan bilangan-bilangan dan masalah hitung-menghitung. Mempelajari bilangan dan angka-angka mendapat dorongan kuat dari al-Quran yang membuka cakrawala baru dalam bidang matematika.

Matematika pada dasarnya berkaitan dengan pekerjaan menghitung, sehingga tidak salah jika kemudian ada yang menyebut ilmu hitung atau *ilmu al-Hisab.* Dalam urusan hitung-menghitung ini, Allah adalah rajanya. Allah sangat cepat dalam menghitung dan sangat teliti. Dalam hal ini Allah berfirman dalam surat al-Baqarah ayat 202:

أُوْلَٰٓئِكَ لَهُمۡ نَصِيبٞ مِّمَّا كَسَبُواْۚ وَٱللَّهُ سَرِيعُ ٱلۡحِسَابِ ٢٠٢

Artinya: "*Mereka itulah orang-orang yang mendapat bahagian dari pada yang mereka usahakan; dan Allah sangat cepat perhitungan-Nya"* (Q.S. al-Baqarah 2:202).

Allah juga menyebutkan dalam surat ali-Imran ayat 199:

وَإِنَّ مِنْ أَهْلِ ٱلْكِتَٰبِ لَمَن يُؤْمِنُ بِٱللَّهِ وَمَآ أُنزِلَ إِلَيْكُمْ وَمَآ أُنزِلَ إِلَيْهِمْ خَٰشِعِينَ لِلَّهِ لَا يَشْتَرُونَ بِـَٔايَٰتِ ٱللَّهِ ثَمَنًا قَلِيلًا ۗ أُو۟لَٰٓئِكَ لَهُمْ أَجْرُهُمْ عِندَ رَبِّهِمْ ۗ إِنَّ ٱللَّهَ سَرِيعُ ٱلْحِسَابِ ﴿١٩٩﴾

Artinya: "*Dan sesungguhnya diantara ahli kitab ada orang yang beriman kepada Allah dan kepada apa yang diturunkan kepada kamu dan yang diturunkan kepada mereka sedang mereka berendah hati kepada Allah dan mereka tidak menukarkan ayat-ayat Allah dengan harga yang sedikit. Mereka memperoleh pahala di sisi Tuhannya. Sesungguhnya Allah amat cepat perhitungan-Nya*" (Q.S. Ali Imran 3:5).

Bukti-bukti bahwa Allah maha matematis tertampang begitu jelas dalam alam semesta, dalam masalah pemberian pahala, dan dalam masalah shalat. Bahkan al-Qur'an menjelaskan tentang perkalian dan perhitungan bilangan dalam berbagai peristiwa dan dalam berbagai konteks (Rahman, 2000 : 100).

2. Surat al-Hujurat (49) ayat 13

يَٰٓأَيُّهَا ٱلنَّاسُ إِنَّا خَلَقْنَٰكُم مِّن ذَكَرٍ وَأُنثَىٰ وَجَعَلْنَٰكُمْ شُعُوبًا وَقَبَآئِلَ لِتَعَارَفُوٓا۟ ۚ إِنَّ أَكْرَمَكُمْ عِندَ ٱللَّهِ أَتْقَىٰكُمْ ۚ إِنَّ ٱللَّهَ عَلِيمٌ خَبِيرٌ ﴿١٣﴾

Artinya: "*Hai manusia, Sesungguhnya kami menciptakan kamu dari seorang laki-laki dan seorang perempuan dan menjadikan kamu berbangsa-bangsa dan bersuku-suku supaya kamu saling kenal mengenal. Sesungguhnya orang yang paling mulia diantara kamu di sisi Allah ialah orang yang paling taqwa diantara kamu. Sesungguhnya Allah Maha mengetahui lagi Maha Mengenal*" (Q.S. al-Hujurat 49:13).

Ayat di atas mengisyaratkan adanya tiga persoalan yang layak dicermati dengan baik, sehingga dapat dijadikan sebagai pedoman atau petunjuk bagi kita semua dalam menjalani kehidupan di dunia ini. Ketiga persoalan yang menyangkut umat manusia itu adalah sebagai berikut:

Yang pertama adalah mengenai asal-usul kita sebagai manusia. Dalam Ayat tersebut disebutkan bahwa seluruh manusia berasal dari seorang laki-laki dan seorang permpuan. Ungkapan ini mengisyaratkan bahwa kita semua berasal dari bahan dan dasar yang sama. Manusia berasal dari sperma seorang laki-laki dan ovum dari perempuan, yang kemudian tergabung menjadi satu dan selanjutnya masuk ke dalam rahim dan tumbuh di sana sebagai janin, yang kelak bila telah sampai waktunya akan lahir sebagai manusia. Petunjuk itu mengisyaratkan bahwa kita semua berasal dari benih yang sama, kita semua bermula dari bahan dasar yang serupa. Bila sikap menjunjung persamaan ini dapat diresapi dengan baik, niscaya semua manusia akan saling menghormati antara satu terhadap lainnya. Mereka akan saling menghargai dan mengindahkan dalam percaturan kehidupan sehari-hari. Inilah yang diharapkan dalam kehidupan sosial manusia, yang tentunya akan selalu terjadi komunikasi antara sesama dalam memenuhi kebutuhan masing-masing. Sikap yang demikian akan bermuara pada kesejahteraan dan kedamaian di antara sesama, dan ini adalah yang paling diharapkan sesuai dengan ajaran Ilahi.

Yang kedua adalah adanya perbedaan di antara manusia, yang diisyaratkan dengan ungkapan bahwa mereka itu sengaja dijadikan dalam bentuk bangsa, suku, dan budaya yang berbeda, agar mereka saling megenal dan pada akhirnya dapat melengkapi kekurangannya dari kelebihan-kelebihan yang dimiliki bangsa atau suku lain.

Namun, satu hal yang perlu diperhatikan, hendaknya perbedaan-perbedaan itu bisa memberikan semangat kepada kita untuk saling mengisi, saling melengkapi, dan saling menyempurnakan kekurangan-kekurangan yang ada pada masing-masing.

Yang ketiga adalah bahwa semua manusia itu sama dalam pandangan Tuhan. Yang membedakan antara satu dengan lainnya di antara mereka adalah kepatuhannya kepada ajaran Ilahi (takwa). Siapa yang lebih patuh dalam menjalankan semua yang diperintahkan dan menjauhi segala yang dilarang, maka dialah yang dianggap paling baik dan paling mulia dalam penilaian Tuhan. Sebaliknya, orang yang ke*taqwa*annya hanya pas-pasan saja atau malah lebih rendah intensitas ketundukannya, maka ia tentu akan lebih rendah nilainya di depan Tuhan, walaupun ketika di dunia ia adalah seseorang yang dianggap paling tinggi kedudukannya di mata manusia. Tuhan tidak lagi menilainya berdasarkan kedudukan itu, tetapi sejauh mana ke*taqwa*an dan kepatuhannya dalam menjalankan perintah-Nya.

Dari isyarat-isyarat ini, tampak betapa ajaran Islam yang bersumber dari wahyu Ilahi ternyata telah sangat memperhatikan fenomena yang ada pada masyarakat manusia. Semua yang ada telah diantisipasi dan diberikan petunjuk serta jalan keluar dalam menyikapinya. Pluralitas merupakan salah satu fenomena yang tidak terhindarkan dalam kehidupan ini, dan Tuhan ternyata telah pula mengajarkan bagaimana hendaknya kita semua bersikap. Bila kita semua dapat melakukan petunjuk yang telah digariskan, tentulah tidak akan ada segala macam persoalan yang hanya akan membawa kita semua dalam kancah perpecahan dan pertikaian, melainkan keharmonisan dan ketenangan yang akan membawa kita pada kebahagiaan dan keceriaan (Hamdani, http://www.babinrohis-nakertrans.org/khutbah/ustadz-hamdani-anwar-hikmah-memahami-persamaan-dan-perbedaan-dalam-kehidupan).

BAB III

PEMBAHASAN

Dalam bab ini akan ditinjau sistem matematika yang dilengkapi dengan dua operasi. Sistem bilangan bulat adalah salah satu contoh untuk sistem matematika yang demikian, yaitu dilengkapi dengan operasi tambah dan kali. Selain itu, sistem bilangan rasional, sistem bilangan nyata, dan sistem bilangan kompleks, juga merupakan sistem matematika yang dilengkapi dengan dua operasi.

Himpunan bilangan bulat modulo n, dengan $n \in \mathbb{Z}$ dan $n > 1$, yang dilengkapi dengan operasi tambah yang didefinisikan: $\overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b}$ dan operasi kali: $\overline{a}\overline{b} = \overline{ab}$, juga membentuk suatu sistem matematika dengan dua operasi (Arifin, 2000 : 71).

Pada bab pembahasan ini akan dibahas mengenai karakteristik dari suatu ring yang anggota-anggota di dalamnya merupakan kumpulan dari berbagai bentuk matriks dengan entri-entri di dalamnya adalah anggota bilangan modulo dengan menggunakan dua buah operasi (*biner*) penjumlahan dan perkalian. Matriks yang akan dibentuk ini adalah matriks berukuran nxn dengan entri-entrinya adalah anggota modulo k.

Adapun langkah-langkah dalam mencari karakteristik ring matriks sebagai berikut:

1. Menentukan matriks berordo $2x2$ sampai dengan ordo nxn
2. Menentukan bilangan modulo 2 sampai dengan bilangan modulo k

3. Mencari anggota-anggota dari matriks berordo $2x2$ sampai dengan ordo nxn yang entri-entrinya anggota bilangan modulo 2 sampai dengan bilangan modulo k
4. Menentukan order elemen dari hasil langkah ke 3, dan
5. Mencari karakteristik ring matriks.

3.1 Karakteristik Ring Matriks Berukuran $2x2$ Modulo 2

Diberikan matriks berordo $2x2$ adalah sebagai berikut:

$$M_{2x2} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} | a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0, a_{11}a_{12}a_{21}a_{22} \in z/2z \right\}$$

Bilangan modulo yang akan digunakan adalah bilangan modulo 2. Dengan menggunakan bantuan *matlab* (*Matrix Laboratory*) akan diketahui anggota-anggota ringnya sebanyak 16 buah matriks sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$$

Dari 16 buah matriks di atas, akan ditentukan order dari masing-masing elemennya yaitu,

$$2\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}, \text{ order elemen dari } \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} = 2$$

$$2\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}, \text{ order elemen dari } \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix} = 2$$

$$2\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}, \text{ order elemen dari } \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix} = 2$$

$$2\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}, \text{ order elemen dari } \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} = 2$$

$$2\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}, \text{ order elemen dari } \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} = 2$$

$2\begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{1}\\ \bar{1} & \bar{0}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{1}\\ \bar{1} & \bar{0}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{1}\\ \bar{1} & \bar{0}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix}$, order elemen dari $\begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{1}\\ \bar{1} & \bar{0}\end{pmatrix} = 2$

$2\begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{1}\\ \bar{1} & \bar{1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{1}\\ \bar{1} & \bar{1}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{1}\\ \bar{1} & \bar{1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix}$, order elemen dari $\begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{1}\\ \bar{1} & \bar{1}\end{pmatrix} = 2$

$2\begin{pmatrix}\bar{1} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\bar{1} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\bar{1} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix}$, order elemen dari $\begin{pmatrix}\bar{1} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix} = 2$

$2\begin{pmatrix}\bar{1} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\bar{1} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{1}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\bar{1} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix}$, order elemen dari $\begin{pmatrix}\bar{1} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{1}\end{pmatrix} = 2$

$2\begin{pmatrix}\bar{1} & \bar{0}\\ \bar{1} & \bar{0}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\bar{1} & \bar{0}\\ \bar{1} & \bar{0}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\bar{1} & \bar{0}\\ \bar{1} & \bar{0}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix}$, order elemen dari $\begin{pmatrix}\bar{1} & \bar{0}\\ \bar{1} & \bar{0}\end{pmatrix} = 2$

$2\begin{pmatrix}\bar{1} & \bar{0}\\ \bar{1} & \bar{1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\bar{1} & \bar{0}\\ \bar{1} & \bar{1}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\bar{1} & \bar{0}\\ \bar{1} & \bar{1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix}$, order elemen dari $\begin{pmatrix}\bar{1} & \bar{0}\\ \bar{1} & \bar{1}\end{pmatrix} = 2$

$2\begin{pmatrix}\bar{1} & \bar{1}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\bar{1} & \bar{1}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\bar{1} & \bar{1}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix}$, order elemen dari $\begin{pmatrix}\bar{1} & \bar{1}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix} = 2$

$2\begin{pmatrix}\bar{1} & \bar{1}\\ \bar{0} & \bar{1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\bar{1} & \bar{1}\\ \bar{0} & \bar{1}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\bar{1} & \bar{1}\\ \bar{0} & \bar{1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix}$, order elemen dari $\begin{pmatrix}\bar{1} & \bar{1}\\ \bar{0} & \bar{1}\end{pmatrix} = 2$

$2\begin{pmatrix}\bar{1} & \bar{1}\\ \bar{1} & \bar{0}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\bar{1} & \bar{1}\\ \bar{1} & \bar{0}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\bar{1} & \bar{1}\\ \bar{1} & \bar{0}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix}$, order elemen dari $\begin{pmatrix}\bar{1} & \bar{1}\\ \bar{1} & \bar{0}\end{pmatrix} = 2$

$2\begin{pmatrix}\bar{1} & \bar{1}\\ \bar{1} & \bar{1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\bar{1} & \bar{1}\\ \bar{1} & \bar{1}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\bar{1} & \bar{1}\\ \bar{1} & \bar{1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix}$, order elemen dari $\begin{pmatrix}\bar{1} & \bar{1}\\ \bar{1} & \bar{1}\end{pmatrix} = 2$

$2\begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix}$, order elemen dari $\begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix} = 2$

maka order elemen ring matriks di atas adalah 2.

Oleh karena $2a = \begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix}$, dengan a adalah anggota ring matriks $2x2$ modulo 2. Dari hasil operasi penjumlahan dan perkalian ring matriks di atas didapatkan karakteristik ring matriksnya adalah

$$n = 2$$

Jadi $(M_{2x2}, +, x)$ mempunyai karakteristik 2.

3.2 Karakteristik Ring Matriks Berukuran $3x3$ Modulo 2

Diberikan matriks berordo $3x3$ adalah sebagai berikut:

$$M_{3x3} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} = 0, \\ a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33} \in z/2z \end{matrix} \right\}$$

Jika ditentukan bilangan modulo 2 pada entri-entri matriks ini, dengan menggunakan bantuan *matlab* (*Matrix Laboratory*) akan diketahui anggota-anggota ringnya sebanyak 512 buah matriks sebagaimana terlampir (lampiran 1).

Dari 512 buah matriks tersbut akan ditentukan beberapa order elemennya saja untuk menyingkat penulisan. Masing-masing order elemennya yaitu,

$$2\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} = 2$$

$$2\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} = 2$$

$$2\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} = 2$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$2\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} = 2$$

$$2\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} = 2$$

dapat dilihat order masing-masing elemennya adalah 2.

Dari hasil di atas mengakibatkan $2a = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$ dimana a adalah anggota ring matriks $3x3$ modulo 2, dengan dua operasi penjumlahan dan perkalian, maka dapat diperoleh karekteristik ring matriksnya adalah

$$n = 2$$

Jadi $(M_{3x3}, +, x)$ mempunyai karakteristik 2.

3.3 Karakteristik Ring Matriks Berukuran nxn Modulo 2

Dari uraian karakteristik ring matriks berordo $2x2$ dan $3x3$ berturut-turut masing-masing entri-entrinya adalah anggota bilangan modulo 2 seperti di atas, akan ditunjukkan bahwa ring matriks berordo nxn dengan entri-entrinya bilangan modulo 2 mempunyai karakteristik yang mengikuti bilangan modulonya yaitu 2.

Teorema 3.3.1

Ring matriks nxn dengan entri-entrinya adalah anggota bilangan modulo 2 dengan dua buah operasi (penjumlahan dan perkalian) mempunyai karakteristik 2.

Bukti:

Diberikan matriks berordo nxn adalah sebagai berikut:

$$M_{nxn} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & & \\ a_{1j} & a_{1i} & \dots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \middle| \sum^{n!} (-1)^I a_1 i_1 a_2 i_2 \dots a_{nn} = 0 , \right.$$

$$\left. i, j = 1,2,3, \dots , n; a_{ij} \in z/2z \right\}$$

Akan ditunjukkan $na = (\bar{0})$ dengan $n = 2$

atau

$$2a = (\bar{0})$$

$$\forall a \in M_{nxn} M_2$$

Ambil sebarang a_{ij} dimana

$$i = 1,2,3, \dots , n$$

$$j = 1,2,3, \dots , n$$

jika matriks nxn di atas diletakkan di dalam entri-entrinya bilangan modulo 2 dihasilkan order elemennya yaitu,

$a_{ij} = (\bar{0})$ sedemikian hingga $2a_{ij} = (\bar{0})$, ordernya adalah 2

dan

$a_{ij} = (\bar{1})$ sedemikian hingga $2a_{ij} = (\bar{0})$, ordernya adalah 2

begitu juga apabila diterapkan pada matriks nxn modulo 2 maka

$$2\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & & \\ a_{1j} & a_{1i} & \dots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & & \\ a_{1j} & a_{1i} & \dots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & & \\ a_{1j} & a_{1i} & \dots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} & \dots & \bar{0} & \dots & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \dots & \bar{0} & \dots & \bar{0} \\ \vdots & \vdots & & & & \\ \bar{0} & \bar{0} & \dots & \bar{0} & \dots & \bar{0} \\ \vdots & \vdots & & & & \\ \bar{0} & \bar{0} & \dots & \bar{0} & \dots & \bar{0} \end{pmatrix} = 2$$

order elemennya adalah 2.

Selanjutnya, oleh karena $2a = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} & \dots & \bar{0} & \dots & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \dots & \bar{0} & \dots & \bar{0} \\ \vdots & \vdots & & & & \\ \bar{0} & \bar{0} & \dots & \bar{0} & \dots & \bar{0} \\ \vdots & \vdots & & & & \\ \bar{0} & \bar{0} & \dots & \bar{0} & \dots & \bar{0} \end{pmatrix}$ dimana a adalah anggota ring matriks *nxn* modulo 2, dengan dua operasi (penjumlahan dan perkalian) di atas didapatkan hasil karakteristik ring matriksnya adalah

$$n = 2$$

Jadi $(M_{nxn}, +, x)$ mempunyai karakteristik 2.

3.4 Karakteristik Ring Matriks Berukuran $2x2$ Modulo 3

Diberikan matriks berordo $2x2$ adalah sebagai berikut:

$$M_{2x2} = \left\{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} | a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0, a_{11}a_{12}a_{21}a_{22} \in z/3z\right\}$$

Diberikan di dalam matriks tersebut bilangan modulo 2, dengan menggunakan bantuan *matlab* (*Matrix Laboratory*) akan diketahui anggota-anggota ringnya sebanyak 81 buah matriks yaitu:

$$\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}\\\bar{2}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}\\\bar{2}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}\\\bar{2}&\bar{2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}\\\bar{2}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}\\\bar{2}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}\\\bar{2}&\bar{2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{2}\\\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{2}\\\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{2}\\\bar{0}&\bar{2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{2}\\\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{2}\\\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{2}\\\bar{1}&\bar{2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{2}\\\bar{2}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{2}\\\bar{2}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{2}\\\bar{2}&\bar{2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}\\\bar{2}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}\\\bar{2}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}\\\bar{2}&\bar{2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}\\\bar{2}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}\\\bar{2}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}\\\bar{2}&\bar{2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{2}\\\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{2}\\\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{2}\\\bar{0}&\bar{2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{2}\\\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{2}\\\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{2}\\\bar{1}&\bar{2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{2}\\\bar{2}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{2}\\\bar{2}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{2}\\\bar{2}&\bar{2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{2}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{2}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\bar{2}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{2}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{2}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{2}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{2}&\bar{0}\\\bar{2}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{2}&\bar{0}\\\bar{2}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{2}&\bar{0}\\\bar{2}&\bar{2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{2}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{2}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\bar{2}&\bar{1}\\\bar{0}&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{2}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{2}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{2}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{2}&\bar{1}\\\bar{2}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{2}&\bar{1}\\\bar{2}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{2}&\bar{1}\\\bar{2}&\bar{2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{2}&\bar{2}\\\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{2}&\bar{2}\\\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\bar{2}&\bar{2}\\\bar{0}&\bar{2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{2}&\bar{2}\\\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{2}&\bar{2}\\\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{2}&\bar{2}\\\bar{1}&\bar{2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{2}&\bar{2}\\\bar{2}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{2}&\bar{2}\\\bar{2}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{2}&\bar{2}\\\bar{2}&\bar{2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix}$$

Dari sejumlah matriks di atas, akan ditentukan order masing-masing elemennya. Untuk menyingkat penulisan, akan diambil beberapa elemen saja. Order elemennya yaitu,

$$3\begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{1}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{1}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix}, \text{ ordernya adalah 3}$$

$$3\begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{2}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{2}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix}, \text{ ordernya adalah 3}$$

$$3\begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{1} & \bar{0}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{1} & \bar{0}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{1} & \bar{0}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{1} & \bar{0}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix}, \text{ ordernya adalah 3}$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$3\begin{pmatrix}\bar{2} & \bar{2}\\ \bar{2} & \bar{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\bar{2} & \bar{2}\\ \bar{2} & \bar{2}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\bar{2} & \bar{2}\\ \bar{2} & \bar{2}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\bar{2} & \bar{2}\\ \bar{2} & \bar{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix}, \text{ ordernya adalah 3}$$

$$3\begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix}, \text{ ordernya adalah 3}$$

dihasilkan order elemen dari ring matriks $2x2$ modulo 3 adalah 3.

Karena $3a = \begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix}$ dimana a adalah anggota ring matriks $2x2$ modulo 3, dengan dua operasi penjumlahan dan perkalian didapatkan karakteristik ring matriksnya adalah

$$n = 3$$

Jadi $(M_{2x2}, +, x)$ mempunyaii karakteristik 3.

3.5 Karakteristik Ring Matriks Berukuran $3x3$ Modulo 3

Diberikan matriks berordo $3x3$ adalah sebagai berikut:

$$M_{3x3} = \left\{\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix} \middle| \begin{array}{c} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} = 0, \\ a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33} \in z/3z \end{array}\right\}$$

Akan digunakan bilangan modulo 3. Dengan menggunakan bantuan *matlab* (*Matrix Laboratory*) akan diketahui anggota-anggota ringnya sebanyak 19.683

buah matriks. Dalam hal ini *matlab* secara tidak sempurna menampilakan semua hasil matriks $3x3$ modulo 3. Untuk itu, akan diambil beberapa elemen saja untuk lebih menyingkat penulisan. Beberapa diantaranya adalah

$$\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{2}&\bar{2}&\bar{2}\\\bar{2}&\bar{2}&\bar{2}\\\bar{2}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\begin{pmatrix}\bar{2}&\bar{2}&\bar{2}\\\bar{2}&\bar{2}&\bar{2}\\\bar{2}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{2}&\bar{2}&\bar{2}\\\bar{2}&\bar{2}&\bar{2}\\\bar{2}&\bar{1}&\bar{2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{2}&\bar{2}&\bar{2}\\\bar{2}&\bar{2}&\bar{2}\\\bar{2}&\bar{2}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{2}&\bar{2}&\bar{2}\\\bar{2}&\bar{2}&\bar{2}\\\bar{2}&\bar{2}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{2}&\bar{2}&\bar{2}\\\bar{2}&\bar{2}&\bar{2}\\\bar{2}&\bar{2}&\bar{2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix}$$

Jika ditentukan bilangan modulonya adalah 3, akan diperoleh masing-masing order elemennya yaitu,

$$3\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix}=3$$

$$3\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{2}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{2}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix}=3$$

$$3\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{2}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{2}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix}=3$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$3\begin{pmatrix}\bar{2}&\bar{2}&\bar{2}\\\bar{2}&\bar{2}&\bar{2}\\\bar{2}&\bar{2}&\bar{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\bar{2}&\bar{2}&\bar{2}\\\bar{2}&\bar{2}&\bar{2}\\\bar{2}&\bar{2}&\bar{2}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\bar{2}&\bar{2}&\bar{2}\\\bar{2}&\bar{2}&\bar{2}\\\bar{2}&\bar{2}&\bar{2}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\bar{2}&\bar{2}&\bar{2}\\\bar{2}&\bar{2}&\bar{2}\\\bar{2}&\bar{2}&\bar{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix}=3$$

$$3\begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix} = 3$$

Order elemen yang dihasilkan adalah 3.

Selanjutnya, karena $3a = \begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0}\end{pmatrix}$ dimana a adalah anggota ring matriks $3x3$ modulo 3, dengan dua operasi penjumlahan dan perkalian didapatkan karakteristik ring matriksnya adalah

$$n = 3$$

Jadi $(M_{3x3}, +, x)$ mempunyai karakteristik 3.

3.6 Karakteristik Ring Matriks nxn Modulo 3

Seperti pada *teorema 3.3.1* karakteristik ring matriks nxn modulo 2 dapat dicari karakteristik ring matriksnya adalah 2 mengikuti bilangan modulonya. Begitu juga pada karakteristik ring matriks nxn yang modulo 3 akan ditunjukkan bahwa ring matriks nxn dengan entri-entrinya bilangan modulo 3 mempunyai karakteristik 3.

Teorema 3.6.1

Ring matriks nxn dengan entri-entrinya adalah anggota bilangan modulo 3 dengan dua buah operasi (penjumlahan dan perkalian) mempunyai karakteristik 3.

Bukti:

Diberikan matriks berordo nxn adalah sebagai berikut:

$$M_{nxn} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & & \\ a_{1j} & a_{1i} & \dots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \middle| \sum^{n!} (-1)^I a_1 i_1 a_2 i_2 \dots a_{nn} = 0 , \right.$$

$$\left. i, j = 1,2,3, \dots, n; a_{ij} \in z/3z \right\}$$

Akan ditunjukkan $na = (\bar{0})$ dengan $n = 3$

atau

$$3a = (\bar{0})$$

$$\forall a \in M_{nxn} M_3$$

Ambil sebarang a_{ij} dimana

$$i = 1,2,3, \dots, n$$

$$j = 1,2,3, \dots, n$$

Jika diberikan bilangan modulonya adalah 3, maka akan ditentukan order elemennya yaitu,

$a_{ij} = (\bar{0})$ sedemikian hingga $3a_{ij} = (\bar{0})$, ordernya adalah 3

$a_{ij} = (\bar{1})$ sedemikian hingga $3a_{ij} = (\bar{0})$, ordernya adalah 3

dan

$a_{ij} = (\bar{2})$ sedemikian hingga $3a_{ij} = (\bar{0})$, ordernya adalah 3

Demikian juga jika diterapkan pada matriks nxn modulo 3 order elemennya adalah

$$3\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & & \\ a_{1j} & a_{1i} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & & \\ a_{1j} & a_{1i} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & & \\ a_{1j} & a_{1i} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & & \\ a_{1j} & a_{1i} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} & \dots & \bar{0} & \dots & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \dots & \bar{0} & \dots & \bar{0} \\ \vdots & \vdots & & & & \\ \bar{0} & \bar{0} & \dots & \bar{0} & \dots & \bar{0} \\ \vdots & \vdots & & & & \\ \bar{0} & \bar{0} & \dots & \bar{0} & \dots & \bar{0} \end{pmatrix} = 3$$

Selanjutnya, karena $3a = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} & \dots & \bar{0} & \dots & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \dots & \bar{0} & \dots & \bar{0} \\ \vdots & \vdots & & & & \\ \bar{0} & \bar{0} & \dots & \bar{0} & \dots & \bar{0} \\ \vdots & \vdots & & & & \\ \bar{0} & \bar{0} & \dots & \bar{0} & \dots & \bar{0} \end{pmatrix}$ dimana *a* adalah anggota ring matriks *nxn* modulo 3, dengan menggunakan dua operasi (penjumlahan dan perkalian) diperoleh karakteristik ring matriknya adalah

$$n = 3$$

Jadi $(M_{nxn}, +, x)$ mempunyai karakteristik 3.

3.7 Karakteristik Ring Matriks nxn Modulo k

Dari *teorema 3.3.1* dan *teorema 3.6.1* tersebut di atas memungkinkan terciptanya suatu teorema yang dapat dijadikan acuan secara umum yaitu karakteristik ring matriks nxn yang modulo k.

Teorema 3.7.1

Ring matriks nxn dengan entri-entrinya adalah anggota bilangan modulo k dengan dua buah operasi (penjumlahan dan perkalian) mempunyai karakteristik k.

Bukti:

Diberikan matriks berordo nxn adalah sebagai berikut:

$$M_{nxn} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & & \\ a_{1j} & a_{1i} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \middle| \sum^{n!} (-1)^I a_1 i_1 a_2 i_2 \dots a_{nn} = 0 \, , \; i,j = 1,2,3, \dots, n; a_{ij} \in z/kz \right\}$$

Akan ditunjukkan bahwa $na = (\bar{0})$ dengan $n = k$

atau

$$ka = (\bar{0})$$

$$\forall a \in M_{nxn} M_k$$

Ambil sebarang a_{ij} dimana

$$i = 1,2,3, \dots, n$$

$$j = 1,2,3, \dots, n$$

apabila ditentukan bilangan modulonya adalah k, dihasilkan order elemennya yaitu,

$a_{ij} = (\bar{0})$ sedemikian hingga $ka_{ij} = (\bar{0})$, ordernya adalah k

$a_{ij} = (\bar{1})$ sedemikian hingga $ka_{ij} = (\bar{0})$, ordernya adalah k

$a_{ij} = (\bar{2})$ sedemikian hingga $ka_{ij} = (\bar{0})$, ordernya adalah k

$a_{ij} = (\bar{3})$ sedemikian hingga $ka_{ij} = (\bar{0})$, ordernya adalah k

$\vdots$

$\vdots$

$\vdots$

$a_{ij} = (\bar{k})$ sedemikian hingga $ka_{ij} = (\bar{0})$, ordernya adalah k

Demikian halnya jika diterapkan pada matriks nxn didapatkan

$$k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & & \\ a_{1j} & a_{1i} & \dots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & & \\ a_{1j} & a_{1i} & \dots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & & \\ a_{1j} & a_{1i} & \dots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & & \\ a_{1j} & a_{1i} & \dots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} a_{nn} & a_{nn} & \dots & a_{nn} & \cdots & a_{nn} \\ a_{nn} & a_{nn} & \dots & a_{nn} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & \vdots & & & & \\ a_{nn} & a_{nn} & \dots & a_{nn} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & \vdots & & & & \\ a_{nn} & a_{nn} & \dots & a_{nn} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} & \dots & \bar{0} & \dots & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \dots & \bar{0} & \dots & \bar{0} \\ \vdots & \vdots & & & & \\ \bar{0} & \bar{0} & \dots & \bar{0} & \dots & \bar{0} \\ \vdots & \vdots & & & & \\ \bar{0} & \bar{0} & \dots & \bar{0} & \dots & \bar{0} \end{pmatrix} = k$$

order elemennya adalah k.

Selanjutnya, oleh karena $na = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} & \dots & \bar{0} & \dots & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \dots & \bar{0} & \dots & \bar{0} \\ \vdots & \vdots & & & & \\ \bar{0} & \bar{0} & \dots & \bar{0} & \dots & \bar{0} \\ \vdots & \vdots & & & & \\ \bar{0} & \bar{0} & \dots & \bar{0} & \dots & \bar{0} \end{pmatrix}$ dimana a adalah anggota ring matriks nxn modulo k, dengan dua operasi (penjumlahan dan perkalian) diperoleh karakteristik ring matriksnya adalah

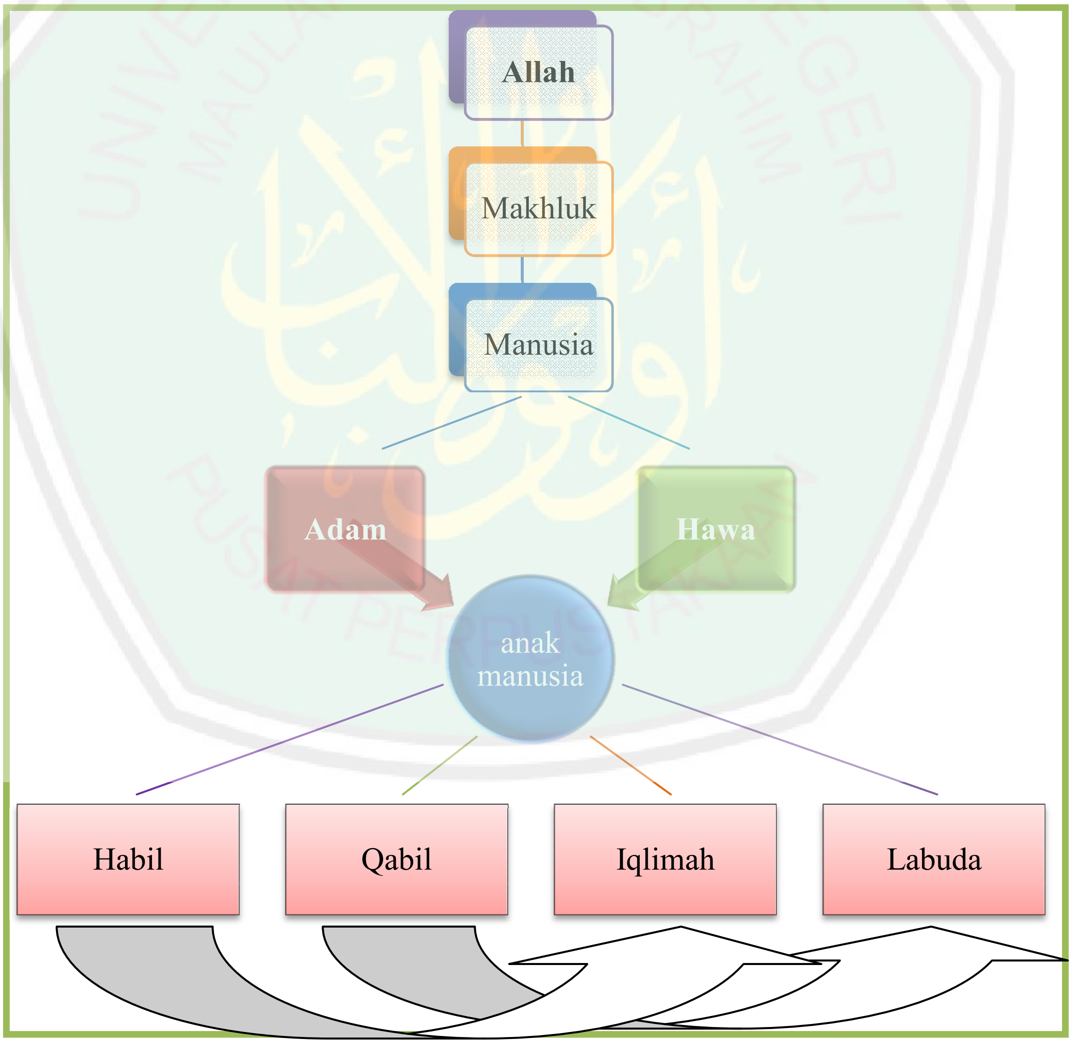
$$n = k$$

Jadi $(M_{nxn}, +, x)$ mempunyai karakteristik k.

3.8 Inspirasi Al-Qur'an dalam Kajian Karakteristik Ring Matriks

Dalam ajaran Islam semua konsep kehidupan sudah diatur di dalam al-Quran dan Hadits. Allah menciptakan langit dan bumi beserta isinya dalam kehendak-Nya. Allah menciptakan makhluk-Nya mulai dari jenis manusia, tumbuhan dan hewan secara sempurna termasuk ilmu pengetahuan yaitu ilmu matematika. Dalam kaitannya dengan konsep ring dan matriks bahwa Allah menciptakan makhluk berpasang-pasangan dan membentuk barisan dan kelompok.

Perhatikanlah ketika Allah menciptakan makhluk bernama manusia pertama kali yaitu Nabi Adam AS. Tatkala Nabi Adam sendirian maka diciptakanlah Siti Hawa (selanjutnya baca tentang penciptaan Adam dan Hawa dalam *surat al-Baqarah dari ayat 34-38, an-Nisa ayat 1, al-A'raf, 19-24 dan Thoha ayat 115-122*). Dari penciptaan Nabi Adam AS. dan Siti Hawa maka lahirlah anak-anak mereka yaitu *Qabil, Iqlima, Habil dan Labuda* membentuk pasangan. Dari pasangan itu maka semakin berkembanglah anak-anak manusia hingga saat ini dan terjadi suatu interaksi khususnya interaksi terhadap penciptanya yaitu Allah (*hablumminallah*). Hal ini dapat digambarkan seperti sebagai berikut:



Gambar 3.8.1 Penciptaan Manusia

Allah berfirman dalam al-Quran,

يَٰٓأَيُّهَا ٱلنَّاسُ إِنَّا خَلَقۡنَٰكُم مِّن ذَكَرٖ وَأُنثَىٰ وَجَعَلۡنَٰكُمۡ شُعُوبٗا وَقَبَآئِلَ لِتَعَارَفُوٓاْۚ إِنَّ
أَكۡرَمَكُمۡ عِندَ ٱللَّهِ أَتۡقَىٰكُمۡۚ إِنَّ ٱللَّهَ عَلِيمٌ خَبِيرٞ ١٣

Artinya: "*Hai manusia, Sesungguhnya kami menciptakan kamu dari seorang laki-laki dan seorang perempuan dan menjadikan kamu berbangsa-bangsa dan bersuku-suku supaya kamu saling kenal-mengenal. Sesungguhnya orang yang paling mulia diantara kamu di sisi Allah ialah orang yang paling taqwa diantara kamu. Sesungguhnya Allah Maha Mengetahui lagi Maha Mengenal*" (Q.S. al-Hujurat 49:13).

Dari ayat di atas bahwasanya Allah menciptakan makhluk-Nya berpasangan dan berkelompok untuk dapat saling mengetahui satu sama lain dengan tujuan tidak lain yaitu untuk menuju kesempurnaan di hadapan Allah. Kesempurnaan yang dimaksud Allah adalah *taqwa*. Allah memandang makhluk-Nya (manusia) dari sisi kebaikannya (*taqwa*) bukan yang lainnya karena Allah Maha Mengetahui segala sesuatunya. Sebaik-baik makhluk adalah yang bertakwa yang menjadi ciri/karakter yang harus ada pada setiap diri orang muslim.

Selanjutnya untuk mengetahui sekelumit tentang karakter ajaran Islam sekaligu mengenal, mengetahui dan memahami karakter takwa berikut jabarannya;

A. Karakteristik Ajaran Islam

Dr. Yusuf Qardhawi dalam bukunya *Khasaais al-Ammah Lil Islam* menyebutkan bahwa karakteristik ajaran Islam itu terdiri dari tujuh hal penting yang tidak terdapat dalam agama lain yaitu:

1. *Robbaniyyah*. Allah SWT merupakan *Robbul 'alamin* disebut juga dengan *Rabbun Nas* dan banyak lagi sebutan lainnya. Kalau karakteristik Islam itu adalah *robbaniyyah* itu artinya bahwa Islam merupakan agama yang bersumber dari Allah SWT bukan dari manusia sedangkan Nabi Muhammad SAW tidak membuat agama ini tapi beliau hanya menyampaikannya.
2. *Insaniyyah*. Islam merupakan agama yang diturunkan untuk manusia karena itu Islam merupakan satu-satunya agama yang cocok dengan fitrah manusia. Pada dasarnya tidak ada satupun ajaran Islam yang bertentangan dengan jiwa manusia
3. *Syumuliyah*. Islam merupakan agama yang lengkap tidak hanya mengutamakan satu aspek lalu mengabaikan aspek lainnya
4. *Al-Waqi'iyyah*. Karakteristik lain dari ajaran Islam adalah *al-waqi'iyyah* ini menunjukkan bahwa Islam merupakan agama yang dapat diamalkan oleh manusia atau dengan kata lain dapat direalisir dalam kehidupan sehari-hari
5. *Al-Wasathiyah*. Allah SWT menyebutkan bahwa umat Islam adalah *ummatan wasathan* umat yang seimbang dalam beramal baik yang menyangkut pemenuhan terhadap kebutuhan jasmani dan akal pikiran maupun kebutuhan rohani
6. *Al-Wudhuh*. Karakteristik penting lainnya dari ajaran Islam adalah konsepnya yang jelas

7. *Al-Jam'u Baina Ats Tsabat wa Al-Murunnah*. Dalam Islam tergabung juga ajaran yang permanen dengan yang fleksibel (Rahmat, http://blog.re.or.id/karakteristik-ajaran-islam.htm)

B. Karakteristik Takwa

Saking pentingnya, dalam al-Quran terdapat sekitar 158 ayat yang membahas *taqwa* dan juga puluhan hadits Rasul SAW. Diantara cakupan makna *taqwa* adalah takut, beribadah, meninggalkan maksiat, mengesakan dan ikhlas kepada Allah. Dari ayat dan hadits tersebut kita dapat mengetahui dengan mudah karakteristik *muttaqin* (orang orang bertakwa). Diantaranya seperti yang tercantum dalam *Q.S. al-Baqarah: 3-5 dan 177, Q.S. Ali Imran: 133-138, Q.S. al-Mukminun: 1-10, Q.S. al-Hujuraat: 6, 10, 11, 12, 15.*

Misalnya dalam surat al-Baqarah 3-5 disebutkan karakter seorang yang bertakwa adalah

1. Percaya kepada yang ghaib

   Beriman kepada hal-hal yang ghaib merupakan kriteria pertama orang yang bertakwa (*muttaqin*). Sesuatu yang ghaib ini misalnya malaikat, jin dan syetan, neraka dan surga. Hal-hal yang ghaib inilah yang bisa mengendalikan diri kita semua untuk senantiasa mendekatkan diri kepada Allah.

2. Mendirikan shalat

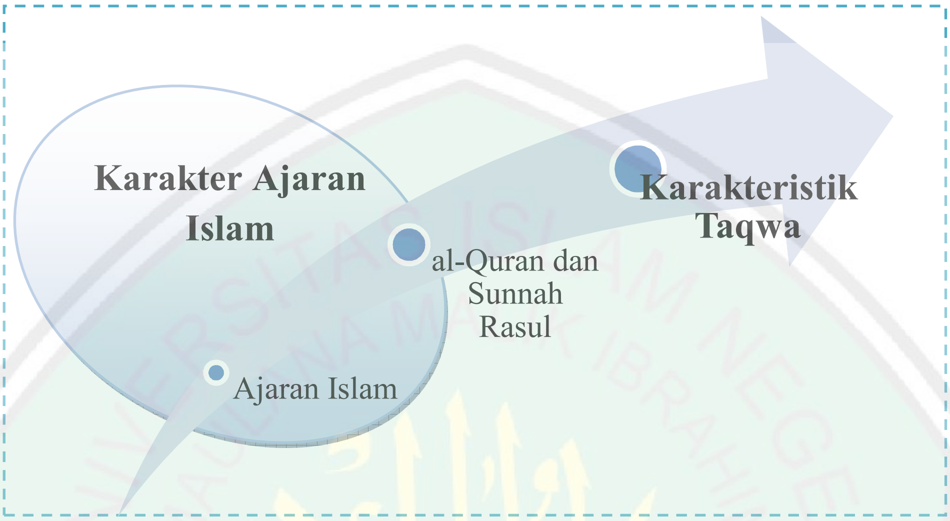
   Ibadah shalat merupakan perintah dari Allah SWT. yang langsung diberikan kepada Rasulullah SAW. Shalat bermula dari mengingat sebagai hamba-Nya dan merasakan kebesaran Allah SWT. Firman Allah, ”*Tegakan shalat untuk mengingat-Ku*” (Q.S. Thaaha 20:14).

3. Menafkahkan rezeki kepada orang yang membutuhkan untuk menegakkan agama Allah SWT. Rezeki itu sesungguhnya milik Allah SWT. Sedangkan manusia hanya dititipi untuk dimanfaatkan sebaik-baiknya untuk kebaikan dirinya dan orang lain.
4. Mempercayai dan mengamalkan kitab yang datang dari Allah SWT.

   Allah SWT pernah menurunkan kitab kepada manusia kepada Rasul-rasul kita yang lain selain al-Quran. Ada kitab yang disebut Taurat yang diturunkan kepada Nabi Musa AS, ada kitab yang disebut dengan kitab Injil yang diturunkan kepada Nabi Isa AS, ada kitab yang disebut Zabur yang diturunkan kepada Nabi Daud AS, tetapi semua kitab itu isinya sudah direvisi dan terhimpun semuanya di dalam al-Quran
5. Percaya dan yakin pada hari akhir (hidup sesudah mati)

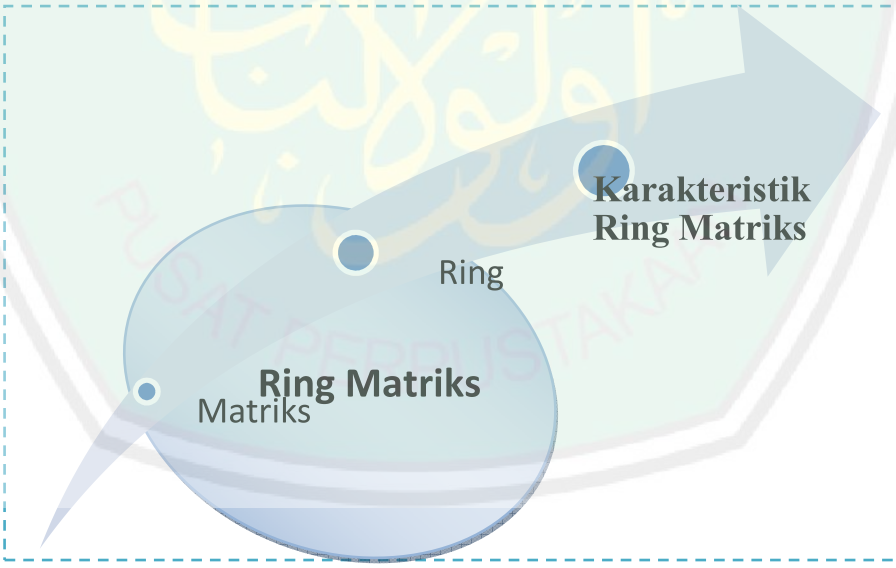
   Orang yang bertakwa itu yakin bahwa akan menghadapi kehidupan yang lain setelah kematian di dunia ini. Bagi orang yang bertakwa seperti ini, dia adalah orang yang memperoleh pertunjuk dan orang yang berbahagia. Sabda Rasulullah SAW, ”*Tidaklah dunia dibandingkan dengan akhirat itu kecuali seumpama sesuatu di jari tangan dimasukan ke lautan. Lihatlah seberapa sesuatu itu membawa kembali*” (HR. Muslim) (m-ali.net. http://m-ali.net/?p=34).

Dari uraian tentang karakter ajaran Islam dan karakteristik takwa di atas dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.8.2 Proses Keterbentukan Karakteristik Takwa

Berikut ini digambarkan proses pencarian karakteristik ring matriks,



Gambar 3.8.3 Proses Pencarian Karakteristik Ring Matriks

Gambar ini menjelaskan proses pencarian karakteristik ring matriks. Dimulai dengan menentukan matriks berordo nxn dengan entri-entrinya adalah bilangan modulo k maka dapat dicari order elemen masing-masing anggota matriks yang terbentuk. Dengan menggunakan ring sebagai operasi *biner* (penjumlahan dan perkalian) akan dapat diketahui karakteristik ring matriksnya.

Dari *gambar 3.8.1* di atas secara matematis dapat diuraikan sebagai berikut:

Allah menciptakan makhluk hidup (manusia) adalah berpasang-pasangan (Adam dan Hawa, Habil dan Iqlimah, Qabil dan Labuda dan seterusnya) membentuk suatu ring dan matriks yaitu, Adam dan Hawa sebagai nenek moyang manusia disimbolkan R, Habil = a, Iqlimah = b, Qabil = c, Labuda = d maka dapat ditulis dalam bentuk ring dan matriks.

Misalkan ring R dengan operasi penjumlahan dan perkalian $(R, +, .)$, $(a+b+c).d = a.d + b.d + c.d$, (sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan di R) dan matriks $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \forall a, b, c, d \in R$. Jika $(a, b, c, d) \in R$ maka, $n\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R,$ dimana $n = 2,$ adalah bilangan modulo 2.

Untuk mendapatkan suatu nilai karakteristik pada ring matriks diperoleh dengan cara menentukan bilangan modulo k dan order elemen ring matriks yaitu,

$$k\begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ \overline{c} & \overline{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ \overline{c} & \overline{d} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ \overline{c} & \overline{d} \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ \overline{c} & \overline{d} \end{pmatrix} sebanyak\ k\ kali = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix}$$

maka order elemennya adalah k. Karena $kp = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix}$, $\forall p \in R$ maka dapat diketahui karakteristiknya adalah k.

Dengan menganggap k adalah interaksi (sudah tentu interaksi dalam hal kebaikan) yang terjadi antara manusia dengan manusia dan manusia dengan Allah.

Sebaik-baik interaksi antara manusia dengan manusia dan manusia dengan Allah maka dialah sebaik-baik manusia di hadapan manusia dan di hadapan Allah. Sebaik-baik manusia adalah ciri atau karakter (karakter *taqwa*) ajaran Islam yang tersebut di dalam al-Quran.

Oleh karena Allah adalah penguasa, pengatur, penentu dan berkehendak atas alam semesta (makhluk). Karena Allah adalah sang *Kholiq* yang mengatur alam semesta (mkhluk) maka proses yang terjadi di jagad raya adalah menurut peraturan (*taqdir*) yang sudah ditentukan-Nya. Demikian halnya dalam penjabaran ring yang memuat himpunan tidak kosong serta melibatkan dua operasi (penjumlahan dan perkalian) dengan memenuhi aksioma/syarat-syarat tertentu seperti tertutup, memiliki identitas, memiliki invers, komutatif, asosiatif dan distributif, begitu juga matriks mempunyai aksioma/sifat-sifat yang kesemuanya tunduk di bawah aturan Allah.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkandari uraian pembahasan pada skripsi ini dapat disimpulkan order ring matriksnxn modulo $k$dan karakteristiknya yaitu, misal M_{nxn} adalah himpunan matriks nxn dengan entri-entrinya adalah bilangan modulo k, maka $(M_{nxn}, +, x)$ adalah ring untuk setiap ring M_{nxn} (misal $\forall a \in M_{nxn}$) memiliki order k ($|a| = k$). Dengan demikian berlaku karakteristik dari $(M_{nxn}, +, x)$ adalah k, untuk setiap k merupakan bilangan bulat positif terkecil.

Dengan kata lain, $\forall a \in M_{nxn}$ memenuhi $n. a = I$ dengan I merupakan identitas di M_{nxn} atau matriks nol berordo nxn.

4.2 Saran

Sekian uraian dalam penulisan skripsi tentang kajian karakteristik ring matriks yang begitu sederhana ini untuk selanjutnya membutuhkan kajian yang lebih mendalam tentang kajian matematika secara umum dan khususnya dalam teori aljabar yang begitu terstruktur semisal karakteristik polynomial ring. Oleh karena itu kajian yang singkat ini perlu koreksi lebih lanjut dari pada pembimbing maupun penguji dan masyarakat ilmiah yang kompeten dengan ini.

Akhirnya kebenaran datangnya hanya dari Allah dan kesalahan sepenuhnya dari diri manusia.

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir. 2007. *Ketika Kiai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Press.

Alisah, Evawati dan Dharmawan, Eko Prasetyo. 2007. *Filsafat Dunia Matematika: Pengantar untuk Memahami Konsep-konsep Matematika*. Jakarta: Pustaka Karya.

Anton, Howard. 1997. *Aljabar Linear Elementer*. Jakarta: Erlangga.

Anwar, Hamdani. Khutbah: *Memahami Persamaan dan Perbedaan Dalam Kehidupan*. (http://www.babinrohis-nakertrans.org/khutbah/ustadz-hamdani-anwar-hikmah-memahami-persamaan-dan-perbedaan-dalam-kehidupan), diakses pada hari Kamis, tanggal 26 Mei 2011, pukul 10:09 WIB.

Arifin, Achmad. 2000. *Aljabar*. Bandung: ITB Bandung.

Blog, Rahmat. 2005-2011. *Karakteristik Ajaran Islam*. (http://blog.re.or.id/karakteristik-ajaran-islam.htm), diakses pada hari Kamis, tanggal 26 Mei 2011, pukul 10:09 WIB.

Hadley, G. 1992. *Aljabar Linear*. Jakarta: Erlangga.

M-ali.net. *Ciri-ciri Orang Yang Bertakwa*. (http://m-ali.net/?p=34), diakses pada hari Kamis, tanggal 26 Mei 2011, pukul 10:09 WIB.

Muhsetyo, Gatot. 1997. *Dasar Dasar Teori Bilangan*. Jakarta: Depdikbud.

Rahman, Afzalur. 1992. *Al-Qur'an Sumber Ilmu Pengetahuan*. Jakarta: Rineka Cipta.

Raisinghania, M.D. dan Anggarwal, R.S. 1980. *Modern Algebra*. New Delhi: S. Chan & Company Ltd.

S. Dummit, David dan M. Foote, Richard. 1991. *Abstract Algebra*. Prentice-Hall, Inc.

Shadiq, Fadjar. 2007. *Apa dan Mengapa Matematika Begitu penting?*. Yogyakarta: Departemen Pendidikan Nasional.

Soebagio A., Suharti danSukirman. 1993. *Materi Pokok Struktur Aljabar*. Jakarta: Universitas Terbuka, Depdikbud.

LAMPIRAN-LAMPIRAN

Lampiran 1

Anggota-anggota Matriks 3*x*3 Modulo 2 dengan Bantuan Matlab (*Matrix Laboratory*)

$$\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix}$$

Lampiran 2
Program Matlab untuk Menghitung Ring Matriks Berukuran 2*x*2 Modulo 2

```
clc,clear;
i=0;
modulo=2;
for A=1:modulo
    for B=1:modulo
        for C=1:modulo
            for D=1:modulo
                [A-1 B-1; C-1 D-1]
                i=i+1;
            end
        end
    end
end
i
```

Lampiran 3

Program Matlab Untuk Menghitung Ring Matriks Berukuran 2*x*2 Modulo 3

```
clc,clear;
i=0;
modulo=3
for A=1:modulo
    for B=1:modulo
        for C=1:modulo
            for D=1:modulo
                [A-1 B-1; C-1 D-1]
                i=i+1;
            end
        end
    end
end
i
```

Lampiran 4
Program Matlab Untuk Menghitung Ring Matriks Berukuran 3*x*3 Modulo 2

```
clc,clear;
i=0;
modulo=2;
for A=1:modulo
    for B=1:modulo
        for C=1:modulo
            for D=1:modulo
                for E=1:modulo
                    for F=1:modulo
                        for G=1:modulo
                            for H=1:modulo
                                for I=1:modulo
                                    [A-1 B-1 C-1 ;D-1 E-1 F-1;G-1 H-1 I-1]
                                    i=i+1;
                                end
                            end
                        end
                    end
                end
            end
        end
    end
end
i
```

Lampiran 5
Program Matlab Untuk Menghitung Ring Matriks Berukuran 3*x*3 Modulo 3

```
clc,clear;
i=0;
modulo=3;
for A=1:modulo
    for B=1:modulo
        for C=1:modulo
            for D=1:modulo
                for E=1:modulo
                    for F=1:modulo
                        for G=1:modulo
                            for H=1:modulo
                                for I=1:modulo
                                    [A-1 B-1 C-1 ;D-1 E-1 F-1;G-1 H-1 I-1]
                                    i=i+1;
                                end
                            end
                        end
                    end
                end
            end
        end
    end
end
i
```