KONSTRUKSI FUNGSI μ REGULAR DARI FUNGSI PANHARMONIK BERNILAI KOMPLEKS

SKRIPSI

Oleh:
SUCI RAHAYU
NIM: 04510048

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
MALANG
2009

KONSTRUKSI FUNGSI μ REGULAR DARI FUNGSI PANHARMONIK BERNILAI KOMPLEKS

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Universitas Islam Negeri Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan
Dalam Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
SUCI RAHAYU
NIM 04510048

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
MALANG
2009

KONSTRUKSI FUNGSI μ REGULAR DARI FUNGSI PANHARMONIK BERNILAI KOMPLEKS

SKRIPSI

Oleh:
SUCI RAHAYU
NIM 04510048

Telah Disetujui untuk Diuji
Malang, 16 Januari 2009

Dosen Pembimbing I,	**Dosen Pembimbing II,**
<u>Evawati Alisah, M.Pd</u>	**<u>Ahmad Barizi, M.A</u>**
NIP. 150 291 271	**NIP. 150 283 991**

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

<u>Sri Harini, M. Si</u>
NIP 150 318 321

KONSTRUKSI FUNGSI μ REGULAR DARI FUNGSI PANHARMONIK BERNILAI KOMPLEKS

SKRIPSI

Oleh:
SUCI RAHAYU
NIM 04510048

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal:

20 Januari 2009

Susunan Dewan Penguji:		**Tanda Tangan**
1. Penguji Utama	: **Wahyu H. Irawan, M.Pd** **NIP: 150 300 415**	( )
2. Ketua	: **Sri Harini, M.Si** **NIP: 150 318 321**	( )
3. Sekretaris	: **Evawati Alisah, M.Pd** **NIP: 150 291 271**	( )
4. Anggota	: **Ahmad Barizi, M.A** **NIP: 150 283 991**	( )

Mengetahui dan Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M.Si
NIP: 150 318 321

Karya kecil ini ku persembahkan untuk……

- *Kedua orang tuaku Bapak Lamidi dan Ibu Monah, yang tak pernah putus mendo'akan anak-anaknya.*
- *De Mor, yang merawatku dari kecil sampai besar, memberikan kebahagiaan tersendiri selama aku di rumah.*
- *Kakak-kakak ku tercinta, Mbak Lasmi, Mbak Tin, Mas Kuri, yang juga memberikan yang terbaik buat adik.*
- *Untuk keluarga kakak-kakak ku, Mas Izul, Mas Mail, Mbak Nana, dan keponakan-keponakanku, Riska, Yusuf, Dira, Alifah, dan adik baru Dira.*
- *Untuk semua keluarga lainnya yang juga memberikan dorongan dan bantuan dalam menyelesaikan kuliah ini, saudara sepupuku yang senantiasa menjadi teman curhat, Mufidah dan saudara-saudara yang lainnya.*
- *Sahabat terbaikku Rina, dan teman-teman kos "Gitar Tua",*
- *Mas Widagdo yang berperan besar dalam menyelesaikan skripsi ini.*
- *Teman-teman angkatan 2004 yang menjadi keluarga selama Suci di Malang, Kalian memberikan keceriaan yang akan selalu ku kenang.*
- *Bapak dan Ibu kos yang sudah menganggap anak-anak kosnya sebagai anaknya sendiri serta keluarga.*

Terima kasih buat semuanya………..

MOTTO

SETIAP MENGERJAKAN PERBUATAN BAIK AWALI DENGAN

بِسۡمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحۡمَـٰنِ ٱلرَّحِيمِ

DAN HIDUP ADALAH PERJUANGAN

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : SUCI RAHAYU

NIM : 04510048

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri.

Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 16 Januari 2008

Yang membuat pernyataan

Suci Rahayu

NIM. 04510048

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Segala puji bagi Allah SWT karena atas rahmat, taufiq dan hidayah-Nya, penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains dalam bidang Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Malang.

Penulis menyadari bahwa banyak pihak yang telah berpartisipasi dan membantu dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Untuk itu, iringan do'a dan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya penulis sampaikan, utamanya kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo selaku Rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Malang.
2. Prof. Drs Sutiman Bambang Sumitro, SU, D.Sc selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang.
3. Sri Harini, M.Si selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang.
4. Evawati Alisah, M.Pd yang telah bersedia meluangkan waktunya untuk memberikan bimbingan dan pengarahan selama penulisan skripsi di bidang matematika.
5. Ahmad Barizi, M.A, yang telah bersedia memberikan bimbingan dan pengarahan selama penulisan skripsi di bidang agama.
6. Ari kusumastuti, M.Si, yang bersedia memberikan sedikit waktunya untuk membimbing penulis untuk lebih memahami.
7. Segenap dosen pengajar atas ilmu yang telah diberikan kepada penulis.
8. Kedua orang tua tercinta, yang selalu mendidik, mencintai serta selalu menjadi motivator terbaik bagi penulis.
9. Kakak-kakak tercinta yang selalu memberikan motivasi dan bersedia memberi bantuan selama penulis kuliah.

10. Segenap keluarga yang senantiasa memberikan do'a dan dukungan yang terbaik bagi penulis.
11. Teman-teman Matematika, terutama angkatan 2004 beserta semua pihak yang telah membantu penyelesaian skripsi ini.

Dalam penyusunan skripsi ini tentunya masih terdapat banyak kesalahan dan kekurangan, sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran demi perbaikan skripsi ini. Akhirnya, semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Amien.

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Malang, Januari 2009

Penulis

DAFTAR ISI

ABSTRAK

Rahayu, Suci. 2009. **Konstruksi Fungsi μ Regular Dari Fungsi Panharmonik Bernilai Kompleks.** Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Malang.
Pembimbing: (I). Evawati Alisah, M.Pd, (II).Ahmad Barizi, M.A

Kata Kunci: *Fungsi Kompleks, Persamaan Cauchy-Riemann, Fungsi Harmonik, Fungsi Panharmonik, Fungsi μ Regular.*

Fungsi kompleks merupakan fungsi yang terdiri dari variabel yang bernilai real dan variabel yang bernilai imaginer. Suatu fungsi kompleks $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ jika di deferensialkan didapatkan persamaan Cauchy-Riemann $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ dan $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, persamaan differensial tersebut jika kita differensialkan lagi akan menghasilkan persamaan $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ yang biasa disebut fungsi harmonik. Dalam puasa orang Muslim terdapat tiga tingkatan yaitu puasanya orang awam, puasanya orang khusus, dan puasanya orang khusus lebih dari khusus, jadi jika didefferensialkan tingkatan tersebut menjadi turunan ketiga. Jika suatu fungsi harmonik yang diperumum menghasilkan persamaan $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \mu^2 u$ dimana μ konstanta real positif biasa disebut fungsi panharmonik. Jika fungsi panharmonik dipenuhi maka selanjutnya bisa dibuktikan bahwa fungsi tersebut merupakan fungsi μ regular apabila memenuhi persamaan $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} + \mu u$ dan $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y} - \mu u$.

Konstruksi fungsi μ regular dari fungsi panharmonik yang bernilai kompleks menunjukkan bahwa terdapat fungsi μ regular yang bagian realnya *u*. Dari konstruksi tersebut juga terdapat fungsi μ regular yang bagian imaginernya *u*. Selain dengan menggunakan perumuman Cauchy-Riemann, untuk menguji ke-μ regularan suatu fungsi panharmonik yang bernilai kompleks juga bisa menggunakan operator *L*, dimana $L = \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}$ yang memenuhi persamaan $Lf(z) = \mu\overline{f(z)}$. Dalam tulisan ini juga dibuktikan beberapa penyajian sifat integral kontur suatu fungsi μ regular.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan salah satu cabang ilmu pengetahuan yang banyak sekali manfaatnya. Demikian juga perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi yang sangat pesat saat ini tidak lepas dari peran serta ilmu matematika. Telah diketahui bahwa banyak ahli matematika mencoba mendefinisikan matematika sebagai ilmu tentang bilangan dan ruang, ilmu tentang besaran, ilmu tentang bentuk dan lain sebagainya. Definisi yang ada semuanya benar, berdasar sudut pandang tertentu. Ciri khas ilmu matematika yang tidak dimiliki ilmu pengetahuan lain adalah merupakan abstraksi dari dunia nyata, menggunakan bahasa simbol, dan menganut pola pikir deduktif.

Dalam kehidupan sehari-hari banyak masalah yang muncul sebagai ujian dalam menjalani kehidupannya, tetapi masalah-masalah tersebut memiliki bentuk model matematika yang sama. Sehingga dengan mencari penyelesaian model matematika tersebut, semua masalah tadi dapat terselesaikan. Jika ditinjau dari penyelesaian suatu model matematika, kadang-kadang penyelesaian model yang satu dapat digunakan untuk menyelesaiakan model matematika yang lainya. Hal ini berarti bahwa jika satu model matematika yang bisa diselesaikan maka dapat dikonstruksi salah satu bentuk penyelesaian model matematika yang lainnya.

Sesuai dengan firman Allah SWT:

كَانَ ٱلنَّاسُ أُمَّةً وَٰحِدَةً فَبَعَثَ ٱللَّهُ ٱلنَّبِيِّـۧنَ مُبَشِّرِينَ وَمُنذِرِينَ وَأَنزَلَ مَعَهُمُ
ٱلْكِتَٰبَ بِٱلْحَقِّ لِيَحْكُمَ بَيْنَ ٱلنَّاسِ فِيمَا ٱخْتَلَفُوا۟ فِيهِ ۚ وَمَا ٱخْتَلَفَ فِيهِ إِلَّا
ٱلَّذِينَ أُوتُوهُ مِنۢ بَعْدِ مَا جَآءَتْهُمُ ٱلْبَيِّنَٰتُ بَغْيًۢا بَيْنَهُمْ ۖ فَهَدَى ٱللَّهُ ٱلَّذِينَ
ءَامَنُوا۟ لِمَا ٱخْتَلَفُوا۟ فِيهِ مِنَ ٱلْحَقِّ بِإِذْنِهِۦ ۗ وَٱللَّهُ يَهْدِى مَن يَشَآءُ إِلَىٰ صِرَٰطٍ
مُّسْتَقِيمٍ ﴿٢١٣﴾

Artinya: Manusia itu adalah umat yang satu. (setelah timbul perselisihan), Maka Allah mengutus Para Nabi, sebagai pemberi peringatan, dan Allah menurunkan bersama mereka kitab yang benar, untuk memberi keputusan di antara manusia tentang perkara yang mereka perselisihkan. Tidaklah berselisih tentang kitab itu melainkan orang yang telah didatangkan kepada mereka Kitab, Yaitu setelah datang kepada mereka keterangan-keterangan yang nyata, karena dengki antara mereka sendiri. Maka Allah memberi petunjuk orang-orang yang beriman kepada kebenaran tentang hal yang mereka perselisihkann itu dengan kehendak-Nya. dan Allah selalu memberi petunjuk orang yang dikehendaki-Nya kepada jalan yang lurus. QS Al-Baqoroh, 213.

Hal tersebut juga terdapat pada QS Alam Nasyroh ayat 5-6, yang berbunyi:

فَإِنَّ مَعَ ٱلْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٥﴾ إِنَّ مَعَ ٱلْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٦﴾

Artinya: Karena Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan,. Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan. QS Alam Nasyroh, 5-6.

Dari ayat diatas yaitu *sesudah kesulitan itu ada kemudahan* menunjukkan bahwa setiap masalah akan ada penyelesaiannya. Manusia merupakan sekelompok makhluk yang diberikan akal pikiran dan selalu diberikan cobaan dalam kehidupannya. Sebagai makhluk yang sempurna dan mempunyai akal pikiran maka setiap ada permasalahan manusia diharapkan dapat menyelesaikan permasalahan yang dihadapinya serta membantu menyelesaikan masalah yang dihadapi oleh manusia lainnya yang ada di sekitarnya karena telah dijelaskan bahwa *Allah mengutus Para Nabi, sebagai pemberi peringatan, dan Allah menurunkan bersama mereka kitab yang benar*. Begitu juga dalam permasalahan matematika, setiap permasalahan akan ada penyelesaiannya. Dalam matematika untuk setiap permasalahan sudah ada rumusnya penyelesaiannya, dan setiap penyelesaian yang diselesaikan dengan rumus kadang-kadang dapat digunakan untuk menyelesaiakan masalah lainnya yang masih berhubungan.

Fungsi kompleks merupakan fungsi yang terdiri dari variabel bernilai real dan variabel yang bernilai khayal atau biasa disebut *imaginer*. Dalam *fungsi* μ *regular*, fungsi yang digunakan adalah fungsi yang bernilai kompleks yang diselesaikan dengan menggunakan *Persamaan Differensial* dan *Integral*. Hal ini disebabkan karena fungsi μ regular merupakan sub ruang dari *fungsi panharmonik* yang bernilai kompleks. Jadi dalam mempelajari fungsi μ regular terlebih dahulu harus paham tentang differensial dan integral fungsi kompleks. Persamaan differensial adalah salah satu persamaan yang sering digunakan dalam pemodelan matematika, karena banyak hal yang lebih cocok jika diselesaikan dengan menggunakan persamaan differensial.

Pengembangan teori *fungsi harmonik* di ruang fungsi bernilai kompleks yang memenuhi syarat Cauchy-Rieman dikenal dengan *fungsi* *analitik* atau *holomorpik*. Sedangankan pengembangan fungsi panharmonik di ruang fungsi bernilai kompleks yang memenuhi syarat Cauchy-Riemann yang diperumum dikenal sebagai fungsi analitik semu atau fungsi μ regular. Selain adanya keterkaitan fungsi harmonik dengan fungsi panharmonik, fungsi μ regular juga mempunyai keterkaitan dengan fungsi analitik. Terdapat kemiripan syarat yang harus dipenuhi oleh fungsi analitik dan fungsi μ regular. Syarat fungsi analitik yaitu harus memenuhi persamaan Cauchy-Riemann, sedangkan fungsi μ regular harus memenuhi persamaan Cauchy-Riemann yang diperumum. Jadi dalam hal ini ada beberapa sifat fungsi analitik yang juga dipenuhi sebagai sifat dalam fungsi μ regular. Dari permasalahan inilah muncul permasalahan yang akan dikaji lebih lanjut yang berkaitan dengan fungsi μ regular dan dalam skripsi ini penulis mengambil tema ***KONSTRUKSI FUNGSI*** μ ***REGULAR DARI FUNGSI PANHARMONIK BERNILAI KOMPLEKS***.

1.2 Rumusan Masalah

Dalam pembahasan tulisan ini, permasalahan yang akan dikaji adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana konstruksi fungsi μ regular dari fungsi panharmonik bernilai kompleks.
2. Bagaimana penyajian sifat integral kontur pada fungsi μ regular.

1.3 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan rumusan masalah diatas, maka tujuan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mengetahui konstruksi fungsi μ regular dari fungsi panharmonik bernilai kompleks.
2. Mengetahui penyajian sifat integral kontur pada fungsi μ regular

1.4 Batasan Masalah

Kajian tentang fungsi μ regular sangat luas dan dapat direpresentasikan ke berbagai hal serta dapat dioperasikan dengan berbagai sifat operasi, akan tetapi dalam tulisan ini penulis hanya membahas konstruksi fungsi μ regular dari fungsi panharmonik bernilai kompleks secara umum, dan penyajian sifat integral kontur untuk fungsi μ regular dari fungsi panharmonik bernilai kompleks yang secara umum juga.

1.5 Manfaat Penelitian

1. Bagi peneliti, sebagai tambahan wawasan dan pengetahuan mengenai fungsi μ regular.
2. Bagi jurusan matematika
   a. Memberikan sedikit sumbangsih yang berupa bahan kajian dan pengembangan matematika murni, sehingga selain dapat menggunakan teori matematika dalam aplikasinya yang nyata juga dapat mengembangkan ilmu matematika itu sendiri.

b. Sebagai bahan referensi tentang fungsi μ regular.

1.6 Metode Penelitian

Metode merupakan cara utama yang akan ditempuh untuk menemukan jawaban dari suatu permasalahan. Metode penelitian yang digunakan dalam penulisan skripsi ini adalah "*Kajian Kepustakaan dan Pembuktian*". Pembahasan pada skripsi ini dilakukan dengan:

1. Mengumpulkan data dan mempelajari literatur yang berupa buku-buku, makalah, dokumentasi, notulen, catatan harian, internet dan lain-lain yang berkaitan dengan masalah penelitian yang akan digunakan dalam mengkonstruksi fungsi μ regular dari fungsi panharmonik bernilai kompleks dan penyajian sifat integral kontur pada fungsi μ regular. Adapun literatur utama yang penulis gunakan berupa jurnal yang berjudul "*Fungsi μ Regular*" karya Endang Cahya, M.A
2. Menentukan pokok permasalahan dari literatur utama berupa cara mengkonstruksi fungsi μ regular dari fungsi panharmonik bernilai kompleks dan mengetahui penyajian sifat integral kontur pada fungsi μ regular.
3. Untuk mengkonstruksi suatu fungsi μ regular dari fungsi panharmonik, suatu fungsi $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ merupakan fungsi kontinu yang memenuhi persamaan Cauchy-Riemann. Kemudian fungsi tersebut merupakan fungsi panharmonik dan selanjutnya memenuhi persamaan

Cauchy-Riemann yang diperumum atau biasa di tulis C-R-u, dimana persamaan tersebut yaitu:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} + \mu u$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y} - \mu u$$

Selain menggunakan persamaan perumuman Cauchy-Riemann seperti persamaan diatas, ke-μ regularan suatu fungsi panharmonik bernilai kompleks dapat pula di buktikan dengan operator *Laplace* L dimana $L = \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}$ dan $Lf(z) = \mu\overline{f(z)}$. Dalam fungsi μ regular juga berlaku fungsi sekawan.

4. Pengujian sifat integral kontur fungsi μ regular dilakukan dengan mendefinisikan bagian real dan bagian imaginer masing-masing fungsi μ regular dan juga menggunakan operator *Laplace.*

1.7 Sistematika Pembahasan

Agar dalam penulisan dan pembahasan skripsi ini sistematis dan mudah untuk dipahami, maka pembahasannya disusun menjadi empat bab sebagai berikut:

BAB I: Pendahuluan, yang berisi latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika pembahasan.

BAB II: Kajian pustaka, yang berisi teori-teori yang mendukung terhadap rumusan masalah penelitian.

BAB III: Pambahasan, yang berisi ulasan tentang jawaban dari rumusan masalah.

BAB IV: Penutup, berisi kesimpulan dan saran.

BAB II

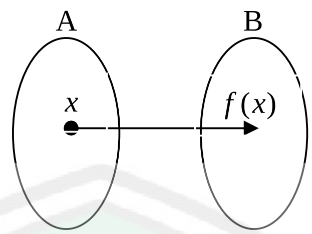
KAJIAN PUSTAKA

Pada bab ini akan dipaparkan teori-teori yang digunakan sebagai acuan dalam menyelesaiakan permasalahan pada bab selanjutnya, serta yang berkaitan dengan pokok permasalahan yang dibahas.

2.1 Fungsi

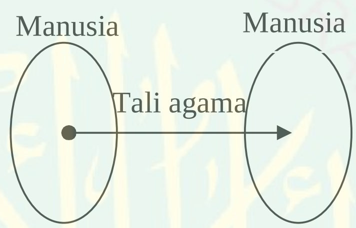
Terdapat sembarang dua himpunan yang tidak kosong *A* dan *B*. fungsi *f* dari himpunan *A* ke himpunan *B* adalah aturan pengawanan setiap elemen $x \in A$ dengan tepat satu elemen $y \in B$. Elemen *y* ini biasanya dinyatakan dengan $f(x)$ yang dinamakan nilai fungsi *f* di *x* atau bayangan *x* oleh fungsi *f*. Himpunan *A* dinamakan daerah definisi dan *B* daerah hasil atau daerah nilai fungsi *f*. Himpunan $f(A) = \{y \in B : y = f(x), x \in A\}$ dinamakan jangkauan fungsi *f*, jadi $f(A) \subset B$. Jika *f*(A) suatu himpunan sejati dari *B* maka *f* dinamakan fungsi dari *A* kedalam *B*. Jika *f*(*A*) = *f*(*B*) maka *f* dinamakan fungsi dari *A* kepada *B*. Perlu diingat fungsi adalah suatu pengawanan secara tunggal, artinya setiap *x* didalam daerah definisi dikawankan dengan tepat satu elemen *y* didalam daerah hasil. Ini tidak berarti bahwa setiap *y* didalam daerah hasil menjadi kawan suatu elemen *x* didalam daerah definisi. Mungkin elemen itu mempunyai kawan lebih dari satu elemen *x*, tetapi mungkin juga tidak berkawankan satu elemen pun didalam daerah definisi.

Jika digambarkan dengan diagram panah yaitu:



Dalam diagram panah tersebut diatas *A* adalah himpunan asal dan *B* adalah himpunan kawan atau daerah hasil.

Relasi atau hubungan antara manusia yang satu dengan yang lainnya dapat digambarkan seperti:



sesuai dengan firman Allah dalam surat Ali-‘imran ayat 103 yaitu:

وَٱعۡتَصِمُواْ بِحَبۡلِ ٱللَّهِ جَمِيعٗا وَلَا تَفَرَّقُواْۚ وَٱذۡكُرُواْ نِعۡمَتَ ٱللَّهِ عَلَيۡكُمۡ إِذۡ كُنتُمۡ أَعۡدَآءٗ
فَأَلَّفَ بَيۡنَ قُلُوبِكُمۡ فَأَصۡبَحۡتُم بِنِعۡمَتِهِۦٓ إِخۡوَٰنٗا وَكُنتُمۡ عَلَىٰ شَفَا حُفۡرَةٖ مِّنَ ٱلنَّارِ
فَأَنقَذَكُم مِّنۡهَاۗ كَذَٰلِكَ يُبَيِّنُ ٱللَّهُ لَكُمۡ ءَايَٰتِهِۦ لَعَلَّكُمۡ تَهۡتَدُونَ ١٠٣

Artinya:*Dan berpeganglah kamu semuanya kepada tali (agama) Allah, dan janganlah kamu bercerai berai, dan ingatlah akan nikmat Allah kepadamu ketika kamu dahulu (masa Jahiliyah) bermusuh-musuhan, Maka Allah mempersatukan hatimu, lalu menjadilah kamu karena nikmat Allah, orang-orang yang bersaudara; dan kamu telah berada di tepi jurang neraka, lalu Allah menyelamatkan kamu dari padanya. Demikianlah Allah menerangkan ayat-ayat-Nya kepadamu, agar kamu mendapat petunjuk.* QS Ali-‘imran, 103

Ayat tersebut menjelaskan bahwa setiap manusia mempunyai suatu hubungan dengan manusia yang lainnya. Sesuai dengan ayat sebelumnya dijelaskan bahwa manusia hidup di dunia akan menghadapi berbagai rintangan dan masalah untuk lebih menguatkan manusia itu agar bisa bertahan. Untuk menyelesaikan masalah tersebut dibutuhkan seseorang yang diharapkan bisa mengurangi beban tersebut atau bahkan bisa membantu menyelesaiaknnya. Jadi dalam hal ini terdapat hubungan yang sangat erat antara manusia satu dengan manusia yang lainnya. Dan untuk menjaga hubungan tersebut diperlukan suatu tali sebagai pengikat yang dapat mempererat dsaling menjaga. Dan tali tersebut adalah agama atau kepercayaan yang di yakininya.

2.2 Bilangan Kompleks

Bilangan kompleks *z* dinyatakan dalam bentuk:

$$z = x + iy$$

dimana *x* dan *y* adalah bilangan riil dan *i* adalah satuan khayal (imaginery unit) sedemikian sehingga $i^2 = -1$. Jika $z = x + iy$, maka *x* dinamakan bagian riil dari *z* dan *y* dinamakan bagian khayal dari *z* dan berturut-turut dinyatakan dengan $\mathrm{Re}\{z\}$ dan $\mathrm{Im}\{z\}$. Lambang *z*, yang dapat ditempatkan untuk sesuatu dari himpunan bilangan kompleks dinamakan peubah kompleks.

Jadi *bilangan kompleks adalah* bilangan yang berbentuk $z = x + iy$ dengan *x* dan *y* bilangan real dan $i^2 = -1$

Operasi-operasi dasar bilangan kompleks yaitu:

1. Penjumlahan

$$\begin{aligned}(a+bi)+(c+di) &= a+bi+c+di \\ &= (a+c)+(b+d)i\end{aligned}$$

2. Pengurangan

$$\begin{aligned}(a+bi)-(c+di) &= a-bi+c-di \\ &= (a-c)+(b-d)i\end{aligned}$$

3. Perkalian

$$\begin{aligned}(a+bi)(c+di) &= ac+adi+bci+bdi^2 \\ &= (ac-bd)+(ad+bc)i\end{aligned}$$

4. Pembagian

$$\begin{aligned}\frac{a+bi}{c+di} &= \frac{a=bi}{c=di} \bullet \frac{c-di}{c-di} \\ &= \frac{ac-adi+bci-bdi^2}{c^2-d^2i^2} \\ &= \frac{ac+bd+(bc-ad)i}{c^2+d^2} \\ &= \frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc+ad}{c^2+d^2}i\end{aligned}$$

Dua bilangan kompleks $x+iy$ dan $a+ib$ dikatakan sama jika dan hanya jika $x=a$ dan $y=b$. Kita dapat memandang bilangan riil sebagai bagian dari himpunan bilangan komplek dengan $y=0$. Jadi bilangan kompleks $0+0i$ dan $-3+0i$ berturut-turut menyatakan bilangan 0 dan -3. Jika $x=0$, maka bilangan kompleks $0+iy$ atau iy dinamakan *bilangan khayal sejati.*

Kompleks sekawan, atau disingkat kawan dari suatu bilangan kompleks $z=x+yi$ adalah bilangan $\bar{z}=x-yi$. Kompleks sekawan suatu bilangan kompleks z seringkali dinyatakan dengan $\bar{z}$ atau $z*$. Selain disebut sebagai sekawan juga biasa disebut sebagai *konjugat*. Sifat-sifat operasi konjugat yaitu:

$\bar{\bar{z}} = z$ $\qquad$ $\overline{z_1+z_2} = \bar{z}_1+\bar{z}_2$

$\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$

$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$

$\overline{z_1 / z_2} = (\overline{z_1})/(\overline{z_2})$

$\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$

$\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$

$z\overline{z} = (\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2$

2.3 Fungsi Kompleks

Diberikan *D* suatu sub himpunan bilangan kompleks **C**. Jika *z* menyatakan sembarang titik didalam *D*, jadi *z* menyatakan bilangan kompleks dalam D. Maka *z* danamakan suatu variabel kompleks. Untuk $z \in D$ maka nilai fungsi $f(z)$ adalah bilangan kompleks. Fungsi yang bernilaikan bilangan kompleks disebut fungsi bernilai kompleks atau disingkat fungsi kompleks.

> "Jika diberikan fungsi bernilai kompleks dari variabel kompleks $f(z)$, maka $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ dengan *u* dan *v* fungsi bernilai real dari variabel real *x* dan *y*. Fungsi *u*(*x*,*y*) dan *v*(*x*,*y*) berturut-turut dinamakan bagian real dan bagian imajiner dari fungsi $f(z)$"

2.4 Fungsi Kontinu

Misalkan $f(z)$ terdefinisi dan bernilai tunggal dalam suatu lingkungan dari $z = z_0$ dan pada $z = z_0$. $f(z)$ kontinu di suatu titik $z = z_0$ jika memenuhi:

a) $\lim_{z \to z_0} f(z) = l$ ada,

b) $f(z_0)$ ada, yaitu $f(z)$ terdefinisi di z_0,

c) $f(z_0) = l$

Suatu fungsi $f(z)$ dikatakan kontinu pada suatu daerah jika fungsi tersebut kontinu di semua titik pada daerah tersebut

2.5 Differensial

Misalkan $\Delta z = dz$ suatu pertambahan yang diberikan untuk *z*. maka

$$\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z)$$

dinamakan pertambahan dalam $w = f(z)$. Jika $f(z)$ kontinu dan memiliki turunan pertama yang kontinu dalam suatu daerah, maka

$$\Delta w = f^{'}(z)\Delta z +_{\epsilon} \Delta z = f^{'}(z)dz +_{\epsilon} dz$$

dimana $_{\epsilon} \rightarrow 0$ untuk $\Delta z \rightarrow 0$. Bentuk

$$dw = f^{'}(z)dz$$

dinamakan differensial dari *w* atau $f(z)$, atau bagian utama dari Δw. Perhatikan bahwa secara umum $\Delta w \neq dw$. Kita menamakan dz sebagai differensial dari z. Biasa dituliskan

$$\frac{dw}{dz} = f^{'}(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$$

Ini menegaskan bahwa *dz* dan *dw* bukan limit dari Δz dan Δw bilamana $\Delta z \rightarrow 0$, karena limit ini adalah nol sedangkan *dz* dan *dw* tidak perlu nol. Sebagai pengganti, jika diberikan *dz*, maka kita menentukan *dw* dari $dw = f^{'}(z)dz$, yaitu *dw* adalah suatu peubah tak bebas yang ditentukan dari peubah tak bebas *dz* untuk suatu *z* yang diberikan.

Sangat berguna sekali untuk menganggap d/dz sebagai suatu operator yang bilamana bekerja pada $w = f(z)$ akan memberikan $dw/dz = f^{'}(z)$.

Jika C konstanta kompleks dan $f'(z)$ dan $g'(z)$ ada, maka berlaku rumus-rumus berikut:

1. $\frac{d}{dz}(c) = 0$

2. $\frac{d}{dz}[cf(z)] = c\frac{d}{dz}[f(z)]$

3. $\frac{d}{dz}[f(z) \pm g(z)] = \frac{d}{dz}[f(z)] \pm \frac{d}{dz}[g(z)]$

4. $\frac{d}{dz}[f(z)g(z)] = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$

5. $\frac{d}{dz}\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right] = \frac{g(z)f'(z) - f(z0g'(z)}{[g(z)]^2}$, untuk $g(z) \neq 0$.

2.6 Integral kompleks

Definisi: Untuk fungsi kompleks dari variabel real $f(z) = u(z) + iv(z)$ *dengan* $x \leq z \leq y$, *didefinisikan*

$$\int_x^y f(z)dz = \int_x^y u(z)dz + i\int_x^y v(z)dz$$

Integral kompleks diruas kiri pada persamaan diatas telah didefinisikan dengan baik, sebab kita telah mengenal definisi kedua integral fungsi real diruas kanan. Jika *u* dan *v* kontinu sepotong-sepotong pada [*x*,*y*], maka kedua integral diruas kanan pada persamaan diatas ada, demikian juga integral diruas kiri. Tentang integral pada persamaan diatas berlaku sifat-sifat sebagai berikut.

1. $\mathrm{Re}\left(\int_x^y f(z)dz\right) = \int_x^y \mathrm{Re}\, f(z)dz$

2. $\mathrm{Im}\left(\int_x^y f(z)dz\right) = \int_x^y \mathrm{Im}\, f(z)dz$

3. $\int_x^y \{f(z) + g(z)\}dz = \int_x^y f(z)dz + \int_x^y g(z)dz$

4. $k\int_x^y f(z)dz = \int_x^y kf(z)dz$, dimana k adalah konstanta

5. $\int_x^y f(z)dz = -\int_y^x f(z)dz$

6. $\int_x^y f(z)dz = \int_x^a f(z)dz + \int_a^y f(z)dz$

7. $\left|\int_x^y f(z)dz\right| = \int_x^y |f(z)|dz$, $(a \leq b)$

2.7 Persamaan Cauchy Riemann

Dalam pembahasan fungsi μ regular, syarat yang sangat perlu sebelum pembuktian adalah fungsi tersebut haruslah memenuhi sifat Cauchy-Riemann yang diperumum atau biasa dituliskan C-R-u.

Suatu syarat perlu agar $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ analitik dalam suatu daerah R adalah u dan v memenuhi persamaan Cauchy Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Jika turunan parsial dalam persamaan diatas kontinu dalam R, maka persamaan Cauchy Rieman adalah syarat cukup agar $f(z)$ analitik dalam R.

Fungsi $u(x, y)$ dan $v(x, y)$ sering kali dinamakan fungsi sekawan, jika salah satu dari padanya di berikan maka kita dapat menentukan yang lainnya (terlepas dari suatu konstanta penjumlahan sembarang) sehingga $u + iv = f(z)$ analitik.

2.8 Fungsi Bessel

Persamaan differensial

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + \left(\lambda^2 x^2 - v^2\right)y = 0$$

dikenal sebagai persamaan Bessel berorde v dengan parameter real λ. Persamaan bessel ini memiliki penyelesaian berbentuk

$$y(t) = aJ_n(t) + bJ_n(t)\int_t^{\infty} \frac{du}{u(J_n(u))^2}$$

Untuk $v = n \in Z$, dan $t = \lambda x$ dengan

$$J_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{t}{2}\right)^{n+2k}}{k!\Gamma(n+k+1)}$$

yang selanjutnya fungsi ini disebut *fungsi Bessel jenis pertama berorde n.*

Jika untuk kasus $\lambda = i$ pada persamaan yang pertama, maka persamaannya menjadi

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - (x^2 + v^2)y = 0$$

yang selanjutnya dikenal sebagai *persamaan Bessel yang dimodifikasi jenis pertama berorde* v. Penyelesaian persamaan kedua dapat diperoleh dari penyelesaian persamaan pertama, yaitu dengan mensubsitusikan $\lambda = i$. Untuk $v = n \in Z$, penyelesaian persamaan kedua mempunyai bentuk

$$y(x) = aI_n(x) + bI_n(x)\int_x^\infty \frac{du}{u(I_n(u))^2}$$

dengan

$$\begin{aligned} I_n(x) &= i^{-n} J_n(ix) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^{n+2k}}{k!\Gamma(n+k+1)} \\ &= \frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n \left[1 + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{1!(n+1)} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{2!(n+1)(n+2)}\right] \end{aligned}$$

Fungsi $I_n(x)$ dikenal sebagai *fungsi Bessel jenis pertama yang dimodifikasi.* Fungsi ini biasa juga ditulis sebagai

$$I_n(x) = \frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n \Psi_n(x)$$

dengan

$$\Psi_n(x) = 1 + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{1(n+1)} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{1.2(n+1)(n+2)} + \ldots$$

Jika $n = 0$, maka diperoleh $I_0(x) = \Psi_0(x)$

2.9 Fungsi Harmonik

Di berikan fungsi $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ yang analitik pada domain *D*. Jadi dalam *D* berlaku persamaan Cauchy Riemann.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ dan } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Karena semua derivatif parsial kontinu pada *D*, maka berlaku $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$ pada *D*. Dengan mendefinisikan persamaan Cauchy Riemann yang pertama ke *x* dan yang kedua ke *y*, kemudian dijumlahkan maka di peroleh: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, berlaku di seluruh D, dengan cara yang serupa di peroleh juga $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$ untuk semua $(x, y)\in D$.

Jadi jika f analitik pada D maka u dan v dalam D memenuhi persamaan differensial Laplace dalam dua dimensi

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}=0$$

Fungsi real dari dua variabel real yang mempunyai derivatif parsial pertama dan kedua yang kontinu persamaan differensial Laplace dalam suatu domain dinamakan fungsi harmonik pada domain itu. Jadi u dan v dimana $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ analitik pada suatu domain maka mereka harmonik dalam domain itu.

2.10 Fungsi Panharmonik

Persamaan differensial $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\mu^2 u$, di mana μ sebuah konstanta real positif, di sebut persamaan Yukawa. Sebuah fungsi C^2 yang memenuhi persamaan Yukawa di sebut fungsi panharmonik. Suatu fungsi kompleks bisa dikatakan fungsi panharmonik jika fungsi tersebut memenuhi persamaan Cauchy-Riemann. Jadi dalam membuktikan fungsi tersebut termasuk fungsi panharmonik, harus dibuktikan terlebih dahulu bahwa fungsi tersebut memenuhi persamaan Cauchy-Riemann.

Teorema: *Misalkan* $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ *fungsi bernilai kompleks di* $C^2(\Omega)$. *Fungsi f panharmonik jika dan hanya jika u dan v masing-masing fungsi panharmonik.*

Bukti

Misalkan $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ panharmonik pada Ω, maka:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + i\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + i\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\
&= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + i\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \\
&= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(u + iv) \\
&= \mu^2 (u + iv) \\
&= \mu^2 f
\end{aligned}$$

Jadi, dari persamaan diatas dapat disimpulkan bahwa

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \mu^2 u, \text{ dan juga } \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \mu^2 v$$

merupakan fungsi panharmonik karena masing-masing *u* dan *v* panharmonik.

Teorema: *Misalkan f fungsi panharmonik bernilai kompleks dan c suatu konstanta kompleks. Maka* cf *juga panharmonik.*

Bukti

Misalkan $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, dimana *u*, *v* masing-masing fungsi panharmonik bernilai real dan misalkan pula $c \in C$, dimana $c = a + ib$. pandang bahwa

$$\begin{aligned}
h(z) &= cf(z) \\
&= (au - bv) + i(av + bu)
\end{aligned}$$

Maka,

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 (au - bv)}{\partial x^2} + i\frac{\partial^2 (av + bu)}{\partial y^2}$$
$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 (au - bv)}{\partial y^2} + i\frac{\partial^2 (av + bu)}{\partial x^2}$$

Jadi diperoleh

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \mu^2 cf(z)$$

Teorema *Misalkan f fungsi panharmonik bernilai kompleks, maka $f'(z)$ juga fungsi panharmonik.*

Bukti

Misalkan

$$\begin{aligned} h(z) &= 2\frac{\partial f}{\partial z} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u + iv) \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \end{aligned}$$

Maka

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

Jadi kita peroleh

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} &= \mu^2\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right) \\ &= \mu^2 h \end{aligned}$$

2.11 Fungsi μ Regular

Pada awalnya pendefinisian fungsi ν regular pada fungsi bernilai kompleks $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$, bila berlaku $Lf = \mu\overline{f}$ dimana operator $L = \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}$ dan ν bilangan kompleks. Tetapi pada akhirnya Duffin tidak lagi menggunakan bilangan kompleks ν, melainkan menggunakan bilangan real dan istilah yang digunakan regular kanan dan regular kiri. Bila $\nu = \mu$ bilangan positif, maka *f* yang memenuhi $Lf = \mu\overline{f}$ disebut regular kanan dan jika $\nu = -\mu$ maka disebut regular kiri. Dengan syarat keregularan kanan $Lf = \mu\overline{f}$, ini bersesuaian dengan persamaan Cauchy-Riemann yang diperumum

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} + \mu u$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y} - \mu u$$

Maka *f* di sebut fungsi μ regular.

Jadi *fungsi* μ *regular* adalah fungsi yang memenuhi persamaan Perumuman Cauchy-Riemann, yaitu:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} + \mu u$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y} - \mu u$$

Dalam Colton fungsi ini di sebut juga fungsi analitik semu (*pseudo analitic*) dan dapat di tunjunkkan bahwa fungsi *f*, *u* dan *v* masing-masing fungsi panharmonik.

Untuk pengujian ke μ regularan suatu fungsi bernilai kompleks f di C^2 dapat di gunakan $Lf(z) = \mu \overline{f(z)}$ dimana $L = \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}$.

Dalam firman Allah surat Al-Insyiqaaq ayat 19, yaitu:

لَتَرْكَبُنَّ طَبَقًا عَن طَبَقٍ ﴿١٩﴾

Artinya: Sesungguhnya kamu melalui tingkat demi tingkat. QS Al-Insyiqaaq 19

Imam Al-Ghazali dalam kitab *Ihya' Ulumuddin* membagi puasa dalam tiga tingkatan, yaitu:

1. Puasanya Orang Awam

Puasanya orang awam adalah puasa yang hanya menahan perut (dari makan dan minum) dan kemaluan dari memperturutkan syahwat. Rasulullah Saw bersabda:

كَمْ مِنْ صَائِمٍ لَيْسَ لَهُ مِنْ صَوْمِهِ إلا الْجُوْعُ وَالْعَطَشُ

Artinya: "*Berapa banyak orang yang berpuasa, namun tidak didapatkan dari puasanya itu kecuali haus dan lapar*."

Imam Al-Ghazali berkata :

"Berapa banyak orang yang berpuasa, namun ia tidak mendapatkan dari puasanya itu selain lapar dan haus. Sebab, hakikat puasa itu adalah menahan hawa nafsu, bukanlah sekedar menahan lapar dan haus. Boleh jadi orang tersebut memandang yang haram, menggunjing dan berdusta. Maka yang demikian itu membatalkan hakikat puasa."

Para Ulama berkata:

"Betapa banyak orang yang berpuasa padahal ia berbuka (tidak berpuasa) dan betapa banyak orang yang berbuka padahal ia berpuasa."

Yang dimaksud dengan orang yang berbuka tetapi berpuasa ialah menjaga anggota tubuhnya dari perbuatan dosa sementara ia tetap makan dan minum.

Sedangkan yang dimaksud dengan berpuasa tapi berbuka ialah yang melaparkan perutnya sementara ia melepaskan kendali bagi anggota tubuh yang lain.

2. Puasanya Orang Khusus

Yaitu puasanya orang-orang sholeh, yang selain menahan perut dan kemaluan juga menahan semua anggota badan dari berbagai dosa, kesempurnaannya ada 7 perkara, yaitu:

a. Menundukkan pandangan dan menahannya dari memandang hal yang dicela dan dibenci, kesetiap hal yang dapat menyibukkan diri dari mengingat Allah Swt.

b. Menjaga lisan dari membual, dusta, ghibah, perkataan kasar, pertengkaran, perdebatan dan mengendalikannya dengan diam, menyibukkan dengan dzikrullah dan membaca Al-qur'an.

c. Menahan pendengaran dari mendengarkan setiap hal yang dibenci (makruh) karena setiap hal yang diharamkan perkataannya diharamkan pula mendengarnya.

d. Menahan berbagai anggota badan lainnya dari berbagai dosa seperti tangan, kaki dari hal-hal yang dibenci, menahan perut dari memakan makanan yang subhat (meragukan) pada saat tidak puasa (berbuka).

e. Tidak memperbanyak makanan yang halal pada saat berbuka sampai penuh perutnya, karena tidak ada wadah yang dibenci oleh Allah kecuali perut yang penuh dengan makanan halal. Bagaimana puasanya bisa bermanfaat untuk menundukkan musuhnya (setan) dan mengalahkan syahwatnya jika orang yang berpuasa pada saat berbuka melahap berbagi makanan sebagai pengganti makanan yang tidak dibolehkan memakannya pada siang hari. Bahkan menjadi tradisi menyimpan dan mengumpulkan makanan sebagai persiapan pada saat berbuka padahal makanan yang tersimpan itu melebihi kapasitas perut kita bahkan mungkin bisa untuk makanan satu minggu.

f. Mengurangi Tidur. Banyak orang yang termakan oleh hadist dhaif (lemah) *"Bahwa tidurnya orang berpuasa adalah ibadah"*, padahal telah menjadi kebiasaan Rasulullah Saw,

"Apabila bulan Ramadhan tiba, beliau melipat alas tidurnya (mengurangi tidur), mengetatkan sarungnya (yakni bersungguh-sungguh dalam ibadah), serta mengajak keluarganya berbuat seperti itu pula".

g. Cemas dan harap. Hendaklah hatinya dalam keadaan "tergantung" dan "terguncang" antara cemas dan harap karena tidak tahu apakah puasanya diterima dan termasuk golongan yang *Muqorrobin* atau ditolak sehingga termasuk orang yang dimurkai oleh Allah Swt. Hendaklah hatinya selalu dalam keadaan demikian setiap selesai melakukan kebaikan. Hadist-hadist Rasulullah Saw,

"Puasa adalah perisai (tabir penghalang dari perbuatan dosa). Maka apabila seseorang dari kamu sedang berpuasa, janganlah ia mengucapkan sesuatu yang keji dan janganlah ia berbuat jahil." (HR Bukhari-Muslim).

Lima hal yang dapat membatalkan puasa: berkata dusta, ghibah (menggunjing orang), memfitnah, sumpah dusta dan memandang dengan syahwat.

"Barang siapa yang tidak dapat meninggalkan perkataan kotor dan dusta selama berpuasa, maka Allah Swt tidak berhajat kepada puasanya." (HR Bukhari) *"Orang yang menggunjing dan mendengarkan gunjingan, keduanya bersekutu dalam perbuatan dosa."* (HR Ath-Thabrani).

3. Puasanya Orang Khusus Lebih dari Khusus

Yaitu puasa hati dari berbagai keinginan yang rendah dan pikiran-pikiran yang tidak berharga, juga menjaga hati dari selain Allah secara total. Puasa ini akan menjadi "batal" karena pikiran selain Allah (pikiran tentang dunia). Ini adalah puasanya para Nabi dan Rasul Allah Swt.

Telah diketahui bahwa dalam puasa terdapat beberapa tingkatan. Jika kita aplikasikan dalam fungsi μ regular dimana μ adalah konstanta real positif, sehingga nilai dari μ adalah bilangan real positif. Puasa merupakan suatu kewajiban bagi umat muslim diwaktu Ramadhan, dan telah dijelaskan sebelumnya bahwa dalam puasa tersebut ada beberapa tingkatan, walaupun terkesan bahwa pada tingkatan yang pertama tersebut kurang baik dan termasuk rendah, akan tetapi kita tetap mendapat pahala karena kita sudah melaksanakan kewajiban kita, yaitu menjalankan puasa pada waktu bulan Ramadhan. Jadi, dalam hal tingkatan puasa tersebut termasuk tingkatan yang positif walaupun belum tentu diketahui berapa banyak pahala yang akan kita dapatkan, begitu juga dengan μ regular, berapapun nilai dari μ tetapi nilainya tetap merupakan konstanta real positif.

2.12 Penyelesaian Persamaan Differensial Dengan Integral kontur

Integral kontur biasa juga disebut dengan istilah integral lintasan. Misal diberikan fungsi $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ yang didefinisikan dan kontinu sepotong-sepotong pada lintasan di bidang kompleks C maka dapat ditulis

$$\int_C f(z)dz$$

yang dinamakan integral lintasan fungsi f sepanjang C.

Sering kali sangat diperlukan untuk menentukan suatu penyelesaian persamaan differensial kontur yang berbentuk

$$f(z) = \oint_C k(z,t)G(t)dt$$

dimana $k(z,t)$ dinamakan kernel (*inti*). Salah satu kemungkinan yang sangat berguna muncul jika $k(z,t) = e^{zt}$, dalam kasus ini

$$f(z) = \oint_C e^{zt}G(t)dt$$

Penyelesaian seperti ini mungkin terjadi di mana koefisien dalam persamaan differensialnya adalah fungsi rasional.

BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibahas sedikit ulasan tentang definisi fungsi μ regular, bagaimana konstruksi fungsi μ regular dari fungsi panharmonik bernilai kompleks, serta penyajian sifat integral kontur pada fungsi μ regular.

3.1 Definisi fungsi μ regular

Misalkan Ω himpunan buka terhubung sederhana di $\Re^2$. Misalkan f merupakan fungsi bernilai kompleks di $C^2(\Omega)$ dimana $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ sebuah fungsi bernilai kompleks dengan u dan v memenuhi persamaan

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} + \mu u$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y} - \mu u$$

dimana μ sebuah konstanta real positif, maka f di sebut fungsi μ regular dan sistem persamaan differensial yang digunakan diatas disebut persamaan Cauchy-Riemann yang diperumum atau biasa dituliskan C-R-u. Jika persamaan differensial tersebut dipenuhi maka dapat ditunjukkan bahwa u dan v masing-masing merupakan panharmonik yang bernilai real dan f tersebut merupakan fungsi panharmonik yang bernilai kompleks.

3.2 Konstruksi fungsi μ regular

Untuk mengkonstruksi fungsi μ regular maka suatu fungsi $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ merupakan fungsi yang kontinu dan memenuhi persamaan Cauchy-Riemann kemudian dibuktikan bahwa fungsi tersebut merupakan fungsi panharmonik dan memenuhi perumuman Cauchy-Riemann. Konstruksi fungsi μ regular dapat dijelaskan dengan beberapa teorema seperti dibawah ini.

Teorema 3.2.1

Misalkan $\Omega \subseteq \Re^2$ daerah buka terhubung sederhana. Misalkan u sebuah fungsi panharmonik real pada Ω. Maka terdapat fungsi μ regular pada Ω yang bagian realnya u.

Bukti

Diketahui bahwa fungsi $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ merupakan fungsi kontinu, maka untuk menunjukkan bahwa $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ fungsi μ regular pada Ω, maka harus ditunjukkan terlebih dahulu terdapat fungsi panharmonik *v* pada Ω. Untuk itu konstruksi

$$v(x,y)=\int_a^y\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}-\mu u(x,t)\right)dt+\varphi(x)$$

dengan batas *t* adalah dari *a* sampai *y* dimana $\varphi(x)$ memenuhi $\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\mu\varphi(x)+\frac{\partial u(x,a)}{\partial y}=0$. Karena φ kontinu dan $\frac{\partial u(x,a)}{\partial y}$ kontinu maka persamaan differensial tersebut memiliki penyelesaian dan dapat diintegralkan, sehingga *v* yang didefinisikan diatas ada dan tidak kosong.

Untuk menunjukkan $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ fungsi μ regular maka kita turunkan *v* secara parsial terhadap *x*, yaitu:

$$
\begin{aligned}
v(x,y) &= \int_a^y \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - \mu u(x,t) \right) dt + \varphi(x) \\
\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} &= \int_a^y \left(\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right) dt + \varphi^{'}(x) \\
&= \int_a^y \left(\mu^2 u(x,t) - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial y^2} - \mu \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right) dt + \varphi^{'}(x) \\
&= \int_a^y \left(- \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial y} \right) dt + \int_a^y \left(\mu^2 u(x,t) \right) - \mu \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} dt + \varphi^{'}(x) \\
&= \frac{\partial u(x,a)}{\partial y} - \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \mu \int_a^y \left(\mu u(x,t) - \mu \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right) dt + \varphi^{'}(x) \\
&= \frac{\partial u(x,a)}{\partial y} - \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \mu \left(\varphi(x) - v(x,y) \right) + \varphi^{'}(x) \\
&= - \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} - \mu v(x,y) + \varphi^{'}(x) + \mu \varphi(x) + \frac{\partial u(x,a)}{\partial y} \\
&= - \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} - \mu v(x,y)
\end{aligned}
$$

Setelah diturunkan diperoleh $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} - \mu v$ dimana terdapat bagian realnya *u* dan jika kita turunkan *v* secara parsial juga terhadap *y* maka akan diperoleh $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - \mu v$ yang bagian realnya juga *u*.

Setelah dilakukan pendifferensialan secara parsial, dapat dilihat bahwa *u* dan *v* diatas memenuhi persamaan perumuman sifat Cauchy-Riemann sehingga terbukti bahwa *v* panharmonik. Karena *v* panharmonik dan terlihat bahwa syarat fungsi μ regular terpenuhi maka fungsi tersebut merupakan fungsi μ regular.

Persamaan differensial $\varphi'(x) + \mu\varphi(x) + \dfrac{\partial u(x,a)}{\partial y} = 0$ merupakan persamaan differensial linier orde satu dengan faktor integrasi $e^{\mu x}$ dan mempunyai penyelesaian:

$$\varphi(x) = e^{-\mu x}\left(-\int_{\infty}^{x} e^{\mu t}\frac{\partial u(t,a)}{\partial y}\,dt + c \right)$$

Terlepas dari penyelesaian diatas, kita kembali pada persamaan sebelumnya yaitu pada persamaan

$$\varphi'(x) + \mu\varphi(x) + \frac{\partial u(x,a)}{\partial y} = 0$$

$$\varphi'(x) + \mu\varphi(x) = -\frac{\partial u(x,a)}{\partial y}$$

terdapat tak hingga banyaknya fungsi $\varphi(x)$ yang memenuhi persamaan differensial tersebut, tetapi $\dfrac{\partial u(x,a)}{\partial y}$ akan selalu tetap. Sehingga hal ini akan mengakibatkan perbedaan antara *v* yang satu dengan yang lainnya hanya berbeda sebesar $\varphi(x)$ yang memenuhi $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \mu\varphi(x) = 0$, yaitu $\varphi(x) = ke^{-\mu x}$ untuk suatu konstanta real *k*.

Teorema 3.2.2

Misalkan $\Omega \subseteq \Re^2$ *daerah buka terhubung sederhana. Misalkan v sebuah fungsi panharmonik real pada* Ω. *Maka terdapat fungsi* μ *regular pada* Ω *yang bagian imaginernya u.*

Bukti

Sama halnya dengan bukti teorema sebelumnya dimana fungsi $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ merupakan fungsi kontinu, maka untuk menunjukkan bahwa $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ fungsi μ regular pada Ω, maka harus ditunjukkan terlebih dahulu terdapat fungsi panharmonik u pada Ω. Untuk itu konstruksi

$$u(x,y) = -\int_a^y \left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} + \mu v(x,t) \right) dt + \psi(x),$$

dengan batas t yang sama yaitu dari a sampai y dimana $\psi(x)$ memenuhi persamaan $\frac{\partial \psi}{\partial x} - \mu \psi(x) - \frac{\partial v(x,a)}{\partial y} = 0$. Karena ψ kontinu dan $\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}$ kontinu maka persamaan differensial tersebut memiliki penyelesaian dan dapat diintegralkan, sehingga u yang didefinisikan diatas ada dan tidak kosong. Untuk menunjukkan $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ fungsi μ regular maka kita turunkan u secara parsial terhadap x, yaitu:

$$u(x,y)=-\int_a^y\left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}+\mu v(x,t)\right)dt+\psi(x)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}&=-\int_a^y\left(\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\right)dt+\psi^{'}(x)\\
&=-\int_a^y\left(\mu^2 v(x,t)-\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\right)dt+\psi^{'}(x)\\
&=\int_a^y\left(\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial y}\right)dt+\int_a^y\left(-\mu^2 v(x,t)\right)-\mu\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}dt+\psi^{'}(x)\\
&=\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial v(x,a)}{\partial y}+\mu\int_a^y\left(-\mu v(x,t)-\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\right)dt+\psi^{'}(x)\\
&=\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial v(x,a)}{\partial y}+\mu\left(-\psi(x)+u(x,y)\right)+\psi^{'}(x)\\
&=\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}+\mu u(x,y)+\psi^{'}(x)-\mu\psi(x)-\frac{\partial v(x,a)}{\partial y}\\
&=\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}+\mu u(x,y)
\end{aligned}$$

Setelah diturunkan diperoleh $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}+\mu u$ dimana bagian imaginernya adalah u dan jika kita turunkan u secara parsial juga terhadap y maka akan diperoleh $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}-\mu v$.

Setelah dilakukan pendifferensialan secara parsial, dapat dilihat bahwa u dan v diatas memenuhi persamaan perumuman sifat Cauchy-Riemann sehingga terbukti bahwa u panharmonik. Untuk selanjutnya sama dengan teorema sebelumnya yaitu fungsi tersebut merupakan fungsi μ regular.

Persamaan differensial $\psi^{'}(x)-\mu\psi(x)-\frac{\partial v(x,a)}{\partial y}=0$ merupakan persamaan differensial linier orde satu dengan faktor integrasi $e^{-\mu x}$ dan mempunyai penyelesaian:

$$\psi(x) = e^{\mu x}\left(\int_b^x e^{-\mu t}\frac{\partial v(t,a)}{\partial y}dt + c\right)$$

Terlepas dari penyelesaian diatas, kita kembali pada persamaan sebelumnya yaitu pada persamaan

$$\psi^{'}(x) - \mu\psi(x) - \frac{\partial v(x,a)}{\partial y} = 0$$

$$\psi^{'}(x) - \mu\psi(x) = \frac{\partial v(x,a)}{\partial y}$$

terdapat tak hingga banyaknya fungsi $\psi(x)$ yang memenuhi persamaan differensial tersebut, tetapi $\frac{\partial v(x,a)}{\partial y}$ akan selalu tetap. Sehingga hal ini akan mengakibatkan perbedaan antara u yang satu dengan yang lainnya hanya berbeda sebesar $\psi(x)$ yang memenuhi $\psi^{'}(x) - \mu\psi(x) = 0$, yaitu $\psi(x) = ke^{\mu x}$.

Dari pernyataan diatas dapat diketahui bahwa melalui pengkonstruksian bagian real dan bagian imaginer untuk fungsi μ regular dari fungsi panharmonik, maka hasilnya tidak tunggal.

Setelah pengkonstruksian fungsi μ regular dari kedua teorema tersebut diatas, memunculkan teorema yang berkaitan dengan sifat fungsi μ regular yang akan dijelaskan pada teorema selanjutnya.

Teorema 3.2.3

Selisih dua buah fungsi μ regular yang memiliki bagian real yang sama adalah sebuah fungsi $c(x) = ike^{-\mu x}$ untuk suatu konstanta real k.

Bukti

Misalkan $f_1(z) = u(x,y) + iv_1(x,y)$ dan $f_2(z) = u(x,y) + iv_2(x,y)$

$$\begin{aligned}(f_1 - f_2)(z) &= c(x)\\ f_1(z) - f_2(z) &= c(x)\\ (u(x,y) + iv_1(x,y)) - (u(x,y) + iv_2(x,y)) &= c(x)\\ \mathrm{i}\,(v_1(x,y) - v_2(x,y)) &= c(x)\\ \mathrm{i}(v_1 - v_2) &= c(x)\end{aligned}$$

Misalkan f fungsi μ regular bernilai imaginer, maka $f(z) = iv(x,y)$. Berdasarkan perumuman Cauchy-Riemann, maka $\frac{\partial v}{\partial x} + \mu v = 0$ dan $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$ hal ini mengakibatkan fungsi v hanya bergantung pada variabel x yang memenuhi $\frac{\partial v}{\partial x} + \mu v = 0$. Sehingga kita peroleh $v(x,y) = ke^{-\mu x}$ untuk suatu konstanta real k, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}c(x) &= ike^{-\mu x}\\ \frac{\partial c(x)}{\partial x} &= -\mu(ike^{-\mu x})\\ \frac{\partial c(x)}{\partial x} &= -\mu(c(x))\\ \frac{\partial c(x)}{\partial x} &= -\mu c(x)\end{aligned}$$

Selain menggunakan sifat perumuman Cauchy-Riemann, sebuah fungsi μ regular dapat juga dibangun oleh sebuah fungsi panharmonik dengan menggunakan opelator L, dimana $L = \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}$ dan $Lf(z) = \mu\overline{f(z)}$. Sehingga diperoleh:

$$
\begin{aligned}
L(f_1 - f_2) &= iL(v_1 - v_2) \\
&= \left(\frac{-\partial}{\partial y} + i\frac{\partial}{\partial x}\right)(v_1 - v_2) \\
&= \frac{-\partial}{\partial y}(v_1 - v_2) + i\frac{\partial}{\partial x}(v_1 - v_2)
\end{aligned}
$$

Karena $Lf(z) = \mu\overline{f(z)}$ maka $\mu\left(\overline{f_1 - f_2}\right) = -\mu i(v_1 - v_2)$, sehingga diperoleh

$$\frac{\partial}{\partial x}(v_1 - v_2) = -\mu i(v_1 - v_2),$$

dan untuk $\frac{\partial}{\partial y}(v_1 - v_2) = 0$, sehingga penyelesaiannnya adalah $v_1 - v_2 = ike^{-\mu x}$ untuk suatu konstanta real *k*.

Teorema 3.2.4

Selisih dua buah fungsi μ regular yang memiliki bagian imaginer yang sama adalah sebuah fungsi $c(x) = ke^{\mu x}$ untuk suatu konstanta real k.

Bukti

Misalakan $f_1(z) = u_1(x, y) + iv(x, y)$ dan $f_2(z) = u_2(x, y) + iv(x, y)$

$$
\begin{aligned}
(f_1 - f_2)(z) &= c(x) \\
f_1(z) - f_2(z) &= c(x) \\
(u_1(x, y) + iv(x, y)) - (u_2(x, y) + iv(x, y)) &= c(x) \\
u_1(x, y) - u_2(x, y) &= c(x) \\
u_1 - u_2 &= c(x)
\end{aligned}
$$

Misalkan f fungsi μ regular bernilai real, maka $f(z) = u(x, y)$. Berdasarkan perumuman Cauchy-Riemann, maka $\frac{\partial u}{\partial x} = \mu u$ dan $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$ hal ini mengakibatkan fungsi u hanya bergantung pada variable x yang memenuhi $\frac{\partial u}{\partial x} = \mu u$. Sehingga kita peroleh $u(x, y) = ke^{\mu x}$ untuk suatu konstanta real k, sehingga diperoleh

$$c(x) = ke^{\mu x}$$
$$\frac{\partial c(x)}{\partial x} = \mu(ke^{\mu x})$$
$$\frac{\partial c(x)}{\partial x} = \mu(c(x))$$
$$\frac{\partial c(x)}{\partial x} = \mu c(x)$$

Jika dibuktikan dengan menggunakan opelator L, maka:

$$\begin{aligned} L(f_1 - f_2) &= iL(u_1 - u_2) \\ &= x\left(\frac{\partial}{\partial y} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u_1 - u_2) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(u_1 - u_2) + i\frac{\partial}{\partial y}(u_1 - u_2) \end{aligned}$$

Dan hasil tersebut harus sama dengan $\mu\left(\overline{f_1 - f_2}\right) = \mu(u_1 - u_2)$ sehingga diperoleh $\frac{\partial}{\partial x}(u_1 - u_2) = \mu(u_1 - u_2)$, untuk $\frac{\partial}{\partial y}(u_1 - u_2) = 0$ sehingga penyelesaiannya adalah $u_1 - u_2 = ke^{\mu x}$.

Contoh. Misal $u(x, y) = \left(1 + \sqrt{2}\right)e^{\frac{\mu(x+y)}{\sqrt{2}}}$, maka dapat ditunjukkan bahwa u panharmonik.

Jawab.

$$u(x, y) = \left(1 + \sqrt{2}\right)e^{\frac{\mu(x+y)}{\sqrt{2}}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\left(1+\sqrt{2}\right) \frac{\mu}{\sqrt{2}} e^{\frac{\mu(x+y)}{\sqrt{2}}} \right) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\left(1+\sqrt{2}\right) \frac{\mu^2}{2} e^{\frac{\mu(x+y)}{\sqrt{2}}} \right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(1+\sqrt{2} \frac{\mu}{\sqrt{2}} e^{\frac{\mu(x+y)}{\sqrt{2}}} \right) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left(\left(1+\sqrt{2}\right) \frac{\mu^2}{2} e^{\frac{\mu(x+y)}{\sqrt{2}}} \right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2\left(\left(1+\sqrt{2}\right) \frac{\mu^2}{2} e^{\frac{\mu(x+y)}{\sqrt{2}}} \right)$$

Dari hasil persamaan diatas terlihat bahwa hasilnya tidak nol, jadi terdapat μ yang memenuhi persamaan panharmonik. Kemudian dengan mendifferensialkan turunan pertama dari persamaan diatas diperoleh

$v = -\frac{\mu}{\sqrt{2}} e^{\frac{\mu(x+y)}{\sqrt{2}}}$. Setelah diketahui nilai dari v dan terbukti bahwa v merupakan fungsi panharmonik. Dan selanjutnya terbukti μ regular.

Dari kedua teorema diatas, yaitu *lemma 3.3.3* dan *lemma 3.3.4*, menunjukkan bahwa kedua fungsi μ regular tersebut baik yang bernilai real maupun yang bernilai imaginer hanya yang bergantung pada variable x saja. Hal ini berbeda dengan fungsi analitik, karena fungsi analitik yang bernilai real ataupun yang bernilai imaginer adalah fungsi konstan. Pernyataan tersebut menjelaskankan bahwa tidak akan ada fungsi μ regular konstan kecuali fungsi nol.

Dalam fungsi analitik, kita mengenal fungsi sekawan harmonik. Dalam fungsi μ regular juga dikenal istilah fungsi sekawan panharmonik. Fungsi v disebut sekawan panharmonik dengan u, jika dipenuhi sifat perumuman Cauchy-

Riemann (C-R-u) yaitu $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} + \mu u$ dan $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} - \mu v$. Begitu pula sebaliknya u disebut sekawan panharmonik dengan v jika dipenuhi persamaan perumuman Cauchy-Riemann (C-R-u) yaitu $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} + \mu v$ dan $\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} - \mu u$.

Sehingga muncul akibat jika v sekawan panharmonik dengan u maka $-v$ sekawan panharmonik dengan $-u$. sebagai buktinya yaitu:

Misalkan v sekawan panharmonik denagn u, maka berlaku $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} + \mu u$ dan $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} - \mu v$. Sehingga

$$\left(-\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \left(-\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \mu(-u)$$
$$\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right) - \mu(-v)$$

Hal tersebut menyatakan bahwa $-v$ sekawan panharmonik dengan $-u$ dan membuktikan bahwa dalam fungsi μ regular juga berlaku fungsi sekawan.

Sebuah fungsi μ regular dari fungsi panharmonik yang bernilai kompleks juga dapat dibangun dengan menggunakan operator differensial Laplace L yang akan dijelaskan seperti dibawah ini.

Lemma 3.2.5

Misalkan $u(z)$ *fungsi panharmonik maka* $f(z) = \mu\overline{u(z)} + \overline{L}u(z)$ *fungsi* μ *regular.*

Bukti

Untuk mengetahui bahwa fungsi $f(z)$ teresbut merupakan fungsi μ regular, maka harus ditunjukkan bahwa $Lf(z) = \mu\overline{f(z)}$, maka

$$\begin{aligned} Lf(z) &= L\left(\mu\overline{u(z)} + \bar{L}u(z)\right) \\ &= \mu L\overline{u(z)} + L\bar{L}u(z) \\ &= \mu L\overline{u(z)} + \Delta u(z) \\ &= \mu\left(L\overline{u(z)} + \mu u(z)\right) \\ &= \mu\overline{f(z)} \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $Lf(z) = \mu\overline{f(z)}$, sehingga fungsi tersebut merupakan fungsi μ regular.

Lemma 3.2.6

Misalkan $u(z)$ *fungsi panharmonik maka* $f(z) = i(-\mu\overline{u(z)} + \bar{L}u(z))$ *fungsi* μ *regular.*

Bukti

Sama halnya dengan lemma sebelumnya, untuk mengetahui bahwa fungsi $f(z)$ tersebut merupakan fungsi μ regular, maka harus ditunjukkan bahwa $Lf(z) = \mu i\overline{f(z)}$, maka

$$\begin{aligned} Lf(z) &= Li\left(-\mu\overline{u(z)} + \bar{L}u(z)\right) \\ &= -\mu iL\overline{u(z)} + iL\bar{L}u(z) \\ &= -\mu iL\overline{u(z)} + i\mu^2 u(z) \\ &= \mu\left(-iL\overline{u(z)} + i\mu u(z)\right) \\ &= \mu i\overline{f(z)} \end{aligned}$$

Terbukti bahwa fungsi tersebut fungsi μ regular, karena memenuhi persamaan $Lf(z) = \mu i \overline{f(z)}$.

3.3 Integral kontur fungsi μ regular

Dalam pembahasan fungsi μ regular yang berperan penting dalam pembahsannya adalah persamaan differensial, maka untuk mengetahui sifat-sifat yang berlaku pada fungsi μ regular digunakan integral untuk memperoleh sifat-sifat tersebut. Domain dari fungsi μ regular adalah pada Ω, maka digunakan integral kontur atau biasa disebut integral lintasan.

Secara umum perkalian dua buah fungsi μ regular tak nol bukan fungsi μ regular. Untuk itu akan dilihat sifat integral kontur hasil kali dua buah fungsi μ regular, selisihnya dan integral kontur hasil kombinasi fungsi panharmonik dengan fungsi μ regular.

Lemma 3.3.7

Misalkan $\Omega \subseteq \Re^2$ daerah buka terhubung sederhana yang dibatasi oleh sebuah kurva tutup sederhana Γ. Misalkan $h(z) \in C^1(\Omega)$, dan $\mathrm{Re}(L(h(z))) = 0$. Maka $\mathrm{Im}\int_\Gamma h(z)dz = 0$.

Bukti

Misalkan $h(z) = u(x, y) + iv(x, y) \in C^1(\Omega)$, maka

$$Lh(z) = \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(u(x,y) + iv(x,y)\right)$$
$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

Karena $\mathrm{Re}(L(h(z))) = 0$ maka $\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0$, sehingga diperoleh:

$$\mathrm{Im}\int_\Gamma h(z)dz = \mathrm{Im}\int_\Gamma (u(x,y) + iv(x,y)) + (dx + idy)$$
$$= \mathrm{Im}\int_\Gamma (udx - vdy) + i(udy + vdx)$$
$$= \int_\Gamma udy + vdx$$
$$= \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy$$
$$= 0$$

Jadi terbukti bahwa jika $\mathrm{Re}(L(h(z))) = 0$, maka $\mathrm{Im}\int_\Gamma h(z)dz = 0$.

Lemma 3.3.8

Misalkan $\Omega \subseteq \Re^2$ daerah buka terhubung sederhana yang dibatasi oleh sebuah kurva tutup sederhana Γ. Misalkan $h(z) \in C^1(\Omega)$, dan $\mathrm{Im}(L(h(z))) = 0$. Maka $\mathrm{Re}\int_\Gamma h(z)dz = 0$.

Bukti

Misalkan $h(z) = u(x,y) + iv(x,y) \in C^1(\Omega)$, maka

$$Lh(z) = \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(u(x,y) + iv(x,y)\right)$$
$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

Karena $\mathrm{Im}(L(h(z)))=0$ maka $\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)=0$, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\int_{\Gamma} h(z)dz &= \mathrm{Re}\int_{\Gamma}(u(x,y)+iv(x,y))(dx+idy)\\
&= \mathrm{Re}\int_{\Gamma}(udx-vdy)+i(udy+vdx)\\
&= \int_{\Gamma} udx-vdy\\
&= -\int_{\Omega}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy\\
&= 0
\end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa jika $\mathrm{Im}\int_{\Gamma} h(z)dz=0$, maka $\mathrm{Re}(L(h(z)))=0$.

Teorema 3.3.9

Misalkan f dan g masing-masing fungsi μ pada $\Omega\subseteq\Re^2$. Maka

$$\mathrm{Re}\int_{\Gamma} f(z)g(z)dz=0$$

Bukti:

Misalkan $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$

$g(z)=P(x,y)+iQ(x,y)$ masing-masing fungsi μ regular, maka:

$$\begin{aligned}
L(f(z)g(z)) &= f(z)Lg(z)+g(z)Lf(z)\\
&= f(z)\mu\overline{g(z)}+g(z)\mu\overline{f(z)}\\
&= \mu\left(f(z)\overline{g(z)}+g(z)\overline{f(z)}\right)\\
&= 2\mu(uP+vQ)
\end{aligned}$$

Sesuai dengan lemma sebelumnya yaitu pada *lemma 3.3.8*, jika $\operatorname{Im}(L(h(z))) = 0$, maka $\operatorname{Re}\int_{\Gamma} h(z)dz = 0$. Begitu pula jika $\operatorname{Im} L\big(f(z)g(z)\big) = 0$, maka $\operatorname{Re}\int_{\Gamma} f(z)g(z)dz = 0$.

Teorema 3.3.10

Misalkan f *dan* g *masing-masing fungsi* μ *pada* $\Omega \subseteq \Re^2$. *Maka* $\operatorname{Re}\int_{\Gamma} \overline{f(z)g(z)}dz = 0$

Bukti:

Misalkan $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

$g(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$ masing-masing fungsi μ regular, maka:

$$\begin{aligned}
\overline{L\big(f(z)g(z)\big)} &= \overline{f(z)Lg(z) + g(z)Lf(z)} \\
&= \overline{f(z)}\mu g(z) + \overline{g(z)}\mu f(z) \\
&= \mu\big(\overline{f(z)}g(z) + \overline{g(z)}f(z)\big) \\
&= 2\mu(uP + vQ)
\end{aligned}$$

Sesuai dengan lemma sebelumnya yaitu jika $\operatorname{Im} L\big(f(z)g(z)\big) = 0$, maka $\operatorname{Re}\int_{\Gamma} \overline{f(z)g(z)dz} = 0$.

Jika f fungsi μ regular dimana $\operatorname{Re}\int_{\Gamma} f(z)dz = 0$, maka hal tersebut akan mengakibatkan $\operatorname{Re}\int_{\Gamma} f^2(z)dz = 0$, bukti sesuai dengan teorema-teorema sebelumnya.

Sifat-sifat fungsi integral kontur untuk fungsi yang bernilai real dan yang bernilai imaginer yaitu sebagai berikut:

$$\operatorname{Re}\int_\Gamma h(z)dz = \operatorname{Re}\overline{\int_\Gamma h(z)dz}$$
$$\operatorname{Im}\int_\Gamma h(z)dz = -\operatorname{Im}\overline{\int_\Gamma h(z)dz}$$

Sifat-sifat integral kontur teresebut dapat dijadikan acuan untuk membuktikan sifat-sifat integral kontur fungsi μ regular yang lain, yaitu seperti teorema-teorema selanjutnya.

Teorema 3.3.11

Misalkan $\Omega \subseteq \Re^2$ daerah buka terhubung sederhana yang dibatasi oleh sebuah kurva tutup sederhana Γ. Misalkan f dan g masing-masing fungsi μ regular pada Ω. Maka $\int_\Gamma f(z)g(z)dz + \overline{\int_\Gamma f(z)g(z)dz} = 0$.

Bukti

Misal $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

$g(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$ masing-masing fungsi μ regular. Maka $\operatorname{Im} L(f(z)g(z)) = 0$.

Berdasarkan lemma diatas, $\operatorname{Re}\int_\Gamma f(z)g(z)dz = 0$. Tetapi,

$\operatorname{Re}\int_\Gamma f(z)g(z)dz = \operatorname{Re}\overline{\int_\Gamma f(z)g(z)dz}$ dan

$\operatorname{Im}\int_\Gamma f(z)g(z)dz = -\operatorname{Im}\overline{\int_\Gamma f(z)g(z)dz}$, sehingga

$$\int_\Gamma f(z)g(z)dz + \overline{\int_\Gamma f(z)g(z)dz} = 0$$

Akibat 3.3.12

Misalkan f dan g dua buah fungsi μ *regular pada* Ω *yang berbeda bagian imaginernya. Maka* $\operatorname{Im}\int_\Gamma (f-g)(z)dz = 0$.

Bukti

Misalkan $f(z) = u(x,y) + iv_1(x,y)$

$g(z) = u(x,y) + iv_2(x,y)$, masing-masing fungsi tersebut merupakan fungsi μ regular pada Ω, sehingga $f(z) - g(z)$ juga merupakan fungsi μ regular. Kemudian untuk

$$L(f(z)-g(z)) = \mu\overline{(f(z)-g(z))}$$
$$\mu i\overline{(v_2 - v_1)} = \mu i(v_1 - v_2)$$

Hal tersebut menunjukkan bahwa $\operatorname{Re} L(f-g)(z) = 0$, sehingga Berdasarkan pembuktian lemma sebelumnya yaitu pada *lemma 3.3.7*, diperoleh $\operatorname{Im}\int_\Gamma (f-g)(z)dz = 0$, dan hal tersebut akan mengakibatkan

$$\int_\Gamma (f-g)(z)dz + \overline{\int_\Gamma (g-f)(z)dz} = 0.$$

Akibat 3.3.13

Misalkan f dan g dua buah fungsi μ *regular pada* Ω *yang berbeda bagian realnya. Maka* $\operatorname{Re}\int_\Gamma (f-g)(z)dz = 0$.

Bukti

Sejalan dengan teorema sebelumnya, misalkan $f(z) = u_1(x, y) + iv(x, y)$ dan $g(z) = u_2(x, y) + iv(x, y)$, masing-masing fungsi tersebut merupakan fungsi μ regular pada Ω, sehingga $f(z) - g(z)$ juga merupakan fungsi μ regular. Kemudian untuk

$$\begin{aligned} L(f(z) - g(z)) &= \mu\overline{(f(z) - g(z))} \\ &= \mu(u_1 - u_2) \end{aligned}$$

Hal tersebut menunjukkan bahwa $\operatorname{Im} L(f - g)(z) = 0$, sehingga Berdasarkan pembuktian lemma sebelumnya yaitu pada *lemma 3.3.8,* diperoleh $\operatorname{Re}\int_\Gamma (f - g)(z)dz = 0$, dan hal tersebut akan mengakibatkan

$$\int_\Gamma (f - g)(z)dz + \overline{\int_\Gamma (f - g)(z)dz} = 0$$

Selanjutnya akan dikemukakan kaitan fungsi panharmonik dan fungsi μ regular dalam suatu formula representasi integral kontur.

Teorema 3.3.14

Misalkan $u(z)$ fungsi panharmonik dan $f(z)$ fungsi μ regular pada $\Omega \subseteq \Re^2$. Maka $\int_\Gamma f(z)\overline{L}u(z)dz + \overline{\int_\Gamma \mu f(z)\overline{u(z)}dz} = 0$.

Bukti

Sesuai dengan lemma sebelumnya, yaitu pada *lemma 3.3.5 dan 3.3.6* diperoleh bahwa:

$g(z) = \mu\overline{u(z)} + \overline{L}u(z)$ fungsi μ regular

$h(z) = i\left(-\mu\overline{u(z)} + \overline{L}u(z)\right)$ juga fungsi μ regular.

Untuk selanjutnya, dengan menggunakan teorema sebelumnya, yaitu pada *teorema 3.3.9*, diperoleh $\int_{\Gamma} f(z)g(z)dz$ dan $\int_{\Gamma} f(z)h(z)dz$ imaginer. Untuk kemudian kita misalkan bahwa:

$$\int_{\Gamma} f(z)g(z)dz = P + Q$$

$$\int_{\Gamma} f(z)h(z)dz = -iP + iQ$$

Maka, kita peroleh

$$\begin{aligned} P + Q + \overline{P + Q} &= 0 \\ (-P + Q) - \overline{(-P + Q)} &= 0 \\ \overline{P} + Q &= 0 \end{aligned}$$

Karena hal tersebut maka,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f(z)\overline{L}udz + \overline{\int_{\Gamma} \mu f(z)\overline{u(z)}dz} &= \int_{\Gamma} f(z)\overline{L}ud\overline{z} + \int_{\Gamma} \mu\overline{f(z)}u)(z)d\overline{z} \\ &= \int_{\Gamma} f(z)\overline{L}udz + \int_{\Gamma} u(z)Lf(z)d\overline{z} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Kemudian jika dicari dengan memanfaatkan konjugatnya seperti pada *teorema 3.3.10* diperoleh $\overline{\int_{\Gamma} f(z)g(z)dz}$ dan $\overline{\int_{\Gamma} f(z)h(z)dz}$ imaginer. Untuk selanjutnya dimisalkan bahwa

$$\overline{\int_{\Gamma} \mu\overline{u}f(z)dz} = P$$

$$\overline{\int_{\Gamma} f(z)\overline{L}udz} = Q$$

Dengan memanfaatkan permisalan tersebut diatas, integral sebelumnya dapat ditulis sebagai

$$\overline{\int_\Gamma f(z)g(z)dz} = P + Q$$

$$\overline{\int_\Gamma f(z)h(z)dz} = -iP + iQ$$

Hal tersebut mengakibatkan $P+Q$ dan $-iP+iQ$ keduanya bernilai imaginer, sehingga diperoleh

$$P + Q + \overline{P + Q} = 0 \text{ dan } \overline{(-P+Q)} - (-P+Q) = 0$$

Sehingga didapatkan $\overline{P} + Q = 0$, dan hal ini mengatakan bahwa

$$\begin{aligned} \int_\Gamma f(z)\overline{L}u(z)dz + \overline{\int_\Gamma \mu f(z)\overline{u(z)}dz} &= \int_\Gamma f(z)\overline{L}u(z)dz + \int_\Gamma \mu\,\overline{f(z)}u(z)d\overline{z} \\ &= \int_\Gamma f(z)\overline{L}u(z)dz + \int_\Gamma u(z)Lf(z)d\overline{z} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa hasil kombinasi dari fungsi panharmonik dengan fungsi μ regular dengan menggunakan integral kontur juga didapatkan hasil nol.

BAB IV

PENUTUP

4.1. Kesimpulan

4.1.1 Dari pembahasan diketahui bahwa hasil konstruksi μ regular adalah:

a. Misalkan $\Omega \subseteq \Re^2$ daerah buka terhubung sederhana. Misalkan u sebuah fungsi panharmonik real pada Ω. Maka terdapat fungsi μ regular pada Ω yang bagian realnya u.

b. Misalkan $\Omega \subseteq \Re^2$ daerah buka terhubung sederhana. Misalkan v sebuah fungsi panharmonik real pada Ω. Maka terdapat fungsi μ regular pada Ω yang bagian imaginernya u.

c. Selisih dua buah fungsi μ regular yang memiliki bagian real yang sama adalah sebuah fungsi $c(x) = ike^{-\mu x}$ untuk suatu konstanta real k.

d. Selisih dua buah fungsi μ regular yang memiliki bagian imaginer yang sama adalah sebuah fungsi $c(x) = ke^{\mu x}$ untuk suatu konstanta real k.

e. Misalkan $u(z)$ fungsi panharmonik maka $f(z) = \mu\overline{u(z)} + \overline{L}u(z)$ fungsi μ regular.

f. Misalkan $u(z)$ fungsi panharmonik maka $f(z) = i(-\mu\overline{u(z)} + \overline{L}u(z))$ fungsi μ regular.

4.2.1 Sifat-sifat fungsi μ regular melalui integral kontur, yaitu:

a. Jika $\operatorname{Re} L(h(z)) = 0$, maka $\operatorname{Im} \int_{\Gamma} h(z)dz = 0$

b. Jika $\operatorname{Im} L(h(z)) = 0$, maka $\operatorname{Re} \int_{\Gamma} h(z)dz = 0$

c. Jika $f(z)$ dan $g(z)$ masing-masing fungsi μ regular, maka $\operatorname{Re} \int_{\Gamma} f(z)g(z)dz = 0$

d. Jika $f(z)$ dan $g(z)$ masing-masing fungsi μ regular, maka $\operatorname{Im} \int_{\Gamma} f(z)g(z)dz = 0$

e. Jika $f(z)$ dan $g(z)$ masing-masing fungsi μ regular, maka $\int_{\Gamma} f(z)g(z)dz + \overline{\int_{\Gamma} f(z)g(z)dz} = 0$

f. Jika $f(z)$ dan $g(z)$ masing-masing fungsi μ regular yang berbeda bagian imaginernya maka, $\operatorname{Im} \int_{\Gamma} (f-g)(z)dz = 0$.

g. Jika $f(z)$ dan $g(z)$ masing-masing fungsi μ regular yang berbeda bagian realnya maka, $\operatorname{Re} \int_{\Gamma} (f-g)(z)dz = 0$.

h. Misalkan $u(z)$ fungsi panharmonik dan $f(z)$ adalah fungsi μ regular maka, $\int_{\Gamma} f(z)\overline{L}u(z)dz + \overline{\int_{\Gamma} \mu f(z)\overline{u(z)}dz} = 0$.

4.2. Saran

Fungsi μ regular masih jarang dibahas, sedangkan untuk pembahasan fungsi μ regular itu sendiri masih banyak hal-hal dan operasi-operasi lainnya yang belum diketahui. Jadi disarankan kepada yang berminat untuk membahas lebih lanjut fungsi μ regular dengan operasi dan sifat-sifat lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Ault, J.C dan Ayers, Frank. 1992. *Persamaan Differensial*. Erlangga: Jakarta.

Budhi, Wono Setya. 2000. *Fungsi Panharmonik di Cakram*. ITB: Bandung.

Cahya, Endang. 2000. *Fungsi μ Regular*. ITB: Bandung.

Echols, John M dan Hasan Shadily. 1976. *Kamus Inggris Indonesia*. Jakarta: Gramedia.

Hauser, Arthur A. 1980 *Complex Variables*. New York: Simon and Schuster.

Jakub, Ismail. 1982. *Ihya' Al-Ghazali*. CV Faizan: Jakarta.

Purcell, Edwin J dan Varberg, Dale. 1984. *Kalkulus dan Geometri Analitik*. Erlangga: Jakarta.

Soemantri, R. 1994. *Fungsi Variabel Kompleks*.

Spiegel, Murray R. 1964. *Peubah Kompleks*. Erlangga: Jakarta.

Yayasan Penyelenggara penterjemah/pentafsir Qur'an. 1971. *Al-Qur'an dan Terjemahannya*. Mujama': Madinah.

www.mail-archive.comportal@ikapens.orgmsg01342.html - 12k. Tanggal diakses 13 Januari 2009