

**FENOMENA SUPERRADIASI LUBANG HITAM REISSNER–
NORDSTRÖM PADA MEDAN DIRAC**

SKRIPSI

Oleh:
REGITA RESTI ANGGRAINI
NIM. 19640021



**PROGRAM STUDI FISIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2024**

HALAMAN PENGAJUAN

**FENOMENA SUPERRADIASI LUBANG HITAM REISSNER–NORDSTRÖM
PADA MEDAN DIRAC**

SKRIPSI

Diajukan kepada:

Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Syarat Dalam Memperoleh Gelar (S.Si)

Oleh:

Regita Resti Anggraini
NIM. 19640021

**PROGRAM STUDI FISIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2024**

HALAMAN PERSETUJUAN

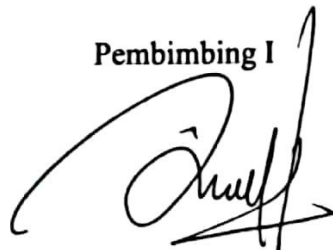
**FENOMENA SUPERRADIASI LUBANG HITAM REISSNER–NORDSTRÖM
PADA MEDAN DIRAC**

SKRIPSI

Oleh:
Regita Resti Anggraini
NIM. 19640021

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Pada tanggal, 19 Januari 2024

Pembimbing I



Arista Romadani, M.Sc
NIP. 19900905 201903 1 018

Pembimbing II



Drs. Abdul Basid, M.Si
NIP. 19650504 199003 1 003

Mengetahui,
Ketua Program Studi



Imam Tazi, M.Si
NIP. 19740730 200312 1 002





HALAMAN PENGESAHAN

FENOMENA SUPERRADIASI LUBANG HITAM REISSNER–NORDSTRÖM PADA MEDAN DIRAC


SKRIPSI

Oleh:
Regita Resti Anggraini
NIM. 19640021

Telah dipertahankan di depan dewan penguji skripsi dan
diterima sebagai salah satu persyaratan
untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si)
Pada Tanggal, 22 April 2024

Penguji Utama :	<u>Dr. Erna Hastuti, M.Si</u> NIP. 19811119 200312 1 001	
Ketua Penguji :	<u>Muhammad Taufiqi, M.Si</u> NIP. LB. 64021	
Sekretaris Penguji :	<u>Arista Romadani, M.Sc</u> NIP. 19900905 201903 1 018	
Anggota Penguji :	<u>Drs. Abdul Basid, M.Si</u> NIP. 19650504 199003 1 003	

Mengesahkan,
Dewan Program Studi



Dr. Inan Tazi, M.Si
NIP. 19740730 200312 1 002

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : REGITA RESTI ANGGRAINI
NIM : 19640021
Jurusan : FISIKA
Fakultas : SAINS DAN TEKNOLOGI
Judul Penelitian : Fenomena Superradiasi Lubang Hitam Reissner-Nordstrom
pada Medan Dirac

Menyatakan bahwa tugas akhir ini benar-benar karya saya sendiri. Sepanjang pengerjaan tugas akhir ini tidak ada karya atau pendapat yang ditulis atau dipublikasikan orang lain kecuali sebagai rujukan kutipan referensi dengan mengikuti tata cara penulisan karya ilmiah yang telah lazim.

Malang, 24 Februari 2024
Yang Membuat Pernyataan



Regita Resti Anggraini
NIM. 19640021

MOTTO

**“Allahumma inni as aluka bi asmaikal husna wasifatikal ulya bi anni
ashaduannaka antallah laillahillaanta al ahadusshomad lamyalid waalam
yulad walam yakullahu kufuwan ahad”**

HALAMAN PERSEMBAHAN

Diawali dengan mengucapkan *Alhamdulillah robbil 'alamin* dengan menyebut nama Allah SWT dan segala puji bagi-Nya, karya ini saya persembahkan kepada kedua orang tua saya yang telah mensupport dan selalu senantiasa mendoakan perjuangan saya dalam mengerjakan skripsi ini. Serta, tiga adik tercinta saya yang selalu menghibur dan menjadi pelepas penat saya dalam proses mengerjakan skripsi. Serta teman-teman dan murid saya yang selalu memberikan motivasi dalam berproses menuju sukses.

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, puji syukur kehadiran Allah SWT yang telah memberikan rahmat, taufik, dan hidayah-Nya yang tiada henti sehingga penulis dapat menyelesaikan penyusunan skripsi ini yang berjudul “**Fenomena Superradiasi Lubang Hitam Reissner-Nordstrom pada Medan Dirac**”. Shalawat serta salam semoga senantiasa terlimpahkan kepada Nabi Muhammad SAW, para sahabat, dan segenap orang yang mengikuti jejaknya.

Penulis menyadari bahwa banyak pihak yang berpartisipasi dan mendukung dalam penulisan skripsi ini. Oleh karena itu penulis tak lupa mengucapkan terimakasih kepada:

1. Dr. Imam Tazi, M.Si., selaku Ketua Jurusan Fisika Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Arista Romadani, M.Sc, selaku Dosen Pembimbing Skripsi Jurusan Fisika Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Seluruh jajaran dosen Jurusan Fisika Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah memberikan ilmu dan pengetahuan yang sangat bermanfaat dalam membantu penulisan skripsi ini.
4. Segenap staf dan pegawai di Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah membantu melancarkan dan memberikan pelayanan yang baik.
5. Para orang tua yang selalu mendo'akan dan memberi dukungan untuk putrinya dalam segala hal.

6. Teman-teman dekat yang telah membantu, memberikan semangat dan membagi sebagian pengetahuannya saat proses penulisan skripsi.
7. Serta semua pihak yang telah membantu secara langsung maupun tidak langsung demi kesuksesan dalam penulisan proposal skripsi ini.

Penulis menyadari tanpa bantuan, pengarahan, dan bimbingan dari berbagai pihak, skripsi ini tidak dapat terselesaikan. Semoga Allah SWT membalas kebaikan mereka dengan nikmat yang berlipat ganda baik di dunia maupun di akhirat kelak, Aamiin. Penulis berharap semoga proposal ini dapat memberikan manfaat dan menambah wawasan ilmiah bagi penulis dan semua pihak yang membaca skripsi ini, serta memberikan kontribusi bagi perkembangan ilmu pengetahuan. Oleh karena itu kritik dan saran yang bersifat membangun sangat penulis harapkan demi kesempurnaan penelitian ini.

Malang, 24 Februari 2024

Penulis

DAFTAR ISI

COVER.....	i
HALAMAN PENGANTAR.....	iii
HALAMAN PERSETUJUAN.....	iii
HALAMAN PENGESAHAN.....	iv
HALAMAN PERNYATAAN.....	v
MOTTO.....	vi
HALAMAN PERSEMBAHAN.....	vii
KATA PENGANTAR.....	viii
DAFTAR ISI.....	x
DAFTAR GAMBAR.....	xii
DAFTAR SIMBOL.....	xiii
DAFTAR LAMPIRAN.....	xiv
ABSTRAK.....	xv
ABSTRACT.....	xvi
المستخلص.....	xvii
BAB I PENDAHULUAN.....	1
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	4
1.3 Tujuan Penelitian.....	4
1.4 Batasan Masalah.....	4
1.5 Manfaat Penelitian.....	5
BAB II TINJAUAN PUSTAKA.....	6
2.1 Teori Medan Kuantum.....	6
2.1.1 Operator Momentum Sudut.....	6
2.1.2 Teorema Noether.....	9
2.1.3 Hukum Kekekalan Arus.....	12
2.2 Mekanika Kuantum Relativistik.....	14
2.2.1 Persamaan Dirac.....	15
2.3 Lubang Hitam Reissner–Nordström.....	19
2.4 Fenomena Superradiasi.....	20
2.4.1 Superradiasi dalam Fisika Lubang Hitam.....	23
BAB III HASIL DAN PEMBAHASAN.....	28
3.1 Formalisme Tetrad.....	28
3.2 Persamaan Dirac pada Ruang Waktu Minkowski.....	34
3.3 Persamaan Dirac pada Ruang Waktu Melengkung.....	39
3.4 Persamaan Dirac pada Ruang Waktu <i>Reissner Nordstrom</i>	46
3.4.1 Pemisahan Persamaan Dirac dalam Ruang Waktu <i>Reissner Nordstrom</i>	55
3.4.2 Perilaku Asimtotik di wilayah I : $r = +\infty$	66
3.4.3 Perilaku Asimtotik di wilayah II : $r = r_+$	72
3.4.4 Mencari Fluks Arus dengan Kekekalan Arus.....	76
3.5 Persamaan Dirac non-linier pada Ruang Waktu <i>Reissner Nordstrom</i>	85
3.5.1 Perilaku Asimtotik di wilayah I : $r = +\infty$	89
3.5.2 Perilaku Asimtotik di wilayah II : $r = r_+$	89

3.5.3 Mencari Fluks Arus dengan Kekekalan Arus	93
3.6 Lubang Hitam dalam Perspektif Al-Qur'an.....	100
BAB IV PENUTUP	104
4.1 Kesimpulan	104
4.2 Saran.....	104
DAFTAR PUSTAKA	105

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Sirkuit Bertenaga Black Hole.....	25
Gambar 2.2	Proses Penrose.....	27

DAFTAR SIMBOL

Dalam penelitian ini menggunakan lambang metrik (+ - - -) dan juga menggunakan satuan dengan $c = \hbar = G = k_e = 1$ di mana c adalah kecepatan cahaya dalam ruang hampa, \hbar adalah konstanta Planck yang dinormalisasi, G adalah konstanta gravitasi, dan k_e adalah konstanta Coulomb.

$g_{\alpha\beta}$	Metrik ruangwaktu; Indeks Yunani berjalan dari 0 hingga 3
e_a^μ	Tetrad ruangwaktu ortonormal
M	Massa lubang hitam
Q	Muatan lubang hitam
J	Momentum sudut lubang hitam
$a \equiv J/M$	Momentum sudut per satuan massa
r_+	Jari-jari cakrawala peristiwa BH dalam koordinat yang dipilih.
Ω_+	Kecepatan sudut "cakrawala" didefinisikan sebagai $\Omega_+ = a/(2Mr_+)$
Φ_+	Potensial listrik di cakrawala
$\mathbb{1}$	Matriks/operator identitas
∇_μ	Turunan kovarian <i>Levi-Civita</i>
Y_l^m	Skalar bola, harmonik derajat l dan orde m , di mana l dan m adalah bilangan bulat yang memenuhi $l \geq m $
	Fungsi-fungsi ini memenuhi hubungan ortonormalitas $\int d\Omega (Y_l^m)^* Y_{l'}^{m'} = \delta_{l,l'} \delta_{m,m'}$
$\chi_{j\mp 1/2}^k$	Harmonik bola spinor di mana j dan k adalah setengah bilangan bulat yang memenuhi $j \geq k $
σ^i	Matriks Pauli, $\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
γ^a	Matriks Dirac 4×4
$G^\mu \equiv \gamma^a e_a^\mu$	Matriks Dirac ruang waktu melengkung
ϕ	Medan Klein-Gordon
$A_\mu = (\Phi, \vec{A})$	Potensial elektromagnetik
Ψ	Spinor Dirac
Φ	Potensial listrik, komponen waktu A_μ
ω	Variabel transformasi Fourier. Ketergantungan waktu dari bidang apa pun $\sim e^{-i\omega t}$
k, s	Nomor gelombang
q	Medan Muatan
μ	Massa muatan
ω_R, ω_I	Bagian nyata dan imajiner dari mode quasinormal (QNM)
I, R, T	Amplitudo dari gelombang yang datang, gelombang yang dipantulkan dan gelombang yang ditransmisikan. Amplitudo ini adalah fungsi bernilai kompleks dari ω .

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1	Solusi Reissner Nordstrom.....	108
Lampiran 2	Simbol Christoffel.....	111
Lampiran 3	Antikomutasi Matriks Gamma.....	123
Lampiran 4	Koefisien Koneksi Spin Matriks <i>Reissner Nordstrom</i>	124
Lampiran 5	Koordinat Bola.....	140

ABSTRAK

Anggraini, Regita Resti. 2024. **Fenomena Superradiasi Lubang Hitam Reissner-Nordstrom Pada Medan Dirac**. Skripsi. Program Studi Fisika. Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Dosen Pembimbing: (I) Arista Romadani, M.Sc (II) Drs. Abdul Basid, M.Si

Kata Kunci: Superradiasi, Persamaan Dirac, lubang hitam *Reissner Nordstrom*

Fenomena Superradiasi merupakan proses di mana partikel dapat memperoleh energi dan momentum sudut yang lebih besar setelah berinteraksi dengan lubang hitam berputar. Penelitian ini menyajikan analisis Persamaan Dirac dalam ruang waktu *Reissner-Nordstrom* dan analisis keberadaan fenomena superradiasi untuk kasus medan Dirac di ruang-waktu *Reissner-Nordstrom* serta kasus medan Dirac non-linier yang menggambarkan geometri lubang hitam bermassa dan bermuatan listrik. Meskipun tidak berputar secara eksplisit, keberadaan muatan listrik pada lubang hitam dapat menginduksi efek *frame dragging* atau penarikan bingkai seperti pada lubang hitam berputar. Melalui pendekatan persamaan Dirac yang dirumuskan dengan formalisme tetrad, medan elektromagnetik dan gravitasi yang ekstrem di dekat lubang hitam diperoleh solusi persamaan Dirac dan dihitung kekekalan arus yang terkait dengan kekal energi-momentum. Dari bentuk eksplisit arus ini, dievaluasi fluks energi dan momentum sudut yang masuk dan keluar dari ergoregion lubang hitam *Reissner Nordstrom*. Dengan membandingkan fluks arus masuk dan fluks arus yang dipantulkan, ditunjukkan bahwa superradiasi dapat terjadi ketika fluks arus yang dipantulkan lebih besar daripada fluks arus yang masuk. Hasil analisis ini memperluas penelitian selanjutnya mengenai interaksi partikel terhadap lubang hitam bermuatan dan berputar, serta memperluas tentang sifat-sifat lubang hitam yang terdampak oleh fenomena superradiasi.

ABSTRACT

Anggraini, Regita Resti. 2024. **Reissner-Nordstrom Black Hole Superradiation Phenomenon in Dirac Field**. Thesis. Physics Study Program. Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University Malang. Supervisor: (I) Arista Romadani, M.Sc (II) Drs. Abdul Basid, M.Si

Keywords: Superradiation, Dirac equation, Reissner Nordstrom black hole

Superradiation phenomenon is a process in which particles can obtain greater energy and angular momentum after interacting with a rotating black hole. This study presents the analysis of Dirac equation in Reissner-Nordstrom spacetime and the analysis of the existence of superradiation phenomenon for the case of Dirac field in Reissner-Nordstrom spacetime as well as the case of non-linear Dirac field describing the geometry of massive and electrically charged black hole. Although not explicitly rotating, the presence of electric charge in a black hole can induce a frame dragging effect as in a rotating black hole. Through the approach of the Dirac equation formulated with the tetrad formalism, the extreme electromagnetic and gravitational fields near the black hole are solved and the conservation of current associated with the conservation of energy-momentum is calculated. From the explicit form of this current, the energy flux and angular momentum entering and leaving the ergoregion of the Reissner Nordstrom black hole are evaluated. By comparing the incoming current flux and the reflected current flux, it is shown that superradiation can occur when the reflected current flux is larger than the incoming current flux. The results of this analysis extend future research on particle interactions with charged and rotating black holes, and expand on the properties of black holes affected by the superradiation phenomenon.

المستخلص

أنجرايني، ريجينا ريستي. ٢٠٢٤. ظاهرة السوبراشعاع في حفرة سوداء رايسنر-نوردستروم في مجال ديراك. رسالة بكالوريوس. قسم الفيزياء. كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة الدولة الإسلامية مولانا مالك إبراهيم مالانغ. المشرف (I) : أريستا روماداني، ماجستير. (II) عبد الباسط، ماجستير.

كلمات مفتاحية: سوبراشعاع، معادلة ديراك، حفرة سوداء رايسنر نوردستروم.

ظاهرة السوبراشعاع هي عملية يمكن للجسيمات فيها اكتساب طاقة وزخم زاوي أكبر بعد التفاعل مع الثقوب الأسود المتدور. تقدم هذه الدراسة تحليلاً لمعادلة ديراك في الزمكان والزمان فيرايسنر-نوردستروم، وتحليلاً لوجود ظاهرة السوبراشعاع لحالة حقل ديراك في الزمكان زمن فيرايسنر-نوردستروم وكذلك حالة حقل ديراك غير الخطية التي تصف الهندسة الهوائية للثقب الأسود ذي الكتلة والشحن الكهربائي. على الرغم من عدم التدوير بشكل صريح، يمكن أن يسبب وجود الشحن الكهربائي في الثقوب الأسود تأثيرات سحب الإطار أو السحب الإطاري كما في الثقوب الأسود المتدور. من خلال النهج المتبع لمعادلة ديراك المصاغة بواسطة الشكلية التتراد، يتم الحصول على حلول لمعادلة ديراك للميدان الكهرومغناطيسي والجاذبية القريبة من الثقوب الأسود، ويتم حساب التدفق الثابت المتصل بثبات الطاقة-الزخم. من خلال شكل التدفق الثابت هذا، يتم تقييم تدفق الطاقة والزخم الزاوي الوارد والصادر من منطقة الجر الأسود فيرايسنر نوردستروم. من خلال مقارنة تدفق الطاقة الواردة وتدفق الطاقة المنعكسة، يُظهر أن السوبراشعاع يمكن أن يحدث عندما يكون تدفق الطاقة المنعكسة أكبر من تدفق الطاقة الواردة. توسيع نتائج هذا التحليل يعزز البحث اللاحق حول تفاعل الجسيمات مع الثقوب الأسود المشحونة والمتدورة، ويوسع فهم الخصائص التي يتأثر بها الثقوب الأسود نتيجة لظاهرة السوبراشعاع.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Superradiasi adalah proses peningkatan radiasi yang terjadi dalam banyak konteks fisika. Salah satu manifestasinya adalah apa yang disebut hamburan superradiasi. Fenomena ini terjadi pada hamburan medan oleh sistem tertentu, di mana medan yang terpantul memperoleh energi yang lebih besar daripada yang dimiliki medan datang. Jadi, sistem difuser harus memiliki beberapa mekanisme disipatif yang memungkinkan untuk transfer energi ke medan. Mekanisme disipasi yang diperlukan untuk keberadaan superradiasi adalah gesekan atau viskositas yang selalu melibatkan beberapa materi atau medan radiasi. *Black Hole* muncul dalam beberapa solusi vakum dari persamaan medan Einstein, maka horizon peristiwa menyediakan ruang hampa dengan mekanisme disipasi. Hal ini sangat menarik, karena medan diizinkan untuk mengekstrak energi dari ruang hampa dengan hamburan superradiasi.

Pada tahun 1971, Roger Penrose mencetuskan sebuah fenomena yang disebut proses Penrose. Fenomena ini adalah fenomena dimana energi rotasi dapat diekstraksi dari *Black Hole* Kerr yang berputar dan secara umum diyakini sebagai analogi partikel dari hamburan superradiasi. Proses Penrose memanfaatkan fakta bahwa *Black Hole* Kerr memiliki wilayah yang disebut dengan ergoregion, dimana sebuah partikel dapat memiliki energi negatif sehubungan dengan pengamat pada tak terhingga (Brito et al., 2021). Penrose mempertimbangkan sebuah partikel yang jatuh ke dalam ergoregion dan meluruh menjadi dua partikel lain. Sesuai dengan

hukum kekekalan energi momentum, ada kemungkinan salah satu partikel jatuh ke dalam *Black Hole* dengan energi negatif dan yang lainnya lolos ke tak terhingga dengan energi yang lebih besar daripada partikel aslinya. Pada *Black Hole Reissner–Nordström* statis bermuatan, terdapat ergoregion umum dan proses ekstraksi energi serupa (Vicente et al., 2018).

Kekuatan hamburan superradiasi pada medan bergantung pada kelompok medan tersebut berasal (Brito et al., 2021). Secara umum diyakini bahwa medan fermion tidak dapat bersifat superradiasi sedangkan medan bosonik dapat bersifat superradiasi. Namun karena setiap medan tertentu memiliki persamaan medan sendiri dan dapat dihamburkan oleh sistem difuser yang berbeda, maka tidak dapat memberikan bukti umum yang matematis terkecuali pada beberapa kasus tertentu. Hal ini menimbulkan pertanyaan apakah partikel fermion dapat menunjukkan kehadiran superradiasi atau apakah justru interaksi nonlinier antara fermion yang menunjukkan kehadiran superradiasi.

Proses Penrose secara umum diyakini sebagai analog partikel dari fenomena hamburan superradiasi karena semua materi biasa (baryonik) terbuat dari fermion pada tingkat yang paling mendasar dan diyakini bahwa fermion tidak menunjukkan amplifikasi superradiasi. Hal ini menimbulkan harapan bahwa memungkinkan untuk beberapa interaksi non-linier antara fermion yang menunjukkan superradiasi. Dengan kata lain penelitian ini mengharapkan keberadaan kondensat fermion bosonik untuk menunjukkan amplifikasi superradiasi. Faktanya, keberadaan sistem fermion dengan perilaku bosonik tidak terlalu aneh dan terjadi di alam. Sebagai contoh, pasangan Cooper dalam teori superkonduktivitas BCS dan meson dalam fisika partikel merupakan contoh dari kondensat fermion bosonik. Pada penelitian

ini meninjau hamburan medan skalar dan Dirac pada Black Hole RN bermuatan statis dan menggunakan simetri bola dari geometri RN untuk memisahkan persamaan Dirac. Kemudian memberikan teori medan Dirac nonlinier yang terinspirasi oleh model *Nambu-Jona-Lasini*. Dalam penelitian ini mempertimbangkan medan uji bermuatan dengan mengabaikan medan elektromagnetik yang dihasilkan oleh medan tersebut dan reaksi baliknya pada geometri ruang waktu. Jadi medan ini selalu merambat dalam geometri latar belakang yang tetap.

Maka dari itu adanya fenomena superradiasi lubang hitam berkaitan dengan peristiwa hilangnya suatu materi ke dalam lubang hitam dan memiliki sisa materi yang ditembakkan keluar dengan energi yang sangat tinggi sebagaimana telah dijelaskan dalam firman Allah Surah At – Takwir 15-16 :

فَلَا أُقْسِمُ بِالْخُنُفِّ ۝ ١٥ الْجَوَارِ الْكُنَّيْ ۝ ١٦

“(15) Aku bersumpah demi bintang tersembunyi ; (16) Yang bergerak cepat yang menyapu”

Dalam Surah tersebut dijelaskan pada ayat ke-15 bahwa Allah bersumpah atas salah satu makhluk-Nya yaitu bintang yang memiliki sifat tersembunyi. Bintang tersebut tidak lain halnya adalah lubang hitam yang memiliki karakter tak terlihat (tersembunyi). Pada ayat ke-16 dijelaskan bahwa bintang bergerak cepat dan menyapu memiliki makna bahwa lubang hitam selain memiliki sifat tak terlihat (tersembunyi), juga dapat bergerak cepat dan menyapu apapun yang ada disekitarnya termasuk fenomena superradiasi pada lubang hitam. Dimana fenomena superradiasi pada lubang hitam ditandai dengan peristiwa hilangnya

gelombang ke dalam lubang hitam dan sisanya ditembakkan dengan energi yang lebih besar.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, permasalahan yang akan diteliti dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana persamaan medan Dirac pada ruang waktu *Reissner–Nordström*?
2. Bagaimana perbandingan kuantitas fluks arus datang dan pantul pada hamburan medan Dirac nonlinier yang menghadirkan fenomena Superradiasi?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah diatas, tujuan dari penelitian ini antara lain:

1. Untuk memperoleh persamaan medan Dirac pada ruang waktu *Reissner–Nordström*.
2. Untuk memperoleh perbandingan kuantitas fluks arus datang dan pantul pada hamburan medan Dirac nonlinier yang menghadirkan fenomena Superradiasi.

1.4 Batasan Masalah

Penelitian tentang amplifikasi superradiasi ini memiliki cakupan yang sangat luas. Untuk membatasi ruang lingkup pembahasan penelitian ini, penulis memberi batasan-batasan masalah agar isi pembahasan tidak melenceng dari rumusan masalah. Maka dari itu, batasan permasalahan pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Medan yang dikaji adalah hamburan medan fermion.
2. Geometri yang dikaji adalah geometri *Reissner–Nordström*.
3. Menggunakan konstanta kopling negatif $\tilde{\lambda} > 0$ untuk mencari fluks arus pada RN dengan hamburan medan Dirac nonlinier.

1.5 Manfaat Penelitian

Setelah menyelesaikan dan menyusun hasil penelitian, diharapkan penelitian ini dapat memberi manfaat kepada orang-orang yang membacanya, khususnya dibidang fisika teori. Manfaat penelitian ini dijabarkan sebagai berikut:

1. Secara akademis, penelitian ini diharapkan memberikan ilmu yang bermanfaat kepada masyarakat ilmiah maupun berbagai pihak yang berkepentingan secara luas.
2. Secara praktis, penelitian ini diharapkan dapat digunakan sebagai referensi untuk memahami fenomena superradiasi menggunakan hamburan medan Dirac.
3. Secara teoritis, penelitian ini diharapkan akan memberi masukan dan kontribusi yang berupa teori dan analisis secara matematik, khususnya pada penelitian yang berkaitan dengan superradiasi

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Teori Medan Kuantum

Teori medan kuantum merupakan kerangka teoritis dengan menggabungkan teori medan klasik, relativitas khusus dan mekanika kuantum. Dalam fisika partikel biasanya akan meninjau partikel-partikel yang sangat kecil dan bergerak dengan kecepatan tinggi mendekati kecepatan cahaya. Teori tentang hamburan partikel dapat ditinjau dari beberapa dimensi dan tergantung dari bentuk lagrangiannya.

2.1.1 Operator Momentum Sudut

Operator momentum sudut menggambarkan sifat kuantum dan interaksi antar partikel dalam suatu sistem misalnya efek hamburan dan penyerapan partikel. Untuk sistem yang dapat mengalami superradiasi, operator ini membantu menggambarkan bagaimana momen angular kolektif dapat berkembang dan memberikan kontribusi terhadap fenomena superradiasi. Hal ini berkaitan dengan transfer energi dan momentum sudut antara objek lubang hitam dan gelombang. Dalam kasus lubang hitam, konsep ergoregion yaitu area di sekitar lubang hitam di mana objek tidak dapat tetap diam secara stasioer. Operator momentum sudut dibentuk oleh operator posisi dan operator momentum sudut linier. Operator momentum linier dinyatakan sebagai:

$$\hat{p} = -i\hbar\nabla \tag{2.37}$$

Dengan ungkapan ∇ adalah

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \quad (2.38)$$

Sehingga setiap komponen dari operator momentum linier dalam koordinat kartesian dapat dinyatakan:

$$\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}; \hat{p}_y = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}; \hat{p}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.39)$$

Operator momentum sudut diperoleh dari hasil *cross product* antara vektor posisi r dan operator momentum sudut linier p sebagai berikut:

$$\begin{aligned} L &= r \times p \\ &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} \\ &= (yp_z - zp_y)\hat{i} + (zp_x - xp_z)\hat{j} + (xp_y - yp_x)\hat{k} \end{aligned} \quad (2.40)$$

Berdasarkan persamaan diatas diperoleh:

$$L_x = yp_z - zp_y \quad (2.41)$$

$$L_y = zp_x - xp_z \quad (2.42)$$

$$L_z = xp_y - yp_x \quad (2.43)$$

Dengan mensubstitusi komponen-komponen operator momentum sudut linier ke dalam persamaan di atas maka akan diperoleh:

$$L_x = y \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial z} \right) - z \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial y} \right) = -i\hbar \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (2.44)$$

$$L_y = z \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) - x \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial z} \right) = -i\hbar \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (2.45)$$

$$L_z = x \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial y} \right) - y \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) = -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \quad (2.46)$$

Menggunakan definisi $L^2 = L \cdot L$ dengan L sebagaimana persamaan (2.40) maka ekspresi untuk operator \widehat{L}^2 dapat disederhanakan menggunakan persamaan (2.44) sampai (2.46) menjadi persamaan berikut:

$$\widehat{L}^2 = \widehat{L}_x^2 + \widehat{L}_y^2 + \widehat{L}_z^2 \quad (2.47)$$

Kemudian mendefinisikan komponen operator momentum sudut $\widehat{L}_x^2, \widehat{L}_y^2, \widehat{L}_z^2$ sebagai

$$\widehat{L}_x^2 = \hbar^2 \left(z \frac{\partial}{\partial z} + y \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (2.48)$$

$$\widehat{L}_y^2 = \hbar^2 \left(x \frac{\partial}{\partial x} + z \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (2.49)$$

$$\widehat{L}_z^2 = \hbar^2 \left(y \frac{\partial}{\partial y} + x \frac{\partial}{\partial x} \right) \quad (2.50)$$

Ekspresi operator \widehat{L}^2 juga dapat dituliskan dalam bentuk persamaan diferensial seperti pada persamaan (2.48) sampai (2.50) dan didapatkan:

$$\widehat{L}^2 = 2\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (2.51)$$

(Supriadi et al., 2019)

(Purwanto, 2016) Mendefinisikan operator momentum sudut \widehat{L}_\pm sebagai kombinasi dari dua komponen operator momentum sudut sebagai berikut:

$$\widehat{L}_\pm = \widehat{L}_x \pm i\widehat{L}_y \quad (2.52)$$

dengan operator $\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z$ merupakan operator Hermitian sehingga:

$$\hat{L}_+^\dagger = (\hat{L}_x + i\hat{L}_y)^\dagger = \hat{L}_- \quad (2.53)$$

dan sebaliknya

$$\hat{L}_-^\dagger = (\hat{L}_x - i\hat{L}_y)^\dagger = \hat{L}_+ \quad (2.54)$$

2.1.2 Teorema Noether

Simetri merupakan perubahan prespektif yang membuat persamaan gerak tetap. Misalnya perubahan itu berupa translasi dalam ruang, perubahan waktu atau rotasi yang merupakan simetri eksternal karena bergantung pada perubahan ruang waktu. Sedangkan simetri internal merupakan perubahan pada medan yang tidak melibatkan perubahan ruang waktu.

Teorema Noether memungkinkan untuk menghubungkan simetri dengan kuantitas yang dilestarikan seperti muatan, energi dan momentum. Secara matematis, simetri adalah semacam variasi medan atau Lagrangian yang membuat persamaan gerak tidak berubah. Hasil fisika mendasar yaitu kekekalan energi dan momentum yang disebabkan oleh simetri dari perpindahan kecil dalam ruang waktu. Dengan membiarkan koordinat ruang waktu bervariasi.

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + a^\mu \quad (2.11)$$

Dimana a^μ adalah parameter kecil arbitrary yang menggambarkan perpindahan pada ruang waktu. Untuk memperluas Taylor, medan berubah menurut:

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi(x + a) = \varphi(x) + a^\mu \partial_\mu \varphi \quad (2.12)$$

Dibawah variasi kecil (gangguan), medan dapat digambarkan sebagai:

$$\varphi \rightarrow \varphi + \delta\varphi \quad (2.13)$$

Dapat menulis variasi dalam medan secara eksplisit sebagai:

$$\delta\varphi = a^\mu \partial_\mu \varphi \quad (2.14)$$

Sekarang mempertimbangkan kembali variasi Lagrangian dalam kasus Lagrangian yang hanya bergantung pada medan dan turunan pertamanya:

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} \delta\varphi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} \delta(\partial_\mu\varphi) \quad (2.15)$$

Dari persamaan Euler-Lagrange pada persamaan dapat diketahui:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu\varphi]} \right) \quad (2.16)$$

Oleh karena itu variasi dalam Lagrangian dapat ditulis sebagai:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu\varphi]} \right) \delta\varphi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} \delta(\partial_\mu\varphi) \\ &= \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu\varphi]} \right) \delta\varphi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} \partial_\mu(\delta\varphi) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Sekarang mendapatkan ekspresi yang dapat ditulis sebagai turunan total. Ingat aturan perkalian dari kalkulus biasa yaitu $(fg)' = f'g + g'f$. Maka:

$$f = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu\varphi]} \quad g = \delta\varphi \quad (2.18)$$

Kemudian ditulis:

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu\varphi]} \delta\varphi \right) = (fg)' \quad (2.19)$$

Sekarang menerapkan persamaan (2.14). perhatikan bahwa indeks yang sama hanya dapat digunakan dua kali dalam satu ekspresi, jadi perlu mengubah label yang digunakan dalam persamaan (2.14) ke indeks *dummy* lainnya. Dikatakan bahwa $\delta\varphi = a^\mu \partial_\mu \varphi = a^\nu \partial_\nu \varphi$. Kuantitas yang terlibat hanya skalar biasa, jadi juga dapat menandai dan menuliskan $\delta\varphi = \partial_\nu \varphi a^\nu$. Maka:

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu\varphi]} \partial_\nu \varphi \right) a^\nu \quad (2.20)$$

Secara ekuivalen, dapat juga menulis variasi Lagrangian sebagai:

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu(\mathcal{L})a^\mu = \delta_\nu^\mu \partial_\mu(\mathcal{L})a^\nu \quad (2.21)$$

Artinya, ini mempertimbangkan bagaimana itu bervariasi secara langsung sehubungan dengan perpindahan persamaan (2.11) dengan menyamakan kedua hasil menjadi:

$$\delta\mathcal{L} = \delta_\nu^\mu \partial_\mu(\mathcal{L})a^\nu = \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu\varphi]} \partial_\nu \varphi \right) a^\nu \quad (2.22)$$

Memindahkan kedua suku ke sisi persamaan yang sama memberikan:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu\varphi]} \partial_\nu \varphi - \delta_\nu^\mu \mathcal{L} \right) a^\nu = 0 \quad (2.23)$$

Sekarang ingat bahwa a^ν itu arbitrary. Jadi agar ungkapan ini hilang, turunannya harus sama dengan nol.

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu \varphi]} \partial_\nu \varphi - \delta_\nu^\mu \mathcal{L} \right) = 0 \quad (2.24)$$

Ungkapan ini sangat penting sehingga memberikan nama kuantitas ini sendiri.

Ternyata ini adalah tensor energi-momentum, dapat ditulis sebagai:

$$T_\nu^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu \varphi]} \partial_\nu \varphi - \delta_\nu^\mu \mathcal{L} \quad (2.25)$$

Oleh karena itu hubungan konservasi yang dinyatakan oleh divergensi total nol adalah:

$$\partial_\mu T_\nu^\mu = 0 \quad (2.26)$$

Perhatikan

$$T_0^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \dot{\varphi} - \mathcal{L} = \mathcal{H} \quad (2.27)$$

Artinya T_0^0 tidak lain adalah kerapatan Hamiltonian: merupakan kerapatan energi dan pada persamaan $\partial_0 T_0^0 = 0$ mencerminkan kekekalan energi. Komponen kerapatan momentum diberikan oleh T_i^0 dimana i berjalan diatas indeks spasial. Komponen momentum medan ditemukan dengan mengintegrasikan masing-masing suku diatas ruang yaitu:

$$P_i = \int d^3x T_i^0 \quad (2.28)$$

2.1.3 Hukum Kekekalan Arus

Dalam fisika adalah arus (*current*) yang tetap atau tidak berubah selama suatu proses fisika. Hukum kekekalan ini mencerminkan prinsip kekekalan suatu besaran dalam sistem tertentu. Contohnya hukum kekekalan muatan listrik

menyatakan bahwa total muatan listrik dalam suatu sistem terisolasi tetap konstan. Teorema Noether dapat diterapkan untuk menurunkan arus kekekalan dan muatan kekekalan dengan membiarkan medan bervariasi dengan jumlah kecil pada persamaan (2.13). Kemudian dibawah variasi ini, Lagrangian tidak berubah. Variasi dalam Lagrangian terkait persamaan (2.13) akan berbentuk:

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \delta\mathcal{L} \quad (2.29)$$

Maka yang dimaksud adalah

$$\delta\mathcal{L} = 0 \quad (2.30)$$

sekarang mengikuti prosedur biasa variasi Lagrangian, karena variasi medan akan:

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}\delta\varphi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\partial_\mu(\delta\varphi) \quad (2.31)$$

sekali lagi dalam persamaan Euler-Lagrange mendapatkan:

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu\varphi]} \right) \delta\varphi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu\varphi]} \partial_\mu(\delta\varphi) = \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu\varphi]} \right) \delta\varphi \quad (2.32)$$

Karena beroperasi dibawah premis bahwa variasi medan tidak mengubah Lagrangian pada persamaan (2.30). Maka membawakan hasil:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu\varphi]} \delta\varphi \right) = 0 \quad (2.33)$$

Maka kuantitas dalam tanda kurung sebagai arus yang dilestarikan (*Conserved Current*). Dalam analogi dengan elektrodinamika, ditunjukkan dengan huruf J dan ditulis sebagai:

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu \varphi]} \delta \varphi \quad (2.34)$$

Persamaan hukum konservasi pada persamaan (2.33) dapat ditulis:

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \quad (2.35)$$

Hasil utama dari Teori Noether adalah:

- Untuk setiap simetri kontinu dari Lagrangian yaitu variasi dalam medan yang meninggalkan bentuk Lagrangian tidak berubah, ada arus kekal yang bentuknya dapat diturunkan dari Lagrangian menggunakan persamaan (2.34).

Terdapat muatan yang dilestarikan terkait dengan setiap arus yang dilestarikan dengan menggunakan simetri Lagrangian. Hal ini ditemukan dengan mengintegrasikan komponen waktu dari J :

$$Q = \int d^3 J^0 \quad (2.36)$$

Dapat dilihat bahwa kesimetrian translasi dalam ruang waktu berhasil di bagian sebelumnya yang menyebabkan tensor energi-momentum adalah kasus khusus teorema Noether, dengan muatan yang dilestarikan menjadi energi dan momentum.

2.2 Mekanika Kuantum Relativistik

Mekanika kuantum relativistik adalah mekanika kuantum yang diterapkan dengan relativitas khusus yang meliputi prediksi antimateri, momentum magnetik spin dari spin elementer $\frac{1}{2}$ fermion, dinamika kuantum paertikel bermuatan di medan elektromagnetik. Hasil utamanya adalah persamaan Dirac.

2.2.1 Persamaan Dirac

Persamaan Dirac adalah suatu persamaan gelombang relativistik yang dicetuskan oleh fisikawan Britania Raya Paul Dirac pada tahun 1928 dalam teori medan kuantum atau fisika partikel. Persamaan ini digambarkan oleh interaksi pada partikel Fermion dimana penurunan persamaannya dimulai dari persamaan Klein Gordon. Tinjau sebuah sistem partikel bebas atau elektron bebas atau elektron bebas dalam ruang hampa tanpa adanya medan.

$$\begin{aligned} H &= \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} \\ &= \pm c \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + m_0^2 c^2} \end{aligned} \quad (2.55)$$

Hamiltonian dia atas akan memberikan persamaan gelombang, yakni:

$$\begin{aligned} \left[\frac{E}{c} - \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + m_0^2 c^2} \right] \Psi &= 0 \\ \left[p_0 - \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + m_0^2 c^2} \right] \Psi &= 0 \end{aligned} \quad (2.56)$$

dalam relativitas khusus, energi total E dan momentum (p_x, p_y, p_z) dinyatakan sebagai komponen-komponen kovarian vektor-vektor sebagai berikut:

$$p_\mu \equiv (p_0, p_1, p_2, p_3) = \left[\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z \right] \text{ dimana } \mu = 0, 1, 2, 3 \quad (2.57)$$

Panjang invariannya adalah

$$\sum_{\mu=0}^3 p^\mu p_\mu \equiv p_\mu p^\mu = \frac{E^2}{c^2} - p \cdot p = m_0^2 c^2 \quad (2.58)$$

kemudian kuantisasi pertama dimasukkan yakni energi sebagai operator $\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$, maka diperoleh:

$$\left[-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 p^2 - m_0^2 c^4 \right] \Psi = 0 \quad (2.59)$$

persamaan diatas bukan bentuk yang diinginkan oleh teori kuantum. Kemudian Dirac merumuskan kembali persamaan gelombang dengan melakukan linierisasi terhadap Hamiltonian di atas dengan mempostulatkan sebagai berikut:

$$H = c(\vec{\alpha} \cdot \vec{p}) + \beta m_0 c^2 \quad (2.60)$$

dimana α dan β adalah matriks-matriks yang membuat Hamiltonian hermitian dan rapat probabilitas dengan syarat:

1. Persamaan Klein-Gordon dipenuhi (agar konsisten dengan relativitas)
2. Terdapat J^μ sehingga $\partial_\mu J^\mu = 0$ dengan $J^0 = \rho$ merupakan rapat probabilitas

dengan memasukkan operator $\hat{p} = -i\hbar \nabla$ dan $\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$, maka persamaan (2.60) identik dengan persamaan (2.55) maka persamaan (2.60) dikali dengan operator dari sebelah kiri:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m_0 c^2) \Psi \right] \\ - \hbar^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = (c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m_0 c^2)(c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m_0 c^2) \Psi \end{aligned} \quad (2.61)$$

$$= [c\alpha_1 p_1 + c\alpha_2 p_2 + c\alpha_3 p_3 + \beta m_0 c^2][c\alpha_1 p_1 + c\alpha_2 p_2 + c\alpha_3 p_3 + \beta m_0 c^2] \Psi$$

$$\begin{aligned}
&= [(c^2\alpha_1^2p_1^2 + c^2\alpha_2^2p_2^2c^2\alpha_3^2p_3^2) + c^2(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_1)p_1p_2 \\
&\quad + c^2(\alpha_1\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1)p_1p_3 + c^2(\alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_2)p_2p_3 \\
&\quad + c^3(\alpha_1\beta + \beta\alpha_1)m_0p_1 + c^3(\alpha_2\beta + \beta\alpha_2)m_0p_2 \\
&\quad + c^3(\alpha_3\beta + \beta\alpha_3)m_0p_3 + \beta^2m_0^2c^4]\Psi
\end{aligned}$$

karena persamaan (2.61) harus memenuhi persamaan (2.63) maka:

$$\begin{aligned}
\alpha_i^2 &= \beta^2 = 1 \\
\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i &= 0 \quad \text{dengan } i \neq j \\
&\quad \text{dan } i, j = 1, 2, 3 \\
(\alpha_i\beta + \beta\alpha_i) &= 0
\end{aligned} \tag{2.62}$$

untuk memberi gambaran lebih jelas dalam perumusan persamaan Dirac perlu ditentukan secara eksplisit matriks-matriks yang memenuhi persamaan (2.62) diatas. Diketahui nilai eigen matriks α adalah ± 1 . Misalnya bawa

$$\alpha_i = \alpha_i\beta^2 = \alpha_i\beta\beta = -\beta\alpha_i\beta^{-1} \tag{2.63}$$

dengan sifat siklik dari $Tr AB = Tr BA$, maka:

$$Tr\alpha_i = Tr\alpha_i\beta = -Tr(\beta\alpha_i\beta^{-1}) = -Tr\alpha_i \tag{2.64}$$

Jelas bahwa $Tr\alpha_i = 0$, berarti bahwa α_i harus mempunyai nilai eigen ± 1 yang sama dan dimensi n matriks genap, maka:

$$\begin{aligned}
\det(\alpha_i\alpha_j) &= \det(-\alpha_j\alpha_i) \\
&= (-1)^d \det(\alpha_i\alpha_j)
\end{aligned} \tag{2.65}$$

dalam bahasa berikutnya dengan mendefinisikan:

$$\begin{aligned}
\gamma^0 &= \gamma_0 = \beta \\
\gamma_i &= \beta \alpha_i \text{ atau } \gamma^i = \beta \alpha^i \\
\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} &= \gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu} \\
\text{Dengan } \delta_{\mu\nu} &= \begin{cases} 1 \text{ untuk } \mu = \nu \\ 0 \text{ untuk } \mu \neq \nu \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.66}$$

selanjutnya memasukkan $\hat{p} = -i\hbar\nabla$ dan $\hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ ke dalam persamaan (2.60),

maka diperoleh:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = c\vec{\alpha} \cdot (i\hbar\nabla)\Psi + \beta m_0 c^2 \Psi \tag{2.67}$$

apabila dikali dengan β di sisi kiri, maka:

$$[i\hbar\gamma^0\partial_0 + i\hbar\gamma \cdot \nabla - m_0c]\Psi = 0 \tag{2.68}$$

dengan menggunakan identitas $\gamma^0 = \beta$ dan $\gamma^i = \beta\alpha^i$. Maka diperoleh persamaan Dirac, yaitu:

$$[i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - m_0c]\Psi = 0 \tag{2.69}$$

selanjutnya untuk mendapatkan persamaan kontinuitas, dapat diperoleh dengan meninjau kembali persamaan Dirac pada persamaan (2.69) dengan melakukan operasi *kompleks konjugate*, yaitu:

$$[(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - m_0c)\Psi]^+ = 0 \tag{2.70}$$

dengan menggunakan identitas $\gamma^{\mu+} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$ dan karena $\gamma^0\gamma^0 = 1$ maka persamaan menjadi:

$$\bar{\Psi}[i\hbar\gamma^\mu\tilde{\partial}_\mu + m_0c] = 0 \quad (2.71)$$

bila persamaan (2.69) dikali dengan $\bar{\Psi} = \Psi^+\gamma^0$ dari sebelah kiri dan persamaan (2.71) dikali dengan Ψ lalu keduanya dijumlahkan, maka akan diperoleh:

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}[i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - m_0c]\Psi + \bar{\Psi}[i\hbar\gamma^\mu\tilde{\partial}_\mu - m_0c]\Psi &= 0 \\ \bar{\Psi}[i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu]\Psi + \bar{\Psi}[i\hbar\gamma^\mu\tilde{\partial}_\mu]\Psi &= 0 \\ \bar{\Psi}i\hbar\gamma^\mu(\partial_\mu\Psi) + i\hbar\gamma^\mu(\partial_\mu\bar{\Psi})\Psi &= 0 \\ \partial_\mu(i\hbar\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi) &= 0 \end{aligned} \quad (2.72)$$

dengan mengingat hukum kekekalan rapat arus muatan yakni $\partial_\mu J^\mu = 0$ dan membandingkan dengan persamaan (2.72) maka dapat disimpulkan bahwa:

$$J^\mu\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi = \begin{cases} J^0 = \bar{\Psi}\gamma^0\Psi = \Psi^+\Psi, & \text{adalah rapat muatan} \\ J^i = \bar{\Psi}\gamma^i\Psi, & i = 1,2,3 \text{ adalah rapat arus} \end{cases}$$

rapat muatan $J^0 = \bar{\Psi}\gamma^0\Psi = \Psi^+\Psi\gamma^0\gamma^0\Psi = \Psi^+\Psi$. Tampak bahwa rapat muatan adalah definitif positif yang telah sesuai dengan kuantum (Bansawang BJ, 2015). Persamaan relativistik menurut Dirac dengan pengaruh medan elektromagnetik dapat dituliskan sebagai:(Romadani & Rani, 2020).

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \{-i\hbar\alpha\nabla + \beta mc^2\}\psi \quad (2.73)$$

2.3 Lubang Hitam Reissner–Nordström

Geometri *Reissner–Nordström* menggambarkan geometri ruang kosong yang mengelilingi lubang hitam bermuatan. Jika muatan lubang hitam kurang dari massanya (diukur dalam satuan geometris $G = c = 1$) maka geometri tersebut berizi

dua horizon, yaitu horizon luar dan horizon dalam. Cakrawala seperti air terjun yang jatuh lebih cepat dari kecepatan cahaya dan ruang angkasa bergerak lebih lambat dari kecepatan cahaya. Black Hole yang statis dan bermuatan dideskripsikan pada geometri *Reissner–Nordström* (RN). Dalam koordinat bola, untuk $r > r_+$ geometri RN diwakili oleh persamaan kuadrat:

$$ds^2 = f dt^2 - f^{-1} dr - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (2.74)$$

dimana koefisien metriknya:

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \quad (2.75)$$

dimana M dan Q masing-masing adalah massa dan muatan listrik *Black Hole*. dalam koordinat ini terdapat radius horizon peristiwa pada:

$$r = r_+ = M + \sqrt{M^2 - Q^2} \quad (2.76)$$

kemudian muatan Q menghasilkan medan elektromagnetik yang simetris secara sferis.

$$A_\mu = (V(r), \vec{0}) \quad \text{dengan } V(r) = \frac{Q}{r} \quad (2.77)$$

2.4 Fenomena Superradiasi

Superradiasi adalah fenomena dimana radiasi ditingkatkan oleh suatu sistem yang memiliki kemampuan untuk menghilangkan energi dan terjadi dalam beberapa konteks fisika, misalnya hal ini dapat terjadi dalam optika kuantum, mekanika kuantum dan teori relativitas. Contoh lain yang lebih terkenal adalah radiasi Cherenkov atau hamburan gelombang suara dari antarmuka supersonik

(Cardoso et al., 2016). Superradiasi juga dapat dianggap sebagai mekanisme gesekan yang menekan gerakan translasi atau rotasi. Oleh karena itu hubungan antara radiasi dan sistem yang menyediakan energi harus ada agar superradiasi dapat terpicu. Manifestasi menarik dari fenomena ini terjadi pada hamburan medan oleh sistem dan menimbulkan gelombang hamburan dengan amplitudo lebih besar yang sehingga terjadi tranfer energi antara sistem dan radiasi, sistem kehilangan energi yang ditransfer melalui mekanisme kopling ke medan. (Brito et al., 2021).

Dalam optika kuantum, superradiasi mengacu pada fenomena yang terjadi ketika grup N pemancar, seperti atom yang tereksitasi berinteraksi dengan medan cahaya yang sama. Ketika panjang gelombang cahaya jauh lebih besar daripada jarak antar pemancar, mereka berinteraksi secara kolektif dan koheren dengan cahaya menghasilkan gelombang cahaya yang kuat. Superradiasi telah diamati dalam berbagai sistem fisik dan kimia, termasuk susunan dan agrerat titik kuantum yang baru-baru ini digunakan dalam pengembangan laser superradiatif (Chen & Zheng, 2023).

Pada tahun 1971, Zel'dovich menunjukkan bahwa hamburan radiasi dari permukaan penyerap yang berputar menghasilkan gelombang dengan amplitudo yang lebih besar. Fenomena ini sekarang dikenal luas juga sebagai superradiasi dan mensyaratkan bahwa radiasi yang datang diasumsikan monokromatik dengan frekuensi ω memenuhi:

$$\omega < m\Omega \quad (2.78)$$

dengan m adalah bilangan azimuth terhadap sumbu rotasi dan Ω adalah kecepatan sudut benda.

Teori medan yang digunakan selalu digambarkan dengan sebuah aksi dalam bentuk:

$$S = S_G + S_{EM} + S_M \quad (1.1)$$

dengan

$$S_G = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{R}{16\pi} \quad (1.2)$$

$$S_{EM} = - \int d^4x \sqrt{-g} \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (1.3)$$

dimana g adalah determinan metrik ruang waktu $g_{\mu\nu}$, R adalah skalar kelengkungan dan $F_{\mu\nu}$ adalah tensor medan elektromagnetik.

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (1.4)$$

aksi S_M :

$$S_M = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_M \quad (1.5)$$

dimana \mathcal{L}_M adalah rapat lagrangian dari suatu medan materi. Aksi ini menggambarkan medan materi yang sedang dianalisis dengan mempertimbangkan tiga jenis medan materi yaitu medan skalar, medan Dirac, dan medan Dirac nonlinier. Dalam penelitian ini menggunakan teori S_M yang invarian U(1). Teori semacam ini adalah teori yang mendeskripsikan medan ξ , maka persamaan – persamaannya invarian dibawah transformasi:

$$\xi \rightarrow e^{i\alpha} \xi \quad (1.6)$$

dengan α adalah konstanta nyata. Jadi berdasarkan teorema Noether, terdapat arus yang terkait dengan simetri ini (Bañados & Reyes, 2016). Arus ini yang disebut sebagai arus nomor partikel dan menggunakan fluksnya untuk mempelajari

fenomena hamburan superradiasi. Maka amplifikasi superradiasi dikatakan ada jika nilai absolut fluks arus bilangan partikel yang dipantulkan lebih besar daripada fluks arus yang datang (Vicente et al., 2018).

2.4.1 Superradiasi dalam Fisika Lubang Hitam

Dalam relativitas umum, superradiasi lubang hitam diizinkan oleh ergoregion yang memungkinkan ekstraksi energi, muatan, dan momentum sudut dari ruang hampa, bahkan pada tingkat klasik (Brito et al., 2021). Superradiasi membutuhkan sistem disipasi dalam bentuk misalnya viskositas, gesekan, turbulensi, pendinginan radiasi dan sebagainya. Semua bentuk disipasi ini berhubungan dengan suatu medium atau materi yang menyediakan arena untuk superradiasi. Karena *Black Hole* muncul dalam beberapa solusi vakum dari persamaan medan Einstein, horizon peristiwa menyediakan ruang hampa dengan mekanisme disipasi. Hal ini karena medan diizinkan untuk mengekstrak energi dari ruang hampa dengan hamburan Superradiasi.

Sudah menjadi fakta alam bahwa semua partikel yang diketahui termasuk dalam salah satu dari dua keluarga besar: fermion (partikel dengan spin setengah bilangan bulat) dan boson (partikel dengan spin bilangan bulat). Quark dan lepton adalah fermion, sedangkan partikel pembawa gaya adalah boson. Perbedaan utama antara kedua keluarga ini adalah bahwa fermion mematuhi prinsip pengecualian Pauli yang menyatakan bahwa dua fermion yang identik tidak dapat berada dalam keadaan yang sama pada titik ruang-waktu yang sama. Faktanya, untuk boson masif, superradiasi dapat memicu ketidakstabilan yang memutar BH ke bawah dan menghasilkan gelombang gravitasi monokromatik yang khas dan distribusi spin

yang aneh (Arvanitaki et al., 2017). Penemuan gelombang gravitasi pertama yang dideteksi langsung oleh LIGO pada peristiwa GW150914 (Abbott et al., 2016), yang kemungkinan besar berasal dari sepasang BH yang bergabung menurut (Brito et al., 2017) telah memberikan kontribusi dalam membuat superradiance dari BH menjadi efek yang berpotensi untuk diamati (Rosa & Kephart, 2018).

Studi tentang Superradiasi BH dimulai pada tahun 1971 oleh Zel'dovich dan Misner bahwa beberapa gelombang dapat diperkuat oleh BH yang berotasi (Kerr). Selain itu hamburan medan pada latar belakang Kerr dipelajari oleh Teukolsky yang menunjukkan bahwa perturbasi linierisasi dari geometri Kerr didapatkan dalam satu persamaan induk yang dapat dipisahkan (perturbasi skalar, elektromagnetik, dan gravitasi). Dengan menggunakan persamaan induk ini, Teukolsky dan Press membuktikan bahwa hamburan gelombang skalar, elektromagnetik, dan gravitasi pada BH Kerr memiliki mode Superradiasi. Pada tahun 1973, Unruh memisahkan persamaan Dirac tak bermassa pada latar belakang Kerr dan menunjukkan bahwa medan spin-1/2 (neutrino) tidak memiliki Superradiasi. Pada tahun 1976, Page memisahkan persamaan Dirac pada latar belakang Kerr-Newman yang lebih umum dan menggunakan hasilnya untuk menunjukkan bahwa medan Dirac tidak memiliki mode Superradiasi. Kemudian pendekatan Bekenstein melihat hubungan antara fenomena ini dengan teorema Hawking. Jika tensor energi momentum dari medan uji bermuatan yang merambat pada latar belakang Kerr-Newman memenuhi kondisi energi nol pada horizon peristiwa, maka energi ΔM , momentum sudut ΔJ , dan muatan listrik ΔQ yang diserap oleh BH memenuhi :

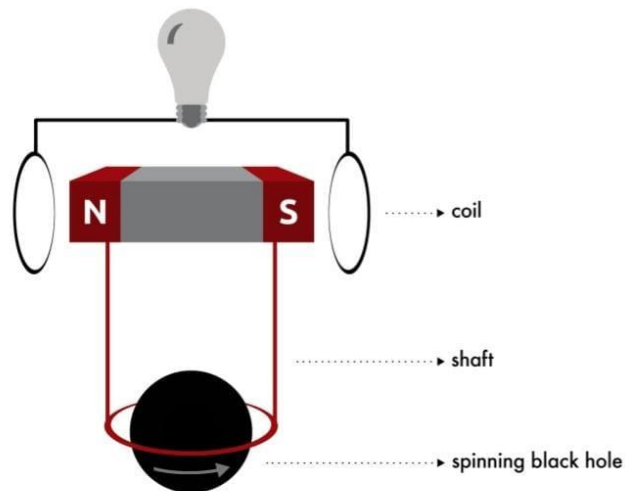
$$\Delta M \geq \Omega \Delta J + V \Delta Q \quad (2.79)$$

dimana Ω adalah kecepatan sudut horizon BH dan V adalah potensial listrik di horizon. Rasio momentum sudut terhadap energi dan muatan listrik terhadap energi gelombang dengan frekuensi ω , bilangan azimut m dan muatan listrik e masing-masing adalah e/ω . Kemudian pertidaksamaan (2.79) berbunyi:

$$\frac{\Delta M}{\omega}(\omega - m\Omega - eV) \geq 0 \quad (2.80)$$

mode Superradiasi harus mengekstrak energi dari BH. Oleh karena itu, $\Delta M < 0$ yang menyiratkan bahwa ω harus memenuhi (Vicente et al., 2018):

$$0 < \omega < m\Omega + eV \quad (2.81)$$

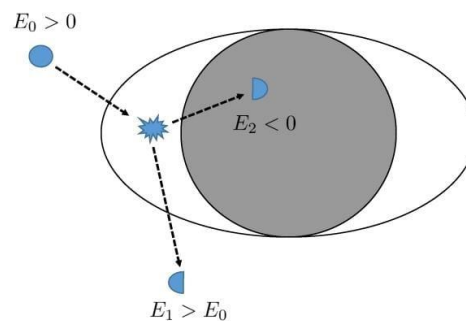


Gambar 2.1 Sirkuit bertenaga Black Hole (Brito et al., 2021)

Gambar 2.1 Menggambarkan dua poros yang dipasang secara kaku ke sebuah cincin dalam ergoregion. Cincin dan porosnya dipaksa untuk berputar dengan memutar magnet di ujung lain dari ujung poros, sehingga menghasilkan arus dalam setiap sirkuit tertutup (Brito et al., 2021). Sebuah magnet ditempatkan di dekat

ergoregion lubang hitam berputar. Ergoregion adalah wilayah di luar horizon peristiwa dimana objek terpaksa harus berputar mengikuti lubang hitam. Kemudian *coil* (kumparan) kawat konduktor ditempatkan di dekat magnet dan ergoregion. Partikel bermuatan yang keluar dari ergoregion dengan kecepatan tinggi akan melewati area di antara magnet dan kumparan, mereka akan mengalami gaya magnetik dari magnet kuat. Ini menyebabkan partikel bermuatan tersebut bergerak dalam lintasan melingkar atau spiral. Pergerakan partikel bermuatan dalam lintasan melingkar di sekitar kumparan akan menginduksikan arus listrik dalam kumparan sesuai dengan hukum induksi elektromagnetik Faraday. Kemudian arus listrik yang diinduksi dalam kumparan dialirkan melalui *shaft* atau poros panjang yang menghubungkan kumparan dengan generator magnet yang berada jauh dari lubang hitam. Pada ujung *shaft*, arus listrik yang dibawa dari kumparan dapat menggerakkan perangkat energi menghasilkan energi dalam bentuk seperti listrik atau energi kinetik. Dengan cara ini, menggambarkan gambaran tentang bagaimana energi dari lubang hitam berputar dapat dimanfaatkan dengan prinsip elektromagnetik. Terdapat salah satu efek yang mendapat banyak perhatian dalam hamburan superradiasi pertama kali dipelajari oleh Misner pada tahun 1972. Efek ini dipicu ketika gelombang dengan frekuensi lebih kecil dari nilai kritis tertentu dihamburkan oleh lubang hitam. Gelombang tersebut memperoleh energi dari lubang hitam dan dihamburkan dengan lebih banyak energi daripada aslinya. Jika menjebak gelombang-gelombang yang tersebar ini dalam sebuah rongga, sehingga gelombang-gelombang ini terus dihamburkan oleh lubang hitam, dapat menciptakan reaksi berantai dan mengembangkan ketidakstabilan superradiasi, yang dijuluki bom lubang hitam (Benone & Crispino, 2016).

Salah satu manifestasi dari superradiasi adalah hamburan gelombang bosonik frekuensi rendah pada ruang-waktu lubang hitam yang berputar. Terdapat proses yang sesuai pada ruang-waktu lubang hitam Reissner-Nordström (RN) statis dan bermuatan yang dikenal sebagai "charge superradiance". Gelombang medan skalar bermuatan diperkuat saat hamburan pada lubang hitam RN jika frekuensinya cukup rendah. Pada ruang-waktu lubang hitam Kerr yang berotasi, terdapat analog kuantum dari proses superradiansi klasik yang dikenal sebagai Radiasi Starobinskii-Unruh. Lubang hitam secara spontan memancarkan partikel dalam mode-mode yang menampilkan superradiansi klasik. Radiasi ini merupakan tambahan dari radiasi Hawking yang biasa dan tidak bergantung pada temperatur lubang hitam (Balakumar et al., 2020).



Gambar 2.2 Proses Penrose (Brito et al., 2021)

Gambar 2.2 Merupakan proses Penrose asli dimana sebuah partikel dengan energi E_0 meluruh di dalam ergosfer menjadi dua partikel, satu dengan energi negatif $E_2 < 0$ yang jatuh ke dalam *Black Hole*, sedangkan partikel kedua lolos ke tak terhingga dengan energi yang lebih tinggi dari partikel aslinya $E_1 > E_0$ (Brito et al., 2021)

BAB III

HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Formalisme Tetrad

Formalisme tetrad adalah langkah awal untuk mencari persamaan Dirac dalam basis tetrad. Pada ruang waktu Minkowski, formalisme tetrad digunakan untuk memastikan kovarian persamaan dibawah transformasi Lorentz dan dapat mendefinisikan basis vektor datar di setiap titik ruang-waktu Minkowski. Sedangkan pada persamaan Dirac ruang-waktu melengkung, operasi diferensial dan transformasi spinor diturunkan dalam basis tetrad dengan memperhitungkan efek kelengkungan melalui komponen tetrad.

Setiap daerah pada ruang-waktu secara lokal terlihat sebagai ruang-waktu Minkowski. Dalam setiap titik pada ruang-waktu, selalu terdapat ruang singgung di titik tersebut. Ruang singgung tersebut berisi vektor-vektor yang menyinggung titik pada ruang-waktu tersebut. Untuk mengetahui hubungan pemilihan basis ruang singgung dari sebuah basis koordinat ke pemilihan basis lokal, dapat menggunakan seperangkat empat medan vektor yang bebas linier dan secara lokal terdefinisi sebagai tetrad. (L. Parker & D.Toms, 2009)

Perumusan geometri ini menggunakan huruf Yunani (α, β, μ, ν , dll) untuk indeks yang berhubungan dengan ruang-waktu dan huruf Latin. (a, b, c, d , dll) untuk indeks yang berhubungan dengan kerangka lokal yang mana ruang singgungnya berupa ruang Minkowski. Koordinat dari ruang waktu diberikan oleh

$\{x^\mu\}$, sedangkan koordinat daerah lokal diberikan oleh $\{x^a\}$. Kedua koordinat tersebut didefinisikan sebagai basis vektor yang dibentuk oleh gradien $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$ dalam ruang waktu dan $\partial_a = \partial/\partial x^a$ dalam koordinat lokal juga membentuk basis kovektor dx^μ dan dx^a . Dimana basis kovektor adalah dual dari basis vektor yang memenuhi $dx^\mu \partial_\nu = \delta_\nu^\mu$ dan $dx^a \partial_b = \delta_b^a$.

Notasi e_a merupakan basis dari koordinat lokal yang dapat dituliskan dalam basis yang lain:

$$e_a = e_a^\mu \partial_\mu \quad 3.1$$

basis medan kovektor e^a dinyatakan dalam

$$e^a = e_\mu^a dx^\mu \quad 3.2$$

dimana e_a^μ adalah medan vektor tetrad dan e_μ^a adalah medan kovektor. kemudian bisa menggunakan tetrad ketika ingin mengetahui basis vektor pada koordinat lokal dengan menjumlahkan komponennya dalam koordinat ruang-waktu dengan jumlahan Einstein. Menggunakan cara yang sama untuk bisa mencari basis vektor ruang-waktu dari basis koordinat lokal melalui tetrad:

$$e_\mu = e_\mu^a e_a \quad 3.3$$

kemudian dari hubungan (3.1) dengan (3.3) didapatkan sifat:

$$e_\mu = e_\mu^a e_a^\nu e_\nu \quad 3.4$$

sehingga mendapatkan:

$$e_{\mu}^a e_a^{\nu} = \delta_{\mu}^{\nu} \quad 3.5$$

dengan menggunakan cara yang sama dapat membuktikan:

$$e_{\mu}^a e_b^{\mu} = \delta_b^a \quad 3.6$$

jika ditinjau mengenai metrik ruang-waktu g , dengan komponen metriknya $g_{\mu\nu}$ dalam basis dual dx^{α} :

$$g = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} \quad 3.7$$

kemudian hubungan (3.2) dengan (3.5) didapatkan bentuk metrik:

$$ds^2 = g = g_{\mu\nu} e_a^{\mu} e_b^{\nu} dx^a dx^b \quad 3.8$$

dimana tetrad e_a^{μ} dapat dikatakan sebagai basis linier yang menghubungkan antara metrik pada ruang waktu g dengan metrik koordinat lokal pada ruang-waktu η .

$$\eta = \eta_{ab} dx^a dx^b \quad 3.9$$

kemudian karena besar dari elemen garis pada ruang-waktu dan koordinat lokal adalah sama, maka ketika menghubungkan persamaan (3.8) dan (3.9) mendapatkan:

$$ds^2 = ds^2$$

$$\eta = g \quad 3.10$$

$$\eta_{ab} = g_{\mu\nu} e_a^{\mu} e_b^{\nu}$$

misalkan mentransformasikan tetrad e_{μ}^a ke h_{μ}^a , maka tetrad akan berbentuk:

$$h_{\mu}^a(x) = L_b^a(x) e_{\mu}^b \quad 3.11$$

dimana,

$$L_c^a(x)L_d^b(x)\eta_{ab} = \eta^{cd} \quad 3.12$$

L_b^a adalah matriks yang merepresentasikan transformasi Lorentz lokal . Dipandang sebuah vektor $A^\mu(x)$ yang dapat digunakan formalisme tetrad untuk menghubungkan komponennya dari sistem koordinat umum ke kerangka ortonormal lokal dengan sifat:

$$A^a(x) = e_\mu^a(x)A^\mu \quad 3.13$$

kemudian apabila dilakukan transformasi Lorentz,

$$A^a(x) \rightarrow A'^a(x) = L_b^a(x)A^b(x) \quad 3.14$$

transformasi koordinat umum dari vektor dalam koordinat ortonormal lokal adalah:

$$A^a(x) \rightarrow A^a(x') = \frac{\partial x^v}{\partial x'^\mu} A^a(x) \quad 3.15$$

kemudian turunan kovarian $\nabla_\mu A^a$ juga bertransformasi dalam bentuk:

$$\nabla_\mu A'^a(x) = L_c^a \nabla_\mu A^c(x) \quad 3.16$$

dalam transformasi koordinat ortonormal lokal dan dalam transformasi koordinat umum

$$\nabla'_\mu A'^a(x') = \frac{\partial x^v}{\partial x'^\mu} \nabla_\nu A^\mu \quad 3.17$$

kemudian terdapat koneksi $\omega_\mu^a_b(x)$ yang merupakan turunan kovarian dari vektor pada koordinat ortonormal lokal

$$\nabla_{\mu} A^a = \partial_{\mu} A^a + \omega_{\mu}^a{}_b A^b \quad 3.18$$

dari hubungan (3.17) dan (3.18) mendapatkan bentuk transformasi koordinat umum dari turunan kovariannya,

$$\nabla'_{\mu} A'^a(x') = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} L_b^a (\partial_{\nu} A^b + \omega_{\nu}^b{}_c A^c) \quad 3.19$$

dimana

$$\begin{aligned} \nabla'_{\mu} A'^a(x') &= \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} A'^a + \omega'_{\mu}{}^a{}_b A'^b \\ &= \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} L_b^a A^b + \omega'_{\mu}{}^a{}_b L_c^b A^c \end{aligned} \quad 3.20$$

sehingga mendapatkan

$$\omega'_{\mu}{}^a{}_b = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} (L_d^a \omega_{\nu}^d{}_c (L^{-1})^c{}_b - \partial_{\nu} L_c^a (L^{-1})^c{}_b) \quad 3.21$$

dapat dijelaskan bahwa transformasi koneksi pada koordinat umum memiliki bentuk seperti (3.11), dimana transformasi Lorentz lokal dapat dicari menggunakan sifat $(\partial x^{\nu})/(\partial x'^{\mu}) = \delta_{\mu}^{\nu}$. Dilihat pada turunan kovarian dari tetrad, karena tetrad bertransformasi dalam bentuk (3.1) pada transformasi Lorentz lokal dan kemudian mirip seperti vektor kovarian ketika bertransformasi dibawah transformasi koordinat umum, maka mendapatkan turunan kovarian dari tetrad. Turunan kovarian vektor pada kerangka ortonormal lokal,

$$\nabla_{\mu} A^a = \nabla_{\mu} (e^a{}_{\mu} A^{\mu})$$

$$= (\nabla_\mu e_\mu^a) A^\mu + e_\mu^a \nabla_\mu A^\mu \quad 3.22$$

kemudian turunan kovarian dari sebuah vektor A adalah $\nabla_\mu A = \nabla_\mu (A^a e_a) = \nabla_\mu (A^v e_v)$,

$$\nabla_\mu A = \nabla_{\partial_\mu} (A^a) dx^\mu e_a \quad 3.23$$

$$= \nabla_{\partial_\mu} (e_v^a A^v) dx^\mu e_a$$

$$= (\partial_\mu (e_v^a A^v + \omega_{\mu b}^a e_v^b A^v)) dx^\mu e_a^\lambda e_\lambda$$

$$= (e_v^a A^v + (\partial_\mu e_v^a) A^v + \omega_{\mu b}^a e_v^b A^v) dx^\mu e_a^\lambda e_\lambda$$

$$= e_a^\lambda (e_v^a \partial_\mu A^v + (\partial_\mu e_v^a) A^v + \omega_{\mu b}^a A^b) dx^\mu e_\lambda$$

$$= (\delta_v^\lambda \partial_\mu A^v + e_a^\lambda (\partial_\mu e_v^a) A^v + e_a^\lambda \omega_{\mu b}^a A^b) dx^\mu e_\lambda$$

$$= (\partial_\mu A^v + e_a^v (\partial_\mu e_v^a) A^v + e_a^v \omega_{\mu b}^a A^b) dx^\mu e_v$$

dengan memisahkan komponen vektor dan basis vektornya maka mendapatkan relasi turunan kovariannya:

$$\nabla_{dx^\mu} A^v dx^\mu e_v = (\partial_\mu A^v + e_a^v (\partial_\mu e_v^a) A^v + e_a^v \omega_{\mu b}^a e_\theta^b A^\theta) dx^\mu e_v$$

$$(\partial_\mu A^v + \Gamma_{\alpha\beta}^v A^\beta) dx^\mu e_v = (\partial_\mu A^v + e_a^v (\partial_\mu e_v^a) A^v + e_a^v \omega_{\mu b}^a e_\theta^b A^\theta) dx^\mu e_v$$

$$\partial_\mu A^v + \Gamma_{\alpha\beta}^v A^\beta = \partial_\mu A^v + e_a^v (\partial_\mu e_v^a) A^v + e_a^v \omega_{\mu b}^a e_\theta^b A^\theta \quad 3.24$$

untuk suku sisi kanan, dengan mengubah $\theta \rightarrow v$, maka

$$\partial_\mu A^v + \Gamma_{\alpha\beta}^v A^\beta = \partial_\mu A^v + e_a^v (\partial_\mu e_v^a) A^v + e_a^v \omega_{\mu b}^a e_v^b A^v \quad 3.25$$

sehingga didapatkan

$$\Gamma_{\alpha\nu}^{\beta} = e_a{}^{\nu}(\partial_{\mu}e^a{}_{\nu}) + e_a{}^{\eta}\omega_{\mu b}^a e^b{}_{\nu} \quad 3.26$$

dan

$$\begin{aligned} \omega_{\mu b}^a &= \Gamma_{\alpha\nu}^{\beta} e_b{}^{\nu} e^a{}_{\eta} - e_b{}^{\nu}(\partial_{\mu}e^a{}_{\nu}) \\ &= -e_b{}^{\nu}(\partial_{\mu}e^a{}_{\nu} - \Gamma_{\alpha\nu}^{\beta}) \end{aligned} \quad 3.27$$

didalam postulat tetrad menyebutkan bahwa turunan kovarian dari tetrad hilang, $\nabla_{\mu}e^a{}_{\nu} = 0$. Sehingga dapat menggunakan persamaan (3.27) untuk mengetahui hubungan antara koneksi affine dan koneksi spin. Kemudian dengan mengkalikan $e^b{}_{\nu}$ didapatkan

$$\omega_{\mu b}^a e^b{}_{\nu} = \Gamma_{\alpha\nu}^{\beta} e_b{}^{\nu} e^a{}_{\eta} - e_b{}^{\nu} e^b{}_{\nu}(\partial_{\mu}e^a{}_{\nu}) \quad 3.28$$

kemudian dari hubungan (3.5) mendapatkan:

$$\omega_{\mu b}^a e^b{}_{\nu} = \Gamma_{\alpha\nu}^{\beta} e_b{}^{\nu} e^a{}_{\eta} - (\partial_{\mu}e^a{}_{\nu}) \quad 3.29$$

akhirnya memberikan postulat tetrad:

$$\nabla_{\mu}e^a{}_{\nu} = (\partial_{\mu}e^a{}_{\nu}) - \Gamma_{\alpha\nu}^{\beta} e^a{}_{\eta} + \omega_{\mu}^a{}^b e^b{}_{\nu} \quad 3.30$$

3.2 Persamaan Dirac pada Ruang Waktu Minkowski

Di dalam mekanika kuantum, terdapat persamaan Schrodinger sebagaimana:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(x) \right) \psi \quad 3.31$$

jika menciptakan persamaan gelombang Schrodinger relativistik harus meninjau partikel bebas relativistik dengan kesetaraan energi-momentum akibat relativitas khusus (R.D., 2013). Kemudian tinjau hubungan:

$$p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} + \vec{p} \cdot \vec{p} = m_0^2 c^2 \quad 3.32$$

kemudian mengganti momentum empat p^μ sebagai operator momentum empat \hat{p}^μ :

$$\begin{aligned} \hat{p}^\mu &= i\hbar \frac{\partial}{\partial x_\mu} \\ &= i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial ct}, \hat{\vec{p}} \right) \\ &= i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial ct}, -\vec{\nabla} \right) \end{aligned} \quad 3.33$$

sehingga persamaan Klein-Gordon untuk partikel bebas adalah:

$$\hat{p}^\mu \hat{p}_\mu = m_0^2 c^2 \psi \quad 3.34$$

Seperti yang dapat diketahui, persamaan Klein-Gordon adalah persamaan orde dua terhadap turunan waktu dan merupakan definisi rapat probabilitas turunan orde pertama terhadap waktu. Kemudian Paul Dirac mencoba untuk membangun persamaan Schrodinger relativistik orde pertama (A, 2008). Postulatnya berbunyi, jika persamaan tersebut ada maka persamaan tersebut harus berbentuk:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial ct} \psi = H\psi = (\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta mc^2)\psi \quad 3.35$$

kemudian memahami bentuk orde kedua pada persamaan (3.35) yang harus serupa dengan persamaan Klein-Gordon (3.34) untuk mengetahui nilai α dan β yaitu

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} \psi = H^2 \psi = (p^2 + m^2 c^4)\psi \quad 3.36$$

kemudian persamaan (3.35) dikuadratkan,

$$\begin{aligned} -\hbar^2 \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} \psi &= (\alpha_a p_a + \beta mc^2)(\alpha_b p_b + \beta mc^2)\psi & 3.37 \\ &= (\alpha_a^2 p_a^2 + [\alpha_a \alpha_b + \alpha_b \alpha_a] p_a p_b + [\alpha_a \beta + \beta \alpha_a] + \beta^2 m^2 c^4)\psi \end{aligned}$$

pada suku kedua yaitu $a \neq b$. Kemudian jika dibandingkan dengan persamaan (3.37) dengan (3.36) maka dapat memastikan bahwa $\alpha_a^2 = I$ dan $\beta^2 = I$. Untuk suku kedua dan ketiga harus nol karena momentumnya tidak nol, maka didapat hubungan antikomutasi $\{\alpha_a, \alpha_b\} = 0$ dan $\{\alpha_a, \beta\} = 0$. Dapat dikatakan juga bahwa jika α dan β adalah sebuah angka, maka pasti keduanya akan komut dan tidak akan antikomut sehingga dapat dipastikan bahwa α dan β adalah matriks. Kemudian ditinjau trace dari β :

$$Tr(\beta) = Tr(I\beta) \quad 3.38$$

kemudian karena suatu sifat $\alpha_a^2 = I$, maka

$$Tr(\beta) = Tr(\alpha_a^2 \beta) \quad 3.39$$

sifat siklik dari trace yaitu

$$\text{Tr}(\beta) = \text{Tr}(\alpha_a \beta \alpha_a) \quad 3.40$$

pada sifat antikomutasi $\{\alpha_a, \beta\} = 0$ dapat menunjukkan bahwa $\beta \alpha_a = -\alpha_a \beta$, sehingga:

$$\text{Tr}(\beta) = -\text{Tr}(\alpha_a^2 \beta) = -\text{Tr}(\beta) \quad 3.41$$

kondisi ini dipenuhi jika $\text{Tr}(\beta) = 0$. Kemudian dengan cara yang sama, dapat membuktikan bahwa $\text{Tr}(\alpha_a) = 0$. Dikarenakan trace adalah jumlahan dari nilai eigen, maka pastinya nilai eigen matriks α dan β harus berupa kombinasi dari $+1$ dan -1 dan dimensinya haruslah genap. Kemudian ditinjau determinan dari β

$$\det(\beta^2) = \det(I) \quad 3.42$$

$$\det(\beta)\det(\beta) = 1 \quad 3.43$$

dapat ditunjukkan bahwa $\det(\beta) = 1$ atau $\det(\beta) = -1$. Begitu juga dengan α sesuai dengan sifat determinan. Kemudian pada persamaan (3.35), karena H adalah hermitan, p juga hermitian, maka α dan β merupakan hermitian. Jadi dibutuhkan 4 matriks yang trace nya nol, hermitian, memiliki nilai eigen ± 1 , memiliki determinan ± 1 dan berdimensi genap. Matriks pauli mempunyai sifat yang sama seperti itu tetapi matriks pauli hanya memiliki 3 matriks, sedangkan dibutuhkan 4 matriks. Maka perlu menaikkan dimensi yang sebelumnya adalah 2 menjadi 4, sehingga keempat matriks adalah:

$$\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 3.44$$

$$\alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

kemudian jika dibentuk dalam suku matriks Pauli:

$$\beta = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}$$

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{bmatrix} \quad 3.45$$

Persamaan Dirac dapat dibentuk dengan mengalikan persamaan (3.35) dengan β dan mendefinisikan keempat matriks yang disebut matriks Dirac atau matriks gamma:

$$\gamma^0 = \beta$$

$$\gamma^1 = \beta\alpha_1$$

$$\gamma^2 = \beta\alpha_2 \quad 3.46$$

$$\gamma^3 = \beta\alpha_3$$

kemudian apabila persamaan (3.35) dikalikan dengan β dari sisi kiri, maka akan mendapatkan bentuk:

$$i\hbar\beta\frac{\partial}{\partial x^0} = (\beta\alpha^i p_i + Imc^2)\psi \quad 3.47$$

didapatkan relasi pada persamaan (3.46) dan didapatkan

$$i\hbar\gamma^0\frac{\partial}{\partial x^0} = \left(-i\hbar\gamma^i\frac{\partial}{\partial x^i} + Imc^2\right)\psi$$

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - Imc^2)\psi = 0 \quad 3.48$$

ketika $\hbar = c = 1$,

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - Im)\psi = 0 \quad 3.49$$

3.3 Persamaan Dirac Pada Ruang-Waktu Melengkung

Untuk memperoleh persamaan Dirac pada ruang waktu melengkung, ditinjau matriks bergantung waktu $\tilde{\gamma}^\alpha$. Matriks ini berhubungan dengan matriks gamma pada relativitas khusus γ^a dengan hubungan

$$\tilde{\gamma}^\alpha(x) = e_a^\alpha(x)\gamma^a \quad 3.50$$

dengan sifat antikomutasi matriks gamma,

$$\{\gamma^a, \gamma^b\} = 2\eta^{ab}I \quad 3.51$$

maka didapatkan sifat antikomutasi dari matriks gamma yang bergantung ruang-waktu:

$$\begin{aligned}
\{\tilde{\gamma}^\mu, \tilde{\gamma}^\nu\} &= \tilde{\gamma}^\mu \tilde{\gamma}^\nu + \tilde{\gamma}^\nu \tilde{\gamma}^\mu \\
&= e_a^\mu \gamma^a e_b^\nu \gamma^b + e_b^\nu \gamma^b e_a^\mu \gamma^a \\
&= e_a^\mu e_b^\nu (\gamma^a \gamma^b + \gamma^b \gamma^a) \\
&= e_a^\mu e_b^\nu \{\gamma^a, \gamma^b\} \\
&= e_a^\mu e_b^\nu 2\eta^{ab} I \\
&= 2g^{\mu\nu} I
\end{aligned} \tag{3.52}$$

untuk sebuah spinor ψ merupakan kuantitas yang bertransformasi seperti:

$$\tilde{\psi}_e = L\psi_h \tag{3.53}$$

dimana $L = L(x)$ adalah representasi dari spinor yang bergantung ruang-waktu untuk rotasi tetrad $\Lambda = \Lambda(x)$. Kemudian turunan dari spinor tidak bertransformasi seperti spinor karena:

$$\tilde{\psi}_{, \mu} = L\psi_{, \mu} + L_{, \mu}\psi \tag{3.54}$$

kemudian definisikan turunan kovarian dari spinor dalam bentuk:

$$\begin{aligned}
D_\mu &= I\psi_{, \mu} + \Gamma_\mu \psi \\
&= (I\partial_\mu + \Gamma_\mu)\psi
\end{aligned} \tag{3.55}$$

turunan ini harus bertransformasi seperti spinor dengan koneksi affine spinor Γ_μ ,

$$\tilde{D}_\mu \tilde{\psi} = LD_\mu \psi \quad 3.56$$

dimana,

$$\begin{aligned} \tilde{D}_\mu \tilde{\psi} &= I\tilde{\psi}_{,\mu} + \tilde{\Gamma}_\mu \tilde{\psi} \\ &= I(L\psi)_{,\mu} + \tilde{\Gamma}_\mu \tilde{\psi} \\ &= I(L\partial_\mu \psi + L_{,\mu} \psi) + \tilde{\Gamma}_\mu \psi \end{aligned} \quad 3.57$$

kemudian hubungan antara (3.55), (3.56), dan (3.57) memberikan

$$\begin{aligned} L(I\partial_\mu + \Gamma_\mu)\psi &= (IL\partial_\mu + IL_{,\mu} + \tilde{\Gamma}_\mu)\psi \\ LI\partial_\mu + L\Gamma_\mu &= IL\partial_\mu + IL_{,\mu} + \tilde{\Gamma}_\mu L \\ IL\partial_\mu + L\Gamma_\mu - IL\partial_\mu - IL_{,\mu} &= \tilde{\Gamma}_\mu L \\ L\Gamma_\mu L^{-1} - IL_{,\mu} L^{-1} &= \tilde{\Gamma}_\mu \end{aligned} \quad 3.58$$

pada operator D_μ bekerja pada medan yang bernilai matriks M . Dimana M sebagai hasil perkalian tensor antara vektor dan kovektor, kemudian turunan kovarian dari M dituliskan:

$$D_\mu M = \nabla_\mu M + [\Gamma_\mu, M] \quad 3.59$$

jika M adalah identitas maka $D_\mu I = 0$, dan juga turunan kovarian dari metrik:

$$D_\mu g^{\alpha\beta} = 0 \quad 3.60$$

kemudian ditinjau persamaan (3.52)

$$\{\tilde{\gamma}^\mu, \tilde{\gamma}^\nu\} = 2g^{\mu\nu}I \quad 3.61$$

maka

$$D_\mu\{\tilde{\gamma}^\mu, \tilde{\gamma}^\nu\} = D_\mu(\tilde{\gamma}^\mu\tilde{\gamma}^\nu + \tilde{\gamma}^\nu\tilde{\gamma}^\mu) = 0 \quad 3.62$$

sehingga

$$D_\mu\tilde{\gamma}^\mu\tilde{\gamma}^\nu + \tilde{\gamma}^\mu D_\mu\tilde{\gamma}^\nu + D_\mu\tilde{\gamma}^\nu\tilde{\gamma}^\mu + \tilde{\gamma}^\nu D_\mu\tilde{\gamma}^\mu = 0 \quad 3.63$$

kondisi seperti ini dipenuhi apabila:

$$D_\mu\tilde{\gamma}^\alpha = 0 \quad 3.64$$

kemudian meninjau turunan kovarian dari metrik Minkowski

$$\nabla_\mu\eta_{ab} = \partial_\mu\eta_{ab} - \omega_\mu^c{}_a\eta_{cb} - \omega_\mu^c{}_b\eta_{ac} \quad 3.65$$

$$= -\omega_{\mu ab} - \omega_{\mu ba} = 0 = \omega_{\mu ab} + \omega_{\mu ba}$$

mengingat

$$\eta_{ab} = e_a^\mu e_b^\beta g_{\alpha\beta} \quad 3.66$$

maka

$$\begin{aligned} \nabla_\mu\eta_{ab} &= \nabla_\mu(e_a^\alpha e_b^\beta g_{\alpha\beta}) \\ &= e_b^\beta \nabla_\mu e_a^\alpha g_{\alpha\beta} + e_a^\alpha \nabla_\mu e_b^\beta g_{\alpha\beta} + e_a^\alpha e_b^\beta g_{\alpha\beta} \\ &= e_b^\beta \nabla_\mu e_a^\alpha g_{\alpha\beta} + e_a^\alpha \nabla_\mu e_b^\beta g_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad 3.67$$

oleh karena pada (3.65) maka:

$$\begin{aligned}
\omega_{\mu ab} + \omega_{\mu ba} &= e_b^\beta \nabla_\mu e_a^\alpha g_{\alpha\beta} + e_a^\alpha \nabla_\mu e_b^\beta g_{\alpha\beta} \\
&= e_{\alpha b} \nabla_\mu e_a^\alpha + e_{\beta a} \nabla_\mu e_b^\beta
\end{aligned} \tag{3.68}$$

sehingga akan mendapatkan bentuk ekspilist dari $\omega_{\mu ab}$,

$$\omega_{\mu ab} = e_{\alpha b} \nabla_\mu e_a^\alpha \tag{3.69}$$

kemudian ditinjau kembali pada persamaan (3.55) dan dirumuskan terlebih dahulu koefisien koneksi affine spinor, dengan mengambil:

$$\Gamma_\mu = a \omega_{\mu bc} \gamma^b \gamma^c \tag{3.70}$$

dimana a merupakan konstanta, maka

$$\Gamma_\mu \gamma^d = a \omega_{\mu bc} \gamma^b \gamma^c \gamma^d \tag{3.71}$$

dilihat bahwa karena:

$$\gamma^c \gamma^d = 2\eta^{cd} - \gamma^d \gamma^c \tag{3.72}$$

kemudian mensubsitusikan persamaan (3.72) ke (3.70):

$$\Gamma_\mu \gamma^d = a \omega_{\mu bc} (2\eta^{cd} \gamma^b - \gamma^b \gamma^d \gamma^c) \tag{3.73}$$

dengan cara yang sama maka:

$$\gamma^b \gamma^d = 2\eta^{bd} - \gamma^d \gamma^b \tag{3.74}$$

maka

$$\Gamma_\mu \gamma^d = a \omega_{\mu bc} (2\eta^{cd} \gamma^b - 2\eta^{bd} \gamma^c + \gamma^d \gamma^b \gamma^c)$$

$$= 2a\omega_{\mu bc}(\eta^{cd}\gamma^b - \eta^{bd}\gamma^c) + \gamma^d\Gamma_\mu \quad 3.75$$

tinjau kembali suku kedua yang berada di dalam kurung (3.75) bawah

$$-2a\omega_{\mu bc}\eta^{bd}\gamma^c \quad 3.76$$

kemudian menggunakan sifat antisimetrik dari $\omega_{\mu bc}$ seperti pada persamaan (3.65)

dan mengubah (3.76) menjadi:

$$-2a\omega_{\mu bc}\eta^{bd}\gamma^c = 2a\omega_{\mu bc}\eta^{cd}\gamma^b \quad 3.77$$

indeks dummy diganti menjadi $b \Leftrightarrow c$ dan persamaan (3.77) ruas kanan menjadi:

$$2a\omega_{\mu bc}\eta^{cd}\gamma^b \quad 3.78$$

kemudian kembalikan ke persamaan (3.75):

$$\begin{aligned} \Gamma_\mu\gamma^d &= 2a\omega_{\mu bc}(\eta^{cd}\gamma^b + \eta^{cd}\gamma^b) + \gamma^d\Gamma_\mu \\ &= 4a\omega_{\mu bc}\eta^{cd}\gamma^b + \gamma^d\Gamma_\mu \end{aligned} \quad 3.79$$

dibentuk turunan kovarian dari matriks gamma menggunakan persamaan (3.59):

$$\begin{aligned} D_\mu\tilde{\gamma}^\nu &= \nabla_\mu\tilde{\gamma}^\nu + [\Gamma_\mu, \tilde{\gamma}^\nu] \\ &= \tilde{\gamma}^\nu{}_{,\mu} + \Gamma_{\lambda\mu}^\nu\tilde{\gamma}^\lambda + \Gamma_\mu\tilde{\gamma}^\nu - \tilde{\gamma}^\nu\Gamma_\mu = 0 \end{aligned} \quad 3.80$$

tinjau persamaan sifat (3.50) dan didapatkan

$$\gamma^a\nabla_\mu e_a^\nu + e_a^\nu\Gamma_\mu\gamma^a - e_a^\nu\gamma^a\Gamma_\mu = 0 \quad 3.81$$

mensubsitusikan persamaan (3.79) ke (3.81):

$$\gamma^d \nabla_\mu e_d^\nu + 4a e_d^\nu \omega_{\mu bc} \eta^{cd} \gamma^b = 0 \quad 3.82$$

dan dengan sifat antisimetri $\omega_{\mu bc}$,

$$\begin{aligned} \gamma^d \nabla_\mu e_d^\nu - 4a e_d^\nu \omega_{\mu cb} \eta^{cd} \gamma^b &= 0 \\ \gamma^d \nabla_\mu e_d^\nu &= 4a e_d^\nu \omega_{\mu cb} \eta^{cd} \gamma^b \\ &= 4a e_d^\nu (e_{c\beta} \nabla_\mu e_b^\beta) \eta^{cd} \gamma^b \\ &= 4a e_d^\nu e_\beta^d (\nabla_\mu e_b^\beta) \gamma^b \\ &= 4a \delta_\beta^\nu (\nabla_\mu e_b^\beta) \gamma^b \\ &= 4a \gamma^b \nabla_\mu e_b^\nu \end{aligned} \quad 3.83$$

Persamaan (3.83) diatas, agar ruas kanan dan kirinya sama maka $a = 1/4$, kemudian ditinjau pada persamaan (3.70) didapatkan

$$\begin{aligned} \Gamma_\mu &= \frac{1}{4} \omega_{\mu ab} \gamma^a \gamma^b \\ &= \frac{1}{2} \omega_{\mu ab} \Sigma^{ab} \end{aligned} \quad 3.84$$

dengan $\Sigma^{ab} = \frac{1}{4} [\gamma^a, \gamma^b]$. Kemudian koefisien Fock-Ivanenko didefinisikan:

$$\Gamma_c = e_c^\mu \Gamma_\mu \quad 3.85$$

kemudian dengan turunan kovarian spinor pada koordinat ortonormal lokal adalah

$$D_c \psi = (\partial_c + \Gamma_c) \psi \quad 3.86$$

diketahui $\partial_c = e_c^\lambda \partial_\lambda$, sehingga dapat dihasilkan persamaan Dirac untuk partikel bebas pada ruang waktu lengkung yang berbentuk:

$$i\gamma^c D_c \psi - m\psi = 0$$

$$i\gamma^c e_c^\mu (\partial_\mu + \Gamma_\mu) \psi + m\psi = 0 \quad 3.87$$

dapat didefinisikan juga matriks Dirac pada ruang-waktu melengkung $G^\mu = \gamma^c e_c^\mu$

$$(iG^\mu D_\mu - m)\psi = 0 \quad 3.88$$

$$S_{Dirac} = \int dx^4 \sqrt{-g} [i\bar{\Psi} G^\mu \tilde{D}_\mu \Psi - m\bar{\Psi}\Psi] \quad 3.89$$

dimana m adalah massa medan Dirac, G^μ matriks Dirac dalam ruang-waktu melengkung dan $\tilde{D}_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu - \Gamma_\mu$ dimana $q > 0$ adalah muatan listrik medan dan Γ_μ adalah koneksi spin.

3.4 Persamaan Dirac pada Ruang-waktu Reissner-Nordstrom

Persamaan Dirac dalam konteks ruang-waktu Reissner-Nordstrom menggambarkan gerak partikel bermassa rendah yang bermuatan listrik dalam medan gravitasi statis dan bermuatan listrik yang dihasilkan oleh suatu lubang hitam Reissner-Nordstrom. Untuk mendapatkan persamaan Dirac dalam ruang waktu Reissner-Nordstrom, maka harus memasukkan efek medan gravitasi dan medan listrik ke dalam persamaan Dirac untuk partikel bermuatan dalam medan elektromagnetik pada persamaan (3.87). Dalam arti bahwa medan listrik yang diberikan oleh sumber masif hanya bergantung pada jarak radialnya (r) saja karena pada metrik RN memiliki simetri sferis, yang berarti bahwa ruang-waktu terlihat sama dari semua arah jika diamati dari jarak radial r yang sama dari pusat objek.

Oleh karena itu medan listrik yang terpusat juga harus memiliki simetri sferis yang berarti bahwa medan listrik hanya dapat bergantung pada jarak radial dari pusat objek bermuatan dan tidak bergantung pada arah sudut serta memenuhi hukum Coloumb.

Solusi Reissner-Nordstrom merupakan solusi vakum simetri bola dari persamaan medan Einstein dengan sumber yang memiliki muatan listrik. Untuk menyelesaikan persamaan medan Einstein, digunakan ansatz metrik simetri bola, sehingga perlu merumuskan tensor energi momentum dan mendapatkan metrik Reissner-Nordstrom:

$$ds^2 = f dt^2 - f^{-1} - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi) \quad 3.90$$

dengan

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \quad 3.91$$

dimana M adalah massa lubang hitam dan Q adalah muatan listrik.

Dari metrik ruang-waktu reissner Nordstrom, didapatkan tensor metrik Reissner-Nordstrom:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad 3.92$$

kemudian tensor metrik kontravariannya:

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -f^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad 3.93$$

untuk mengetahui persamaan Dirac pada ruang-waktu RN, didefinisikan terlebih dahulu medan vektor ortogonal lokal dengan meninjau koordinat bola.

Kemudian menggunakan tetrad yang merupakan koefisien muai komponen basis ortogonal terhadap perbedaan ruang koordinat. Diketahui vektor co-basis:

$$\underline{e}^m = e_\mu^m dx^\mu \quad 3.101$$

maka vektor individu:

$$\begin{aligned} e_t^0 dx^t &= \sqrt{f} dt \\ e_r^1 &= f^{-\frac{1}{2}} dr \\ e_\theta^2 &= r d\theta \\ e_\varphi^3 &= r \sin \theta d\varphi \end{aligned} \quad 3.102$$

maka komponennya:

$$e_\mu^m = \begin{bmatrix} \sqrt{f} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f^{-1/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r \sin \theta \end{bmatrix} \quad 3.103$$

vektor basis ruang tangen/singgung:

$$\underline{e}_m = e_m^\mu \underline{e}_\mu \quad 3.104$$

vektor individu sebagai:

$$\begin{aligned}
e_0^t \partial_t &= f^{-1/2} \partial_t \\
e_1^r \partial_r &= \sqrt{f} \partial_r \\
e_2^\theta \partial_\theta &= \frac{1}{r} \partial_\theta \\
e_3^\varphi \partial_\varphi &= 1/r \sin \theta \partial_\varphi
\end{aligned}
\tag{3.105}$$

maka komponennya:

$$e_m^\mu = \begin{bmatrix} f^{-1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{f} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/r \sin \theta \end{bmatrix}
\tag{3.106}$$

kemudian menggunakan tetrad RN sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
e_a^t &= \left(\frac{1}{\sqrt{f}}, 0, 0, 0 \right) \\
e_a^r &= \left(0, \sqrt{f} \sin \theta \cos \varphi, \sqrt{f} \sin \theta \sin \varphi, \sqrt{f} \cos \theta \right) \\
e_a^\theta &= \left(0, \frac{1}{r} \cos \theta \cos \varphi, \frac{1}{r} \cos \theta \sin \varphi, -\frac{\sin \theta}{r} \right) \\
e_a^\varphi &= \left(0, -\frac{1 \sin \varphi}{r \sin \theta}, \frac{1 \cos \varphi}{r \sin \theta}, 0 \right)
\end{aligned}
\tag{3.107}$$

dan memilih vektor kovarian konstan:

$$a_\alpha = \left(0, -\frac{3\sqrt{f} + 6}{2r\sqrt{f}}, -\frac{9}{4} \cot \theta, 0 \right)
\tag{3.108}$$

γ^r, γ^θ dan γ^φ yang muncul pada persamaan Dirac dalam ruang-waktu Reissner-Nordstrom didefinisikan oleh:

$$\begin{aligned}\gamma^r &= \vec{\gamma} \cdot \vec{X}_r = \gamma^1 \sin \theta \cos \varphi + \gamma^2 \sin \theta \sin \varphi + \gamma^3 \cos \theta \\ \gamma^\theta &= \vec{\gamma} \cdot \vec{X}_\theta = \frac{1}{r} (\gamma^1 \cos \theta \cos \varphi + \gamma^2 \cos \theta \sin \varphi - \gamma^3 \sin \theta) \\ \gamma^\varphi &= \vec{\gamma} \cdot \vec{X}_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} (-\gamma^1 \sin \theta + \gamma^2 \cos \varphi)\end{aligned}\tag{3.109}$$

dengan

$$\vec{\gamma} = \gamma^1 \hat{x} + \gamma^2 \hat{y} + \gamma^3 \hat{z}\tag{3.110}$$

selain itu menggunakan medan Dirac yang digabungkan secara minimal dengan medan elektromagnetik A_μ dari (2.77). kemudian mensubsitusikan persamaan dibawah ke persamaan aslinya:

$$\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu + ieA_\mu\tag{3.111}$$

kemudian mencari koefisien koneksi spin metrik RN:

$$\begin{aligned}\omega_{\mu ab} &= e_{a\beta} \nabla_\mu e_b^\beta \\ &= g_{\gamma\beta} e_a^\gamma (\partial_\mu e_b^\beta + \Gamma_{\alpha\mu}^\beta e_b^\alpha)\end{aligned}\tag{3.112}$$

maka didapatkan komponen $\omega_{\mu ab}$ yang tidak nol adalah:

$$\begin{aligned}\omega_{t01} &= -\omega_{t10} = -\frac{1}{2} \left(\frac{r_s}{r^2} - \frac{r_Q^2}{2r^3} \right) \\ \omega_{\theta 12} &= -\omega_{\theta 21} = -\sqrt{f} \\ \omega_{\varphi 13} &= -\omega_{\varphi 31} = -\sin \theta \sqrt{f} \\ \omega_{\varphi 23} &= -\omega_{\varphi 32} = -\cos \theta\end{aligned}\tag{3.177}$$

berdasarkan persamaan (3.84), didapatkan koefisien Fock Ivanenko:

$$\Gamma_c = e_c^\mu \Gamma_\mu\tag{3.178}$$

$$= e_c^\mu \left(\frac{1}{4} \omega_{\mu ab} \gamma^a \gamma^b \right)$$

untuk $c = 0$,

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= e_0^\mu \left(\frac{1}{4} \omega_{\mu ab} \gamma^a \gamma^b \right) & 3.179 \\ &= e_0^t \frac{1}{4} (\omega_{t01} \gamma^0 \gamma^1 + \omega_{t10} \gamma^1 \gamma^0) \\ &= \frac{1}{\sqrt{f}} \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{2M}{r^2} - \frac{2Q^2}{r^3} \right) \gamma^0 \gamma^1 + \frac{1}{2} \left(\frac{2M}{r^2} - \frac{2Q^2}{r^3} \right) \gamma^1 \gamma^0 \right) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{f}} \frac{1}{8} \left(\frac{2M}{r^2} - \frac{2Q^2}{r^3} \right) (\gamma^0 \gamma^1 - \gamma^1 \gamma^0) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{f}} \frac{1}{8} \left(\frac{2M}{r^2} - \frac{2Q^2}{r^3} \right) 2(\gamma^0 \gamma^1 - \eta^{01}) \\ &= -\frac{1}{4} f \left(\frac{2M}{r^2} - \frac{2Q^2}{r^3} \right) \gamma^0 \gamma^1 \end{aligned}$$

untuk $c = 1$

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= e_1^\mu \left(\frac{1}{4} \omega_{\mu ab} \gamma^a \gamma^b \right) & 3.180 \\ &= e_1^r (0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

untuk $c = 2$

$$\begin{aligned} \Gamma_2 &= e_2^\mu \left(\frac{1}{4} \omega_{\mu ab} \gamma^a \gamma^b \right) & 3.181 \\ &= e_2^\theta \frac{1}{4} (\omega_{\theta 12} \gamma^1 \gamma^2 + \omega_{\theta 21} \gamma^2 \gamma^1) \\ &= \frac{1}{4r} \left((-\sqrt{f}) \gamma^1 \gamma^2 + (\sqrt{f}) \gamma^2 \gamma^1 \right) \\ &= \frac{1}{4r} \sqrt{f} (\gamma^2 \gamma^1 - \gamma^1 \gamma^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4r} \sqrt{f} 2(\gamma^2 \gamma^1 - \eta^{21}) \\
&= \frac{1}{2r} \sqrt{f} \gamma^2 \gamma^1
\end{aligned}$$

untuk $c = 3$

$$\begin{aligned}
\Gamma_3 &= e_3^\mu \left(\frac{1}{4} \omega_{\mu ab} \gamma^a \gamma^b \right) & 3.182 \\
&= e_3^\varphi \frac{1}{4} (\omega_{\varphi 13} \gamma^1 \gamma^3 + \omega_{\varphi 31} \gamma^3 \gamma^1 + \omega_{\varphi 23} \gamma^2 \gamma^3 + \omega_{\varphi 32} \gamma^3 \gamma^2) \\
&= \frac{1}{4r \sin \theta} (-\sin \theta \sqrt{f} \gamma^1 \gamma^3 + \sin \theta \sqrt{f} \gamma^3 \gamma^1 - \cos \theta \gamma^2 \gamma^3 \\
&\quad + \cos \theta \gamma^3 \gamma^2) \\
&= \frac{1}{4r \sin \theta} (\sin \theta \sqrt{f}) (\gamma^3 \gamma^1 - \gamma^1 \gamma^3) + \cos \theta (\gamma^3 \gamma^2 - \gamma^2 \gamma^3) \\
&= \frac{1}{4r \sin \theta} (\sin \theta \sqrt{f}) 2(\gamma^3 \gamma^1 - \eta^{31}) + \cos \theta 2(\gamma^3 \gamma^2 - \eta^{32}) \\
&= \frac{1}{2r} \sqrt{f} \gamma^3 \gamma^1 + \frac{\cot \theta}{2r} \gamma^3 \gamma^2
\end{aligned}$$

kemudian dalam perumusan persamaan Dirac pada ruang-waktu Reissner-Nordstrom dengan menggunakan persamaan (3.87), diperlukan koefisien Fock-Ivanenko dalam membangun turunan kovarian spinor Fock-Ivanenko. Setelah menghitung koefisien Fock-Ivanenko diatas, didapatkan turunan kovarian spinor:

$$\begin{aligned}
D_0 &= e_0^\mu \partial_\mu + \Gamma_0 \\
&= \frac{1}{\sqrt{f}} \partial_t - \frac{1}{4} f \left(\frac{2M}{r^2} - \frac{2Q^2}{r^3} \right) \gamma^0 \gamma^1 \\
D_1 &= e_1^\mu \partial_\mu + \Gamma_1 & 3.183 \\
&= \sqrt{f} \partial_r \\
D_2 &= e_2^\mu \partial_\mu + \Gamma_2 \\
&= \frac{1}{r} \partial_\theta + \frac{1}{2r} \sqrt{f} \gamma^2 \gamma^1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_3 &= e_3^\mu \partial_\mu + \Gamma_3 \\
&= \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi + \frac{1}{2r} \sqrt{f} \gamma^3 \gamma^1 + \frac{\cot \theta}{2r} \gamma^3 \gamma^2
\end{aligned}$$

maka dalam ruang-waktu Reissner-Nordstrom, fermion bermuatan q berinteraksi dengan muatan lubang hitam Q , sehingga partikel mengalami interaksi elektromagnetik dan fermion akan berada pada potensial Coloumb. Persamaan Dirac pada ruang-waktu melengkung apabila berada pada potensial Coloumb menjadi:

$$\left(i\gamma^c D_c - \gamma^0 \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r} - m \right) \psi = 0 \tag{3.184}$$

maka persamaan Dirac pada ruang-waktu Reissner-Nordstrom menjadi:

$$\begin{aligned}
&\left(i\gamma^0 \left(\frac{1}{\sqrt{f}} \partial_t - \frac{1}{4} f \left(\frac{2M}{r^2} - \frac{2Q^2}{r^3} \right) \gamma^0 \gamma^1 \right) + i\gamma^1 (\sqrt{f} \partial_r) \right. \\
&\quad + i\gamma^2 \left(\frac{1}{r} \partial_\theta + \frac{1}{2r} \sqrt{f} \gamma^2 \gamma^1 \right) \\
&\quad \left. + i\gamma^3 \left(\frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi + \frac{1}{2r} \sqrt{f} \gamma^3 \gamma^1 + \frac{\cot \theta}{2r} \gamma^3 \gamma^2 \right) - \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r} - m \right) \psi \\
&= 0
\end{aligned} \tag{3.185}$$

$$\begin{aligned}
& \left(i\gamma^0 \left(\frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)}} \partial_t - \frac{1}{4} \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) \left(\frac{2M}{r^2} - \frac{2Q^2}{r^3} \right) \gamma^0 \gamma^1 \right) \right. \\
& \quad + i\gamma^1 \left(\sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)} \partial_r \right) \\
& \quad + i\gamma^2 \left(\frac{1}{r} \partial_\theta + \frac{1}{2r} \sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)} \gamma^2 \gamma^1 \right) \\
& \quad \left. + i\gamma^3 \left(\frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi + \frac{1}{2r} \sqrt{f} \gamma^3 \gamma^1 + \frac{\cot \theta}{2r} \gamma^3 \gamma^2 \right) - \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r} - m \right) \psi \\
& = 0
\end{aligned}$$

dari bentuk persamaan Dirac diatas sudah mendapatkan tujuan pertama yaitu memperoleh persamaan medan Dirac pada ruangwaktu *Reissner-Norstrom*, secara definisi menandakan bahwa ruang-watu *Reissner-Norstrom* adalah lubang hitam yang diberi muatan Q . Ketika lubang hitam memiliki muatan, partikel bermuatan yang bergerak di sekitar lubang hitam akan mengalami interaksi elektrostatik. Maka dalam persamaan Dirac memunculkan A_0 , yaitu vektor potensial elektrostatik.

Dari sifat matriks gamma, $(\gamma^i) = I$, maka persamaan menjadi:

$$\begin{aligned}
& \left(i\gamma^0 \frac{1}{\sqrt{f}} \partial_t - i \frac{1}{4} \gamma^1 f \left(\frac{2M}{r^2} - \frac{2Q^2}{r^3} \right) + i\gamma^1 (\sqrt{f} \partial_r) + i\gamma^2 \frac{1}{r} \partial_\theta + i \frac{1}{2r} \gamma^1 \sqrt{f} \right. \\
& \quad \left. + i\gamma^3 \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi + i\gamma^1 \frac{1}{2r} \sqrt{f} + i\gamma^2 \frac{\cot \theta}{2r} - \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r} - m \right) \psi = 0
\end{aligned} \tag{3.186}$$

kemudian jika dikalikan dengan $-i\gamma^0$ dari kiri, maka didapatkan bentuk:

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1}{\sqrt{f}} \partial_t - \gamma^0 \gamma^1 \frac{1}{4} f \left(\frac{2M}{r^2} - \frac{2Q^2}{r^3} \right) + \gamma^0 \gamma^1 \sqrt{f} \partial_r + \gamma^0 \gamma^2 \frac{1}{r} \partial_\theta + \gamma^0 \gamma^1 \frac{1}{2r} \sqrt{f} \right. \\
& \quad \left. + \gamma^0 \gamma^3 \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi + \gamma^0 \gamma^1 \frac{1}{2r} \sqrt{f} + \gamma^0 \gamma^2 \frac{\cot \theta}{2r} \right) \Psi \\
& = -i\gamma^0 \left(\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r} + m \right) \Psi
\end{aligned} \tag{3.187}$$

maka dapat juga dituliskan sebagai :

$$\begin{aligned}
& \left[\gamma^0 \left(\frac{i}{S(r)} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{e}{S(r)} V(r) \right) + \gamma^r \left(iS(r) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r} (S(r) - 1) + \frac{i}{2} S'(r) \right) \right. \\
& \quad \left. + i\gamma^\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + i\gamma^\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} - m \right] \Psi = 0
\end{aligned} \tag{3.188}$$

dimana $S(r) = \sqrt{f(r)}$ dan $S'(r)$ adalah turunan radial dari S . Dengan memasukkan potensial listrik (V) sebagai kontribusi ke energi kinetik total partikel dan (eV) adalah energi kinetik spesifik yang dimasukkan ke dalam persamaan gerak untuk menggambarkan lintasan partikel bermuatan di sekitar lubang hitam Reissner-Nordstrom. Kemudian tahap selanjutnya menggunakan prosedur yang mengeksplorasi simetri bola dari masalah ini untuk memisahkan persamaan (3.188).

3.4.1 Pemisahan Persamaan Dirac dalam Ruang-Waktu Reissner-Nordstrom

Pemisahan persamaan Dirac ini mendapatkan solusi eksplisit untuk fungsi gelombang partikel bermuatan dan memahami bagaimana muatan listrik dari lubang hitam Reissner Nordstrom mempengaruhi perilaku partikel-partikel bermuatan di sekitarnya. Operator momentum sudut \vec{L} adalah operator yang terkait

dengan oservabel momentum sudut partikel. Ketika sistem berada pada potensial sentral $V = V(r)$, maka momentum sudut orbital dari sistem tersebut kekal. Untuk memisahkan persamaan (3.188), dimulai dengan mendefinisikan operator momentum sudut \vec{L} dan beberapa operator terkait lainnya:

$$\vec{L} = -i(\vec{r} \times \vec{v})$$

$$L_{\pm} = L_x \pm L_y \quad 3.189$$

$$L^2 = -\Delta_S^2 = L_+L_- + L_z^2 - L_z = L_-L_+ + L_z^2 + L_z$$

dengan Δ_S^2 adalah laplacian dalam koordinat bola. Operator ini bekerja pada harmonik bola $Y_l^k(\theta, \varphi)$ sebagai:

$$L^2 Y_l^k = l(l+1) Y_l^k$$

$$L_z Y_l^k = k Y_l^k \quad 3.190$$

$$L_{\pm} Y_l^k = \sqrt{l(l+1) - k(k \pm 1)} Y_l^{k \pm 1}$$

jadi, Y_l^k adalah fungsi eigen simultan dari L_z dan L^2 . Kemudian harmonik bola membentuk dasar untuk fungsi yang dapat diintegrasikan kuadrat di atas S^2 , dalam arti bahwa setiap fungsi yang dapat diintegrasikan kuadrat di atas S^2 dapat dituliskan sebagai kombinasi linier dari harmonik bola. Di sini, S^2 menunjukkan permukaan bola 2 dimensi dengan radius satuan.

dengan matriksnya:

$$\sigma^r = \vec{\sigma} \cdot \vec{X}_r = \sigma^1 \sin \theta \cos \varphi + \sigma^2 \sin \theta \sin \varphi + \sigma^3 \cos \theta$$

$$\sigma^\theta = \vec{\sigma} \cdot \vec{X}_\theta = \frac{1}{r} (\sigma^1 \cos \theta \cos \varphi + \sigma^2 \cos \theta \sin \varphi - \sigma^3 \sin \theta)$$

$$\sigma^\varphi = \vec{\sigma} \cdot \vec{X}_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} (-\sigma^1 \sin \varphi + \sigma^2 \cos \varphi) \quad 3.191$$

dimana σ^1, σ^2 dan σ^3 adalah matriks pauli. Kemudian mencari sifat-sifat masing-masing:

$$\sigma^r \sigma^\theta = \sigma^1 \sigma^1 \frac{1}{r} \cos^2 \varphi \sin \theta \cos \theta + \sigma^1 \sigma^2 \frac{1}{r} \sin \theta \cos \varphi \cos \theta \sin \varphi \quad 3.192$$

$$- \sigma^1 \sigma^3 \frac{1}{r} \sin^2 \theta \cos \varphi + \sigma^2 \sigma^1 \frac{1}{r} \sin \theta \sin \varphi \cos \theta \cos \varphi$$

$$+ \sigma^2 \sigma^2 \frac{1}{r} \sin^2 \varphi \sin \theta \cos \theta - \sigma^2 \sigma^3 \frac{1}{r} \sin^2 \theta \sin \varphi$$

$$+ \sigma^3 \sigma^1 \cos^2 \theta \cos \varphi + \sigma^3 \sigma^2 \cos^2 \theta \sin \varphi$$

$$- \sigma^3 \sigma^3 \cos \theta \sin \theta$$

$$= \left(\frac{i}{r} \sigma^2 \cos \varphi \right) - \left(\frac{i}{r} \sigma^1 \sin \varphi \right)$$

$$= i \sin \theta \sigma^\varphi$$

$$\sigma^r \sigma^\varphi = -\sigma^1 \sigma^1 \frac{1}{r \sin \theta} \sin \theta \cos \varphi \sin \varphi + \sigma^1 \sigma^2 \frac{1}{r \sin \theta} \cos^2 \varphi \sin \theta \quad 3.193$$

$$- \sigma^2 \sigma^1 \frac{1}{r \sin \theta} \sin^2 \varphi \sin \theta + \sigma^2 \sigma^2 \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi$$

$$- \sigma^3 \sigma^1 \frac{1}{r \sin \theta} \cos \theta \sin \varphi + \sigma^3 \sigma^2 \cos \theta \cos \varphi$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{i}{r \sin \theta} \sigma^3 \sin \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \right) - \left(\frac{1}{r \sin \theta} \sigma^2 \cos \theta \sin \varphi \right) \\
&\quad - \left(\frac{1}{r \sin \theta} \sigma^1 \cos \theta \cos \varphi \right) \\
&= -\frac{i}{r \sin \theta} (\sigma^1 \cos \theta \cos \varphi + \sigma^2 \cos \theta \sin \varphi - \sigma^3 \sin \theta) \\
&= -\frac{i}{\sin \theta} \sigma^\theta
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
(\sigma^r)^2 &= (\sigma^1 \sin \theta \cos \varphi + \sigma^2 \sin \theta \sin \varphi + \sigma^3 \cos \theta)^2 & 3.194 \\
&= \sigma^1 \sigma^1 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \sigma^2 \sigma^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \sigma^3 \sigma^3 \cos^2 \theta \\
&= \mathbb{1}(\sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos^2 \theta) \\
&= \mathbb{1}(\sin^2 \theta (1 - \sin^2 \varphi) + (\sin^2 \theta \sin^2 \varphi) + \cos^2 \theta) \\
&= \mathbb{1}(\sin^2 \theta - \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos^2 \theta) \\
&= \mathbb{1}(1) \\
&= \mathbb{1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\sigma^r)^\dagger &= \sigma^1 \sin \theta \cos \varphi + \sigma^2 \sin \theta \sin \varphi + \sigma^3 \cos \theta & 3.195 \\
&= \sigma^r
\end{aligned}$$

dimana $\mathbb{1}$ adalah matriks identitas. Perlu diperhatikan juga bahwa:

$$\begin{aligned}
\vec{r} \times \vec{\nabla} &= -r \times \vec{\nabla} & 3.196 \\
&= -r \left(\hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\theta} \sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{\varphi}}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \\
&= -r(\hat{r} \times \hat{r})r \frac{\partial}{\partial r} + (\hat{r} \times \hat{\theta}) \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta + (\hat{r} \times \hat{\varphi}) \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -r \left(\hat{\varphi} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta - \frac{\hat{\varphi}}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \\
&= -r \left(\frac{\vec{X}_0}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \sin \theta \vec{X}_\varphi \frac{\partial}{\partial \theta} \right)
\end{aligned}$$

kemudian, dengan menggunakan sifat (3.192), (3.193) dan (3.196), didapatkan hubungan:

$$\begin{aligned}
\sigma^r \vec{\sigma} \cdot (\vec{r} \times \vec{\nabla}) &= -r \sigma^r \left(\frac{\sigma^\theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \sin \theta \sigma^\varphi \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \\
&= -ir \left(\sigma^\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \sigma^\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)
\end{aligned} \tag{3.197}$$

dan akhirnya didapatkan

$$\begin{aligned}
\sigma^\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \sigma^\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} &= \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} - \sigma^r \partial_r \\
&= \frac{\sigma^r}{r} (\vec{\sigma} \cdot \vec{x}) (\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} - \sigma^r \partial_r) \\
&= \frac{\sigma^r}{r} (r \partial_r + i \vec{\sigma} \cdot (\vec{x} \times \vec{\nabla}) - r \partial_r) \\
&= -\frac{\sigma^r}{r} (\vec{\sigma} \cdot \vec{L}) \\
&= -\frac{\sigma^r}{r} (K - 1) \\
\vec{\sigma} \cdot \vec{L} &= -r \sigma^r (\sigma^\theta \partial_\theta + \sigma^\varphi \partial_\varphi)
\end{aligned} \tag{3.198}$$

dengan operator K didefinisikan oleh:

$$K = (\vec{\sigma} \cdot \vec{L}) + 1 \tag{3.199}$$

Sekarang, didefinisikan apa yang disebut dengan harmonisa bola spinor, dimana

harmonisa bola spinor \mathcal{X}_{jk}^L adalah tensor harmonik bola dengan spin $S = \frac{1}{2}$

$$\mathcal{X}_{jk}^L(\theta, \varphi) \equiv Y_{jk}^{L, 1/2}(\theta, \varphi) \quad 3.200$$

dimana S adalah operator spin, j adalah operator total dari momentum sudut, dan L adalah operator orbital dari momentum sudut.

$$\mathcal{X}_{jk}^L(\theta, \varphi) = \sum_{m\sigma} c_{Lm1/2\sigma}^{jk} Y_{Lm}(\theta, \varphi) \mathcal{X}_{\frac{1}{2}\sigma} \quad 3.201$$

$$\mathcal{X}_{jk}^L(\theta, \varphi) = \sum_{\mu=1/2}^{1/2} [\mathcal{X}_{jk}^L(\theta, \varphi)]^\mu \mathcal{X}_{\frac{1}{2}\sigma}$$

j adalah setengah bilangan bulat non negatif karena L selalu bulangan bulat. Untuk j yang diberikan hanya ada dua nilai L yang mungkin, $L = j \pm \frac{1}{2}$ dan k mengansumsikan nilai $2j + 1$: $k = -j, -j + 1, \dots, j - 1, j$

kemudian komponen kontravarian $[\mathcal{X}_{jk}^L]^\mu$:

$$[\mathcal{X}_{jk}^L(\theta, \varphi)]^\mu = c_{Lk-\mu1/2\mu}^{jk} Y_{Lk-\mu}(\theta, \varphi) \quad 3.202$$

maka didefinisikan:

$$\mathcal{X}_{j-1/2}^k(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{j+k}{2j}} Y_{j-1/2}^{k-1/2}(\theta, \varphi) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sqrt{\frac{j-k}{2j}} Y_{j-1/2}^{k+1/2}(\theta, \varphi) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad 3.203$$

$$\mathcal{X}_{j+1/2}^k(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{j+1-k}{2j+2}} Y_{j+1/2}^{k-1/2}(\theta, \varphi) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \sqrt{\frac{j+1+k}{2j+2}} Y_{j+1/2}^{k+1/2}(\theta, \varphi) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad 3.204$$

$$j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, (\dots)$$

$$k = -j, -j + 1, (\dots), j - 1, j$$

Pada faktanya harmonik bola membentuk dasar untuk fungsi kuadrat yang dapat diintegrasikan di atas S^2 , dengan mudah terlihat bahwa spinor ini membentuk dasar untuk fungsi kuadrat yang dapat diintegrasikan di atas S^2 untuk setiap dua komponen spinor. Spinor ini ortonormal dalam arti bahwa:

$$\int_{S^2} (\mathcal{X}_{j\mp 1/2}^k)^\dagger \mathcal{X}_{j\mp 1/2}^{k'} d\Omega = \delta_{jj'} \delta^{kk'}$$

$$\int_{S^2} (\mathcal{X}_{j\mp 1/2}^k)^\dagger \mathcal{X}_{j\mp 1/2}^{k'} d\Omega = 0 \quad 3.205$$

dengan sedikit aljabar, dapat menunjukkan bahwa:

$$J^2 \mathcal{X}_{j\mp 1/2}^k = \left(\vec{L} + \frac{1}{2} \vec{\sigma} \right)^2 \mathcal{X}_{j\mp 1/2}^k \quad 3.206$$

$$= j(j+1) \mathcal{X}_{j\mp 1/2}^k$$

$$J_z \mathcal{X}_{j\mp 1/2}^k = \left(L_z + \frac{1}{2} \sigma^3 \right) \mathcal{X}_{j\mp 1/2}^k \quad 3.207$$

$$= k \mathcal{X}_{j\mp 1/2}^k$$

$$K \mathcal{X}_{j\mp 1/2}^k = \left((\vec{\sigma} \cdot \vec{L}) + 1 \right) \mathcal{X}_{j\mp 1/2}^k \quad 3.208$$

$$= \mp \left(j + \frac{1}{2} \right) \mathcal{X}_{j\mp 1/2}^k$$

$$K \sigma^r \mathcal{X}_{j\mp 1/2}^k = \left(-r \sigma^r (\sigma^\theta \partial_\theta + \sigma^\varphi \partial_\varphi) + 1 \right) \sigma^r \mathcal{X}_{j\mp 1/2}^k \quad 3.209$$

$$= -\sigma^r \mathcal{X}_{j\mp 1/2}^k - r \sigma^r (\sigma^\theta \sigma^r \partial_\theta + \sigma^\varphi \sigma^r \partial_\varphi) \mathcal{X}_{j\mp 1/2}^k$$

$$= -\sigma^r \mathcal{X}_{j\mp 1/2}^k - \sigma^r (\vec{\sigma} \cdot \vec{L}) \mathcal{X}_{j\mp 1/2}^k$$

$$= -\sigma^r K \mathcal{X}_{j\mp 1/2}^k$$

$$= -\left(j + \frac{1}{2}\right) \sigma^r \mathcal{X}_{j-\frac{1}{2}}^k$$

jadi, $\mathcal{X}_{j\mp\frac{1}{2}}^k$ adalah faktor eigen dari kuadrat momentum sudut total, J^2 dan proyeksi dari momentum sudut total sepanjang sumbu-z, J_z . Selanjutnya dengan persamaan (3.208) dan (3.209), maka $\sigma^r \mathcal{X}_{j-1/2}^k$ harus sebanding dengan $\mathcal{X}_{j+1/2}^k$. Namun dengan sifat (3.194), (3.195) dan (3.205), $\sigma^r \mathcal{X}_{j-1/2}^k$ memiliki norma sama dengan satu. Hal ini menyiratkan:

$$\sigma^r \mathcal{X}_{j-1/2}^k = \mathcal{X}_{j+1/2}^k \quad 3.210$$

$$\sigma^r \mathcal{X}_{j+1/2}^k = \mathcal{X}_{j-1/2}^k \quad 3.211$$

dimana persamaan kedua langsung mengikuti dengan menerapkan σ^r pada persamaan pertama dan menggunakan sifat (3.195).

Selanjutnya kembali ke persamaan Dirac dan dipertimbangkan dua ansatz untuk spinor Dirac dimana ansatz merupakan bentuk umum yang diusulkan untuk fungsi gelombang spinor yang memenuhi persamaan Dirac pada ruang waktu Reissner Nordstrom. Ansatz ini membagi fungsi gelombang empat komponen menjadi bagian-bagian radial dan sudut, dimana \mathcal{X}_1 dan \mathcal{X}_2 adalah bagian sudut yang berkaitan dengan spinor:

$$\Psi(t, r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} i \mathcal{X}_{j-\frac{1}{2}}^k(\theta, \varphi) \Phi_{jk\omega_1}^+(r) \\ i \mathcal{X}_{j+\frac{1}{2}}^k(\theta, \varphi) \Phi_{jk\omega_2}^+(r) \end{pmatrix}$$

$$\Psi(t, r, \theta, \varphi) = e^{-iEt} \begin{pmatrix} \mathcal{X}_{j-1/2}^k(\theta, \varphi) \Phi_{jk\omega_1}^+(r) \\ i \mathcal{X}_{j+1/2}^k(\theta, \varphi) \Phi_{jk\omega_2}^+(r) \end{pmatrix}$$

$$\Psi_{jk\omega}^+(t, r, \theta, \varphi) = e^{-i\omega t} \frac{S^{-1/2}}{r} \begin{pmatrix} \mathcal{X}_{j-1/2}^k(\theta, \varphi) \Phi_{jk\omega 1}^+(r) \\ i \mathcal{X}_{j+1/2}^k(\theta, \varphi) \Phi_{jk\omega 2}^+(r) \end{pmatrix} \quad 3.212$$

$$\Psi_{jk\omega}^-(t, r, \theta, \varphi) = e^{-i\omega t} \frac{S^{-1/2}}{r} \begin{pmatrix} \mathcal{X}_{j+1/2}^k(\theta, \varphi) \Phi_{jk\omega 1}^+(r) \\ i \mathcal{X}_{j-1/2}^k(\theta, \varphi) \Phi_{jk\omega 2}^+(r) \end{pmatrix} \quad 3.213$$

dengan dua spinor $\Phi_{jk\omega}^+$ dan $\Phi_{jk\omega}^-$ disebut harmonik bola spinor (dengan j dan k adalah setengah bilangan bulat yang memenuhi $j \geq |k|$), kemudian menggunakan definisi matriks Dirac dan hubungan (3.198), maka persamaan (3.188) berbunyi:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \left(\frac{i}{S} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{e}{S} V \right) + \begin{pmatrix} 0 & \sigma^r \\ -\sigma^r & 0 \end{pmatrix} \left(iS \frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r} (S-1) + \frac{i}{2} S' \right) \right. \\ & \quad \left. - \frac{i}{r} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^r (K-1) \\ -\sigma^r (K-1) & 0 \end{pmatrix} - m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \Psi_{jk\omega}^\pm \\ & = 0 \end{aligned} \quad 3.214$$

Selanjutnya, dengan menggunakan rumus eksplisit untuk dua anazats (3.212) dan (3.213) dengan hubungan (3.210) dan (3.211) didapatkan persamaan matriks Dirac dua komponen:

$$S \frac{d}{dr} \Phi_{jk\omega}^\pm = \left[\frac{\omega - eV}{S} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \pm \frac{2j+1}{2r} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - m \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] \Phi_{jk\omega}^\pm \quad 3.215$$

perlu memadatkan kedua persamaan ini dalam satu persamaan induk dengan mendefinisikan:

$$\Phi_{jk\omega} = \begin{cases} \Phi_{-jk\omega}^- & j = -1/2, -3/2, -5/2, (\dots) \\ \Phi_{jk\omega}^+ & j = 1/2, 3/2, 5/2, (\dots) \end{cases} \quad 3.216$$

$$\tilde{j}(j) = \text{sign}(j) \left(\frac{2|j|+1}{2} \right) \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \quad 3.217$$

memperoleh:

$$S \frac{d}{dr} \Phi_{jk\omega} = \left[\frac{\omega - eV}{S} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \pm \frac{\tilde{J}}{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - m \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] \Phi_{jk\omega} \quad 3.218$$

untuk mendapatkan persamaan diferensial terpisah $G(r)$ dan $F(r)$, substitusikan ansatz ke dalam persamaan Dirac. Solusi F_j dan G_j digunakan untuk membentuk bentuk khusus dari fungsi radial dalam lubang hitam Reissner-Nordstrom. Maka diperhitungkan sifat-sifat dari lubang hitam Reissner-Nordstrom dengan persamaan diferensial $G(r)$ dan $F(r)$ dengan meninjau gabungan dari dua ODE linier orde pertama dalam komponen:

$$\Phi_{jk\omega}(r) = \begin{pmatrix} \Phi_{jk\omega 1}(r) \\ \Phi_{jk\omega 2}(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_j(r) \\ G_j(r) \end{pmatrix} \quad 3.219$$

dimana pada langkah terakhir yaitu memisahkan notasi. Secara eksplisit, sistem yang digabungkan berbunyi:

$$S \frac{d}{dr} F_j - \frac{\tilde{J}}{r} F_j = - \left(\frac{\omega - eV}{S} + m \right) G_j \quad 3.220$$

$$S \frac{d}{dr} G_j - \frac{\tilde{J}}{r} G_j = - \left(\frac{\omega - eV}{S} - m \right) F_j \quad 3.221$$

dengan mengubah variabel $\frac{d}{dr}$ menjadi $u_*(r)$, maka

$$\frac{du_*}{dr} = \frac{1 - \frac{eV}{\omega} + \frac{mS}{\omega}}{S^2} \quad 3.222$$

setelah beberapa aljabar, diperoleh:

$$\frac{d^2}{du_*^2} F_j - \left[\frac{d}{du_*} \left(\frac{\tilde{J}}{r} \frac{S}{1 - \frac{eV}{\omega} + \frac{mS}{\omega}} \right) - \omega^2 \left(\frac{1 - \frac{eV}{\omega} - \frac{mS}{\omega}}{1 - \frac{eV}{\omega} + \frac{mS}{\omega}} \right) + \frac{\tilde{J}^2}{r^2} \left(\frac{S}{1 - \frac{eV}{\omega} + \frac{mS}{\omega}} \right)^2 \right] F_j = 0 \quad 3.223$$

demikian pula, mengubah variabel $\frac{d}{dr}$ menjadi $v_*(r)$ menjadi:

$$\frac{dv_*}{dr} = \frac{1 - \frac{eV}{\omega} - \frac{mS}{\omega}}{S^2} \quad 3.224$$

memperoleh:

$$\frac{d^2}{dv_*^2} G_j - \left[\frac{d}{dv_*} \left(\frac{\tilde{J}}{r} \frac{S}{1 - \frac{eV}{\omega} + \frac{mS}{\omega}} \right) + \omega^2 \left(\frac{1 - \frac{eV}{\omega} + \frac{mS}{\omega}}{1 - \frac{eV}{\omega} - \frac{mS}{\omega}} \right) - \frac{\tilde{J}^2}{r^2} \left(\frac{S}{1 - \frac{eV}{\omega} + \frac{mS}{\omega}} \right)^2 \right] G_j = 0 \quad 3.225$$

kemudian dengan hubungan (3.222), menunjukkan bahwa:

$$\frac{d}{du_*} \left(\frac{\tilde{J}}{r} \frac{S}{1 - \frac{eV}{\omega} + \frac{mS}{\omega}} \right) = - \frac{\tilde{J}}{r^2} \frac{S^3}{\left(1 - \frac{eV}{\omega} + \frac{mS}{\omega}\right)^2} + \frac{\tilde{J}}{r} \frac{S^2}{\left(1 - \frac{eV}{\omega} + \frac{mS}{\omega}\right)^2} \left[\frac{S^{-1}}{r^2} \left(M - \frac{Q^2}{r} \right) - \frac{S}{1 - \frac{eV}{\omega} + \frac{mS}{\omega}} \left(\frac{eV}{\omega r} + \frac{mS^{-1}}{\omega r^2} \left(M - \frac{Q^2}{r} \right) \right) \right] \quad 3.226$$

dengan cara yang sama dengan hubungan (3.224), menunjukkan bahwa:

$$\frac{d}{dv_*} \left(\frac{\tilde{J}}{r} \frac{S}{1 - \frac{eV}{\omega} - \frac{mS}{\omega}} \right) = - \frac{\tilde{J}}{r^2} \frac{S^3}{\left(1 - \frac{eV}{\omega} - \frac{mS}{\omega}\right)^2}$$

$$+ \frac{\tilde{J}}{r} \frac{S^2}{\left(1 - \frac{eV}{\omega} - \frac{mS}{\omega}\right)^2} \left[\frac{S^{-1}}{r^2} \left(M - \frac{Q^2}{r} \right) - \frac{S}{1 - \frac{eV}{\omega} - \frac{mS}{\omega}} \left(\frac{eV}{\omega r} - \frac{mS^{-1}}{\omega r^2} \left(M - \frac{Q^2}{r} \right) \right) \right] \quad 3.227$$

Penting untuk diperhatikan bahwa ketika memisahkan persamaan (3.220) dan (3.221), maka akan kehilangan beberapa informasi. Jadi, selain persamaan (3.223) dan (3.225), F_j dan G_j juga harus memenuhi persamaan (3.220) dan (3.221).

Sekarang pada perilaku asimtotik dari F_j dan G_j di wilayah I ($r = +\infty$) dan perilaku di dekat horizon peristiwa di wilayah II ($r = r_+$). Wilayah I dan II adalah konsep yang merupakan solusi dari persamaan medan gravitasi Einstein untuk benda dengan muatan listrik. Wilayah I melibatkan ruang yang berada di luar horizon lubang hitam Reissner-Nordstrom, sedangkan wilayah II melibatkan ruang di dalam horizon lubang hitam Reissner-Nordstrom.

3.4.2 Perilaku Asimtotik di wilayah I : $r = +\infty$

Wilayah I adalah wilayah luar lubang hitam yang menunjukkan bahwa wilayah ini sedang berada pada posisi atau jarak yang sangat jauh dari lubang hitam. Saat r mendekati tak hingga positif, ini mencerminkan wilayah yang sangat jauh dari pusat lubang hitam, dimana pengaruh gravitasi dan muatan listrik lubang hitam dapat diabaikan.

Dengan fakta bahwa

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} S = 1$$

3.228

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} V = 0$$

dikenakan pada batasan ini karena merupakan wilayah di luar horizon lubang hitam, tempat di mana pengamat dapat berada dan mempengaruhi lubang hitam dan pada batasan wilayah I memiliki potensial gravitasi dan listrik yang diperhitungkan. Potensial gravitasi mencerminkan efek dari muatan listrik objek. Ketika bergerak jauh dari lubang hitam, potensial gravitasi dan potensial listrik dapat didefinisikan sedemikian rupa sehingga total potensial menjadi nol. Hal ini diatur karena energi kinetik partikel tetap positif, sehingga partikel dapat terus bergerak di wilayah ini. Oleh karena itu fungsi gelombang yang dihasilkan adalah fungsi gelombang yang berada pada luar horizon yaitu fungsi gelombang datang dan pantul.

dapat ditunjukkan bahwa batas asimtotik dari persamaan (3.223) adalah

$$\frac{d^2}{du_*^2} (F_j)_I + \omega^2 \left(\frac{\omega - m}{\omega + m} \right) (F_j)_I = 0 \quad 3.229$$

dan bahwa $u_*(r)$ diberikan oleh:

$$u_*(r) = \frac{\omega + m}{\omega} r \quad 3.230$$

solusi umum dari persamaan (3.229) dinyatakan dalam bentuk:

$$\begin{aligned} (F_j)_I &= \tilde{e} e^{i\omega \sqrt{\frac{\omega-m}{\omega+m}} u_*} + \tilde{f} e^{-i\omega \sqrt{\frac{\omega-m}{\omega+m}} u_*} \\ &= \tilde{e} \exp \left[i \operatorname{sign}(\omega + m) \sqrt{\omega^2 - m^2} r \right] + \end{aligned} \quad 3.231$$

$$+\tilde{f} \exp \left[-i \operatorname{sign}(\omega + m) \sqrt{\omega^2 - m^2} r \right]$$

demikian pula, didapatkan limit pada persamaan (3.225):

$$\frac{d^2}{dv_*^2} (G_j)_I + \omega^2 \left(\frac{\omega + m}{\omega - m} \right) (G_j)_I = 0 \quad 3.232$$

dan untuk $v_*(r)$:

$$v_*(r) = \frac{\omega - m}{\omega} r \quad 3.233$$

kemudian solusi umum dari persamaan (3.232) adalah

$$\begin{aligned} (G_j)_I &= \tilde{g} e^{i\omega \sqrt{\frac{\omega+m}{\omega-m}} v_*} + \tilde{h} e^{-i\omega \sqrt{\frac{\omega+m}{\omega-m}} v_*} \\ &= \tilde{g} \exp \left[i \operatorname{sign}(\omega - m) \sqrt{\omega^2 - m^2} r \right] + \quad 3.234 \\ &\quad + \tilde{h} \exp \left[-i \operatorname{sign}(\omega - m) \sqrt{\omega^2 - m^2} r \right] \end{aligned}$$

konstanta $\tilde{e}, \tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{h}$ yang muncul pada solusi diatas adalah konstanta bernilai kompleks. Pada kenyataanya, keempat konstanta ini tidak semuanya independen. Karena seperti yang telah dikatakan pada akhir bagian sebelumnya, persamaan (3.220) dan (3.221) harus dipenuhi oleh solusi (3.231) dan (3.234). Maka dapat mengekspresikan \tilde{g} dan \tilde{h} sebagai fungsi dari \tilde{e} dan \tilde{f} . Jadi, dengan mensubsitusikan $(F_j)_I$ dan $(G_j)_I$ ke dalam persamaan-persamaan ini akan memperoleh:

$$\tilde{e} \exp \left[i \operatorname{sign}(\omega + m) \sqrt{\omega^2 - m^2} r \right] - \tilde{f} \exp \left[-i \operatorname{sign}(\omega + m) \sqrt{\omega^2 - m^2} r \right] \quad 3.235$$

$$= i \sqrt{\frac{\omega + m}{\omega - m}} \left(\tilde{g} \exp \left[i \operatorname{sign}(\omega - m) \sqrt{\omega^2 - m^2} r \right] \right) +$$

$$+ \left(\tilde{h} \exp \left[-i \operatorname{sign}(\omega - m) \sqrt{\omega^2 - m^2} r \right] \right)$$

dan

$$\tilde{e} \exp \left[i \operatorname{sign}(\omega + m) \sqrt{\omega^2 - m^2} r \right] + \tilde{f} \exp \left[-i \operatorname{sign}(\omega + m) \sqrt{\omega^2 - m^2} r \right]$$

$$= i \sqrt{\frac{\omega + m}{\omega - m}} \left(\tilde{g} \exp \left[i \operatorname{sign}(\omega - m) \sqrt{\omega^2 - m^2} r \right] \right) - \quad 3.236$$

$$- \left(\tilde{h} \exp \left[-i \operatorname{sign}(\omega - m) \sqrt{\omega^2 - m^2} r \right] \right)$$

kemudian masing-masing ruas dibagi dengan $\exp \left[i \operatorname{sign}(\omega + m) \sqrt{\omega^2 - m^2} r \right]$:

$$\tilde{e} + \tilde{f} = i \sqrt{\frac{\omega + m}{\omega - m}} \tilde{g} - i \sqrt{\frac{\omega + m}{\omega - m}} \tilde{h}$$

$$\tilde{e} \approx i \sqrt{\frac{\omega + m}{\omega - m}} \tilde{g} \quad 3.237$$

$$\tilde{g} i \approx \frac{1}{\sqrt{\frac{\omega + m}{\omega - m}}} \tilde{e}$$

masing-masing ruas dikali dengan $-i$, maka

$$\tilde{g} = -i \sqrt{\frac{\omega - m}{\omega + m}} \tilde{e}$$

$$\tilde{f} \approx -\tilde{h} \sqrt{\frac{\omega + m}{\omega - m}} i$$

$$\tilde{h} i \approx -\frac{1}{\sqrt{\frac{\omega + m}{\omega - m}}} \tilde{f}$$

masing-masing ruas dikali dengan $-i$, maka

$$\tilde{h} = i \sqrt{\frac{\omega - m}{\omega + m}} \tilde{f} \quad 3.238$$

karena harus memiliki gelombang datang dari $r = +\infty$, solusi persamaan (3.215) memenuhi kondisi $\omega \in X$ dengan:

$$X = \{\omega | \omega^2 - m^2 > 0\} \quad 3.239$$

sekarang, digunakan kecepatan grup untuk mendapatkan solusi gelombang datang dan pantul dari persamaan (3.215).

Kecepatan grup adalah kecepatan dimana energi terkumpul atau gelombang yang terkonsentrasi bergerak melalui medium. Dalam konteks kuantum dan gelombang, kecepatan grup dapat didefinisikan untuk solusi gelombang datang. Untuk gelombang datang dalam mekanika kuantum, misalnya solusi gelombang datang umumnya diberikan oleh superposisi gelombang yang bergerak maju dan gelombang yang bergerak mundur. Bentuk umumnya dapat dituliskan sebagai:

$$\psi(x, t) = A e^{i(kx - \omega t)} + B e^{-i(kx + \omega t)} \quad 3.240$$

solusi asimtotik diatas adalah:

$$\Phi_{jk\omega}^{\pm}(r \rightarrow +\infty) = I^{\pm} e^{ikr} \begin{pmatrix} 1 \\ i \sqrt{\frac{\omega - m}{\omega + m}} \end{pmatrix} + R^{\pm} e^{ikr} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \sqrt{\frac{\omega - m}{\omega + m}} \end{pmatrix} \quad 3.241$$

maka solusi gelombang datang diberikan oleh:

$$(\Psi)_I^i = \sum_{j,k} [I^+(\Psi_{jk}^+)^i + I^-(\Psi_{jk}^-)^i] \quad 3.242$$

dengan

$$(\Psi_{jk}^+)^i = \frac{1}{r} \exp \left[-i \left(\omega t + \epsilon \sqrt{\omega^2 - m^2} r \right) \right] \begin{pmatrix} x_{j-1/2}^k \\ -\sqrt{\frac{\omega - m}{\omega + m}} x_{j+1/2}^k \end{pmatrix} \quad 3.243$$

$$(\Psi_{jk}^-)^i = \frac{1}{r} \exp \left[-i \left(\omega t + \epsilon \sqrt{\omega^2 - m^2} r \right) \right] \begin{pmatrix} x_{j+1/2}^k \\ -\sqrt{\frac{\omega - m}{\omega + m}} x_{j-1/2}^k \end{pmatrix} \quad 3.244$$

dimana $\epsilon = \text{sign}(\omega + m)$. Kemudian dengan cara yang sama, solusi gelombang pantul diberikan oleh:

$$(\Psi)_I^r = \sum_{j,k} [R^+(\Psi_{jk}^+)^r + R^-(\Psi_{jk}^-)^r] \quad 3.245$$

dengan

$$(\Psi_{jk}^+)^r = \frac{1}{r} \exp \left[-i \left(\omega t - \epsilon \sqrt{\omega^2 - m^2} r \right) \right] \begin{pmatrix} x_{j-1/2}^k \\ \sqrt{\frac{\omega - m}{\omega + m}} x_{j+1/2}^k \end{pmatrix} \quad 3.246$$

$$(\Psi_{jk}^-)^r = \frac{1}{r} \exp \left[-i \left(\omega t - \epsilon \sqrt{\omega^2 - m^2 r} \right) \right] \begin{pmatrix} x_{j+1/2}^k \\ \sqrt{\frac{\omega - m}{\omega + m}} x_{j-1/2}^k \end{pmatrix} \quad 3.247$$

I^+, I^-, R^+ dan R^- pada solusi di atas adalah fungsi bernilai kompleks dari j dan k , tetapi untuk menyederhanakan notasi, tidak perlu merepresentasikan ini secara eksplisit. Dengan fungsi tanda ϵ , gelombang datang dan gelombang pantul masing-masing memiliki kecepatan kelompok negatif dan positif sepanjang r , yang memenuhi kondisi batas masalah.

3.4.3 Perilaku Asimtotik di wilayah II : $r = r_+$

Wilayah II merupakan wilayah di dalam horizon lubang hitam dan objek yang memasuki wilayah ini tidak dapat lepas dari gravitasi lubang hitam. r_+ adalah radius dimana efek gravitasi dan listrik mencapai nilai yang kritis. Sekarang dilihat perilaku medan Dirac di dekat horizon peristiwa $r = r_+$ menggunakan:

$$\lim_{r \rightarrow r_+} S = 0$$

$$\lim_{r \rightarrow r_+} V = V_+ = \frac{Q}{r_+} \quad 3.248$$

dikenakan pada batas di dalam horizon yang berkaitan dengan massa, potensial listrik dominan dan cenderung mendominasi di titik tersebut karena pengaruh kuat medan gravitasi dan listrik di sekitar horizon. Untuk energi kinetik mendekati nol karena energi total partikel didominasi oleh energi potensial (gravitasi dan listrik). Oleh karena itu pada wilayah II didapatkan fungsi gelombang transmisi yang masuk ke dalam horizon lubang hitam.

diperoleh limit dari persamaan (3.223):

$$\frac{d^2}{du_*^2}(F_j)_{II} + \omega^2(F_j)_{II} = 0 \quad 3.249$$

dan jika mengintegrasikan relasi (3.222):

$$u_*(r) = \frac{r_+^2}{\omega(r_+ - r_-)} (\omega - eV_+) \log(r - r_+) \quad 3.250$$

kemudian solusi umum dari persamaan (3.249) adalah

$$(F_j)_{II} = \tilde{a}e^{i\omega u_*} + \tilde{b}e^{-i\omega u_*} = \tilde{a}(r - r_+)^{ir_+^2\left(\frac{\omega - eV_+}{r_+ - r_-}\right)} + \tilde{b}(r - r_+)^{-ir_+^2\left(\frac{\omega - eV_+}{r_+ - r_-}\right)} \quad 3.251$$

dengan cara yang sama, limit dari persamaan (3.225) adalah

$$\frac{d^2}{dv_*^2}(G_j)_{II} + \omega^2(G_j)_{II} = 0 \quad 3.252$$

dan dengan mengintegrasikan relasi (3.224), diperoleh

$$v_*(r) = \frac{r_+^2}{\omega(r_+ - r_-)} (\omega - eV_+) \log(r - r_+) \quad 3.553$$

sekali lagi, solusi umum dari (3.252) adalah dalam bentuk

$$(G_j)_{II} = \tilde{c}e^{i\omega u_*} + \tilde{d}e^{-i\omega u_*} = \tilde{c}(r - r_+)^{ir_+^2\left(\frac{\omega - eV_+}{r_+ - r_-}\right)} + \tilde{d}(r - r_+)^{-ir_+^2\left(\frac{\omega - eV_+}{r_+ - r_-}\right)} \quad 3.254$$

sekarang, dapat menggunakan persamaan (3.220) dan (3.221) untuk menulis \tilde{c} dan

\tilde{d} sebagai fungsi dari \tilde{a} dan \tilde{b} . Jadi dengan mensubstitusikan solusi-solusi pada batas

$r \rightarrow r_+$, akan mendapatkan sistem persamaan:

$$-i \left[\tilde{a} (r - r_+)^{ir_+^2 \left(\frac{\omega - eV_+}{r_+ - r_-} \right)} - \tilde{b} (r - r_+)^{-ir_+^2 \left(\frac{\omega - eV_+}{r_+ - r_-} \right)} \right] = \tilde{c} (r - r_+)^{ir_+^2 \left(\frac{\omega - eV_+}{r_+ - r_-} \right)} + \tilde{d} (r - r_+)^{-ir_+^2 \left(\frac{\omega - eV_+}{r_+ - r_-} \right)} \quad 3.255$$

$$-i \left[\tilde{a} (r - r_+)^{ir_+^2 \left(\frac{\omega - eV_+}{r_+ - r_-} \right)} + \tilde{b} (r - r_+)^{-ir_+^2 \left(\frac{\omega - eV_+}{r_+ - r_-} \right)} \right] = \tilde{c} (r - r_+)^{ir_+^2 \left(\frac{\omega - eV_+}{r_+ - r_-} \right)} - \tilde{d} (r - r_+)^{-ir_+^2 \left(\frac{\omega - eV_+}{r_+ - r_-} \right)} \quad 3.256$$

dengan membagi $(r - r_+)^{ir_+^2 \left(\frac{\omega - eV_+}{r_+ - r_-} \right)}$ dengan masing-masing ruas maka:

$$-i\tilde{a} + i\tilde{b} = \tilde{c} + \tilde{d}$$

$$\tilde{c} = -i\tilde{a} \quad 3.257$$

$$\tilde{d} = i\tilde{b} \quad 3.258$$

kemudian didefinisikan koordinat $r_*(r)$ sebagai

$$r_* = \frac{r_+^2}{r_+ - r_-} \log(r - r_+) \quad 3.259$$

dengan menggunakan koordinat radial r_* , dapat terlihat bahwa solusi umum persamaan (3.215) di wilayah ini adalah jumlah dari dua gelombang yang merambat dengan kecepatan grup yang simetris. Karena gelombang yang ditransmisikan harus memasuki horizon peristiwa, maka gelombang tersebut harus memiliki kecepatan grup negatif sepanjang r_* . Maka solusi gelombang yang ditransmisikan adalah

$$\Phi_{jk\omega}^\pm(r \rightarrow r_+) = T^\pm e^{isr} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad 3.260$$

$$(\Psi)_{II}^t = \sum_{j,k} [T^+(\Psi_{jk}^+)^t + T^-(\Psi_{jk}^-)^t]$$

dengan

$$(\Psi_{jk}^+)^t = \frac{1}{\sqrt{r_+}(r_+ - r_-)^{\frac{1}{4}}(r - r_+)^{\frac{1}{4}}} \exp[-i(\omega t + (\omega - eV_+)r_*)] \begin{pmatrix} x_{j-1/2}^k \\ -x_{j+1/2}^k \end{pmatrix} \quad 3.261$$

$$(\Psi_{jk}^-)^t = \frac{1}{\sqrt{r_+}(r_+ - r_-)^{\frac{1}{4}}(r - r_+)^{\frac{1}{4}}} \exp[-i(\omega t + (\omega - eV_+)r_*)] \begin{pmatrix} x_{j+1/2}^k \\ -x_{j-1/2}^k \end{pmatrix} \quad 3.262$$

Sekali lagi, T^+ dan T^- adalah fungsi bernilai kompleks dari j dan k , tetapi untuk menyederhanakan notasi, tidak perlu merepresentasikan ini secara eksplisit. Dapat terlihat bahwa dengan tanda yang dipilih untuk nomor gelombang, gelombang yang ditransmisikan memiliki kecepatan kelompok negatif sepanjang r_* seperti yang diinginkan.

3.4.4 Mencari fluks arus dengan kekekalan arus

Dalam konteks mencari fenomena superradiasi pada medan Dirac, keberadaan kekekalan arus (*conserved current*) menyediakan kuantitas yang kekal (*conserved quantity*) untuk mendefinisikan besaran-besaran seperti probabilitas dan fluks yang tidak berubah seiring waktu. Hukum kekekalan muatan menyatakan bahwa muatan listrik tidak dapat diciptakan atau dimusnahkan, hanya dapat mengalir dari satu tempat ke tempat lain. Ini berarti bahwa arus listrik yang merupakan laju aliran muatan harus kekal atau dikonservasi. Ketika ingin menghitung fluks energi dan momentum sudut yang ditransfer dari lubang hitam ke partikel yang dipantulkan, digunakan arus kekal yang terkait dengan kekekalan energi-momentum. Kondisi superradiasi tercapai ketika fluks arus dan momentum

sudut keluar dari ergoregion lebih besar daripada yang masuk. Dengan memperoleh komponen arus kekal pada solusi persamaan Dirac di sekitar objek berputar, maka dapat memperoleh fluks arus masuk dan keluar.

Kekekalan Arus dapat disebut arus yang terjaga, yang merujuk pada kuantitas vektor dalam teori semesta yang memenuhi persamaan kekontinuan, sehingga totalnya tetap konstan selama evolusi sistem. Dalam teori medan kuantum, konsep ini terkait dengan simetri dan hukum kekekalan. Dalam konteks persamaan Dirac dan teori medan kuantum, adanya simetri fasa global menghasilkan hukum kekekalan muatan. Simetri ini dinyatakan oleh persamaan kekontinuan untuk suatu arus kuantum yang konservatif.

Diperkenalkan arus dengan memperkenalkan transformasi koordinat r menjadi koordinat kura-kura r^* (*tortoise*) sehingga terdapat arus kekal:

$$\frac{dr}{f(r)} = \frac{dr}{dr^*} = f(r)$$

dengan melihat referensi dari pengenalan nomor partikel z -current pada medan skalar:

$$j^z = -\frac{i}{2}(\phi^* \partial_z \phi - \phi \partial_z \phi^*)$$

maka jika dikenakan pada latar belakang lubang hitam Reissner-Nordstrom

$$j_* = -\frac{i}{2}(\psi^* \frac{d}{dr_*} \psi - \psi \frac{d}{dr_*} \psi^*)$$

kemudian ditinjau pada pemisahan variabel F_j dan G_j sebagai fungsi radial, maka:

$$J_{F_j} = -\frac{i}{2} \left((F_j)^* \frac{d}{du_*} F_j - F_j \frac{d}{du_*} (F_j)^* \right) \quad 3.263$$

dan

$$J_{G_j} = -\frac{i}{2} \left((G_j)^* \frac{d}{dv_*} G_j - G_j \frac{d}{dv_*} (G_j)^* \right) \quad 3.264$$

untuk setiap j dan k . Arus partikel ini terkait dengan kekekalan jumlah partikel.

Kemudian menunjukkan bahwa arus-arus ini konservatif di sepanjang u_* dan v_* , masing-masing, jadi:

$$\begin{aligned} \frac{d}{du_*} J_{F_j} &= -\frac{i}{2} \left((F_j)^* \frac{d^2}{du_*^2} F_j - F_j \frac{d^2}{du_*^2} (F_j)^* \right) \\ &= -\frac{i}{2} \left\{ \left[\frac{d}{du_*} \left(\frac{\tilde{j}}{r} \frac{S}{1 - \frac{eV}{\omega} + \frac{mS}{\omega}} \right) - \omega^2 \left(\frac{1 - \frac{eV}{\omega} - \frac{mS}{\omega}}{1 - \frac{eV}{\omega} + \frac{mS}{\omega}} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\tilde{j}^2}{r^2} \left(\frac{S}{1 - \frac{eV}{\omega} + \frac{mS}{\omega}} \right)^2 \right] \right. \\ &\quad \left. - \left[\frac{d}{du_*} \left(\frac{\tilde{j}}{r} \frac{S}{1 - \frac{eV}{\omega} + \frac{mS}{\omega}} \right) - \omega^2 \left(\frac{1 - \frac{eV}{\omega} - \frac{mS}{\omega}}{1 - \frac{eV}{\omega} + \frac{mS}{\omega}} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\tilde{j}^2}{r^2} \left(\frac{S}{1 - \frac{eV}{\omega} + \frac{mS}{\omega}} \right)^2 \right] \right\} |F_j|^2 = 0 \end{aligned} \quad 3.265$$

dan

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dv_*} J_{G_j} &= -\frac{i}{2} \left((G_j)^* \frac{d^2}{dv_*^2} G_j - G_j \frac{d^2}{dv_*^2} (G_j)^* \right) \\
&= -\frac{i}{2} \left\{ - \left[\frac{d}{dv_*} \left(\frac{\tilde{j}}{r} \frac{S}{1 - \frac{eV}{\omega} - \frac{mS}{\omega}} \right) + \omega^2 \left(\frac{1 - \frac{eV}{\omega} + \frac{mS}{\omega}}{1 - \frac{eV}{\omega} - \frac{mS}{\omega}} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{\tilde{j}^2}{r^2} \left(\frac{S}{1 - \frac{eV}{\omega} - \frac{mS}{\omega}} \right)^2 \right] \right. \\
&\quad \left. + \left[\frac{d}{dv_*} \left(\frac{\tilde{j}}{r} \frac{S}{1 - \frac{eV}{\omega} - \frac{mS}{\omega}} \right) - \omega^2 \left(\frac{1 - \frac{eV}{\omega} + \frac{mS}{\omega}}{1 - \frac{eV}{\omega} - \frac{mS}{\omega}} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{\tilde{j}^2}{r^2} \left(\frac{S}{1 - \frac{eV}{\omega} - \frac{mS}{\omega}} \right)^2 \right] \right\} |G_j|^2 = 0
\end{aligned} \tag{3.266}$$

dimana menggunakan persamaan (3.223), (3.225) dan konjugat kompleksnya. Kemudian akan menunjukkan bahwa arus-arus ini bukanlah arus fisik, melainkan besaran matematis yang di kekalkan yang memungkinkan untuk menghubungkan solusi asimtotik dari persamaan (3.223) dan (3.225) di wilayah I dan II.

Dengan $(F_j)_I = F_j^i + F_j^r$, dimana

$$F_j^i = I^\eta \exp \left[-i\omega \sqrt{\frac{\omega - m}{\omega + m}} u_* \right] \tag{3.267}$$

$$F_j^r = R^\eta \exp \left[i\omega \sqrt{\frac{\omega - m}{\omega + m}} u_* \right] \tag{3.268}$$

dan $\eta = \text{sign}(j)$, menunjukkan bahwa:

$$(J_{F_j})_I = J_{F_j}^i + J_{F_j}^r \quad 3.269$$

selain itu, menggunakan $(F_j)_{II} = F_j^t$ dengan

$$F_j^t = T^\eta e^{-i\tilde{e}\omega u_*} \quad 3.270$$

dengan jelas bahwa:

$$(J_{F_j})^t = J_{F_j}^t \quad 3.271$$

dengan fakta bahwa arus ini konservatif di sepanjang u_* , dengan hubungan:

$$J_{F_j}^i + J_{F_j}^r = J_{F_j}^t \quad 3.272$$

kemudian dengan menggunakan arus datang tersebut adalah

$$J_{F_j}^i = -\frac{i}{2} \left((F_j^i)^* \frac{d}{du_*} F_j^i - F_j^i \frac{d}{du_*} (F_j^i)^* \right) = -\omega \sqrt{\frac{\omega - m}{\omega + m}} |I^\eta|^2 \quad 3.273$$

arus yang dipantulkan adalah:

$$J_{F_j}^r = -\frac{i}{2} \left((F_j^r)^* \frac{d}{du_*} F_j^r - F_j^r \frac{d}{du_*} (F_j^r)^* \right) = \omega \sqrt{\frac{\omega - m}{\omega + m}} |R^\eta|^2 \quad 3.274$$

dan yang ditransmisikan adalah

$$J_{F_j}^t = -\frac{i}{2} \left((F_j^t)^* \frac{d}{du_*} F_j^t - F_j^t \frac{d}{du_*} (F_j^t)^* \right) = -\omega |T^\eta|^2 \quad 3.275$$

dari persamaan (3.272), diperoleh

$$|I^\eta|^2 - |R^\eta|^2 = \sqrt{\frac{\omega + m}{\omega - m}} |T^\eta|^2 \quad 3.276$$

dengan cara yang sama, dengan $(G_j)_I = G_j^i + G_j^r$, dimana

$$G_j^i = -i \sqrt{\frac{\omega - m}{\omega + m}} I^\eta \exp \left[-i\omega \sqrt{\frac{\omega + m}{\omega - m}} u_* \right] \quad 3.277$$

$$G_j^r = -i \sqrt{\frac{\omega - m}{\omega + m}} R^\eta \exp \left[i\omega \sqrt{\frac{\omega + m}{\omega - m}} u_* \right] \quad 3.278$$

ditunjukkan bahwa

$$(J_{G_j})_I = J_{G_j}^i + J_{G_j}^r \quad 3.279$$

Selanjutnya, dengan menggunakan $(G_j)_{II} = G_j^t$

$$G_j^t = iT^\eta e^{-i\omega u_*} \quad 3.280$$

ditunjukkan bahwa:

$$(J_{G_j})_{II} = J_{G_j}^t \quad 3.281$$

karena arus ini konservatif sepanjang v_* , maka memiliki hubungan

$$J_{G_j}^i + J_{G_j}^r = J_{G_j}^t \quad 3.282$$

maka arus datang adalah:

$$J_{G_j}^i = -\frac{i}{2} \left((G_j^i)^* \frac{d}{dv_*} G_j^i - G_j^i \frac{d}{dv_*} (G_j^i)^* \right) = -\omega \sqrt{\frac{\omega - m}{\omega + m}} |I^\eta|^2 \quad 3.283$$

arus pantul adalah:

$$J_{G_j}^r = -\frac{i}{2} \left((G_j^r)^* \frac{d}{dv_*} G_j^r - G_j^r \frac{d}{dv_*} (G_j^r)^* \right) = \omega \sqrt{\frac{\omega - m}{\omega + m}} |R^\eta|^2 \quad 3.284$$

dan yang ditransmisikan adalah:

$$J_{G_j}^t = -\frac{i}{2} \left((G_j^t)^* \frac{d}{dv_*} G_j^t - G_j^t \frac{d}{dv_*} (G_j^t)^* \right) = -\omega |T^\eta|^2 \quad 3.285$$

maka, dengan persamaan (3.282):

$$|I^\eta|^2 - |R^\eta|^2 = \sqrt{\frac{\omega + m}{\omega - m}} |T^\eta|^2 \quad 3.286$$

karena didapatkan hubungan yang sama seperti pada (3.276), dilihat bahwa hasil adalah konsisten.

Sekarang seperti halnya dalam kasus medan skalar, untuk menganalisis keberadaan superradiasi memerlukan arus fisik. Maka digunakan arus jumlah partikel untuk menggambarkan pergerakan atau aliran partikel fermion dalam suatu medium atau sistem. Dalam hal ini diberikan oleh:

$$J^\mu = \frac{1}{2} \bar{\Psi} G^\mu \Psi \quad 3.287$$

arus ini adalah *Noether's Conserved Current* yang terkait dengan simetri U(1) dari medan skalar Ψ . Kemudian dapat ditunjukkan bahwa arus ini dikekalkan secara kovarian.

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu J^\mu &= \frac{1}{2} [(D_\mu \bar{\Psi}) G^\mu \Psi + \bar{\Psi} G^\mu (D_\mu \Psi)] = \frac{1}{2} [(\tilde{D}_\mu^* \bar{\Psi}) G^\mu \Psi + \bar{\Psi} G^\mu (\tilde{D}_\mu \Psi)] \\
&= \frac{i}{2} (m - m) \bar{\Psi} \Psi = 0
\end{aligned}
\tag{3.288}$$

menggunakan generalisasi persamaan (3.88) untuk kasus dimana terdapat medan elektromagnetik dan konjugat hermitian dari persamaan tersebut dikalikan dengan γ^0 . Operator turunan \tilde{D}_μ mencakup istilah kopling minimal elektromagnetik. Dapat juga digunakan bahwa:

$$\nabla_\mu G^\mu = \gamma^a D_\mu e_a^\mu = 0 \tag{3.289}$$

karena dapat ditunjukkan bahwa kecocokan koneksi affine dengan metrik tersebut menyiratkan bahwa:

$$D_\mu e_a^\mu = 0 \tag{3.290}$$

sekarang, dilanjutkan dengan cara yang sama seperti yang telah dilakukan pada kasus medan skalar. Jadi, fluks \mathcal{F} dari arus jumlah partikel yang mengalir keluar dari permukaan bola berjari-jari r dengan $r \rightarrow \infty$ adalah:

$$\mathcal{F} = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{S_r} d\Omega r^2 J^r \tag{3.291}$$

arus jumlah partikel yang datang adalah

$$(J^r)^i = \frac{1}{2} \bar{\Psi}^i G^r (\Psi)_i = \frac{1}{2} (\Psi_i)^\dagger \gamma^0 \gamma^r \Psi_i \tag{3.292}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2r^2} \sum_{j,k} \sum_{j',k'} \left[(I^+)^* \left(\left(x_{j-\frac{1}{2}}^k \right)^\dagger - \sqrt{\frac{\omega-m}{\omega+m}} \left(x_{j+\frac{1}{2}}^k \right)^\dagger \right) \right. \\
&\quad \left. + (I^-)^* \left(\left(x_{j+\frac{1}{2}}^k \right)^\dagger - \sqrt{\frac{\omega-m}{\omega+m}} \left(x_{j-\frac{1}{2}}^k \right)^\dagger \right) \right] \\
&\quad \left[I'^+ \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{\omega-m}{\omega+m}} x_{j'-\frac{1}{2}}^{k'} \\ x_{j'+\frac{1}{2}}^{k'} \end{pmatrix} + I'^- \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{\omega-m}{\omega+m}} x_{j'+\frac{1}{2}}^{k'} \\ x_{j'-\frac{1}{2}}^{k'} \end{pmatrix} \right]
\end{aligned}$$

dan arus yang dipantulkan diberikan oleh

$$\begin{aligned}
(J^r)^r &= \frac{1}{2} \bar{\Psi}^r{}_i G^r (\Psi)_i^r = \frac{1}{2} (\Psi_i^r)^\dagger \gamma^0 \gamma^r \Psi_i^r \\
&= \frac{1}{2r^2} \sum_{j,k} \sum_{j',k'} \left[(R^+)^* \left(\left(x_{j-\frac{1}{2}}^k \right)^\dagger \sqrt{\frac{\omega-m}{\omega+m}} \left(x_{j+\frac{1}{2}}^k \right)^\dagger \right) \right. \\
&\quad \left. + (R^-)^* \left(\left(x_{j+\frac{1}{2}}^k \right)^\dagger \sqrt{\frac{\omega-m}{\omega+m}} \left(x_{j-\frac{1}{2}}^k \right)^\dagger \right) \right] \tag{3.293} \\
&\quad \left[R'^+ \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\omega-m}{\omega+m}} x_{j'-\frac{1}{2}}^{k'} \\ x_{j'+\frac{1}{2}}^{k'} \end{pmatrix} + R'^- \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\omega-m}{\omega+m}} x_{j'+\frac{1}{2}}^{k'} \\ x_{j'-\frac{1}{2}}^{k'} \end{pmatrix} \right]
\end{aligned}$$

dimana menggunakan $G^r = \gamma^r$ di wilayah I, karena metrik RN datar secara asimtotik. Dengan hubungan ortonormalitas dari harmonik bola spinor, fluks arus datang (\mathcal{F}^i) adalah:

$$\mathcal{F}^i = -\sqrt{\frac{\omega-m}{\omega+m}} \sum_{j,k} (|I^+|^2 + |I^-|^2) \tag{3.294}$$

dan fluks arus pantul (\mathcal{F}^r) adalah:

$$\mathcal{F}^r = \sqrt{\frac{\omega - m}{\omega + m}} \sum_{j,k} (|R^+|^2 + |R^-|^2) \quad 3.295$$

kemudian dibandingkan kuantitasnya

$$\left| \frac{\mathcal{F}^r}{\mathcal{F}^i} \right| = \frac{|R^+|^2 + |R^-|^2}{|I^+|^2 + |I^-|^2} = 1 - \sqrt{\frac{\omega + m}{\omega - m}} \frac{|T^+|^2 + |T^-|^2}{|I^+|^2 + |I^-|^2} \quad 3.296$$

$$\left| \frac{\mathcal{F}^r}{\mathcal{F}^i} \right| \leq 1$$

$$\mathcal{F}^r \leq \mathcal{F}^i$$

dimana menggunakan hubungan (3.272) dalam persamaan terakhir.

Amplifikasi superradiasi terjadi ketika nilai absolut fluks arus yang dipantulkan pada $r = +\infty$ lebih besar daripada arus yang datang, atau dalam istilah matematis menunjukkan $|\mathcal{F}^r| > |\mathcal{F}^i|$. Dimana arus pantul (r) adalah arus yang keluar dari ergoregion dan arus yang datang (i) adalah arus yang masuk ke dalam ergoregion menuju lubang hitam. Hal ini dikarenakan adanya transfer energi dan momentum sudut dari lubang hitam ke partikel yang dipantulkan. Partikel yang masuk dengan energi dan momentum sudut tertentu ke dalam ergoregion lubang hitam akan berinteraksi dengan *frame dragging* atau penarikan bingkai yang disebabkan oleh putaran lubang hitam. Dimana *frame dragging* mengacu pada fenomena dimana bingkai acuan inersial di sekitar objek masif yang berputar akan ikut tertarik untuk berputar seiring dengan rotasi objek tersebut. Sebagian energi dan momentum sudut dari partikel fermion diserap oleh lubang hitam, menyebabkan lubang hitam berputar lebih cepat. Namun, sebagian energi dan momentum sudut lainnya dipantulkan kembali ke luar lubang hitam dalam bentuk

radiasi atau partikel. Radiasi atau partikel yang dipantulkan ini memiliki energi dan momentum sudut yang lebih besar dibandingkan dengan partikel awal yang masuk. Kelebihan energi dan momentum sudut ini berasal dari transfer sebagian energi rotasi lubang hitam ke partikel yang dipantulkan. Dengan kata lain, lubang hitam berputar memberikan sebagian rotasinya kepada partikel yang dipantulkan, menyebabkan partikel tersebut memiliki energi dan momentum sudut yang lebih besar dibandingkan saat masuk. Seperti yang dapat diketahui dari kuantitas di atas yang telah dievaluasi memiliki $|\mathcal{F}^r| \leq |\mathcal{F}^i|$. Hal ini menunjukkan bahwa medan Dirac tidak menunjukkan superradiasi pada latar belakang RN. Hasil seperti ini dikenal sebagai batas dari latar belakang Kerr-Newman yang lebih umum. Namun, disini mengerjakan dengan cara yang lebih sederhana, dengan memanfaatkan simetri bola RN untuk memisahkan persamaan Dirac dan memisahkan medan dengan perubahan variabel yang sesuai.

3.5 Persamaan Medan Dirac non-Linier pada Ruang-waktu Reissner-Nordstrom

Pada bagian ini akan mempertimbangkan hamburan kondensat fermion dalam RN dan menunjukkan bahwa terdapat solusi yang menunjukkan adanya superradiasi. Namun, pertama-tama ditunjukkan bahwa persamaan Dirac dalam ruang waktu melengkung dapat diperoleh dari aksi:

$$S_{Dirac} = \int dx^4 \sqrt{-g} [i\bar{\Psi} G^\mu \tilde{D}_\mu \Psi - m\bar{\Psi}\Psi] \quad 3.297$$

dimana m adalah massamedan Dirac dan $\tilde{D}_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu - \Gamma_\mu$, dengan $e > 0$ adalah muatan listik medan dan Γ_μ adalah koneksi spin yang telah dijabarkan

padabagian sebelumnya. Jadi, persamaan (3.88) dan konjugat hermitiannya yang dikalikan dengan γ^0 dapat diperoleh dengan memvariasikan aksi pada $\bar{\Psi}$ dan Ψ .

Sekarang, akan dipertimbangkan teori Dirac non-linier yang sama dengan teori pada paradoks Klein. Tetapi karena penelitian ini berada di ruang waktu melengkung, maka perlu menggunakan operator turunan yang digeneralisasi. Kemudian dipelajari teori yang dijelaskan oleh aksi:

$$S = \int dx^4 \sqrt{-g} \left[i\bar{\Psi} G^\mu \tilde{D}_\mu \Psi - m\bar{\Psi}\Psi - \frac{\lambda}{2} (\bar{\Psi}\Psi)^2 \right] \quad 3.298$$

dengan kopling

$$\kappa(r) = \tilde{\kappa} e^2 A_\mu A^\mu = \tilde{\kappa} e^2 \frac{Q^2}{r^2} > 0 \quad 3.299$$

dimana $\tilde{\kappa} > 0$ adalah konstanta real. Dengan aksi ini kemudian menggunakan tetrad RN yang sama dan vektor kovarian konstan a_α dari bagian sebelumnya, diperoleh persamaan Dirac:

$$\left[\gamma^0 \left(\frac{i}{S(r)} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{e}{S(r)} V(r) \right) + \gamma^r \left(iS(r) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r} (S(r) - 1) + \frac{i}{2} S'(r) \right) \right. \quad 3.300 \\ \left. + i\gamma^\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + i\gamma^\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} - m - \kappa \bar{\Psi}\Psi \right] \Psi = 0$$

karena pada hal ini lebih mementingkan eksistensi daripada yang umum, maka dipertimbangkan ansatz:

$$\Psi(t, r, \theta, \varphi) = N e^{-i\omega t} \frac{S^{-1/2}}{r} \begin{pmatrix} x_{j-1/2}^k(\theta, \varphi) F(r) \\ i x_{j+1/2}^k(\theta, \varphi) G(r) \end{pmatrix} \quad 3.301$$

dengan $j = k = +\frac{1}{2}$. kemudian memsubstitusikan ansatz ini ke dalam persamaan

Dirac (3.300), maka memperoleh:

$$S \frac{d}{dr} F - \frac{1}{r} F = - \left(\frac{\omega - eV}{S} + m + \frac{\lambda}{4\pi r^2 S} |N^2| (|F|^2 - |G|^2) \right) G \quad 3.302$$

$$S \frac{d}{dr} G - \frac{1}{r} G = \left(\frac{\omega - eV}{S} - m - \frac{\lambda}{4\pi r^2 S} |N^2| (|F|^2 - |G|^2) \right) F \quad 3.303$$

dimana menggunakan prosedur yang sama persis dengan bagian sebelumnya dengan mensubstitusi $m \rightarrow m + \lambda \bar{\Psi}\Psi$ dan fakta bahwa untuk $j = k = +\frac{1}{2}$

$$(x_{j-1/2}^k)^\dagger x_{j-1/2}^k = \frac{1}{4\pi} \quad 3.304$$

$$(x_{j+1/2}^k)^\dagger x_{j+1/2}^k = \frac{1}{4\pi} \quad 3.305$$

maka,

$$\bar{\Psi}\Psi = \frac{1}{4\pi r^2 S} |N^2| (|F|^2 - |G|^2) \quad 3.306$$

untuk ansatz pada (3.301), dengan mengubah variabel menjadi $u_*(r)$

$$\frac{du_*}{dr} = \frac{1 - \frac{eV}{\omega} + \frac{\tilde{m}S}{\omega}}{S^2} \quad 3.307$$

dimana

$$\tilde{m} = m + \frac{\lambda}{4\pi r^2 S} |N^2| (|F|^2 - |G|^2) \quad 3.308$$

diperoleh:

$$\frac{d^2}{du_*^2} F - \left[\frac{d}{du_*} \left(\frac{1}{r} \frac{S}{1 - \frac{eV}{\omega} + \frac{\tilde{m}S}{\omega}} \right) - \omega^2 \left(\frac{1 - \frac{eV}{\omega} - \frac{\tilde{m}S}{\omega}}{1 - \frac{eV}{\omega} + \frac{\tilde{m}S}{\omega}} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{S}{1 - \frac{eV}{\omega} + \frac{\tilde{m}S}{\omega}} \right)^2 \right] F = 0 \quad 3.309$$

dengan cara yang sama, jika mengubah variabel mejadi $v_*(r)$

$$\frac{dv_*}{dr} = \frac{1 - \frac{eV}{\omega} - \frac{\tilde{m}S}{\omega}}{S^2} \quad 3.310$$

diperoleh:

$$\frac{d^2}{dv_*^2} G + \left[\frac{d}{dv_*} \left(\frac{1}{r} \frac{S}{1 - \frac{eV}{\omega} - \frac{\tilde{m}S}{\omega}} \right) + \omega^2 \left(\frac{1 - \frac{eV}{\omega} + \frac{\tilde{m}S}{\omega}}{1 - \frac{eV}{\omega} - \frac{\tilde{m}S}{\omega}} \right) - \frac{1}{r^2} \left(\frac{S}{1 - \frac{eV}{\omega} - \frac{\tilde{m}S}{\omega}} \right)^2 \right] G = 0 \quad 3.311$$

Seperti pada bagian sebelumnya, menunjukkan bahwa akan kehilangan informasi ketika memisahkan persamaan (3.302) dan (3.303). kemudian F dan G memenuhi persamaan (3.309) dan (3.311), tetapi semua persamaan tersebut juga harus memnuhi persamaan (3.302) dan (3.303). Sekarang perlu mempelajari perilaku F dan G di wilayah I dan II.

3.5.1 Perilaku Asimtotik di wilayah I : $r = +\infty$

Karena di daerah ini koefisien κ lenyap, maka pada daerah ini mengikuti cara yang sama dengan kasus teori Dirac linier pada bagian (3.188) dan memiliki solusi gelombang datang:

$$\Psi^i = \frac{I}{r} \exp \left[-i \left(\omega t + \epsilon \sqrt{\omega^2 - m^2 r} \right) \right] \begin{pmatrix} x_{j-1/2}^k \\ -\sqrt{\frac{\omega - m}{\omega + m}} x_{j+1/2}^k \end{pmatrix} \quad 3.312$$

dan solusi gelombang pantul adalah:

$$\Psi^r = \frac{R}{r} \exp \left[-i \left(\omega t + \epsilon \sqrt{\omega^2 - m^2 r} \right) \right] \begin{pmatrix} x_{j-1/2}^k \\ \sqrt{\frac{\omega - m}{\omega + m}} x_{j+1/2}^k \end{pmatrix} \quad 3.313$$

dengan $\epsilon = \text{sign}(\omega + m)$ dan $j = k = +\frac{1}{2}$. kemudian I dan R adalah konstanta kompleks.

3.5.2 Perilaku Asimtotik di wilayah II : $r = r_+$

Pada wilayah ini mencari solusi dalam bentuk:

$$\Psi^t = T e^{i\omega t} \frac{S^{-1/2}}{r} \begin{pmatrix} x_{j-1/2}^k(\theta, \varphi) F^t \\ x_{j+1/2}^k(\theta, \varphi) G^t \end{pmatrix} \quad 3.314$$

dengan $j = k = +\frac{1}{2}$ dan T adalah sebuah konstanta kompleks. Selanjutnya diasumsikan bahwa solusi ini memiliki $|F^t| = 1$ dan $G^t = i\eta F^t$, dengan η adalah sebuah konstanta riil. Kemudian memeriksa apakah asumsi-asumsi ini berlaku, dengan menggunakan:

$$\lim_{r \rightarrow r_+} S = \lim_{r \rightarrow r_+} \sqrt{\frac{r_+ - r_-}{r_+}} \sqrt{r - r_+} = 0 \quad 3.315$$

$$\lim_{r \rightarrow r_+} V = V_+ = \frac{Q}{r_+}$$

memperoleh bahwa persamaan (3.309), di wilayah ini berbunyi:

$$\frac{d^2}{du_*} F^t + \omega^2 \left(\frac{\omega - eV_+ - \bar{\lambda} |T|^2 (1 - \eta^2)}{\omega - eV_+ + \bar{\lambda} |T|^2 (1 - \eta^2)} \right) F^t = 0 \quad 3.316$$

dengan

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{4\pi r_+^2} \quad 3.317$$

dan jika mengintegrasikan relasi persamaan (3.307), memiliki:

$$u_*(r) = \frac{r_+^2}{\omega(r_+ - r_-)} [\omega - eV_+ + \bar{\lambda} |T|^2 (1 - \eta^2)] \log(r - r_+) \quad 3.318$$

jika mengubah koordinat menjadi $r_*(r)$ maka:

$$r_*(r) = \frac{r_+^2}{r_+ - r_-} \log(r - r_+) \quad 3.319$$

dilihat bahwa persamaan (3.316) berbunyi

$$\frac{d^2}{dr_*^2} F^t + [(\omega - eV_+)^2 - \bar{\lambda}^2 |T|^4 (1 - \eta^2)^2] F^t = 0 \quad 3.320$$

solusi umum dari persamaan di atas adalah

$$F^t = \tilde{a} e^{isr_*} + \tilde{b} e^{-isr_*} \quad 3.321$$

dengan

$$s^2 = (\omega - eV_+)^2 - \bar{\kappa}^2 |T|^4 (1 - \eta^2)^2 \quad 3.322$$

dengan cara yang sama, di wilayah ini, persamaan (3.311) berbunyi:

$$\frac{d^2}{du_*^2} G^t + \omega^2 \left(\frac{\omega - eV_+ + \bar{\kappa} |T|^2 (1 - \eta^2)}{\omega - eV_+ - \bar{\kappa} |T|^2 (1 - \eta^2)} \right) G^t = 0 \quad 3.323$$

dan mengintegrasikan hubungan (3.310) maka diperoleh

$$v_*(r) = \frac{r_+^2}{\omega(r_+ - r_-)} [\omega - eV_+ - \bar{\kappa} |T|^2 (1 - \eta^2) \log(r - r_+)] \quad 3.324$$

dengan menggunakan koordinat $r_*(r)$, persamaan (3.323) berbunyi

$$\frac{d^2}{dr_*^2} G^t + [(\omega - eV_+)^2 - \bar{\kappa}^2 |T|^4 (1 - \eta^2)^2] G^t = 0 \quad 3.325$$

solusi umum dari persamaan ini adalah

$$G^t = \tilde{c} e^{isr_*} + \tilde{d} e^{-isr_*} \quad 3.326$$

Sekarang menggunakan persamaan (3.302) dan (3.303) untuk menulis \tilde{c} dan \tilde{d} sebagai fungsi dari \tilde{a} dan \tilde{b} . Jadi dengan mensubsitusikan solusi pada persamaan (3.302) dan (3.303), maka mendapatkan:

$$-i \frac{s}{\omega - eV_+ + \bar{\kappa} |T|^2 (1 - \eta^2)} (\tilde{a} e^{isr_*} - \tilde{b} e^{-isr_*}) = \tilde{c} e^{isr_*} + \tilde{d} e^{-isr_*} \quad 3.327$$

$$-i \frac{\omega - eV_+ + \bar{\kappa} |T|^2 (1 - \eta^2)}{s} (\tilde{a} e^{isr_*} - \tilde{b} e^{-isr_*}) = \tilde{c} e^{isr_*} + \tilde{d} e^{-isr_*} \quad 3.328$$

diasumsikan bahwa s adalah nyata. Kemudian mudah untuk melihat bahwa kedua persamaan diatas setara dan keduanya menyatakan bahwa:

$$\tilde{c} = -i \frac{\omega - eV_+ - \bar{\kappa} |T|^2 (1 - \eta^2)}{s} \tilde{a} \quad 3.329$$

$$\tilde{d} = i \frac{\omega - eV_+ - \bar{\kappa} |T|^2 (1 - \eta^2)}{s} \tilde{b} \quad 3.330$$

jadi, solusi yang dapat dituliskan adalah

$$\Psi^t = T e^{-i(\omega t + s r_*)} \frac{1}{\sqrt{r_+} (r - r_+)^{\frac{1}{4}} (r_+ - r_-)^{\frac{1}{4}}} \begin{pmatrix} x_{j-1/2}^k(\theta, \varphi) \\ -\eta x_{j+1/2}^k(\theta, \varphi) \end{pmatrix} \quad 3.331$$

dengan $j = k = +\frac{1}{2}$. Dimana η dan s memenuhi persamaan (3.322)

$$(\omega - eV_+) - \bar{\kappa} |T|^2 (1 - \eta^2) - \eta s = 0 \quad 3.332$$

perhatikan bahwa persamaan yang dipenuhi oleh η dan s sama dengan persamaan solusi klein paradox dengan substitusi:

$$\begin{aligned} \lambda &\rightarrow \bar{\kappa} \\ \tilde{V} &\rightarrow V_+ \end{aligned} \quad 3.333$$

seperti pada bagian sebelumnya, untuk menunjukkan bahwa persamaan (3.322)

dan (3.332) menyiratkan bahwa

$$(\eta^2 + 1)s^2 - 2\eta s(\omega - eV_+) = 0 \quad 3.334$$

maka dapat menunjukkan bahwa persamaan (3.332) dan (3.334) menerima solusi tertentu:

$$s = 0 \quad 3.335$$

$$\eta = -\sqrt{1 - \frac{\omega - eV_+}{\bar{\kappa} |T|^2}} < 0 \quad 3.336$$

dengan ω memenuhi

$$\omega < eV_+ + \bar{\kappa} |T|^2 \quad 3.337$$

3.5.3 Mencari fluks arus dengan kekekalan arus

Untuk mencari keberadaan Superradiasi dengan cara lain yaitu dengan mempertimbangkan teori medan Dirac non-linier, di sini menggunakan metode alternatif yang serupa dengan metode pada refensi (Kim, 2008), yang menggunakan teorema Gauss untuk memeriksa keberadaan amplifikasi superradiasi. Dengan metode ini dapat diperoleh hasil yang serupa dengan menggunakan arus konservatif secara matematis. Jadi, dalam beberapa hal, metode ini berfungsi sebagai pemeriksaan konsistensi terhadap hasil.

Untuk menganalisis munculnya superradiasi, digunakan arus nomor partikel yang sama dengan bagian sebelumnya. Sekali lagi, dalam kasus non-linier ini, arus ini adalah arus kekal Noether yang terkait dengan simetri U(1) dari Ψ . Kemudian mudah untuk menunjukkan bahwa arus ini secara kovarian dikekalkan:

$$\nabla_\mu J^\mu = \frac{1}{2} [(D_\mu \bar{\Psi}) G^\mu \Psi + \bar{\Psi} G^\mu (D_\mu \Psi)] \quad 3.338$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} [(\tilde{D}_\mu^* \bar{\Psi}) G^\mu \Psi + \bar{\Psi} G^\mu (\tilde{D}_\mu \Psi)] \\
&= \frac{i}{2} (m + \lambda \bar{\Psi} \Psi - m - \lambda \bar{\Psi} \Psi) \bar{\Psi} \Psi = 0
\end{aligned}$$

dimana menggunakan $D_\mu G^\mu = 0$ (untuk alasan yang sama seperti yang dibahas pada bagian sebelumnya) dan bahwa λ dan $\bar{\Psi} \Psi$ adalah real. Maka dapat dilihat bahwa $\bar{\Psi} \Psi$ adalah real dari hubungan (3.306).

Pertimbangkan sekarang pada wilayah tertutup ruang-waktu \mathcal{U} , dibatasi oleh dua irisan waktu konstan x_1 pada t dan x_2 pada $t + \delta t$, dengan x_2 yang diperoleh oleh terjemahan waktu dari x_1 , dan oleh dua permukaan *hypersurfaces* yang mirip waktu $S_{r \sim r_+}$ (bola dengan jari-jari $r \sim r_+$) dan S_∞ (bola dengan jari-jari $r \rightarrow +\infty$). Satuan normal n_μ ke batas $\partial \mathcal{U}$ mengarah ke dalam lubang hitam pada $S_{r \sim r_+}$ dan ke luar hingga tak terhingga pada S_∞ . Pada x_1 , satuan normal n_μ mengarah ke masa depan dan x_2 ke masa lalu. Jadi, digunakan teorema Gauss untuk menunjukkan:

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\mathcal{U}} d^4 x \sqrt{g} \nabla_\mu J^\mu = \int_{\partial \mathcal{U}} d^3 x \sqrt{h} J^\mu n_\mu \\
&= \int_{S_{r \sim r_+}} d^3 x \sqrt{h} J^\mu n_\mu + \int_{S_\infty} d^3 x \sqrt{h} J^\mu n_\mu + \int_{x_1} d^3 x \sqrt{h} J^\mu n_\mu \\
&\quad + \int_{x_2} d^3 x \sqrt{h} J^\mu n_\mu
\end{aligned} \tag{3.339}$$

dengan $h_{\mu\nu}$ adalah metrik terinduksi pada batas $\partial \mathcal{U}$. Karena satu-satunya ketergantungan Ψ pada t adalah $e^{-i\omega t}$, maka dapat dilihat bahwa dua suku terakhir

dari persamaan diatas adalah simetris dan jumlah keduanya lenyap. Jadi persamaan diatas mengimplikasikan bahwa:

$$\int_{S_{r \sim r_+}} d\Omega r_+^2 J^r = \int_{S_\infty} d\Omega r_+^2 J^r \quad 3.340$$

dimana mengambil turunan dalam t dari persamaan (3.339) dan menggunakannya pada $S_{r \sim r_+}$:

$$\sqrt{h} = \sqrt{r - r_+} \sqrt{r_+ - r_-} r_+ \sin \theta \quad 3.341$$

$$n_\mu = \frac{r_+}{\sqrt{r - r_+} \sqrt{r_+ - r_-}} \delta_\mu^r \quad 3.342$$

dan pada S_∞ , mendapatkan

$$\sqrt{h} = r_+^2 \sin \theta \quad 3.343$$

$$n_\mu = \delta_\mu^r \quad 3.344$$

dengan kondisi ortonormalitas dari harmonisa spinor, dapat ditunjukkan bahwa

$$\mathcal{F}_\infty = \int_{S_\infty} d\Omega r_+^2 J^r = \int_{S_\infty} d\Omega r_+^2 [(J^r)^i + (J^r)^r] = \mathcal{F}^i + \mathcal{F}^r \quad 3.345$$

dimana $(J^r)^i$ dan $(J^r)^r$ adalah arus radial yang terkait dengan Ψ^i dan Ψ^r . Kemudian mendefinisikan fluks yang ditransmisikan:

$$\mathcal{F}_{r \sim r_+} = \int_{S_{r \sim r_+}} d\Omega r_+^2 J^r = \int_{S_{r \sim r_+}} d\Omega r_+^2 (J^r)^t = \mathcal{F}^t \quad 3.346$$

dimana $(J^r)^t$ adalah arus radial yang terkait dengan Ψ^t .

kemudian dengan hubungan (3.340) memiliki:

$$\mathcal{F}^i + \mathcal{F}^r = \mathcal{F}^t \quad 3.347$$

arus nomor partikel yang datang dan yang dipantulkan sama dengan yang ditranslasi, karena kopling non-linier lenyap di wilayah itu. Jadi, arus ini diberikan oleh:

$$\begin{aligned} (J^r)^i &= \frac{1}{2} \bar{\Psi}^i G^r(\Psi)^i \\ &= \frac{1}{2r^2} \left[(I^+)^* \left(\left(x_{j-\frac{1}{2}}^k \right)^\dagger - \sqrt{\frac{\omega-m}{\omega+m}} \left(x_{j+\frac{1}{2}}^k \right)^\dagger \right) \right. \\ &\quad \left. + (I^-)^* \left(\left(x_{j+\frac{1}{2}}^k \right)^\dagger - \sqrt{\frac{\omega-m}{\omega+m}} \left(x_{j-\frac{1}{2}}^k \right)^\dagger \right) \right] \quad 3.348 \end{aligned}$$

$$\left[I^+ \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{\omega-m}{\omega+m}} x_{j-\frac{1}{2}}^k \\ x_{j+\frac{1}{2}}^k \end{pmatrix} + I^- \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{\omega-m}{\omega+m}} x_{j+\frac{1}{2}}^k \\ x_{j-\frac{1}{2}}^k \end{pmatrix} \right]$$

dan

$$\begin{aligned} (J^r)^r &= \frac{1}{2} \bar{\Psi}^r G^r(\Psi)^r \\ &= \frac{1}{2r^2} \left[(R^+)^* \left(\left(x_{j-\frac{1}{2}}^k \right)^\dagger \sqrt{\frac{\omega-m}{\omega+m}} \left(x_{j+\frac{1}{2}}^k \right)^\dagger \right) \right. \\ &\quad \left. + (R^-)^* \left(\left(x_{j+\frac{1}{2}}^k \right)^\dagger \sqrt{\frac{\omega-m}{\omega+m}} \left(x_{j-\frac{1}{2}}^k \right)^\dagger \right) \right] \quad 3.349 \end{aligned}$$

$$\left[R^+ \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\omega - m}{\omega + m}} x_{j-\frac{1}{2}}^k \\ x_{j+\frac{1}{2}}^k \end{pmatrix} + R^- \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\omega - m}{\omega + m}} x_{j+\frac{1}{2}}^k \\ x_{j-\frac{1}{2}}^k \end{pmatrix} \right]$$

dimana menggunakan $j = k = +\frac{1}{2}$. Arus radial nomor partikel yang ditransmisikan adalah

$$\begin{aligned} (J^r)^t &= \frac{1}{2} \bar{\Psi}^t G^r (\Psi)^t \\ &= \frac{|T|^2}{2r_+^2} \left(\begin{pmatrix} x_{j-\frac{1}{2}}^k \end{pmatrix}^\dagger - \eta \begin{pmatrix} x_{j+\frac{1}{2}}^k \end{pmatrix}^\dagger \right) \begin{pmatrix} -\eta x_{j-\frac{1}{2}}^k \\ x_{j+\frac{1}{2}}^k \end{pmatrix} \\ &= -\frac{|T|^2}{4\pi r_+^2} \eta \end{aligned} \quad 3.350$$

dimana menggunakan $G^r = S\gamma^r$ dan hubungan (3.204), (3.205). Jadi fluks arus bilangan partikel diberikan oleh

$$\mathcal{F}^i = -\sqrt{\frac{\omega - m}{\omega + m}} (|I^+|^2 + |I^-|^2) \quad 3.351$$

$$\mathcal{F}^r = \sqrt{\frac{\omega - m}{\omega + m}} (|R^+|^2 + |R^-|^2) \quad 3.352$$

dan

$$\mathcal{F}^t = -|T|^2 \eta \quad 3.353$$

dimana menggunakan hubungan ortonormalitas dari harmonisa spinor. Kemudian memperoleh bahwa

$$\left| \frac{\mathcal{F}^r}{\mathcal{F}^i} \right| = \left| 1 - \frac{\mathcal{F}^t}{\mathcal{F}^i} \right| = 1 - \eta \sqrt{\frac{\omega - m}{\omega + m}} \frac{|T|^2}{|I^+|^2 + |I^-|^2} > 1$$

$$\left| \frac{\mathcal{F}^r}{\mathcal{F}^i} \right| > 1 \quad 3.354$$

$$\mathcal{F}^r > \mathcal{F}^i$$

dimana dapat menggunakan hubungan (3.347) dan $\eta < 0$ dalam rezim yang sedang dipertimbangkan. Dengan demikian dapat dilihat bahwa dalam kasus non-linier ini terdapat solusi dengan $|\mathcal{F}^r| > |\mathcal{F}^i|$ untuk:

$$\omega < eV_+ + \bar{\kappa} |T|^2 \quad 3.355$$

Hal ini telah menunjukkan pada pada latar belakang *Reissner Nordstrom* terdapat partikel fermion dengan kasus non-linier yang dapat menunjukkan adanya Superradiasi. Jika ditinjau dengan hukum kekekalan energi, dimana arus masuk sama dengan arus keluar maka berbeda dalam kasus superradiasi lubang hitam, diperoleh bahwa arus yang keluar atau dipantulkan lebih besar daripada arus yang masuk. Hal ini dikarenakan pada arus transmisi didefinisikan sebagai arus negatif. Arus transmisi yang negatif menunjukkan bahwa energi potensial gravitasi di sekitar lubang hitam memiliki efek kelengkungan ruang-waktu yang sangat ekstrem. Dengan kata lain energi yang masuk mendekati ke lubang hitam dianggap hilang dari perspektif pengamat eksternal karena energi tersebut harus digunakan untuk melawan gravitasi yang sangat kuat.

Dalam mekanika kuantum, fluks mengacu pada aliran partikel atau energi melalui suatu area tertentu dalam waktu tertentu. Fluks partikel mengukur laju aliran partikel fermion melewati suatu area per satuan waktu. Ini dihitung dengan

mengintegrasikan komponen kerapatan arus partikel yang tegak lurus terhadap permukaan area tersebut. Fluks arus partikel fermion yang terbentuk dari produksi pasangan partikel-antipartikel di dekat horizon peristiwa lubang hitam dapat mengalami superradiasi. Partikel yang memiliki proyeksi momen sudut tertentu terhadap sumbu rotasi lubang hitam dapat mengambil energi dari lubang hitam dan melepaskannya dalam bentuk radiasi elektromagnetik yang sangat kuat. Maka dari itu sesuai dengan teori yang ada pada penelitian ini didapatkan fluks arus yang terpantul atau yang keluar dari lubang hitam lebih besar daripada fluks arus yang datang atau masuk.

Terdapat teori lain yang menghitung solusi Superradiasi. Salah satu contohnya adalah teori yang sama dengan yang digunakan dengan menghitung energi yang hilang dari lubang hitam, namun kali ini menggunakan konstanta kopling negatif $\tilde{\chi} < 0$. Terdapat fenomena lain yang serupa dengan superradiasi yaitu Radiasi Hawking dimana lubang hitam memancarkan radiasi termal akibat efek kuantum di dekat horizon peristiwa. Kemudian partikel tanpa rambut (*No-Hair*) dimana lubang hitam yang berputar pada akhirnya akan kehilangan sebagian putaran (*spin*) dan muatan listriknya melalui proses pemancar gelombang gravitasi dan elektromagnetik. Dalam kasus ruang datar, fenomena superradiasi juga dapat dikaitkan dengan penelitian efek *Casimir* yang mempertimbangkan dua kasus spesifik pelanggaran Lorentz: kasus vektor yang mirip waktu dan ruang. Perbedaan ini sangat penting karena mempengaruhi perilaku medan dan energi Casimir yang dihasilkan secara berbeda (Rohim et al., 2024).

Dengan demikian untuk pengembangan dari penelitian ini dibutuhkan perhitungan teori lebih dalam mengenai perubahan sifat-sifat fisik lubang hitam

yang diakibatkan oleh fenomena superradiasi yang pada dasarnya superadiasi menyebabkan lubang hitam kehilangan energi atau momentum rotasinya ke objek eksternal seperti medan elektromagnetik atau gelombang gravitasi. Oleh karena itu penelitian selanjutnya disarankan untuk menghitung dampaknya berupa perhitungan pengurangan massa, muatan, atau rotasi lubang hitam yang dapat merubah karakteristik dari lubang hitam seperti ukuran, bentuk dan kecepatan rotasi tergantung pada jumlah dan jenis energi atau momentum yang diambil oleh objek eksternal. Untuk kasus lubang hitam yang berbeda dapat dikaitkan pada penyelesaian persamaan Klein-Gordon dalam ruang-waktu lengkung yang dipengaruhi oleh gravitasi $F(R)$ dengan menggunakan pemisahan variabel untuk komponen waktu, radial, dan sudut (Romadani, 2023).

3.6 Lubang Hitam dalam Perspektif Al-Qur'an

Dalam Al-Qur'an Surat at-Takwir ayat 15 tentang sumpah Allah dengan bintang-bintang menunjukkan sebuah peristiwa yang luar biasa. Dalam kitab *Tafsir al-Ayat al-Kauniyah fi al-Qur'an al-Karim* Zaghلول mengatakan bahwa Maha suci Allah yang telah bersumpah dengan bintang-bintang yang tidak tampak, yang sangat kelam, yang tenggelam didalam kegelapan dan menjadikannya sebagai bagian fenomena yang membuat manusia mengetahui adanya fenomena meskipun tidak bisa melihatnya berbunyi:

فَلَا أَقْسِمُ بِالْخُنَّسِ (١٥) الْجَوَارِ الْكُنَّسِ (١٦)

“(15) Aku bersumpah demi bintang tersembunyi ; (16) Yang bergerak cepat yang menyapu

Berdasarkan penafsiran Zaghul al-Najjar pada surat at-Takwīr ayat 15-16 ada tiga kata yang menjadi dasar penafsiran. Yakni kata al-khunnas, al-jawāri, dan al-kunnas. Pertama, kata al-khunnas adalah bintang-bintang yang tidak tampak. Makna ini sesuai dengan fakta ilmiah bahwa bintang-bintang yang runtuh kedalam dirinya sendiri menjadi bintang yang tak terlihat. Bintang tersebut berwarna hitam sehingga tidak dapat dilihat dengan pandangan mata disebabkan berat massanya yang tersembunyi.

Kedua, makna al-jawāri adalah bergerak sangat cepat. Maksud dari makna ini adalah Black Hole mempunyai gravitasi yang sangat kuat mencegah segala apa pun lolos dari lubang hitam. Tidak ada sesuatu apa pun termasuk radiasi elektromagnetik yang dapat lolos dari gravitasinya. Materi yang teramat cepat tidak mampu meloloskan diri darinya seperti cahaya. Diketahui bahwa kecepatan cahaya mencapai 300.000 km/detik. Cahaya hanya dapat masuk akan tetapi tidak dapat keluar atau melewatinya. Ini menunjukkan gravitasi sebuah Black Hole tinggi sekali.

Ketiga, makna al-kunnas adalah hilangnya sesuatu dari permukaan sesuatu yang lain. Maksud dari ini sesuai dengan ilmu sains bahwa Black Hole menarik, dan membersihkan segala sesuatu yang di dekatnya. Seperti: bintang, planet, komet, meteor, dan lain sebagainya. Jika jarak antara benda dan lubang hitam hanya 6 juta km maka benda tersebut akan masuk kedalam lubang hitam. Zaghul mengatakan bahwa 90% materi kosmos tampak (yang merupakan zat galaksi biasa) adalah materi tersembunyi tidak bisa dilihat langsung oleh mata manusia, dan bahwa di antaranya materi tersebut adalah Black Holes, Undetected Brown Dwarfs, Dark

Matters, Sub Atomic Particles, dan bahwa massa bagian kosmos tampak diperkirakan lebih dari seratus kali lipat massa tampak.

Menurut Zaghلول Maha suci Allah yang telah menciptakan bintang-bintang dan menentukan fase-fase kehidupannya. Maha suci Allah yang menyampaikan bintang-bintang kepada fase *Black Hole* dan menjadikannya sebagai rahasia alam semesta yang luar biasa. Ungkapan yang lebih tepat adalah bintang yang tidak tampak dan selalu bersembunyi dengan sendirinya, yang bergerak cepat diluar angkasa. Ia menelan segala materi yang melewatinya dan masuk kedalam zona gravitasinya, yang bergerak pada garis edarnya (An-Najjar, 2010). Surat at-Takwir ayat 15-16 memiliki muhasabah dengan surat al-Gafir yang turun sebelumnya. Seperti Firman Allah:

لَخَلْقُ السَّمَاوَاتِ وَالْأَرْضِ أَكْبَرُ مِنْ خَلْقِ النَّاسِ وَلَكِنَّ أَكْثَرَ النَّاسِ لَا يَعْلَمُونَ (٥٧)

“Sesungguhnya penciptaan langit dan bumi lebih besar daripada penciptaan manusia akan tetapi kebanyakan manusia tidak mengetahui”(QS. Al-Gafir 40:57)

Makna arti ini adalah penciptaan langit dengan miliaran benda langit yang jauh lebih besar dari bumi yang ditinggali manusia dan juga bumi seisinya seperti gunung, sungai, flora, fauna, jauh lebih besar dan berat daripada pandangan manusia. Selanjutnya pada surat selanjutnya diterangkan bahwa benda-benda langit seperti matahari, bintang dan lainnya. Benda langit tersebut mempunyai garis edar. Surat tersebut berbunyi:

وَالسَّمَاءِ ذَاتِ الْحُبُكِ (٧)

“Demi langit yang mempunyai jalan-jalan”(QS. Az-Zariyat 51:7)

Arti makna yang dimaksud “jalan-jalan” adalah garis edar bintang, planet dan termasuk *Black Hole* yang berotasi. Begitu sebaliknya saat terjadi hari kiamat, semula yang kokoh akan hancur.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

1. Persamaan medan Dirac pada ruang waktu *Reissner–Nordström* sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 & \left(i\gamma^0 \left(\frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)}} \partial_t - \frac{1}{4} \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) \left(\frac{2M}{r^2} - \frac{2Q^2}{r^3} \right) \gamma^0 \gamma^1 \right) \right. \\
 & \quad + i\gamma^1 \left(\sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)} \partial_r \right) \\
 & \quad + i\gamma^2 \left(\frac{1}{r} \partial_\theta + \frac{1}{2r} \sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)} \gamma^2 \gamma^1 \right) \\
 & \quad \left. + i\gamma^3 \left(\frac{1}{r \sin \theta} \partial_\phi + \frac{1}{2r} \sqrt{f} \gamma^3 \gamma^1 + \frac{\cot \theta}{2r} \gamma^3 \gamma^2 \right) - \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r} - m \right) \psi = 0
 \end{aligned}$$

2. Perbandingan kuantitas fluks arus datang dan pantul pada hamburan medan Dirac yang menghadirkan fenomena Superradiasi untuk kasus medan Dirac non-linier adalah

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{\mathcal{F}^r}{\mathcal{F}^i} \right| &= \left| 1 - \frac{\mathcal{F}^t}{\mathcal{F}^i} \right| = 1 - \eta \sqrt{\frac{\omega - m}{\omega + m}} \frac{|T|^2}{|I^+|^2 + |I^-|^2} > 1 \\
 \left| \frac{\mathcal{F}^r}{\mathcal{F}^i} \right| &> 1 \\
 \mathcal{F}^r &> \mathcal{F}^i
 \end{aligned}$$

4.2 Saran

Penelitian selanjutnya dapat menggunakan fenomena superradiasi dari lubang hitam yang berbeda dan dalam persamaan yang berbeda pula serta membahas lebih lanjut dampak dari fenomena superradiasi.

DAFTAR PUSTAKA

- A, D. (2008). *Lecture on Quantum Field Theory*. World Scientific.
- Abbott, B. P., Abbott, R., Abbott, T. D., Abernathy, M. R., Acernese, F., Ackley, K., Adams, C., Adams, T., Addesso, P., Adhikari, R. X., Adya, V. B., Affeldt, C., Agathos, M., Agatsuma, K., Aggarwal, N., Aguiar, O. D., Aiello, L., Ain, A., Ajith, P., ... Zweizig, J. (2016). Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Physical Review Letters*, *116*(6), 1–16. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.061102>
- An-Najjar, Z. (2010). *Selekta dari Tafsir Ayat-ayat Kosmos dalam Al-Qur'an Al-Karim*, (Jilid 3). Shorouk International Bookshop.
- Arvanitaki, A., Baryakhtar, M., Dimopoulos, S., Dubovsky, S., & Lasenby, R. (2017). Black hole mergers and the QCD axion at Advanced LIGO. *Physical Review D*, *95*(4), 1–6. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.95.043001>
- Balakumar, V., Winstanley, E., Bernar, R. P., & Crispino, L. C. B. (2020). Quantum superradiance on static black hole space-times. *Physics Letters, Section B: Nuclear, Elementary Particle and High-Energy Physics*, *811*, 135904. <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2020.135904>
- Bañados, M., & Reyes, I. (2016). A short review on Noether's theorems, gauge symmetries and boundary terms. In *International Journal of Modern Physics D* (Vol. 25, Issue 10). <https://doi.org/10.1142/S0218271816300214>
- Bansawang BJ. (2015). *MODUL PEMBELAJARAN MATA KULIAH PENGANTAR TEORI MEDAN KUANTUM BERBASIS STUDENT CENTERED LEARNING (SCL)*.
- Benone, C. L., & Crispino, L. C. B. (2016). Superradiance in static black hole spacetimes. *Physical Review D*, *93*(2), 1–6. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.93.024028>
- Brito, R., Cardoso, V., & Pani, P. (2021). *Superradiance -- the 2020 Edition*. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-46622-0>
- Brito, R., Ghosh, S., Barausse, E., Berti, E., Cardoso, V., Dvorkin, I., Klein, A., & Pani, P. (2017). Gravitational wave searches for ultralight bosons with LIGO and LISA. *Physical Review D*, *96*(6), 1–23. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.96.064050>
- Cardoso, V., Coutant, A., Richartz, M., & Weinfurtner, S. (2016). Detecting Rotational Superradiance in Fluid Laboratories. *Physical Review Letters*, *117*(27), 1–11. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.117.271101>
- Chen, W.-X., & Zheng, Y.-G. (2023). *Fermions can also produce super-radiation phenomena*. <http://arxiv.org/abs/2307.13002>

- Kim, H. (2008). The absence of fermionic superradiance (a simple demonstration). *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2008(11). <https://doi.org/10.1088/1475-7516/2008/11/007>
- L. Parker, & D.Toms. (2009). *Field Theory in Curved Spacetime*. Cambridge University Press.
- Purwanto, A. (2016). *Fisika Kuantum Edisi 2 Revisi*. Penerbit Gava Media.
- R.D., K. (2013). *Student Friendly Quantum Field Theory*. Sandtrove.
- Rohim, A., Romadani, A., & Adam, A. S. (2024). Casimir Effect of Lorentz-Violating Charged Dirac Field in Background Magnetic Field. *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, 2024(3), 1–22. <https://doi.org/10.1093/ptep/ptae016>
- Romadani, A. (2023). *Solution of Klein-Gordon Equation in $F(R)$ Theory of Gravity*. 12(1), 31–41. <https://doi.org/10.24042/jipfalbiruni.v12i1.15340>
- Romadani, A., & Rani, E. (2020). Pengaruh Medan Elektromagnet terhadap Partikel Dirac dan Klein-Gordon dalam Potensial Penghalang Periodik Satu Dimensi. *JPSE (Journal of Physical Science and Engineering)*, 4(1), 8–17. <https://doi.org/10.17977/um024v4i12019p008>
- Rosa, J. G., & Kephart, T. W. (2018). Stimulated Axion Decay in Superradiant Clouds around Primordial Black Holes. *Physical Review Letters*, 120(23), 1–7. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.120.231102>
- Supriadi, B., Prihandono, T., Rizqiyah, V., Ridlo, Z. R., Faroh, N., & Andika, S. (2019). Angular momentum operator commutator against position and Hamiltonian of a free particle. *Journal of Physics: Conference Series*, 1211(1). <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1211/1/012051>
- Vicente, R., Cardoso, V., & Lopes, J. C. (2018). Penrose process, superradiance, and ergoregion instabilities. *Physical Review D*, 97(8), 1–20. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.97.084032>