APLIKASI RESIDU KOMPLEKS PADA PERSAMAAN DIFERENSIAL HOMOGEN CAUCHY- EULER ORDE DUA

SKRIPSI

Oleh:
YUDIA ISMAIL SYAFITRI
NIM: 04510047

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
JURUSAN MATEMATIKA
2009

APLIKASI RESIDU KOMPLEKS PADA PERSAMAAN DIFERENSIAL HOMOGEN CAUCHY- EULER ORDE DUA

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Universitas Islam Negeri Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan Dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:

YUDIA ISMAIL SYAFITRI

NIM : 04510047

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI

MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

JURUSAN MATEMATIKA

2009

APLIKASI RESIDU KOMPLEKS PADA PERSAMAAN DIFERENSIAL HOMOGEN CAUCHY- EULER ORDE DUA

SKRIPSI

Oleh:
YUDIA ISMAIL SYAFITRI

NIM : 04510047

Telah Disetujui untuk Diuji
Malang, 25 Juli 2009

Dosen Pembimbing I,	Dosen Pembimbing II,
Drs. H. Turmudi, M. Si	**Abdul Aziz, M. Si**
NIP. 150 209 630	**NIP. 150 377 256**

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M. Si
NIP. 150 318 321

APLIKASI RESIDU KOMPLEKS PADA PERSAMAAN DIFERENSIAL HOMOGEN CAUCHY- EULER ORDE DUA

SKRIPSI

Oleh:
YUDIA ISMAIL SYAFITRI
NIM : 04510047

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal, 25 Juli 2009

Susunan Dewan Penguji:		Tanda Tangan
1. Penguji Utama	: Drs. Usman Pagalay, M.Si NIP. 150 327 240	( )
2. Ketua	: Wahyu H. Irawan, M.Pd NIP. 150 300 415	( )
3. Sekretaris	: Drs. H. Turmudzi, M.Si NIP. 150 209 630	( )
4. Anggota	: Abdul Aziz, M. Si NIP. 150 377 256	( )

Mengetahui dan Mengesahkan

Kajur Matematika

Fakultas Sains dan Teknologi

Sri Harini, M.Si.
NIP. 150 318 321

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : YUDIA ISMAIL SYAFITRI

NIM : 04510047

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya.

Apabila dikemudian hari terbukti atau dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 25 Juli 2009
Yang membuat pernyataan

YUDIA ISMAIL SYAFITRI
NIM: 04510047

MOTTO

”Kita dapat menjadi berpengetahuan dengan pengetahuan orang lain, tetapi kita dapat menjadi bijaksana dengan menggunakan kearifan orang lain”

”Kedermawanan bukanlah memberikan kepada saya apa yang lebih saya butuhkan dari padamu, tetapi memberikan kepada saya apa yang lebih anda butuhkan pada yang saya perlukan”

Halaman Persembahan

Dengan Lantunan do'a dan untaian kata terimakasih yang tidak akan pernah putus hingga karya kecil ini ananda persembahkan kepada:

"Kedua orang tua

Bapak Moch. Zainol achirin dan Ibu Siti Aisyah Mz,

Dengan ihlas ananda dibesarkan

dengan tanpa mengharap imbalan, ananda dididik hingga sampai saat ini ananda dapat mengerti arti hidup.

Untuk Ayah Ibunda tercinta sungguh cinta, pengorbanan, kasih-sayang, perhatian dan jasa-jasamu tidak akan pernah ananda lupakan dan akan selalu terukir indah dalam kalbu.

Saudaraku tercinta Mas Yayak, Mbak Yanti dan Adik Tia,

Motivasi, cinta, dan kasih sayang-mu, dapat menenangkan hati-ku.

Teman-teman angkatan 2004

yang menjadi keluarga selama Dimas di Malang,

Kalian memberikan keceriaan yang akan selalu ku kenang ".

KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيْمِ

Alhamdulillah, puji syukur kehadirat Illahi Robbi, yang telah memberikan dan melimpahkan Rahmat, Taufiq dan Hidayah serta Inayah-Nya tiada henti dan tiada berbatas kepada penulis, tanpa itu semua penulis tidak dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik dan lancar.

Sholawat ma'a salam semoga senantiasa mengalun indah dan tulus terucap kepada Nabi Muhammad SAW, yang telah membimbing dan menuntun manusia dari jalan yang yang penuh dengan fenomena-fenomena duniawi yang penuh dengan kegelapan menuju jalan yang lurus dan penuh cahaya keindahan yang di ridhoi Allah SWT yaitu jalan menuju surga-Nya yang penuh dengan rahmat dan barokah.

Skripsi tersebut dapat disusun dan diselesaikan dengan baik karena dukungan, motivasi serta bimbingan dari berbagai pihak. Tiada kata dan perbuatan yang patut terucap dan terlihat untuk menguntai sedikit makna kebahagian diri. Oleh karena itu, izinkanlah penulis mengukirkan dan mengucapkan banyak terimakasih kepada:

1. Bapak Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor UIN Malang.
2. Bapak Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU.,D.Sc selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang.
3. Ibu Sri Harini, M.Si, selaku Ketua Jurusan Matematika.
4. Bapak Drs. H.Turmudi, M.Si. selaku Dosen Pembimbing yang telah memberikan bimbingan, arahan dan motivasi, sehingga penulis semangat dalam menyelesaikan skripsi ini. Suatu kehormatan kami dapat dibimbing Beliau.

5. Bapak Abdul Aziz, M.Si. selaku pembimbing agama yang telah meluangkan waktunya, menyalurkan ilmunya serta bimbingannya.
6. Bapak Harirur Rohman, M.Pd yang banyak memberi masukan dan motivasi dalam penulisan skripsi ini dan segenap Bapak/Ibu Dosen Fakultas Sains dan Teknologi, khususnya dosen jurusan Matematika yang pernah mendidik dan memberikan ilmunya yang tak ternilai harganya.
7. Kedua orang tua, dan semua keluarga besar penulis, yang telah mencurahkan dan memberikan kasih sayang, perhatian, motivasi dan kepercayaan penuh kepada penulis. Ucapan terimakasih serasa tidak cukup untuk menggambarkan dan melukiskan semuanya.
8. Temen-temen matematika seperjuangan angkatan 2004, banyak kenangan indah yang telah terukir. Kita sudah berjuang bersama dari semester 1, makasih banyak buat semuanya. Semoga kesuksesan menyertai kita.
9. Ibu dan bapak kos dan juga teman-teman kontrakan GAJAYANA Gg.5 (okta, nirwan, kriting, anas, asoy, muis, dan teman yang lainnya), makasih yah buat kebersamaannya.

Tiada kata yang patut diucapkan selain ucapan terimakasih yang sebesar-besarnya dan do'a semoga amal baik mereka mendapat Ridho dari Allah SWT. Amiin.

Malang, 27 Juli 2009

Penulis

DAFTAR ISI

ABSTRAK

Ismail Syafitri, Yudia. 2008. **Aplikasi Residu Kompleks pada Persamaan Diferensial Homogen Cauchy-Euler Orde Dua.** Skripsi, Fakultas Sains dan Teknologi, Jurusan Matematika, Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: Drs. H. Turmudzi, M.Si. dan Abdul Aziz, M. Si.

Kata Kunci: Persamaan Diferensial Linier Homogen Cauchy-Euler orde-2, Teorema Residu, Fungsi Kompleks

Persamaan diferensial merupakan sebuah persamaan yang mempunyai derivatif dari satu variabel terikat dan satu atau lebih vaiabel bebas. Untuk menyelesaikan persamaan diferensial kita perlu mengetahui terlebih dahulu klasifikasinya.Tidak semua

persoalan persamaan diferensial dapat diselesaikan dengan mudah, ada beberapa kesulitan dalam mencari penyelesaiannya. Untuk menyelesaikan persamaan diferensial yang perlu kita perhatikan adalah bentuk umum dari persamaan diferensial tersebut. Dalam skripsi ini penulis bertujuan untuk mendeskripsikan cara menyelesaikan persamaan diferensial homogen Cauchy-Euler orde-2 dengan menggunakan teorema residu.

Berdasarkan latar belakang tersebut maka pembahasan dalam skripsi ini bertujuan untuk mendeskripsikan cara menyelesaikan Persamaan Diferensial Homogen Cauchy-Euler orde-2 dengan Teorema Residu.

Metode yang digunakan dalam skripsi ini adalah studi literature (kepustakaan). Metode kepustakaan berarti mengumpulkan data dan informasi dengan bantuan bermacam-macam material yang terdapat di ruangan perpustakaan: buku-buku, majalah, dokumen, catatan, kisah-kisah sejarah dan lain-lain

Dari hasil pembahasan diperoleh bahwa cara untuk menyelesaikan persamaan diferensial homogen Cauchy-Euler orde-2 dengan menggunakan Teorema Residu, persamaan diferensial tersebut harus berbentuk persamaan differensial dengan koefisien konstanta, sehingga dapat ditulis dalam bentuk:

$$y^2 + a_1 y + a_2 = 0$$

mempunyai penyelesaian berbentuk:

$$y = \sum \operatorname{Res} \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)}$$

dengan $g(z) = z^2 + a_1 z + a_2$ disebut persamaan polynomial karakteristik dan $f(z)$ adalah fungsi regular.

Apabila dijumpai persamaan differensial dengan koefisien variable, maka persamaan tersebut harus dirubah ke persamaan diferensial dengan koefisien konstanta. Cara mencari solusi persamaan Cauchy-Euler dengan menggunakan subsitusi $(a + bx) = e^t$. Dari pemisalan $(a + bx) = e^t$ dapat diketahui bahwa $t = \ln(a + bx)$. Cara pemisalan seperti ini akan mengganti Persamaan diferensial dari :

$$\frac{dy}{dx} \text{ ke } \frac{dy}{dt} \text{ dan } \frac{d^2y}{dx^2} \text{ ke } \frac{d^2y}{dt^2}$$

Sehingga diperoleh persamaan diferensial homogen orde dua dengan koefisien konstanta dalam y dan t. Cara mencari solusi persamaan Cauchy-Euler dengan subsitusi $(a + bx)^r = y$. Pemisalan $(a + bx)^r = y$ akan mengubah bentuk persamaan diferensial ke persamaan karakteristik dalam r dengan cara mendiferensialkan $y = (a + bx)^r$ kemudian subsitusikan

$$y' = \frac{d}{dx}(a+bx)^r \text{ dan } y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}(a+bx)^r\right)$$

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan salah satu cabang ilmu pengetahuan yang banyak sekali manfaatnya. Yaitu salah satu ilmu bantu yang sangat penting dan berguna dalam kehidupan sehari-hari maupun dalam menunjang perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi. Matematika merupakan sarana berfikir untuk menumbuhkembangkan pola pikir logis, sistematis, obyektif, kritis, dan rasional. Oleh sebab itu, matematika harus mampu menjadi salah satu sarana untuk meningkatkan daya nalar dan dapat meningkatkan kemampuan dalam mengaplikasikan matematika untuk menghadapi tantangan hidup dalam memecahkan masalah. Matematika juga digunakan untuk memecahkan masalah pada teori matematika sendiri. Salah satunya adalah penyelesaian persamaan diferensial homogen Cauchy-Euler orde-2 yang menggunakan residu.

Matematika merupakan salah satu ilmu yang banyak manfaatnya dalam kehidupan sehari-hari. Persamaan diferensial merupakan salah satu cabang dari matematika yang banyak digunakan untuk memecahkan masalah-masalah yang dihadapi dalam bidang sains dan teknologi. Dalam sains dan teknologi sering ditemukan masalah-masalah yang penyelesaiannya tidak dapat dicari dengan hanya menggunakan rumus atau konsep yang sudah ada. Dengan berkembangnya zaman penerapan persamaan diferensial semakin meluas karena adanya permasalahan mengenai kuantitas bahwa perubahan terus menerus yang berkaitan dengan waktu dapat digambarkan dengan suatu persamaan diferensial.

Dalam kaitannya dengan kandungan al-qur'an, dapat dilihat dalam usaha manusia untuk mendekatkan diri kepada Allah SWT yaitu dengan cara melakukan perubahan yang terus menerus dalam waktu tak tentu pada diri manusia itu sendiri supaya nanti tergolong orang yang mendapat keberuntungan dari Allah SWT yaitu dengan cara bertaubat.

Sesuai dengan firman Allah. SWT dalam al-Qur'an surat al-Maidah ayat 35, sebagai berikut :

Artinya: "Hai orang-orang yang beriman, bertakwalah kepada Allah dan bersungguh-sungguhlah mencari jalan yang mendekatkan diri kepada-Nya dan berjihadlah pada jalan-Nya supaya kamu mendapat keberuntungan" (Q.S. Al-Maidah: 35).

Ayat ini mengajak manusia untuk selalu mendekatkan diri kepada Allah meskipun dalam hati mereka baru ada secercah iman. Menurut Shihab (2002: 87), kata *wasilah* mirip maknanya dengan *washilah* yakni sesuatu yang menyambung sesuatu dengan yang lain. *Wasilah* adalah sesuatu yang menyambung dan mendekatkan sesuatu dengan yang lain atas dasar keinginan yang kuat untuk mendekat. Tentu saja terdapat banyak cara yang dapat digunakan untuk mendekatkan diri kepada ridha Allah, namun kesemuanya haruslah yang dibenarkan oleh-Nya. Hal ini bermula dari rasa kebutuhan kepada-Nya.

Lebih lanjut Shihab (2002: 88) mengemukakan bahwa ayat ini dijadikan oleh sementara ulama sebagai dalil yang membenarkan apa yang diistilahkan dengan *tawassul* yaitu mendekatkan diri kepada Allah dengan menyebut nama Nabi saw dan para wali (orang-orang yang dekat kepada-Nya) yaitu berdoa kepada Allah guna meraih harapan demi nabi dan atau para wali yang dicintai Allah swt.

Persamaan Diferensial adalah sebuah persamaan yang mempunyai derivatif dari satu variabel terikat dan satu atau lebih variabel bebas. Jika hanya satu variabel bebasnya, maka disebut persamaan differensial linear. Sedangkan jika variabel bebasnya lebih dari satu, maka persamaan tersebut adalah persamaan differensial parsial. *(Baiduri, 2001: 2)*

Dipersamaan diferensial dikenal juga istilah orde (tingkat) dan derajat (degree). Orde (tingkat) dari suatu persamaan diferensial merupakan turunan tertinggi yang terdapat pada persamaan diferensial tersebut dan derajat (degree) merupakan pangkat dari suatu persamaan diferensial.

Persamaan differensial biasa orde-n dengan variabel terikat y dan variabel bebas x dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_2(x)\frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = b(x) \qquad (1.1)$$

Dari (1.1) persamaan differensial biasa orde-n dikatakan linear jika mempunyai ciri-ciri sebagai berikut :

1. Variabel terikat y dan derivatifnya hanya berderajat satu.

2. Tidak ada perkalian antara y dan derivatifnya serta antara derivatifnya.

3. Variabel terikat y bukan fungsi transenden.

Jika persamaan differensial orde-n bukan dalam bentuk (1.1), maka disebut persamaan differensial biasa orde-n tak linear. Jika $b(x) = 0$, maka (1.1) merupakan persamaan diferensial linear homogen. Jika $a_n(x) = a_n \quad (n = 0,1,2,...)$, maka (1.1) disebut persamaan differensial linear dengan koefisien konstanta. Jika $a_n(x)$ berupa variabel, maka persamaan (1.1) merupakan persamaan diferensial dengan koefisien variabel.

Bentuk umum persamaan diferensial Cauchy – Euler adalah

$$(a+bx)^2 y'' + (a+bx)y' + cy = h(x) \qquad (1.2)$$

dengan a, b, dan c bilangan real,

$y'' = \dfrac{d^2 y}{dx}$ dan $y' = \dfrac{dy}{dx}$ serta a + b x > 0.

Jika h(x) =0, maka (1.2) disebut Persamaan Cauchy-Euler Homogen.

Salah satu ilmu matematika yang saat ini juga mengalami perkembangan yang cukup pesat adalah bilangan kompleks. Bilangan kompleks merupakan bilangan yang berbentuk *x* + *yi*, dengan *x* dan *y* bilangan real. Teorema Residu merupakan salah satu item dalam bilangan kompleks yang saat ini mendapat perhatian cukup banyak dari para peneliti. Teorema Residu adalah salah satu metode sangat penting untuk menyelesaikan persamaan diferensial linear dan persamaan diferensial parsial.

Persamaan diferensial homogen Cauchy-Euler orde-n merupakan perluasan dari persamaan diferensial homogen Cauchy-Euler orde-2. Oleh karena itu aturan-

aturan yang berlaku pada persaman diferensial homogen Cauchy-Euler orde-2 juga berlaku pada persamaan diferensial homogen Cauchy-Euler orde-n.

Pada persamaan diferensial linear orde-n ini kita dapat mengkonstruksi aturan-aturan teorema Residu. Dengan demikian kita dapat menemukan solusi persamaan diferensial homogen Cauchy-Euler orde-2 dengan teorema Residu.

Bertolak dari uraian diatas maka penulis tertarik untuk melakukan kajian pustaka. Kajian yang dilakukan tersebut, dituliskan dalam bentuk karya ilmiah yang berjudul : "**Aplikasi Residu Kompleks pada Persamaan Diferensial Homogen Cauchy-Euler Orde-2**".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan di atas, maka dapat dibuat suatu perumusan masalah yaitu; Bagaimana cara menyelesaikan Persamaan Diferensial Homogen Cauchy-Euler orde-2 dengan Teorema Residu ?

1.3 Batasan Masalah

Untuk lebih mempersempit dan mempermudah pada pembahasan dan memperoleh pendalaman materi yang lebih relevan dengan konteks permasalahan, maka dalam penyusunan tugas akhir ini penulis membatasi permasalahan pada penyelesaian Persamaan Diferensial Homogen Cauchy-Euler orde-2 dengan koefisien konstanta

1.4 Tujuan pembahasan

Berdasarkan latar belakang serta rumusan masalah tersebut, maka penelitian ini bertujuan mendeskripsikan cara menyelesaikan Persamaan Diferensial Homogen Cauchy-Euler orde-2 dengan Teorema Residu.

1.5 Manfaat Penelitian

Segala upaya yang dilakukan dalam penelitian ini diharapkan dapat bermanfaat bagi :

Adapun manfaat dari penulisan skripsi ini adalah:

1. Jurusan Matematika

   Hasil pembahasan ini dapat digunakan sebagai tambahan bahan dalam pengembangan ilmu matematika khususnya di kalangan mahasiswa jurusan matematika.

2. Peneliti

   Melalui penelitian ini dapat menambah penguasaan materi, sebagai pengalaman dalam melakukan penelitian dan menyusun karya ilmiah dalam bentuk skripsi, serta media untuk mengaplikasikan ilmu matematika yang telah diterima dalam bidang keilmuannya.

3. Pengembangan ilmu pengetahuan

   Menambah khasanah dan mempertegas keilmuan matematika dalam peranannya terhadap perkembangan teknologi dan disiplin ilmu lain.

1.6 Metode Penelitian

Metode penelitian yang digunakan dalam penulisan ini adalah metode penelitian *"kajian kepustakaan"* atau *"literatur study"*. Pembahasan dilakukan dengan mempelajari buku-buku yang berkaitan dengan masalah penelitian ini.

Dalam penelitian ini, langkah-langkah umum yang dilakukan penulis adalah sebagai berikut :

1. Mengumpulkan dan mempelajari literatur yang berupa buku-buku makalah, dokumentasi, notulen, catatan harian, dan lain-lain yang berkaitan dengan masalah penelitian yang akan digunakan dalam menyelesaikan persamaan diferensial.
2. Menentukan pokok permasalahan dari literatur utama berupa cara mencari solusi dan karakteristik dari residu kompleks pada persamaan diferensial homogen cauchy-euler orde dua .
3. Memberikan deskripsi dan pembahasan lebih lanjut tentang persamaan diferensial Homogen Chaucy-Euler
4. Menentukan persamaan karakteristik
5. Mensubsitusikan hasil persamaan berupa solusi umum residu pada persamaan diferensial homogen Chaucy-Euler
6. Menentukan solusi umum persamaan diferensial homogen Chaucy-Euler
7. Memberikan kesimpulan akhir dari hasil pembahasan.

1.7 Sistematika Pembahasan

Agar dalam penulisan dan pembahasan skripsi ini sistematis dan mudah untuk dipahami, maka pembahasannya disusun menjadi empat bab sebagai berikut:

BAB I : Pendahuluan, membahas tentang latar belakang masalah, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metodologi penelitian, dan sistematika pembahasan.

BAB II : Kajian Teori, yang berisi persamaan diferensial linier, persamaan diferensial homogen Chaucy-Euler, fungsi kompleks, residu.

BAB III : Pembahasan, solusi dan karasteristik pada aplikasi residu kompleks pada persamaan diferensial homogen Cauchy-Euler orde-2.

BAB IV : Penutup, meliputi kesimpulan dan saran.

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Sistem Bilangan Kompleks

Bilangan Kompleks z didefinisikan oleh $z = a + bi$, dengan a dan b adalah bilangan real dan i adalah satuan imajiner yang mempunyai nilai $\sqrt{-1}$, dimana a dinamakan bagian real dan b merupakan bagian imajiner. Diperkenalkannya bilangan kompleks karena tidak ada bilangan real x yang memenuhi persamaan polynomial $x^2 + 1 = 0$ atau persamaan yang serupa dengan persamaan tersebut. Dengan adanya bilangan kompleks, maka semua persamaan kuadrat akan mempunyai penyelesaian.

Dua bilangan kompleks $a + bi$ dan $c + di$ dikatakan sama jika dan hanya jika $a = c$ dan $b = d$. Nilai absolute dari suatu bilangan kompleks $a + bi$ didefinisikan sebagai $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Kompleks sekawannya dari suatu bilangan kompleks $a + bi$ adalah bilangan $a - bi$ dinyatakan dengan z^* atau $\overline{z}$.

Dalam mengoperasikan bilangan kompleks dilakukan seperti operasi dalam aljabar bilangan real dengan menggantikan i^2 dengan -1. Sistem bilangan kompleks diperkenalkan dengan menggunakan konsep pasangan terurut bilangan nyata (a,b). Jadi sistem bilangan kompleks didefinisikan sebagai himpunan semua pasangan dengan operasi tertentu yang sesuai (Murray R. Spiegel, 1965:136).

Operasi-operasi dasar dalam bilangan kompleks:

1. Penjumlahan $(a + bi) + (c + di) = a + bi + c + di = (a + c) + (b + d)i$

2. Pengurangan $(a+bi)-(c+di)=a+bi-c+di=(a-c)+(b-d)i$

3. Perkalian

$$(a+bi)(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

$$m(a+bi)=(ma+mbi)$$

4. Pembagian $\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{a+bi}{c+di}\cdot\dfrac{c-di}{c-di}=\dfrac{ac-adi+bci-bdi^2}{c^2-d^2i^2}$

$$=\frac{ac+bd+(bc-ad)i}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

Pengertian bilangan kompleks z sudah dikenalkan, supaya dapat memecahkan beberapa persamaan secara aljabar. Sekarang akan belajar mendefinisikan fungsi $f(z)$ pada variabel kompleks.

2.2 Fungsi Kompleks

Jika $f(z)$ yang bernilaikan bilangan kompleks maka disebut fungsi kompleks. Sebuah fungsi f adalah suatu aturan padanan yang menghubungkan tiap objek x dalam suatu himpunan yang disebut daerah asal atau daerah domain dengan sebuah nilai unik $f(x)$ dari himpunan kedua. Jika $D\subset C$ maka $f:D\to C$ jika untuk setiap $z\in D$ maka diperoleh $f(z)\in C$. Jika setiap himpunan bilangan kompleks yang dapat menyatakan nilai sebuah variabel z terdapat satu atau lebih variabel w, maka w dinamakan fungsi dari variabel kompleks z yang ditulis sebagai $w=f(z)$.

Suatu fungsi bernilai tunggal jika untuk setiap nilai z terdapat hanya satu nilai w dan jika lebih dari satu nilai w untuk setiap nilai z, maka dinamakan suatu fungsi bernilai banyak. Jika $w=u+iv$ (di mana u dan v real) adalah suatu fungsi bernilai tunggal dari $z = x + iy$ (di mana x dan y real), maka dapat ditulis $u + iv = f(x + iy)$. Dengan menyamakan bagian real dan imajiner, maka ini dapat dilihat setara dengan

$$u = u(x, y), \qquad v = v(x, y)$$

Dengan demikian diperoleh pernyataan berikut:

Jika diberikan fungsi bernilai kompleks dari variabel kompleks $f(z)$ maka $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ dengan u dan v fungsi real dari dua variabel real x dan y. Fungsi $u(x, y)$ dan $v(x, y)$ berturut-turut dinamakan bagian real dan bagian imajiner fungsi $f(z)$. (R.Soemantri,1994: 41)

Contoh 2.1

Jika $z = x + iy$ maka $w = f(z) = z^2$

$$w = f(z) = z^2 = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

$$w = f(z) = (x^2 - y^2) - 2ixy = u - iv$$

dengan $u(x, y) = x^2 - y^2$

$$v(x, y) = 2xy$$

Diberikan fungsi kompleks f dengan domain definisi daerah D. Dalam hal ini dibahas pengertian **limit** fungsi f untuk variabel z mendekati titik z_0.

Definisi 2.2.1.

Diberikan fungsi f dengan domain D dan z_0 titik limit D. Bilangan L disebut limit f untuk z mendekati z_0, dan ditulis

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L$$

Jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ yang diberikan , terdapat $\delta > 0$, sehingga untuk semua $z \in D$ dan $0 < |z - z_0| < \delta$ berlaku $|f(z) - L| < \varepsilon$.

Contoh 2.2

Jika $f(z) = z^2$. Buktikan bahwa $\lim_{z \to z_0} f(z) = z_0^{\,2}$

Penyelesaian:

Kita harus menunjukkan bahwa jika diberikan $\varepsilon > 0$ kita dapat menentukan δ (yang secara umum bergantung pada ε) sehingga $|z^2 - z_0^{\,2}| < \varepsilon$ bilamana $0 < |z - z_0| < \delta$

Jika $\delta \le 1$ maka $0 < |z - z_0| < \delta$ mengakibatkan

$$|z^2 - z_0^{\,2}| = |z - z_0||z + z_0| < \delta |z - z_0 + 2z_0| < \delta\{|z - z_0| + |2z_0|\} < \delta(1 + 2|z_0|)$$

Ambil δ yang terkecil diantara 1 dan $\varepsilon/(1 + 2|z_0|)$, maka kita mempunyai $|z^2 - z_0^{\,2}| < \varepsilon$ bilamana $|z - z_0| < \delta$

Setelah kita bahas pengertian limit fungsi diatas, maka dalam hal ini akan kita bahas pengertian kekontinuan suatu fungsi.

Definisi 2.2.2.

Diberikan fungsi f dengan domain definisi suatu daerah D dan titik $z_0 \in D$. Fungsi f dikatakan kontinu di z_0 jika

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

Dengan kata lain , jika f “kontinu” pada z_0, maka harus memiliki sebuah nilai limit pada z_0 dan nilai limit tersebut seharusnya $f(z_0)$

Sebuah fungsi f dikatakan "kontinu" pada sebuah himpunan S jika fungsi tersebut kontinu pada tiap-tiap titik S (Saff Snider, 1993: 47-48).

Contoh 2.3

Buktikan bahwa $f(z) = z^2$ kontinu di $z = z_0$

Menurut contoh 2.2.2 $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0) = z_0^{\,2}$ sehingga $f(z)$ kontinu di $z = z_0$.

Cara lain

Kita harus menunjukkan bahwa jika $\varepsilon > 0$, diberikan maka terdapat $\delta > 0$ (bergantung pada ε) sehingga $|f(z) - f(z_0)| = |z^2 - z_0^{\,2}| < \varepsilon$ bilamana $|z - z_0| < \delta$

Kontinuitas telah dibicarakan secara singkat pada hal di atas, sebagian besar sebagai bagian dari latar belakang yang diperlukan untuk membicarakan turunan (derivative) fungsi kompleks.

Diberikan fungsi f yang didefinisikan pada daerah D dan z_0 suatu titik di dalam D. Jika diketahui bahwa nilai limit:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Jika limitnya ada, maka nilai limit ini dinamakan **turunan** atau **derivative** fungsi f di titik z_0, dan diberikan cara tulis $f'(z_0)$. Jika nilai limit $f'(z_0)$ ini ada, fungsi f dikatakan terdiferensial di z_0. Kerap kali nilai $f(z)-f(z_0)$ dinyatakan dengan Δf dan $z-z_0$ dengan Δz sehingga $z=z_0+\Delta z$ dan

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

Jika f terdiferensial di semua titik di dalam D maka f dikatakan terdiferensial pada D (R.Soemantri,1994: 60).

Contoh 2.4

Tentukan turunan dari $w=f(z)=z^2-2z$ dititik $z=z_0$

Penyelesaian:

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z_0+\Delta z)^2-2(z_0+\Delta z)-\{z_0{}^2-2z_0\}}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{z_0{}^2+2z_0{}^1\Delta z+2z_0(\Delta z)^1+(\Delta z)^2-z_0-\Delta z-z_0{}^2+z_0}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}2z_0+2z_0\Delta z+(\Delta z)-2=2z_0-2$$

Disamping kekontinuan, syarat yang diperlukan agar fungsi f terdiferensial di $z_0=x_0+iy_0$ adalah apa yang di namakan syarat **Cauchy-Riemann.**

Jika fungsi $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ terdiferensial di $z_0=x_0+iy_0$, maka:

a. Misal $\Delta z=(\Delta x,0)=\Delta x$

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x_0+\Delta x, y_0) + iv(x_0+\Delta x, y_0)] - [u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{u(x_0+\Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} + i \frac{v(x_0+\Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x} \right]$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

b. Sedangkan untuk $\Delta z = (0, \Delta y) = i\Delta y$, maka

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{[u(x_0, y_0+\Delta y) + iv(x_0, y_0+\Delta y)] - [u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)]}{i\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \left[\frac{u(x_0, y_0+\Delta y) - u(x_0, y_0)}{i\Delta y} + i \frac{v(x_0, y_0+\Delta y) - v(x_0, y_0)}{i\Delta y} \right]$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \left[\frac{v(x_0, y_0+\Delta y) - v(x_0, y_0)}{\Delta y} - i \frac{u(x_0, y_0+\Delta y) - u(x_0, y_0)}{\Delta y} \right]$$

$$= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Dari dua hasil penurunan fungsi $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ di $z_0 = x_0 + iy_0$ untuk $\Delta z = (\Delta x, 0) = \Delta x$ dan $\Delta z = (0, \Delta y) = i\Delta y$, maka didapatkan persamaan:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (2.1)$$

Bentuk persamaan diatas dinamakan **Persamaan Cauchy Riemann (Persamaan C-R).** Jadi dapat disimpulkan, fungsi $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ akan diferensial di $z_0 = x_0 + iy_0$ bila dan hanya bila bagian real dan bagian imajiner dari $f(z)$, u dan v berlaku Persamaan C-R (Danang Mursita, 2005: 52-53).

Syarat agar $f(z)$ analitik disuatu daerah, selain $f(z)$ berhingga dan diferensiabel, persamaan Cauchy-Riemann harus berlaku di daerah itu.

Jika turunan $f'(z)$ ada disemua titik z dari suatu daerah R, maka $f(z)$ dikatakan analitik dalam R dan ditanyakan sebagai fungsi analitik dalam R.

Suatu fungsi $f(z)$ dikatakan analitik disuatu titik z_0 jika terdapat suatu lingkungan $|z - z_0| < \delta$ sehingga $f'(z)$ ada disetiap titik pada lingkungan tersebut.

Contoh 2.5

$f(z) = z\bar{z}$ dimana $z = x + iy$ dan $\bar{z} = x - iy$

$$f(z) = z\bar{z} = (x + iy)(x - iy)$$

$$= x^2 - xyi + xyi - y^2 = x^2 - y^2$$

$$u = x^2 + y^2 \ dan \ v = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \frac{\partial u}{\partial y} = 2y \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \neq \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y \neq \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

Jadi $f(z) = z\bar{z}$ tidak analitik di $z \neq 0$

Jika $f(z)$ analitik disemua titik pada suatu daerah R dan C suatu kurva yang terletak dalam R, maka $f(z)$ tentunya dapat diintegralkan sepanjang C. Dibawah ini akan dibahas tentang Integral Kompleks.

2.3 Integral Kompleks

Definisi integral kompleks adalah sama dengan definisi integral fungsi nyata dengan mengganti interval integrasi dengan suatu lintasan. Integral fungsi kompleks $f(z)$ sepanjang C didefenisikan dengan $\int_C f(z)dz$, dengan C adalah lintasan integrasi.

Definisi 2.3.1.

Jika $f(z)$ berharga tunggal dan kontinu di dalam sebuah R maka integral dari $f(z)$ sepanjang lintasan C dalam R dari titik z_1 ke titik z_2 dimana $z_1 = x_1 + iy_1$ dan $z_2 = x_2 + iy_2$ adalah

$$\int_C f(z)dz = \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} (u+iv)(dx+idy)$$

$$= \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} udx + i^2 vdy + i\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} vdx + udy$$

$$= \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} udx - vdy + i\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} vdx + udy$$

(Murray R Spigel, 1964:104)

Contoh 2.6

Hitunglah $\int_{(1+i)}^{(2+4i)} z^2 dz$ sepanjang garis lurus $1+i$ dan $2+4i$

Penyelesaian:

$$\int_{(1+i)}^{(2+4i)} z^2 dz = \int_{(1,1)}^{(2,4)} (x+iy)^2 (dx+idy)$$

$$= \int_{(1,1)}^{(2,4)} \left(x^2 - y^2 + 2ixy\right)(dx+idy)$$

$$= \int_{(1,1)}^{(2,4)} \left(x^2 - y^2\right)dx - 2xydy + i\int_{(1,1)}^{(2,4)} 2xydx + \left(x^2 - y^2\right)dy$$

Garis yang menghubungksn (1,1) dan (2,4) mempunyai persamaan

$$y-1=\frac{4-1}{2-1}(x-1) \text{ atau } y=3x-2$$

Maka kita mendapatkan

$$\int_{x=1}^{2}\left\{\left[x^2-(3x-2)^2\right]dx-2x(3x-2)3dx\right\}+\int_{x=1}^{2}\left\{2x(3x-2)dx+\left[x^2-(3x-2)^2 3dx\right]\right\}=-\frac{86}{3}-6i \text{ j}$$

adi $\int_{(1+i)}^{(2+4i)} z^2 dz=-\frac{86}{3}-6i$

Dalam sub bab 2.2 telah disebutkan bahwa penyelidikan tentang fungsi kompleks sangat tergantung pada turunan kompleks. Dibawah ini akan disajikan nilai fungsi analitik disuatu titik ke dalam bentuk integral lintasan tertutup tunggal.

Rumus Integral Cauchy

Jika fungsi f *didefinisikan dan analitik di dalam dan pada lintasan tertutup tunggal* C *dan* z_0 *sembarang titik di dalam* C *maka:*

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

Turunan ke n *dari* $f(z)$ *di* $z=z_0$ *diberikan*

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz \quad \text{atau} \quad \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz=\frac{2\pi i f^{n}(z_0)}{n!}$$

(Murray R Spigel, 1965:141)

Contoh 2.7

Hitunglah $\oint_C \frac{z^2}{z-i}dz$

Penyelesaian

$$f(z) = z^2, z_0 = i, f(z_0) = -1$$

$$\oint_C \frac{z^2}{z-i}\,dz = 2\pi i\left[f(z_0)\right] = -2\pi i$$

Titik z_0 dikatakan titik singular jika $f(z)$ tidak bersifat analitik di z_0. Kesingularitasan dari suatu fungsi kompleks dapat dilihat dari deret Laurentnya.

Teorema 2.3.2 (Teorema Laurent)

Jika f analitik dalam domain $D = \{z : r_2 < |z - z_0| < r_1\}$ dan z titik sembarang di dalam domain ini, maka:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} \qquad (2.2)$$

Dengan

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\,dz \qquad n = 0,1,2,... \qquad (2.3)$$

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{-n+1}}\,dz \qquad n = 1,2,... \qquad (2.4)$$

Dan C sembarang lintasan tertutup tunggal di dalam domain tersebut yang mengelilingi z_0 dan berarah positif.

Penulisan deret Laurent dapat disederhanakan menjadi:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad (2.5)$$

Dimana $a_n = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\,dz \qquad , n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ... \qquad (2.6)$

Deret ruas kanan (2.2) dinamakan deret Laurent untuk fungsi $f(z)$ dan juga dikatakan ekspansi Laurent dari f dalam pangkat $(z - z_0)$. Deret (2.2) dinamakan deret Laurent dengan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}$ dinamakan bagian utama dan bagian $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ dinamakan bagian analitik.

Contoh 2.8

1. Untuk $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$, tentukan deret Laurentnya untuk $1 < |z| < 2$. Fungsi $f(z)$ dapat dipisahkan menjadi $f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$

Penyelesaian:

Untuk $1 < |z| < 2$ maka $|1/z| < 1$ dan $|z/2| < 1$, jadi

$$\frac{1}{z-2} = \frac{-1}{2(1 - z/2)} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} \quad dan \quad \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\left(\frac{1}{1 - 1/z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}}$$ deng

an demikian:

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} \qquad (1 < |z| < 2)$$

2. Tentukan deret Laurent dari fungsi $\frac{e^{2z}}{(z-1)^3}$

Penyelesaian:

$\frac{e^{2z}}{(z-1)^3}, z = 1$ misalkan $z - 1 = u$, maka $z = 1 + u$

$$\frac{e^{2z}}{(z-1)^3} = \frac{e^2}{u^3} e^{2u} = \frac{e^2}{u^3}\left\{1 + 2u + \frac{(2u)^2}{2!} + \frac{(2u)^3}{3!} + \frac{(2u)^4}{4!} + \ldots\right\}$$

$$= \frac{e^2}{(z-1)^3} + \frac{2e^2}{(z-1)^2} + \frac{2e^2}{z-1} + \frac{4e^2}{3} + \frac{2e^2}{3}(z-1) + \ldots$$

Dengan deret Laurent ini, maka kesingularan dari suatu fungsi dapat ditentukan dengan jenis-jenisnya.

Suatu titik z_0 dinamakan singularitas atau titik singular bagi fungsi f jika dan hanya jika f tidak analitik pada z_0 dan setiap lingkungan z_0 memuat paling sedikit satu titik yang membuat f tersebut analitik.

Jenis-jenis Singularitas:

1. Singularitas Kutub

Jika bagian utama yaitu $\frac{a_{-1}}{z-z_0} + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \ldots + \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$ dengan $a_{-n} \neq 0$ dan n adalah bilangan bulat positif, maka $z = z_0$ dinamakan suatu kutub bertingkat n.

Contoh 2.9

$f(z) = \frac{1}{z^3}$ memiliki kutub bertingkat 3 di $z = 0$

2. Titik Cabang

Suatu titik $z = z_0$ dinamakan titik cabang dari fungsi bernilai banyak $f(z)$. Jika cabang $f(z)$ bertukar bilamana z menggambarkan suatu lintasan tertutup disekitar z_0. Jika z_0 adalah *titik cabang*, maka sembarang lingkaran dengan pusat z

dan berjari-jari cukup kecil yang dapat kita lukis mulai dari suatu titik pada satu cabang fungsi bernilai ganda akan berakhir pada suatu titik pada cabang yang lain.

Contoh 2.10

$$w = f(z) = (z^2+1)^{1/2}$$
$$= \{(z-i)(z+i)\}^{1/2}$$

Titik $z = \pm i$ merupakan titik cabang dari $f(z)$, bilamana suatu titik z bergerak mengelilingi C

Dari definisi singularitas di atas, suatu titik z_0 merupakan singularitas fungsi $f(z)$, bila f gagal menjadi analitik di z_0 sementara setiap lingkungan z_0 memuat paling sedikit satu titik dimana f analitik. Titik z_0 dinamakan titik singular terasing dari fungsi f, jika z_0 titik singular terasing dari fungsi f, maka terdapat $r > 0$, sehingga $f(z)$ dapat dituliskan kedalam deret Laurent dengan domain $0 < |z - z_0| < r$.

Contoh 2.11

Tentukan titik singularitas dari $f(z) = 1/z$ dan nyatakan dalam deret Laurent

Penyelesaian:

Titik $z = 0$ adalah titik singularitas terasing dari fungsi $f(z) = 1/z$, sebab untuk $r = r > 0$, jika diuraikan ke dalam deret Laurent maka berbentuk $f(z) = 1 - (z-1) + (z-1)^2 + \ldots$ dalam domain $0 < z < 1$.

2.4 Residu

Residu dapat didefinisikan sebagai berikut :

Definisi 2.4.1

Residu suatu fungsi di titik singular terasing z_0, adalah nilai koefisien suku $(z - z_0)^{-1}$ dalam ekspansi Laurent fungsi itu pada kitar titik singular terasing z_0.

Definisi 2.4.2

Jika z_0 titik singular terasing fungsi f, dan c suatu lintasan tertutup tunggal berarah positif yang melingkungi z_0 dan f analitik di dalam dan pada c kecuali di z_0, dan jika dapat menghitung nilai integral.(R.Soemantri, 1994:211)

Dengan melihat koefisien dari deret Laurent untuk $n = -1$ pada persamaan (2.6) yaitu a_{-1} yang diberikan rumus:

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz$$

Dengan C sembarang jalur tertutup sederhana, yang mengelilingi z_0 berorientasi positif dan seluruhnya terletak di dalam sekitar z_0 tersebut.

Selanjutnya nilai a_{-1} yang merupakan koefisien pada deret Laurent dari $\frac{1}{z - z_0}$ dinamakan residu f di titik singularitas terasing z_0.

Residu fungsi f di titik singularitas terasing z_0 diberikan dengan notasi $\operatorname{Res}[f, z_0]$, dari definisi tersebut diperoleh:

$$a_{-1} = \operatorname{Res}[f, z_0]$$

$$\operatorname{Res}[f, z_0] = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz$$

Maka $\int_C f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}[f, z_0]$

Contoh 2.12

Hitung $\int_C \frac{e^z}{z^2}dz$, dimana C adalah lingkaran satuan $|z|=1$, dengan orientasi positif. Dari

$$\frac{1}{z^2}e^z = \frac{1}{z^2}\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\ldots\right) = \frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}+\frac{z}{3!}+\ldots$$

Didapatkan bahwa $\operatorname{Res}\left[\frac{e^z}{z^2},0\right]=1$. Maka,

$$\int_C \frac{e^z}{z^2}dz = 2\pi i\cdot \operatorname{Res}\left[\frac{e^z}{z^2},0\right] = 2\pi i$$

Untuk singularitas yang banyaknya berhingga, maka residu dapat dicari dengan menggunakan teorema dibawah ini.

Teorema 2.4.2.

Jika fungsi f analitik di dalam dan pada lintasan tertutup tunggal yang berorientasi positif C kecuali di titik-titik singular yang berhingga banyaknya di dalam C maka:

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \sum \operatorname{Res}$$ (R.soemantri, 1994: 191)

Dengan $\sum \operatorname{Res}$ merupakan jumlah residu fungsi f di titik singular di dalam C.

Jika singular dari fungsi $f(z)$ merupakan kutub berorde n maka residu dapat dicari dengan menggunakan teorema dibawah ini:

Teorema 2.4.3

Jika fungsi analitik di semua titik dalam dan pada kurva tertutup sederhana kecuali di $z = z_0$ *yang merupakan kutub berorde* n *, sehingga*

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + \ldots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \ldots$$

$$= \sum_{k=-n}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

Maka $a_{-1} = \operatorname{Res}[f, z_0]$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{(n-1)}}{dz^{(n-1)}} \left[(z - z_0)^n f(z) \right] \quad \text{(J.D.Poliouras, 1975: 259)}$$

Untuk berturut-turut $n = 1,2,3$ *dari rumus tersebut didapat*:

$$\operatorname{Res}[f, z_0] = \lim_{z \to z_0} [(z - z_0) f(z)]$$

$$\operatorname{Res}[f, z_0] = \lim_{z \to z_0} \frac{d}{dz} \left[(z - z_0)^2 f(z) \right]$$

$$\operatorname{Res}[f, z_0] = \frac{1}{2} \lim_{z \to z_0} \frac{d^2}{dz^2} \left[(z - z_0)^3 f(z) \right]$$

Contoh 2.13

Hitung $\oint_C \frac{e^z}{(z-2)(z+4)^2} dz$, dimana C diberikan dengan $|z| = 5$

Penyelesaian:

Singularitas kutub dari $\frac{e^z}{(z-2)(z+4)^2}$ adalah $z = 2$ dan $z = -4$ untuk kutub di $z = 2$ orde 1

$$\operatorname{Res}[f,2] = \lim_{z\to 2} \frac{e^z}{(z-2)(z+4)^2}(z-2)$$

$$= \lim_{z\to 2} \frac{e^z}{(z+4)^2} = \frac{e^2}{36}$$

Untuk kutub di $z = -4$ orde 2

$$\operatorname{Res}[f,-4] = \lim_{z\to -4} \frac{d}{dz} \frac{e^z}{(z-2)(z+4)^2}(z+4)^2 dz$$

$$= \lim_{z\to -4} \frac{d}{dz} \frac{e^z}{(z-2)} dz$$

$$= \lim_{z\to -4} \frac{(z-2)e^z - e^z}{(z-2)^2} = \frac{-7e^{-4}}{36}$$

Jadi diperoleh

$$\oint_C \frac{e^z}{(z-2)(z+4)^2} dz = 2\pi i(\operatorname{Res}[f,2] + \operatorname{Res}[f,-4])$$

$$= 2\pi i\left(\frac{e^2}{36} + \frac{-7e^{-4}}{36}\right)$$

Teorema 2.4.4

Jika titik a adalah titik reguler f, maka $\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = 0$

(D.S Mitinovie and J.D Keekie,1983:7)

2.5 Persamaan Diferensial

Definisi 2.5.1

Persamaan diferensial adalah sebuah persamaan yang mengandung derivatif atau deferensial dari suatu atau lebih variabel terikat satu atau lebih variabel bebas.

Jika hanya satu variabel bebasnya, maka persamaannya disebut persamaan diferensial biasa. Sedangkan jika variabel bebasnya lebih dari satu maka persamaannya disebut persamaan diferensial parsial (Baiduri, 2001: 2). Menurut Vinizio *persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat turunan satu atau beberapa fungsi yang tidak diketahui* (1998: 1).

Contoh 2.14

1. $\frac{d^2y}{dx^2} = 2\cos 2x - 3e^{-x}$ persamaan diferensial orde-2

2. $\frac{d^2y}{dx^2} + 2xy = e^x$ persamaan diferensial orde-2

3. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial t} + 2u = 0$ persamaan parsial orde-2

Orde dari persamaan diferensial adalah derivatif/turunan tertinggi yang terdapat/termuat dalam persamaan diferensial tersebut. Sedangkan derajat dari persamaan diferensial ditentukan oleh pangkat tertinggi dari turunan yang tertinggi yang ada dalam persamaan diferensial tersebut (Baiduri, 2001: 4).

Contoh 2.15

1. $\frac{dy}{dx} - y = x$ persamaan diferensial orde-1 berderajat 1

2. $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y - 3x = 0$ persamaan diferensial orde-2 berderajat 2

Persamaan diferensial biasa dapat digolongkan sebagai persamaan linear maupun tak linear, sebagai contoh :

1. $\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0$ persamaan diferensial linear

2. $y''+5y'+6y^2=0$ persamaan diferensial tak linear

3. $y''-3yy'+2y=0$ persamaan diferensial tak linear

Suatu persamaan diferensial biasa berorde *n* akan mempunyai bentuk sebagai berikut :

$$y^{(n)}=F\left(x, y(x), y^{(1)}(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)\right) \tag{2.7}$$

dengan $y_1, y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}$ nilainya ditentukan oleh x. Penyelesaian umum dari persamaan (2.7) biasanya akan mengandung tetapan *n* sebarang.

Orde dapat diartikan juga dengan tingkatan, hubungannya dengan kandungan al-qur'an dapat dilihat dalam tingkatan puasa yang tercantum dalam firman Allah surat Al-Insyiqaaq ayat 19, yaitu:

Artinya: Sesungguhnya kamu melalui tingkat demi tingkat. (QS Al-Insyiqaaq 19)

Imam Al-Ghazali dalam kitab *Ihya' Ulumuddin* membagi puasa dalam tiga tingkatan, yaitu:

1. Puasanya Orang Awam

Puasanya orang awam adalah puasa yang hanya menahan perut (dari makan dan minum) dan kemaluan dari memperturutkan syahwat. Rasulullah Saw bersabda:

كَمْ مِنْ صَائِمٍ لَيْسَ لَهُ مِنْ صَوْمِهِ إلا الْجُوْعُ وَالْعَطَشُ

Artinya: "*Berapa banyak orang yang berpuasa, namun tidak didapatkan dari puasanya itu kecuali haus dan lapar*."

Imam Al-Ghazali berkata :

"Berapa banyak orang yang berpuasa, namun ia tidak mendapatkan dari puasanya itu selain lapar dan haus. Sebab, hakikat puasa itu adalah menahan hawa nafsu, bukanlah sekedar menahan lapar dan haus. Boleh jadi orang tersebut memandang yang haram, menggunjing dan berdusta. Maka yang demikian itu membatalkan hakikat puasa."

Para Ulama berkata:

"Betapa banyak orang yang berpuasa padahal ia berbuka (tidak berpuasa) dan betapa banyak orang yang berbuka padahal ia berpuasa."

Yang dimaksud dengan orang yang berbuka tetapi berpuasa ialah menjaga anggota tubuhnya dari perbuatan dosa sementara ia tetap makan dan minum. Sedangkan yang dimaksud dengan berpuasa tapi berbuka ialah yang melaparkan perutnya sementara ia melepaskan kendali bagi anggota tubuh yang lain.

2. *Puasanya Orang Khusus*

Yaitu puasanya orang-orang sholeh, yang selain menahan perut dan kemaluan juga menahan semua anggota badan dari berbagai dosa, kesempurnaannya ada 7 perkara, yaitu:

a. Menundukkan pandangan dan menahannya dari memandang hal yang dicela dan dibenci, kesetiap hal yang dapat menyibukkan diri dari mengingat Allah Swt.

b. Menjaga lisan dari membual, dusta, ghibah, perkataan kasar, pertengkaran, perdebatan dan mengendalikannya dengan diam, menyibukkan dengan dzikrullah dan membaca Al-qur'an.

c. Menahan pendengaran dari mendengarkan setiap hal yang dibenci (makruh) karena setiap hal yang diharamkan perkataannya diharamkan pula mendengarnya.

d. Menahan berbagai anggota badan lainnya dari berbagai dosa seperti tangan, kaki dari hal-hal yang dibenci, menahan perut dari memakan makanan yang subhat (meragukan) pada saat tidak puasa (berbuka).

e. Tidak memperbanyak makanan yang halal pada saat berbuka sampai penuh perutnya, karena tidak ada wadah yang dibenci oleh Allah kecuali perut yang penuh dengan makanan halal. Bagaimana puasanya bisa bermanfaat untuk menundukkan musuhnya (setan) dan mengalahkan syahwatnya jika orang yang berpuasa pada saat berbuka melahap berbagi makanan sebagai pengganti makanan yang tidak dibolehkan memakannya pada siang hari. Bahkan menjadi tradisi menyimpan dan mengumpulkan makanan sebagai persiapan pada saat berbuka padahal makanan yang tersimpan itu melebihi kapasitas perut kita bahkan mungkin bisa untuk makanan satu minggu.

f. Mengurangi Tidur. Banyak orang yang termakan oleh hadist dhaif (lemah) *"Bahwa tidurnya orang berpuasa adalah ibadah"*, padahal telah menjadi kebiasaan Rasulullah Saw, *"Apabila bulan Ramadhan tiba, beliau melipat alas tidurnya (mengurangi tidur), mengetatkan sarungnya (yakni bersungguh-sungguh dalam ibadah), serta mengajak keluarganya berbuat seperti itu pula".*

g. Cemas dan harap. Hendaklah hatinya dalam keadaan "tergantung" dan "terguncang" antara cemas dan harap karena tidak tahu apakah puasanya diterima dan termasuk golongan yang *Muqorrobin* atau ditolak sehingga termasuk orang yang dimurkai oleh Allah Swt. Hendaklah hatinya selalu dalam keadaan demikian setiap selesai melakukan kebaikan. Hadist-hadist Rasulullah Saw,

"Puasa adalah perisai (tabir penghalang dari perbuatan dosa). Maka apabila seseorang dari kamu sedang berpuasa, janganlah ia mengucapkan sesuatu yang keji dan janganlah ia berbuat jahil." (HR Bukhari-Muslim).

Lima hal yang dapat membatalkan puasa: berkata dusta, ghibah (menggunjing orang), memfitnah, sumpah dusta dan memandang dengan syahwat.

"Barang siapa yang tidak dapat meninggalkan perkataan kotor dan dusta selama berpuasa, maka Allah Swt tidak berhajat kepada puasanya." (HR Bukhari) *"Orang yang menggunjing dan mendengarkan gunjingan, keduanya bersekutu dalam perbuatan dosa."* (HR Ath-Thabrani).

3. *Puasanya Orang Khusus Lebih dari Khusus*

Yaitu puasa hati dari berbagai keinginan yang rendah dan pikiran-pikiran yang tidak berharga, juga menjaga hati dari selain Allah secara total. Puasa ini akan menjadi "batal" karena pikiran selain Allah (pikiran tentang dunia). Ini adalah puasanya para Nabi dan Rasul Allah Swt.

Telah diketahui bahwa dalam puasa terdapat beberapa tingkatan. Dalam persamaan diferensial Cauchy-Euler juga terdapat beberapa tingkatan berdasarkan ordenya. Urutan tingkatn orde tersebut di mulai dari orde tertinggi ke terendah. Puasa merupakan suatu kewajiban bagi umat muslim diwaktu Ramadhan, dan telah dijelaskan sebelumnya bahwa dalam puasa tersebut ada beberapa tingkatan, walaupun terkesan bahwa pada tingkatan yang pertama tersebut kurang baik dan termasuk rendah, akan tetapi kita tetap mendapat pahala karena kita sudah melaksanakan kewajiban kita, yaitu menjalankan puasa pada waktu bulan Ramadhan. Jadi, dalam hal tingkatan puasa tersebut termasuk tingkatan yang positif walaupun belum tentu diketahui berapa banyak pahala yang akan kita dapatkan, begitu juga dengan orde n, berapapun nilai dari orde n tetapi hasilnya tetap merupakan konstanta real positif.

Secara umum persamaan diferensial mempunyai bentuk sebagai berikut :

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+a_2(x)\frac{d^2 y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=b(x) \qquad (2.8)$$

Suatu persamaan diferensial biasa orde n linear mempunyai ciri-ciri sebagai berikut :

1. variabel terikat y dan derivatifnya hanya berderajat satu.
2. tidak ada perkalian antara y dan derivatifnya serta antara derivatifnya.
3. variabel terikat y bukan fungsi transenden.

Jika persamaan diferensial orde n bukan dalam bentuk (2.8), maka disebut persamaan diferensial biasa orde n tak linear. Jika $b(x) = 0$, maka (2.8) merupakan persamaan diferensial homogen. Jika $a_n(x) = a_n \ (n = 0,1,2,...)$, maka (2.8) disebut persamaan diferensial dengan koefisien konstanta. Jika $a_n(x)$ berupa variabel, maka persamaan (2.8) merupakan persamaan diferensial dengan koefisien variabel (Baiduri, 2001:05).

Definisi 2.5.2.

Misalkan $y_1, y_2, ..., y_n$ merupakan penyelesaian-penyelesaian persamaan diferensial, Wronski (W) didefenisikan sebagai determinan matrik dengan elemen-elemen matrik berupa $y_1, y_2, ..., y_n$ yang diferensiabel sampai $n-1$ dan kontinu pada selang $[a,b]$. Wronski (W) ditulis sebagai berikut :

$$W(y_1, y_2, ..., y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & \cdots & y_n \\ y_1^{(1)} & y_2^{(1)} & \cdots & \cdots & y_n^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Persamaan diferensial linear mempunyai sifat pentingnya yaitu $y_1, y_2, ..., y_n$ merupakan penyelesaian dari (2.5.1.1), maka $c_1.y_1 + c_2.y_2 + ... + c_n y_n$ juga merupakan penyelesaian dengan tetapan c_i sebarang.

Teorema 2.5.3.

Jika $y_1, y_2, ..., y_n$ merupakan n penyelesaian yang bebas linear satu sama lain dari persamaan diferensial homogen.

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}+\ldots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=0$$

maka untuk setiap pilihan-pilihan konstanta $c_1, c_2, ..., c_n$ *kombinasi linear*

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n$$

suatu penyelesaian juga (Finizio,1982: 67-68).

Contoh 2.16

Tentukan solusi umum homogen jika diketahui solusi basis dari $y''+4y'-4y=0$ adalah $\{e^x, \cos 2x\}$

Jawab:

$y''+4y'-4y=0$

Solusi basis: $Y_1 = e^x$, $Y_2 = \cos 2x$

Maka

Solusi umum homogen: $Y = C_1 e^x + C_2 \cos 2x$

Teorema 2.5.4.

Jika $y_1, y_2, ..., y_n$ *merupakan persamaan diferensial orde* n

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}+\ldots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=0$$

yang didefenisikan pada selang $[a,b]$, *dikatakan bebas linear jika* $W(y_1, y_2, ..., y_n) \neq 0$ *untuk setiap* x *dalam selang* $a_n(x)$ *dimana W adalah Wronski* (Finizio: 1982: 69).

Contoh 2.17

Tunjukkan bahwa $Y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$ adalah solusi umum homogen dari $y'' - y' - 2y = 0$

Jawab:

$$Y_1 = e^{-x},\ Y_2 = e^{2x}$$

$$W(Y_1, Y_2) = \begin{vmatrix} e^{-x} & e^{2x} \\ -e^{-x} & 2e^{2x} \end{vmatrix} = \left(e^{-x} \cdot 2e^{2x}\right) - \left(-e^{-x} \cdot e^{2x}\right)$$
$$= 3e^{x} \neq 0$$

Karena $Y_1 = e^{-x}$ dan $Y_2 = e^{2x}$ bebas linear maka $Y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$ solusi umum homogen $y'' - y' - 2y = 0$

2.6 Persamaan Diferensial Linear Homogen dengan Koefisien Konstanta

Persamaan differensial linier homogen orde dua secara umum dapat dinyatakan dalam bentuk :

$$a_2(x)\frac{d^2 y}{dx^2} a_1(x)\frac{dy}{dx} a_0(x) y = 0, \quad a_2 \neq 0 \tag{2.9}$$

Dimana $a_0(x), a_1(x)$ dan $a_2(x)$ adalah koefisien-koefisien dari persamaan differensial linier homogen orde dua.

Jika $a_0(x), a_1(x)$ dan $a_2(x)$ adalah bilangan, maka persamaan differensial linier homogen (2.9) disebut persamaan differensial linier homogen dengan koefisien konstanta. Dan jika $a_0(x), a_1(x)$ dan $a_2(x)$ adalah variabel, maka persamaan differensial linier homogen (2.9) disebut persamaan differensial linier homogen dengan koefisien peubah (variabel).

Penyelesaian dari persamaan differensial linier homogen orde dua dengan koefisien konstanta dapat dinyatakan dalam bentuk :

$$a_2 \frac{d^2 y}{dx^2} a_1 \frac{dy}{dx} a_0 y = 0, \quad a_2 \neq 0$$

Dengan mengambil $a = \frac{a_1}{a_2}$ dan $b = \frac{a_0}{a_2}$, sehingga (2.9) setara (ekuivalen) dengan persamaan :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} a \frac{dy}{dx} by = 0 \qquad (2.10)$$

Dari persamaan (2.10) terlihat bahwa fungsi penyelesaian harus bersifat bahwa turunan keduanya ditambah dengan konstanta kali turunan pertamanya dan konstanta kali fungsi itu menghasilkan nol untuk $\forall x \in R$. Supaya ini mungkin, turunan-turunan y haruslah konstanta kali y. diketahui bahwa $y = e^{rx}$ memenuhi sifat itu. Dengan demikian digunakan $y = e^{rx}$ sebagai calon penyelesaian.

$y = e^{rx}, \frac{dy}{dx} = re^{rx}$ dan $\frac{d^2 y}{dx^2} = r^2 e^{rx}$ dari persamaan ini disubsitusikan ke persamaan diferensial linier homogen (2.10), sehingga diperoleh :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} a \frac{dy}{dx} by = 0$$

$$r^2 e^{rx} + are^{rx} + be^{rx} = \left(r^2 + ar + b\right)e^{rx} = 0$$

Karena e^{rx} selalu positif, maka haruslah :

$$. \left(r^2 + ar + b\right) = 0$$

Persamaan diatas disebut dengan persamaan karakteristik persamaan diferensial linier homogen $\frac{d^2 y}{dx^2} a \frac{dy}{dx} by = 0$.

Berdasarkan sifat persamaan kuadrat berlaku juga persamaan karakteristik dalam mencari akar persamaan karakteristik.

- **Kasus 1 : *D = a*^{2} *- 4b > 0***

Persamaan karakteristik mempunyai dua akar berlainan

$$r_1 = -\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b} \text{ dan } r_2 = -\frac{a}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b} \qquad (2.11)$$

Penyelesaian $r_1 = e^{r_1 x}$ dan $r_2 = e^{r_2 x}$

$$W(x) = W(e^{r_1 x}, e^{r_2 x}) = \begin{vmatrix} e^{r_1(x)} & e^{r_2(x)} \\ r_1 e^{r_1(x)} & r_2 e^{r_2(x)} \end{vmatrix}$$

$$W(x) = (r_2 - r_1)e^{(r_1 + r_2)} \neq 0$$

Hal ini berarti $r_1 = e^{r_1 x}$ dan $r_2 = e^{r_2 x}$ bebas linier, maka penyelesaian umum dari persamaan differensial linier homogen adalah

$$y = (c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x})$$

Contoh: 1

Tentukan selesaian dari persamaan

y" - 6y + 8y = 0

Penyelesaian

Persamaan karakteristik dari persamaan tersebut

$$\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$$

Akar-akar karakteristik adalah 4 dan 2

$$y_1 = e^{4x} \text{ dan } y_2 = e^{2x}$$

Sehingga diperoleh :

$$y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{2x}$$

➢ **Kasus 2 : *D* = *a*^{2} - *4b* = *0***

Persamaan karakteristik mempunyai 1 akar real berganda

Dari persamaan (2.11) diperoleh

$$r = -\frac{a}{2}$$

Baru diperoleh satu penyelesaian e^{rx} dan mempunyai solusi umum yang berbentuk

$$y = \left(c_1 x e^{rx} + c_2 x e^{rx}\right)$$

Contoh 2.

Tentukan selesaian dari persamaan

y" + 4y' + = 0

Penyelesaian

Persamaan karakteristik dari persamaan diatas adalah

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$$

Akar-akar karakteristik merupakan akar yang sama -2

$y_1 = e^{-2x}$ dan $y_2 = e^{-2x}$

Sehingga diperoleh :

$$y = c_1 x e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}$$

➢ **Kasus 3. *D* = *a*^{2} - *4b* < *0***

Persamaan karakteristik mempunyai dua akar kompleks

$$r_1 = -\frac{a}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{4b - a^2} = \alpha + \beta i$$

$$r_2 = -\frac{a}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{4b - a^2} = \alpha - \beta i$$

Penyelesaian

$$e^{(\alpha+\beta i)x} = e^{\alpha x}e^{i\beta x} = e^{\alpha x}\left(\cos\beta x + i\sin\beta x\right)$$

Diambil bagian real dan bagian imajinernya

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\alpha x}\cos\beta x & e^{\alpha x}\sin\beta x \\ e^{\alpha x}\left(\alpha\cos\beta x - \beta\sin\beta x\right) & e^{\alpha x}\left(\alpha\sin\beta x + \beta\cos\beta x\right) \end{vmatrix}$$

$$W(x) = \beta e^{\alpha x} \neq 0, \text{ karena } \beta = \frac{1}{2}\sqrt{4b - a^2} \neq 0$$

Penyelesaian umum $e^{\alpha x}\left(c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x\right)$

Contoh: 4

Tentukan selesaian dari persamaan

y" - 6y + 10y = 0

penyelesaian

Persamaan karakteristik dari persamaan tersebut

$$\lambda^2 - 6\lambda + 10 = 0$$

Akar-akar karakteristik merupakan akar kompleks yang konjugatnya $3 \pm 2i$

$y_1 = e^{(3+2i)x}$ dan $y_2 = e^{(3-2i)x}$

Sehingga diperoleh :

$$y = e^{3x}\left(A\cos 2x + B\sin 2x\right)$$

Misalkan persamaan diferensial linear homogen orde ke n adalah

$$L[y] = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = 0 \qquad (2.12)$$

Dengan $a_0, a_1, \ldots, a_n$ adalah konstanta real. Ini adalah wajar untuk memperkirakan dari pengetahuan tentang persamaan diferensial linear orde 2 dengan koefisien konstanta dan bahwa $y = e^{rx}$ adalah selesaian persamaan (2.12) untuk nilai r yang bersesuaian.

Bukti: jika $y = e^{rx}$

Maka

$$y' = re^{rx}$$

$$y'' = r^2 e^{rx}$$

$$y''' = r^3 e^{rx}$$

$$\vdots$$

$$y^{(n)} = r^n e^{rx}$$

Substitusi kepersamaan (2.12)

$$L[e^{rx}] = a_0 r^n e^{rx} + a_1 r^{n-1} e^{rx} + \ldots + a_{n-1} r e^{rx} + a_n e^{rx}$$

$$= e^{rx}\left[a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_{n-1} r + a_n\right] = e^{rx} Z(r) \qquad (2.13)$$

Untuk semua r

Untuk nilai-nilai r sehingga $Z(r) = 0$, selanjutnya $L[e^{rx}] = 0$ dan $y = e^{rx}$ adalah selesaian persamaan (2.12). Polynomial $Z(r)$ disebut polynomial karakteristik dari persamaan diferensial (2.12). Berdasarkan suatu polynomial berderajat n mempunyai n buah akar, misalkan $r_1, r_2, \ldots, r_n$ dengan demikian polynomial karakteristiknya dapat ditulis :

$$Z(r) = a_0(r - r_1)(r - r_2)\ldots(r - r_n) \qquad (2.14)$$

Berdasarkan jenis akar-akar dari persamaan karakteristik ada 3 kasus yang perlu diperhatikan didalam menentukan solusi umum:

1. *Akar-akarnya real dan berbeda*

$$r_1 \neq r_2 \neq r_3 \neq \ldots, r_{n-1} \neq r_n$$

Maka solusi basis:

$$y_i = e^{r_i x} \qquad , \ i = 1,2,\ldots,n$$

Dan solusi umumnya :

$$y = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i \qquad , c_i \text{ konstanta}$$

Contoh 1

Tentukan solusi umum $y''+y'-12y=0$

Jawab:

Persamaan karakteristiknya:

$$r^2 + r - 12 = 0$$
$$(r-4)(r+3) = 0$$
$$r_1 = 4, r_2 = -3$$

Solusi basisnya:

$$y_1 = e^{4x}, y_2 = e^{-3x}$$

Solusi umumnya:

$$y = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-3x}$$

2. *Akar-akarnya real dan sama*

$$r_1 = r_2 = r_3 = \ldots = r_n$$

Solusi basisnya:

$$y_i = x^{i-1} e^{rx} \qquad i = 1,2,3,\ldots,n$$

Solusi umumnya:

$$y = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i$$

Contoh 2

Tentukan solusi umum $y''-2y'+y=0$

Jawab:

Persamaan karakteristiknya;

$$r^2 - 2r + 1 = 0$$
$$(r-1)^2 = 0$$
$$r_1 = r_2 = 1$$

Solusi basisnya:

$$y_1 = e^x, y_2 = xe^x$$

Solusi umumnya:

$$y = c_1 e^x + c_2 xe^x$$

3. *Akar kompleks*

Jika $r_i = \alpha \pm \beta i$ (kompleks), maka salah satu solusi basisnya

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x \text{ dan } y_1 = e^{\alpha x} \sin \beta x$$

Jika $r = \alpha \pm \beta i$ sebanyak m, maka solusi basisnya

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, xe^{\alpha x} \cos \beta x, x^2 e^{\alpha x} \cos \beta x, ..., x^{n-1} e^{\alpha x} \cos \beta x$$
$$e^{\alpha x} \sin \beta x, xe^{\alpha x} \sin \beta x, x^2 e^{\alpha x} \sin \beta x, ..., x^{n-1} e^{\alpha x} \sin \beta x$$

2.7 Persamaan Diferensial Cauchy-Euler

Persamaan Cauchy-Euler orde dua merupakan persamaan bentuk khusus dari persamaan diferensial linier orde dua dengan koefisien variabel yang dapat diubah ke dalam bentuk persamaan diferensial linier dengan koefisien konstanta.

Definisi 2.7.1

Sebuah persamaan diferensial orde dua dapat dinyatakan dalam bentuk

$$a_2 x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y = f(x) \qquad (2.15)$$

dengan a_2 ,a_1 dan a_0 sebagai konstanta, maka persamaan tersebut dinamakan persamaan Cauchy-Euler.

Contoh 2.18

a) Persamaan diferensial

$$-x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-2y=\cos x+2$$

termasuk persamaan Cauchy-Euler

b) Persamaan diferensial

$$3x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x^2\frac{dy}{dx}-y=x^2-2x+1$$

bukan merupakan persamaan Cauchy-Euler, sebab suku keduanya bentuknya $x^2\frac{dy}{dx}$, mengandung bentuk kuadrat dari x. padahal seharusnya konstanta kali $x\frac{dy}{dx}$.

Penyelesaian Persamaan Cauchy-Euler dilakukan dengan jalan mencari dua selesaian yang bebas linier bagi persamaan diferensial homogen berkorespondensi dengan persamaan yang diberikan. Langkah selanjutnya adalah dengan mensubsitusikan $x = e^t$,sehingga persamaan diferensial (2.15) berubah menjadi persamaan diferensial dengan koefisien konstanta. Misalkan $x = e^t$, maka dengan aturan rantai diperoleh : $\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}=\frac{dy}{dx}e^t=x\frac{dy}{dx}$

sehingga,

$$x\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt} \tag{2.16}$$

Dengan mendiferensialkan persamaan (2.16) terhadap variabel t , diperoleh:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left[x\frac{dy}{dx}\right]$$

$$= \frac{dx}{dt}.\frac{dy}{dx} + x\left[\frac{dy}{dx}\right]\frac{dy}{dt}$$

$$= \frac{dy}{dt} + x\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dy}{dt} + x^2\frac{d^2y}{dx^2} \quad \text{..................(karena } \frac{dx}{dt} = e^t = x \text{)}$$

sehingga dapat disimpulkan bahwa :

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \qquad (2.17)$$

selajutnya dengan menggunakan persamaan (2.16) dan (2.17) yang disubsitusikan ke persamaan (2.15) diperoleh:

$$a_2\left[\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right] + a_1\left[\frac{dy}{dt}\right] + a_0y = f\left(e^t\right)$$

$$a_2\frac{d^2y}{dx^2}(a_1 - a_2)\frac{dy}{dt} + a_0y = f\left(e^t\right) \qquad (2.18)$$

dengan a_2 ,a_1 dan a_0 sebagai konstanta. Jadi persamaan (2.18) adalah persamaan diferensial linier dengan koefisien konstanta.

BAB III
PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibahas tentang bagaimana cara menyelesaikan persamaan diferensial homogen Cauchy-Euler orde-2 dengan menggunakan Teorema Residu. Dalam mencari penyelesaian persamaan diferensial homogen Cauchy-Euler orde-2, terlebih dahulu harus mengetahui bentuk-bentuk persamaannya sehingga dapat menentukan penyelesaiannya. Apabila persamaannya diferensialnya berbentuk persamaan diferensial linier dengan koefisien variabel, maka persamaan tersebut harus diubah ke dalam bentuk persamaan diferensial linier orde-2 dengan koefisien konstanta.

Penyelesaian dari persamaan differensial linier homogen orde dua dengan koefisien konstanta dapat dinyatakan dalam bentuk :

$$a_0 \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_2 y = 0, \quad a_0 \neq 0 \qquad (3.1)$$

dimana a_2 ,a_1 sebagai konstanta sehingga (3.1) setara (ekuivalen) dengan persamaan :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a \frac{dy}{dx} + by = 0 \qquad (3.2)$$

Dari persamaan di atas terlihat bahwa $a = \frac{a_1}{a_0}$ dan $b = \frac{a_2}{a_0}$, fungsi penyelesaian harus bersifat bahwa turunan-turunan y haruslah konstanta kali y. diketahui bahwa $y = e^{rx}$ memenuhi sifat itu. Dengan demikian digunakan $y = e^{rx}$ sebagai calon penyelesaian.

$y = e^{rx}, \frac{dy}{dx} = re^{rx}$ dan $\frac{d^2 y}{dx^2} = r^2 e^{rx}$ dari persamaan ini disubsitusikan ke persamaan diferensial linier homogen (2.10), sehingga diperoleh :

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a\frac{dy}{dx}+by=0$$

$$r^2e^{rx}+are^{rx}+be^{rx}=\left(r^2+ar+b\right)e^{rx}=0$$

Karena e^{rx} selalu positif, maka haruslah :

$$\left(r^2+ar+b\right)=0$$

Persamaan diatas disebut dengan persamaan karakteristik persamaan diferensial linier homogen $\frac{d^2y}{dx^2}+a\frac{dy}{dx}+by=0$.

Berdasarkan sifat persamaan kuadrat berlaku juga persamaan karakteristik dalam mencari akar persamaan karakteristik.

- **Kasus 1 : $D = a^2 - 4b > 0$**

Persamaan karakteristik mempunyai dua akar berlainan

$r_1=-\frac{a}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{a^2-4b}$ dan $r_2=-\frac{a}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{a^2-4b}$

Penyelesaian $r_1=e^{r_1x}$ dan $r_2=e^{r_2x}$

$$W(x)=W\left(e^{r_1x},e^{r_2x}\right)=\begin{vmatrix} e^{r_1(x)} & e^{r_2(x)} \\ r_1e^{r_1(x)} & r_2e^{r_2(x)} \end{vmatrix}$$

$$W(x)=(r_2-r_1)e^{(r_1+r_2)}\neq 0$$

Hal ini berarti $r_1=e^{r_1x}$ dan $r_2=e^{r_2x}$ bebas linier, maka penyelesaian umum dari persamaan differensial linier homogen adalah

$$y=\left(c_1e^{r_1x}+c_2e^{r_2x}\right)$$

- **Kasus 2 : *D = a² - 4b = 0***

Persamaan karakteristik mempunyai 1 akar real berganda

Dari persamaan (2.11) diperoleh

$$r = -\frac{a}{2}$$

Baru diperoleh satu penyelesaian e^{rx} dan mempunyai solusi umum yang berbentuk

$$y = \left(c_1 x e^{rx} + c_2 x e^{rx}\right)$$

- **Kasus 3. *D = a² - 4b < 0***

Persamaan karakteristik mempunyai dua akar kompleks

$$r_1 = -\frac{a}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{4b - a^2} = \alpha + \beta i$$

$$r_2 = -\frac{a}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{4b - a^2} = \alpha - \beta i$$

Penyelesaian

$$e^{(\alpha + \beta i)x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x} = e^{\alpha x}\left(\cos \beta x + i \sin \beta x\right)$$

Diambil bagian real dan bagian imajinernya

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\alpha x}\cos \beta x & e^{\alpha x}\sin \beta x \\ e^{\alpha x}\left(\alpha \cos \beta x - \beta \sin \beta x\right) & e^{\alpha x}\left(\alpha \sin \beta x + \beta \cos \beta x\right) \end{vmatrix}$$

$$W(x) = \beta e^{\alpha x} \neq 0, \text{ karena } \beta = \frac{1}{2}\sqrt{4b - a^2} \neq 0$$

Penyelesaian umum $e^{\alpha x}\left(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x\right)$

3.1 Persamaan Diferensial Homogen Cauchy-Euler Orde-2

Definisi 3.1.1 (Frank Ayres, 1995: 108)

Bentuk umum Persamaan Cauchy-Euler orde dua:

$$P_0 x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + P_1 x \frac{dy}{dx} + P_2 y = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.3)$$

dimana P_0, P_1, P_2 adalah konstanta- konstanta.

Contoh Persamaan diferensial Cauchy-Euler orde-2 homogen dan tak homogen.

1. $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 9x \frac{dy}{dx} + 16y = 0$

   Termasuk persamaan diferensial Cauchy-Euler orde-2 yang homogen.

2. $3x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + 7y = \sin x$

   Termasuk persamaan diferensial Cauchy-Euler orde-2 yang tak homogen.

Penyelesaian persamaan Cauchy-Euler orde-2 yang homogen dilakukan dengan jalan mencari dua selesaian yang bebas linier bagi persamaan diferensial homogen yang berkorespondensi dengan persamaan yang diberikan.

Untuk mencari solusi dari persamaan Cauchy-Euler orde-2 yang homogen dapat dilakukan dengan 2 cara, yaitu :

1. Dengan cara mengubah koefisien fungsi ke koefisien konstanta dengan menggunakan subsitusi $(a+bx) = e^t$

   Langkah-langkah yang digunakan dalam mengubah koefisien fungsi ke koefisien konstanta pada garis besarnya dapat dilakukan sebagai berikut :

   a. Misalkan $(a + bx) = e^t$ dapat diketahui bahwa $t = ln(a + bx)$

(Cara pemisalan seperti ini akan mengganti persamaan diferensial dari $\frac{dy}{dx}$ ke

$\frac{dy}{dt}$ dan $\frac{d^2y}{dx^2}$ ke $\frac{d^2y}{dt^2}$)

b. Tentukan $\frac{dy}{dt}$ sehingga diperoleh $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}.\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx}e^t = x\frac{dy}{dx}$.

c. Tentukan turunan kedua dari fungsi y terhadap t, sehingga diperoleh

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(x\frac{dy}{dx}\right)$$

$$= \frac{dx}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) + x.\frac{d}{dt}\frac{dy}{dx}$$

$$= x\frac{dy}{dx} + x.\frac{d^2y}{dx^2}.\frac{dx}{dt}$$

$$= x\frac{dy}{dx} + x^2\frac{d^2y}{dx^2}$$

Jika $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dy}{dt} + x^2\frac{d^2y}{dx^2}$ dan $\frac{dy}{dt} = x\frac{dy}{dx}$

d. Subsitusikan $\frac{dy}{dt}$ dan $\frac{d^2y}{dt^2}$ ke persamaan diferensial sehingga diperoleh persamaan diferensial Cauchy-Euler orde-2 yang homogen.

Contoh 3.1

Tentukan solusi persamaan $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 3x\frac{dy}{dx} - 3y = 0$

Jawab:

Persamaan diferensial di atas dapat juga ditulis dalam bentuk :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{3}{x}\frac{dy}{dx} - \frac{3}{x^2}y = 0$$

Sehingga diperoleh : $p(x)=\frac{3}{x}; q(x)=-\frac{3}{x^2}$ maka :

$$p(x)+x.q(x)=\frac{3}{x}-x.\frac{3}{x^2}=\frac{3}{x}-\frac{3}{x}=0$$

Dengan demikian didapat selesaian yang memenuhi persamaan diferensial di atas yaitu $y(x)=x$

Selanjutnya persamaan diferensial di atas akan diubah ke dalam bentuk persamaan diferensial homogen orde 2 denga koefisien konstanta dengan cara sebagai berikut:

a. Misalkan $x = e^t$ maka $t = ln\ x$.

$$\frac{dx}{dt}=\mathrm{e}^{\mathrm{t}}=\mathrm{x}$$

b. Tentukan turunan pertama dari fungsi y terhadap t sehingga diperoleh :

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}.\frac{dx}{dt}=\frac{dy}{dx}e^t=x\frac{dy}{dx}.$$

c. Sedangkan turunan kedua dari fungsi y terhadap t diperoleh :

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(x\frac{dy}{dx}\right)$$

$$=\frac{dx}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)+x.\frac{d}{dt}\frac{dy}{dx}$$

$$=x\frac{dy}{dx}+x.\frac{d^2y}{dx^2}.\frac{dx}{dt}$$

$$=x\frac{dy}{dx}+x^2\frac{d^2y}{dx^2}$$

Jika $\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{dy}{dt}+x^2\frac{d^2y}{dx^2}$ dan $\frac{dy}{dt}=x\frac{dy}{dx}$

d. Selanjutnya, subsitusikan $\frac{dy}{dt}$ dan $\frac{d^2y}{dt^2}$ ke persamaan diferensial di atas sehingga diperoleh :

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} + 3\frac{dy}{dt} - 3y = 0 \Leftrightarrow y'' + 2y' - 3y = 0$$

(persamaan homogen dengan koefisien konstanta)

Berdasarkan sifat persamaan kuadrat berlaku juga persamaan karakteristik dalam mencari akar-akar persamaan diferensial.

Persamaan karakteristik dari persamaan diferensial $y'' + 2y' - 3y = 0$ diperoleh dari :

misalkan $y = e^{rx}$, maka $y' = re^{rx}$ dan $y'' = r^2e^{rx}$

sehingga persamaan $y'' + 2y' - 3y = 0$ menjadi:

$$r^2e^{rx} + 2re^{rx} - 3e^{rx} = 0 \Leftrightarrow r^2 + 2r - 3 = 0$$

Akar-akar dari persamaan karakteristik tersebut adalah:

$$r^2 + 2r - 3 = 0 \Leftrightarrow (r+3)(r-1) = 0$$

$r_1 = -3$ atau $r_2 = 1$.

Solusi basisnya $y_1 = e^{-3t} = e^{-3\ln x} = x^{-3}$

$$y_2 = e^t = e^{\ln x} = x$$

Jadi solusi umum persamaan diferensial di atas

$$Y = c_1y_1 + c_2y_2 = c_1x^{-3} + c_2x$$

2. Dengan cara mengubah bentuk persamaan diferensial ke persamaan karakteristik dalam r dengan mensubsitusikan $y = (a + bx)^r$

Langkah-langkah yang digunakan dalam mengubah bentuk persamaan diferensial ke persamaan karakteristik dalam *r* dapat dilakukan sebagai berikut :

a. Misalkan $y = (a + bx)^r$

b. Tentukan y' dan y'', sehingga diperoleh :

$$y' = \frac{d}{dx}(a+bx)^r \text{ dan } y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}(a+bx)^r\right)$$

c. Selanjutnya subsitusikan y' dan y'' ke persamaan diferensial diatas sehingga diperoleh persamaan karakteristik

d. Tentukan akar-akar dari persamaan persamaan diferensial sehingga diperoleh solusi umumnya.

Contoh 3.2

Tentukan solusi $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 12x\frac{dy}{dx} + 42y = 0, x > 0$

Jawab :

a. Misalkan $y = (a + bx)^r$ = karena $a = 0, b = 1$ maka pemisalan $y = x^r$

b. Menentukan turunan pertama dan kedua dari fungsi y sehingga diperoleh:

Jika $y = x^r$ maka $\frac{dy}{dx} = rx^{r-1}, \frac{d^2y}{dx^2} = r(r-1)x^{r-2}$ subsitusikan ke soal

Maka diperoleh bentuk

$$x^2\left(r(r-1)x^{r-2}\right) - 12x\left(rx^{r-1}\right) + 42x^r = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(r^2 - r\right)x^{r-2+2} - 12rx^{r-1+1} + 42x^r = 0$$

$$\Leftrightarrow (r^2 - r)x^r - 12rx^r + 42x^r = 0$$

$$\Leftrightarrow (r^2 - r - 12r + 42)x^r = 0$$

Karena *x* > *0*, maka

$$\Leftrightarrow r^2 - 13r + 42 = 0$$

$$\Leftrightarrow (r-6)(r-7)$$

$r_1 = 6$ atau $r_2 = 7$

Solusi basis $y_1 = x^{r_1} = x^6$ dan $y_2 = x^{r_2} = x^7$

Dan solusi umumnya $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ atau $y = c_1 x^6 + c_2 x^7$

3.2 Solusi umum dari Persamaan Diferensial Homogen Cauchy-Euler orde-2 dengan Teorema Residu

Teorema 3.2.1

Persamaan diferensial dengan koefisien konstanta

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0 \qquad (3.4)$$

Misalkan f sebarang fungsi regular dengan variabel kompleks z, dimana 0 tidak bertepatan dengan 0 dalam polynomial z tidak sama dengan 0 sehingga berlaku $g(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$

Maka solusi umum dari persamaan (3.4) berdasarkan teorema residu diberikan oleh

$$y = \sum \operatorname{Res} \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)} \qquad (3.5)$$

dimana penjumlahan itu diambil atas semua fungsi singularitas dari

$$z \mapsto \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)}$$

yaitu atas semua nilai 0 dari polynomial g .(Cauchy A.L, 1887: 252-255)

Bukti : Jika

$$y = \sum \operatorname{Res} \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)}$$

$$y' = \sum \operatorname{Res} \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)} \cdot z$$

$$y'' = \sum \operatorname{Res} \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)} \cdot z^2$$

$$\vdots$$

maka

$$y^{(k)} = \sum \operatorname{Res} \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)} \cdot z^{(k)} \qquad (k = 1,\ldots,n)$$

oleh karena itu

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y$$

$$= \sum \operatorname{Res} \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)} \left(z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n\right) = \sum \operatorname{Res} f(z)e^{zx} = 0$$

karena fungsi $z \mapsto f(z)e^{zx}$ diasumsikan sebagai fungsi regular, maka menurut teorema 2.4.4 $\operatorname{Res} f(z) = 0$ sehingga $\sum \operatorname{Res} f(z)e^{zx} = 0$.

Jadi persamaan (3.5) adalah solusi dari persamaan (3.4). Untuk membuktikan bahwa persamaan (3.5) merupakan solusi umum, maka terlebih dahulu mencari akar-akar dari persamaan differensial tersebut. Yaitu mencari akar r yang merupakan suatu akar sederhana dari persamaan $g(z) = 0$, yang merupakan suatu kutub sederhana dari fungsi

$$z \mapsto \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)}$$

maka

$$\operatorname*{Res}_{z=r} \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)} = \lim_{z\to r}(z-r)\frac{f(z)e^{zx}}{g(z)} = \lim_{z\to r}\frac{f(z)e^{zx}}{g'(z)} = \frac{f(r)}{g'(r)}e^{rx}$$

Ketika f suatu fungsi sebarang, sehingga $f(r)/g'(r)$ adalah suatu konstanta yang sebarang yang mana akar sederhana dari persamaan karakteristik $g(z)=0$ sesuai dengan suku Ce^{rx} (C adalah konstanta yang sebarang). Sehingga ada tiga kasus yaitu:

1. *Jika r adalah akar rangkap*, berorder s dari persamaan $g(z)=0$, menurut teorema 2.4.4 maka diperoleh persamaan berikut :

$$\operatorname*{Res}_{z=r} \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)} = \frac{1}{(s-1)!}\lim_{z\to r}\frac{\partial^{s-1}}{\partial z^{s-1}}\cdot\frac{f(z)e^{zx}}{g(z)} \tag{3.6}$$

Dimana $(z-r)^s = g(z)$

Untuk $s=1$

$$\begin{aligned}\operatorname*{Res}_{z=r} \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)} &= \frac{1}{(s-1)!}\lim_{z\to r}\frac{\partial^{s-1}}{\partial z^{s-1}}\cdot\frac{f(z)e^{zx}}{g(z)}\\ &= \lim_{z\to r}\frac{f(z)e^{zx}}{g(z)}\\ &= \frac{f(r)e^{rx}}{g(r)} = C_1e^{rx}\end{aligned}$$

Untuk $s=2$

$$\begin{aligned}\operatorname*{Res}_{z=r} \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)} &= \frac{1}{(s-1)!}\lim_{z\to r}\frac{\partial^{s-1}}{\partial z^{s-1}}\cdot\frac{f(z)e^{zx}}{g(z)}\\ &= \lim_{z\to r}\frac{d}{dz}\frac{f(z)e^{zx}}{g(z)}\\ &= \lim_{z\to r}\frac{f(z)e^{zx}}{g(z)}\cdot x\\ &= \frac{f(r)e^{rx}}{g(r)}\cdot x = C_2xe^{rx}\\ &\vdots\end{aligned}$$

Untuk $s=s$

$$\operatorname*{Res}_{z=r} \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)} = \frac{1}{(s-1)!} \lim_{z \to r} \frac{\partial^{s-1}}{\partial z^{s-1}} \cdot \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)}$$

$$= \frac{1}{(s-1)!} \lim_{z \to r} \frac{d^{s-1}}{dz^{s-1}} \cdot \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)}$$

$$= \lim_{z \to r} \frac{d^{s-1}}{dz^{s-1}} \cdot \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)}$$

$$= \lim_{z \to r} \frac{f(z)e^{rx}}{g(z)} \cdot x^{s-1}$$

$$= \frac{f(r)e^{rx}}{g(r)} \cdot x^{s-1} = C_s x^{s-1} e^{rx}$$

Ketika f fungsi yang sebarang, $f(r), f'(r), \ldots, f^{(s-1)}(r)$ konstanta sebarang, jadi persamaan (3.4) menjadi

$$\left(C_1 + C_2 x + \ldots + C_s x^{s-1}\right)e^{rx} \qquad (3.7)$$

Dimana $C_1, \ldots, C_s$ adalah konstanta yang sebarang

Contoh 3.3

Gunakan residu umtuk mencari solusi umum dari persamaan diferensial berikut:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + y = 0$$

Jawab:

a. Misalkan $x = e^t$ maka $t = \ln x$.

$$\frac{dx}{dt} = \mathrm{e}^{\mathrm{t}} = \mathrm{x}$$

b. Carilah turunan pertama fungsi y terhadap t, diperoleh:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} . \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx} e^t = x \frac{dy}{dx}.$$

c. Sedangkan Turunan kedua dari fungsi *y* terhadap *t* diperoleh

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(x \frac{dy}{dx}\right)$$

$$= \frac{dx}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) + x.\frac{d}{dt}\frac{dy}{dx}$$

$$= x\frac{dy}{dx} + x.\frac{d^2y}{dx^2}.\frac{dx}{dt}$$

$$= x\frac{dy}{dx} + x^2\frac{d^2y}{dx^2}$$

Jika $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dy}{dt} + x^2\frac{d^2y}{dx^2}$ dan $\frac{dy}{dt} = x\frac{dy}{dx}$

d. Subsitusikan $\frac{dy}{dt}$ dan $\frac{d^2y}{dt^2}$ ke contoh soal maka diperoleh

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} - \frac{dy}{dt} + y = 0 \Leftrightarrow y'' - 2y' + y = 0$$

(persamaan homogen dengan koefisien konstanta)

e. Selanjutnya mencari Persamaan karakteristik dari persamaan differensial di atas adalah :

$$y'' - 2y' + y = 0$$
$$r^2 - 2r + 1 = 0$$
$$(r-1)(r-1) = 0$$

f. Dari persamaan karakteristik tersebut diperoleh akar rangkap yaitu $(r-1)$. Akar-akar tersebut akan dipergunakan untuk mencari solusi umum. Dimana r merupakan akar sederhana dari $g(z) = 0$, sehingga diperoleh :

$$g(z) = (z-1)^2$$

Maka solusi umum dari persamaan diferensial diatas dengan menggunakan teorema residu diperoleh :

$$y = \operatorname*{Re}_{z\to 1} s \frac{f(z)e^{zx}}{(z-1)^2}$$

$$y' = \operatorname*{Re}_{z\to 1} s \frac{f(z)e^{zx}}{(z-1)^2} \cdot z$$

$$y'' = \operatorname*{Re}_{z\to 1} s \frac{f(z)e^{zx}}{(z-1)^2} \cdot z^2$$

Untuk membuktikan bahwa residu merupakan akar-akar dari persamaan differensial diatas, maka subsitusikan *y, y'* dan *y''* ke persamaan (3.5).

$$\begin{aligned}
y &= \sum \operatorname{Re} s \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)} \\
&= \operatorname*{Re}_{z\to 1} s \frac{f(z)e^{zx}}{(z-1)^2} \cdot z^2 - 2 \operatorname*{Re}_{z\to 1} s \frac{f(z)e^{zx}}{(z-1)^2} \cdot z + \operatorname*{Re}_{z\to 1} s \frac{f(z)e^{zx}}{(z-1)^2} \\
&= \lim_{z\to 1} \frac{d}{dz}\left(\frac{f(z)e^{zx}}{(z-1)^2} \cdot z^2 \right) - 2 \lim_{z\to 1} \frac{d}{dz}\left(\frac{f(z)e^{zx}}{(z-1)^2} \cdot z \right) + \lim_{z\to 1} \frac{d}{dz}\left(\frac{f(z)e^{zx}}{(z-1)^2} \right) \\
&= \lim_{z\to 1} \frac{d}{dz}\left(z^2 - 2z + 1\right)\left(\frac{f(z)e^{zx}}{(z-1)^2} \right) \\
&= \lim_{z\to 1}(2z-2)\left(\frac{(f'(z)e^{zx} + xf(z)e^{zx})(z-1)^2 - 2(z-1)f(z)e^{zx}}{(z-1)^4} \right) \\
&= \lim_{z\to 1}(2z-2)\left(\frac{(f'(z)e^{zx} + xf(z)e^{zx})(z-1)^2}{(z-1)^4} - \frac{2(z-1)f(z)e^{zx}}{(z-1)^4} \right) \\
&= \lim_{z\to 1}(2z-2)\left(\frac{(f'(z) + xf(z))e^{zx}}{(z-1)^2} - \frac{2f(z)e^{zx}}{(z-1)^3} \right) \\
&= (2-2)\left(\frac{f'(1) + xf(1)e^{x}}{(1-1)^2} - \frac{2f(z)e^{x}}{(1-1)^3} \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Karena $\sum \operatorname{Re} s \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)} = 0$, maka terbukti bahwa residu merupakan akar dari persamaan differensial linier orde 2.

$$y = \operatorname*{Res}_{z=1} \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)} = \operatorname*{Res}_{z\to 1} \frac{f(z)e^{zx}}{(z-1)^2}$$

$$= \lim_{z\to 1} \frac{d}{dz}\left(f(z)e^{zx}\right)$$

$$= \lim_{z\to 1}\left(f'(z)e^{zx} + f(z)xe^{zx}\right)$$

$$= \lim_{z\to 1}\left(f'(z) + f(z)\right)e^{zx}$$

$$= \left(f'(1) + xf(1)\right)e^{zx}$$

$$= \left(C_1 + C_2 x\right)e^{zx}$$

Ce^{rx} (C adalah konstanta yang sebarang)

2. *Jika r adalah akar berbeda*, maka

$$\operatorname*{Res}_{z=r} \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)} = \frac{1}{(s-1)!} \lim_{z\to r} \frac{\partial^{s-1}}{\partial z^{s-1}} \cdot \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)} \qquad (3.8)$$

Dimana $(z-r_1)(z-r_2)\ldots(z-r_s) = g(z)$

Untuk $z = r_1$

$$\operatorname*{Res}_{z=r_1} \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)} = \frac{1}{(s-1)!} \lim_{z\to r_1} \frac{\partial^{s-1}}{\partial z^{s-1}} \cdot \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)}$$

$$= \lim_{z\to r_1} \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)}$$

$$= \frac{f(r_1)e^{r_1 x}}{g(r_1)} = C_1 e^{r_1 x}$$

Untuk $z = r_2$

$$\operatorname*{Res}_{z=r_2} \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)} = \frac{1}{(s-1)!} \lim_{z\to r_2} \frac{\partial^{s-1}}{\partial z^{s-1}} \cdot \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)}$$

$$= \lim_{z\to r_2} \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)}$$

$$= \frac{f(r_2)e^{r_2 x}}{g(r_2)} = C_2 e^{r_2 x}$$

$$\vdots$$

Untuk $z = r_s$

$$\operatorname*{Res}_{z=r_s} \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)} = \frac{1}{(s-1)!} \lim_{z \to r_s} \frac{\partial^{s-1}}{\partial z^{s-1}} \cdot \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)}$$

$$= \lim_{z \to r_s} \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)}$$

$$= \frac{f(r_s)e^{r_s x}}{g(r_s)} = C_s e^{r_s x}$$

Ketika f fungsi yang sebarang, $f(r_1 = C_1), f(r_2 = C_2), \ldots, f(r_s = C_s)$ konstanta sebarang, jadi persamaan (3.6) menjadi

$$\left(C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + C_3 e^{r_3 x} \ldots + C_s e^{r_s x}\right) \tag{3.9}$$

Dimana $C_1, \ldots, C_s$ adalah konstanta yang sebarang

Contoh 3.4

Gunakan residu umtuk mencari solusi umum dari persamaan diferensial berikut:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

Jawab:

a. Misalkan *x = e^t^* maka *t = ln x.*

$$\frac{dx}{dt} = \mathrm{e}^{\mathrm{t}} = \mathrm{x}$$

b. Mencari turunan pertama dari fungsi *y* terhadap *t* sehingga diperoleh :

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} . \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx} e^t = x \frac{dy}{dx}.$$

c. Turunan kedua dari fungsi *y* terhadap *t* diperoleh

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(x \frac{dy}{dx}\right)$$

$$= \frac{dx}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) + x . \frac{d}{dt} \frac{dy}{dx}$$

$$= x\frac{dy}{dx} + x.\frac{d^2y}{dx^2}.\frac{dx}{dt}$$

$$= x\frac{dy}{dx} + x^2\frac{d^2y}{dx^2}$$

Jika $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dy}{dt} + x^2\frac{d^2y}{dx^2}$ dan $\frac{dy}{dt} = x\frac{dy}{dx}$

d. Subsitusikan $\frac{dy}{dt}$ dan $\frac{d^2y}{dt^2}$ ke contoh soal maka diperoleh

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} - 2\frac{dy}{dt} + 2y = 0 \Leftrightarrow y'' - 3y' + 2y = 0$$

(persamaan homogen dengan koefisien konstanta)

$y'' - 3y' + 2y = 0$ ……………………………………*)

e. Selanjutnya mencari akar-akar dari persamaan differensial diatas dengan cara:

$y'' - 3y' + 2y = 0$

$r^2 - 3r + 2 = 0$

$(r-2)(r-1) = 0$

f. Dari persamaan karakteristik tersebut diperoleh akar berbeda yaitu $(r-2)(r-1)$. Akar-akar tersebut akan dipergunakan untuk mencari solusi umum. Dimana r merupakan akar sederhana dari $g(z) = 0$, sehingga diperoleh :

$$g(z) = (z-2)(z-1)$$

Maka solusi umum dari persamaan diferensial diatas, berdasarkan teorema residu diperoleh:

$$y = \sum \operatorname{Res} \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)}$$

$$y = \operatorname*{Res}_{z=2} \frac{f(z)e^{zx}}{(z-2)} + \operatorname*{Res}_{z=1} \frac{f(z)e^{zx}}{(z-1)}$$

$$y' = \underset{z=2}{\operatorname{Res}} \frac{f(z)e^{zx}}{(z-2)} \cdot z + \underset{z=1}{\operatorname{Res}} \frac{f(z)e^{zx}}{(z-1)} \cdot z$$

$$y'' = \underset{z=2}{\operatorname{Res}} \frac{f(z)e^{zx}}{(z-2)} \cdot z^2 + \underset{z=1}{\operatorname{Res}} \frac{f(z)e^{zx}}{(z-1)} \cdot z^2$$

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa residu merupakan akar-akar dari persamaan diferensial diatas, yaitu dengan cara mensubsitusikan *y, y'* dan *y''* ke persamaan *)

$$y = \sum \operatorname{Res} \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)}$$

$$= \left(\underset{z=2}{\operatorname{Res}} \frac{f(z)e^{zx}}{(z-2)} \cdot z^2 + \underset{z=1}{\operatorname{Res}} \frac{f(z)e^{zx}}{(z-1)} z \cdot \right) - 3\left(\underset{z=2}{\operatorname{Res}} \frac{f(z)e^{zx}}{(z-2)} \cdot z + \underset{z=1}{\operatorname{Res}} \frac{f(z)e^{zx}}{(z-1)} \cdot z \right) +$$
$$2\left(\underset{z=2}{\operatorname{Res}} \frac{f(z)e^{zx}}{(z-2)} + \underset{z=1}{\operatorname{Res}} \frac{f(z)e^{zx}}{(z-1)} \right)$$

$$= \lim_{z\to 2}(z^2 - 3z + 2)\left(\frac{f(z)e^{zx}}{(z-2)} \right) + \lim_{z\to 1}(z^2 - 3z + 2)\left(\frac{f(z)e^{zx}}{(z-1)} \right)$$
$$= (2^2 - 3(2) + 2)\left(\frac{f(z)e^{zx}}{(z-2)} \right) + (1^2 - 3(1) + 2)\left(\frac{f(z)e^{zx}}{(z-1)} \right)$$
$$= 0 + 0 + 0$$
$$= 0$$

$$y = \sum \operatorname{Res} \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)}$$
$$= \underset{z=2}{\operatorname{Res}} \frac{f(z)e^{zx}}{(z-2)} + \underset{z=1}{\operatorname{Res}} \frac{f(z)e^{zx}}{(z-1)}$$
$$= \lim_{z\to 2} f(z)e^{zx} + \lim_{z\to 1} f(z)e^{zx}$$
$$= f(2)e^{2x} + f(1)e^{-x}$$
$$= C_1 e^{2x} + C_2 e^{x}$$

Ce^{rx} (C adalah konstanta yang sebarang)

3. *Jika r adalah akar kompleks*, maka

$$\operatorname*{Re}_{z=r} s \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)} = \frac{1}{(s-1)!} \lim_{z\to r} \frac{\partial^{s-1}}{\partial z^{s-1}} \cdot \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)} \tag{3.10}$$

Dimana $(z - r_i) = g(z)$

$$r_i = \alpha + \beta i \qquad , i = 1,2,\ldots,s$$

$$\begin{aligned} Y_i &= e^{(\alpha \pm \beta i)x} \\ &= e^{\alpha x} \pm e^{i\beta x} \\ &= e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x} \\ &= e^{\alpha x}(\cos \beta x \pm i \sin \beta x) \end{aligned}$$

Solusi umumnya yang berkaitan dengan akar kompleks ini adalah:

$$\begin{aligned} Y &= C_1 e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x) + C_2 e^{\alpha x}(\cos \beta x - i \sin \beta x) \\ &= e^{\alpha x}((C_1 + C_2)\cos \beta x + i(C_1 - C_2)\sin \beta x) \\ Y &= e^{\alpha x}(A \cos \beta x + B \sin \beta x) \end{aligned}$$

Dimana $A = C_1 + C_2$, $B = i(C_1 - C_2)$

Untuk $\alpha + i\beta$

$$\begin{aligned} \operatorname*{Re}_{z=r} s \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)} &= \frac{1}{(s-1)!} \lim_{z\to r} \frac{\partial^{s-1}}{\partial z^{s-1}} \cdot \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)} \\ &= \lim_{z\to r} \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)} \\ &= \frac{f(\alpha + \beta i)e^{(\alpha+\beta i)x}}{g(\alpha + \beta i)} = C_1 e^{(\alpha+\beta i)x} = C_1 e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x) \end{aligned}$$

Untuk $\alpha - i\beta$

$$C_2 e^{\alpha x}(\cos \beta x - i \sin \beta x)$$

$$\begin{aligned} maka\ \ y &= e^{\alpha x}((C_1 + C_2)\cos \beta x + (C_1 - C_2)i \sin \beta x) \\ &= e^{\alpha x}(A \cos \beta x + B \sin \beta x) \end{aligned}$$

Untuk $\alpha + i\beta$

$$\underset{z=r}{\operatorname{Res}} \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)} = \frac{1}{(s-1)!} \lim_{z \to r} \frac{\partial^{s-1}}{\partial z^{s-1}} \cdot \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)}$$
$$= \lim_{z \to r} \frac{d}{dz} \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)}$$
$$= \lim_{z \to r} \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)} \cdot x$$
$$= \frac{f(\alpha + \beta i)e^{(\alpha+\beta i)x}}{g(\alpha + \beta i)} \cdot x = C_2 x e^{(\alpha+\beta i)x} = C_2 x e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x)$$

Untuk $\alpha - i\beta$

$$C_3 x e^{\alpha x}(\cos \beta x - i \sin \beta x)$$
$$maka\ \ y = x e^{\alpha x}((C_2 + C_3)\cos \beta x + (C_2 - C_3) i \sin \beta x)$$
$$= x e^{\alpha x}(A \cos \beta x + B \sin \beta x)$$
$$\vdots$$

Untuk $\alpha + i\beta$

$$\underset{z=r}{\operatorname{Res}} \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)} = \frac{1}{(s-1)!} \lim_{z \to r} \frac{\partial^{s-1}}{\partial z^{s-1}} \cdot \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)}$$
$$= \frac{1}{(s-1)!} \lim_{z \to r} \frac{d^{s-1}}{dz^{s-1}} \cdot \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)}$$
$$= \lim_{z \to r} \frac{d^{s-1}}{dz^{s-1}} \cdot \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)}$$
$$= \lim_{z \to r} \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)} \cdot x^{s-1}$$
$$= \frac{f(\alpha + \beta i)e^{(\alpha+\beta i)x}}{g(\alpha + \beta i)} \cdot x^{s-1} = C_s x^{s-1} e^{(\alpha+\beta i)x}$$
$$= C_s x^{s-1} e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x)$$

Untuk $\alpha - i\beta$

$$C_s x^{s-1} e^{\alpha x}(\cos \beta x - i \sin \beta x)$$
$$maka\ \ y = x^{s-1} e^{\alpha x}((C_s + C_s)\cos \beta x + (C_s - C_s) i \sin \beta x)$$
$$= x^{s-1} e^{\alpha x}(A \cos \beta x + B \sin \beta x)$$

Sehingga solusi persamaan (3.8) menjadi:

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, x e^{\alpha x} \cos \beta x, x^2 e^{\alpha x} \cos \beta x, \ldots, x^{s-1} e^{\alpha x} \cos \beta x$$

$e^{\alpha x}\sin\beta x, xe^{\alpha x}\sin\beta x, x^2e^{\alpha x}\sin\beta x,..., x^{s-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$

Dengan kata lain untuk akar r yang berorder s dari persamaan karakteristik $g(z)=0$ sesuai dengan suku pada persamaan (3.7)

Dengan demikian persamaan (3.5) adalah solusi dari persamaan (3.4) mengandung n konstanta yang sebarang, yang mengakibatkan persamaan (3.5) adalah solusi umum dari persamaan (3.4).

Contoh 3.5

Gunakan residu umtuk mencari solusi umum dari persamaan diferensial berikut:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-5x\frac{dy}{dx}+10y=0$$

Jawab:

a. Misalkan $x = e^t$ maka $t = \ln x$.

$$\frac{dx}{dt}=\mathrm{e}^{\mathrm{t}}=\mathrm{x}$$

b. Mencari turunan pertama dari fungsi y terhadap t sehingga diperoleh:

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}.\frac{dx}{dt}=\frac{dy}{dx}e^t=x\frac{dy}{dx}.$$

c. Turunan kedua dari fungsi y terhadap t diperoleh

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(x\frac{dy}{dx}\right)$$

$$=\frac{dx}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)+x.\frac{d}{dt}\frac{dy}{dx}$$

$$=x\frac{dy}{dx}+x.\frac{d^2y}{dx^2}.\frac{dx}{dt}$$

$$= x\frac{dy}{dx} + x^2\frac{d^2y}{dx^2}$$

Jika $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dy}{dt} + x^2\frac{d^2y}{dx^2}$ dan $\frac{dy}{dt} = x\frac{dy}{dx}$

d. Subsitusikan $\frac{dy}{dt}$ dan $\frac{d^2y}{dt^2}$ ke contoh soal maka diperoleh

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} - 5\frac{dy}{dt} + 10y = 0 \Leftrightarrow y'' - 6y' + 10y = 0$$

(persamaan homogen dengan koefisien konstanta)

e. Selanjutnya mencari Persamaan karakteristik dari persamaan differensial di atas adalah :

$y'' - 6y' + 10y = 0$ ....*)

f. Sedangkan akar karakteristiknya yang merupakan akar kompleks yang konjugatnya $3 \pm 2i$

$Y_1 = e^{(3+2i)x}$

$Y_2 = e^{(3-2i)x}$

Dimana $(z - r_i) = g(z)$

$r_i = \alpha + \beta i \qquad ,i = 1,2,...,s$

$\alpha = 3$ dan $\beta = 2$

maka

$r_i = 3 + 2i$

$$\begin{aligned} Y_i &= e^{(3\pm 2i)x} \\ &= e^{3x} \pm e^{i2x} \\ &= e^{3x} \cdot e^{i2x} \\ &= e^{3x}(\cos 2x \pm i \sin 2x) \end{aligned}$$

Solusi umumnya yang berkaitan dengan akar kompleks ini adalah:

$$Y = C_1 e^{3x}(\cos 2x + i\sin 2x) + C_2 e^{3x}(\cos 2x - i\sin 2x)$$
$$= e^{3x}((C_1 + C_2)\cos 2x + i(C_1 - C_2)\sin 2x)$$
$$Y = e^{3x}(A\cos 2x + B\sin 2x)$$

Dimana $A = C_1 + C_2$, $B = i(C_1 - C_2)$

Untuk $\alpha + i\beta$, $\alpha = 3$ dan $\beta = 2$

$$\operatorname*{Res}_{z=r} \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)} = \frac{1}{(s-1)!}\lim_{z\to r}\frac{\partial^{s-1}}{\partial z^{s-1}}\cdot\frac{f(z)e^{zx}}{g(z)}$$
$$= \lim_{z\to r}\frac{f(z)e^{zx}}{g(z)}$$
$$= \frac{f(3+2i)e^{(3+2i)x}}{g(3+2i)} = C_1 e^{(3+2i)x} = C_1 e^{3x}(\cos 2x + i\sin 2x)$$

Untuk $\alpha - i\beta$, $\alpha = 3$ dan $\beta = 2$

$$C_2 e^{3x}(\cos 2x - i\sin 2x)$$
$$maka\ y = e^{3x}((C_1 + C_2)\cos 2x + (C_1 - C_2)i\sin 2x)$$
$$= e^{3x}(A\cos 2x + B\sin 2x)$$

Untuk $\alpha + i\beta$, $\alpha = 3$ dan $\beta = 2$

$$\operatorname*{Res}_{z=r} \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)} = \frac{1}{(s-1)!}\lim_{z\to r}\frac{\partial^{s-1}}{\partial z^{s-1}}\cdot\frac{f(z)e^{zx}}{g(z)}$$
$$= \lim_{z\to r}\frac{d}{dz}\frac{f(z)e^{zx}}{g(z)}$$
$$= \lim_{z\to r}\frac{f(z)e^{zx}}{g(z)}\cdot x$$
$$= \frac{f(3+2i)e^{(3+2i)x}}{g(3+2i)}\cdot x = C_2 x e^{(3+2i)x} = C_2 x e^{3x}(\cos 2x + i\sin 2x)$$

Untuk $\alpha - i\beta$, $\alpha = 3$ dan $\beta = 2$

$$C_3 x e^{3x}(\cos 2x - i\sin 2x)$$
$$maka\ y = xe^{3x}((C_2 + C_3)\cos 2x + (C_2 - C_3)i\sin 2x)$$
$$= xe^{3x}(A\cos 2x + B\sin 2x)$$
$$\vdots$$

Untuk $\alpha + i\beta$, $\alpha = 3$ dan $\beta = 2$

$$\operatorname*{Res}_{z=r} s \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)} = \frac{1}{(s-1)!}\lim_{z\to r}\frac{\partial^{s-1}}{\partial z^{s-1}}\cdot\frac{f(z)e^{zx}}{g(z)}$$
$$= \frac{1}{(s-1)!}\lim_{z\to r}\frac{d^{s-1}}{dz^{s-1}}\cdot\frac{f(z)e^{zx}}{g(z)}$$
$$= \lim_{z\to r}\frac{d^{s-1}}{dz^{s-1}}\cdot\frac{f(z)e^{zx}}{g(z)}$$
$$= \lim_{z\to r}\frac{f(z)e^{zx}}{g(z)}\cdot x^{s-1}$$
$$= \frac{f(3+2i)e^{(3+2i)x}}{g(3+2i)}\cdot x^{s-1} = C_s x^{s-1}e^{(3+2i)x}$$
$$= C_s x^{s-1}e^{3x}(\cos 2x + i\sin 2x)$$

Untuk $\alpha - i\beta,\ \alpha = 3$ dan $\beta = 2$

$$C_s x^{s-1}e^{3x}(\cos 2x - i\sin 2x)$$
$$\textit{maka } y = x^{s-1}e^{3x}((C_s + C_s)\cos 2x + (C_s - C_s)i\sin 2x)$$
$$= x^{s-1}e^{3x}(A\cos 2x + B\sin 2x)$$

Sehingga solusi persamaan (3.10) menjadi:

$$e^{3x}\cos 2x, xe^{3x}\cos 2x, x^2e^{3x}\cos 2x, \ldots, x^{s-1}e^{3x}\cos 2x$$

$$e^{3x}\sin 2x, xe^{3x}\sin 2x, x^2e^{3x}\sin 2x, \ldots, x^{s-1}e^{3x}\sin 2x$$

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Dari pembahasan tentang persamaan diferensial Cauchy-Euler yang homogen dengan koefisien konstanta dengan menggunakan Teorema Residu pada bab III, maka dapat disimpulkan bahwa cara menyelesaikan persamaan diferensial Cauchy – Euler yang homogen dapat digunakan langkah-langkah sebagai berikut:

Apabila persamaan diferensial Cauchy-Euler berkoefisien variabel, maka persamaan tersebut harus dirubah terlebih dahulu ke dalam bentuk persamaan diferensial dengan koefisien konstanta. Untuk mencari solusi dari persamaan Cauchy-Euler maka menggunakan subsitusi $(a+bx) = e^t$ (akan mengubah koefisien fungsi ke koefisien konstanta) atau menggunakan subsitusi $(a + bx)^r = y$ (akan mengubah variabel persamaan ke bentuk karakteristik dalam r).

a. Cara mencari solusi persamaan Cauchy-Euler dengan menggunakan subsitusi $(a + bx) = e^t$. Dari pemisalan $(a + bx) = e^t$ dapat diketahui bahwa $t = ln(a + bx)$.

   Cara pemisalan seperti ini akan mengganti

   Persamaan diferensial dari $\frac{dy}{dx}$ ke $\frac{dy}{dt}$ dan $\frac{d^2y}{dx^2}$ ke $\frac{d^2y}{dt^2}$

   Sehingga diperoleh persamaan diferensial homogen orde dua dengan koefisien konstanta dalam y dan t.

b. Cara mencari solusi persamaan Cauchy-Euler dengan subsitusi $(a + bx)^r = y$. Pemisalan $(a + bx)^r = y$ akan mengubah bentuk persamaan diferensial ke persamaan karakteristik dalam *r* dengan cara mendiferensialkan $y = (a + bx)^r$ kemudian subsitusikan

$$y' = \frac{d}{dx}(a+bx)^r \text{ dan } y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}(a+bx)^r\right)$$

Jika diberikan persamaan diferensial linear homogen Orde-n dengan koefisien konstanta yang mempunyai bentuk umum:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0 \qquad (4.1)$$

mempunyai penyelesaian:

$$y = \sum \operatorname{Res} \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)} \qquad (4.2)$$

dengan $g(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$ dan $f(z)$ adalah fungsi regular.

Dimana penjumlahan itu diambil atas semua fungsi singularitas dari

$$z \mapsto \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)}$$

yaitu atas semua nilai 0 dari polynomial g

Dalam menemukan solusi persamaan diferensial linear orde-n dengan menggunakan Teorema Residu mempunyai 3 jenis penyelesaian sebagai berikut:

a. *Jika r adalah akar rangkap,* berorder s dari persamaan $g(z) = 0$, maka

$$\operatorname*{Res}_{z=r} \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)} = \frac{1}{(s-1)!} \lim_{z \to r} \frac{\partial^{s-1}}{\partial z^{s-1}} \cdot \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)} \qquad (4.5)$$

Dimana $(z-r)^s = g(z)$

Ketika f fungsi yang sebarang, $f(r), f'(r), \ldots, f^{(s-1)}(r)$ konstanta sebarang, jadi persamaan (4.5) menjadi

$$\left(C_1 + C_2 x + \ldots + C_s x^{s-1}\right) e^{rx}$$

Dimana $C_1,\ldots,C_s$ adalah konstanta yang sebarang

b. *Jika* r *adalah akar berbeda*, maka

$$\operatorname*{Res}_{z=r} \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)} = \frac{1}{(s-1)!} \lim_{z\to r} \frac{\partial^{s-1}}{\partial z^{s-1}} \cdot \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)} \qquad (4.6)$$

Dimana $(z - r_1)(z - r_2)\ldots(z - r_s) = g(z)$

Ketika f fungsi yang sebarang, $f(r_1 = C_1), f(r_2 = C_2),\ldots, f(r_s = C_s)$ konstanta sebarang, jadi persamaan (4.6) menjadi

$$\left(C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + C_3 e^{r_3 x} \ldots + C_s e^{r_s x}\right)$$

Dimana $C_1,\ldots,C_s$ adalah konstanta yang sebarang

c. *Jika* r *adalah akar kompleks*, maka

$$\operatorname*{Res}_{z=r} \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)} = \frac{1}{(s-1)!} \lim_{z\to r} \frac{\partial^{s-1}}{\partial z^{s-1}} \cdot \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)}$$

Dimana $(z - r_i) = g(z)$

$$r_i = \alpha + \beta i \qquad , i = 1,2,\ldots,s$$

$$\begin{aligned} Y_i &= e^{(\alpha+\beta i)x} \\ &= e^{\alpha x} + e^{i\beta x} \\ &= e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x} \\ &= e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) \end{aligned}$$

Solusi umumnya yang berkaitan dengan akar kompleks ini adalah:

$$\begin{aligned} Y &= C_1 e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) + C_2 e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x) \\ &= e^{\alpha x}((C_1 + C_2)\cos\beta x + i(C_1 - C_2)\sin\beta x) \\ Y &= e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x) \end{aligned}$$

Dimana $A = C_1 + C_2$, $B = i(C_1 - C_2)$

Sehingga solusi persamaan menjadi:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, xe^{\alpha x}\cos\beta x, x^2e^{\alpha x}\cos\beta x,..., x^{s-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$$

$$e^{\alpha x}\sin\beta x, xe^{\alpha x}\sin\beta x, x^2e^{\alpha x}\sin\beta x,..., x^{s-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$$

4.2 Saran

Masalah yang dibahas dalam skripsi ini masih berbentuk sederhana karena hanya terbatas pada pembahasan persamaan diferensial Cauchy-Euler yang homogen dengan menggunakan Teorema Residu saja. Untuk itu perlu adanya pembahasan lebih lanjut, misalnya tentang aplikasi Teorema Residu pada masalah lainnya seperti pada persamaan diferensial parsial dan pada persamaan differensial Cauchy-Euler orde-*n*.

Daftar Pustaka

A. L. Cauchy. 1887. *"Application du calcul des residus a I'integration des equation differentialles lineaires et a coefficients constants"*. Paris: Exercises de mathematiques

Ayres, Frank. 1995. *Persamaan Diferensial Dalam Satuan SI Metric*. Jakarta: Erlangga

Baiduri. 2002. *Persamaan Diferensial dan Matematika Model*. Malang: UMM Press

Brand, Louis. 1996. *Differential and Difference Equation*. New York: John Wiley and Sons,Inc

Nagle, R Kent and Saff Edwart B. 1996. Fundamental of *Differential Equations and Boundary Value Problems.* Florida: Addison. Wesley Publishing Company, Inc.

Pliouras, John D. 1987. *Peubah Kompleks untuk Ilmuwan dan Insinyur*. Jakarta: Erlangga

Soemantri, R. 1994. *Fungsi Variabel Kompleks*. Yogyakarta: -

Triatmodjo, Bambang. 2002. *Metode Numerik*.Yogyakarta: Beta Offset

DEPARTEMEN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang (0341)551345
Fax. (0341)572533

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : YUDIA ISMAIL SYAFITRI
Nim : 04510047
Fakultas/ Jurusan : Sains Dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Aplikasi Residu Kompleks pada Persamaan Diferensial Homogen Cauchy-Euler Orde Dua
Pembimbing I : Drs. H. Turmudi, M. Si
Pembimbing II : Abdul Aziz, M. Si

No	Tanggal	Keterangan	Tanda Tangan
1.	26 Januari 2009	Konsultasi Masalah	1.
2.	6 Februari 2009	Konsultasi judul	2.
3.	10 Februari 2009	ACC Judul + Konsultasi Bab I	3.
4.	12 Februari 2009	Revisi Bab I	4.
5.	18 Februari 2009	ACC Bab I + Konsultasi Bab II	5.
6.	20 Maret 2009	Revisi Bab II	6.
7.	21 Maret 2009	Revisi Bab II	7.
8.	23 Maret 2009	ACC Bab II + Konsultasi Bab III	8.
9.	15 Juli 2009	Revisi Bab III	9.
10.	15 Juli 2009	Konsultasi Kajian Keagamaan	10.
11.	21 Juli 2009	ACC Kajian Keagamaan	11.
12.	25 Juli 2009	ACC Bab III + Bab IV	12.
13.	25 Juli 2009	Konsultasi Keseluruhan	13.
14.	25 Juli 2009	ACC Keseluruhan	14.

Malang, 25 Juli 2009
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M.Si
NIP. 150 318 321