LAPANGAN BUJUR SANGKAR SEMI AJAIB

SKRIPSI

OLEH
MOHAMAD YUNUS
NIM. 10610097

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG

2015

LAPANGAN BUJUR SANGKAR SEMI AJAIB

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan
dalam Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh
Mohamad Yunus
NIM. 10610097

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2015

LAPANGAN BUJUR SANGKAR SEMI AJAIB

SKRIPSI

Oleh
Mohamad Yunus
NIM. 10610097

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 30 September 2015

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Dr. Abdussakir, M.Pd	Ach. Nashichuddin, M.A
NIP. 19751006 200312 1 001	NIP. 19730705 200003 1 002

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

LAPANGAN BUJUR SANGKAR SEMI AJAIB $M_n(\mathbb{R})$

SKRIPSI

Oleh
Mohamad Yunus
NIM. 10610097

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal 29 Oktober 2015

Penguji Utama	:	H. Wahyu H. Irawan, M.Pd	....
Ketua Penguji	:	Hairur Rahman, M.Si	....
Sekretaris Penguji	:	Dr. Abdussakir, M.Pd	....
Anggota Penguji	:	Ach. Nashichuddin, M.A	....

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd

NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Mohamad Yunus
NIM	: 10610097
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul	: Lapangan Bujur Sangkar Semi Ajaib

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan hasil pikiran atau tulisan orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada kajian pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 30 September 2015
Yang membuat pernyataan,

Mohamad Yunus
NIM. 10610097

MOTO

“Saya datang, saya bimbingan, saya ujian, saya revisi dan saya menang.”

PERSEMBAHAN

بِسْمِ اللهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيْمِ

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Ibunda tersayang Sri Iswati yang selalu memberi dorongan serta do'a dan semangat pada penulis

Ayahanda tersayang Sanusi Achmadi yang selalu menginspirasi penulis dengan kegigihan dan kesabarannya

Ketiga saudara tersayang Lina Dya Wahyuni, Lukman Adi dan Marta Listya Rini yang senantiasa memberikan motivasi yang tiada tara.

KATA PENGANTAR

Segala puji bagi Allah Swt. atas rahmat, taufik serta hidayah-Nya, sehingga penulis dapat merampungkan penulisan skripsi yang berjudul "Lapangan Bujur Sangkar Semi Ajaib" ini dengan baik dan benar. Shalawat dan salam semoga senantiasa tercurahkan kepada Rasulullah Muhammad Saw. yang telah menuntun umat manusia dari jaman jahiliyah menuju jaman ilmiah.

Selanjutnya penulis ucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah mengarahkan, membimbing, dan memberikan pemikirannya sehingga skripsi ini dapat diselesaikan dengan baik. Ucapan terima kasih penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Raharjo, M.Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Hj. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang sekaligus dosen pembimbing yang telah meluangkan waktunya untuk memberikan bimbingan dan arahan yang terbaik selama penyelesaian skripsi ini.
4. Ach. Nashichuddin, MA, selaku dosen pembimbing keagamaan yang telah memberikan saran dan bimbingan yang terbaik selama penulisan skripsi ini.
5. Seluruh dosen Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang dan seluruh staf serta karyawan.

6. Kedua orang tua penulis, Bapak Sanusi Achmadi dan Ibu Sri Iswati tercinta, serta kakak yang selama ini memberikan segala yang terbaik untuk penulis yang tiada pernah terkira.
7. Teman-teman mahasiswa Jurusan Matematika angkatan 2010, terutama Wahyudi, Wildan Hakim, Wahyu Setyo, Muhtar Latif A, Khairul Umam, Lukman Hakim, M. Hasan, Fahmi Muhammad yang rela meluangkan waktunya untuk bertukar pikiran dengan penulis serta Siscaviyana yang selalu memberikan motivasi kepada penulis agar selalu bersemangat dalam menyelesaikan skripsi ini.
8. Semua pihak yang tidak mungkin penulis sebut satu persatu, penulis ucapkan terima kasih atas bantuannya.

Semoga skripsi ini bermanfaat dan dapat menambah wawasan keilmuan khususnya bidang matematika.

Malang, 30 September 2015

Penulis

DAFTAR ISI

BAB III PEMBAHASAN

BAB IV PENUTUP

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Yunus, Mohamad. 2015. **Lapangan Bujur Sangkar Semi Ajaib.** Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. Abdussakir, M.Pd. (II) Ach. Nashichuddin, M.A.

Kata Kunci: Aljabar, Bujur sangkar semi ajaib, Grup, Ring, Lapangan

. Aljabar dapat didefinisikan sebagai suatu cabang ilmu matematika yang mempelajari konsep atau prinsip penyederhanaan serta pemecahan masalah dengan menggunakan simbol atau huruf tertentu. Secara umum aljabar dapat dikategorikan menjadi beberapa jenis, di antaranya yaitu aljabar abstrak. Dalam aljabar abstrak telah banyak diketahui bahwa ring adalah perluasan dari grup yang didefinisikan sebagai struktur yang terdiri dari himpunan tidak kosong yang dikenai dua operasi yang dilambangkan dengan $(R,*,\bullet)$. Operasi pertama dilambangkan dengan (*) dan operasi yang kedua dilambangkan dengan (•) yang memenuhi syarat-syarat ring, yaitu:1) $(R,*)$ adalah grup abelian, 2) Operasi (•) bersifat tertutup di R, 3) Operasi (•) bersifat assosiatif di R dan 4) Operasi (•) bersifat distributif terhadap operasi * di R.

Bujur sangkar ajaib adalah susunan dari barisan bilangan dalam kotak-kotak yang membentuk persegi dengan sifat jumlah bilangan-bilangannya menurut masing-masing baris, kolom, ataupun diagonalnya adalah sama. Secara garis besar bujur sangkar ajaib diklasifikasikan menjadi 7 macam, di antaranya yaitu bujur sangkar semi ajaib. Bujur sangkar semi ajaib (*Semi Magic Square*) adalah sebuah bujur sangkar yang berukuran n×n, jika dijumlahkan dari elemen setiap baris dan kolom adalah sama, dengan mengabaikan jumlah kedua diagonal. Tujuan penulisan skripsi ini adalah mengetahui bukti-bukti yang menunjukkan bahwa bujur sangkar semi ajaib merupakan lapangan.

Bujur sangkar semi ajaib order n×n $(B_{n\times n})$ dikatakan lapangan jika memenuhi syarat-syarat $B_{n\times n}$ adalah ring komutatif dengan elemen satuan dan semua unsur yang tidak nol di $B_{n\times n}$ mempunyai invers terdapat operasi perkalian. Akan tetapi $B_{n\times n}$ bukan termasuk dalam *field* karena sifat komutatif tidak berlaku pada perkalian matriks secara umum, akan tetapi ada subring dari $B_{n\times n}$ yang membentuk *field* yaitu $D_{n\times n}$ yang merupakan himpunan matriks diagonal yang semi ajaib.

ABSTRACT

Yunus, Mohamad. 2015. **Semi-magic Square Field.** Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) Dr. Abdussakir, M.Pd. (II) Ach. Nashichuddin, MA

Keywords: Algebra, Semi-magic Square, Group, Ring, Field

Algebra can be defined as a branch of mathematics that studies the concept or principle of simplification and solving problems using certain symbols or letters. In general algebra can be categorized into several types including abstract algebra. In abstract algebra, it has been widely known that the ring is an extension of the group defined as a structure consisting an empty set implementing two operations that is denoted by $(R,*,\bullet)$. The first operation is denoted by (*) and the second operation is denoted by $(\bullet)$ that meet the requirements of ring, namely: 1) $(R,*)$ is an abelian group, 2) $(\bullet)$ is closed in R, 3) $(\bullet)$ is associative in R and 4) $(\bullet)$ is distributive in R under * operation.

Magic squares is the order of the sequence of numbers in the boxes that form a square in which the sum of each row, colomn and its diagonal are the same. Generaly magic squares are classified into seven types, including semi-magic square. Semi-magic square is an n×n square, if the sum of the elements of each row and column is the same by ignoring the its two diagonals. The aim of this thesis is to determine the proofs suggest that semi-magic square is a field.

Semi-magic square of order n×n $(B_{n\times n})$ is said to be a field if it meets the following requirements $B_{n\times n}$ is commutative ring with elements of the unit and all the elements that are not zero has an inverse there is a multiplication operation. But $B_{n\times n}$ not field because of the commutativity does not apply to the matrix multiplication in general, but there is subring of $B_{n\times n}$ the forms fields namely $D_{n\times n}$ that contains semi-magic diagonal matrix.

ملخص

يونس، محمد. ٢٠١٥. الحقل المربع ن شبه ماجيك $\boldsymbol{M_n}(\mathbb{R})$. بحث جامعى. الشعبة الرياضيات. كلية العلوم والتكنولوجيا، الجامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج. المشرفون: (١) لدكتور عبدالشاكر الماجستير، (٢) وأحمد ناصح الدين الماجستير

الكلمات الرئيسية : الجبر المربع شبه ماجيك ، المجموعة، الحقل

الجبر يمكن تعريفها بأنها فرع من الرياضيات الذي يدرس مفهوم أو مبدأ مشاكل تبسيط وحل باستخدام بعض الرموز أو الحروف. العام في الجبر يمكن تصنيفها إلى عدة أنواع، بما في ذلك من الجبر المجرد. في الجبر،كان المجرد معروفا على نطاق واسع أن الحقل هو امتداد لمجموعة محددة كهيكل تتكون من مجموعة غير فارغة تخضع ليتم الرمز مع العمليات $(R,*,\bullet)$ يرمز العملية الأولى (*) ويرمز العملية الثانية (•)، التي تجتمع في حلقة المتطلبات، وهي: ١) $(R,*)$ هي مجموعة من ابليان، ٢) عمليات (•) مغلق في R ، ٣) عملية جراحية (•) هو النقابي في R و ٤) عمليات (•) هو التوزيع لعمليات * في R

المربع الماجيك هو ترتيب تسلسل الأرقام في المربعات التي تشكل مربع مع أرقام الرقم هو عدد العقارات في كل صف أو عمود أو قطر هو متساوية . غالبا المربعات الماجيك تصنيفها إلى سبعة أنواع، من بينها المربع فى شبه ماجيك. المربع فى شبه ماجيك هو مربع من المساحة n×n ، إذا كان مجموع العناصر من كل صف وعمود هما متساويان. من خلال تجاهل قطريا. الغرض من هذا البحث هو أن نعرف الأدلة تشير إلى أن المربع شبه ماجيك هو الحقل .

النظام المربع شبه ماجيك $B_{n\times n}$ n×n على رتبة هو ان يكون حقل إذا استوفى الشروط المنصوص عليها على النحو التالي $B_{n\times n}$ هو الحقل تبادلي مع عنصر وحدة وجميع العناصر التي ليست صفر في $B_{n\times n}$ قد وجدت العكسية فوجدت عملية الضرب. ومع ذلك $B_{n\times n}$ لا يتم تضمينها في هذا المجال لمن لا تنطبق تبديليه إلى الضرب مصفوفة بشكل عام، ولكن هناك شبه الحقل من $B_{n\times n}$ التي تشكل الحقل هو $D_{n\times n}$ التي تحتوي على مصفوفة معجزة شبه ماجيك.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan ilmu pengetahuan yang mengalami perkembangan secara terus-menerus dari masa ke masa, semakin berkembangnya ilmu pengetahuan maka akan mempermudah dalam menyelesaikan suatu permasalahan. Dalam perkembangan dan kemajuannya, matematika dapat memberikan sumbangan yang besar dalam memecahkan masalah-masalah pada bidang teknik, perekonomian, sains dan permasalahan-permasalahan lainnya yang terjadi diatas permukaan bumi ini. Banyak permasalahan-permasalahan baru yang sebelumnya belum terselesaikan namun kini dapat dipecahkan dengan matematika, sehingga matematika mendapat perhatian yang besar dari banyak kalangan (Rahman, 2007:4).

Salah satu cabang dari ilmu matematika adalah aljabar. Ilmu aljabar sangatlah luas, akan tetapi pada penelitian ini penulis ingin mengaplikasikan bagian ilmu aljabar yaitu aljabar abstrak pada konsep bujur sangkar ajaib. Aljabar abstrak yaitu suatu pembahasan yang dimulai dengan memperkenalkan konsep struktur aljabar dan sifat-sifanya. Struktur aljabar juga sering disebut sebagai sistem aljabar. Struktur aljabar adalah suatu himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan paling sedikitnya satu operasi biner. Dalam pembahasan selanjutnya pada suatu struktur aljabar akan dikenakan aturan atau aksioma tertentu. Perbedaan aksioma yang dikenakan ini yang menjadi pembeda struktur aljabar yang satu dengan yang lain, sebagai contoh yaitu grup, ring, ideal dan lapangan (Wahyudin, 1983:3).

Dalam teori-teori ilmu matematika telah banyak diketahui bahwa ring adalah perluasan dari grup yang didefinisikan sebagai struktur yang terdiri dari himpunan tidak kosong yang dikenai dua operasi yang dilambangkan dengan $(R,*,\bullet)$. Operasi pertama dilambangkan dengan (*) dan operasi yang kedua dilambangkan dengan ($\bullet$) yang memenuhi syarat-syarat ring, yaitu:1) $(R,*)$ adalah grup abelian, 2) Operasi ($\bullet$) bersifat tertutup di R, 3) Operasi ($\bullet$) bersifat assosiatif di R, dan 4) Operasi ($\bullet$) bersifat distributif terhadap operasi * di R. Sehingga dari ke empat syarat tersebut harus dipenuhi oleh ring, apabila satu dari syarat tersebut tidak dipenuhi maka tidak dapat dikatakan ring (Raisinghania dan Aggarwal, 1980:315).

Dalam al-Quran konsep mengenai ring dianalogikan dengan tata cara atau aturan-aturan bagi orang-orang muslim dalam memerangi orang-orang kafir. Dalam hal ini Allah berfirman dalam al-Quran surat al-Baqarah ayat 190 yang berbunyi:

وَقَٰتِلُواْ فِي سَبِيلِ ٱللَّهِ ٱلَّذِينَ يُقَٰتِلُونَكُمۡ وَلَا تَعۡتَدُوٓاْۚ إِنَّ ٱللَّهَ لَا يُحِبُّ ٱلۡمُعۡتَدِينَ ١٩٠

"Dan perangilah di jalan Allah orang-orang yang memerangi kamu, (tetapi) janganlah kamu melampaui batas, karena Sesungguhnya Allah tidak menyukai orang-orang yang melampaui batas" (Qs. al-Baqarah/2:190).

Ayat di atas menjelaskan bahwa Rasulullah diijinkan oleh Allah untuk memerangi orang-orang kafir yang telah memerangi orang Islam yaitu orang-orang kafir Quraisy, sehingga Rasulullah melaksanakan penyerangan kepada orang-orang kafir yang menyebarkan fitnah terhadap orang-orang yang beriman dengan maksud membawa mereka kepada kekufuran (Bakar, 2006:307).

Adapun larangan-larangan dalam peperangan yang dijelaskan oleh Allah dalam al-Quran surat al-Baqarah ayat 190 di antaranya adalah memerangi orang-orang yang tidak memerangi, membunuh anak-anak, membakar pohon-pohon, membunuh perempuan, membunuh orang sakit, memerangi orang-orang yang mengadakan perdamaian dengan orang-orang Islam, membunuh orang gila, memotong mayat, membunuh hewan dan sebagainya yang bukan karena kemaslahatan yang kembali pada kaum muslimin (Bakar, 2006:307)

Dari penjelasan-penjelasan di atas dapat diketahui dan diambil kesimpulan bahwa aturan-aturan dalam peperangan untuk tujuan jihad di jalan Allah harus benar-benar diperhatikan oleh orang-orang yang akan melakukan peperangan, karena jika tidak memenuhi dan mentaati salah satu saja dari beberapa syarat di atas maka akan keluar dari batas-batas karidor yang telah ditentukan Allah dalam al-Quran.

Tanpa disadari ilmu matematika telah banyak diterapkan dalam berbagai hal. Sebagian besar orang menganggap bahwa metematika merupakan ilmu yang sulit dan harus serius dalam mempelajarinya. Akan tetapi pada kenyataanya, ilmu matematika juga bisa digunakan untuk hiburan, bahkan jauh lebih menarik. Salah satunya di bidang hiburan yaitu digunakan untuk sulap. Sulap yang mengaplikasikan ilmu matematika dengan cara mengotak-atik angka biasanya menggunakan teori bujur sangkar ajaib (*Magic Square*).

Bujur sangkar ajaib adalah susunan dari barisan bilangan dalam kotak-kotak yang membentuk persegi dengan sifat jumlah bilangan-bilangannya menurut masing-masing baris, kolom, ataupun diagonalnya adalah sama. Bujur sangkar ajaib berukuran n×n, sebanyak n×n bilangan disusun dalam kotak-kotak persegi dengan jumlah bilangan-bilangan menurut masing-masing baris, kolom, ataupun diagonalnya adalah sama (Andrews, 1960:1).

Bujur sangkar ajaib diklasifikasikan menjadi tujuh macam, antara lain bujur sangkar semi ajaib, bujur sangkar ajaib sempurna, bujur sangkar ajaib simetris, bujur sangkar ajaib *konsentrik*, bujur sangkar ajaib nol, bujur sangkar ajaib perkalian, dan bujur sangkar ajaib penjumlahan-perkalian. Bujur sangkar semi ajaib adalah sebuah bujur sangkar yang berukuran n×n, jika dijumlahkan dari elemen setiap baris dan kolom adalah sama, dengan mengabaikan jumlah kedua diagonalnya (Stephens, 1993:1).

Dalam penelitian sebelumnya yang telah dikembangkan oleh K. S. Sreeranjini and V. Madhukar Mallayya (2012) dalam tulisannya yang berjudul *Semi Magic Squares as a Field* terdapat beberapa kekurangan-kekurangan di antaranya yaitu: penjelasannya yang terlalu singkat dan bukti-bukti teorema yang kurang mendetail, maka dari itu penulis ingin menjelaskan kembali penelitian tersebut dengan mengambil judul ***"Lapangan Bujur Sangkar Semi Ajaib".***

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, maka rumusan masalah dalam skripsi ini adalah bagaimana membuktikan bahwa himpunan semua bujur sangkar semi ajaib order n×n dengan operasi penjumlahan (+) dan perkalian (•) sebagai lapangan?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang telah diuraikan, maka tujuan penulisan skripsi ini adalah mengetahui apakah himpunan bujur sangkar semi ajaib dengan operasi penjumlahan $(+)$ dan perkalian $(\bullet)$ merupakan lapangan.

1.4 Manfaat Penelitian

1. Bagi Penulis

Untuk menambah wawasan penulis dalam mengembangkan ilmu pengetahuan khususnya dalam bidang matematika.

2. Bagi Pembaca

Dapat dijadikan sebagai salah satu rujukan dalam melakukan kajian tentang Struktur Aljabar atau penelitian selanjutnya.

3. Bagi Lembaga

Hasil penulisan skripsi ini diharapkan dapat menambah bahan kepustakaan di lembaga khususnya di Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang sehingga dapat dijadikan sebagai sarana pengembangan wawasan keilmuan terutama bidang matematika.

1.5 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode penelitian kepustakaan, yaitu dengan mengumpulkan informasi dengan bantuan bermacam-macam literatur yang terdapat di ruangan perpustakaan, seperti buku-buku, skripsi, dokumen, catatan dan lain lainya.

Adapun tahapan-tahapan yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Merumuskan masalah, yaitu Membuat rancangan terlebih dahulu mengenai suatu permasalahan yang akan dibahas.
2. Mengumpulkan berbagai literatur yang berhubungan dengan permasalahan yang akan dibahas dengan cara mambaca dan mamahami materi yang berkaitan.
3. Menyelesaikan permasalahan dengan menggunakan cara berpikir yang berangkat dari hal-hal yang umum menuju kesimpulan yang khusus.
4. Memberikan kesimpulan akhir dari hasil penelitian.

1.6 Sistematika Penulisan

Agar penulisan skripsi ini lebih terarah dan mudah dipahami, maka digunakan sistematika pembahasan yeng terdiri dari empat bab. Masing-masing bab dibagi ke dalam beberapa subbab dengan rumusan sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Pendahuluan meliputi: latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Bagian ini terdiri atas teori-teori yang mendukung bagian pembahasan. Teori-teori tersebut antara lain membahas tentang definisi grup, ring, ring komutatif, lapangan, matriks dan bujur sangkar semi ajaib .

Bab III Pembahasan

Pembahasan berisi tentang pembuktian bujur sangkar semi ajaib sebagai lapangan.

Bab IV Penutup

Pada bab ini disajikan tentang kesimpulan dan saran.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Operasi Biner

Dummit dan Foote (1980:17) menyebutkan definisi dari operasi biner sebagai berikut:

1. Operasi biner "$\bullet$" pada suatu himpunan G adalah suatu fungsi $\bullet: G \times G \to G$. Untuk setiap $a, b \in G$ dapat dituliskan $a \bullet b$.
2. Suatu operasi biner "$\bullet$" pada suatu himpunan G adalah assosiatif jika untuk setiap $a, b, c \in G, a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c$.
3. Jika "$\bullet$" operasi biner pada himpunan G, elemen-elemen $a, b \in G$ dikatakan komutatif jika $a \bullet b = b \bullet a$.

Contoh: Misalkan $\mathbb{Z}$ adalah himpunan bilangan bulat. Operasi + (penjumlahan) pada $\mathbb{Z}$ merupakan operasi biner, sebab operasi + merupakan pemetaan dari $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$ yaitu, $\forall\, (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ maka $(a + b) \in \mathbb{Z}$. Jumlah dua bilangan bulat adalah suatu bilangan bulat pula. Operasi $\div$ (pembagian) pada $\mathbb{Z}$ bukan merupakan operasi biner pada $\mathbb{Z}$ sebab terdapat $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sedemikan sehingga $(a \div b) \notin \mathbb{Z}$, misalnya $(3{,}4) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dan $(3 \div 4) \notin \mathbb{Z}$.

2.2 Grup

Diberikan struktur aljabar $(G,*)$ dimana G merupakan sebuah himpunan tak kosong dan $*$ merupakan operasi biner yang didefinisikan di $G \times G \to G$. Himpunan G disebut grup terhadap operasi $*$ jika dan hanya jika memenuhi aksioma-aksioma berikut

1. Operasi $*$ bersifat assosiatif di G

   Operasi $*$ dikatakan bersifat assosiatif di G jika dan hanya jika untuk setiap $a, b, c \in G$ berlaku $(a * b) * c = a * (b * c)$

2. G mempunyai elemen identitas terhadap operasi $(*)$

   G dikatakan mempunyai elemen identitas terhadap operasi $*$ jika dan hanya jika ada $e \in G$ sehingga berlaku $e * a = a * e = a,\ \forall a \in G.$

3. Setiap elemen di G mempunyai invers operasi $(*)$

   Setiap elemen di G dikatakan mempunyai invers jika dan hanya jika untuk setiap $a \in G$ ada $a^{-1} \in G$ dimana a^{-1} merupakan invers dari a, sehingga berlaku $a^{-1} * a = a * a^{-1} = e$ dengan e merupakan elemen identitas di G.

Jika $(G,*)$ suatu grup yang memenuhi sifat komutatif, yaitu $\forall a, b \in G$ berlaku $a * b = b * a$, maka $(G,*)$ disebut grup komutatif atau grup *abelian* (Raisinghania dan Aggarwal, 1980:31).

Contoh: Misalkan $\mathbb{Z}$ adalah himpunan bilangan bulat, maka $(\mathbb{Z},+)$ adalah grup karena berlaku:

1. Untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$ maka $a + b \in \mathbb{Z}$. Jadi operasi + adalah operasi biner pada $\mathbb{Z}$, atau dengan kata lain operasi + (penjumlahan) tertutup di $\mathbb{Z}$.
2. Untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}$ maka $a + (b + c) = (a + b) + c$. Jadi $\mathbb{Z}$ dengan operasi + memenuhi sifat assosiatif.
3. Terdapat elemen identitas yaitu $0 \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $a + 0 = 0 + a$, untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$.
4. Untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$ terdapat a^{-1} yaitu $(-a) \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga

   $$a + (-a) = (-a) + a = 0$$

   Elemen $(-a)$ adalah invers dari a.

Karena himpunan $\mathbb{Z}$ dengan operasi + (penjumlahan) memenuhi aksioma-aksioma grup, maka $(\mathbb{Z}, +)$ adalah grup.

2.3 Ring

Ring adalah struktur yang terdiri dari himpunan tidak kosong yang dikenai dua operasi biner dengan dilambangkan (R,*,•) yakni operasi pertama dilambangkan dengan (*) dan operasi kedua dilambangkan dengan (•) yang keduanya memenuhi aksioma berikut:

a. (R,*) adalah grup abelian
b. Operasi • tertutup di R
c. Operasi • bersifat assosiatif di R
d. Operasi • bersifat distributif terhadap operasi * di R, baik distributif kiri maupun distributif kanan (Raisinghania dan Anggarwal, 1980:313).

Sedangkan definisi ring menurut Dummit dan Foot (1991:225) adalah suatu himpunan R dengan dua operasi disimbolkan dengan $(*,\bullet)$ dinamakan ring apabila:

1. (R, *) merupakan grup abelian/ grup yang bersifat komutatif
2. (R, •) bersifat
   a. Tertutup $(a \bullet \mathrm{b}) \in R$
   b. Assosiatif $(a \bullet \mathrm{b}) \bullet \mathrm{c} = a \bullet (\mathrm{b} \bullet \mathrm{c})$ untuk setiap $a, b, c \in R$
3. Operasi (•) bersifat distributif terhadap + di R untuk setiap $a, b, c \in R$
   a. Distributif kiri yaitu $a \bullet (\mathrm{b} + \mathrm{c}) = a \bullet \mathrm{b} + \mathrm{a} \bullet \mathrm{c}$
   b. Distributif kanan yaitu $(a + \mathrm{b}) \bullet \mathrm{c} = a \bullet \mathrm{c} + \mathrm{b} \bullet \mathrm{c}$ untuk setiap $a, b, c \in R$

Contoh:

Selidiki apakah $(\mathbb{Z}, +, \times)$ dengan $\mathbb{Z}$ bilangan bulat adalah ring?

Jawab:

a. $(\mathbb{Z}, +)$ grup abelian

1. Ambil $a, b \in \mathbb{Z}$ maka $a + b \in \mathbb{Z}$. jadi tertutup terhadap operasi penjumlahan (+).

2. Ambil $a, b, c \in \mathbb{Z}$ maka $(a + b) + c = a + (b + c)$

   Jadi operasi penjumlahan (+) bersifat assosiatif di $\mathbb{Z}$

3. $0 \in \mathbb{Z}$ sehingga $a + 0 = 0 + a = a$ untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$

   Jadi 0 adalah identitas penjumlahan

4. Untuk masing-masing $a \in \mathbb{Z}$ ada $(-a) \in \mathbb{Z}$ sehingga

   $$a + (-a) = (-a) + a = 0$$

   Jadi invers dari a adalah $(-a)$

5. Operasi + bersifat komutatif di $\mathbb{Z}$

   Untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$ berlaku $a + b = b + a$

b. Operasi $\times$ bersifat assosiatif di $\mathbb{Z}$

   $(\mathrm{a} \times \mathrm{b}) \times \mathrm{c} = \mathrm{a} \times (\mathrm{b} \times \mathrm{c})$ untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}$

c. Operasi $\times$ bersifat distributif terhadap operasi (+)

   $(a + \mathrm{b}) \times \mathrm{c} = (a \times \mathrm{c}) + (\mathrm{b} \times \mathrm{c})$ untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}$

   $a \times (\mathrm{b} + \mathrm{c}) = (a \times \mathrm{b}) + (a \times c)$ untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}$

2.4 Subring

Misal $(R, *, \bullet)$ adalah ring. Misal $S \subset R$ dan $S \neq \emptyset$ maka S disebut subring dari ring R jika S menetapkan atau mempertahankan kedua operasi di R

dan pada S sendiri dengan kedua operasi tersebut memenuhi aksioma ring. S dikatakan menetapkan atau mempertahankan kedua operasi di R maksudnya bahwa kedua operasi di R juga berlaku di S, yaitu $\forall a, b \in S$ maka $a * b \in S$ dan juga $a \bullet b \in S$ atau (S tertutup terhadap kedua operasi di R). Begitu pula pada S memenuhi aksioma ring. Untuk lebih jelasnya, definisi tersebut dapat ditulis sebagai berikut:

Misal $(R,*,\bullet)$ adalah ring.

Misal $S \subset R$ dan $S \neq \emptyset$, jika pada $(S,*,\bullet)$ berlaku:

1. $(S, *)$ adalah grup abelian
2. Operasi $\bullet$ tertutup di S
3. Operasi $\bullet$ bersifat assosiatif di S
4. Operasi $\bullet$ bersifat distributif terhadap operasi * di S

Maka dikatakan bahwa $(S,*,\bullet)$ adalah subring dari $(R,*,\bullet)$ (Raisinghania & Anggarwal, 1980:314).

2.5 Macam-macam Ring

a. Ring Komutatif (RK)

Suatu ring $(R,*,\bullet)$ disebut *ring komutatif* (RK) jika dan hanya jika operasi kedua $(\bullet)$ bersifat komutatif di R.

Contoh: Diberikan $(\mathbb{Z},+,\times)$ dengan $\mathbb{Z}$ adalah himpunan bilangan bulat. Untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$ maka $a \times b = b \times a$, yang berarti operasi kedua $(\times)$ bersifat komutatif di $\mathbb{Z}$. Jadi $(\mathbb{Z},+,\times)$ adalah ring komutatif (RK) (Raisinghania & Anggarwal, 1980:314).

b. Ring Satuan

Suatu ring (R, *, •) disebut ring dengan elemen satuan (RS) jika dan hanya jika R punya elemen identitas terhadap operasi kedua (•).

Contoh: Diberikan $(\mathbb{Z}, +, \times)$ dengan $\mathbb{Z}$ adalah himpunan bilangan bulat. Untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$ maka $a \times I = I \times a = a$, yang berarti ada elemen identitas di $\mathbb{Z}$ terhadap operasi kedua $(\times)$, jadi $(\mathbb{Z}, +, \times)$ adalah ring satuan (RS) (Raisinghania & Anggarwal, 1980:314).

c. Ring Komutatif dengan Elemen Satuan (*RKS*)

Suatu ring $(R, *, \bullet)$ disebut ring komutatif dengan elemen satuan (RKS) jika dan hanya jika operasi kedua bersifat komutatif dan R mempunyai elemen identitas terhadap operasi kedua, dengan kata lain merupakan ring komutatif (RK) sekaligus ring dengan elemen satuan (RS).

Contoh: Karena $(\mathbb{Z}, +, \times)$ adalah ring komutatif (RK) sekaligus ring dengan elemen satuan (RS) maka $(\mathbb{Z}, +, \times)$ adalah ring komutatif dengan elemen satuan (RKS) (Raisinghania & Anggarwal, 1980:314).

2.6 Field

Suatu ring $(R, *, \bullet)$ Disebut *field* jika dan hanya jika ring tersebut komutatif, memuat elemen satuan dan semua unsur yang tidak nol di R mempunyai invers terhadap operasi perkalian (Raisinghania dan Aggrawal, 1980:314).

Contoh dari field adalah $(R, +, \times)$

Dimana R merupakan sistem bilangan real.

$(R, +, \times)$ merupakan ring komutatif.

$(R,+,\times)$ merupakan ring dengan satuan.

Ambil unsur $a \in R, a$ bukan identitas dari operasi penjumlaha, sehingga invers a terhadap operasi perkalian adalah $\frac{1}{a}$.

Maka $a \times \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \times a = 1$.

2.7 Bujur Sangkar Ajaib (*Magic Square*)

2.7.1 Sejarah Munculnya Bujur Sangkar Ajaib

Berabad-abad yang lalu terdapat beberapa negara yang orang-orangnya menganggap bahwa beberapa angka memiliki kekuatan sihir dan telah diberkahi. Angka atau nomor tersebut seolah-olah dapat menyihir atau mempunyai kekuatan tertentu. Bilangan empat misalnya, sering digunakan untuk menggambarkan bumi, karena bumi dianggap memiliki empat sudut. Berikutnya yaitu bilangan tujuh yang sering dianggap sebagai angka keberuntungan dan bilangan tiga belas yang disebut-sebut sebagai angka sial atau angka yang dapat membawa malapetaka (Stephens, 1993:1)

Salah satu konsep ajaib dalam dunia matematika yaitu dengan adanya konsep bujur sangkar ajaib. Bujur sangkar ajaib muncul pertama kali dalam catatan sejarah di China kuno sekitar tahun 2200 SM oleh kaisar YU. Pada saat itu kaisar YU mengamati sebuah kura-kura darat yang merangkak keluar dari sungai kuning. Dibagian belakang kura-kura terdapat susunan 3×3 dari bilangan yang dibentuk seperti matriks yaitu sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

Bujur sangkar di atas dikenal sebagai persegi ajaib *Lo-Syu*. Salah satunya dapat dilihat jumlah setiap baris, kolom dan diagonalnya dengan bentuk {4, 5, 6} atau {2, 5, 8} adalah 15. Bilangan genap ditemukan di pojok dan digunakan untuk melambangkan perempuan pasif atau yang disebut *Yin* dan bilangan ganjil digunakan untuk laki-laki aktif yang disebut *Yang*.

2.7.2 Pengertian Bujur Sangkar Ajaib

Bujur sangkar ajaib adalah susunan dari barisan bilangan dalam kotak-kotak yang membentuk persegi dengan sifat jumlah bilangan-bilanganya menurut masing-masing baris, kolom, ataupun diagonalnya adalah sama (Andrews, 1960:1). Berikut ini adalah contoh bujur sangkar ajaib berukuran 3×3, 4×4 dan 5×5.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

Gambar 2.1: Bujur Sangkar Ajaib 3×3, 4×4 dan 5×5

2.7.3 Klasifikasi Bujur Sangkar Ajaib

Menurut (Stephen, 1993:3) terdapat tujuh jenis klasifikasi bujur sangkar ajaib, yaitu sebagai berikut:

1. Bujur sangkar semi ajaib (*semi magic Square*) adalah sebuah bujur sangkar yang berukuran n×n, jika dijumlahkan dari elemen setiap baris dan kolom adalah sama, dengan mengabaikan jumlah kedua diagonal. Contoh bujur sangkar semi ajaib berukuran 5×5, yang mana baris dan kolomnya mempunyai jumlah 65, sebagai berikut:

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

Gambar 2.2: Bujur Sangkar Semi-Ajaib

2. Bujur sangkar ajaib sempurna (*Perfect Magic Square*) adalah bujur sangkar ajaib yang jika setiap baris, kolom dan diagonalnya ditambahkan maka jumlah setiap baris, kolom, diagonal utama dan diagonal kedua adalah sama atau konstan. Contoh jumlah pada bujur sangkar ajaib berukuran 3×3 yang mana untuk jumlah baris, kolom dan diagonalnya adalah 15:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Gambar 2.3: Bujur Sangkar Ajaib Sempurna

3. Bujur sangkar ajaib simetris (*symmetric Magic Square*) adalah bujur sangkar ajaib yang mempunyai jumlah dari setiap sel pojok yang simetris dan dua sel ditengah maka jumlahnya sama. Bujur sangkar ajaib simetris juga disebut dengan *associative magic square.* Di bawah ini adalah bujur sangkar ajaib simetris yang memiliki jumlah setiap baris, kolom dan diagonalnya adalah 34, dan jumlah dari masing sel pojok atas-bawah, kanan-kiri, tengah adalah 34, yaitu sebagai berikut:

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

Gambar 2.4: Bujur Sangkar Ajaib Simetris

4. Bujur sangkar ajaib *Konsentrik* atau *Bordered* adalah bujur sangkar ajaib yang menghilangkan bagian atas, bawah, kiri dan kanan kolom akan menghasilkan bujur sangkar ajaib lain. Di bawah ini adalah contoh bujur sangkar ajaib *Konsentrik* atau *Bordered* dengan jumlah kolom, baris dan kedua diagonalnya adalah 125, yaitu sebagai berikut:

4	5	6	43	39	38	40
49	15	16	33	30	31	12
48	37	22	27	26	13	2
47	36	29	25	21	14	3
8	18	24	23	28	32	42
9	19	34	17	20	35	41
10	45	44	7	11	12	42

Gambar 2.5: Bujur Sangkar Ajaib *Konsentrik* atau *Bordered*

Dari bujur sangkar ajaib di atas, maka akan menghilangkan bujur sangkar bagian tepi atas-bawah, kanan kiri. Sehingga menghasilkan bujur sangkar ajaib terbaru dengan jumlah setiap baris, kolom dan kedua diagonalnya sama yaitu 125.

15	16	33	30	31
37	22	27	26	13
36	29	25	21	14
18	24	23	28	32
19	34	17	20	35

Gambar 2.6: Bujur Sangkar Ajaib Baru

5. Bujur sangkar ajaib nol (*Zero Magic Square*) adalah bujur sangkar ajaib yang jika dijumlahkan setiap baris, kolom dan diagonal adalah 0. Bujur sangkar ajaib normal ini mengandung bilangan negatif. Di bawah ini adalah contoh dari bujur sangkar ajaib nol, yaitu sebagai berikut:

4	11	-12	-5	2
10	-8	-6	1	3
-9	-7	0	7	9
-3	-1	6	8	-10
-2	5	12	-11	-4

Gambar 2.7: Bujur Sangkar Ajaib Nol

6. Bujur sangkar ajaib perkalian (*Geometric*) adalah bujur sangkar dari bilangan yang hasil setiap elemen baris, kolom, diagonal utama dan diagonal kedua adalah konstan. Di bawah ini contoh bujur sangkar ajaib perkalian, yaitu sebagai berikut:

23	6	18	16
4	72	24	108
8	36	12	216
54	48	144	2

Gambar 2.8: Bujur Sangkar Ajaib Perkalian

7. Bujur sangkar ajaib penjumlahan-perkalian (*Addition-Multiplication Majic Square*) adalah bujur sangkar ajaib dimana jika dijumlahkan dan dikalikan dalam setiap baris, kolom dan diagonal memiliki jumlah yang sama. Contohnya adalah:

162	207	51	26	133	120	116	25
105	152	100	29	138	243	39	34
92	27	91	136	45	38	150	261
57	30	174	225	108	23	119	104
57	75	171	90	17	52	216	161
13	68	184	189	50	87	135	114
200	203	15	76	117	102	46	81
153	78	54	69	232	175	19	60

Gambar 2.9: Bujur Sangkar Ajaib Penjumlahan-Perkalian

Jika setiap baris, kolom dan kedua diagonal dikalikan dan dijumlahkan hasilnya adalah 2,05 x 10^{15} (Stephens, 1993:5-7).

2.7.4 Metode Membuat Bujur Sangkar Ajaib (*Magic Square)*

Terdapat banyak cara untuk membuat bujur sangkar ajaib. Metode untuk pembuatan bujur sangkar ajaib yang berukuran genap dan ganjil adalah berbeda. Bujur sangkar ajaib yang berukuran genap mempunyai cara tersendiri untuk mengatur angka-angkanya sehingga membentuk bujur sangkar ajaib. Diantaranya metode yang dapat digunakan antara lain, yaitu:

a. *Doubly Even* (*Lezenge Method*).

Metode ini hanya berlaku untuk bujur sangkar ajaib yang habis dibagi 4, seperti 4×4, 8×8, 12×12 dan seterusnya. Caranya cukup mudah, yaitu dengan menuliskan angka secara berurutan, kemudian beberapa petak direfleksikan terhadap titik pusanya. berikut ini adalah contoh bujur sangkar ajaib yang berukuran 4×4, sebagai berikut:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Gambar 2.10: Bujur Sangkar Ajaib 4×4

Langkah selanjutnya yaitu membuat tanda silang dan refleksikan setiap petak tersebut sehingga bisa menjadi seperti gambar di bawah ini.

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

Gambar 2.11: Bujur Sangkar Ajaib 4×4 yang Diberi Tanda Silang

Perhatikan bagaimana angka 1, 4, 6, 7, 10, 11, 13 dan 16 berpindah. Bujur sangkar yang berukuran 8×8 sebagai berikut:

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

Gambar 2.12: Bujur Sangkar Ajaib 8×8

Buat tanda silang yang terbagi menjadi 4 bagian yang terbagi seperti gambar di bawah ini, kemudian refleksikan petak tersebut berdasarkan titik pusat bujur sangkar.

64	2	3	61	60	6	7	57
9	55	54	12	13	51	50	16
17	47	46	20	21	43	42	24
40	26	27	37	36	30	31	33
32	34	35	29	28	38	39	25
41	23	22	44	45	19	18	48
49	15	14	52	53	11	10	56
8	58	59	5	4	62	63	1

Gambar 2.13: Bujur Sangkar Ajaib 8×8 yang Diberi Tanda Silang

Untuk contoh bujur sangkar yang berukuran 12×12, hasilnya sebagai berikut:

144	2	142	4	140	6	7	137	9	135	11	133
13	131	15	129	17	127	126	20	124	22	122	24
120	26	118	28	116	30	31	113	33	111	35	109
37	107	39	105	41	103	102	44	100	46	98	48
96	50	94	52	92	54	55	89	57	87	59	85
61	83	63	81	65	79	78	68	76	70	74	72
73	71	75	69	77	67	66	80	64	82	62	84
60	86	58	88	56	90	91	53	93	51	95	49
97	47	99	45	101	43	42	104	40	106	38	108
36	110	34	112	32	114	115	29	117	27	119	25
121	23	123	21	125	19	18	128	16	130	14	132
12	134	10	136	8	138	139	5	141	3	143	1

Gambar 2.14: Bujur Sangkar Ajaib 12×12 yang Sudah Diberi Tanda Silang

Salah satu kelemahan dari metode *Doubly Even* (*Lezenge Method*) adalah sulit untuk menentukan pola refleksinya, terutama untuk bujur sangkar yang berukuran besar. Dalam metode ini tidak ada aturan khusus untuk menentukan polanya. Tidak hanya satu pola saja yang dapat dibentuk, akan tetapi banyak sekali pola yang dapat dibentuk.

b. Canway LUX Method

Metode ini hanya berlaku untuk bujur sangkar yang berukuran (4m+2) misalnya 6, 10, 16, dan seterusnya. Metode ini menggunakan prinsip *Siamese Method* yang dimodifikasi. Mengapa dinamakan LUX. Perhatikan sekumpulan *array* berikut.

Gambar 2.15: Metode LUX

Langkah-langkahnya:

1. bujur sangkar dibagi menjadi sekumpulan petak 2×2.
2. Dari petak-petak itu, berikan tanda sebagai berikut:

   (m+1) baris pertama adalah L.

   Satu baris berikutnya adalah U.

   (m-1) baris terakhir adalah X.

   Kemudian tukar petak U di tengah dengan L diatasnya.
3. Kerjakan dengan *Siamese Method* yang general. Anagka 1 dimulai dari petak teratas.

   Sebagai contoh yaitu pada bujur sangkar ajaib berukuran 10×10, artinya m = 2 karena (4m + 2 = 10).

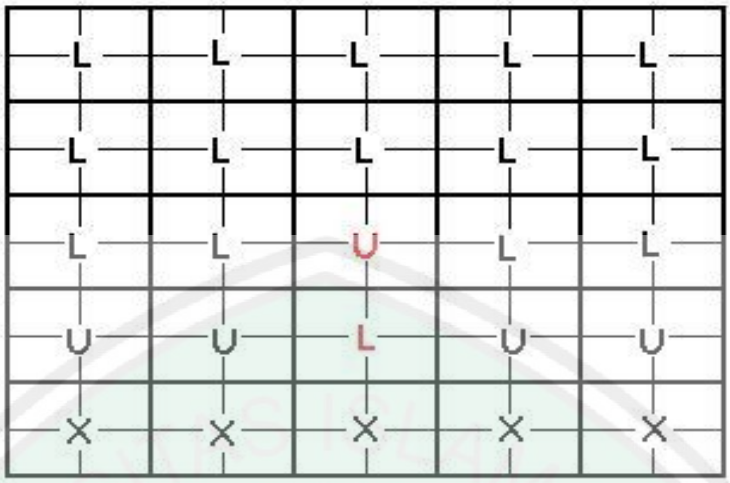
   1. Bagilah 10×10 menjadi sekumpulan petak 2×2

      (m+1) baris pertama adalah L.

      Satu baris berikutnya adalah U.

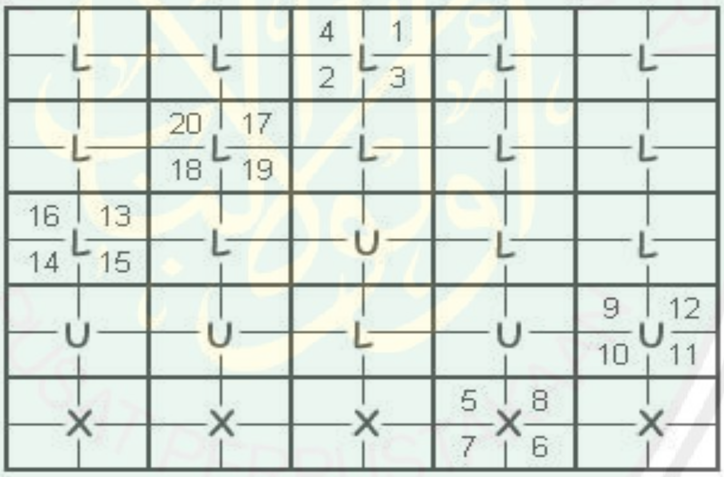
      (m-1) baris terakhir adalah X.

      Kemudian tukar petak U di tengah dengan L di atasnya, sehingga menghasilkan sebagai berikut:



Gambar 2.16: Bujur Sangkar Ajaib 10×10

2. Selanjutnya, gunakan metode *Siamese* untuk 5×5. Perhatikan aturan LUX di tiap petak.



Gambar 2.17: Bujur Sangkar Ajaib 10×10

Hasil akhir bujur sangkar ajaib menggunakan metode LUX sebagai berikut:

68	65	96	93	4	1	32	29	60	57
66	67	94	95	2	3	30	31	58	59
92	89	20	17	28	25	56	53	64	61
90	91	18	19	26	27	54	55	62	63
16	13	24	21	52	49	80	77	88	85
14	15	22	23	50	51	78	79	86	87
37	40	45	48	76	73	81	84	9	12
38	39	46	47	74	75	82	83	10	11
41	44	69	72	97	100	5	8	33	36
43	42	71	70	99	98	7	6	35	34

Gambar 2.18: Bujur Sangkar Ajaib 10×10

c. *Siames Method (de la Loubere Method)*

Metode *Siamese* atau biasa disebut dengan metode *de la Loubere* adalah suatu metoda umum dalam membentuk bujur sangkar ajaib berorder ganjil 2m+1. Meskipun masih sebatas order bilangan ganjil namun jelas ini merupakan hasil yang menggembirakan untuk penyelesian masalah konstruksi bujur sangkar ajaib.

Langkah-langkah metode *Siamese* secara general adalah sebagai berikut:

1. Tempatkan bilangan 1 dalam sel tengah baris pertama.
2. Secara berturut-turut tempatkan bilangan-bilangan berikutnya dalam diagonal dalam arah kanan atas kecuali:
    a) Apabila sudah menjangkau baris paling atas maka bilangan selanjutnya ditulis dalam baris paling bawah dan kolom selanjutnya di mana elemen pada baris paling atas berada.
    b) Apabila sudah menjangkau kolom paling kanan, maka bilangan selanjutnya dituliskan pada kolom paling kiri dan baris sebelumnya dimana elemen pada kolom paling kanan berada.

c) Apabila baris atasnya yang akan diisi bilangan berikutnya sudah terisi, atau jika pojok kanan atas telah terisi maka tulislah bilangan selanjutnya itu dalam kolom yang sama dan baris di bawahnya.

Sebagai contoh metode di atas dapat diterapkan untuk mengkonstruksi bujur sangkar ajaib berorder-5 seperti pada Gambar 2.19 di bawah ini:

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

Gambar 2.19: Bujur Sangkar 5×5

2.8 Bujur Sangkar Semi Ajaib

Bujur sangkar semi ajaib (*Semi Magic Square*) adalah sebuah bujur sangkar yang berukuran $n \times n$, jika dijumlahkan dari elemen setiap baris dan kolom adalah sama. Dengan mengabaikan jumlah kedua diagonal. Contoh bujur sangkar semi ajaib berukuran 5×5, yang mana baris dan kolomnya mempunyai jumlah 65, sebagai berikut:

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

Gambar 2.20: Bujur Sangkar Semi Ajaib

2.9 Matriks

Matriks adalah jajaran empat persegi panjang dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam jajaran tersebut disebut *entri* dari matriks (Anton dan Rorres, 2004:26).

Sehingga matriks merupakan suatu susunan yang berbentuk persegi panjang yang terdiri dari bilangan-bilangan. Baris sebuah matriks adalah susunan bilangan-bilangan mendatar (arah horizontal) dalam matriks. Kolom sebuah matriks adalah susunan bilangan-bilangan yang tegak (arah vertical) dalam matriks.

Suatu matriks dapat ditulis dalam bentuk ( ) atau [ ]. Matriks dilambangkan dengan huruf besar, misalnya A, B dan seterusnya. Entri pada matriks dilambangkan dengan huruf kecil dan berindeks, misalnya a_{mn} yang merupakan entri pada baris ke-m dan kolom ke-n. Bentuk umum dari matriks adalah:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Dimana *m* menunjukkan baris dan *n* menunjukkan kolom.

Ukuran matriks atau biasa disebut dengan ordo matriks menyatakan banyak baris dan banyak kolom yang terdapat di dalam matriks tersebut. Apabila suatu matriks memiliki baris sebanyak (*m*) dan kolom sebanyak (*n*) maka disebut matriks berordo $m \times n$.

2.10 Perkalian Skalar Matriks

Jika *A* adalah matriks sebarang dan *c* adalah scalar sebarang, maka hasil kalinya (*product*) *cA* adalah matriks yang diperoleh dari perkalian setiap entri pada matriks *A* pada bilangan *c*. matriks *cA* disebut sebagai kelipatan scalar dari *A* (Anton dan Rorres, 2004:26).

Di dalam notasi matriks, apabila $A = [a_{ij}]$ maka$(cA)_{\text{ij}} = c(A)_{\text{ij}} = cA_{ij}$ atau dapat juga ditulis sebagai

$$cA = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \cdots & ca_{1j} \\ ca_{21} & ca_{22} & \cdots & ca_{2j} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ca_{i1} & ca_{i2} & \cdots & ca_{ij} \end{bmatrix}$$

Contoh: $(3)\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ maka $\begin{bmatrix} 3(1) & 3(3) & 3(2) \\ 3(3) & 3(5) & 3(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 6 \\ 3 & 15 & 6 \end{bmatrix}$

2.11 Perkalian Matriks

Jika *A* adalah matriks $m \times r$ dan *B* adalah matriks $r \times n$ maka hasilkali (*product*) *AB* adalah matriks $m \times n$ yang entri-entrinya ditentukan sebagai berikut. Untuk mencari entri baris *i* dan kolom *j* dari *AB*, pisahkanlah baris *i* dari matrik *A* dan kolom *j* dari matriks *B*. Kalikan entri-entri yang bersesuaian dari baris dan kolom tersebut dan kemudian jumlahkan hasil yang diperoleh (Anton dan Rorres, 2004:26).

Dua matriks dapat dikalikan apabila banyak kolom matriks pertama sama dengan banyak baris dari matriks kedua. Sehingga dapat dituliskan sebagai berikut:

$$A_{m\times r} \times B_{r\times n} = C_{m\times n}$$

Contoh dari perkalian matriks adalah sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

A adalah matriks 2×3 dan B adalah matriks 3×4, sehingga hasil AB adalah matriks 2×4. Misalkan A, B dan C adalah matriks yang dapat dikalikan, maka sifat-sifat dari perkalian matriks adalah:

1. Sifat distributif
   a. $A(B + C) = AB + AC$ (Hukum distributif kiri)
   b. $(B + C)A = BA + CA$ (Hukum distributif kanan)
2. Sifat assosiatif perkalian
   $A(BC) = (AB)C$
3. $AB \neq BA$

Perkalian matriks tidak memenuhi sifat komutatif. Pada bilangan real berlaku $ab = ba$. Sedangkan pada pada matriks, AB tidak selalu sama dengan BA. Hal tersebut dapat disebabkan pada kasus sebagai berikut:

a. Hasil dari AB dapat didefinisikan, akan tetapi hasil dari BA tidak dapat disefinisikan. Sebagai contoh, apabila A adalah matriks yang memiliki ordo 2×3, dan B adalah matriks yang memiliki ordo 3×4.

b. Hasil kali AB dan BA dapat didefinisikan, akan tetapi masing-masing entri yang bersesuaian dari matriks tersebut adalah berbeda. Sebagai contoh:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} dan\ B \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ sehingga

$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 10 & 8 \end{bmatrix}$

$BA = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}$

Dari hasil tersebut, dapat disimpulkan bahwa $AB \neq BA$

4. Perkalian dengan identitas

$$IA = AI = A$$

2.12 Aturan Islam dalam Memerangi Orang Kafir

وَقَٰتِلُوا۟ فِى سَبِيلِ ٱللَّهِ ٱلَّذِينَ يُقَٰتِلُونَكُمْ وَلَا تَعْتَدُوٓا۟ ۚ إِنَّ ٱللَّهَ لَا يُحِبُّ ٱلْمُعْتَدِينَ ﴿١٩٠﴾

Artinya: Dan perangilah di jalan Allah orang-orang yang memerangi kamu, (tetapi) janganlah kamu melampaui batas, karena Sesungguhnya Allah tidak menyukai orang-orang yang melampaui batas.

Dari tafsir As-sa'di dijelaskan bahwa ayat ini mengandung perintah untuk berperang di jalan Allah dimana sebelumnya mereka diperintahkan untuk menahan diri, dan menghususkan perang (*fi sabilillah*) adalah sebuah anjuran untuk berikhlas dan larangan untuk saling berperang dalam fitnah antara kaum muslimin. (*alladzina yuqaatilu nakum*) yaitu orang-orang yang bersiap untuk memerangi kalian dan mereka itulah orang-orang yang telah balig dari kaum laki-laki yang bukan orang tua yang tidak didengar perkataan mereka dan tidak ikut berperang.

Adapun larangan-larangan dari tindakan melampaui batas meliputi segala macam bentuk membunuh orang yang tidak ikut berperang seperti wanita, orang gila anak-anak, para pendeta dan juga memotong-motong mayat, membunuh hewan-hewan, memotong pepohonan yang bukan untuk kemaslahatan untuk kaum muslimin dan juga yang termasuk melampaui batas adalah memerangi orang yang membayar *jizyah* apabila mereka telah membayarnya (Asy-Syanqithi, 2006:288).

Menurut para ulama' ayat di atas terdapat 3 penafsiran yaitu pertama, maksud dari orang-orang yang memerangi kalian adalah musuh yang mempunyai kemampuan berperang sehingga wanita, anak kecil, orang-orang yang lemah, ahli ibadah yang hanya beribadah ditempat ibadah saja dan orang-orang yang telah mengadakan perdamain dengan kamu tidak termasuk orang-orang yang harus diperangi. Kedua, ayat ini telah di nasakh dengan ayat saif (ayat-ayat yang memerintahkan untuk memerangi mereka), dalam ayat ini dijelaskan untuk memerangi mereka semua. Ketiga, maksud ayat ini adalah memberi motivasi kepada kaum muslimin untuk berani memerangi orang-orang kafir (Asy-Syanqithi, 2006:288).

Disebutkan dalam tafsir Fathul Qadir Abu Jakfar mengatakan bahwa para mufasir berselisih pendapat tentang penahwilan ayat ini. Sebagian mereka mengatakan bahwa ayat ini adalah ayat pertama yang memerintahkan umat Islam agar memerangi orang-orang kafir musyrik. Dalam ayat ini mereka mengatakan bahwa umat Islam diperintahkan untuk memerangi orang kafir yang memerangi mereka dan membiarkan orang-orang yang tidak memerangi mereka.

Sedangkan Ibnu Zaid berkata bahwa sebagian mereka mengatakan bahwa ayat ini tidak dihapuskan dan tetap menjadi perintah Allah kepada umat islam agar memerangi orang-orang kafir. Adapun sikap melampaui batas yang dilarang oleh Allah adalah membunuh kaum wanita, anak-anak dan orang-orang lemah. Abu Ja'far berkata bahwa yang paling tepat adalah pendapat Umar bin Abdul Aziz yakni janganlah engkau memerangi orang yang tidak memerangi kamu yaitu kaum wanita, anak-anak dan para pendeta (Asy-Syaukani, 2008:740).

Menurut Qardhawi (2009:1031) orang kafir diklasifikasikan menjadi empat golongan :

1. Kafir Dzimmi, yaitu orang kafir yang tinggal di negeri Islam, hidup dengan aman dan di bawah perlindungan pemerintahan muslim, dengan syarat membayar jizyah (upeti) sebagai jaminan keamanannya. Orang kafir seperti ini terjaga darahnya dan tidak boleh diganggu. Rasulullah Saw bersabda, "Barang siapa membunuh kafir dzimmi maka ia tidak akan mencium bau surga dan sesungguhnya bau surga dapat tercium sejauh 40 tahun perjalanan." (HR an-Nasai:8742, dan dishahihkan oleh al-Albani dalam shahih al-Jami no.6457).
2. Kafir Mu'ahad, yaitu orang-orang kafir yang tinggal di negerinya, tetapi antara kita dan mereka terdapat perjanjian damai untuk tidak saling memerangi selama waktu yang telah disepakati. Namun, hal itu dengan syarat mereka tetap mematuhi perjanjian dan tidak melanggarnya. Kafir

seperti ini juga tidak boleh dibunuh. Rasulullah Saw bersabda, “Siapa yang membunuh kafir mu’ahad ia tidak akan mencium bau surga dan sesungguhnya bau surga itu tercium dari perjalanan empat puluh tahun.” (HR. Bukhari:3166).

3. Kafir Musta’man, yaitu orang kafir yang mendapat jaminan keamanan dari kaum muslimin atau sebagian kaum muslimin. Kafir jenis ini juga tidak boleh dibunuh sepanjang masih berada dalam jaminan keamanan. Dari Ummu Hani, berkata, “Wahai Rasulullah, anak ibuku (yaitu Ali bin Abi Thalib) menyangka bahwa ia boleh membunuh orang yang telah saya lindungi (yaitu) si Fulan bin Hubairah. “Maka Rasulullah Saw bersabda, “Kami telah lindungi orang yang engkau lindungi, wahai Ummu Hani.” (HR. Bukhari: 357 dan Muslim: 337).
4. Kafir Harbi, yaitu kafir selain tiga di atas, kafir jenis inilah yang disyariatkan untuk diperangi dengan ketentuan yang telah ditetapkan dalam syari’at Islam. Inilah yang dimaksud dalam surat al-Baqarah ayat 190-193. Golongan ini diperangi, apabila ia atau negaranya telah menampakkan atau menyatakan perang terhadap kaum muslimin atau kaum muslimin terlabih dahulu mengumumkan perang terhadap mereka setelah orang-orang kafir ini menolak ajakan kepada Islam. Meskipun kafir harbi halal darahnya, namun itu pun tidak mutlak dilakukan. Dalam banyak hadits, Rasulullah Saw melarang membunuh orang yang tidak ikut dalam kancah peperangan seperti anak-anak, wanita, orang-orang jompo, berpenyakit lumpuh, banci, pendeta, dan orang buta.

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Bujur Sangkar Semi Ajaib Order $n \times n$ adalah Grup

Pada bab ini pertama akan dijelaskan pembuktian bahwa himpunan semua bujur sangkar semi ajaib order $n \times n$ adalah grup.

Misal himpunan semua bujur sangkar semi ajaib order $n \times n$ dinyatakan dalam bentuk matriks adalah $B_{n \times n}$

Teorema 1: Operasi penjumlahan $(+)$ pada $B_{n \times n}$ adalah biner (tertutup).

Bukti:

Ambil A dan B sebarang anggota $B_{n \times n}$, dengan a_{ij} dan $b_{ij} \in \mathbb{R}$ misal:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

Karena A dan B adalah anggota $B_{n \times n}$, maka setiap jumlah baris dan kolom pada matriks A dan B adalah sama. Misalkan jumlah setiap baris dan kolom pada matriks A adalah k, maka

$$\begin{array}{llll} a_{11} + & a_{12} + & \ldots & +a_{1n} = k \\ a_{21} + & a_{22} + & \ldots & +a_{2n} = k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} + & a_{n2} + & \ldots & +a_{nn} = k \end{array}$$

dan

$$\begin{array}{llll} a_{11} + & a_{21} + & \ldots & +a_{n1} = k \\ a_{12} + & a_{22} + & \ldots & +a_{n2} = k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} + & a_{2n} + & \ldots & +a_{nn} = k \end{array}$$

Misalkan jumlah baris dan kolom pada matriks B adalah l, maka

$$
\begin{array}{llll}
b_{11} + & b_{12} + & \dots & +b_{1n} = l \\
b_{21} + & b_{22} + & \dots & +b_{2n} = l \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
b_{n1} + & b_{n2} + & \dots & +b_{nn} = l
\end{array}
$$

dan

$$
\begin{array}{llll}
b_{11} + & b_{21} + & \dots & +b_{n1} = l \\
b_{12} + & b_{22} + & \dots & +b_{n2} = l \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
b_{1n} + & b_{2n} + & \dots & +b_{nn} = l
\end{array}
$$

Maka $A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$

$$
= \begin{pmatrix} (a_{11}+b_{11}) & (a_{12}+b_{12}) & \cdots & (a_{1n}+b_{1n}) \\ (a_{21}+b_{21}) & (a_{22}+b_{22}) & \cdots & (a_{2n}+b_{2n}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a_{n1}+b_{n1}) & (a_{n2}+b_{n2}) & \cdots & (a_{nn}+b_{nn}) \end{pmatrix}
$$

Akan ditunjukkan bahwa $A + B$ adalah bujur sangkar semi ajaib dengan cara menjumlahkan setiap baris dan kolomnya.

Untuk jumlah barisnya sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
(a_{11}+b_{11})+(a_{12}+b_{12})+\cdots+(a_{1n}+b_{1n}) &= (a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1n})+(b_{11}+b_{12}+\cdots+b_{1n}) \\
&= k+l
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(a_{21}+b_{21})+(a_{22}+b_{22})+\cdots+(a_{2n}+b_{2n}) &= (a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{2n})+(b_{21}+b_{22}+\cdots+b_{2n}) \\
&= k+l
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(a_{n1}+b_{n1})+(a_{n2}+b_{n2})+\cdots+(a_{nn}+b_{nn}) &= (a_{n1}+a_{n2}+\cdots+a_{nn})+(b_{n1}+b_{n2}+\cdots+b_{nn}) \\
&= k+l
\end{aligned}
$$

Sedangkan untuk jumlah kolomnya sebagai berikut:

$$\left(a_{11}+b_{11}\right)+\left(a_{21}+b_{21}\right)+\cdots+\left(a_{n1}+b_{n1}\right)=\left(a_{11}+a_{21}+\cdots+a_{n1}\right)+\left(b_{11}+b_{21}+\cdots+b_{n1}\right)$$
$$=k+l$$

$$\left(a_{12}+b_{12}\right)+\left(a_{22}+b_{22}\right)+\cdots+\left(a_{n2}+b_{n2}\right)=\left(a_{12}+a_{22}+\cdots+a_{n2}\right)+\left(b_{12}+b_{22}+\cdots+b_{n2}\right)$$
$$=k+l$$

$$\left(a_{1n}+b_{1n}\right)+\left(a_{2n}+b_{2n}\right)+\cdots+\left(a_{nn}+b_{nn}\right)=\left(a_{1n}+a_{2n}+\cdots+a_{nn}\right)+\left(b_{1n}+b_{2n}+\cdots+b_{nn}\right)$$
$$=k+l$$

Karena jumlah setiap baris dan kolomnya sama yaitu $k+l$ maka terbukti bahwa $A+B \in B_{n\times n}$. Jadi operasi penjumlahan tertutup di $B_{n\times n}$

Teorema 2: Operasi penjumlahan $(+)$ pada $B_{n\times n}$ bersifat assosiatif.

Bukti:

Ambil A, B dan C sebarang anggota $B_{n\times n}$, dengan a_{ij}, b_{ij} dan $c_{ij} \in \mathbb{R}$ sebagai berikut

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

Akan bibuktikan bahwa:

$$A+\left(B+C\right)=\left(A+B\right)+C$$

$$A+\left(B+C\right)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}+\left(\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}\right)$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} (b_{11}+c_{11}) & (b_{12}+c_{12}) & \cdots & (b_{1n}+c_{1n}) \\ (b_{21}+c_{21}) & (b_{22}+c_{22}) & \cdots & (b_{2n}+c_{2n}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (b_{n1}+c_{n1}) & (b_{n2}+c_{n2}) & \cdots & (b_{nn}+c_{nn}) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}+(b_{11}+c_{11}) & a_{12}+(b_{12}+c_{12}) & \cdots & a_{1j}+(b_{1n}+c_{1n}) \\ a_{21}+(b_{21}+c_{21}) & a_{22}+(b_{22}+c_{22}) & \cdots & a_{2j}+(b_{2n}+c_{2n}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+(b_{n1}+c_{n1}) & a_{i2}+(b_{n2}+c_{n2}) & \cdots & a_{nn}+(b_{nn}+c_{nn}) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11}+c_{11} & a_{12}+b_{12}+c_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n}+c_{1n} \\ a_{21}+b_{21}+c_{21} & a_{22}+b_{22}+c_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n}+c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1}+c_{n1} & a_{n2}+b_{n2}+c_{n2} & \cdots & a_{nn}+b_{nn}+c_{nn} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} (a_{11}+b_{11}) & (a_{12}+b_{12}) & \cdots & (a_{1n}+b_{1n}) \\ (a_{21}+b_{21}) & (a_{22}+b_{22}) & \cdots & (a_{2n}+b_{2n}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a_{n1}+b_{n1}) & (a_{n2}+b_{n2}) & \cdots & (a_{nn}+b_{nn}) \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

$$=\left(\begin{pmatrix} (a_{11}+b_{11}) & (a_{12}+b_{12}) & \cdots & (a_{1n}+b_{1n}) \\ (a_{21}+b_{21}) & (a_{22}+b_{22}) & \cdots & (a_{2n}+b_{2n}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a_{n1}+b_{n1}) & (a_{n2}+b_{n2}) & \cdots & (a_{nn}+b_{nn}) \end{pmatrix}\right)+\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

$$=\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}\right)+\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

$$=(A+B)+C$$

Jadi terbukti bahwa operasi penjumlahan $(+)$ pada $B_{n\times n}$ bersifat assosiatif.

Teorema 3: $B_{n\times n}$ mempunyai unsur identitas terhadap operasi penjumlahan $(+)$.

Bukti:

Ambil $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

Akan dibuktikan bahwa $A + \mathbf{0} = \mathbf{0} + A = A,\ \forall A \in B_{n\times n}$

Ambil $A \in B_{n\times n}$, dengan $a_{ij} \in \mathbb{R}$ Misal

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Maka

$A + \mathbf{0} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} + \mathbf{0} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ identitas kanan

$\mathbf{0} + A = \mathbf{0} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ identitas kiri

Karena semua jumlah baris dan kolom dari matriks $\mathbf{0}$ sama yaitu 0 maka matrik $\mathbf{0}$ adalah bujur sangkar semi ajaib. Terbukti bahwa $B_{n\times n}$ mempunyai identitas operasi penjumlahan.

Teorema 4: Semua unsur di $B_{n\times n}$ mempunyai invers terhadap operasi penjumlahan $(+)$

Bukti:

Ambil $A \in B_{n\times n}$, dengan $a_{ij} \in \mathbb{R}$ misal

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ambil $A^{-1}=\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & -a_{nn} \end{pmatrix}$

Maka diperoleh

$$\begin{array}{l} (-a_{11})+(-a_{12})+\cdots+(-a_{1n})=-k \\ (-a_{21})+(-a_{22})+\cdots+(-a_{2n})=-k \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ (-a_{n1})+(-a_{n2})+\cdots+(-a_{nn})=-k \end{array}$$

dan

$$\begin{array}{l} (-a_{11})+(-a_{21})+\cdots+(-a_{n1})=-k \\ (-a_{12})+(-a_{22})+\cdots+(-a_{n2})=-k \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ (-a_{1n})+(-a_{2n})+\cdots+(-a_{nn})=-k \end{array}$$

Jadi $A^{-1} \in B_{n\times n}$

Akan ditunjukkan $A + A^{-1} = A^{-1} + A = \mathbf{0}$

$$A+A^{-1}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & -a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}=\mathbf{0}$$

$$A^{-1}+A=\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & -a_{nn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}=\mathbf{0}$$

Jadi terbukti bahwa $B_{n\times n}$ mempunyai invers terhadap operasi $(+)$.

Dengan demikian diperoleh:

1. Operasi penjumlahan tertutup di $B_{n\times n}$
2. Operasi penjumlahan bersifat assosiatif di $B_{n\times n}$
3. $B_{n\times n}$ mempunyai unsur identitas terhadap operasi penjumlahan
4. Semua unsur di $B_{n\times n}$ mempunyai invers terhadap operasi penjumlahan

Maka $B_{n\times n}$ dengan operasi penjumlahan (+) membentuk grup.

Teorema 5: Operasi penjumlahan (+) bersifat komutatif pada $B_{n\times n}$

Bukti:

Akan dibuktikan bahwa $A+B=B+A, \forall A,B\in B_{n\times n}$

Ambil $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ $dan\ B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$ anggota $B_{n\times n}$

Maka $A+B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} (a_{11}+b_{11}) & (a_{12}+b_{12}) & \cdots & (a_{1n}+b_{1n}) \\ (a_{21}+b_{21}) & (a_{22}+b_{22}) & \cdots & (a_{2n}+b_{2n}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a_{n1}+b_{n1}) & (a_{n2}+b_{n2}) & \cdots & (a_{nn}+b_{nn}) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}(b_{11}+a_{11}) & (b_{12}+a_{12}) & \cdots & (b_{1n}+a_{1n})\\ (b_{21}+a_{21}) & (b_{22}+a_{22}) & \cdots & (b_{2n}+a_{2n})\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ (b_{n1}+a_{n1}) & (b_{n2}+a_{n2}) & \cdots & (b_{nn}+a_{nn})\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

$$=B+A$$

Jadi terbukti bahwa operasi penjumlahan $(+)$ pada $B_{n\times n}$ bersifat komutatif. Karena $B_{n\times n}$ adalah grup dan operasi penjumlahan bersifar komutatif maka $B_{n\times n}$ tersebut membentuk grup abelian.

3.2 Bujur Sangkar Semi Ajaib Order $n\times n$ adalah Ring

Teorema 6: Operasi perkalian $(\bullet)$ pada $B_{n\times n}$ bersifat tertutup

Bukti:

Ambil A dan B sebarang anggota $B_{n\times n}$, dengan a_{ij} dan $b_{ij} \in \mathbb{R}$ sebagai berikut:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn}\end{pmatrix}$$

Akan dibuktikan bahwa $A\bullet B\in B_{n\times n}$

$$A \bullet B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + \cdots + a_{1n}b_{n2} & \cdots & a_{11}b_{1n} + a_{12}b_{2n} + \cdots + a_{1n}b_{nn} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \cdots + a_{2n}b_{n1} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \cdots + a_{2n}b_{n2} & \cdots & a_{21}b_{1n} + a_{22}b_{2n} + \cdots + a_{2n}b_{nn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}b_{11} + a_{n2}b_{21} + \cdots + a_{nn}b_{n1} & a_{n1}b_{12} + a_{n2}b_{22} + \cdots + a_{nn}b_{n2} & \cdots & a_{n1}b_{1n} + a_{n2}b_{2n} + \cdots + a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}$$

Jumlah semua entri pada baris ke-*i* adalah

$$a_{i1}(b_{11} + b_{12} + \cdots + b_{1n}) + a_{i2}(b_{21} + b_{22} + \cdots + b_{2n}) + \cdots + a_{in}(b_{n1} + b_{n2} + \cdots + b_{nn})$$

Karena $(b_{11} + b_{12} + \cdots + b_{1n}) = l, (b_{21} + b_{22} + \cdots + b_{2n}) = l, \ldots, (b_{n1} + b_{n2} + \cdots + b_{nn}) = l$

maka untuk baris ke-*i*

$$a_{i1}(l) + a_{i2}(l) + \cdots + a_{in}(l) = (a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{in})(l) = (k)(l)$$

Jumlah semua entri pada kolom ke-*j* adalah

$$b_{1j}(a_{11} + a_{21} + \cdots + a_{n1}) + b_{2j}(a_{12} + a_{22} + \cdots + a_{n2}) + \cdots + b_{nj}(a_{1n} + a_{2n} + \cdots + a_{nn})$$

Karena

$(a_{11} + a_{21} + \cdots + a_{n1}) = k, (a_{12} + a_{22} + \cdots + a_{n2}) = k, \ldots, (a_{1n} + a_{2n} + \cdots + a_{nn}) = k$ maka

untuk kolom ke-*j*

$$b_{1j}(k) + b_{2j}(k) + \cdots + b_{nj}(k) = (b_{1j} + b_{2j} + \cdots + b_{nj})(k) = (k)(l)$$

Terbukti bahwa $A \bullet B \in B_{n \times n}$

Maka terbukti bahwa operasi perkalian $(\bullet)$ pada $B_{n\times n}$ bersifat tertutup.

Teorema 7: Operasi perkalian $(\bullet)$ pada $B_{n\times n}$ bersifat assosiatif.

Bukti:

Ambil A, B dan C anggota $B_{n\times n}$, dengan a_{ij}, b_{ij} dan $c_{ij} \in \mathbb{R}$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

Akan dibuktikan bahwa:

$$A\bullet(B\bullet C)=(A\bullet B)\bullet C$$

$$A\bullet(B\bullet C)=\sum_{i=j=1}^{n} a_{ij}\bullet\left(b_{ji}\bullet c_{ij}\right)$$

$$=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\bullet\sum_{i,j=1}^{n}\left(b_{ji}\bullet c_{ij}\right)$$

$$=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\bullet\sum_{i,j=1}^{n} b_{ji}\bullet\sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}$$

$$=\sum_{i,j=1}^{n}\left(a_{ij}\bullet b_{ji}\right)\bullet\sum_{i=j=1}^{n} c_{ij}$$

$$=\sum_{i,j=1}^{n}\left(a_{ij}\bullet b_{ji}\right)\bullet c_{ij}$$

$$A\bullet(B\bullet C)=(A\bullet B)\bullet C$$

Jadi terbukti bahwa operasi perkalian $(\bullet)$ pada $B_{n\times n}$ bersifat assosiatif.

Teorema 8: Operasi perkalian $(\bullet)$ pada $B_{n\times n}$ bersifat distributif terhadap operasi penjumlahan $(+)$.

Bukti:

Ambil *A*, *B* dan *C* anggota $B_{n\times n}$, dengan a_{ij}, b_{ij} dan $c_{ij}\in\mathbb{R}$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

Akan dibuktikan bahwa $A \bullet (B+C) = \sum_{i=j=1}^{n} a_{ij} \bullet (b_{ji} + c_{ji})$

$$= \sum_{i=j=1}^{n} \left((a_{ij} \bullet b_{ji}) + (a_{ij} \bullet c_{ji}) \right)$$

$$= A \bullet B + A \bullet C$$

(bersifat distributif kanan)

$$(A+B) \bullet C = \sum_{i=j=1}^{n} (a_{ij} + b_{ij}) \bullet c_{ji}$$

$$= \sum_{i=j=1}^{n} \left((a_{ij} \bullet c_{ji}) + (b_{ij} \bullet c_{ji}) \right)$$

$$= A \bullet C + B \bullet C$$

(bersifat distributif kiri)

Jadi terbukti bahwa operasi kedua $(\bullet)$ pada $B_{n\times n}$ bersifat distributif kanan dan kiri pada operasi penjumlahan $(+)$

Karena B_{nxn} yang membentuk grup abelian dan memenuhi sifat-sifat:

1. Operasi perkalian $(\bullet)$ pada $B_{n\times n}$ bersifat tertutup
2. Operasi perkalian $(\bullet)$ pada $B_{n\times n}$ bersifat assosiatif
3. Operasi perkalian $(\bullet)$ bersifat distributif terhadap operasi penjumlahan $(+)$

Maka terbukti bahwa $B_{n\times n}$ dengan operasi penjumlahan $(+)$ dan perkalian $(\bullet)$ membentuk ring.

3.3 Bujur Sangkar Semi Ajaib Order $n \times n$ adalah Ring Satuan (RS)

Teorema 9: $B_{n\times n}$ mempunyai elemen identitas pada operasi perkalian $(\bullet)$.

Bukti:

Ambil identitas matriks $n\times n$ terhadap operasi perkalian adalah I_2

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Akan dibuktikan bahwa $A \bullet I_2 = A$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Karena semua jumlah baris dan kolom pada matriks I_2 sama yaitu 1 maka $I_2 \in B_{n\times n}$ dimana I_2 tersebut adalah matriks identitas. Jadi terbukti bahwa $B_{n\times n}$ mempunyai elemen identitas pada operasi perkalian. Akan tetapi $B_{n\times n}$ bukan termasuk dalam *field* karena sifat komutatif tidak berlaku pada perkalian matriks, akan tetapi ada subring dari $B_{n\times n}$ yang membentuk *field* yaitu $D_{n\times n}$ yang merupakan himpunan matriks diagonal yang semi ajaib.

Misalkan $D_{n\times n}$ adalah suatu himpunan bagian tak kosong dalam ring $(B_{n\times n})$. Himpunan $D_{n\times n}$ disebut subring dari $B_{n\times n}$ jika $D_{n\times n}$ juga merupakan ring terhadap operasi penjumlahan dan perkalian yang sama pada ring $B_{n\times n}$.

Dari definisi subring, dapat disimpulkan bahwa suatu himpunan bagian dari suatu ring $B_{n\times n}$ merupakan ring jika memenuhi syarat:

1. Terhadap operasi penjumlahan $(+)$, $D_{n\times n}$ merupakan grup abelian.

2. Terhadap operasi perkalian $(\times)$, $D_{n\times n}$ juga bersifat assosiatif yaitu: $\forall A, B, C \in D_{n\times n}$ berlaku $(A \bullet B) \bullet C = A \bullet (B \bullet C)$
3. Terhadap penjumlahan dan perkalian $D_{n\times n}$ bersifat distributif kiri dan kanan, yaitu
   a) $(\forall A, B, C \in D_{n\times n})$ berlaku $(A+B)\bullet C = A\bullet C + B\bullet C$
   b) $(\forall A, B, C \in D_{n\times n})$ berlaku $A\bullet(B+C) = A\bullet B + A\bullet C$

Bukti bagian (1) dan (2) jelas terpenuhi.

Bukti:

3.a) Ambil sebarang A, B dan $C \in D_{nxn}$, dengan a, b dan $c \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c \end{pmatrix}$$

Akan dibuktikan bahwa $(A+B)\bullet C = A\bullet C + B\bullet C$

$$\left(\begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b \end{pmatrix}\right) \bullet \begin{pmatrix} c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c \end{pmatrix}$$

$$= \left(\begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c \end{pmatrix}\right) + \left(\begin{pmatrix} b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c \end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} a\bullet c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a\bullet c & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a\bullet c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b\bullet c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b\bullet c & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b\bullet c \end{pmatrix}$$

$=(A \bullet C)+(B \bullet C)$

3.b) Ambil sebarang A, B dan $C \in D_{nxn}$, dengan a, b dan $c \in \mathbb{R}$

$$A=\begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix} B=\begin{pmatrix} b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b \end{pmatrix} C=\begin{pmatrix} c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c \end{pmatrix}$$

Akan dibuktikan bahwa $A \bullet (B + C) = A \bullet B + A \bullet C$

$$\begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix} \bullet \left(\begin{pmatrix} b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c \end{pmatrix} \right)$$

$$= \left(\begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b \end{pmatrix} \right) + \left(\begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} a \bullet b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a \bullet b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \bullet b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \bullet c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a \bullet c & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \bullet c \end{pmatrix}$$

$=(A \bullet C)+(B \bullet C)$

Jadi terbukti bahwa operasi kedua $(\bullet)$ pada $D_{n\times n}$ bersifat distributif kanan dan kiri pada operasi penjumlahan $(+)$

Karena $D_{n\times n}$ dengan operasi penjumlahan dan perkalian terbukti memenuhi syarat sebagai grup abelian, operasi perkalian bersifat assosiatif dan operasi perkalian bersifat distributif kanan dan kiri terhadap operasi penjumlahan maka terbukti bahwa $D_{n\times n}$ adalah subring dari ring $B_{n\times n}$. Dengan demikian $D_{n\times n}$ adalah ring.

3.4 $D_{n\times n}$ adalah Ring Komutatif (RK)

Teorema 10: Operasi perkalian $(\bullet)$ pada $D_{n\times n}$ bersifat komutatif

Bukti:

Ambil sebarang A dan B ∈ B_{nxn}, dengan a dan $b \in \mathbb{R}$

$$A=\begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b \end{pmatrix}$$

Karena $A, B \in D_{n\times n}$ maka jumlah setiap entri baris dan kolom dari matriks A dan B adalah sama, dimisalkan bahwa untuk jumlah setiap entri baris dan kolom pada matriks A adalah a sedangkan untuk jumlah setiap entri baris dan kolom pada matriks B adalah b.

$$\begin{array}{l} a+0+\ldots+0=a \\ 0+a+\ldots+0=a \\ \vdots \quad\ \vdots \qquad\quad \vdots \\ 0+0+\ldots+a=a \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a+0+\ldots+0=a \\ 0+a+\ldots+0=a \\ \vdots \quad\ \vdots \qquad\quad \vdots \\ 0+0+\ldots+a=a \end{array}$$

$$\begin{array}{l} b+0+\ldots+0=b \\ 0+b+\ldots+0=b \\ \vdots \quad\ \vdots \qquad\quad \vdots \\ 0+0+\ldots+b=b \end{array}$$

$$\begin{matrix} b & +0+\ldots+0=b \\ 0 & +b+\ldots+0=b \\ \vdots & \vdots \qquad\quad \vdots \\ 0 & +0+\ldots+b=b \end{matrix}$$

Akan dibuktikan bahwa $A \bullet B = B \bullet A$

Maka $A \bullet B = \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} a \bullet b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a \bullet b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \bullet b \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b \bullet a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b \bullet a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b \bullet a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix}$$

$$= B \bullet A$$

Jadi terbukti bahwa operasi perkalian $(\bullet)$ pada $D_{n\times n}$ bersifat komutatif.

3.5 $D_{n\times n}$ adalah Ring Satuan (RS)

Teorema 11: $D_{n\times n}$ mempunyai elemen identitas pada operasi perkalian $(\bullet)$.

Bukti:

Misal $I_2 = \begin{pmatrix} d & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d \end{pmatrix}$ adalah sebagai identitas operasi perkalian

Akan dicari dengan $A \bullet I_2 = A$

$$\begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} d & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ad & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & ad & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & ad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix}$$

Langkah selanjutnya menyamadengankan matriks kiri dan matriks kanan, dan diperoleh

$$ad = a$$
$$d = \frac{a}{a}$$
$$d = 1$$

Sehingga diperoleh matriks identitas perkalian sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Jadi berlaku $A \bullet I_2 = A$

$$\begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix}$$

Karena semua jumlah baris dan kolom pada matriks I_2 sama yaitu 1 maka $I_2 \in D_{n\times n}$. Jadi terbukti bahwa $D_{n\times n}$ mempunyai elemen identitas pada operasi perkalian $(\bullet)$.

3.6 $D_{n\times n}$ adalah Ring Komutatif dengan Elemen Satuan (RKS)

Berdasarkan bukti pada 3.4 dan 3.5 yang membuktikan bahwa subring $D_{n\times n}$ dengan operasi perkalian $(\bullet)$ merupakan ring komutatif (RK) dan ring satuan (RS), maka berakibat pula bahwa subring $D_{n\times n}$ dengan operasi perkalian dan penjumlahan merupakan ring komutatif dengan elemen satuan (RKS).

3.7 $D_{n\times n}$ adalah Lapangan (*Field*)

Teorema 12: Semua unsur yang tidak nol di $D_{n\times n}$ mempunyai invers terhadap operasi perkalian.

Bukti:

Ambil $A=\begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix}$ dan misal $A^{-1}=\begin{pmatrix} b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b \end{pmatrix}$

Akan dicari dengan $A\times A^{-1}=I_2$ (identitas operasi ke dua)

$$\begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ab & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & ab & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & ab \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Langkah selanjutnya menyamadenganakan matriks kiri dengan matriks kanan

$ab = 1$, kedua ruas dioperasikan dengan $\frac{1}{a}$ sehingga di peroleh

$$\frac{1}{a}(ab) = \frac{1}{a}(1)$$

$$b = \frac{1}{a}, \forall a \neq 0$$

Sehingga diperoleh matriks A^{-1} sebagai berikut

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$$

Karena jumlah baris dan kolom pada matriks A^{-1} sama yaitu $\frac{1}{a}$ maka $A^{-1} \in D_{n\times n}$. Karena subring $D_{n\times n}$ RKS dan semua unsur yang tidak nol di $D_{n\times n}$ mempunyai invers terhadap operasi perkalian, jadi terbukti bahwa $D_{n\times n}$ adalah lapangan (*Field*).

3.8 Kajian Lapangan dalam Al-Quran

Pada ayat pertama dari ayat-ayat *qital* (perang) dijumpai batasan yang pasti mengenai tujuan perang, dan panji-panji yang jelas dan terang yang menaungi mereka berperang, "*Dan perangilah dijalan Allah orang-orang yang memerangi kamu"*, perang itu adalah perang karena Allah, bukan untuk tujuan-tujuan yang sudah dikenal manusia dalam peperangan-peperangan yang panjang. Perang dijalan Allah bukan untuk meraih kehormatan dan kedudukan yang tinggi dimuka bumi, bukan untuk mendapatkan rampasan dan hasil, bukan untuk merebut pasar dan mendapatkan bahan-bahan mentah, dan bukan untuk menempatkan suatu golongan di atas golongan lain. Perang dalam Islam hanya untuk tujuan yang tertentu yaitu untuk menjunjung tinggi kalimat agama Allah di muka bumi, memantapkan *manhaj*-Nya di dalam kehidupan, dan melindungi kaum-kaum mukminin dari orang-orang yang menfitnahnya agar murtad dari agamanya, atau yang hendak menyesatkan dan merusak mereka. Selain itu, semua adalah perang yang tidak disyariatkan dalam hukum Islam, dan orang yang melakukanya tidak akan mendapatkan pahala dan kedudukan yang baik di sisi Allah (Quthb, 1992:223).

Di samping terbatasnya tujuan maka dibatasi pula ruang lingkupnya, "*Tetapi janganlah kamu melampaui batas, karena sesungguhnya Allah tidak menyukai orang-orang yang melampai batas*". Melampaui batas ini maksudnya melampaui batasnya kedua belah pihak yang berperang kepada orang-orang yang hidup aman dan damai serta tidak menimbulkan bahaya sama sekali terhadap dakwah Islam dan kaum muslimin, seperti kaum wanita, anak-anak kecil, orang tua, dan para ahli ibadah yang memutuskan segala aktifitas lainnya hanya untuk beribadah saja dari pengikut agama apapun (Quthb, 1992:224).

Dari beberapa larangan-larangan diatas maka orang-orang muslim yang melakukan peperangan terhadap orang-orang kafir haruslah memenuhinya dalam artian tidak boleh melanggarnya, karena Rasulullah juga juga melakukan hal yang demikian, karena jika melanggar salah satu larangan-larangan tersebut, maka termasuk golongan orang-orang yang melampaui batas, karena dalam al-Qur'an dijelaskan bahwa Allah tidak menyukai dan melarang orang-orang yang melampaui batas yakni orang-orang yang memerangi golongan-golongan yang diharamkan untuk diperangi dan dibunuh yaitu kaum wanita, anak kecil dan lain sebagainya.

Dari penjelasan-penjelasan di atas dapat diketahui dan diambil kesimpulan bahwa aturan-aturan dalam peperangan untuk tujuan jihad di jalan Allah harus benar-benar diperhatikan oleh orang-orang yang akan melakukan peperangan, karena jika tidak memenuhi dan mentaati salah satu saja dari beberapa syarat di atas maka dikatakan keluar dari batas-batas karidor yang telah ditentukan Allah dalam al-Quran.

Makna umum yang terdapat dari kandungan surat al-Baqarah di atas adalah menjelaskan bahwa orang mukmin harus berjuang untuk mendapatkan kemenangan melawan orang-orang kafir akan tetapi cara mereka untuk meraih kemenangan harus memenuhi aturan-aturan dalam medan perang. Dari tafsiran surat al-Baqarah ayat 190 di dalamnya terdapat hubungan dengan konsep matematika mengenai *field* yakni dilihat dari kalimat "seorang mukmin harus berjuang untuk mendapatkan kemenangan dengan mematuhi aturan-aturan dalam medan perang". Bisa disimbolkan dengan $(R\ *, \bullet)$ dimana R merupakan himpunan tak kosong yaitu kaum (mukminin) dan $(*)$ sebagai operasi pertama yaitu berjuang dalam peperangan dan $(\bullet)$ sebagai operasi kedua yaitu mematuhi aturan dalam medan perang.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan pada bab III, maka dapat ditarik kesimpulan bahwa bujur sangkar semi ajaib order n×n ($B_{n\times n}$) dikatakan *field* (lapangan) jika memenuhi syarat-syarat sebagai berikut:

1. Operasi penjumlahan tertutup di $B_{n\times n}$
2. Operasi penjumlahan bersifat assosiatif di $B_{n\times n}$
3. $B_{n\times n}$ mempunyai unsur identitas terhadap operasi penjumlahan
4. Semua unsur di $B_{n\times n}$ mempunyai invers terhadap operasi penjumlahan
5. Operasi penjumlahan (+) bersifat komutatif pada $B_{n\times n}$
6. Operasi perkalian(∙) pada $B_{n\times n}$ bersifat tertutup
7. Operasi perkalian (∙) pada $B_{n\times n}$ bersifat assosiatif
8. Operasi perkalian (∙) bersifat distributif terhadap operasi penjumlahan
9. $B_{n\times n}$ mempunyai elemen identitas pada operasi perkalian (∙)
10. Operasi perkalian (∙) pada $D_{n\times n}$ bersifat komutatif
11. Semua unsur yang tidak nol di $D_{n\times n}$ mempunyai invers terhadap operasi perkalian

$B_{\ n\times n}$ bukan termasuk dalam *field* karena sifat komutatif tidak berlaku pada perkalian matriks secara umum, akan tetapi ada subring dari $B_{n\times n}$ yang membentuk *field* yaitu $D_{n\times n}$ yang merupakan himpunan matriks diagonal yang semi ajaib.

4.2 Saran

Penulis menyarankan dilakukan penelitian lebih lanjut mengenai bujur sangkar semi ajaib ini yang berkaitan dengan struktur-struktur aljabar lainya yang mungkin dipenuhi.

DAFTAR PUSTAKA

Andrews. 1960. *Magic Square dan Cubes*. New York: Dover Publicatins, inc.

Anton, H dan Rorres, C. 2004. *Aljabar Linier Elementer, Versi Aplikasi*. Jakarta: Erlangga.

As-Saidi, A. N. 2007. *Tafsir As-Sa'di.* Jakarta: Pustaka Sahifa.

Dummit, David S dan . Foote, Richard M. 1991. *Abstract Algebra.* New York: Prentice-Hall International, Inc.

Muhammad, J. A, dan Ja'far, A. 2008. *Tafsir Jami'Al Bayan an Ta'wil Ayi Al-Quran*. Jakarta: Pustaka Azzam.

Qardhawi, Y. 2009. *Fiqih Jihad*. Kairo: Maktabah Wahbah.

Quthb, S. 1992. *Tafsir Fi Zhilalil Quran*. Depok: Gema Insani.

Raisinghania, M, D. Anggarwal R, S. 1980. *Modern Algebra*. New Delhi: S Chand and Company Ltd.

Rahman, H. 2007. *Indahnya Matematika dalam Al-Quran.* Malang: UIN-Press.

Stephens, D. L. 1993. *Matrix Properties of Magic Square*. Texas: Denton.

Wahyudin. 1989. *Aljabar Modern*. Bandung: Tarsito