

**ANALISIS SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL PADA  
MODEL FLUIDA DENGAN SKEMA IMPLISIT**

SKRIPSI

Oleh:  
MUDAWAMAH  
NIM: 04510045



**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG  
MALANG  
2009**

**ANALISIS SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL PADA  
MODEL FLUIDA DENGAN SKEMA IMPLISIT**

**SKRIPSI**

**Diajukan Kepada:  
Universitas Islam Negeri Malang  
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan  
Dalam Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)**

**Oleh:  
MUDAWAMAH  
NIM: 04510045**

**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG  
MALANG  
2009**

**ANALISIS SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL PADA  
MODEL FLUIDA DENGAN SKEMA IMPLISIT**

**SKRIPSI**

Oleh:  
**MUDAWAMAH**  
**NIM 04510045**

Telah Disetujui untuk Diuji  
Tanggal 17 Januari 2009

**Pembimbing I**

**Pembimbing II**

**Usman Pagalay, M. Si**  
**NIP: 150 327 240**

**Achmad Nashichuddin, MA**  
**NIP: 150 302 531**

**Mengetahui,**  
**Ketua Jurusan Matematika**

**Sri Harini, M. Si**  
**NIP: 150 318 321**

**ANALISIS SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL PADA  
MODEL FLUIDA DENGAN SKEMA IMPLISIT**

**SKRIPSI**

Oleh:  
**MUDAWAMAH**  
**NIM: 04510045**

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan  
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan  
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal 19 Januari 2009

<b>Susunan Dewan Penguji:</b>		<b>Tanda Tangan</b>
1. Penguji Utama	: <u>Sri Harini, M.Si</u> NIP: 150 318 321	( )
2. Ketua	: <u>Abdussakir, M.Pd</u> NIP: 150 327 247	( )
3. Sekretaris	: <u>Usman Pagalay, M. Si</u> NIP: 150 327 240	( )
4. Anggota	: <u>Achmad Nashichuddin, MA</u> NIP: 150 302 531	( )

**Mengetahui dan Mengesahkan,  
Ketua Jurusan Matematika**

Sri Harini, M.Si  
NIP: 150 318 321

## MOTTO

وَلَا تَأْيِسُوا مِنَ رَوْحِ اللَّهِ إِنَّهُ لَا يَأْيِسُ مِنَ رَوْحِ اللَّهِ إِلَّا الْقَوْمُ الْكَافِرُونَ

*Artinya: "Janganlah kamu sekalian berputus asa dari rahmat Allah.*

*Sesungguhnya orang yang berputus asa dari rahmat Allah adalah golongan orang-orang Kafir." (Q.S. YUSUF:87)*

*Life is only once, so make it meaningful*

*(Penulis)*

*Salaman Wahtiroman*

*Seiring doa semoga skripsi ini bermanfaat dan menjadikan kesuksesan dunia dan akhirat.*

*Dengan iringan do'a dan rasa syukur yang teramat besar, karya ini penulis persembahkan kepada: abah M. Kholid dan mama Ummi Dalilah tercinta yang telah mendidik, memberikan kasih sayang, pengorbanan dan kebaikanmu selalu memberikan yang terbaik bagi Ananda. Ananda hanya bisa berdo'a semoga menjadi orang tua yang dirindukan surga dan selalu mendapat perlindungan Allah SWT.*

*Ucapan terima kasih kepada saudara-saudaraku; Mba Muliatul Hasanah, Mba Umi Mursyidah, Mas Agus Maimun Zubair, Mas Roni Sya'roni, Mas Syukur, Adik-adik, keponakan-keponakan, dan keluarga Kediri semoga penulis menjadi lebih baik,*

## PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Mudawamah

NIM : 04510045

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri.

Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 19 Januari 2009

Yang membuat pernyataan

Mudawamah  
NIM. 04510045

## KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Segala puji bagi Allah SWT karena atas rahmat, taufik serta hidayah-Nya, penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana Sains dan Teknologi dalam bidang Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Malang. Penulis menyadari bahwa banyak pihak yang telah berpartisipasi dan membantu dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Untuk itu, iringan do'a dan ucapan terimakasih yang sebesar-besarnya penulis sampaikan, terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo selaku rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Malang,
2. Prof. Dr. Sutiman Bambang Sumitro, SU, D. Sc. Selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang,
3. Sri Harini, M. Si selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang,
4. Usman Pagalay, M. Si yang telah bersedia meluangkan waktu untuk memberikan bimbingan dan pengarahan selama penulisan skripsi di bidang matematika,
5. Achmad Nashihuddin, MA yang telah bersedia memberikan bimbingan dan pengarahan selama penulisan skripsi di bidang agama,
6. Segenap dosen pengajar khususnya dosen Matematika atas ilmu yang telah diberikan kepada penulis,



7. Kedua orang tua yang tercinta abah dan mama yang telah mendidik, mencintai serta selalu menjadi motivator penulisan skripsi ini,
8. Segenap keluarga Banjar dan keluarga Kediri yang telah memberikan do'a dan dukungan dalam penulisan skripsi ini,
9. Segenap teman-teman baik di UIN Malang maupun di luar UIN Malang yang selalu memberikan motivasinya dalam penulisan skripsi ini,
10. Teman-teman matematika, terutama angkatan 2004 beserta semua pihak yang telah membantu penyelesaian skripsi ini,
11. Teman-teman seperjuangan musyrif-musyrifah dari angkatan 2005 sampai sekarang, murobbi-murobbiyah serta dewan pengasuh Ma'had Sunan Ampel Al-Aly UIN Malang, yang selalu memberi motivasi dan do'anya.

Dalam penyusunan skripsi ini, tentunya masih terdapat banyak kesalahan dan kekurangan, sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran demi perbaikan skripsi ini. Akhirnya, semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Amin.

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Malang, 17 Januari 2009

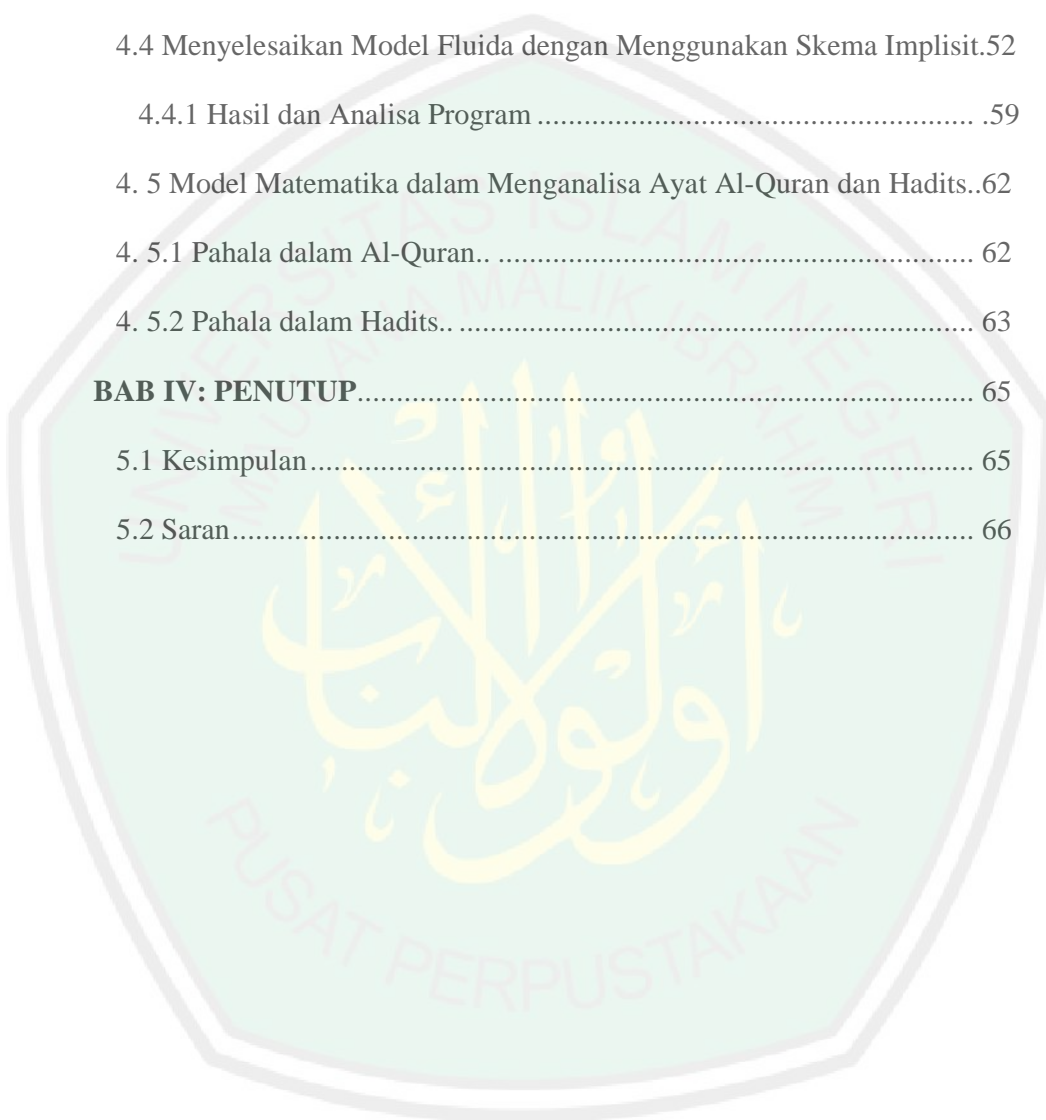
Penulis

## DAFTAR ISI

<b>KATA PENGANTAR</b> .....	i
<b>DAFTAR ISI</b> .....	iii
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	vi
<b>DAFTAR LAMPIRAN</b> .....	vii
<b>ABSTRAK</b> .....	viii
<b>BAB I: PENDAHULUAN</b> .....	1
A. Latar Belakang.....	1
B. Rumusan Masalah.....	5
C. Tujuan Penulisan.....	5
D. Batasan Masalah.....	6
E. Manfaat Penulisan.....	6
F. Sistematika Pembahasan.....	7
<b>BAB II: KAJIAN PUSTAKA</b> .....	9
2.1 Pengertian Persamaan Diferensial.....	9
2.1.1 Pengertian Diferensial.....	9
2.1.2 Orde (tingkat).....	10
2.1.3 Linieritas Persamaan Diferensial.....	10
2.1.4 Homogenitas Persamaan Diferensial Linier.....	10
2.1.5 Diferensial Biasa.....	11
2.1.6 Diferensial Parsial.....	11
2.2 Diferensial Numerik.....	13

2.2.1	Diferensial Turunan Pertama .....	13
2.2.2	Diferensial Turunan Kedua .....	15
2.2.3	Diferensial Turunan Lebih Tinggi.....	16
2.2.4	Turunan Terhadap Variabel Lain .....	16
2.3	Metode Beda Hingga.....	17
2.3.1	Diskretisasi Numerik Skema Eksplisit .....	18
2.3.2	Stabilitas Skema Ekplisit .....	20
2.3.3	Diskretisasi Numerik Skema Implisit.....	21
2.4	Pemrograman Matlab .....	26
2.4.1	Program Bentuk $Ax=b$ .....	27
2.4.2	Operator \ dan / Untuk Menyelesaikan.....	28
2.5	Teori Fluida.....	28
2.5.1	Definisi dan Sifat-sifat Fluida .....	28
2.5.2	Klasifikasi Fluida.....	29
2.6	Kinematika dan Hukum-Hukum Kekekalan .....	34
2.6.1	Total Turunan Terhadap Waktu .....	34
2.6.2	Volume Kontrol dan Permukaan Kontrol .....	35
2.6.3	Kekekalan Massa dan Persamaan Kontinuitas.....	37
2.6.4	Momentum Fluida .....	39
2.7	Pahala dalam Al-Qur'an dan Hadits.....	45
<b>BAB III: PEMBAHASAN .....</b>		<b>44</b>
4.1	Mengidentifikasi Faktor-faktor dalam Fluida.....	44
4.2	Mengasumsikan Aliran dalam Fluida .....	44

4.3 Membuat Model Fluida dengan Menggunakan Hukum Kekekalan..	45
4.3.1 Persamaan Kontinuitas .....	45
4.3.2 Persamaan Gerak dalam Fluida (Motion).....	47
4.4 Menyelesaikan Model Fluida dengan Menggunakan Skema Implisit.	52
4.4.1 Hasil dan Analisa Program .....	59
4.5 Model Matematika dalam Menganalisa Ayat Al-Quran dan Hadits..	62
4.5.1 Pahala dalam Al-Quran.. .....	62
4.5.2 Pahala dalam Hadits.. .....	63
<b>BAB IV: PENUTUP</b> .....	65
5.1 Kesimpulan.....	65
5.2 Saran.....	66



## DAFTAR GAMBAR

2.1 Perkiraan Garis Singgung Suatu Fungsi.....	15
2.2 Skema Ekplisit .....	19
2.3 Langkah-Langkah Hitungan Dengan Skema Ekplisit.....	20
2.4 Stabilitas Numerik .....	21
2.5 Skema Implisit.....	22
2.6 Tekanan .....	31
2.7 Laju Perubahan Fungsi Titik Untuk Aliran Yang Melalui Sebuah Volume Kontrol .....	36
4.1 Gerakan Kontinuitas Berdasarkan Hukum Kekekalan Massa.....	45
4.2 Gerakan Fluida Berdasarkan Hukum Kekekalan Momentum.....	48
4.3 Pola Iterasi Kecepatan Momentum $x$ .....	55
4.4 Pola Iterasi Kecepatan Momentum $y$ .....	56
4.5 Pola Iterasi Momentum $x$ Pada Sistem Lingkaran.....	56
4.6 Pola Iterasi Momentum $y$ Pada Sistem Lingkaran.....	57
4.7 Kecepatan $u(x,t)$ Iterasi 1 .....	59
4.8 Kecepatan $v(y,t)$ Iterasi 1 .....	60
4.9 Kecepatan $u(x,t)$ Iterasi 3 .....	60
4.10 Kecepatan $v(y,t)$ Iterasi 3 .....	61
4.11 Kecepatan $u(x,t)$ Iterasi 5 .....	61

## DAFTAR LAMPIRAN

1. Lampiran Program Implisit
2. Hasil Komputasi Kecepatan



## ABSTRAK

Mudawamah, 2009. Analisis Sistem Persamaan Diferensial Pada Model Fluida Dengan Skema Implisit. Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Malang. Pembimbing: Usaman Pagalay, M.Si.

Achmad Nashichuddin, MA

**Kata kunci:** *Fluida, hukum kekekalan, skema implisit, iterasi*

Model fluida merupakan model yang diperoleh dari hukum kekekalan massa yang merupakan persamaan kontinuitas  $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$ , dan hukum kekekalan momentum yang merupakan persamaan momentum  $x$   $\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + (1/\rho) \frac{\partial p}{\partial x} - \mu/\rho (\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}) = 0$  dan momentum  $y$   $\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + (1/\rho) \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\eta}{\rho} (\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}) = 0$ . Persamaan momentum tersebut diselesaikan dengan skema implisit yang mentransformasikan persamaan kontinu ke dalam bentuk persamaan diskrit, sehingga akan diperoleh pola iterasi kecepatan. Pola iterasi ini diterapkan pada sistem yang berbentuk lingkaran sehingga mendapatkan matriks. Dari matriks ini dibuat program dengan menggunakan Matlab.

Dalam penelitian ini, fluida yang analisis adalah fluida yang tidak dapat dimampatkan  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ , steady state  $\frac{D}{Dt} = 0$ , mempunyai kekentalan, gerakan laminar  $Re < 2000$  dan dalam dua dimensi. Berdasarkan hasil pembahasan, maka kecepatan pada setiap iterasi berbeda dan bergantung pada kekentalan.

## BAB I PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Al-Quran dan Al-Hadits yang merupakan tuntunan umat Islam dalam menjalankan roda kehidupan di dunia, dan sebagai mahasumber ilmu pengetahuan, maka dari itu, dalam penulisan skripsi ini terinspirasi dari ayat Al-Quran yang berkenaan dengan pemodelan. Salah satu ayat tersebut adalah:

مَثَلُ الَّذِينَ يُنْفِقُونَ أَمْوَالَهُمْ فِي سَبِيلِ اللَّهِ كَمَثَلِ حَبَّةٍ أَنْبَتَتْ سَبْعَ سَنَابِلٍ فِي كُلِّ  
سُنْبُلَةٍ مِائَةٌ حَبَّةٌ ۗ وَاللَّهُ يُضْعِفُ لِمَنْ يَشَاءُ ۗ وَاللَّهُ وَاسِعٌ عَلِيمٌ ﴿٢٦١﴾

Artinya: “Perumpamaan (nafkah yang dikeluarkan oleh) orang-orang yang menafkahkan hartanya di jalan Allah adalah serupa dengan sebutir benih yang menumbuhkan tujuh bulir, pada tiap-tiap bulir seratus biji. Allah melipat gandakan (ganjaran) bagi siapa yang dia kehendaki, dan Allah Maha Luas (karunia-Nya) lagi Maha Mengetahui”(Q.S Ali Baqoroh: 261).

Dari ayat di atas merupakan anjuran untuk menafkahkan harta di jalan Allah. Di jalan Allah, merupakan semua kegiatan yang diridhoi oleh Allah, seperti menafkahkan harta untuk kegiatan di masjid, rumah sakit, panti asuhan, lembaga pendidikan, lembaga sosial, kepentingan jihad, pembangunan perguruan tinggi, usaha penyelidikan ilmiah dan lain-lain. Allah menjanjikan pahala yang besar bagi yang menafkahkan hartanya di jalan Allah dengan perumpamaan 700 biji, dan Allah akan melipatgandakan bagi siapa yang Allah kehendaki. Allah Maha Besar dan Maha Luas karunia-Nya untuk makhluk-Nya di dunia ini. Namun ada syarat-syarat dalam menafkahkan harta untuk mendapatkan Ridho-Nya yaitu tidak mengiringi apa yang dinafkahkannya itu dengan menyebut-nyebut pemberiannya



dan tidak menyakiti (perasaan si penerima). Jika syarat-syarat tersebut tidak dipenuhi, maka Allah akan menghapus pahala apa yang telah dinafkakkannya (Ibnu Kasir, 2000:160).

Dari ayat di atas merupakan inspirasi pemodelan matematika yang berfungsi untuk menyederhanakan permasalahan agar lebih mudah dipahami dan lebih efisien. Dalam suatu fenomena yang semakin kompleks maka perlu adanya metode penyelesaian agar dapat terselesaikan. Salah satu dari metode untuk menyelesaikan permasalahan kompleks dalam model matematika adalah dengan metode beda hingga skema implisit yang berupa persamaan diferensial. Diferensial numerik digunakan untuk memperkirakan bentuk diferensial kontinu menjadi bentuk diskrit. Diferensial numerik ini banyak digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial (Triatmojo, 2002: 9).

Secara umum dalam penyelesaian permasalahan, matematika dibagi menjadi dua metode yaitu metode analitik dan numerik. Metode analitik dilakukan jika permasalahan itu sederhana dan jika permasalahan tersebut lebih kompleks maka menggunakan metode numerik yang berupa pendekatan. Metode numerik adalah teknik untuk menyelesaikan permasalahan-permasalahan yang diformulasikan secara matematis dengan cara operasi hitungan. Hasil dari penyelesaian numerik merupakan nilai perkiraan atau pendekatan dari penyelesaian analitik atau eksak. Berbagai permasalahan dalam bidang ilmu pengetahuan dan teknologi dapat digambarkan dalam bentuk persamaan matematik. Agar lebih valid, permasalahan diselesaikan secara analitik dan numerik sehingga dapat dihitung galat atau

errornya. Nilai kesalahan tersebut harus cukup kecil terhadap tingkat kesalahan yang ditetapkan (Triatmojo, 2002:1).

Sebagian besar masyarakat menganggap matematika hanya merupakan ilmu menghitung bilangan-bilangan dengan menggunakan beberapa operasi dasar yaitu: tambah, kurang, kali dan bagi. Seiring perkembangan zaman, ilmu matematika berkembang dan hadir sebagai hal yang mendasar dan perlu dipelajari pada setiap disiplin ilmu. Matematika bersifat abstrak, dapat disimbolkan dengan bermacam-macam variabel, sehingga mempunyai kemungkinan besar untuk diterapkan dalam berbagai disiplin ilmu.

Salah satu disiplin ilmu yang menerapkan matematika adalah ilmu fisika. Dalam penulisan skripsi ini, penulis akan memodelkan fluida yang bergerak. Hampir tidak sadari bahwasanya fluida banyak digunakan dalam kehidupan sehari-hari. Banyak gejala alam seperti bukit-bukit pasir terjadi akibat gaya-gaya yang ditimbulkan oleh aliran udara atau air, kran air yang ditutup tiba-tiba, pusaran air dalam bak mandi yang dikeluarkan melalui lubang pembuangan pada dasarnya sama dengan pusaran tornado atau pusaran air di balik pilar jembatan, radiator air atau uap panas untuk memanaskan rumah dan radiator pendingin dalam sebuah mobil bergantung pada aliran fluida agar dapat memindahkan panas secara efektif (Olson dan Wright, 1993:4). Terbangnya burung-burung di udara dan gerakan ikan di air dikontrol oleh hukum-hukum mekanika fluida. Perancangan kapal terbang dan kapal laut didasarkan pada teori mekanika fluida juga (Orianto, 1989: 3).

Mekanika fluida merupakan disiplin ilmu bagian dari mekanika terapan yang mengkaji perilaku zat cair dan gas dalam keadaan diam/gerak. Prinsip-prinsip mekanika fluida diperlukan untuk menjelaskan mengapa pesawat terbang dibuat lurus dengan permukaan datar demi efisiensi penerbangan yang baik, lain halnya dengan bola golf yang permukaannya dibuat kasar untuk mengurangi hambatan ketika bergerak. Banyak pertanyaan dengan gagasan-gagasan mekanika fluida antara lain: 1) bagaimana sebuah roket menghasilkan gaya dorong, padahal tidak ada udara yang melawan dorongannya keluar angkasa?, 2) mengapa arus air yang berasal dari sebuah kran kadang-kadang terlihat halus permukaannya, tetapi kadang-kadang permukaannya kasar, 3) bagaimana laju perahu dapat mempertahankan kecepatan yang tinggi? (Munson dkk, 2003: 3). Ada beberapa sifat fisis fluida yaitu : tekanan, temperatur, massa jenis dan viskositas (Olson dan Wright, 1993:4).

Kemajuan teknologi yang meliputi studi-studi baik secara analitik maupun numerik (komputasi) sangat membantu untuk memecahkan berbagai masalah dalam aliran fluida. Komputasi sangat membantu terutama dalam pemecahan persoalan multidimensi. Maka dari itu penulis menggunakan metode numerik skema implisit untuk menganalisa parameter yang ada dalam model fluida. Skema ini lebih sulit dibandingkan dengan skema eksplisit. Skema eksplisit memperhitungkan  $T$  (temperatur) pada waktu  $n+1$  dihitung berdasar variabel pada waktu  $n$  yang sudah diketahui. Sedangkan skema implisit, perhitungan  $T_i^{n+1}$  dihitung dengan nilai yang belum diketahui yaitu  $i-1$ , dan  $i+1$ . Skema eksplisit mempunyai kelemahan, yaitu langkah waktu  $\Delta t$  harus cukup kecil. Langkah

waktu  $\Delta t$  dibatasi berdasarkan bilangan Courant. Apabila nilai  $Cr < 1$  maka hitungan menjadi tidak stabil. Penggunaan langkah waktu  $\Delta t$  yang kecil tersebut menyebabkan prosedur dan waktu hitungan menjadi sangat lama (Triatmojo, 2002:206).

Untuk mengetahui hubungan beberapa parameter pada fluida, maka perlu adanya model fluida sebagai penyederhanaan masalah, sehingga dapat diselesaikan dengan dengan metode numerik skema implisit. Dari latar belakang di atas, maka penulis mengambil judul skripsi, yaitu: “ **Analisis Sistem Persamaan Diferensial Pada Model Fluida Dengan Skema Implisit**”.

## **1.2 Rumusan Masalah**

Berdasarkan latar belakang masalah di atas, maka rumusan permasalahan yang akan dibahas, yaitu:

1. Bagaimana membuat model fluida dan langkah-langkah penyelesaiannya dengan skema implisit?
2. Bagaimana hasil kecepatan dan tekanan pada model fluida?

## **1.3 Tujuan Penulisan**

Adapun tujuan dari penulisan ini adalah:

1. Untuk membuat model fluida dan langkah-langkah penyelesaiannya dengan skema implisit.
2. Mengetahui kecepatan dan tekanan pada model fluida.

#### 1.4 Batasan Masalah

Asumsi dalam fluida ini

1. Fluida yang bersifat inkompresibel (tidak dapat dimampatkan) yaitu yang berupa fluida cair (liquid). Maksud inkompresibel adalah densitas ( $\rho$ ) dari fluida  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ ,
2. Fluida bersifat viskos dan sistem alirannya berupa lingkaran, sehingga aliran pada batas sistemnya mempunyai kecepatan nol,
3. Aliran steady state,  $\frac{D}{Dt} = 0$ ,
4. Aliran laminar  $Re < 2000$ ,
5. Aliran dalam dua dimensi,
6. Temperatur  $60^{\circ}C$ .

#### 1.5 Manfaat Penulisan

Penulisan karya ilmiah ini pada dasarnya diharapkan dapat memberikan manfaat terhadap beberapa pihak, diantaranya:

1. Bagi Penulis

Menambah wawasan dan ilmu pengetahuan serta pemahaman dengan keilmuan matematika.

2. Bagi Jurusan Matematika

Sebagai bahan pustaka tentang metode numerik dan pemodelan.

3. Bagi Masyarakat

Menganalisa mekanika fluida antara lain:

- a. Bidang kelautan yaitu untuk mempertahankan kecepatan perahu,
- b. Bidang perakitan yaitu merancang pesawat dengan permukaan atas datar,
- c. Pengamat cuaca yaitu untuk memprediksi cuaca yang akan datang, dan lain-lain.

### 1.6 Metode Penelitian

Dalam penelitian ini merujuk pada persamaan fluida pada sebuah tesis yaitu: Dipanjan, Roy, "Derivation of Generalized Lorenz Systems to Study the Onset Of Chaos in High Dimensions," *Tesis M.S* (Arlington: The University of Texas, 2006), 13. Langkah-langkah yang digunakan adalah:

- 1.6.1 Mengidentifikasi Faktor-faktor dalam Fluida,
- 1.6.2 Mengasumsikan Aliran dalam Fluida,
- 1.6.3 Membuat Model Fluida dengan Menggunakan Hukum Kekekalan,
- 1.6.4 Menyelesaikan Model dengan Menggunakan Skema Implisit,
  - a. Mentransformasikan Persamaan Kontinu Menjadi Persamaan Diskrit,
  - b. Membuat Pola Iterasi,
  - c. Menjalankan Pola Iterasi Kecepatan pada Sistem yang Berbentuk Lingkaran,
  - d. Membuat Matriks Hasil Menjalankan Pola Iterasi Kecepatan pada Sistem yang Berbentuk Lingkaran,
- 1.6.5 Hasil dan Analisis Program,

#### 1.6.6 Model Matematika Dalam Menganalisa Ayat Al-Quran dan Hadits.

### 1.7 Sistematika Pembahasan

Agar penulisan skripsi ini lebih terarah, mudah ditelaah dan dipahami, maka digunakan sistematika pembahasan yang terdiri dari lima bab. Masing-masing bab dibagi ke dalam beberapa subbab dengan rumusan sebagai berikut:

#### BAB I PENDAHULUAN

Pendahuluan meliputi: latar belakang permasalahan, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, dan sistematika pembahasan.

#### BAB II KAJIAN PUSTAKA

Bagian ini terdiri atas konsep-konsep (teori-teori) yang mendukung bagian pembahasan. Konsep-konsep tersebut antara lain berisi tentang dasar-dasar teori sebagai acuan dalam penulisan skripsi ini, antara lain: persamaan diferensial, metode beda hingga, pemrograman matlab untuk solusi  $Ax = b$ , teori fluida, kinematika dan hukum-hukum kekekalan, pahala dalam Al-Qur'an dan Al-Hadits.

#### BAB III PEMBAHASAN

Pada bab ini menguraikan semua langkah-langkah yang ada pada metode penelitian.

#### BAB IV PENUTUP

Pada bab ini akan membahas kesimpulan dan saran.

## BAB II

### KAJIAN PUSTAKA

#### 2.1 Pengertian Persamaan Diferensial

##### 2.1.1 Pengertian Diferensial

**Definisi 1:**

Turunan fungsi  $f$  adalah fungsi lain  $f'$  (dibaca  $f$  aksen) yang nilainya pada sembarang bilangan  $c$  adalah:

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \quad (2.1)$$

asalkan limitnya ada disebut turunan.

**Definisi 2:**

Persamaan yang mengandung satu atau lebih fungsi (peubah tak bebas) beserta turunannya terhadap satu atau lebih peubah bebas disebut turunan.

Contoh :  $f(x) = 13x - 6$

$$\begin{aligned} f'(4) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} \\ f'(4) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[13(4+h) - 6] - [13(4) - 6]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{13h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 13 = 13 \end{aligned} \quad (2.2)$$

(Purcell dan Varberg, 1987: 114)



### 2.1.2 Orde (tingkat)

Orde atau tingkat suatu persamaan diferensial adalah orde (tingkat) dari turunan yang terdapat pada persamaan diferensial dengan tingkatan yang paling

tinggi. Contoh:  $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 0$  (orde dua) (2.3)

(Ault dan Ayres, JR, 1992: 1).

### 2.1.3 Linieritas Persamaan Diferensial

Berdasarkan kelinieran (pangkat satu) dari peubah tak bebasnya persamaan diferensial dibagi dua yaitu linier dan non linier. Dikatakan linier jika variabel terikatnya dan turunannya berpangkat 1 dengan koefisien konstanta atau koefisien yang tergantung pada variabel bebasnya. Jika tidak demikian maka persamaan diferensial tersebut dikatakan non-linier. Contoh:

$$\begin{array}{ll} \frac{dy}{dx} + y = 0 \Rightarrow \text{Linier} & 2\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \text{Linier} \\ y\frac{dy}{dx} + x = 0 \Rightarrow \text{Non Linier} & \frac{dy}{dx} + y^2 = 0 \Rightarrow \text{Non Linier} \end{array}$$

(Ault dan Ayres, JR, 1992: 238). (2.4)

### 2.1.4 Homogenitas Persamaan Diferensial Linier

Persamaan diferensial dikatakan homogen jika pada ruas kiri persamaan tersebut hanya mengandung variabel terikat beserta turunannya, sedangkan pada ruas kanan yang tersisa hanya 0,  $f'(x) = 0$ . Jika di ruas kanan ada variabel bebas atau konstanta maka Persamaan Diferensial tersebut dikatakan non-homogen,  $f'(x) \neq 0$ .

Contoh: (2.5)

$$\frac{dy}{dx} + y = 0 \Rightarrow \text{Homogen}$$

$$\frac{dy}{dx} + y^2 = 3x \Rightarrow \text{Non Homogen} \quad (\text{Ault dan Ayres, JR, 1992: 255}).$$

Persamaan diferensial ini dibagi menjadi dua yaitu:

### 2.1.5 Diferensial Biasa

Diferensial biasa adalah persamaan diferensial yang mengandung satu atau lebih fungsi (peubah tak bebas) beserta turunannya terhadap satu peubah bebas.

$$\text{Contoh: } \frac{dy}{dx} = x + 10 \quad (2.6)$$

### 2.1.4 Diferensial Parsial

Persamaan diferensial mengandung satu atau lebih fungsi (peubah tak bebas) beserta turunannya terhadap lebih dari satu peubah bebas (Ault dan Ayres, JR, 1992: 231). Kebanyakan permasalahan dalam ilmu pengetahuan dan teknologi dapat direpresentasikan dalam bentuk persamaan diferensial parsial. Persamaan tersebut merupakan laju perubahan terhadap dua atau lebih variable bebas yang biasanya adalah waktu dan jarak (ruang). Bentuk umum persamaan diferensial order 2 dan dua dimensi adalah:

$$a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} + c \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + d \frac{\partial \varphi}{\partial x} + e \frac{\partial \varphi}{\partial y} + f \varphi + g = 0 \quad (2.7)$$

dengan  $a, b, c, d, e, f$  dan  $g$  merupakan fungsi dari variable  $x$  dan  $y$  dan variable tidak bebas  $\varphi$ .

Beberapa bentuk persamaan diferensial parsial:

### 1. Persamaan Ellips

Persamaan yang termasuk dalam tipe ini adalah persamaan Poisson:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + g = 0 \quad (2.8)$$

dan persamaan Laplace:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (2.9)$$

Persamaan ellips biasanya berhubungan dengan masalah-masalah keseimbangan atau aliran permanen, seperti aliran air tanah di bawah bendungan dan karena adanya pemompaan, pembebanan, dan sebagainya. Persamaan ellips berhubungan masalah keseimbangan atau kondisi permanen (tidak bergantung waktu), dan penyelesaiannya memerlukan kondisi batas disekeliling daerah tinjauan.

### 2. Persamaan Parabola

Persamaan parabola biasanya merupakan persamaan yang bergantung pada waktu (tidak permanen). Penyelesaian tersebut memerlukan kondisi awal dan kondisi batas. Persamaan parabola yang paling sederhana adalah perambatan panas, dan difusi polutan yang mempunyai bentuk:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (2.10)$$

$T$  adalah temperatur,  $K$  adalah koefisien konduktifitas,  $t$  adalah waktu, dan  $x$  adalah jarak. Penyelesaian dari persamaan tersebut adalah mencari temperatur  $T$  atau konsentrasi polutan dilokasi (titik)  $x$  dan setiap waktu.

### 3. Persamaan Hiperbola

Persamaan hiperbola yang paling sederhana adalah persamaan gelombang yang mempunyai bentuk berikut:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (2.11)$$

Dengan  $y$  adalah perpindahan vertikal, pada jarak  $x$  dari ujung tali yang bergetar yang mempunyai panjang  $L$  sesudah waktu  $t$ . oleh karena nilai  $y$  pada ujung-ujung tali biasanya diketahui untuk semua waktu (kondisi batas) dan bentuk serta kecepatan tali diketahui pada waktu nol (kondisi awal), maka penyelesaian pada persamaan parabola, yaitu menghitung  $y$  pada  $x$  dan  $t$  tertentu (Triatmojo, 2002:201).

## 2.2 Diferensial Numerik

Diferensial numerik digunakan untuk memperkirakan bentuk diferensial kontinu menjadi bentuk diskrit. Diferensial numerik ini banyak digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial. Bentuk tersebut dapat diturunkan berdasar deret taylor.

### 2.2.1 Diferensial Turunan Pertama

Deret taylor merupakan dasar untuk menyelesaikan masalah dalam metode numerik, terutama penyelesaian persamaan diferensial. Jika suatu fungsi  $f(x)$  diketahui  $f(x)$  titik  $x_i$  dan semua turunan dari  $f$  terhadap  $x$  diketahui pada titik tersebut, maka dengan deret taylor dapat dinyatakan nilai  $f$  pada titik  $x_{i+1}$  yang terletak pada jarak  $\Delta x$  dari titik  $x_i$ . Adapun deret taylor tersebut adalah:

$$\begin{aligned}
 f(x_{i+1}) &= f(x_i) + f'(x_i) \frac{\Delta x}{1!} + f''(x_i) \frac{\Delta x^2}{2!} + f'''(x_i) \frac{\Delta x^3}{3!} + \dots \\
 &+ f^{(n)}(x_i) \frac{\Delta x^n}{n!} + R_n
 \end{aligned}
 \tag{2.12}$$

Keterangan:

$\Delta x$  = langkah ruang, yaitu jarak antara  $x_i$  dan  $x_{i+1}$

$R_n$  = kesalahan pemotongan

Deret Taylor dari persamaan tersebut dapat ditulis dalam bentuk:

$$\begin{aligned}
 f(x_{i+1}) &= f(x_i) + f'(x_i) \Delta x + O(\Delta x^2) \\
 \frac{\partial f}{\partial x} &= f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\Delta x}
 \end{aligned}
 \tag{2.13}$$

Bentuk diferensial dari persamaan tersebut disebut diferensial maju order satu. Disebut diferensial maju karena menggunakan data pada titik  $x_i$  dan  $x_{i+1}$  untuk memperhitungkan diferensial. Jika data yang digunakan adalah di titik  $x_i$  dan  $x_{i-1}$  maka disebut diferensial mundur, deret tersebut menjadi:

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - f'(x_i) \frac{\Delta x}{1!} + f''(x_i) \frac{\Delta x^2}{2!} - f'''(x_i) \frac{\Delta x^3}{3!} + \dots
 \tag{2.14}$$

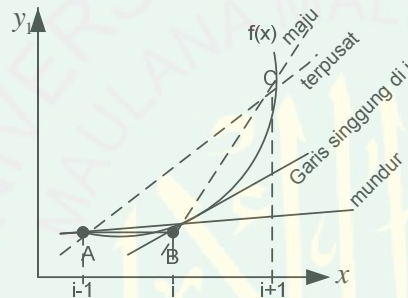
$$\begin{aligned}
 f(x_{i-1}) &= f(x_i) - f'(x_i) \Delta x + O(\Delta x^2) \\
 \frac{\partial f}{\partial x} &= f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x} + O(\Delta x)
 \end{aligned}
 \tag{2.15}$$

Apabila data yang digunakan untuk memperkirakan diferensial dari fungsi adalah pada titik  $x_{i+1}$  dan  $x_{i-1}$ , maka perkiraannya disebut diferensial terpusat.

Maka persamaan tersebut adalah:

$$\begin{aligned}
 f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}) &= 2f'(x_i) \frac{\Delta x}{1!} + 2f'''(x_i) \frac{\Delta x^3}{3!} + \dots \\
 \frac{\partial f}{\partial x} = f'(x_i) &= \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2\Delta x} - f'''(x_i) \frac{\Delta x^2}{6} \dots \\
 \frac{\partial f}{\partial x} = f'(x_i) &= \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) - \dots
 \end{aligned}
 \tag{2.16}$$

Dari persamaan di atas terlihat bahwa kesalahan pemotongan berorder  $\Delta x^2$ ; sedang pada diferensial maju dan mundur berorder  $\Delta x$ .



Gambar 2.1 Perkiraan Garis Singgung Suatu Fungsi

### 2.2.2 Diferensial Turunan Kedua

Turunan kedua dari suatu fungsi dapat diperoleh dengan menjumlahkan persamaan (2.5) dengan persamaan (2.7):

$$\begin{aligned}
 f(x_{i+1}) + f(x_{i-1}) &= 2f(x_i) + 2f''(x_i) \frac{\Delta x^2}{2!} + 2f^{(4)}(x_i) \frac{\Delta x^4}{4!} + \dots \\
 f''(x_i) &= \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))}{2\Delta x^2} - f^{(4)}(x_i) \frac{\Delta x^2}{12} - \dots \\
 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''(x_i) &= \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))}{\Delta x^2} - O(\Delta x^2)
 \end{aligned}
 \tag{2.17}$$

Dari uraian di atas dapat disimpulkan bahwa bentuk diferensial (biasa dan parsial) dapat diubah dalam bentuk diferensial numerik (beda hingga).

### 2.2.3 Diferensial Turunan Lebih Tinggi

Diferensial turunan yang lebih tinggi diberikan seperti berikut:

1. Diferensial turunan ketiga:

$$\frac{\partial^3 x}{\partial x^3} = f'''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + 2f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})}{2\Delta x^3} \quad (2.18)$$

2. Diferensial turunan keempat:

$$\frac{\partial^4 x}{\partial x^4} = f''''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 4f(x_{i+1}) + 6f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{\Delta x^4} \quad (2.19)$$

### 2.2.2 Turunan Terhadap Variable Lain

Apabila fungsi mengandung lebih dari satu variabel bebas, seperti  $f(x, y)$  maka bentuk deret Taylor menjadi:

$$f(x_{i+1}, y_{i+1}) = f(x_i, y_i) + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\Delta x}{1!} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\Delta y}{1!} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\Delta x^2}{2!} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \frac{\Delta y^2}{2!} + \dots \quad (2.20)$$

dengan cara yang sama, turunan pertama terhadap variable  $x$  dan  $y$  berturut-turut dapat ditulis dalam bentuk (diferensial maju):

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &\approx \frac{f(x_{i+1}, y_j) - f(x_i, y_j)}{\Delta x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &\approx \frac{f(x_i, y_{j+1}) - f(x_i, y_j)}{\Delta y} \end{aligned} \quad (2.21)$$

persamaan di atas dapat ditulis

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &\approx \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &\approx \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{\Delta y} \end{aligned} \quad (2.22)$$

untuk diferensial terpusat bentuk di atas menjadi:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &\approx \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &\approx \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{\Delta y}\end{aligned}\quad (2.23)$$

dengan cara yang sama, turunan kedua terhadap  $x$  dan  $y$  dapat ditulis menjadi:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &\approx \frac{f_{i-1,j} - 2f_{i,j} + f_{i+1,j}}{\Delta x^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &\approx \frac{f_{i,j-1} - 2f_{i,j} + f_{i,j+1}}{\Delta y^2}\end{aligned}\quad (2.24)$$

Sering dijumpai permasalahan suatu fungsi selain tergantung pada ruang dan waktu, misalnya pada aliran tidak permanent seperti banjir tau pasang surut dan perambatan panas. Dalam hal ini turunan fungsi  $f(x,t)$  terhadap waktu ( $t$ ) dapat ditulis dalam bentuk:

$$\frac{\partial f}{\partial t} \approx \frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t}\quad (2.25)$$

(Triatmojo, 2002:9).

### 2.3 Metode Beda Hingga

Penyelesaian persamaan diferensial parsial dengan kondisi awal dan batas dapat diselesaikan dengan metode beda hingga. Untuk itu dibuat jaringan titik hitungan pada daerah tinjauan. Sebagai contoh penyelesaian daerah  $S$  yang dibatasi oleh kurva  $C$ . Daerah tinjauan  $S$  dibagi menjadi sejumlah pias (titik hitungan  $P$ ) dengan jarak antara pias  $\Delta x$  dan  $\Delta y$ . Kondisi dimana variabel tidak bebas ( $\phi$ ) harus memenuhi disekeliling kurva  $C$  disebut dengan kondisi batas. Penyelesaian persamaan diferensial merupakan perkiraan dari  $\phi$  pada titik-titik



hitungan  $P_{11}, P_{12}, \dots, P_{i,j}$ . Perkiraan dilakukan dengan mengganti turunan dari persamaan diferensial parsial dengan menggunakan perkiraan beda hingga (Triatmojo, 2002:200).

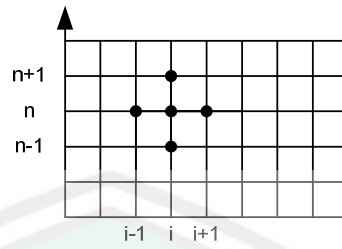
### 2.3.1 Diskretisasi Numerik Skema Eksplisit

Metode beda hingga skema eksplisit banyak digunakan dalam penyelesaian persamaan diferensial parsial. Skema ini sangat sederhana dan mudah untuk memahaminya. Skema ini mempunyai kelemahan, yaitu langkah waktu  $\Delta t$  harus cukup kecil. Langkah waktu  $\Delta t$  dibatasi berdasarkan bilangan Courant yaitu  $Cr = (U\Delta t)/\Delta x \leq 1$ . Apabila nilai  $Cr < 1$  maka hitungan menjadi tidak stabil. Penggunaan langkah waktu  $\Delta t$  yang kecil tersebut menyebabkan prosedur dan waktu hitungan menjadi sangat lama dan lama.

#### a. Skema Ekplisit

Pada skema ekplisit, variable pada waktu  $n+1$  dihitung berdasar variabel pada waktu  $n$  yang sudah diketahui. Persamaan perambatan panas pada persamaan (2.10) yang diaplikasikan pada suatu batang besi yang dipanaskan salah satu ujungnya, sedang ujung yang lain adalah tetap. Panas pada ujung  $A$  akan merambat ke ujung  $B$ . Dengan persamaan (2.10) akan dapat diprediksi temperatur disepanjang besi ( $x$ ) antara  $A$  dan  $B$  pada setiap saat ( $t$ ).

Di dalam permasalahan tersebut, temperatur pada ujung-ujung batang (titik  $A$  dan  $B$ ) yang mempunyai jarak  $L$  diketahui untuk seluruh waktu. Kondisi ini disebut dengan kondisi batas. Selain itu distribusi temperatur di sepanjang batang pada awal hitungan juga diketahui dan kondisi ini disebut dengan kondisi awal.



Gambar 2.2 Skema Ekplisit

Dengan menggunakan skema seperti Gambar 2.2 fungsi variabel (temperatur)  $T(x,t)$  dan turunannya dalam ruang dan waktu didekati oleh bentuk berikut:

$$T(x,t) = T_i$$

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} \tag{2.26}, (2.27)$$

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = \frac{T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n}{\Delta x^2}$$

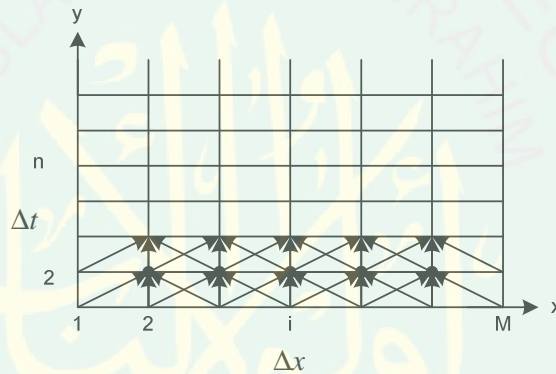
Dengan menggunakan skema di atas, persamaan tersebut dapat ditulis dalam bentuk berikut:

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = K_i \frac{T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n}{\Delta x^2}$$

$$\text{atau } T_i^{n+1} = T_i^n + \frac{K_i \Delta t}{\Delta x^2} (T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n) \tag{2.28}$$

penyelesaian persamaan (2.10) terhadap batang yang dipanaskan (AB) dilakukan dengan membagi batang tersebut menjadi sejumlah pias. Selanjutnya dibuat jaringan titik hitungan dalam bidang  $x-t$ . Seperti ditunjukkan dalam Gambar 2.3 jarak antara titik hitungan (panjang pias) adalah  $\Delta x = L/M$ , dengan  $M$  adalah jumlah pias sedang interval waktu hitungan adalah  $\Delta t$ . Dengan persamaan (2.28)

dan kondisi batas di kedua ujung batang, memungkinkan untuk menghitung  $T_i^{n+1}$  ( $i = 1 \dots M - 1$ ) berdasar nilai  $T_i^n$  ( $i = 1 \dots M$ ) yang telah diketahui. Pada awal hitungan, nilai awal dari temperatur  $T_i^0$  diketahui sebagai kondisi awal. Dari nilai awal tersebut dan kondisi awal, dapat dihitung nilai  $T$  di sepanjang batang ( $i = 1, \dots, M$ ) pada waktu berikutnya. Nilai yang telah dihitung tersebut digunakan untuk menghitung  $T_i$  ( $i = 1, \dots, M$ ) untuk waktu berikutnya lagi. Prosedur hitungan ini diulangi lagi sampai akhirnya didapat nilai  $T_i$  ( $i = 1, \dots, M$ ) untuk semua waktu.

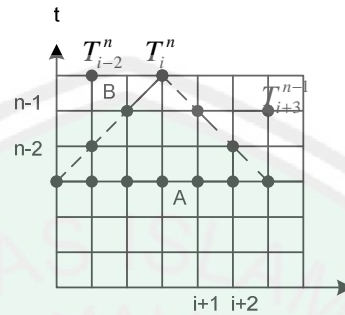


Gambar 2.3 Langkah-Langkah Hitungan Dengan Skema Ekplisit

#### b. Stabilitas Skema Ekplisit

Seperti yang ditunjukkan pada Gambar 2.4 dalam skema eksplisit,  $T_i^n$  tergantung pada tiga titik sebelumnya yaitu:  $T_{i-1}^{n-1}, T_i^{n-1}, T_{i+1}^{n-1}$ . Ketiga titik ini juga hanya tergantung pada 5 titik pada waktu sebelumnya. Bidang ketergantungan dari penyelesaian numerik (bidang A) lebih kecil daripada bidang ketergantungan penyelesaian analitik (A+B). Misalnya penyelesaian analitis dari  $T_i$  tergantung di antaranya pada titik  $T_{i-2}^n$  dan  $T_{i+3}^{n-1}$  sedang pada hitungan numerik tidak

tergantung pada titik tersebut. Keadaan ini dapat menyebabkan ketidak stabilan dari skema tersebut.



Gambar 2.4 Stabilitas Numerik

Penjelasan mengenai stabilitas dapat dilakukan dengan menggunakan contoh berikut. Suatu batang yang pada kedua ujungnya dipertahankan pada temperatur konstan yaitu  $0^{\circ}C$ . Misal mempunyai kondisi batas dan kondisi awal berikut:

$$T = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq 1/2 \\ 2(1-x) & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

akan dicari penyebaran temperatur di sepanjang batang dan untuk setiap langkah waktu. Secara matematis permasalahan tersebut dapat digambarkan yang dipenuhi oleh:

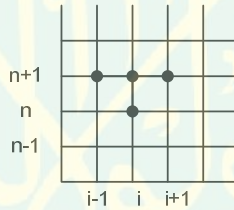
- $T = 0; x = 0; x = 1$  untuk semua  $t$  (kondisi batas)
- $T = 2x; 0 \leq x \leq 1/2$  dan  $T = 2(1-x); 1/2 \leq x \leq 1$  ( $t=0$ , kondisi awal)

dalam contoh ini bahwa  $K=1$ .

### 2.3.2 Diskretisasi Numerik Skema Implisit

Dalam skema eksplisit, ruas kanan dari persamaan (2.10) ditulis pada waktu  $n$  yang nilainya sudah diketahui. Sedang pada skema implisit, ruas kanan tersebut ditulis ditulis pada waktu  $n+1$  dengan nilai yang belum diketahui. Gambar 2.5

menunjukkan jaringan titik hitungan dari skema implisit. Dalam gambar tersebut, variabel (temperatur) di titik  $i$  pada waktu ke  $n+1$  ( $T_i^{n+1}$ ) dipengaruhi oleh  $T_i^n$  yang sudah diketahui nilainya serta  $T_{i-1}^{n+1}$  dan  $T_{i+1}^{n+1}$  yang belum diketahui nilainya. Dengan demikian penulisan persamaan (2.10) di titik  $(i, n+1)$  menghasilkan variabel  $T_i^{n+1}$  yang mengandung variabel  $T_{i-1}^{n+1}$ ,  $T_i^{n+1}$ , dan  $T_{i+1}^{n+1}$ , sehingga nilai  $T_i^{n+1}$  tidak langsung dihitung. Akan terbentuk suatu sistem persamaan yang harus diselesaikan untuk memperoleh nilai  $T_i^{n+1}$  ( $i=1, \dots, M$ ). Dengan menggunakan skema Gambar 2.5, fungsi  $T(x, t)$  dan turunannya dari persamaan (2.10) didekati oleh gambar berikut ini.



Gambar 2.5 Skema Implisit

$$T(x, t) = T_i^n$$

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} = \frac{T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n}{\Delta x^2}$$

dengan menggunakan skema di atas dan dengan anggapan bahwa  $K$  adalah konstan, persamaan (2.10) dapat ditulis dalam beda hingga sebagai berikut:

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = K_i \frac{T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2}$$

$$\frac{1}{\Delta t} T_i^{n+1} - \frac{K_i}{\Delta x^2} T_{i-1}^{n+1} + \frac{2K_i}{\Delta x^2} T_i^{n+1} - \frac{K_i}{\Delta x^2} T_{i+1}^{n+1} = \frac{T_i^n}{\Delta t}$$

$$-\frac{K_i}{\Delta x^2} T_{i-1}^{n+1} + \left( \frac{1}{\Delta t} + \frac{2K_i}{\Delta x^2} \right) T_i^{n+1} - \frac{K_i}{\Delta x^2} T_{i+1}^{n+1} = \frac{T_i^n}{\Delta t}$$

atau

$$A_i T_{i-1}^{n+1} + B_i T_i^{n+1} + C_i T_{i+1}^{n+1} = D_i \quad (2.29)$$

maka

$$A_i = -\frac{K_i}{\Delta x^2} \quad C_i = -\frac{K_i}{\Delta x^2}$$

$$B_i = \left( \frac{1}{\Delta t} + 2\frac{K_i}{\Delta x^2} \right) \quad D_i = \frac{T_i^n}{\Delta t}$$

Apabila persamaan (2.29) ditulis untuk setiap titik hitungan dari  $i=1$  sampai  $M$

maka akan terbentuk suatu sistem persamaan linier berikut ini

Untuk  $i = 1 \dots M$  :

$$\begin{aligned} i = 1 &\rightarrow A_1 T_0 + B_1 T_1 + C_1 T_2 = D_1 \\ i = 2 &\rightarrow A_2 T_1 + B_2 T_2 + C_2 T_3 = D_2 \\ i = 3 &\rightarrow A_3 T_2 + B_3 T_3 + C_3 T_4 = D_3 \\ i = 4 &\rightarrow A_4 T_3 + B_4 T_4 + C_4 T_5 = D_4 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ i = M &\rightarrow A_M T_{M-1} + B_M T_M + C_{M1} T_{M+1} = D_M \end{aligned} \quad (2.30)$$

dalam persamaan (2.30), untuk penyederhanaan penulisan, variabel  $T_i^{n+1}$  ditulis

$T_i^n$  (tanpa menulis  $n+1$ ). Persamaan (2.30) dapat ditulis dalam bentuk matriks

berikut ini.

$$\begin{pmatrix} B_1 & C_1 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ A_2 & B_2 & C_2 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & A_3 & B_3 & C_3 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & A_4 & B_4 & C_4 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & A_M & B_M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ T_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ D_M \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

Matriks tersebut merupakan matriks tridiagonal. Mengingat koefisien dari matriks tersebut banyak yang bernilai nol, maka penyelesaian akan menjadi lebih sederhana dengan menggunakan sapuan ganda (double sweep methods). Penyelesaian menggunakan metode sapuan ganda dilakukan dengan menganggap bahwa terdapat hubungan berikut:

$$T_i^{n+1} = P_i T_{i+1}^{n+1} + Q_i \quad (2.32)$$

Untuk titik simpul  $i-1$ , persamaan di atas menjadi:

$$T_{i-1}^{n+1} = P_{i-1} T_i^{n+1} + Q_{i-1} \quad (2.33)$$

Dengan mensubstitusi persamaan (2.33) ke persamaan (2.29) maka menjadi:

$$\begin{aligned} A_i (P_{i-1} T_i + Q_{i-1}) + B_i T_i + C_i T_{i+1} &= D_i \\ (B_i + A_i P_{i-1}) T_i &= -C_i T_{i+1} + D_i - A_i Q_{i-1} \\ T_i &= \frac{-C_i}{B_i + A_i P_{i-1}} T_{i+1} + \frac{D_i - A_i Q_{i-1}}{B_i + A_i P_{i-1}} \end{aligned}$$

$$\text{atau } T_i = P_i T_{i+1} + Q_i \quad (2.34)$$

Dengan:

$$P_i = \frac{-C_i}{B_i + A_i P_{i-1}} \quad (2.35), (2.36)$$

$$Q_i = \frac{D_i - A_i Q_{i-1}}{B_i + A_i P_{i-1}}$$

Dalam persamaan pertama dari sistem (2.30), nilai  $T_0$  adalah tidak ada karena  $i=0$ , karena di luar hitungan, sehingga persamaan tersebut adalah:

$$T_1 = \frac{-C_1}{B_1} T_2 + \frac{D_1}{B_1}$$

Atau

$$T_1 = P_1 T_2 + Q_1$$

$$\text{Dengan: } P_1 = \frac{-C_1}{B_1}$$

$$Q_1 = \frac{D_1}{B_1}$$

Nilai  $T_{M+1}$  pada persamaan terakhir dari sistem (2.30) juga tidak ada karena nilai  $M+1$  berada di luar bidang hitungan. Seperti diberikan oleh persamaan berikut, nilai  $T_M$  adalah:

$$T_M = Q_M = \frac{D_M - A_M Q_{M-1}}{B_M + A_M P_{M-1}} \quad (2.37)$$

Penyelesaian persamaan dilakukan dalam dua langkah yaitu langkah pertama bergerak dari kiri ke kanan (dari  $i=1$  menuju  $i=M$ ). Dalam langkah ini dihitung koefisien  $A_i, B_i, C_i, D_i, P_i, Q_i$  untuk semua titik  $i$  dengan berjalan dari kiri ke kanan. Ketika sampai di batas kanan, kondisi batas di titik tersebut ( $T_M$  diketahui atau  $T_M$  dihitung dari persamaan (2.30) memungkinkan untuk



menghitung  $T$  disebelah kirinya dengan menggunakan persamaan (2.34) (Triatmojo, 2002:206).

## 2.4 Pemrograman Matlab

MATLAB (Matrix Laboratory) adalah sebuah program untuk menganalisa dan komputasi numerik, merupakan suatu bahasa pemrograman matematika lanjutan yang dibentuk dengan dasar pemikiran menggunakan sifat dan bentuk matriks. Matlab merupakan software yang dikembangkan oleh Mathwork, Inc. (lihat <http://www.mathworks.com>) dan merupakan software yang paling efisien untuk perhitungan numerik berbasis matriks. Dengan demikian jika di dalam perhitungan dapat diformulasikan dalam bentuk matriks, maka matlab merupakan software terbaik untuk menyelesaikannya (Arham dan Desiani, 2004:1).

### 2.4.1 Program Bentuk $Ax=b$

Suatu himpunan berhingga dari persamaan-persamaan linier dalam peubah-peubah  $x_1, x_2, \dots, x_n$  disebut sistem persamaan linier. Suatu urutan bilangan-bilangan  $s_1, s_2, \dots, s_n$  disebut sebagai pemecahan sistem tersebut jika  $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \dots, x_n = s_n$  merupakan pemecahan masing-masing persamaan pada sistem tersebut. Sebuah sistem sembarang yang terdiri dari  $m$  persamaan linier dengan  $n$  bilangan yang tidak diketahui:

$$\begin{aligned}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m
 \end{aligned}
 \tag{2.38}$$

Jika  $b = 0$  maka SPL disebut sebagai SPL Homogen dan jika  $b \neq 0$  disebut SPL Non homogen. Jika SPL di atas dibuat menjadi matriks adalah:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{pmatrix}
 \tag{2.39}$$

Matriks tersebut dapat dituliskan  $Ax = b$ . Secara analitis penyelesaiannya ditulis sebagai  $x = A^{-1}b$ . Untuk mendapatkan penyelesaian dari SPL dengan menggunakan matlab, maka perlu diketahui dulu A dan b. Misal:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \\ -2 & 8 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 36 \\ 40 \\ 70 \end{pmatrix}$$

Dengan menggunakan matlab maka SPL di atas dapat diselesaikan dengan dua cara. Salah satunya dengan menghitung  $x = A^{-1}b$ . Yaitu:

$$\begin{aligned}
 A &= [3 \ 2 \ 3; \ 4 \ 5 \ 7; \ -2 \ 8 \ 0] \\
 b &= [36; \ 40; \ 70] \\
 \det(A) & \\
 x &= \text{inv}(A) * b
 \end{aligned}$$

### 2.4.2 Operator \ dan / Untuk Menyelesaikan $Ax = b$

Cara yang kedua ini lebih disukai karena hanya memerlukan sedikit perkalian dan pembagian, sehingga lebih cepat. Selain itu jika masalah yang didapatkan lebih besar maka hasil yang diperoleh lebih akurat. Operator \ dan / merupakan operator matriks untuk pembagian dan mempunyai pengaruh yang sama. Untuk menyelesaikan  $Ax = b$  di matlab dapat ditulis dengan salah satunya yaitu  $A \setminus b$  atau  $A/b$ . Menggunakan operator tersebut dapat memperkecil error kuadrat dalam  $Ax = b$ . Misal:

$$a = [1 \quad 2 \quad 3 \quad -4 \quad 2 \quad -3]$$

$$b = [1 \quad 3]$$

$$x = a \setminus b$$

$$x_n = \text{pinv}(a) * b$$

(Arham dan Desiani, 2004:83).

## 2.5 Teori Fluida

### 2.5.1 Definisi dan Sifat-sifat Fluida

Fluida merupakan sesuatu yang dapat mengalir sehingga sering disebut sebagai zat alir dapat berupa zat cair dan gas termasuk ke dalam jenis fluida. Karena fase cair dan gas memiliki karakter tidak mempertahankan suatu bentuk yang tetap, maka keduanya mempunyai kemampuan untuk mengalir, dengan demikian keduanya disebut fluida. Perbedaan zat cair dengan gas terutama terletak pada kompresibilitasnya. Gas mudah dimampatkan, sedang zat cair tidak dapat dimampatkan.

Fluida zat cair mempunyai ciri-ciri sebagai berikut:

- a. Molekul-molekul terikat secara longgar namun tetap berdekatan,
- b. Tekanan yang terjadi karena ada gaya gravitasi bumi yang bekerja padanya,
- c. Tekanan terjadi secara tegak lurus pada bidang.

Fluida zat gas mempunyai ciri-ciri sebagai berikut:

- a. Molekul bergerak bebas dan saling bertumbukan,
- b. Tekanan gas bersumber pada perubahan momentum disebabkan tumbukan molekul gas pada dinding (Zemansky, 1982:294).

### 2.5.2 Klasifikasi Fluida

Fluida dianggap mempunyai sifat: alirannya tunak, tidak kental, dan tidak termampatkan. Aliran non-kompresibel adalah aliran fluida yang tidak mengalami perubahan volume, atau dengan kata lain massa jenis fluida tidak berubah selama alirannya. Aliran non-viskos adalah aliran fluida yang tidak mengalami gesekan, partikel-partikel dari fluida tidak mengalami gesekan selama aliran fluida tersebut. Aliran fluida dibedakan menjadi dua tipe, yaitu: 1) Aliran lurus (streamline) atau aliran laminar. Terjadi jika aliran lancar, sehingga lapisan fluida yang saling berdekatan mengalir dengan lancar. Setiap partikel fluida mengikuti sebuah lintasan lurus yang tidak saling menyilang, mempunyai kecepatan yang relatif rendah atau fluidanya sangat viskous, gangguan yang mungkin dialami oleh medan aliran tersebut akibat getaran, ketidakrataan permukaan batas. Aliran tersebut disebut aliran laminar. Aliran partikel fluida pada setiap titik konstan terhadap waktu, sehingga partikel-partikel fluida yang lewat pada suatu titik akan bergerak dengan kecepatan dan arah yang sama, lintasan yang ditempuh oleh

aliran fluida. 2) Aliran turbulen atau aliran bergolak. Di atas kecepatan tertentu, yang tergantung pada sejumlah faktor yang dipengaruhi oleh sifat-sifat mekanik seperti kecepatan, tekanan, atau temperatur, aliran akan bergolak. Aliran ini dicirikan oleh ketidaktentuan, kecil, melingkar-lingkar seperti pusaran air. Adanya ketidakteraturan lokal dalam medan aliran yang dipengaruhi oleh sifat-sifat mekanik seperti kecepatan, tekanan, atau temperatur. Adanya partikel yang bergerak dengan arah yang berlawanan dengan arah laju fluida secara keseluruhan.

Banyak kriteria yang dapat digunakan untuk mengklasifikasikan fluida., aliran dapat digolongkan sebagai aliran *steady state* atau *unsteady state*, satu, dua, tiga dimensi, laminar atau turbulen. Aliran disebut *steady* jika kondisi dalam medan aliran tidak bervariasi terhadap waktu, sedangkan aliran yang bergantung terhadap waktu disebut aliran *unsteady state*. Aliran air yang konstan di dalam suatu pipa bersifat *steady state*, akan tetapi pada saat katup alirannya dibuka atau sedang ditutup, aliran itu tersebut *unsteady state*.

Aliran satu dimensi adalah aliran di mana semua parameter fluida dan aliran (kecepatan, tekanan, dan temperatur, kerapatan dan viskositas ) konstan di seluruh potongan melintang yang normal terhadap aliran. Aliran dua dimensi umumnya didefinisikan sebagai aliran yang sama dalam bidang sejajarnya. Aliran ini dapat didefinisikan sebagai aliran yang parameter-parameter fluida dan alirannya dinyatakan dengan harga-harga rata-rata dari harga-harga dalam suatu dimensi ruang. Aliran tiga dimensi adalah aliran dengan parameter-parameter fluida atau alirannya bervariasi dalam arah-arah  $x$ ,  $y$ ,  $z$  dalam sistem koordinat kartesius. Jadi,

gradient-gradien parameter fluida atau aliran terdapat dalam ketiga arah tersebut. Sifat fisis fluida : tekanan, temperatur, masa Jenis dan viskositas. Aliran fluida mempunyai parameter sebagai berikut: Diameter ( $D$ ), kecepatan ( $v$ ), viskositas dinamik ( $\mu$ ), masa jenis fluida ( $\rho$ ), laju aliran massa ( $m$ ) (Olson dan Wright, 1993:).

#### a. Kerapatan

Suatu sifat penting dari zat adalah rasio massa terhadap volumenya yang dinamakan massa jenis. Rapat massa dilambangkan

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (2.40)$$

$\rho$  = Densitas / massa jenis ( $Kg / m^3$ )

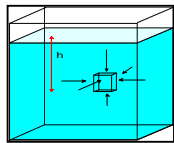
$m$  = Massa benda ( $Kg$ )

$V$  = Volume benda ( $m^3$ )

Untuk kerapatan air pada temperatur  $60^0 C$  adalah  $0,9832g / cm^3$  (Zemansky, 1982:294).

#### b. Tekanan

Gaya merupakan unsur utama dalam kajian mekanika benda titik. Dalam mekanika fluida, unsur yang paling utama tersebut adalah tekanan. Tekanan adalah gaya yang dialami oleh suatu titik pada suatu permukaan fluida persatuan luas dalam arah tegak lurus permukaan tersebut.



Gambar 2.6 Tekanan

$$\begin{aligned} \text{Pressure} = P &= \frac{F}{A} \\ P &= \frac{mg}{A} = \frac{\rho Vg}{A} = \rho g \frac{V}{A} = \rho gh \end{aligned} \quad (2.41)$$

Keterangan:

F= Gaya yang bekerja,

A= Luas permukaan dimana gaya bekerja,

Satuan SI:  $\frac{1\text{Newton}}{(\text{meter})^2} = 1\text{N} / \text{m}^2 = 1\text{Pa}$  (Zemansky,1982:298). Untuk tekanan air

pada temperatur  $60^0\text{C}$  adalah  $1,992\text{ N} / \text{cm}^2$  (Munson dkk, 2002:527).

### c. Viskositas

Viskositas (kekentalan) dapat dianggap sebagai gesekan di bagian dalam suatu fluida. Karena adanya viskositas ini, maka untuk menggerakkan salah satu lapisan fluida di atas lapisan lainnya, atau supaya satu permukaan dapat meluncur di atas permukaan lainnya bila di antara permukaan-permukaan ini terdapat lapisan fluida haruslah dikerjakan gaya. Viskositas semua fluida sangat dipengaruhi oleh temperatur, jika temperatur naik, viskositas gas bertambah dan viskositas cairan menurun. Untuk fluida cair, tekanan dapat diabaikan (Zemansky,1982:340).

Konstanta yang menghubungkan tegangan geser dan gradien kecepatan secara linier dikenal dengan istilah viskositas. Persamaan yang menggambarkan perlakuan fluida Newtonian adalah:

$$\tau = \mu \frac{dv}{dx} \quad (2.42)$$

di mana

$\tau$  = adalah tegangan geser yang dihasilkan oleh fluida

$\mu$  = adalah viskositas fluida-sebuah konstanta proporsionalitas

$\frac{dv}{dx}$  = adalah gradien kecepatan yang tegak lurus dengan arah geseran

Dalam sistem satuan SI, tegangan geser diekpresikan dalam  $N/m^2$  (Pa) dan gradient kecepatan dalam  $\left(\frac{m}{s} \frac{1}{m}\right)$ , karena itu satuan SI untuk viskositas dinamik

adalah:

$$\mu = \frac{N/m^2}{(m/s)x(1/m)} = \frac{N.s}{m^2} = \frac{kg}{m.s} \quad (2.43)$$

Karena  $1 N = kg.m/s^2$ . Sedangkan viskositas kinematik  $\nu$  didefinisikan sebagai

$$\text{nisbah viskositas dinamik terhadap kerapatan } \nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (2.44)$$

dengan dimensi–dimensi luas persatuan waktu ( $m^2/s$ ) dalam satuan SI. Untuk

viskositas kinematik air pada temperatur  $60^0 C$  adalah  $\nu = 4,745(cm^2/s)$  dan

$$\text{untuk viskositas dinamik adalah } \mu = 4,665(s/cm^2) \quad (2.45)$$

(Munson dkk, 2002:572).

#### d. Reynold Number

Reynold number merupakan sebuah nilai yang dapat digunakan untuk mengetahui jenis aliran fluida, apakah termasuk jenis aliran laminer ataukah aliran

$$\text{turbulen, yang dinyatakan dengan } Re = \frac{\rho v D}{\eta} \quad (2.46)$$

Dimana:  $Re$  = Reynold Number

$v$  = kecepatan fluida yang mengalir

$d$  = diameter pipa

$\nu$  = viskositas (kekentalan) fluida



Kondisi batas aliran:

**Laminar**       $Re < 2000$

**Transisi**     $Re = 2000$

**Turbulen**     $Re > 2000$

Contoh: Untuk air  $60^{\circ}C$  yang mengalir dalam pipa berdiameter  $5\text{ cm}$ , dengan bilangan Reynold:

$$\frac{\rho v D}{\eta} \leq 2000$$

$$v \leq \frac{2000 \times 4,665}{0,9832 \times 5} \text{ s}^{-1} \text{ cm} = 1897,884 \text{ cm/s}$$

Di atas kira-kira  $1900\text{ cm/s}$ , aliran akan turbulen. Untuk kecepatan yang mengenai suatu sistem adalah nol (Zemansky,1982:348).

## 2.6 Kinematika dan Hukum-Hukum Kekekalan

### 2.6.1 Total Turunan Terhadap Waktu

Perubahan suatu objek berubah terhadap waktu dan juga jarak tertentu (ruang). Turunan ini khusus untuk jumlah turunan yang diakibatkan gerak setiap elemen fluida yang disebut "turunan substansi atau material". Hubungan tersebut dapat ditulis dalam turunan parsial terhadap waktu:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} \quad (2.47)$$

Pada sebuah titik tertentu, perpindahan diferensial  $dx$  sama dengan  $dx = v_x dt$ , demikian pula  $dy = v_y dt$ ,  $dz = v_z dt$ , sehingga dapat ditulis

$$\frac{Dc}{Dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + v_x \frac{\partial c}{\partial x} + v_y \frac{\partial c}{\partial y} + v_z \frac{\partial c}{\partial z} \quad (2.48)$$

$v_x, v_y, v_z$  adalah komponen kecepatan  $v$  pada jarak tertentu (Bird dkk, 1960: 73).

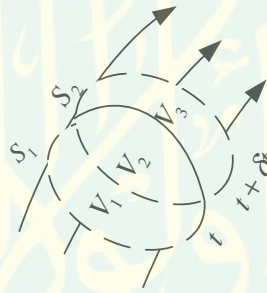
### 2.6.2 Volume Kontrol dan Permukaan Kontrol

Volume kontrol adalah suatu daerah sembarang dalam ruang yang dipilih semata-mata untuk memudahkan pemecahan masalah-masalah aliran fluida, sedangkan permukaan kontrol adalah permukaan-permukaan yang membatasi volume kontrol. Dalam kebanyakan situasi, bagian-bagian pada volume kontrol berimpit dengan batas-batas sistem, misalnya dinding pipa. Fluida memintas bagian-bagian permukaan kontrol lain dan interaksi-interaksi ini melibatkan sifat-sifat seperti massa, momentum, dan energi. Teorema pengangkutan Reynold menyatakan bahwa laju perubahan integral sebuah fungsi titik bernilai tunggal (massa, momentum atau energi fluida) yang diambil untuk suatu volume kontrol yang berimpit dengan volume bahan pada saat tertentu, ditambah fluks atau bagian dari fungsi titik ini yang terangkut memintas permukaan volume kontrol. Dalam bentuk persamaan, untuk sebuah fungsi titik  $P$ , pernyataan ini menjadi:

$$\frac{D}{Dt} \int_{\text{volume bahan}} P dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{volume kontrol}} P dV + \int_{\text{permukaan kontrol}} P(v \cdot dS) \quad (2.49)$$

Dengan  $t$  waktu,  $V$  volume,  $v$  kecepatan fluida,  $S$  luas permukaan volume kontrol, dan  $\frac{D}{Dt}$  turunan untuk partikel-partikel dalam sistem massa yang tetap.

Dengan mengacu ke Gambar 2.8 penurunan persamaan itu adalah: Misalkan  $S_1$  adalah permukaan batas sebuah sistem pada saat  $t$ . pada saat  $\delta t$ , massa partikel telah pindah ke ruang baru yang dibatasi oleh permukaan  $S_2$ . Fungsi titik  $P_t$  menyatakan massa, momentum, atau energi sistem pada saat  $t$ . Daerah yang dibatasi oleh  $S_1$  adalah  $V_1 + V_2$  dan daerah yang dibatasi oleh  $S_2$  adalah  $V_2 + V_3$ . Volume kontrol adalah daerah yang dibatasi oleh  $S_1$ . Sehingga:



Gambar 2.7 Laju Perubahan Fungsi Titik Untuk Aliran Yang Melalui Sebuah Volume Kontrol

$$P_t = PV_{1,t} + PV_{2,t} \text{ dan}$$

$$P_{t+\delta t} = PV_{2,t+\delta t} + PV_{3,t+\delta t} \tag{2.50}$$

Karena perubahan  $P$  untuk massa partikel dalam sistem selama waktu  $\delta t$  adalah:

$$\delta P = P_{t+\delta t} - P_t = PV_{2,t+\delta t} - PV_{2,t} + PV_{3,t+\delta t} - PV_{3,t} \tag{2.51}$$

Dan

$$\frac{\delta P}{\delta t} = \frac{\delta P V_2}{\delta t} + \frac{P V_{3,t+\delta} - P V_{1,t}}{\delta t} \quad (2.52)$$

Pada limit-limit ketika  $\delta t$  mendekati nol, daerah  $\nabla_2$  hamper sama dengan dengan volume kontrol, jadi suku pertama dalam persamaan di atas adalah laju perubahan fungsi titik dalam volume kontrol sedangkan suku kedua adalah laju ketika fungsi  $P$  meninggalkan permukaan kontrol (laju pergi minus laju masuk). Integrasi terhadap seluruh volume bahan, volume kontrol, dan permukaan kontrol, berturut-turut menghasilkan persamaan (2.49) (Olson dan Wright, 1993: 85).

### 2.6.3 Kekekalan Massa dan Persamaan Kontinuitas

Persamaan kontinuitas mengungkapkan persyaratan bahwa suatu fluida harus kontinu serta massa fluida bersifat kekal, yakni tidak dapat diciptakan ataupun dimusnahkan. Kekekalan massa fluida mensyaratkan bahwa dalam suatu volume zat massa selalu konstan, dan laju perubahan massanya sama dengan nol. Berbagai bentuk persamaan kontinuitas untuk suatu volume kontrol diturunkan dengan menyatakan bahwa laju netto influks massa ke dalam suatu daerah tertentu sama dengan laju perubahan massa di daerah tersebut. Bentuk umum untuk persamaan kontinuitas diturunkan dari persamaan (2.49) ruas disebelah kiri sama dengan nol (karena massa dalam volume zat yang sama tidak berubah), dengan kerapatan fluida  $\rho$  sebagai fungsi titik yang bernilai tunggal, teorema pengangkutan Reynold menjadi:

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{volume kontrol}} \rho dV + \int_{\text{permukaan kontrol}} \rho(v \cdot dS) \quad (2.53)$$

dimana:

$t = \text{waktu}$

$V = \text{volume}$

$v = \text{kecepatan}$

$S = \text{luas permukaan volume kontrol}$

Ruas di sebelah kiri sama dengan nol (karena massa dalam volume zat yang sama tidak berubah) dan dengan kerapian fluida  $\rho$  sebagai fungsi titik yang bernilai tunggal. Hal ini menyatakan bahwa laju pertambahan massa di dalam volume kontrol plus efluks massa netto yang memintas permukaan kontrol sama dengan nol. Laju efluks massa netto yang melalui permukaan kontrol sama dengan laju pertambahan massa di dalam volume kontrol. Fluida dapat mengalir ke dalam volume kontrol baik melalui permukaan kontrol maupun dari sumber-sumber yang berada di dalam volume kontrol (ada kesepakatan dalam matematika yang memungkinkan fluida muncul dari sebuah titik dapat berupa massa, momentum atau energi fluida). Demikian pula fluida dapat mengalir ke luar dari volume kontrol melalui permukaan kontrol atau melalui sebuah lubang di dalamnya.

Laju aliran massa dengan arah  $+x$  yang masuk ke dalam sebuah balok dengan sisi-sisi  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  adalah  $\rho v \Delta y \Delta z$ . Laju aliran massa yang keluar pada  $x + \Delta x$  sama dengan laju aliran massa yang masuk plus laju perubahan dalam arah  $+x$  kali  $\Delta x$ , sehingga:

$$\Delta y \Delta z \{ (\rho v_x)|_x - (\rho v_x)|_{x+\Delta x} \} \quad (2.54)$$

(Olson dan Wright, 1993: 107).

### 2.6.4 Momentum Fluida

Hukum kedua Newton menyatakan bahwa gaya netto yang bekerja pada suatu massa tertentu sebanding dengan laju perubahan momentum linier massa tersebut terhadap waktu. Hukum ini dapat diberlakukan untuk volume kontrol yang dilalui oleh aliran fluida. Dalam kondisi-kondisi tertentu, persamaan-persamaan diferensial ini dapat dipecahkan untuk mendapatkan persamaan yang lebih praktis. Momentum adalah hasil perkalian antara massa ( $m$ ) dengan kecepatan ( $v$ ). secara matematis dirumuskan:  $P = mv$ . Impuls adalah hasil kali gaya dan selang waktu, atau impuls adalah sama dengan perubahan momentum.

$$\begin{aligned} I &= F \cdot \Delta t \\ I &= \Delta P = m\Delta v = m \cdot v_1 - m \cdot v_0 \end{aligned} \quad (2.55)$$

Teorema momentum dapat diterapkan pada aliran-aliran baik yang steady maupun tidak steady, berdimensi satu, dua atau tiga; dapat mampat maupun tidak mampat. Fluida cenderung meneruskan keadaan diamnya atau gerak serempaknya kecuali bila diganggu oleh gaya-gaya dari luar. Perubahan-perubahan itu dapat ditimbulkan oleh gaya netto yang berasal dari gaya-gaya luar. Gaya –gaya tersebut adalah:

1. gaya-gaya yang normal akibat tekanan dan efek viskous,
2. gaya-gaya tangensial akibat geseran viskous,
3. gaya-gaya seperti gravitasi yang bekerja dalam arah medan gravitasi.

Misalkan  $\sum F$  adalah gaya-gaya dari luar yang bekerja pada fluida dalam sebuah volume kontrol tanpa percepatan, dan  $\rho V$  (fluks momentum persatuann volume) adalah titik P dalam persamaan (2.49) sehingga:

$$\begin{aligned}\sum F &= \frac{D}{Dt} \int_{\text{volume bahan}} \rho v dV \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{volume kontrol}} \rho v dV + \int_{\text{permukaan bahan}} \rho v (v \cdot dS)\end{aligned}\quad (2.56)$$

Suku pertama pada ruas kanan menyatakan perubahan momentum fluida dalam volume kontrol ketika kerapatan atau kecepatan bervariasi terhadap waktu, dan bernilai nol untuk aliran yang steady state. Suku kedua pada ruas kanan menyatakan fluks atau perpindahan momentum yang melalui batas-batas volume kontrol. Baik yang steady state maupun unsteady state, persamaan (2.56) dapat diekpresikan sebagai berikut:

Gaya netto dari luar yang bekerja pada fluida dalam sebuah volume kontrol yang telah ditetapkan sama dengan laju perubahan momentum fluida dalam volume kontrol terhadap waktu plus laju netto fluks atau perpindahan momentum ke luar dari volume kontrol melalui permukaannya. Inilah teorema momentum:

$$\sum F = (mv)_{\text{meninggalkan}} - (mv)_{\text{mendatangi}} \quad (2.57)$$

(Olson dan Wright, 1993: 126).

## 2.7 Pahala dalam Al-Qur'an dan Hadits

مَثَلُ الَّذِينَ يُنْفِقُونَ أَمْوَالَهُمْ فِي سَبِيلِ اللَّهِ كَمَثَلِ حَبَّةٍ أَنْبَتَتْ سَبْعَ سَنَابِلٍ فِي كُلِّ سُنْبُلَةٍ مِائَةٌ حَبَّةٌ وَاللَّهُ يُضْعِفُ لِمَنْ يَشَاءُ وَاللَّهُ وَاسِعٌ

عَلِيمٌ ﴿١٦٠﴾

Dari tafsir Ibnu Kasir dari ayat di atas merupakan perumpamaan yang dibuat oleh Allah SWT untuk menggambarkan perlipatgandaan pahala bagi orang yang menafkahkan hartanya di jalan Allah. Yang dimaksud di jalan Allah menurut Sa'd Ibnu Jubair ialah dalam rangka taat kepada Allah. Perumpamaan ini lebih berkesan dari pada hanya menyebutkan sekedar menyebutkan bilangan tujuh ratus kali lipat. Mengingat dalam ungkapan perumpamaan tersebut tersirat pengertian bahwa amal-amal sholeh itu dikembangkan pahalanya oleh Allah (Ibnu Kasir, 2000:160).

Menurut Sayyid Quthb ayat di atas merupakan peraturan perundang-undangan yang tidak dimulai dengan menetapkan keharusan dan beban, tetapi dimulai dengan memberikan dorongan dan semangat. Hal ini cocok dengan semua karakter manusia. Al-Quran menampilkan salah satu bentuk kehidupan tanaman yang mendatangkan hasil pemberian dari bumi yang hakekatnya dari Allah. Secara rasional ayat di atas dipahami sebagai proses perhitungan yang berganda dari satu biji menjadi tujuh ratus. Di situ kelihatan suatu gambaran kehidupan yang berkembang dan tumbuh, gambaran kehidupan yang alami dari suatu tanaman yang memberikan hasil. Namun hal itu merupakan suatu yang mengagumkan dalam dunia tumbuh-tumbuhan, dengan satu pohon mempunyai tujuh cabang.

Dalam kehidupan yang tumbuh dan berkembang, ia mengarahkan nurani manusia untuk memberi yang pada hakekatnya ia menerima denah pahala yang berlipat ganda. Gambaran tanaman yang memberikan hasil berlipat ganda dapat mempertebal keimanan. Ayat terakhir yang mempunyai arti Allah Maha Luas dan



maha Mengetahui, bahwa Allah anugerah-Nya Maha Luas lagi banyak, lebih banyak daripada makhluk-Nya, lagi Maha Mengetahui siapa yang berhak mendapat pahala yang berlipat ganda dan siapa yang tidak berhak. Akan tetapi infak atau shodaqoh yang dimaksud adalah yang dapat meninggikan perasaan manusia dan tidak merusaknya. Infak yang didorong oleh ketulusan hati dan kejujuran serta mengharap Ridho-Nya (Quthb, 2001:156).

Berikut ini merupakan hadits yang menerangkan betapa besar pahala seseorang yang beramal walau hanya menafkahkan sebuah lampu. Nabi Saw bersabda, "Barang siapa memasang lampu di masjid, maka para malaikat dan pemikul Arasy memohonkan ampun baginya selama ada cahaya di dalam masjid." Jika seseorang menafkahkan lebih banyak dan ikhlas, Nabi Saw bersabda, "Barang siapa membangun masjid karena Allah, walaupun sekecil sarang burung, niscaya Allah membangun baginya sebuah istana di surga." Allah berfirman (dalam hadits qudsi), "sesungguhnya rumah-rumah-Ku adalah masjid dan tamu-tamu-Ku adalah para penghuni dan orang-orang yang meramaikannya. Maka beruntunglah seorang hamba yang bersuci di rumahnya dan mengunjungi Aku di rumah-Ku, dan patutlah tuan rumah menghormati tamu-Nya" (Al-Ghozali, 2007:49).

Selain menafkahkan hartanya di jalan Allah, Ia juga akan memberi pahala bagi yang melaksanakan ibadah mahdhoh (wajib) yaitu shalat yang mempunyai manfaat yang sangat besar bagi yang mengerjakannya. Shalat-shalat itu tiang agama. Barang siapa meninggalkannya, maka ia meninggalkan agama. Rosulullah bersabda, "perumpamaan shalat wajib adalah seperti mizan

(timbangan). Barang siapa menyempurnakannya, maka ia pun mendapatkan pahalanya secara penuh.” Diriwayatkan bahwa yang pertama diperiksa dari amalan hamba adalah shalat. Apabila sempurna, maka diterimalah darinya beserta amalnya yang lain. Jika ternyata kurang, maka dikembalikan kepadanya beserta amalan yang lain.

المصلوات كفارات لما بينهن مما اجتنبت الكبائر

Artinya:”Shalat-shalat itu menjadi tebusan bagi dosa-dosa yang terjadi di antaranya selama tidak melakukan dosa-dosa besar.” Apabila shalat-shalat tersebut dilakukan dengan cara berjamaah maka Allah akan melipatgandakannya menjadi 27 derajat.

صلاة جماعة تفضل صلاة المفرد بسبع وعشرين درجة

Dari hadist di atas, selain Allah memberi pahala yang dapat dihitung, Allah juga memberi pahala yang tiada batas yang tidak dapat dianalisa oleh Makhluk-Nya. Bahkan Allah akan membebaskannya dari api neraka dan jiwa munafik. Nabi Saw bersabda,”Barang siapa mengerjakan shalat 40 hari dalam jamaah tanpa ketinggalan takbirotul ihrom, maka Allah menetapkan baginya dua kebebasan, yaitu kebebasan dari sifat munafik dan kebebasan dari neraka” (Al-Ghozali, 2007:48). Shalat jamaah akan lebih utama lagi jika jamaahnya lebih banyak juga. Dari Ka’ab, Nabi Saw bersabda: Shalat seseorang beserta seorang laki-laki lebih utama dibandingkan shalat sendirian, shalat beserta dua orang laki-laki lebih utama dibandingkan shalat dengan seorang laki-laki, dan jika shalat beserta yang lebih banyak jamaahnya, hal tersebut lebih disukai Allah (Hamid, 377H: 84).

## BAB III

### PEMBAHASAN

#### 4.1 Mengidentifikasi Faktor-Faktor dalam Fluida

Parameter dalam persamaan model fluida diantaranya  $\rho$  adalah berat jenis fluida (density) ( $g/cm$ ),  $p$  adalah tekanan ( $N/m^2 = 1Pa$ ),  $v$  adalah kecepatan ( $cm/s$ ),  $\nu$  kekentalan (viscosity) kinematik ( $cm^2/s$ ). Agar simbol kekentalan kinematik tidak sama dengan simbol kecepatan, maka diganti dengan  $\eta$ .

#### 4.2 Mengasumsikan Aliran dalam Fluida

Asumsi dalam fluida ini adalah :

1. Fluida yang bersifat inkompresibel (tidak dapat dimampatkan) yaitu yang berupa fluida cair (liquid). Maksud inkompresibel adalah densitas ( $\rho$ ) dari fluida  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ ,
2. Fluida bersifat viskos dan sistem alirannya berupa lingkaran, sehingga aliran pada batas sistemnya mempunyai kecepatan nol,
3. Aliran steady state  $\frac{D}{Dt} = 0$ ,
4. Aliran laminar  $Re < 2000$ ,
5. Aliran dalam dua dimensi,
6. Temperatur  $60^{\circ}C$ .

### 4.3 Membuat Model Fluida dengan Menggunakan Hukum Kekekalan

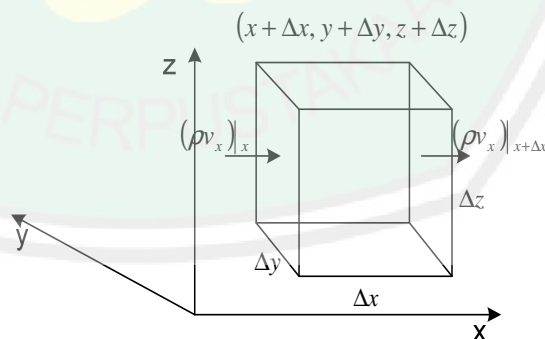
#### 4.3.1 Persamaan Kontinuitas

Persamaan ini dikembangkan berdasarkan hukum kekekalan massa yang dinyatakan dalam bentuk persamaan diferensial. Berdasarkan hukum kekekalan massa bahwa massa yang masuk sama dengan massa yang keluar yaitu  $Q_1 = Q_2$ .

Berdasarkan persamaan (2.40) dengan  $m = \rho.V$  maka:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta m_1}{\Delta t_1} &= \frac{\Delta m_2}{\Delta t_2} \\ \frac{\rho.Vol}{\Delta t_1} &= \frac{\rho.Vol}{\Delta t_2} \\ \rho.A. \frac{\Delta x}{\Delta t} &= \rho.A. \frac{\Delta x}{\Delta t} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Karena permukaan bidang adalah dianggap sama, maka  $\rho_1.v_1 = \rho_2.v_2$ , sehingga berdasar hukum kekekalan massa pada bab II adalah: Laju akumulasi massa = laju massa yang masuk – laju massa yang keluar



Gambar 4.1 Gerakan Kontinuitas Berdasarkan Hukum Kekekalan Massa

Massa yang masuk ke arah  $x$  yang dikalikan dengan luas bidangnya adalah  $(\rho v_x)|_x \Delta y \Delta z$  dan massa yang keluar  $(\rho v_x)|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z$ . Pernyataan ini sama juga pada arah  $y$  dan  $z$ . maka laju akumulasi massanya  $\left( V \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)$  adalah:

$$\begin{aligned} \Delta x \Delta y \Delta z \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) = & \Delta y \Delta z \{ (\rho v_x)|_x - (\rho v_x)|_{x+\Delta x} \} + \Delta x \Delta z \{ (\rho v_y)|_y - (\rho v_y)|_{y+\Delta y} \} + \\ & \Delta x \Delta y \{ (\rho v_z)|_z - (\rho v_z)|_{z+\Delta z} \} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Volume tidak berubah terhadap waktu, sehingga persamaan (4.2) dapat dibagi dengan  $\Delta x \Delta y \Delta z$  karena  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  mendekati nol limitnya ada maka differentiable: sehingga  $\left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) = - \left( \frac{\partial}{\partial x} \rho v_x + \frac{\partial}{\partial y} \rho v_y + \frac{\partial}{\partial z} \rho v_z \right)$ .

Inilah persamaan kontinuitas yang menjelaskan perubahan densitas. Perubahan massa vektor  $\rho v$  dapat ditulis:

$$\left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) = -(\nabla \cdot \rho v) \quad (4.3)$$

$(\nabla \cdot \rho v)$  = divergensi dari  $\rho v$

Persamaan di atas dapat ditulis:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} v_x + \frac{\partial \rho}{\partial y} v_y + \frac{\partial \rho}{\partial z} v_z = -\rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \quad (4.4)$$

Berdasarkan persamaan total turunan terhadap waktu (2.48) maka persamaannya menjadi:

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho(\nabla \cdot v) \Rightarrow \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot v = 0 \quad (4.5)$$

Jika persamaan berupa fluida inkompresibel dengan  $\rho$  konstan, maka  $\nabla \cdot v = 0$ , sehingga persamaan kontinuitas untuk fluida inkompresibel (air) yaitu densitas ( $\rho$ ) dari fluida tidak berubah ketika diberi tekanan, dalam dua dimensi, maka

$$\nabla \cdot v = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \quad (4.6)$$

#### 4.3.2 Persamaan Gerak dalam Fluida (Motion)

Persamaan ini dikembangkan berdasarkan hukum kekekalan momentum.

Berdasarkan persamaan (2.55) bahwa momentum  $\Delta p = F \cdot \Delta t$ , maka  $F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$

sehingga

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\Delta(m \cdot v)}{\Delta t} = v_x \frac{\Delta m}{\Delta t} = v_x \rho A \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (4.7)$$

Dengan luas penampang  $A$  dianggap sama, maka  $A$  diabaikan sehingga:

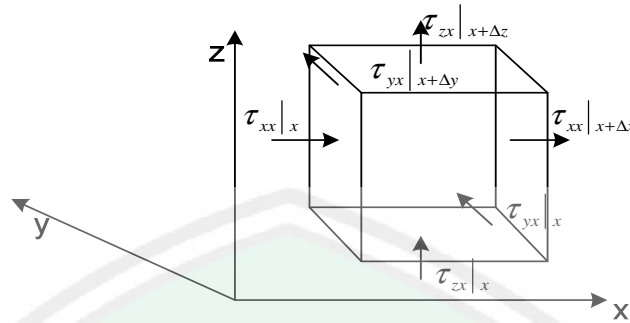
$$v_x \rho A \frac{\Delta x}{\Delta t} = v_x \rho v = \rho v_i v_x \quad (4.8)$$

Maka berdasarkan persamaan (2.57), maka:

Laju akumulasi momentum = laju momentum masuk – laju momentum keluar + jumlah gaya dalam sistem. (4.9)

Karena momentum dipengaruhi oleh tegangan.  $\tau_{xx}$  yaitu tegangan normal dan

$\tau_{yx}$  adalah tegangan tangensial.



Gambar 4.2 Gerakan Fluida Berdasarkan Hukum Kekekalan Momentum

Pada laju momentum yang masuk dengan konveksi, berdasarkan (2.54) maka

$$\Delta y \Delta z \{ (\rho v_x v_x)|_x - (\rho v_x v_x)|_{x+\Delta x} \} + \Delta x \Delta z \{ (\rho v_y v_x)|_y - (\rho v_y v_x)|_{y+\Delta y} \} + \Delta x \Delta y \{ (\rho v_z v_x)|_z - (\rho v_z v_x)|_{z+\Delta z} \} \quad (4.10)$$

Karena dipengaruhi oleh tegangan yang merupakan mempengaruhi gerakan (motion) fluida. Tegangan pada arah  $x$  yang dikalikan dengan luas bidangnya adalah:  $(\tau_{xx})|_x \Delta y \Delta z$  dan  $(\tau_{xx})|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z$ , seperti halnya pernyataan pada massa, pernyataan ini juga berlaku pada arah  $x$  dan  $z$ , sehingga didapatkan: (4.11)

$$\Delta y \Delta z \{ (\tau_{xx})|_x - (\tau_{xx})|_{x+\Delta x} \} + \Delta x \Delta z \{ (\tau_{yy})|_y - (\tau_{yy})|_{y+\Delta y} \} + \Delta x \Delta y \{ (\tau_{zz})|_z - (\tau_{yy})|_{z+\Delta z} \}$$

Dalam banyak kasus, parameter penting dalam fluida adalah tekanan (pressure) dan gravity (gaya gravitasi) perunit volume. Berdasarkan persamaan (2.41),

$$P = \frac{F}{A} \rightarrow F = P.A = P \Delta x \Delta y$$

$$= mg = \rho V g = \rho g \Delta x \Delta y \Delta z \quad (4.12)$$

Sehingga momentum di arah  $x$  adalah:

$$\Delta y \Delta z \{ (p)|_x - (p)|_{x+\Delta x} \} + \rho g_x \Delta x \Delta y \Delta z \quad (4.13)$$

Sehingga momentumnya adalah  $V(\partial \rho v_x / \partial t) = \Delta x \Delta y \Delta z (\partial \rho v_x / \partial t)$  dengan

$$\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0 \text{ limitnya ada maka:} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho v_x = & \\ & - \left( \frac{\partial}{\partial x} \rho v_x v_x + \frac{\partial}{\partial y} \rho v_y v_x + \frac{\partial}{\partial z} \rho v_z v_x \right) - \left( \frac{\partial}{\partial x} \tau_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zx} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho v_y = & \\ & - \left( \frac{\partial}{\partial x} \rho v_x v_y + \frac{\partial}{\partial y} \rho v_y v_y + \frac{\partial}{\partial z} \rho v_z v_y \right) - \left( \frac{\partial}{\partial x} \tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yy} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zy} \right) - \frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho v_z = & \\ & - \left( \frac{\partial}{\partial x} \rho v_x v_z + \frac{\partial}{\partial y} \rho v_y v_z + \frac{\partial}{\partial z} \rho v_z v_z \right) - \left( \frac{\partial}{\partial x} \tau_{xz} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yz} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zz} \right) - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z \end{aligned}$$

Persamaan di atas dapat ditulis:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho v = -(\nabla \cdot \rho v v) - \nabla p - \nabla \tau + \rho g \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho v = \text{momentum perunit volume}$$

$$(\nabla \cdot \rho v v) = \text{momentum dengan konveksi perunit volume}$$

$$\nabla p = \text{nilai tekanan perunit volume}$$

$$[\nabla \tau] = \text{momentum dengan viskositas perunit volume}$$

$$\rho g = \text{gaya gravitasi perunit volume}$$



$(\nabla \cdot \rho v)$  merupakan massa (skalar) perunit volume, sedangkan  $(\nabla \cdot \rho v v)$  merupakan momentum (vektor) perunit volume.

$$\rho \frac{Dv_x}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} - \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) + \rho g_x \quad (4.16)$$

Sehingga dapat ditulis

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\nabla p - [\nabla \tau] + \rho g \quad (4.17)$$

Dalam aturan penggunaan persamaan ini untuk menentukan kecepatan, sebelumnya harus memasukkan tegangan kecepatan gradient dan tegangan normal. Untuk fluida Newton, aturan tersebut adalah:

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= -2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot v) \\ \tau_{yy} &= -2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot v) \\ \tau_{zz} &= -2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot v) \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} &= -\mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} &= -\mu \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \\ \tau_{zx} = \tau_{xz} &= -\mu \left( \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (4.18)$$

Sehingga persamaan (4.16) dan (4.17) adalah:

$$\begin{aligned}\rho \frac{Dv_x}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot v) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \right) + \rho g_x \\ \rho \frac{Dv_y}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot v) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \right) + \rho g_y \\ \rho \frac{Dv_z}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \left( \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot v) \right) + \rho g_z\end{aligned}$$

untuk konstanta  $\rho$  dan  $\mu$  dapat disederhanakan untuk persamaan kontinuitas

$$(\nabla \cdot v) = 0, \text{ maka: } \rho \frac{Dv}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 v + \rho g \quad (4.19)$$

persamaan (4.19) berlaku umum, sehingga momentum di sumbu  $x$  adalah:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + (1/\rho) \frac{\partial p}{\partial x} - \mu/\rho \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) + g = 0 \quad (4.20)$$

Karena gaya gravitasi di setiap titik dianggap sama, maka  $g$  diabaikan. Sehingga persamaan momentum  $x$  adalah:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + (1/\rho) \frac{\partial p}{\partial x} - \mu/\rho \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (4.21)$$

Dalam fluida cair, jika temperatur naik maka kekentalan turun sehingga dalam momentum  $y$  kekentalan bernilai positif, sehingga:

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + (1/\rho) \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\eta}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) = 0, \quad (4.22)$$

#### 4.4 Menyelesaikan Model Fluida dengan Menggunakan Skema Implisit

Berdasarkan persamaan (4.6), (4.21), dan (4.22) maka persamaan fluidanya adalah:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + (1/\rho) \frac{\partial p}{\partial x} - \mu/\rho (\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}) = 0$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + (1/\rho) \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\eta}{\rho} (\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}) = 0,$$

$v_x$  diasumsikan sebagai kecepatan di sepanjang sumbu  $x$  yang disimbolkan  $u$  dan

$v_y$  merupakan kecepatan di sepanjang sumbu  $y$  yang disimbolkan  $v$  maka dapat

ditulis menjadi:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (4.23)$$

sebagai persamaan kontinuitas,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + (1/\rho) \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\eta}{\rho} (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) = 0, \quad (4.24)$$

sebagai persamaan momentum  $x$ .

Dalam fluida cair, jika temperatur naik maka kekentalan turun sehingga dalam momentum  $y$  kekentalan bernilai positif, sehingga:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + (1/\rho) \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\eta}{\rho} (\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}) = 0 \quad (4.25)$$

sebagai persamaan momentum  $y$ .

#### a. Mentransformasikan Persamaan Kontinu menjadi Persamaan Diskrit

Persamaan (4.24) dapat diselesaikan dengan metode implisit sehingga persamaan momentumnya adalah:

$$\Leftrightarrow \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} + u_{i,j}^{n+1} \left( \frac{u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n+1}}{\Delta x} \right) + v_{i,j}^{n+1} \left( \frac{u_{i,j+1}^{n+1} - u_{i,j}^{n+1}}{\Delta y} \right) + \frac{1}{\rho} \left( \frac{p_{i+1,j}^n - p_{i,j}^n}{\Delta x} \right) - \frac{\eta}{\rho} \left( \frac{u_{i+2,j}^{n+1} - 2u_{i+1,j}^{n+1} + u_{i,j}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+2}^{n+1} - 2u_{i,j+1}^{n+1} + u_{i,j}^{n+1}}{\Delta y^2} \right) = 0 \quad (4.26)$$

maka persamaan (4.26), diperoleh:

$$au_{i,j}^{n+1} + bu_{i+1,j}^{n+1} + cu_{i+2,j}^{n+1} + du_{i,j+1}^{n+1} + eu_{i,j+2}^{n+1} = f^n \quad (4.27)$$

sehingga:

$$a = \frac{1}{\Delta t} - \frac{u_{i,j}^{n+1}}{\Delta x} - \frac{v_{i,j}^{n+1}}{\Delta y} - \frac{\eta}{\rho \Delta x^2} - \frac{\eta}{\rho \Delta y^2}$$

$$b = \frac{u_{i,j}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{2\eta}{\rho \Delta x^2}$$

$$c = -\frac{\eta}{\rho \Delta x^2}$$

$$d = \frac{v_{i,j}^{n+1}}{\Delta y} + \frac{2\eta}{\rho \Delta y^2}$$

$$e = -\frac{\eta}{\rho \Delta y^2}$$

$$f = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{p_{i+1,j}^n - p_{i,j}^n}{\Delta y} \right) + \frac{u_{i,j}^n}{\Delta t}$$

Berdasarkan persamaan (4.25) dengan metode implisit, maka persamaan momentumnya adalah:

$$\Leftrightarrow \frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n}{\Delta t} + u_{i,j}^{n+1} \left( \frac{v_{i+1,j}^{n+1} - v_{i,j}^{n+1}}{\Delta x} \right) + v_{i,j}^{n+1} \left( \frac{v_{i,j+1}^{n+1} - v_{i,j}^{n+1}}{\Delta y} \right) + \frac{1}{\rho} \left( \frac{p_{i,j+1}^n - p_{i,j}^n}{\Delta y} \right) + \frac{\eta}{\rho} \left( \frac{v_{i+2,j}^{n+1} - 2v_{i+1,j}^{n+1} + v_{i,j}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{v_{i,j+2}^{n+1} - 2v_{i,j+1}^{n+1} + v_{i,j}^{n+1}}{\Delta y^2} \right) = 0 \quad (4.28)$$

persamaan diskritnya:

$$pv_{i,j}^{n+1} + qv_{i+1,j}^{n+1} + rv_{i+2,j}^{n+1} + sv_{i,j+1}^{n+1} + tv_{i,j+2}^{n+1} = w^n \quad (4.29)$$

dengan

$$p = \frac{1}{\Delta t} - \frac{u_{i,j}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{v_{i,j}^{n+1}}{\Delta y} + \frac{\eta}{\rho\Delta x^2} + \frac{\eta}{\rho\Delta y^2}$$

$$q = \frac{u_{i,j}^{n+1}}{\Delta x} - \frac{2\eta}{\rho\Delta x^2}$$

$$r = \frac{\eta}{\rho\Delta x^2}$$

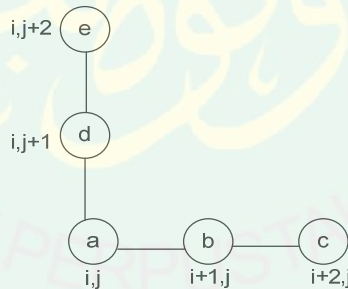
$$s = \frac{v_{i,j}^{n+1}}{\Delta y} - \frac{2\eta}{\rho\Delta y^2}$$

$$t = \frac{\eta}{\rho\Delta y^2}$$

$$w = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{p_{i,j+1}^n - p_{i,j}^n}{\Delta y} \right) + \frac{v_{i,j}^n}{\Delta t}$$

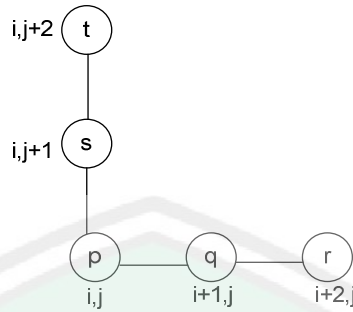
### b. Membuat Pola Iterasi Kecepatan

Pola iterasi persamaan (4.27) adalah:



Gambar 4.3 Pola Iterasi Kecepatan Momentum x

Pola iterasi persamaan (4.29) adalah:

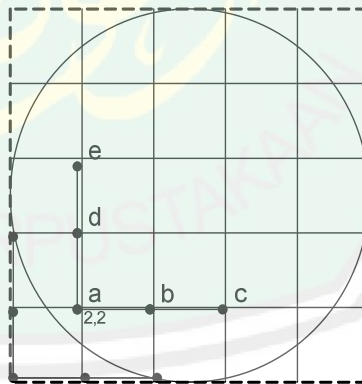


Gambar 4.4 Pola Iterasi Kecepatan Momentum y

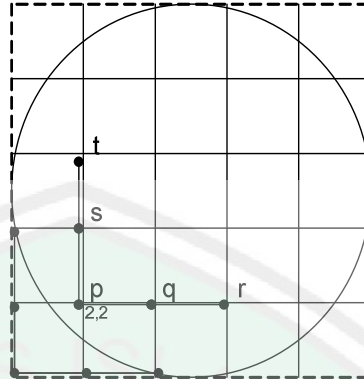
kecepatan di atas diterapkan pada sistem yang berbentuk lingkaran.

**c. Menjalankan Pola Iterasi Kecepatan pada Sistem yang Berbentuk Lingkaran**

Pola iterasi pada Gambar 4.3 dan 4.4 dijalankan pada sistem yang berbentuk lingkaran yang dimulai dari titik (2,2) karena kecepatan yang tepat di sistem adalah nol, sehingga:



Gambar 4.5 Pola Iterasi Kecepatan Momentum x Pada Sistem Lingkaran



Gambar 4.6 Pola Iterasi Kecepatan Momentum  $y$  Pada Sistem Lingkaran

Dari pola kecepatan yang dijalankan pada sistem yang berbentuk lingkaran dengan menggunakan kondisi awal (initial kondisi) dan kondisi batas (boundary condition) maka akan diperoleh matriks tridiagonalnya.

**d. Membuat Matriks Hasil Menjalankan Pola Iterasi Kecepatan pada Sistem yang Berbentuk Lingkaran**

Berdasarkan Gambar 4.5 dan 4.6 maka matriks tridiagonal kecepatan momentum  $x$  adalah:

$$\begin{pmatrix} a & b & c & 0 & d & 0 & 0 & 0 & e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & d & 0 & 0 & e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 & 0 & d & 0 & 0 & 0 & e & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & d & 0 & 0 & 0 & e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & d & 0 & 0 & 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & 0 & 0 & d & 0 & 0 & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{2,2}^{n+1} \\ u_{3,2}^{n+1} \\ u_{4,2}^{n+1} \\ u_{5,2}^{n+1} \\ u_{2,3}^{n+1} \\ u_{3,3}^{n+1} \\ u_{4,3}^{n+1} \\ u_{5,3}^{n+1} \\ u_{2,4}^{n+1} \\ u_{3,4}^{n+1} \\ u_{4,4}^{n+1} \\ u_{5,4}^{n+1} \\ u_{2,5}^{n+1} \\ u_{3,5}^{n+1} \\ u_{4,5}^{n+1} \\ u_{5,5}^{n+1} \end{pmatrix} = 1/\rho \begin{pmatrix} -\rho_{3,2}^n + \rho_{2,2}^n / \Delta x \\ -\rho_{4,2}^n + \rho_{3,2}^n / \Delta x \\ -\rho_{5,2}^n + \rho_{4,2}^n / \Delta x \\ -\rho_{5,2}^n + \rho_{4,2}^n / \Delta x \\ -\rho_{5,2}^n + \rho_{4,2}^n / \Delta x \\ -\rho_{5,2}^n + \rho_{4,2}^n / \Delta x \\ -\rho_{5,2}^n + \rho_{4,2}^n / \Delta x \\ -\rho_{5,2}^n + \rho_{4,2}^n / \Delta x \\ -\rho_{5,2}^n + \rho_{4,2}^n / \Delta x \\ -\rho_{5,2}^n + \rho_{4,2}^n / \Delta x \\ -\rho_{5,2}^n + \rho_{4,2}^n / \Delta x \\ -\rho_{6,2}^n + \rho_{4,2}^n / \Delta x \\ -\rho_{6,2}^n + \rho_{4,2}^n / \Delta x \\ -\rho_{6,2}^n + \rho_{4,2}^n / \Delta x \\ -\rho_{6,2}^n + \rho_{4,2}^n / \Delta x \\ -\rho_{6,2}^n + \rho_{4,2}^n / \Delta x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{2,2}^n \\ u_{3,2}^n \\ u_{4,2}^n \\ u_{5,2}^n \\ u_{5,3}^{n+1} \\ u_{5,3}^n \\ u_{5,3}^n \\ u_{5,4}^n \\ u_{5,4}^n \\ u_{5,4}^n \\ u_{5,4}^n \\ u_{5,5}^n \\ u_{5,5}^n \\ u_{5,5}^n \\ u_{5,5}^n \end{pmatrix}$$

Momentum y

$$\begin{pmatrix} p & s & t & 0 & q & 0 & 0 & 0 & r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & s & t & 0 & q & 0 & 0 & r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & s & 0 & 0 & q & 0 & 0 & 0 & r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p & 0 & 0 & 0 & q & 0 & 0 & 0 & r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p & s & t & 0 & q & 0 & 0 & 0 & r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & s & t & 0 & q & 0 & 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & 0 & 0 & 0 & q & 0 & 0 & r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & s & t & 0 & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & s & t & 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & s & 0 & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & s & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{2,2}^{n+1} \\ v_{2,3}^{n+1} \\ v_{2,4}^{n+1} \\ v_{2,5}^{n+1} \\ v_{3,2}^{n+1} \\ v_{3,3}^{n+1} \\ v_{3,4}^{n+1} \\ v_{3,5}^{n+1} \\ v_{4,2}^{n+1} \\ v_{4,3}^{n+1} \\ v_{4,4}^{n+1} \\ v_{4,5}^{n+1} \\ v_{5,2}^{n+1} \\ v_{5,3}^{n+1} \\ v_{5,4}^{n+1} \\ v_{5,5}^{n+1} \end{pmatrix} = 1/\rho \begin{pmatrix} -\rho_{2,3}^n + \rho_{2,2}^n / \Delta y \\ -\rho_{2,4}^n + \rho_{2,3}^n / \Delta y \\ -\rho_{2,5}^n + \rho_{2,4}^n / \Delta y \\ -\rho_{2,5}^n + \rho_{2,4}^n / \Delta y \\ -\rho_{2,5}^n + \rho_{2,4}^n / \Delta y \\ -\rho_{2,5}^n + \rho_{2,4}^n / \Delta y \\ -\rho_{2,5}^n + \rho_{2,4}^n / \Delta y \\ -\rho_{2,5}^n + \rho_{2,4}^n / \Delta y \\ -\rho_{2,5}^n + \rho_{2,4}^n / \Delta y \\ -\rho_{2,5}^n + \rho_{2,4}^n / \Delta y \\ -\rho_{2,5}^n + \rho_{2,4}^n / \Delta y \\ -\rho_{2,5}^n + \rho_{2,4}^n / \Delta y \\ -\rho_{2,5}^n + \rho_{2,4}^n / \Delta y \\ -\rho_{2,5}^n + \rho_{2,4}^n / \Delta y \\ -\rho_{2,5}^n + \rho_{2,4}^n / \Delta y \\ -\rho_{2,5}^n + \rho_{2,4}^n / \Delta y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_{2,2}^n \\ v_{2,3}^n \\ v_{2,4}^n \\ v_{2,5}^n \\ v_{2,5}^n \\ v_{2,5}^n \\ v_{2,5}^n \\ v_{2,5}^n \\ v_{2,5}^n \\ v_{2,5}^n \\ v_{2,5}^n \\ v_{2,5}^n \\ v_{2,5}^n \\ v_{2,5}^n \\ v_{2,5}^n \\ v_{2,5}^n \end{pmatrix}$$

Matrik di atas digunakan untuk menghitung kecepatan dari titik  $i, j = 2,2$  sampai  $6,6$  dan dari  $n = 1$  sampai iterasi yang dikehendaki. Karena diterapkan pada fluida air (liquid) pada temperatur  $60^{\circ}C$  maka  $\eta = 4,745 \text{ cm}^2 / \text{s}, \mu = 4,665 \text{ (N - s / cm}^2), \rho = 0,9832 \text{ g / cm}^3, \Delta t = 0.2, p = 1,992 \text{ N / m}^2$ . Berdasarkan kecepatan pada aliran laminar pada bab II, kondisi awal



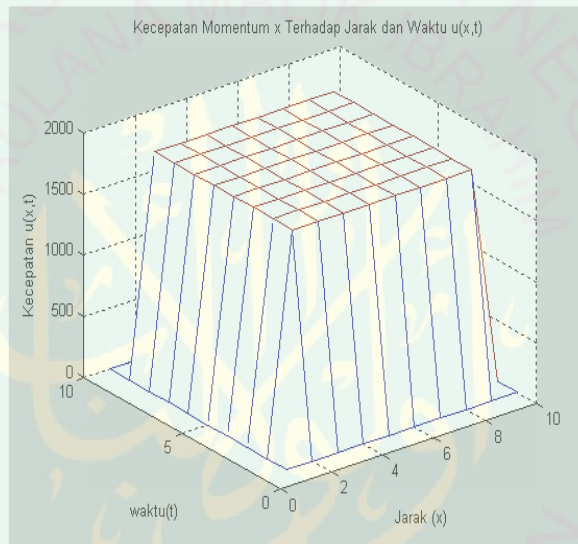
$u_{i,j}^n = v_{i,j}^n = 1800 \text{ cm/s}$  untuk  $i, j = 2, 3, 4, 5$  dan untuk  $p_{i,j}^n = 1,992 \text{ N/cm}^2$  dan kondisi batas  $u=0$  pada  $x=1$  dan  $x=6$  dan  $v = 0$  pada  $y = 0$  dan  $y = 6$ .

#### 4.4.1 Hasil dan Analisa Program

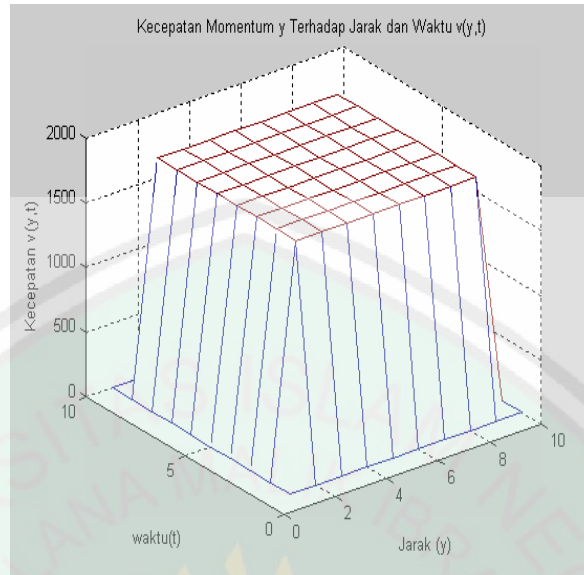
Berdasarkan hasil matriks dalam lampiran, maka diperoleh gambar kecepatan sebagai berikut:

Kekentalan:  $\eta = 4,745 \text{ cm}^2 / \text{s}$

##### Iterasi 1

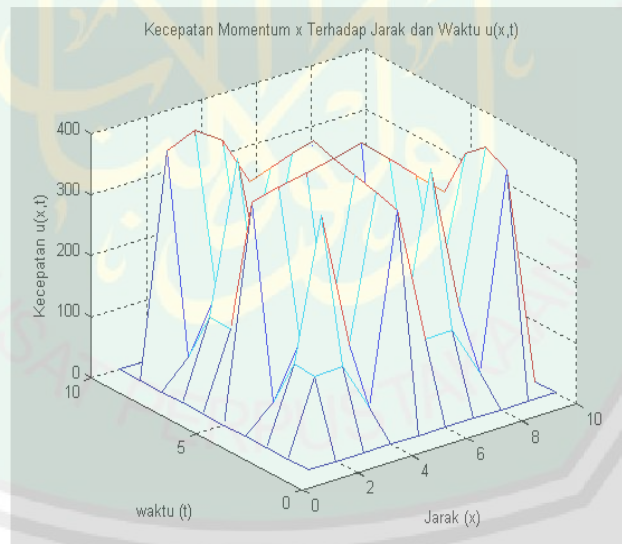


Gambar 4.7 Kecepatan  $u(x,t)$   
Ket: Kecepatan 1800 cm/s di setiap titik

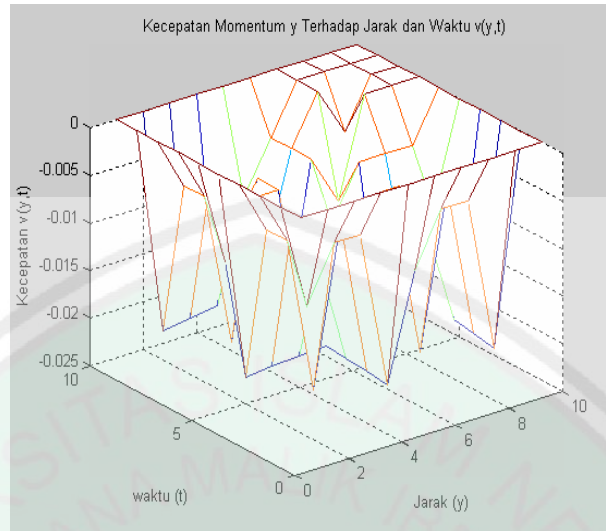


Gambar 4.8 Kecepatan  $v(y,t)$   
 Ket: Kecepatan 1800 cm/s di setiap titik

**Iterasi 3**

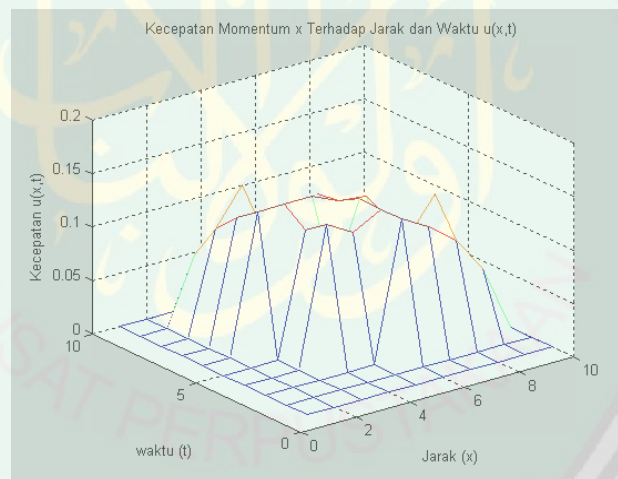


Gambar 4.9 Kecepatan  $u(x,t)$   
 Ket: Kecepatan maksimal 392.1777 cm/s  
 Kecepatan minimal 40.8865 cm/s



Gambar 4.10 Kecepatan  $v(y,t)$   
 Ket: Kecepatan maksimal 0.5097 cm/s  
 Kecepatan minimal -0.0011 cm/s

**Iterasi 5**



Gambar 4.11 Kecepatan  $u(x,t)$   
 Ket: Kecepatan maksimal 0.1293 cm/s  
 Kecepatan minimal 0.0083 cm/s

Berdasarkan hasil komputasi implisit maka kecepatan pada setiap iterasi berbeda dan bergantung pada kekentalan.

## 4. 5 Model Matematika dalam Menganalisa Ayat Al-Quran dan Hadits

### 4.5.1 Pahala dalam Al-Quran

Dalam surat Al-Baqoroh ayat 261 yang terdapat pada bab II menjelaskan bahwa Allah akan memberikan pahala bagi yang menafkahkan hartanya di jalan Allah dengan tidak mengiringinnya apa dinafkakhkannya itu dengan menyebutkannyebutnya dan tidak menyakiti (perasaan si penerima). Dalam surat Al-Baqoroh ayat 261 yang mempunyai arti: “Perumpamaan (nafkah yang dikeluarkan oleh) orang-orang yang menafkahkan hartanya di jalan Allah adalah serupa dengan sebutir benih yang menumbuhkan tujuh bulir, pada tiap-tiap bulir seratus biji. Allah melipatgandakan (ganjaran) bagi siapa yang Dia kehendaki. Dan Allah Maha Luas (karunia-Nya) lagi Maha Mengetahui.

Dari surat Al-Baqoroh ayat 261 dapat diperhitungkan pahala dengan menggunakan model matematika. Seseorang menafkahkan hartanya di jalan Allah dimisalkan  $y$ , yang mempunyai arti sebutir benih disimbolkan  $x$ , yang mempunyai arti sebagai bulir disimbolkan  $z$ , yang mempunyai arti biji disimbolkan sebagai  $m$ . Untuk frekuensi seseorang menginfakkan hartanya disimbolkan sebagai  $n$ . Selain itu juga ada penambahan pahala bagi yang Dia kehendaki. Arti ini disimbolkan dengan  $c$  sebagai konstanta yang merupakan pahala yang tidak terduga.

Permasalahan di atas akan lebih sederhana dengan menggunakan simbol yang telah ditetapkan sehingga persamaannya adalah:  $y = m.n.x.z + c$

Dengan:

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

$$x = 1$$

$$z = 7$$

$$m = 100$$

$$c = \text{konstanta}$$

Jika seseorang menafkahkan hartanya di jalan Allah 1 kali, maka nilai pahalanya adalah:

$$y = 100 \cdot 1 \cdot 7 + c$$

$$y = 700 + c$$

nilai pahalanya adalah 700 biji dan akan ditambah pahala yang tidak terduga yaitu berupa  $c$ . Jika menafkahkan hartanya 2 kali maka:

$$y = 100 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 7 + c$$

$$y = 1400 + c$$

sehingga dapat dirumuskan untuk perhitungan beberapa kali menafkahkan hartanya di jalan Allah adalah:

$$y = n \cdot 700 + c$$

$$y = 700n + c$$

namun pada ayat berikutnya, jika seseorang menafkahkan hartanya dengan menyebut-nyebut hartanya kepada orang lain dan menyakiti hati si penerima, maka atas kehendak Allah, dia tidak akan mendapatkan apa-apa, Karena Allah Maha Mengetahui apa yang diperbuat dan dikerjakan.

#### 4.5.2 Pahala dalam Hadits

Berikut ini adalah hadits nabi yang menjelaskan pemodelan keberuntungan bagi orang yang selalu shalat jamaah.

صلاة جماعة تفضل صلاة المفد بسبع وعشرين درجة

Artinya: Shalat berjamaah lebih utama dibandingkan dengan shalat sendirian dengan 27 derajat.

Dari hadits di atas dijelaskan bahwa barang siapa shalat fardhu dengan berjamaah mempunyai kelebihan 27 derajat dibandingkan dengan shalat sendirian dengan selisih 26 derajat. Untuk mempermudah perhitungan, maka dapat dimodelkan sebagai berikut:

$y_1$  = shalat berjamaah

$y_2$  = shalat sendiri

$h$  = hari

maka persamaannya menjadi  $y_1 = 27.n.h$  dan  $y_2 = 1.n.h$ . Jika seseorang shalat dalam 1 hari 5 kali dan berjamaah maka  $y_1 = 27.5.1$  maka hasilnya adalah 135. sedangkan jika seseorang shalat sendiri dalam 1 hari maka  $y_2 = 1.5.1$  maka hasilnya adalah 5, sehingga selisih 130 derajat antara orang yang shalat sendiri dan shalat berjamaah. Dalam Bab II banyak pahala yang diperoleh baik yang dapat diperhitungkan ataupun tidak dapat diperhitungkan, sehingga dapat ditulis sebagai konstanta C.

## **BAB V**

### **PENUTUP**

#### **5.1 Kesimpulan**

Dari hasil pembahasan pada bab III maka, maka langkah-langkah membuat model fluida yaitu:

- 1.6.7 Mengidentifikasi faktor-faktor dalam fluida,
- 1.6.8 Mengasumsikan aliran dalam fluida,
- 1.6.9 Membuat model fluida dengan menggunakan hukum kekekalan,
- 1.6.10 Menyelesaikan model dengan menggunakan skema implisit,
  - a. Mentransformasikan persamaan kontinu menjadi persamaan diskrit,
  - b. Membuat pola iterasi kecepatan,
  - c. Menjalankan pola iterasi kecepatan pada sistem yang berbentuk lingkaran,
  - d. Membuat matriks hasil menjalankan pola iterasi kecepatan pada sistem yang berbentuk lingkaran (tergantung sistemnya),
- 1.6.11 Hasil dan Analisis Program,

Berdasarkan hasil komputasi implisit, maka kecepatan pada setiap iterasi berbeda yang bergantung pada kekentalan.

### 5.1 Saran

Model fluida adalah merupakan model yang berupa diferensial, maka dari itu untuk peneliti selanjutnya dapat menyelesaikan model fluida dengan memperhitungkan hubungan beberapa parameter. Selain itu, peneliti dapat menyelesaikan model fluida menggunakan metode lain sehingga dapat dibandingkan.





## DAFTAR PUSTAKA

- Al-Ghozali. 2007. *Ringkasan Ihya Ulumuddin*. Jakarta: Pustaka Amani.
- Arham, Muhammad dan Anita Desiani. 2004. *Pemrograman Matlab*. Jakarta: Andi
- Ault, J.C and Frank Ayres, JR. 1992. *Persamaan Diferensial*. Jakarta: Erlangga
- Bird, R. Byron. dkk. 1960. *Transport Fenomena*. Wiley Internationa Edition New York
- Dipanjana, Roy, " Derivation of Generalized Lorenz Systems to Study the Onset Of Chaos in High Dimensions," *Tesis M.S* (Arlington: The University of Texas, 2006), 13
- Hamid, Muhammad. 852 H. *Bulughul Maram*. Surabaya: Al-Miftah
- Holman, J.P. 1997. *Perpindahan Kalor*. Jakarta: Erlangga
- Ibnu Kasir, Abul Fida Ismail. 2000. *Tafsir Ibnu Kasir*. Bandung: Sinar Baru Algensindo
- Munson, Bruce dkk. 2003. *Mekanika Fluida*. Jakarta: Erlangga
- Olson, Reuben M dan Steven J. Wright. 1993. *Dasar-dasar Mekanika Fluida Teknik*. Jakarta: PT Gramedia Pustaka Utama
- Orianto dan Pratikto. 1989. *Mekanika Fluida*. Yogyakarta:
- Purcell, Edwin and Dale Varberg. 1987. *Kalkulus dan Geometri Analitis*. Bandung: PT Gelora Aksara Pratama
- Quthb, Sayyid. 2001. *Tafsir Fi-Zhilalil Quran*. Jakarta: Robbani Press
- Triatmojo, Bambang. 2002. *Metode Numerik*. Yogyakarta: Bena Offset
- Zemansky, Sears. 1982. *Fisika Untuk Universitas 1*. Bandung: Binacipta

## LAMPIRAN PROGRAM IMPLISIT

```
%program metode implisit
clc;clear;
deltaX=0.1;
deltaY=deltaX;
deltaT=0.2;
rho=0.9832;
chi=input('kekentaalan=');
iterasi=input('iterasi=');
m=10;tt=(m-2)^2;
u=zeros(m,m,iterasi);
v=zeros(m,m,iterasi);
P=zeros(m-1,m-1,iterasi);
K=zeros(tt,tt);
n=1:iterasi-1;
%kondisi batas
for j=1:m
    u(1,j)=0;
    u(m,j)=0;
    v(j,1)=0;
    v(j,m)=0;
end
%kondisi awal;
for i=2:m-1;
    for j=2:m-1;
        u(i,j)=1800;
        v(i,j)=1800;
    end
end
for i=2:m-2
    for j=2:m-2
        P(i,j)=1.992;
    end
end
%implisit
tic;
for n=1:iterasi-1
    %iterasi implisit untuk solusi kecepatan u
    %penyusunan matrik K
    a=1/deltaT-u(i,j,n+1)/deltaX-v(i,j,n+1)/deltaY-chi/rho*(deltaX)^2-chi/rho*(deltaY)^2;
    b=u(i,j,n+1)/deltaX+2*chi/rho*(deltaX)^2;
    c=-chi/rho*(deltaX)^2;
    d=v(i,j,n+1)/deltaY+2*chi/rho*(deltaY)^2;
    e=-chi/rho*(deltaY)^2;
    K=zeros(tt,tt);
    for i=1:tt
        for j=1:tt
            if i==j
                K(i,j)==a;
            elseif i==j-1
                K(i,j)==b;
            elseif i==j-2
                K(i,j)==c;
            elseif i+1==j-4
```

```

        K(i,j)=d;
    elseif i+4==j-8
        K(i,j)==e;
    end
end
end
%penyusunan matriks konstanta D
D=zeros(tt,1);
for j=1:m-2
    for i=1:m-2
        D(i*j)=(rho*(-P(i,j+1,n)+P(i,j,n))/deltaX)+u(i,j,n)/deltaT;
    end
end
%solusi K*T=D untuk T
T=(pinv(K)*D)';
%transformasi T pada u
for j=1:m-2
    for i=1:m-2
        u(i+1,j+1,n+1)=T(i*j);
    end
end
% iterasi implisit untuk solusi kecepatan v
% penyusunan matrik koefisien K
p=1/deltaT-u(i,j,n+1)/deltaX+v(i,j,n+1)/deltaY+chi/rho*(deltaX)^2+chi/rho*(deltaY)^2;
q=u(i,j,n+1)/deltaX-2*chi/rho*(deltaX)^2;
r=chi/rho*(deltaX)^2;
s=v(i,j,n+1)/deltaY-2*chi/rho*(deltaY)^2;
t=chi/rho*(deltaY)^2;
K=zeros(tt,tt);
for i=1:tt
    for j=1:tt
        if i==j
            K(i,j)=p;
        elseif i==j-1
            K(i,j)=s;
        elseif i==j-2
            K(i,j)=t;
        elseif i==j-4
            K(i,j)=q;
        elseif i==j-8
            K(i,j)=r;
        end
    end
end
end
%penyusunan matriks konstanta D
D=zeros(tt,1);
for j=1:m-2
    for i=1:m-2
        D(i*j)=(rho*(-P(i+1,j,n)+P(i,j,n))/deltaY)+v(i,j,n)/deltaT;
    end
end
%solusi K*T=D untuk T
T=(pinv(K)*D)';
%transformasi T pada v
for j=1:m-2
    for i=1:m-2

```

```

        v(i+1,j+1,n+1)=T(i*j);
    end
end
end
disp("");
disp('hasil komputasi kecepatan u:');
disp('=====')
disp(u);
disp("");
disp('hasil komputasi kecepatan v:');
disp('=====')
disp(v);
disp(['waktu komputasi=',num2str(toc)])
disp('=====')
%tampilan gambar unuk setiap iterasi
figure(1)
for i=1:n
    mesh(u(:,:,i))
    M(:,i)=getframe;
    xlabel('Jarak (x)')
    ylabel('Waktu (t)')
    zlabel('Kecepatan u(x,t)')
    title('Kecepatan Momentum x Terhadap Jarak dan Waktu u(x,t)')
end
movie(M,1)

figure(2)
for i=1:n
    mesh(v(:,:,i))
    N(:,i)=getframe;
    xlabel('Jarak (y)')
    ylabel('Waktu (t)')
    zlabel('Kecepatan v(y,t) ')
    title('Kecepatan Momentum y Terhadap Jarak dan Waktu v(y,t)')
end
movie(N,1)

```

## HASIL KOMPUTASI KECEPATAN

Hasil komputasi kecepatan u dan v:

=====

u (:,:,1) dan v (:,:,1) =

Columns 1 through 4

0	0	0	0
0	1800	1800	1800
0	1800	1800	1800
0	1800	1800	1800
0	1800	1800	1800
0	1800	1800	1800
0	1800	1800	1800
0	1800	1800	1800
0	1800	1800	1800
0	1800	1800	1800
0	0	0	0

Columns 5 through 8

0	0	0	0
1800	1800	1800	1800
1800	1800	1800	1800
1800	1800	1800	1800
1800	1800	1800	1800
1800	1800	1800	1800
1800	1800	1800	1800
1800	1800	1800	1800
1800	1800	1800	1800
1800	1800	1800	1800
0	0	0	0

Columns 9 through 10

0	0
1800	0
1800	0
1800	0
1800	0
1800	0
1800	0
1800	0
1800	0
1800	0
0	0

u(:, :, 2) =  
1.0e+003 \*

Columns 1 through 5

0	0	0	0	0
0	0.0006	0.0006	0.0000	0.0006
0	0.0006	0.0006	0.0341	0.0341
0	0.0000	0.0341	1.7659	1.8001
0	0.0006	0.0341	1.8001	1.8038
0	0.0334	1.8000	1.7659	1.8001
0	0.0341	1.8001	1.7659	1.8038
0	0.0006	1.7994	1.7994	1.8001
0	0.0341	1.8038	1.8038	1.8038
0	0	0	0	0

Columns 6 through 10

0	0	0	0	0
0.0334	0.0341	0.0006	0.0341	0
1.8000	1.8001	1.7994	1.8038	0
1.7659	1.7659	1.7994	1.8038	0
1.8001	1.8038	1.8001	1.8038	0
1.7659	1.7659	1.7659	1.7704	0
1.7659	1.7994	1.7659	1.7704	0
1.7659	1.7659	1.7659	1.7704	0
1.7704	1.7704	1.7704	1.7698	0
0	0	0	0	0

u(:, :, 3) =

Columns 1 through 5

0	0	0	0	0
0	121.4493	123.6346	40.8865	351.7648
0	123.6346	351.7648	127.1228	361.6896
0	40.8865	127.1228	128.3991	371.8943
0	351.7648	361.6896	371.8943	381.4339
0	124.8758	130.7095	44.4458	392.1777
0	127.1228	371.8943	137.1989	351.9458
0	42.0401	134.3789	139.5572	310.5992
0	361.6896	381.4339	351.9458	269.0388
0	0	0	0	0

Columns 6 through 10

0	0	0	0	0
124.8758	127.1228	42.0401	361.6896	0
130.7095	371.8943	134.3789	381.4339	0
44.4458	137.1989	139.5572	351.9458	0
392.1777	351.9458	310.5992	269.0388	0
92.1978	94.9127	49.9938	181.3879	0

94.9127	225.3531	48.9428	139.0235	0
49.9938	48.9428	49.8717	95.2359	0
181.3879	139.0235	95.2359	48.9425	0
0	0	0	0	0

u(:, :, 4) =

Columns 1 through 5

0	0	0	0	0
0	3.5951	2.9704	1.9295	4.0478
0	2.9704	4.0478	2.9787	4.0592
0	1.9295	2.9787	3.6153	4.0705
0	4.0478	4.0592	4.0705	3.7381
0	3.6052	2.9871	1.9457	3.6329
0	2.9787	4.0705	1.6827	2.6192
0	1.9349	2.0270	2.6719	2.2566
0	4.0592	3.7381	2.6192	1.8852
0	0	0	0	0

Columns 6 through 10

0	0	0	0	0
3.6052	2.9787	1.9349	4.0592	0
2.9871	4.0705	2.0270	3.7381	0
1.9457	1.6827	2.6719	2.6192	0
3.6329	2.6192	2.2566	1.8852	0
1.6555	1.3350	0.9662	1.2567	0
1.3350	1.5063	0.2606	0.4063	0
0.9662	0.2606	0.6187	0.2705	0
1.2567	0.4063	0.2705	0.1369	0
0	0	0	0	0

u(:, :, 5) =

Columns 1 through 5

0	0	0	0	0
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0	0.0000	0.0000	0.1293	0.1152
0	0.0000	0.0000	0.1152	0.0618
0	0.0000	0.1293	0.1296	0.1300
0	0.0000	0.1152	0.0954	0.0648
0	0.0000	0.0952	0.1300	0.0538
0	0.0000	0.0618	0.0648	0.0853
0	0	0	0	0

Columns 6 through 10

0	0	0	0	0
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0
0.1293	0.1152	0.0952	0.0618	0
0.1296	0.0954	0.1300	0.0648	0
0.1300	0.0648	0.0538	0.0853	0
0.1194	0.1160	0.0836	0.0721	0
0.1160	0.0529	0.0426	0.0309	0
0.0836	0.0426	0.0481	0.0083	0
0.0721	0.0309	0.0083	0.0198	0
0	0	0	0	0

Hasil komputasi kecepatan v:

v(:,2) =

Columns 1 through 5

0	0	0	0	0
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0	0.0000	0.0000	-0.0011	-0.0011
0	0.0000	-0.0011	-0.0011	-0.0011
0	0.0000	-0.0011	-0.0011	0.5097
0	0.0000	-0.0011	0.0000	0.5095
0	-0.0011	-0.0011	0.5095	0.5095
0	-0.0011	0.5097	0.0000	0.5095
0	-0.0011	0.5097	0.5095	0.5095
0	0	0	0	0

Columns 6 through 10

0	0	0	0	0
0.0000	-0.0011	-0.0011	-0.0011	0
-0.0011	-0.0011	0.5097	0.5097	0
0.0000	0.5095	0.0000	0.5095	0
0.5095	0.5095	0.5095	0.5095	0
0.5097	0.0000	0.0000	0.5095	0
0.0000	0.5095	0.0000	-0.0001	0
0.0000	0.0000	0.0000	-0.0001	0
0.5095	-0.0001	-0.0001	0.0000	0
0	0	0	0	0

v(:,3) =

Columns 1 through 5

0	0	0	0	0
0	-0.0113	-0.0055	-0.0056	-0.0222
0	-0.0055	-0.0222	-0.0055	-0.0220
0	-0.0056	-0.0055	-0.0111	-0.0217
0	-0.0222	-0.0220	-0.0217	-0.0215



```

0 -0.0112 -0.0054 -0.0054 -0.0213
0 -0.0055 -0.0217 -0.0053 -0.0211
0 -0.0055 -0.0054 -0.0108 -0.0158
0 -0.0220 -0.0215 -0.0211 -0.0105
0 0 0 0 0

```

Columns 6 through 10

```

0 0 0 0 0
-0.0112 -0.0055 -0.0055 -0.0220 0
-0.0054 -0.0217 -0.0054 -0.0215 0
-0.0054 -0.0053 -0.0108 -0.0211 0
-0.0213 -0.0211 -0.0158 -0.0105 0
-0.0107 -0.0052 -0.0052 -0.0052 0
-0.0052 -0.0104 -0.0000 -0.0000 0
-0.0052 -0.0000 -0.0052 -0.0000 0
-0.0052 -0.0000 -0.0000 -0.0000 0
0 0 0 0 0

```

v(:,:,4) =  
1.0e+009 \*

Columns 1 through 5

```

0 0 0 0 0
0 0.0439 0.0007 0.0001 3.8054
0 0.0007 3.8054 0.0001 0.6813
0 0.0001 0.0001 0.0014 0.1220
0 3.8054 0.6813 0.1220 0.0218
0 0.0079 0.0000 0.0000 0.0039
0 0.0001 0.1220 0.0000 0.0007
0 0.0000 0.0000 0.0000 0.0001
0 0.6813 0.0218 0.0007 0.0000
0 0 0 0 0

```

Columns 6 through 10

```

0 0 0 0 0
0.0079 0.0001 0.0000 0.6813 0
0.0000 0.1220 0.0000 0.0218 0
0.0000 0.0000 0.0000 0.0007 0
0.0039 0.0007 0.0001 0.0000 0
0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0
0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0
0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0
0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0
0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0
0 0 0 0 0

```

waktu komputasi=20.859

=====