

**PENYELESAIAN PERSAMAAN k BESSEL
MENGUNAKAN METODE FROBENIUS**

SKRIPSI

**OLEH
SURYANI ASWATUL ASYIAH
NIM. 10610073**



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2016**

**PENYELESAIAN PERSAMAAN k BESSEL
MENGUNAKAN METODE FROBENIUS**

SKRIPSI

**Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)**

**Oleh
Suryani Aswatul Asyiah
NIM. 10610073**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2016**

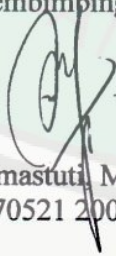
**PENYELESAIAN PERSAMAAN k BESSEL
MENGUNAKAN METODE FROBENIUS**

SKRIPSI

Oleh
Suryani Aswatul Asyiah
NIM. 10610073

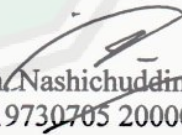
Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 31 November 2016

Pembimbing I,



Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si
NIP. 19770521 200501 2 004

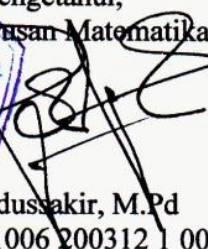
Pembimbing II,



Ach. Nashichuddin, M.A
NIP. 19730705 200003 1 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika




Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

**PENYELESAIAN PERSAMAAN k BESSEL
MENGUNAKAN METODE FROBENIUS**

SKRIPSI

Oleh
Suryani Aswatul Asyiah
NIM. 10610073

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)


Tanggal 31 November 2016

Penguji Utama : Mohammad Jamhuri, M.Si

Ketua Penguji : Hairur Rahman, M.Si

Sekretaris Penguji : Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si

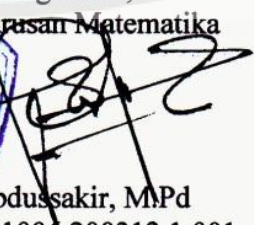
Anggota Penguji : Ach. Nasichuddin, MA



Mengetahui,

Ketua Jurusan Matematika




Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Suryani Aswatul Asyiah
NIM : 10610073
Jurusan : Matematika
Fakultas : Sains dan Teknologi
Judul Skripsi : Penyelesaian Persamaan k Bessel Menggunakan Metode Frobenius.

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 04 November 2016

Yang membuat pernyataan,



Suryani Aswatul Asyiah
NIM. 10610073

MOTO

إِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٦﴾

“Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan.” (QS. Al-Insyirah: 6)



PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Kedua orang tua ayahanda **Jupriadi** dan ibunda **Eka Surya Iswanti** yang tak pernah berhenti untuk mendoakan dan memberi motivasi kepada penulis. Suami tercinta **Agus Winarno** sebagai teman, sahabat, dan guru terbaik yang senantiasa memotivasi agar skripsi ini dapat diselesaikan. Pangeran kecil penulis **Adi Pratama** semoga menjadi putra sholeh. Serta segenap keluarga penulis yang selalu memberikan doa, semangat, dan motivasi bagi penulis.



KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadirat Allah Swt. atas limpahan rahmat, taufiq dan hidayah-Nya sehingga penulisan skripsi dengan judul “*Penyelesaian Persamaan k Bessel Menggunakan Metode Frobenius*” ini dapat diselesaikan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana sains dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Shalawat serta salam penulis haturkan kepada Nabi Muhammad Saw, keluarga, dan para sahabat beliau.

Penulis menyadari bahwa penulisan skripsi ini tidak akan selesai tanpa adanya bantuan dari beberapa pihak. Pada kesempatan kali ini penulis menyampaikan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Hj. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si, selaku dosen pembimbing I dan dosen wali yang telah banyak meluangkan waktunya demi memberikan bimbingan dan arahan dengan sabar dalam menyelesaikan skripsi ini dan selalu mendukung penulis untuk segera menyelesaikan skripsi ini.
5. Ach. Nasichuddin, M.A, selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan banyak arahan dan bimbingan kepada penulis.

6. Segenap Keluarga Besar Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen, terima kasih atas segenap ilmu dan bimbingannya.
7. Kedua orang tua penulis ayah Jupriadi dan ibu Eka surya iswanti, serta ayah Rojikan dan ibu Tukah yang tak pernah lelah memberikan doa, kasih sayang, semangat, serta motivasi kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
8. Seluruh teman-teman di Jurusan Matematika angkatan 2010, yang telah banyak membantu dan terima kasih atas kenangan-kenangan indah yang dirajut bersama dalam menggapai impian.
9. Seluruh teman-teman dan semua pihak yang tidak mungkin untuk dicantumkan namanya satu-persatu, terima kasih banyak atas segala bentuk bantuan dan dukungannya.

Semoga skripsi ini memberikan manfaat kepada pembaca khususnya bagi penulis secara pribadi.

Malang, November 2016

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PENGAJUAN	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	
HALAMAN MOTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	x
ABSTRAK	xii
ABSTRACT	xiii
ملخص	ix
 BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	4
1.3 Tujuan Penelitian	4
1.4 Manfaat Penelitian	4
1.5 Batasan Masalah	4
1.6 Metode Penelitian	5
1.7 Sistematika Penulisan	6
 BAB II KAJIAN PUSTAKA	
2.1 Simbol Pochhammer	7
2.2 Persamaan Bessel	10
2.3 Metode Deret Pangkat	15
2.4 Metode Frobenius	19
2.5 Penyelesaian Masalah dalam Al-Quran.....	29
 BAB III PEMBAHASAN	
3.1 Solusi Persamaan Bessel Menggunakan Metode Frobenius	33
3.2 Menganalisis Keabsahan Solusi Persamaan k Bessel dengan Menggunakan Program Maple	43
3.3 Kajian Keagamaan.....	44
 BAB IV PENUTUP	
4.1 Kesimpulan	46

4.2 Saran	46
DAFTAR RUJUKAN	47
LAMPIRAN-LAMPIRAN	
RIWAYAT HIDUP	



ABSTRAK

Asyiah, Suryani Aswatul. 2016. **Penyelesaian Persamaan k Bessel Menggunakan Metode Frobenius**. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si. (II) Ach. Nashichuddin, M.A.

Kata kunci : Fungsi k Gamma, simbol Pochhammer k , fungsi k Bessel, Metode Frobenius

Persamaan Bessel merupakan persamaan diferensial biasa yang mempunyai koefisien yang berupa variabel dan berorde dua. Fungsi Bessel merupakan penyelesaian persamaan Bessel. Salah satu metode untuk menyelesaikan persamaan Bessel adalah metode Frobenius. Metode Frobenius sangat efisien digunakan untuk mencari solusi persamaan diferensial dengan koefisien berupa fungsi.

Tujuan penelitian ini adalah menyelesaikan persamaan k Bessel menggunakan metode Frobenius. Solusi ini merupakan solusi yang ditransformasikan ke dalam deret pangkat. Kemudian akan menghasilkan persamaan Indisial, rumus rekursi ganjil dan genap, setelah itu diperoleh solusi persamaan k Bessel. Selanjutnya, menganalisis keabsahan solusi persamaan k Bessel menggunakan program Maple.

Penelitian ini menyimpulkan bahwa fungsi k Bessel yang telah diperoleh memenuhi persamaan k Besselnya dengan melihat hasil keabsahan sama dengan 0. Bagi penelitian selanjutnya disarankan untuk menyelesaikan teorema hubungan antara fungsi k Bessel dengan fungsi Bessel.

ABSTRACT

Asyiah, Suryani Aswatul. 2016. **Solution of k Bessel Equation Using Frobenius Method**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si. (II) Ach. Nashichuddin, MA

Keywords: k Gamma function, Pochhammer symbol k , k Bessel Function, Frobenius method.

Bessel equation is a second order ordinary differential equation that variable as its coefficient. Bessel function is a solution of Bessel equation. Method is one method to solve the Bessel equation is using Frobenius method. Frobenius method is highly efficient method used to solve differential equations with coefficients in the form of function.

The aim of this study is to solve k Bessel equation using Frobenius method. This solution is a solution that is transformed into power series. Then it will create Indisial equation, recursion formula odd and even. Then solution of Bessel equation. The next step is, analyzing the validity of the Bessel equation solution using the Maple.

This study concluded that the Bessel functions which have been obtained satisfies the Bessel equation by looking at the validity of equivalent equals to 0. For further research, it is recommended to complete the next theorem the functional relation between k Bessel function and Bessel function.

ملخص

عائشة، سورباني اسموتل. ٢٠١٦. العمل لمعادلر Bessel k باستخلا م طريقة Frobenius بعث جا معي. شعبة الرياضيات كلية العلوم والتكنولوجيا، الجامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج. المشرف: (١) اري كوسومستوي الماجستير (٢) احمد نصيح الدين الماجستير.

الكلمات الرئيسية: دالر Gamma، رمز k Pochhammer، دالة Bessel، طريقة Frobenius.

لمعادلة Bessel هي الثانية لكي العادية المعادلة التفاضلية التي متغيرة كما معامل لها. وظيفة Bessel هو حل Bessel المعادلة. الطريقة هي طريقة واحدة لحل معادلة Bessel تستخدم طريقة Frobenius. طريقة Frobenius هو طريقة فعالة للغاية المستخدمة في حل المعادلات التفاضلية مع معاملات في شكل وظيفة. والهدف من هذه الدراسة هو حل Bessel المعادلة باستخدام طريقة Frobenius. هذا الحل هو الحل الذي يتحول إلى سلسلة السلطة. ثم فإنه سيتم إنشاء معادلة Indisial، صيغة العودية الفردية والزوجية. ثم حل Bessel المعادلة. والخطوة التالية هي، وتحليل صلاحية حل معادلة Bessel باستخدام القيقب. وخلصت هذه الدراسة إلى أن وظائف Bessel التي تم الحصول عليها يرضي المعادلة Bessel من خلال النظر في صحة ما يعادل يساوي ٠. ولزيد من البحث، فمن المستحسن لاستكمال نظرية القادمة العلاقة الوظيفية بين وظيفة Bessel وظيفية.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Persamaan Bessel umumnya sering digunakan dalam masalah-masalah fisika dan teknik (Kusumah, 1989). Persamaan Bessel merupakan persamaan diferensial biasa yang mempunyai koefisien yang berupa variabel, dan berorde dua. Persamaan Bessel juga termasuk persamaan diferensial linier (Ault & Ayres, 1992). Fungsi Bessel merupakan penyelesaian dari persamaan Bessel. Fungsi Bessel terdiri dari dua jenis yaitu fungsi Bessel jenis pertama dan fungsi Bessel jenis kedua (Kusumah, 1989).

Metode Frobenius sangat efisien digunakan untuk mencari solusi persamaan diferensial dengan koefisien berupa fungsi. Metode Frobenius banyak digunakan dalam mencari solusi dari penerapan persamaan diferensial diantaranya persamaan Bessel, penyebaran suhu dalam tabung, persamaan Laguerre yang digunakan dalam mekanika kuantum dari atom hidrogen dan persamaan hipergeometrik dari gauss (Nagy, 2012).

Abdussakir (2007) menyatakan bahwa semua yang ada di alam ini ada ukurannya, ada hitung-hitungannya, ada rumusnya, atau ada persamaannya. Pada dasarnya manusia tidak dapat membuat rumus sedikitpun, mereka hanya menemukan rumus atau persamaan. Dalam pemodelan matematika, ilmuan hanya mencari persamaan-persamaan atau rumus-rumus yang berlaku pada fenomena, sehingga ditemukannya suatu model matematika. Sebagaimana Allah Swt berfirman di dalam surat al-Qamar ayat 49:

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَاهُ بِقَدَرٍ ﴿١٨٥﴾

“*Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran*”.

Ayat ini menjelaskan bahwa semua yang ada di alam ini, ada ukurannya, ada hitungannya, ada rumusnya, atau ada persamaannya. Berdasarkan uraian manfaat dari persamaan Bessel yaitu dapat dihitung sangat mudah dengan menggunakan metode Frobenius. Seperti firman Allah dalam surat al-Baqarah ayat 185:

شَهْرُ رَمَضَانَ الَّذِي أُنزِلَ فِيهِ الْقُرْآنُ هُدًى لِّلنَّاسِ وَبَيِّنَاتٍ مِّنَ الْهُدَىٰ وَالْفُرْقَانِ ۚ فَمَنْ شَهِدَ مِنْكُمُ الشَّهْرَ فَلْيَصُمْهُ ۗ وَمَنْ كَانَ مَرِيضًا أَوْ عَلَىٰ سَفَرٍ فَعِدَّةٌ مِّنْ أَيَّامٍ أُخَرَ ۗ يُرِيدُ اللَّهُ بِكُمُ الْيُسْرَ وَلَا يُرِيدُ بِكُمُ الْعُسْرَ وَلِتُكْمِلُوا الْعِدَّةَ وَلِتُكَبِّرُوا اللَّهَ عَلَىٰ مَا هَدَاكُمْ وَلَعَلَّكُمْ تَشْكُرُونَ ﴿١٨٥﴾

“(Beberapa hari yang ditentukan itu ialah) bulan Ramadhan, bulan yang di dalamnya diturunkan (permulaan) al-Quran sebagai petunjuk bagi manusia dan penjelasan-penjelasan mengenai petunjuk itu dan pembeda (antara yang hak dan yang bathil). Karena itu, barangsiapa di antara kamu hadir (di negeri tempat tinggalnya) di bulan itu, maka hendaklah ia berpuasa pada bulan itu, dan barangsiapa sakit atau dalam perjalanan (lalu ia berbuka), maka (wajiblah baginya berpuasa), sebanyak hari yang ditinggalkannya itu, pada hari-hari yang lain. Allah menghendaki kemudahan bagimu, dan tidak menghendaki kesukaran bagimu dan hendaklah kamu mencukupkan bilangannya dan hendaklah kamu mengagungkan Allah atas petunjuk-Nya yang diberikan kepadamu, supaya kamu bersyukur”.

Ayat tersebut menyebutkan bahwa Allah menghendaki kemudahan bagi umat manusia dan tidak menghendaki kesukaran. Jika Allah menghendaki kemudahan bagi umat-Nya, maka manusia pun menghendaki kemudahan bagi diri sendiri dan bagi orang lain. Dengan demikian, maka harapan penulis dapat mempermudah penulis untuk menyelesaikan permasalahan matematis serta dapat menemukan metode yang lebih sederhana dalam menyelesaikan permasalahan tersebut.

Penelitian ini dilakukan dengan merujuk pada beberapa penelitian sebelumnya. Pertama, pada penelitian Sangadji (2009) yang membahas tentang solusi persamaan diferensial linear tingkat dua di titik regular singular dengan deret pangkat. Metode untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa di titik ordinary dengan deret pangkat dikenal sebagai metode Frobenius. Langkah-langkah penyelesaiannya adalah pertama, menentukan y dan turunan-turunannya terhadap deret pangkat. Kedua, mencari akar-akar persamaan Indisial. Ketiga, menentukan persamaan rekursi. Oleh karena itu, bila solusi eksak persamaan diferensial biasa di titik regular singular $x = 0$ sulit atau tidak mungkin diperoleh, maka solusi dapat diperoleh dengan deret pangkat.

Kedua, pada penelitian Gehlot (2014) yang membahas tentang persamaan diferensial fungsi k Bessel beserta jenis-jenisnya. Penelitian Gehlot ada 4 teorema yang dibuktikan. Teorema pertama, memperkenalkan cara menyelesaikan fungsi k Bessel menggunakan metode Frobenius, teorema kedua, menjelaskan hubungan antara fungsi k Bessel dan fungsi Bessel, teorema ketiga, menyelesaikan bilangan bulat negatif, dan teorema keempat fungsi umum untuk fungsi k Bessel.

Dari penelitian Gehlot (2014) penulis ingin menelaah teorema pertama bagaimana menyelesaikan fungsi k Bessel menggunakan metode Frobenius. Selanjutnya, hasil dari penyelesaian fungsi k Bessel peneliti akan dianalisis keabsahannya. Sehingga hasil penelitian ini dapat diketahui keabsahannya.

Dari urgensi tersebut, penelitian ini difokuskan untuk memperoleh solusi analitik persamaan k Bessel menggunakan metode Frobenius. Oleh karena itu,

penulis akan melakukan penelitian dengan tema “*Penyelesaian Persamaan k Bessel Menggunakan Metode Frobenius*”.

1.2 Rumusan Masalah

Masalah yang dibahas dalam penelitian ini, yaitu:

1. Bagaimana solusi Persamaan k Bessel Menggunakan metode Frobenius?
2. Bagaimana analisis keabsahan solusi Persamaan k Bessel dengan Menggunakan metode Frobenius?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan yang ingin dicapai dalam penelitian ini, yaitu:

1. Mengetahui solusi Persamaan k Bessel Menggunakan metode Frobenius.
2. Mengetahui analisis keabsahan solusi Persamaan k Bessel dengan Menggunakan metode Frobenius.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat penelitian ini adalah untuk memahami prosedur metode Frobenius dalam penyelesaian persamaan k Bessel dan mengetahui keabsahan solusi persamaan k Bessel.

1.5 Batasan Masalah

Adapun dalam penelitian ini menggunakan persamaan k Bessel yaitu:

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dy}{dz} + \frac{1}{k^2} \left(k - \frac{v^2}{z^2}\right) y = 0,$$

dengan k adalah simbol Pochhammer dan $k \in R^+, v \in I$ dan $v > -k$ (Gehlot, 2014).

1.6 Metode Penelitian

Adapun tahapan-tahapan yang dilakukan dalam penulisan skripsi ini merujuk pada Gehlot (2004) adalah sebagai berikut:

1. Mendefinisikan persamaan Bessel.
2. Mentransformasi persamaan Bessel ke dalam bentuk deret dengan

$$\text{memisalkan } y = \sum_{r=0}^{\infty} a_r z^{m+r}.$$

3. Mensubstitusikan turunan pertama dan kedua deret ke dalam persamaan Bessel.
4. Menentukan persamaan Indisial dengan memisalkan $m+r-2=0$. Pada langkah ini, diasumsikan $r=0$.
5. Menentukan rumus rekursi ganjil dan genap
 - a. Rumus rekursi ganjil (diasumsikan $m+r-2=0$ dan $r=3,5,7,\dots$).
 - b. Rumus rekursi genap (diasumsikan $m+r-2=0$ dan $r=2,4,6,\dots$).
6. Menggabungkan rumus rekursi ganjil dan genap ke dalam deret

$$y = \sum_{r=0}^{\infty} a_r z^{m+r}.$$

7. Diketahui $a_0 = \frac{1}{(2k)^v \Gamma\left(\frac{v}{k} + r\right)}$.

8. Diperoleh hasil persamaan k Bessel.

9. Menganalisis keabsahan solusi fungsi k Bessel menggunakan program Maple.
10. Mengkaji ayat-ayat yang terkait dengan persamaan k Bessel.

1.7 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan yang digunakan dalam skripsi ini, yaitu:

Bab I Pendahuluan

Pada bab ini diuraikan tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II Kajian Pustaka

Pada bab ini penulis menjelaskan tentang Simbol Pochhammer, persamaan Bessel, metode deret pangkat, metode Frobenius, dan Penyelesaian masalah dalam al-Quran.

Bab III Pembahasan

Pada bab ini dijabarkan tentang hasil solusi persamaan k Bessel, menganalisis keabsahan solusi persamaan k Bessel, serta kajian keagamaan.

Bab IV Penutup

Pada bab ini tentang kesimpulan dan saran.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Simbol Pochhammer

Simbol Pochhammer diperkenalkan oleh Leo August Pochhammer yaitu dengan notasi $(x)_n$, dimana n bilangan bulat tak negatif. Simbol Pochhammer terdapat faktorial naik atau faktorial turun. Simbol Pochhammer digunakan $(x)_n$ dengan

kata lain yang disebut juga koefisien binomial $\binom{x}{n}$. Simbol Pochhammer $(x)_n$ digunakan untuk faktorial turun yaitu :

$$x_n = x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1) \quad (2.1)$$

Sedangkan faktorial naik yaitu :

$$x^n = x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1) \quad (2.2)$$

Fungsi khusus (fungsi hipergeometrik) simbol pochhammer $(x)_n$ digunakan sebagai faktorial naik. Dimana x adalah bilangan bulat tidak negatif, maka $(x)_n$ diberikan nilai permutasi n pada anggota x atau jumlah ekuivalen fungsi injektif dari satu himpunan n ke himpunan x . Untuk mendefinisikan notasi yang lain seperti ${}_xP_n$ dan $P(x,n)$ yang selalu digunakan. Simbol Pochhammer sebagian besar menggunakan aljabar. Misal x adalah tak tentu yang mana $(x)_n$ menunjukkan polinomial derajat n . Faktorial naik dan faktorial turun dapat dinyatakan dengan koefisien binomial yaitu :

$$\frac{x^{(n)}}{n!} = \binom{x+n-1}{n} \text{ dan } \frac{(x)_n}{n!} = \binom{x}{n}. \quad (2.3)$$

Koefisien binomial membawa ke faktorial turun dan faktorial naik. Faktorial naik dapat dinyatakan sebagai faktorial turun yang dimulai dari ujung yang lain,

$$x^{(n)} = (x+n-1)_n \quad (2.4)$$

Atau sebagai faktorial turun dengan argumen yang berlawanan,

$$x^{(n)} = (-1)^n (-x)_n \quad (2.5)$$

Faktorial naik dan turun didefinisikan dalam setiap unital ring. Oleh karena itu, x dapat diambil. Misalnya, bilangan kompleks, termasuk bilangan bulat negatif, polinomial dengan koefisien kompleks, atau fungsi bernilai kompleks. Faktorial naik dapat dinyatakan dengan nilai-nilai nyata dengan n menggunakan fungsi Gamma x dan $x+n$ adalah bilangan kompleks yang tidak bilangan bulat negatif.

$$x^{(n)} = \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)} \quad (2.6)$$

dan demikian juga faktorial turun

$$(x)_n = \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x-n+1)} \quad (2.7)$$

Jika D menunjukkan diferensiasi terhadap x , maka

$$D^n(x^n) = (a)_n x^{a-n} \quad (2.8)$$

Simbol Pochhammer juga integral yang didefinisikan fungsi hipergeometrik.

Fungsi hipergeometrik didefinisikan $|z| < 1$ oleh deret pangkat

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{(n)} b^{(n)}}{c^{(n)}} \frac{z^n}{n!} \quad (2.9)$$

untuk c tidak sama dengan $0, -1, -2, \dots$.

Definisi simbol k Pochhammer dan fungsi Gamma k .

Definisi 1 : $x \in C, k \in R$ dan $n \in N^+$, simbol k Pochhammer diberikan oleh

$$(x)_{n,k} = x(x+k)(x+2k)\dots(x+(n-1)k) \quad (2.10)$$

Diperoleh $s, n \in \mathbb{N}$ dengan $0 \leq s \leq n$, fungsi dasar simetri $\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq n} x_{i_1} \dots x_{i_s}$ pada

variabel x_1, \dots, x_n dinotasikan oleh $e_s^n(x_1, \dots, x_n)$.

Definisi 2 : Untuk $k > 0$, fungsi gamma k Γ_k diberikan oleh

$$\Gamma_k(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! k^n (nk)^{\frac{x}{k}-1}}{(x)_{n,k}}, x \in \mathbb{C} \setminus k\mathbb{Z}^- \quad (2.11)$$

Proposisi 1 : untuk $x \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(x) > 0$, maka $\Gamma_k(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-\frac{t^k}{k}} dt$.

Bukti. Definisi 2 :

$$\Gamma_k(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-\frac{t^k}{k}} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{1}{k}} \left(1 - \frac{t^k}{nk}\right)^n t^{x-1} dt \quad (2.12)$$

Misalkan $A_{n,i}(x), i = 0, \dots, n$, diberikan oleh $A_{n,i}(x) = \int_0^{\frac{1}{k}} \left(1 - \frac{t^k}{nk}\right)^i t^{x-1} dt$. Rumus

rekursif berikut ini yang terbukti menggunakan integrasi dengan bagian

$A_{n,i}(x) = \frac{i}{nx} A_{n,i-1}(x+k)$ juga $A_{n,0}(x) = \int_0^{\frac{1}{k}} t^{x-1} dt = \frac{(nk)^{\frac{x}{k}}}{x}$. Oleh karena itu,

$A_{n,n}(x) = \frac{n! k^n (nk)^{\frac{x}{k}-1}}{(x)_{n,k} \left(1 + \frac{x}{nk}\right)}$, dan $\Gamma_k(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_{n,n}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! k^n (nk)^{\frac{x}{k}-1}}{(x)_{n,k}}$ (Diaz dan

Pariguan, 2007)

2.2 Persamaan Bessel

Banyak sekali masalah-masalah fisika dan teknik yang membutuhkan penyelesaian persamaan Bessel. Persamaan Bessel dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2)y = 0, \quad (2.13)$$

Dengan n adalah suatu tetapan.

Persamaan ini dikenal dalam pustaka sebagai *persamaan diferensial Bessel*.

(Pipes, 1991)

Definisi 1:

Tingkat atau orde dari suatu persamaan diferensial adalah tingkat tertinggi dari turunan dalam persamaan Bessel (Ault dan Ayres, 1992).

Tingkat atau orde dari suatu persamaan Bessel adalah tingkat tertinggi dari turunan dalam persamaan tersebut. Jika dilihat dari persamaan

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2)y = 0, \text{ maka persamaan Bessel merupakan persamaan}$$

diferensial biasa orde dua.

Definisi 2 :

Persamaan diferensial Bessel dikatakan linier jika variabel terikat dan turunan berpangkat satu dengan koefisien konstanta atau koefisien yang tergantung pada variabel bebasnya. Jika variabel terikatnya atau turunannya berpangkat lebih dari satu dengan koefisien konstanta atau koefisien yang tergantung pada variabel bebasnya maka dikatakan tidak linier (Ault dan Ayres, 1992).

Bentuk umum PD linier orde dua dengan koefisien konstan adalah: $ay'' + by' + cy = f(x)$ dengan a, b , dan c konstanta. Bila $f(x) = 0$ maka $ay'' + by' + cy = 0$ disebut PD linear orde dua homogen, sedangkan bila $f(x) \neq 0$ maka disebut PD linear orde dua tak homogen (Mursita, 2009).

Untuk mencari solusi analitik dari persamaan diferensial Bessel digunakan suatu metode yang dikenal dengan metode Frobenius adalah metode penyelesaian suatu persamaan diferensial dengan memisalkan solusi berbentuk deret pangkat (Kreyszig, 1979). Persamaan Bessel yaitu :

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \quad (2.14)$$

dimana parameter $\nu(nu)$ adalah bilangan real yang positif atau nol. Maka akan diselesaikan sebagai berikut:

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r} \quad (a_0 \neq 0) \quad (2.15)$$

Mensubstitusikan turunan pertama dan kedua dari persamaan (2.15) dalam persamaan Bessel, maka

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1)a_m x^{m+r} + \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)a_m x^{m+r} + \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r+2} - \nu^2 \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r} = 0.$$

Diketahui jumlah dari koefisien $x^{s+r} = 0$ dengan pangkat x^{s+r} sama dengan $m = s$. Dalam uraian pertama $s = 0$, uraian kedua $s = 1$, dan uraian ketiga $m = s - 2$. Oleh karena itu, untuk uraian ketiga tidak berkontribusi sejak $m \geq 0$. Untuk $s = 2, 3, \dots$ semua uraian berkontribusi, sehingga didapatkan solusi umum untuk semua s yaitu :

$$a. \quad r(r-1)a_0 + ra_0 - \nu^2 a_0 = 0 \quad (s = 0) \quad (2.16)$$

$$b. \quad (r+1)ra_1 + (r+1)a_1 - v^2a_1 = 0 \quad (s=1) \quad (2.17)$$

$$c. \quad (s+r)(s+r-1)a_s + (s+r)a_s + a_{s-2} - v^2a_s = 0 \quad (s=2,3,\dots) \quad (2.18)$$

Untuk (2.16) diperoleh persamaan Indisial dengan menurunkan a_0 ,

$$\begin{aligned} r(r-1)a_0 + ra_0 - v^2a_0 &= 0 \\ r^2 - r + r - v^2 &= 0 \\ r^2 - v^2 &= 0 \\ (r+v)(r-v) &= 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

Jadi persamaan Indisial, $r_1 = v$ dan $r_2 = -v$.

Koefisien rekursi untuk $r = r_1 = v$. Untuk $r = v$ pada persamaan (2.17). Untuk $a_1 = 0$ pada saat $v \geq 0$.

$$\begin{aligned} (r+1)ra_1 + (r+1)a_1 - v^2a_1 &= 0 \\ (v+1)va_1 + (v+1)a_1 - v^2a_1 &= 0 \\ (v^2 + v + v + 1 - v^2)a_1 &= 0 \\ (2v+1)a_1 &= 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

Substitusikan $r = v$ pada persamaan (2.18) dan gabungkan yang terdapat a_s maka diperoleh :

$$\begin{aligned} (s+r)(s+r-1)a_s + (s+r)a_s + a_{s-2} - v^2a_s &= 0 \\ (s+v)(s+v-1)a_s + (s+v)a_s + a_{s-2} - v^2a_s &= 0 \\ (s^2 + sv - s + sv + v^2 - v + s + v - v^2)a_s + a_{s-2} &= 0 \\ (s^2 + 2sv)a_s + a_{s-2} &= 0 \\ (s + 2v)sa_s + a_{s-2} &= 0 \end{aligned} \quad (2.21)$$

Karena $a_1 = 0$ dan $v \geq 0$ maka dari persamaan (2.21) diperoleh koefisien ganjil $a_3 = 0, a_5 = 0, \dots$. Oleh karena itu, untuk mencari a_s koefisien genap dengan $s = 2m$. Sehingga pada persamaan (2.21) diperoleh

$$\begin{aligned}(s + 2v)sa_s + a_{s-2} &= 0 \\ (2m + 2v)2ma_{2m} + a_{2m-2} &= 0\end{aligned}\tag{2.22}$$

Penyelesaian a_{2m} dapat memperoleh rumus rekursi yaitu :

$$\begin{aligned}(s + 2v)sa_s + a_{s-2} &= 0 \\ (2m + 2v)2ma_{2m} + a_{2m-2} &= 0 \\ a_{2m} &= -\frac{a_{2m-2}}{(2m + 2v)2m} \\ a_{2m} &= -\frac{a_{2m-2}}{2^2 m(m + v)} \quad m = 1, 2, \dots\end{aligned}\tag{2.23}$$

Dari persamaan (2.23) dapat ditentukan a_2, a_4, \dots maka diperoleh

$$\begin{aligned}a_{2m} &= -\frac{a_{2m-2}}{2^2 m(m + v)} \\ a_{2(1)} &= -\frac{a_{2 \cdot 1 - 2}}{2^2 1(1 + v)}\end{aligned}\tag{2.24}$$

$$\begin{aligned}a_2 &= -\frac{a_0}{2^2(1 + v)} \\ a_{2(2)} &= -\frac{a_{2 \cdot 2 - 2}}{2^2 2(2 + v)} \\ a_4 &= -\frac{a_2}{2^2 2(2 + v)}\end{aligned}\tag{2.25}$$

$$a_4 = -\frac{a_0}{2^4 2!(v+1)(v+2)}$$

Jadi, secara umum dapat diperoleh rumus

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m} m!(v+1)(v+2)\dots(v+m)}, \quad m = 1, 2, \dots\tag{2.26}$$

Fungsi Bessel $J_n(x)$ untuk bulangan bulat $v = n$

Nilai bilangan bulat ν dinotasikan terhadap n . Untuk $\nu = n$ pada persamaan (2.26) menjadi

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m} m!(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}, \quad m=1, 2, \dots \quad (2.27)$$

a_0 berubah-ubah. Sehingga persamaan (2.15) dengan koefisien akan memuat faktor a_0 yang berubah-ubah. a_0 yang berubah-ubah akan tidak mudah untuk menjadikan fungsi-fungsi baru. Maka dimisalkan $a_0 = 1$. Persamaan (2.15) dapat diperoleh jika $(n+1)(n+2)\cdots(n+m)$ menjadi fungsi faktorial $n+m!$

$$a_0 = \frac{1}{2^n n!} \quad (2.28)$$

Karena $n!(n+1)\cdots(n+m) = (n+m)!$ pada persamaan (2.27), maka persamaan (2.27) dapat disederhanakan menjadi

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m+n} m!(n+m)!}, \quad m=1, 2, \dots \quad (2.29)$$

Koefisien dimasukkan ke dalam (2.15) dan ingat bahwa $c_1 = 0, c_3 = 0, \dots$ maka diperoleh solusi khusus persamaan Bessel yang dinotasikan oleh $J_n(x)$ yaitu :

$$J_n(x) = x^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+n} m!(n+m)!} \quad (n \geq 0) \quad (2.30)$$

$J_n(x)$ disebut *fungsi Bessel jenis pertama* pada orde n . Persamaan (2.30) konvergen untuk semua x (Kreyszig, 1979).

2.3 Metode Deret Pangkat

Metode deret pangkat adalah metode untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa linier dengan koefisien variabel. Deret pangkat dapat digunakan untuk menghitung nilai, menggambar grafik, membuktikan rumus, dan menjelajahi sifat dari solusi (Kreyszig, 1979). Dalam menyelesaikan persamaan diferensial dengan bantuan deret, perlu diketahui pengertian indeks dan penggunaannya dalam notasi sigma suatu deret. Di bawah ini disajikan penjelasan sepintas beserta beberapa contoh penggunaannya dalam penyelesaian persamaan diferensial. Perhatikan deret sederhana yang ditulis dengan

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n \quad (2.31)$$

Deret terhingga ini dapat dinyatakan dengan

$$\sum_{i=0}^n a_i \quad (2.32)$$

yang dibaca: *Jumlah dari semua suku yang mengandung bentuk a_i , dengan i dari 0 hingga n .* Dalam bentuk ini $i=0$ dinamakan batas bawah, sedangkan n dinamakan batas atas. Jika deret tersebut diganti menjadi $a_0 + a_1 + a_3 + \dots$ maka notasi sigma yang dapat digunakan adalah $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$. Batas atasnya berubah menjadi

∞ . Berikut ini terdapat beberapa deret:

1. $\sum_{i=0}^n (i+1) = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + n(n+1)$
2. $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x_i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$
3. $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

$$4. \sum_{k=1}^6 b_k = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_6$$

$$5. \sum_{j=0}^5 x_{j+3} = x_3 + x_4 + x_5 + \dots + j_8$$

Berikut ini terdapat 2 sifat penting notasi sigma. Pembuktiannya dapat diperlihatkan dengan menulis tiap-tiap suku pada tiap-tiap ruas persamaan tersebut.

$$a. \sum_{i=0}^n a_i + \sum_{i=0}^n b_i = \sum_{i=0}^n (a_i + b_i)$$

$$b. k \sum_{i=0}^n a_i = \sum_{k=0}^n k a_i,$$

k = konstanta dan notasi sigma yang akan digunakan dalam penyelesaian persamaan diferensial dengan bantuan deret adalah

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x_i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots \quad (2.33)$$

Misalkan terdapat sebuah deret yang dinyatakan dengan

$$\sum_{i=1}^{\infty} i a_i x^i \quad (2.34)$$

Batas bawah deret (2.34) adalah 0, sedangkan batas atasnya ∞ . Jika dijabarkan deret tersebut menjadi $a_1 + 2a_2 x^2 + 3a_3 x^3 + \dots + i a_i x^i$. Perubahan batas, baik batas bawah maupun batas atas, harus memberikan deret yang sama pula. Dengan demikian jika diubah batas bawah deret (2.34), dengan suatu batas lain, maka nilai jumlah deret itu harus tetap, dalam arti tetap sama dengan $a_1 + 2a_2 x^2 + 3a_3 x^3 + \dots + i a_i x^i$. Misalkan batas bawahnya diganti dengan nol. Maka artinya dapat diubah i menjadi $i+1$, sebab $i+1=1$ menghasilkan $i=0$.

Pengubahan i menjadi $i+1$ ini harus diikuti oleh perubahan i dimanapun i berada pada deret tersebut. Dengan demikian hasil perubahan tersebut memberikan $\sum_{i=0}^{\infty} (i+1)a_{i+1}x^{i+1}$ dapat pula melakukan perubahan dengan cara lain, yaitu mengubah batas bawahnya, misal dari $i=0$ menjadi $i=2$, tanpa mengubah i pada deret itu. Perhatikan deret:

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i (x-x_0)^i$$

Suku pertama dari deret (2.35) adalah a_0 . Suku keduanya adalah $a_1(x-x_0)$. Dapat diubah batas bawah deret menjadi $i=2$, sehingga bentuknya menjadi $a_0 + a_1(x-x_0) + \sum_{i=2}^{\infty} a_i(x-x_0)^i$. i selain yang tertera pada indeks tidak berubah.

Berikut ini sebuah deret dengan rumus:

$$\sum_{i=0}^{\infty} i(i-1)a_i x^{i-2} \quad (2.36)$$

Misalkan ingin mengubah deret (2.36) menjadi deret lain yang sama namun x^{i-2} berubah menjadi x^i . Untuk itu kita ganti setiap pada deret (2.35) menjadi $i+2$. Penggantian i menjadi $i+2$ mengubah pada batas bawah. Hasilnya adalah:

$$\sum_{i+2=2}^{\infty} (i+2)(i+2-1)a_{i+2}x^{(i+2)-2} \quad (2.37)$$

atau dalam bentuk sederhana

$$\sum_{i=0}^{\infty} (i+2)(i+1)a_{i+2}x^i \quad (2.38)$$

Dapat diperiksa bahwa

$$\sum_{i=0}^{\infty} (i+2)(i+1)a_{i+2}x^i = \sum_{i=0}^{\infty} i(i-1)a_i x^{i-2} \quad (2.39)$$

Sekarang perhatikan deret yang dinyatakan dengan

$$x \sum_{i=0}^{\infty} i(i-1)a_i x^{i-1} \quad (2.40)$$

Pertama-tama masukkan x ke dalam sigma, sehingga hasilnya

$$\sum_{i=0}^{\infty} i(i-1)a_i x^i \quad (2.41)$$

Dalam menyelesaikan persamaan diferensial dengan bantuan deret akan banyak dibutuhkan operasi-operasi yang berhubungan dengan konsep deret.

Teorema 1:

Setiap bentuk persamaan diferensial

$$y'' + \frac{a(x)}{x} y' + \frac{b(x)}{x^2} y = 0 \quad (2.42)$$

dimana fungsi $a(x)$ dan $b(x)$ analitik di $x=0$, mempunyai paling sedikit satu solusi yang dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$y(x) = x^s (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_l x^l + \dots) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l x^{s+l} \quad (2.43)$$

Dimana s merupakan sembarang bilangan (riil atau kompleks) dan dipilih sedemikian sehingga $a_0 \neq 0$ (Kreyszig, 1979).

Definisi 1:

Deret pangkat adalah deret tidak terhingga dalam bentuk

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m (x-a)^m = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots \quad (2.44)$$

dimana x, a , dan koefisien-koefisien c_0, c_1, c_2, \dots adalah bilangan riil (Kreyszig, 1979).

2.4 Metode Frobenius

Dalam bagian ini akan mencoba membicarakan cara-cara menyelesaikan persamaan diferensial yang koefisiennya merupakan fungsi polinom. Metode ini digunakan dengan bantuan deret. Berlainan halnya dengan cara-cara penyelesaian yang dilaksanakan dengan bantuan deret Taylor, metode yang akan dikembangkan ini lebih mudah langkah-langkah penyelesaiannya.

$$a_0(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_2(x) y = 0 \quad (2.45)$$

tergolong persamaan diferensial homogen. Banyak sekali persamaan yang dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan (2.45). Dalam masalah-masalah fisika, misalnya terdapat persamaan Bessel dan persamaan Legendre, yang dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan (2.45). Kedua persamaan ini ditulis sebagai berikut:

- a. Persamaan Bessel

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - v^2) y = 0, \quad v \text{ konstanta}$$

- b. Persamaan Legendre

$$(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} + 2x \frac{dy}{dx} + \alpha(\alpha + 1) y = 0, \quad \alpha \text{ konstanta}$$

Nampak dengan jelas bahwa kedua persamaan ini mempunyai bentuk yang sama dengan persamaan (2.45). Selain itu fungsi-fungsi $a_0(x), a_1(x)$, dan $a_2(x)$ dalam

kedua persamaan ini tergolong fungsi polinom. Sekarang persamaan (2.45) diubah bentuknya, sehingga $\frac{dy}{dx}$ menjadi lambang pokok formula.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y}{a_0(x)}. \quad (2.46)$$

Jika fungsi-fungsi $a_0(x)$, $a_1(x)$, dan $a_2(x)$ mempunyai $x - x_0$ sebagai faktor persekutuan, diasumsikan bahwa faktor persekutuan ini telah dihilangkan dari persamaan (2.46). Oleh karena itu, jika $a_0(x) = 0$, maka sekurang-kurangnya salah satu dari $a_1(x)$ dan $a_2(x)$ ada yang tidak sama dengan nol.

Jika misal sebuah nilai k sedemikian rupa sehingga berlaku $a_0(k) = 0$, maka $x = k$ dinamakan titik singular dari persamaan diferensial (2.45). Nilai lain selain $x = k$ dinamakan titik biasa.

Persamaan diferensial tidak mempunyai penyelesaian dalam bentuk $\sum_{i=0}^{\infty} a_i(x - x_0)^i$

. Oleh karena itu, perlu mencari jalan lain yang berbeda, yang dapat digunakan untuk memecahkan jenis penyelesaian tersebut. Untuk itu diubah dalam bentuk persamaan (2.46) menjadi

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0 \quad (2.47)$$

dengan $p(x) = \frac{a_1(x)}{a_0(x)}$ dan $q(x) = \frac{a_2(x)}{a_0(x)}$. Bentuk persamaan diferensial yang

dinyatakan dalam persamaan (2.47) dinamakan bentuk normal. Misalkan salah satu di antara p dan q atau kedua-duanya tidak analitis pada x_0 , demikian sehingga x_0 merupakan titik singular dari persamaan (2.47). Jika fungsi-fungsi

yang didefinisikan dalam bentuk perkalian keduanya analitis pada x_0 , maka x_0 disebut titik singular teratur dari persamaan diferensial (2.45). Jika salah satu dari p dan q atau kedua-duanya tak analitis pada x_0 , maka x_0 disebut titik singular tak teratur dari persamaan diferensial (2.45).

Bila persamaan diferensial berbentuk : $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ maka didefinisikan:

1. Titik x_0 disebut titik ordiner dari persamaan diferensial diatas jika $P(x)$ dan $Q(x)$ analitik pada $x = x_0$. Jika salah satu atau kedua fungsi tersebut tidak analitik di $x = x_0$ maka x_0 disebut titik singular.
2. Titik x_0 disebut titik singular teratur dari persamaan diferensial di atas, jika x_0 titik singular dari persamaan diferensial dan fungsi $(x = x_0)P(x)$ dan $(x = x_0)^2 Q(x)$ analitik di x_0 .

catatan : koefisien dari y'' harus sama dengan 1.

Contoh 1:

1. Persamaan diferensial $y''-xy'+2y=0$; selidiki di sekitar $x=0$.

$$\left. \begin{array}{l} P(x) = -x \\ Q(x) = 2 \end{array} \right\} \text{merupakan fungsi-fungsi polynomial yang analitik dimana-mana,}$$

$x=0$ merupakan titik analitik.

2. Persamaan diferensial $(x^2 - 4)y''+y=0$; di $x=2$

$P(x)=0$ adalah analitik dimana-mana

$Q(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$ maka $Q(x) = \frac{1}{0}$ tidak analitik

$x=2$ merupakan titik singular

3. Persamaan diferensial $2x^2 y''+7x(x+1)y'-3y=0$; di titik $x=0$.

$$\left. \begin{aligned} P(x) &= \frac{7x(x+1)}{2x^2} = \frac{7(x+1)}{2x} = P(0) = \frac{7}{0} \\ Q(x) &= \frac{-3}{2x^2} = Q(0) = \frac{-3}{0} \end{aligned} \right\} \text{tidak analitik di } x=0.$$

$x=0$ titik singular karena

$$\left. \begin{aligned} (x-0)P(x) &= \frac{7}{2}(x+1) \\ (x-0)^2 Q(x) &= \frac{-3}{2} \end{aligned} \right\} \text{analitik}$$

Maka $x=0$ merupakan titik singular teratur.

Teorema 1:

Misalkan titik x_0 merupakan titik singular teratur dari persamaan diferensial

$$a_0(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_2(x)y = 0 \quad (2.48)$$

maka persamaan diferensial (2.48) mempunyai paling sedikit sebuah penyelesaian non trivial dalam bentuk

$$|x - x_0|^r \sum_{i=0}^{\infty} a_i (x - x_0)^i \quad (2.49)$$

dengan r sebagai konstanta bilangan real atau kompleks yang dapat ditentukan dan penyelesaian ini berlaku dalam selang $0 < |x - x_0| < R$ (dengan $r > 0$) di titik x_0 .

Contoh 2:

Diketahui bahwa $x = -1$ termasuk titik singular teratur dari persamaan

$$3x^2(x+1)^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 5(x+1) \frac{dy}{dx} + (x-3)y = 0.$$

mempunyai sebuah Dengan demikian, persamaan tersebut penyelesaian non trivial dalam bentuk

$$|x+1|^r \sum_{i=0}^{\infty} a_i (x+1)^i,$$

Yang berlaku untuk selang $0 < |x+1| < R$ di titik $x = -1$. Cara menentukan koefisien a_1 dan bilangan r dalam penyelesaian (8). Penyelesaian ini merupakan penyelesaian di titik singular teratur x_0 dari persamaan diferensial

$$a_0(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_2(x) y = 0.$$

Prosedur ini hampir serupa dengan cara-cara yang dilakukan pada waktu mencari titik-titik singular teratur. Metode ini dinamakan metode Frobenius (Kusumah, 1989)

Metode Frobenius adalah metode untuk memecahkan persamaan diferensial linier dengan koefisien variabel. Namun, metode Frobenius berlaku untuk persamaan yang lebih umum yang metode deret pangkat tidak bekerja lagi seperti persamaan Bessel (Kreyszig, 1999).

Teorema 2: Metode Frobenius

Setiap bentuk persamaan diferensial

$$y'' + \frac{b(x)}{x} y' + \frac{c(x)}{x^2} y = 0 \quad (2.50)$$

Dimana fungsi $b(x)$ dan $c(x)$ adalah analitik pada $x = 0$, mempunyai paling sedikit satu solusi yang dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$y(x) = x^r \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = x^r (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots) \quad (a_0 \neq 0) \quad (2.51)$$

dimana r merupakan sembarang bilangan (riil atau kompleks) dan dipilih sedemikian sehingga $(a_0 \neq 0)$ (Kreyszig, 1999). Dalam metode Frobenius akan

dicari penyelesaian yang berlaku dalam selang $0 < |x - x_0| < R$. (selanjutnya, penulisan $|x - x_0|$ ditulis dengan $x - x_0$ saja).

Misalkan x_0 adalah titik singular teratur dari persamaan diferensial (2.48).

Cari penyelesaian yang berlaku dalam selang $0 < x - x_0 < R$ dan diasumsikan bahwa terdapat penyelesaian

$$y = (x - x_0)^r \sum_{i=0}^{\infty} a_i (x - x_0)^i \quad (2.52)$$

Dalam bentuk penyelesaian (2.49) dengan $a_i \neq 0$. Ditulis persamaan ini dalam bentuk

$$y = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (x - x_0)^{i+r} \quad \text{dengan } a_i \neq 0 \quad (2.53)$$

Turunan pertama dan kedua dari y dalam persamaan (2.53) adalah

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{i=0}^{\infty} (i+r) a_i (x - x_0)^{i+r-1} \quad (2.54)$$

dan

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{i=0}^{\infty} (i+r)(i+r-1) a_i (x - x_0)^{i+r-2} \quad (2.55)$$

Substitusikan deret (2.53), (2.54), dan (2.55) dalam persamaan diferensial (2.48), sehingga diperoleh persamaan dalam bentuk

$$K_0 (x - x_0)^{r+k} + K_1 (x - x_0)^{r+k+1} + K_2 (x - x_0)^{r+k+2} + \dots = 0 \quad (2.56)$$

dengan K bilangan bulat dan koefisien $k_i (i = 0, 1, 2, \dots)$ merupakan fungsi dalam r , yang merupakan koefisien a_i dari penyelesaian (2.47).

Berdasarkan koefisien K_0 sama dengan nol, di mana K_0 merupakan koefisien dari $x - x_0$ dengan pangkat $r + k$ terendah, diperoleh sebuah persamaan kuadrat dalam r , yang disebut persamaan Indisial dari persamaan diferensial. Akar-akar dari persamaan Indisial disebut eksponen dari persamaan diferensial. Akar-akar persamaan Indisial dinyatakan dengan r_1 dan r_2 , dengan $\text{Re}(r_1) \geq \text{Re}(r_2)$. $\text{Re}(r_1)$ dalam hal ini menyatakan bagian real dari r_1 ($j = 1, 2$). Jika r_1 termasuk real, maka $\text{Re}(r_1)$ cukup disingkat r_1 .

Contoh:

Gunakan metode Frobenius untuk mencari penyelesaian persamaan diferensial

$$2x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + (x+5)y = 0 \text{ dengan selang } 0 < x < R.$$

Penyelesaian:

Diketahui bahwa $x = 0$ merupakan titik singular teratur dari persamaan diferensial. Dicari penyelesaian dari

$$y = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (x - x_0)^{i+r} \quad (2.57)$$

untuk selang $0 < x < R$ dengan $a_i \neq 0$.

Turunan pertama dan kedua dari y berturut-turut adalah

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{i=0}^{\infty} (i+r) a_i (x - x_0)^{i+r-1}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \sum_{i=0}^{\infty} (i-r)(i+r-1) a_i (x - x_0)^{i+r-2}$$

Dengan mensubstitusikan turunan pertama dan kedua dari y bersama-sama dengan y pada persamaan diferensial, menghasilkan

$$2x^2 \sum_{i=0}^{\infty} (i+r)(i+r-1)a_i x^{i+r-2} - x \sum_{i=0}^{\infty} (i+r)a_i x^{i+r-1} + (x-5) \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{i+r}$$

disederhanakan menjadi

$$2 \sum_{i=0}^{\infty} (i+r)(i+r-1)a_i x^{i+r} - \sum_{i=0}^{\infty} (i+r)a_i x^{i+r} + \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{i+r+1} - 5 \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{i+r} = 0$$

Koefisien dari x^{r+k} terendah, yaitu x^r , disamakan dengan nol, sehingga diperoleh

$$2r(r-1) - r - 5 = 0 \quad \text{atau} \quad 2r^2 - 3r - 5 = 0. \quad \text{Persamaan ini dinamakan } \textit{persamaan}$$

Indisial. Akar-akar persamaan Indisial adalah $r_1 = \frac{5}{2}$, dan $r_2 = -1$. Keduanya, r_1

dan r_2 , dinamakan eksponen dari persamaan diferensial. Dalam contoh ini memperoleh relasi berulang yaitu:

$$[2(i+r)(i+r-1) - (i+r) - 5]a_i + a_{i-1} = 0, \quad i \geq 1.$$

Dimisalkan $r = r_1 = \frac{5}{2}$ diperoleh

$$\left[2 \left(i + \frac{5}{2} \right) \left(i + \frac{5}{2} - 1 \right) - \left(i + \frac{5}{2} \right) - 5 \right] a_i + a_{i-1} = 0, \quad i \geq 1.$$

atau

$$a_i = -\frac{a_{i-1}}{i(2i+7)}, \quad i \geq 1$$

Hasil ini memberikan nilai a_i yaitu

$$a_i = -\frac{a_0}{9}, \quad a_2 = -\frac{a_1}{22} = \frac{a_0}{198}, \quad a_3 = -\frac{a_2}{39} = -\frac{a_0}{7722}$$

Substitusi $r = \frac{5}{2}$ bersama-sama dengan nilai-nilai pada penyelesaian (2.57)

memberikan

$$y = a_0 \left(x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{9} x^{\frac{7}{2}} + \frac{1}{198} x^{\frac{9}{2}} - \frac{1}{7722} x^{\frac{11}{2}} + \dots \right)$$

atau

$$y = a_0 x^{\frac{5}{2}} \left(1 - \frac{1}{9} x + \frac{1}{198} x^2 - \frac{1}{7722} x^3 + \dots \right)$$

Hasil ini berdasarkan korespondensi dengan akar yang lebih besar, yaitu $r_1 = \frac{5}{2}$.

Untuk pemisalan $r = r_2 = -1$ memberikan relasi berulang

$$[2(i-1)(i-2) - (i-1) - 5]a_i + a_{i-1} = 0 \quad i \geq 1$$

atau

$$a_1 = -\frac{a_{i-1}}{i(2i-7)}, \quad i \geq 1.$$

Dalam hal ini r_2 dikatakan sebagai akar yang lebih kecil dalam persamaan indisial. Relasi berulang di atas memberikan a_i berturut-turut $a_i = \frac{a_0}{5}$,

$a_2 = \frac{a_1}{6} = \frac{c_0}{30}$, $c_3 = \frac{c_2}{3} = \frac{c_0}{90}$, Substitusi $r = -1$ (sebagai akar yang lebih kecil)

bersama-sama dengan nilai a_1, a_2, a_3, \dots pada persamaan penyelesaian, diperoleh

persamaan penyelesaian yang baru yaitu $y = a_0 x^{-1} \left(1 + \frac{1}{5} x + \frac{1}{30} x^2 + \frac{1}{90} x^3 + \dots \right)$

yang berkorespondensi dengan akar $r_2 = -1$. Hasil-hasil penyelesaian keduanya

yang berkorespondensi dengan $\frac{5}{2}$ dan -1 , ternyata bebas linier. Karena

keduanya bebas linier, maka dapat ditarik penyelesaian umum yang dinyatakan

dengan

$$y = a_1 x^{\frac{5}{2}} \left(1 - \frac{1}{9}x + \frac{1}{198}x^2 - \frac{1}{7722}x^3 + \dots \right) + a_2 x^{-1} \left(1 - \frac{1}{5}x + \frac{1}{30}x^2 - \frac{1}{90}x^3 + \dots \right)$$

dengan konstanta a_1 dan a_2 sebagai konstanta sebarang.

Teorema 3:

Hipotesa: Misalkan titik x_0 adalah sebuah titik singular teratur dari persamaan diferensial. Misalkan r_1 dan r_2 dengan $\text{Re}(r_1) \geq \text{Re}(r_2)$ merupakan akar-akar persamaan Indisial.

Konklusi 1: Misalkan $r_1 - r_2 \neq 0$ atau $r_1 - r_2 \neq B$, dengan B sebagai bilangan bulat. Maka persamaan diferensial mempunyai 2 penyelesaian non trivial yang bebas linier, yaitu y_1 dan y_2

$$y_1(x) = |x - x_0|^{r_1} \sum_{i=0}^{\infty} a_i (x - x_0)^i, \text{ dengan } a \neq 0, \text{ dan}$$

$$y_2(x) = |x - x_0|^{r_2} \sum_{i=0}^{\infty} a_i^* (x - x_0)^i, \text{ dengan } a_i^* \neq 0.$$

Konklusi 2: Misalkan $r_1 - r_2 = B$, dengan B adalah bilangan bulat. Maka persamaan diferensial mempunyai 2 penyelesaian non trivial yang bebas linier, yaitu y_1 dan y_2 dengan rumus:

$$y_1(x) = |x - x_0|^{r_1} \sum_{i=0}^{\infty} a_i (x - x_0)^i, \text{ dengan } a \neq 0, \text{ dan}$$

$$y_2(x) = |x - x_0|^{r_2} \sum_{i=0}^{\infty} a_i^* (x - x_0)^i + k y_1(x) \ln|x - x_0|,$$

dengan $a_i^* \neq 0$ dan k sebuah konstanta.

Konklusi 3: Misalkan $r_1 = r_2 = 0$. Maka persamaan diferensial mempunyai penyelesaian non trivial yang bebas linier, yaitu y_1 dan y_2 dengan rumus:

$$y_1(x) = |x - x_0|^{r_1} \sum_{i=0}^{\infty} a_i (x - x_0)^i, \text{ dengan } a \neq 0, \text{ dan}$$

$$y_2(x) = |x - x_0|^{r_1+1} \sum_{i=0}^{\infty} a_i^* (x - x_0)^i + y_1(x) \ln|x - x_0|,$$

Ketiga penyelesaian dalam ketiga konklusi di atas berlaku dalam selang $0 < |x - x_0| < R$ di titik x_0 . Dari konklusi-konklusi tersebut diketahui bahwa jika x_0 merupakan titik singular teratur dan $0 < |x - x_0| < R$, maka selalu ada sebuah penyelesaian

$$y_1(x) = |x - x_0|^{r_1} \sum_{i=0}^{\infty} a_i (x - x_0)^i,$$

Dalam selang $0 < |x - x_0| < R$ yang berkorespondensi dengan akar r_1 dalam persamaan indisial yang berhubungan dengan x_0 (Kusumah, 1989).

2.5 Penyelesaian Masalah dalam Al-Quran

Pada penelitian ini, ayat yang dijadikan rujukan adalah ayat 5 dan 6 surat al-Insyirah.

فَإِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٥﴾ إِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٦﴾

“Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan, Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan”. (Q.S Al-Insyirah, 5 dan 6).

Kata *al'usr* terulang di dalam al-Quran sebanyak 4 kali, sedang dalam berbagai bentuknya terulang sebanyak 12 kali. Kata *al'usr* digunakan untuk sesuatu yang sangat keras, sulit atau berat. Kata *yusr* terulang sebanyak 6 kali, tiga di antaranya bergandengan secara langsung dengan kata *'usr*, sedang kata *yusr* dalam berbagai bentuknya terulang sebanyak 44 kali. Dalam kamus-kamus bahasa, kata *yusr* digunakan untuk menggambarkan sesuatu yang mudah, lapang,

atau banyak. Dari pengertian tersebut berkembang arti yang terlihat bertolak belakang. Jadi, *yusr* adalah antonim *'usr* (Shihab, 2003).

Menurut Shihab (2003) Allah Swt bermaksud menjelaskan salah satu sunnah-Nya yang bersifat umum dan konsisten yaitu: *“setiap kesulitan pasti disertai atau disusul oleh kemudahan selama yang bersangkutan bertekad untuk mengulanginya”*. Ini dibuktikan-Nya antara lain dengan contoh konkret pada diri pribadi Nabi Muhammad Saw beliau datang sendiri, ditantang, dan dianiaya, sampai-sampai beliau dan keluarganya diboikot oleh kaum musyrikin di Mekkah. Tidak boleh bicara dengan beliau dan keluarganya sebelum setahun, disusul dengan setahun lagi sampai dengan tahun ketiga. Tetapi pada akhirnya tiba juga kelapangan dan jalan keluar yang selama ini mereka dambakan. Ayat-ayat di atas seakan-akan menyatakan: kelapangan dada yang engkau peroleh wahai Nabi Muhammad, keringanan beban yang selama ini engkau rasakan, keharuman nama yang engkau sandang, itu semua disebabkan karena sebelum ini engkau telah mengalami puncak kesulitan. Namun engkau tetap tabah dan optimis, sehingga berlakulah bagimu sunnah (ketetapan Allah) yaitu: *“apabila krisis atau kesulitan telah mencapai puncaknya maka pasti ai akan sirna dan disusul dengan kemudahan”*. Ayat 5 dan 6 di atas sejalan maknanya dengan isyarat yang dikandung oleh firmanNya:

ذَٰلِكَ بِأَنَّ اللَّهَ يُوَلِّجُ اللَّيْلَ فِي النَّهَارِ وَيُوَلِّجُ النَّهَارَ فِي اللَّيْلِ وَأَنَّ اللَّهَ سَمِيعٌ

بَصِيرٌ ﴿٦١﴾

Artinya: *“Yang demikian itu, adalah karena sesungguhnya Allah (kuasa) memasukkan malam ke dalam siang dan memasukkan siang ke dalam malam dan bahwasanya Allah Maha Mendengar lagi Maha Melihat”* (Q.S. Al-Hajj: 61).

Syaikh Muhammad (th:462) dalam tafsir juz Amma menjelaskan tentang tafsir ayat 5 dan 6 surat al-Insyirah, berkata Ibnu Abbas tentang tafsir ayat ini: *“satu kesulitan tak akan mendominasi dua kemudahan”*. Maksudnya: berkata *ahlul balaghoh*: kata *al-usr* diulang dua kali dalam bentuk ma’rifah. Alif lam ma’rifah disini fungsinya sebagai *al-‘ahd dzikri*.

Shihab (2003) berpendapat bahwa pengulangan ayat 5 pada ayat 6 oleh sementara ulama dipahami sebagai penekanan. Ada juga ulama’ yang tidak memahaminya sebagai penekanan. Mereka mengemukakan satu kaidah yang menyatakan: *“apabila terulang satu kata dalam bentuk definit maka kata pertama dan kedua mempunyai makna atau kandungan yang sama, berbeda halnya jika kata tersebut mempunyai makna atau kandungan yang sama, berbeda halnya jika kata tersebut berbentuk indefinif”*. Pada ayat 5 kata *al-‘usr* berbentuk definit (memakai alim lam) demikian pula kata tersebut pada ayat 6, ini berarti kesulitan pada ayat 5 sama halnya kesulitan pada ayat 6. Berbeda dengan kata *yusran*, kata tersebut tidak dalam bentuk definit, sehingga kemudahan pada ayat 5 berbeda dengan kemudahan pada ayat 6, hal ini menjadikan kedua ayat tersebut mengandung makna *“setiap satu kesulitan tidak dapat mengalahkan dua kemudahan”*. Sebagaimana dalam suatu riwayat Imam Malik RA bahwa Abu ‘Ubaidah ibn al-Jarrah sahabat Nabi Muhammad Saw yang memimpin pasukan islam menghadapi Romawi pada pemerintahan ‘Umar ibn al-Khatthab, menyurati kesulitan melawan Romawi, maka jawaban yang diterimanya dari beliau adalah: *“bila seorang mukmin ditimpa suatu kesulitan, niscaya Allah akan menjadikan sesudah kesulitan itu kelapangan, karena sesungguhnya satu kesulitan tidak akan mampu mengalahkan dua kelapangan”*. Satu kesulitan beliau

pahami dari penggunaan bentuk definit walaupun kata tersebut terulang dua kali, sedang dua kemudahan beliau ambil dari pengulangan kata *yusran* yang berbentuk indefinit.

Jadi sebagian ulama' ahli tafsir berpendapat bahwa pada ayat 5 dan 6 surat al-Insyirah terdapat satu kesulitan maka ada dua kemudahan. Haeri (2001) menambahkan dua kemudahan atau solusi itu terdiri dari: Solusi pertama adalah bahwa kesulitan akan berlalu, ia tidak bisa berlalu dengan sendirinya, tapi akhirnya ia akan berlalu karena lambat laun kita pergi darinya melalui kematian. Solusi kedua adalah bagi pencari sejati, solusinya terletak dalam pengetahuan tentang proses awal terjadinya kesulitan kemudian melihat kesempurnaan di dalamnya.



BAB III PEMBAHASAN

3.1 Solusi Persamaan Bessel Menggunakan Metode Frobenius

Dengan memandang persamaan Bessel:

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dy}{dz} + \frac{1}{k^2} \left(k - \frac{v^2}{z^2}\right) y = 0 \quad (3.1)$$

Maka fokus penelitian ini adalah menentukan persamaan Bessel dengan metode Frobenius. Metode Frobenius adalah penyelesaian suatu persamaan diferensial dengan memisalkan solusi berbentuk deret pangkat. Langkah-langkah menyelesaikan fungsi Bessel yaitu sebagai berikut:

Pertama, memisalkan solusi persamaan (3.1) dalam bentuk deret sebagai berikut:

$$y = \sum_{r=0}^{\infty} a_r z^{m+r} \quad (3.2)$$

Turunan pertama dan kedua terhadap z dari deret pada persamaan (3.2) adalah

$$\begin{aligned} y' &= \sum_{r=0}^{\infty} a_r (m+r) z^{(m+r)-1} \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} a_r (m+r) z^{m+r-1} \end{aligned} \quad (3.3)$$

dan

$$\begin{aligned} y'' &= \sum_{r=0}^{\infty} a_r (m+r)(m+r-1) z^{(m+r)-2} \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} a_r (m+r)(m+r-1) z^{m+r-2} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Selanjutnya (3.4), (3.3) dan (3.2) disubstitusikan ke dalam persamaan (3.1) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
& \sum_{r=0}^{\infty} a_r (m+r)(m+r-1)z^{m+r-2} + \frac{1}{z} \sum_{r=0}^{\infty} a_r (m+r)z^{m+r-1} + \frac{1}{k^2} \left(k - \frac{v^2}{z^2} \right) \sum_{r=0}^{\infty} a_r z^{m+r} = 0 \\
& \sum_{r=0}^{\infty} a_r (m+r)(m+r-1)z^{m+r-2} + z^{-1} \sum_{r=0}^{\infty} a_r (m+r)z^{m+r-1} + \frac{k}{k^2} \sum_{r=0}^{\infty} a_r z^{m+r} - \frac{v^2}{k^2 z^2} \sum_{r=0}^{\infty} a_r z^{m+r} = 0 \\
& \sum_{r=0}^{\infty} a_r (m+r)(m+r-1)z^{m+r-2} + \sum_{r=0}^{\infty} a_r (m+r)z^{m+r-2} + \frac{k}{k^2} \sum_{r=0}^{\infty} a_r z^{m+r} - \frac{v^2 z^{-2}}{k^2} \sum_{r=0}^{\infty} a_r z^{m+r} = 0 \\
& \sum_{r=0}^{\infty} a_r (m+r)(m+r-1)z^{m+r-2} + \sum_{r=0}^{\infty} a_r (m+r)z^{m+r-2} + \frac{k}{k^2} \sum_{r=0}^{\infty} a_r z^{m+r} - \frac{v^2}{k^2} \sum_{r=0}^{\infty} a_r z^{m+r-2} = 0
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Untuk mencari persamaan Indisial, rumus rekursi ganjil dan genap maka diasumsikan $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$. Selanjutnya *Kedua*, menentukan persamaan Indisial. Pada langkah ini dimisalkan $m+r-2=0$ dan diasumsikan $r=0$ yang diterapkan pada koefisien suku pertama, kedua, dan keempat untuk persamaan (3.5). Untuk suku ketiga tidak berkontribusi pada saat $r \geq 0$. Selanjutnya, persamaan (3.5) dapat ditunjukkan sebagai berikut:

$$(m)(m-1)a_0 + ma_0 - \frac{v^2}{k^2} a_0 = 0 \tag{3.6}$$

Persamaan (3.6) dapat ditulis kembali sebagai berikut:

$$m^2 a_0 - \frac{v^2}{k^2} a_0 = 0 \tag{3.7}$$

Persamaan (3.7) dibagi kedua ruasnya dengan k^2 sehingga

$$mk^2 a_0 - v^2 a_0 = 0 \tag{3.8}$$

Dari persamaan (3.8) $a_0 \neq 0$ sehingga haruslah $(mk+v)(mk-v)=0$, oleh karena

$$\text{itu, diperoleh } m = -\frac{v}{k} \text{ atau } m = \frac{v}{k}, \text{ untuk setiap } k \neq 0 \tag{3.9}$$

Ketiga, menentukan rumus rekursi. Pada langkah ini dimisalkan $m + r - 2 = 0$ dan diasumsikan $r = 1$ yang diterapkan pada koefisien suku pertama, kedua, dan keempat untuk persamaan (3.5). Untuk suku ketiga tidak berkontribusi pada saat $r \geq 0$. Selanjutnya, persamaan (3.5) dapat ditunjukkan sebagai berikut:

$$m(m+1)a_1 + (m+1)a_1 - \frac{v^2}{k^2} a_1 = 0 \quad (3.10)$$

Substitusikan $m = \frac{v}{k} > 0$ dari persamaan (3.9) ke persamaan (3.10) sehingga diperoleh:

$$\left(\frac{v^2}{k^2} + \frac{v}{k}\right)a_1 + \left(\frac{v}{k} + 1\right)a_1 - \frac{v^2}{k^2} a_1 = 0 \quad (3.11)$$

Persamaan (3.11) dapat diperoleh $a_1 \left(\frac{2v}{k} + 1\right) = 0$ dengan $\frac{2v}{k} + 1 \neq 0$, sehingga

$$a_1 = 0 \quad (3.12)$$

Keempat, menentukan rumus rekursi ganjil dan genap dengan memisalkan $m + r - 2 = 0$. Pada langkah ini, diasumsikan untuk rumus rekursi ganjil $r = 3, 5, 7, \dots$ dan rumus rekursi genap $r = 2, 4, 6, \dots$ yang diterapkan pada koefisien suku pertama, kedua, dan keempat. Karena $m + r - 2 = 0$ maka pada koefisien suku ketiga menjadi $m + r = 2$. Sehingga, untuk $r = 2, 3, 4, \dots$ maka suku pertama, kedua, ketiga, dan keempat berkontribusi. Maka persamaan (3.5) dapat ditunjukkan sebagai berikut:

$$(m+r)(m+r-1)a_r + (m+r)a_r + \frac{1}{k} a_{r-2} - \frac{v^2}{k^2} a_r = 0 \quad (3.13)$$

Substitusikan $m = \frac{v}{k} > 0$ dari persamaan (3.9) ke persamaan (3.13) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\frac{v^2}{k^2} a_r + 2\frac{v}{k} r a_r + r^2 a_r + \frac{1}{k} a_{r-2} - \frac{v^2}{k^2} a_r = 0 \quad (3.14)$$

Persamaan (3.14) dapat diperoleh:

$$\left(2\frac{v}{k} + r\right) r a_r + \frac{1}{k} a_{r-2} = 0 \quad (3.15)$$

Hasil dari persamaan (3.15) ini selanjutnya digunakan untuk menentukan rumus rekursi ganjil dan genap maka ditunjukkan sebagai berikut:

a. Rumus rekursi ganjil

Ketika $r = 3$ maka mensubstitusikan persamaan (3.12) yaitu $a_1 = 0$

$$\left(2\frac{v}{k} + 3\right) 3a_3 + \frac{1}{k} a_{3-2} = 0 \quad (3.16)$$

Dari persamaan (3.16) maka $\frac{2v}{k} + 3 \neq 0$, sehingga haruslah

$$a_3 = 0 \quad (3.17)$$

Ketika $r = 5$ maka mensubstitusikan persamaan (3.17)

$$\left(2\frac{v}{k} + 5\right) 5a_5 + \frac{1}{k} a_{5-2} = 0 \quad (3.18)$$

Dari persamaan (3.18) maka $\frac{2v}{k} + 5 \neq 0$, sehingga haruslah

$$a_5 = 0 \quad (3.19)$$

Ketika $r = 7$ maka mensubstitusikan persamaan (3.19)

$$\left(2\frac{v}{k} + 7\right) 7a_7 + \frac{1}{k} a_{7-2} = 0 \quad (3.20)$$

Dari persamaan (3.20) $\frac{2v}{k} + 7 \neq 0$, sehingga haruslah

$$a_7 = 0$$

$$\vdots$$
(3.21)

Mensubstitusikan rekursi ganjil $a_1, a_3, a_5, a_7, \dots$ ke dalam persamaan (3.2) sebagai berikut:

$$y = \sum_{r=0}^{\infty} a_r z^{m+r}$$

$$y = a_1 z_1 + a_3 z_3 + a_5 z_5 + a_7 z_7 + \dots$$

$$y = 0 \cdot z^{m+1} + 0 \cdot z^{m+3} + 0 \cdot z^{m+5} + 0 \cdot z^{m+7} + \dots$$

$$y = 0$$

(3.22)

b. Menentukan rumus rekursi genap

Ketika $r = 2$ maka persamaan (3.15) dapat diperoleh

$$\left(2 \frac{v}{k} + 2\right) 2a_2 + \frac{1}{k} a_{2-2} = 0$$

$$\left(2 \frac{v}{k} + 2\right) 2a_2 + \frac{1}{k} a_{2-2} = 0$$

(3.23)

Dari persamaan (3.23) $a_0 \neq 0$, sehingga diperoleh

$$a_2 = \frac{-a_0}{k \left[2^2 \cdot 1 \left(\frac{v}{k} + 1 \right) \right]}$$
(3.24)

Dapat disederhanakan menjadi

$$a_2 = \frac{-(1)a_0}{(2\sqrt{k})^2 1! \left(\frac{v}{k} + 1 \right)}$$
(3.25)

Ketika $r = 4$ maka persamaan (3.15) dapat diperoleh

$$\left(2\frac{v}{k}+4\right)4a_4+\frac{1}{k}a_{4-2}=0 \quad (3.26)$$

$$\left(8\frac{v}{k}+16\right)a_4+\frac{1}{k}a_2=0$$

Sederhanakan menjadi

$$a_4=\frac{(-1)a_2}{k2^3\left(\frac{v}{k}+2\right)} \quad (3.27)$$

Substitusikan hasil a_2 pada persamaan (3.24) ke dalam persamaan (3.27) maka diperoleh:

$$a_4=\frac{-1}{k\left[2^2\cdot 2\left(\frac{v}{k}+2\right)\right]}\cdot\frac{-a_0(-1)}{k\left[2^2\cdot 1\left(\frac{v}{k}+1\right)\right]} \quad (3.28)$$

$$a_4=\frac{-a_0(-1)^2}{k^2\left[2^4\cdot 2!\left(\frac{v}{k}+1\right)\left(\frac{v}{k}+2\right)\right]}$$

Dapat disederhanakan menjadi

$$a_4=\frac{(-1)^2 a_0}{(2\sqrt{k})^4 2!\left(\frac{v}{k}+1\right)\left(\frac{v}{k}+2\right)} \quad (3.29)$$

Ketika $r=6$ maka persamaan (3.15) dapat diperoleh:

$$\left(2\frac{v}{k}+6\right)6a_6+\frac{1}{k}a_{6-2}=0 \quad (3.30)$$

$$\left(12\frac{v}{k}+36\right)a_6+\frac{1}{k}a_4=0$$

Disederhanakan menjadi

$$a_6 = \frac{-1}{k \left[2^2 \cdot 3 \left(\frac{v}{k} + 3 \right) \right]} a_4 \quad (3.31)$$

Substitusikan hasil a_4 pada persamaan (3.28) ke dalam persamaan (3.31) maka diperoleh:

$$a_6 = \frac{-1}{k \left[2^2 \cdot 3 \left(\frac{v}{k} + 3 \right) \right]} \cdot \frac{-a_0 (-1)^2}{k^2 \left[2^4 2! \left(\frac{v}{k} + 1 \right) \left(\frac{v}{k} + 2 \right) \right]} \quad (3.32)$$

$$a_6 = \frac{(-1)^3 a_0}{k^3 \left[2^6 3! \left(\frac{v}{k} + 1 \right) \left(\frac{v}{k} + 2 \right) \left(\frac{v}{k} + 3 \right) \right]}$$

Dapat disederhanakan menjadi

$$a_6 = \frac{(-1)^3 a_0}{(2\sqrt{k})^6 3! \left(\frac{v}{k} + 1 \right) \left(\frac{v}{k} + 2 \right) \left(\frac{v}{k} + 3 \right)} \quad (3.33)$$

Mensubstitusikan rekursi genap a_2, a_4, a_6, \dots ke dalam persamaan (3.2) sebagai berikut:

$$y = \sum_{r=0}^{\infty} a_r z^{m+r}$$

$$y = a_2 z^{m+2} + a_4 z^{m+4} + a_6 z^{m+6} + \dots$$

$$y = \frac{(-1)^1 a_0 z^{m+2}}{(2\sqrt{k})^2 1! \left(\frac{v}{k} + 1 \right)} + \frac{(-1)^2 a_0 z^{m+4}}{(2\sqrt{k})^4 2! \left(\frac{v}{k} + 1 \right) \left(\frac{v}{k} + 2 \right)} +$$

$$\frac{(-1)^3 a_0 z^{m+6}}{(2\sqrt{k})^6 3! \left(\frac{v}{k} + 1 \right) \left(\frac{v}{k} + 2 \right) \left(\frac{v}{k} + 3 \right)} \quad (3.34)$$

Selanjutnya, persamaan (3.34) dapat dijadikan deret yaitu

$$y = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r a_0 z^{m+2r}}{(2\sqrt{k})^{2r} r! \left(\frac{v}{k} + 1\right) \left(\frac{v}{k} + 2\right) \dots \left(\frac{v}{k} + r\right)} \quad (3.35)$$

Kelima, menggabungkan hasil rumus rekursi ganjil dan rekursi genap yang telah disubstitusikan pada persamaan (3.2) maka diperoleh:

$y =$ rekursi ganjil + rekursi genap

$$y = 0 + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r a_0 z^{m+2r}}{(2\sqrt{k})^{2r} r! \left(\frac{v}{k} + 1\right) \left(\frac{v}{k} + 2\right) \dots \left(\frac{v}{k} + r\right)} \quad (3.36)$$

$$y = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r a_0 z^{m+2r}}{(2\sqrt{k})^{2r} r! \left(\frac{v}{k} + 1\right) \left(\frac{v}{k} + 2\right) \dots \left(\frac{v}{k} + r\right)}$$

Substitusikan akar persamaan Indisial $m = \frac{v}{k}$ ke dalam persamaan (3.36) maka dapat ditunjukkan sebagai berikut:

$$y = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r a_0 z^{\frac{v}{k}+2r}}{(2\sqrt{k})^{2r} r! \left(\frac{v}{k} + 1\right) \left(\frac{v}{k} + 2\right) \dots \left(\frac{v}{k} + r\right)} \quad (3.37)$$

Dimisalkan jika persamaan (3.37) dikalikan $\frac{(2\sqrt{k})^{\frac{v}{k}}}{(2\sqrt{k})^{\frac{v}{k}}}$ maka dapat ditulis sebagai

berikut:

$$y = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r a_0 z^{\frac{v}{k}+2r} (2\sqrt{k})^{\frac{v}{k}}}{(2\sqrt{k})^{2r} r! \left(\frac{v}{k} + 1\right) \left(\frac{v}{k} + 2\right) \dots \left(\frac{v}{k} + r\right) (2\sqrt{k})^{\frac{v}{k}}} \quad (3.38)$$

Dapat disederhanakan menjadi

$$y = a_0 (2\sqrt{k})^v \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{z}{2\sqrt{k}}\right)^{2r+\frac{v}{k}}}{r! \left(\frac{v}{k}+1\right) \left(\frac{v}{k}+2\right) \dots \left(\frac{v}{k}+r\right)} \quad (3.39)$$

Didefinisikan $a_0 = \frac{1}{(2k)^{\frac{v}{k}} \Gamma\left(\frac{v}{k}+r\right)}$ (Gehlot, 2014) (3.40)

Karena ini persamaan k Bessel maka harus mencari fungsi k gamma yaitu:

$$\Gamma_k(x) = k^{\frac{x}{k}-1} \Gamma\left(\frac{x}{k}\right)$$

Dapat dipindahruaskan menjadi

$$\Gamma\left(\frac{x}{k}\right) = \frac{\Gamma_k(x)}{k^{\frac{x}{k}-1}}$$

Sehingga

$$\Gamma\left(\frac{v}{k}+r\right) = \frac{\Gamma_k(x)}{k^{\frac{x}{k}-1}} \quad (3.41)$$

Substitusikan persamaan (3.41) ke dalam persamaan (3.40) maka diperoleh

$$a_0 = \frac{k^{\frac{v}{k}+r-1}}{(2k)^{\frac{v}{k}} \Gamma_k\left(\frac{v}{k}+1\right)} \quad (3.42)$$

Substitusikan a_0 ke dalam persamaan (3.39) maka ditunjukkan sebagai berikut:

$$y = \frac{k^{\frac{v}{k}+r-1}}{(2k)^{\frac{v}{k}} \Gamma_k\left(\frac{v}{k}+1\right)} \cdot (2\sqrt{k})^v \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{z}{2\sqrt{k}}\right)^{2r+\frac{v}{k}}}{r! \left(\frac{v}{k}+1\right) \left(\frac{v}{k}+2\right) \dots \left(\frac{v}{k}+r\right)} \quad (3.43)$$

Persamaan (3.43) dapat diuraikan menjadi

$$y = \frac{k^{\frac{v}{k}} k^r (2\sqrt{k})^{\frac{v}{k}}}{(2k)^{\frac{v}{k}} k \Gamma_k\left(\frac{v}{k} + 1\right)} \cdot \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (z)^{2r + \frac{v}{k}}}{2^{2r} k^r (2\sqrt{k})^{\frac{v}{k}} r! \left(\frac{v}{k} + 1\right) \left(\frac{v}{k} + 2\right) \dots \left(\frac{v}{k} + r\right)} \quad (3.44)$$

Dengan fungsi gamma $\Gamma_k\left(\frac{v}{k} + 1\right)$ diperoleh

$$\Gamma_k\left(\frac{v}{k} + 1\right) = \int_0^{\infty} e^{-\frac{t^k}{k}} t^{\frac{v}{k}} dt \quad \left(\frac{v}{k} > -1\right) \quad (3.45)$$

Persamaan (3.45) diuraikan menjadi

$$\Gamma_k(v+1) = -e^{-\frac{t^k}{k}} t^{\frac{v}{k}} \Big|_0^{\infty} + \frac{v}{k} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t^k}{k}} t^{\frac{v}{k}-1} dt = 0 + \frac{v}{k} \Gamma_k\left(\frac{v}{k}\right) \quad (3.46)$$

Maka hubungan fungsi dasar dari fungsi gamma persamaan (3.46) yaitu:

$$\Gamma_k\left(\frac{v}{k} + 1\right) = \frac{v}{k} \Gamma_k\left(\frac{v}{k}\right) \quad (3.47)$$

Persamaan (3.45) dengan $\frac{v}{k} = 0$ dan kemudian persamaan (3.47) diperoleh

$$\Gamma_k(1) = \int_0^{\infty} e^{-t^k} dt = e^{-t^k} \Big|_0^{\infty} = 0 - (-1) = 1$$

Diperoleh $\Gamma_k(2) = 1 \cdot \Gamma_k(1) = 1!$, $\Gamma_k(3) = 2\Gamma_k(1) = 2!$ yang dapat dibentuk secara umum

$$\Gamma_k\left(\frac{v}{k} + 1\right) = \frac{v}{k}! \quad \left(\frac{v}{k} = 0, 1, 2, \dots\right) \quad (3.48)$$

Persamaan (3.43) dapat didefinisikan

$$\left(\frac{v}{k} + 1\right) \left(\frac{v}{k} + 2\right) \dots \left(\frac{v}{k} + r\right) \Gamma_k\left(\frac{v}{k} + 1\right) = \Gamma_k\left(r + \frac{v}{k} + 1\right) \quad (3.49)$$

Persamaan (3.44) dapat menjadi fungsi k Bessel ditunjukkan sebagai berikut:

$$J_v^k(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{z}{2}\right)^{2r+\frac{v}{k}}}{r! \Gamma_k(rk+v+k)} \quad (3.50)$$

dan untuk $m = -\frac{v}{k}$ maka diperoleh

$$J_{-v}^k(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{z}{2}\right)^{2r-\frac{v}{k}}}{r! \Gamma_k(rk-v+k)} \quad (3.51)$$

Jadi, solusi umum dari persamaan k Bessel dari persamaan (3.50) dan (3.51) yaitu:

$$y(z) = c_1 J_v^k(z) + c_2 J_{-v}^k(z) \quad (3.52)$$

$$y(z) = c_1 \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{z}{2}\right)^{2r+\frac{v}{k}}}{r! \Gamma_k(rk+v+k)} + c_2 \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{z}{2}\right)^{2r-\frac{v}{k}}}{r! \Gamma_k(rk-v+k)}$$

3.2 Menganalisis Keabsahan Solusi Persamaan k Bessel dengan Menggunakan Program Maple

Pada bab ini simulasi dilakukan dengan menggunakan program Maple. Persamaan yang digunakan dalam program tersebut yaitu persamaan (3.52) yang merupakan hasil solusi persamaan k Bessel. Simulasi pertama yaitu mendiferensialkan hasil solusi persamaan k Bessel. Setelah itu, menyederhanakan hasil solusi persamaan k Bessel. Pada saat $z = \infty, k = 1000, v = 1$, dan $r = \infty$ maka memperoleh nilai sama dengan nol.

3.3. Kajian Keagamaan

Persamaan (3.1) membuktikan bahwa terdapat model matematika dengan mengelompokkan persamaan yang sama menjadi deret. Adanya model matematika ini, dapat meningkatkan keimanan dan ketaqwaan kepada Allah, sebab Allah telah menciptakan alam semesta ini dengan perhitungan masing-masing. Sebagaimana firman Allah Swt. dalam surat al-Furqan ayat 2:

الَّذِي لَهُ مُلْكُ السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ وَلَمْ يَتَّخِذْ وَلَدًا وَلَمْ يَكُنْ لَهُ شَرِيكٌ فِي الْمُلْكِ وَخَلَقَ كُلَّ شَيْءٍ فَقَدَرَهُ تَقْدِيرًا ﴿٢﴾

“Yang kepunyaan-Nya-lah kerajaan langit dan bumi, dan Dia tidak mempunyai anak, dan tidak ada sekutu baginya dalam kekuasaan(Nya), dan Dia telah menciptakan segala sesuatu, dan Dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya”.

Berdasarkan hasil pembahasan, bahwa solusi persamaan k Bessel dapat diselesaikan menggunakan metode Frobenius. Hal ini menunjukkan bahwa semua permasalahan dapat diselesaikan sekalipun melalui beberapa kesulitan.

Terdapat berbagai cara penyelesaian yang dapat dilakukan oleh manusia dalam kehidupan untuk menyelesaikan suatu masalahnya. Seperti halnya dalam matematika, suatu permasalahan dapat diselesaikan dengan berbagai metode. Munir (2008) menyatakan bahwa secara umum suatu persamaan terdapat dua solusi yaitu solusi analitik dan solusi numerik. Sehingga dapat diketahui bahwasanya setiap permasalahan selalu ada solusinya meskipun harus melalui proses yang sulit dan bartahap. Hal ini sesuai dengan firman Allah Swt. dalam al-Quran surat al-Insyirah ayat 5 yaitu:

فَإِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٥﴾

“Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan”.

Dari ayat tersebut disebutkan bahwa sesudah mengalami kesulitan terdapat kemudahan. Ketika suatu persamaan sulit atau bahkan tidak dapat diselesaikan secara analitik, maka masih ada jalan lain untuk mendapatkan solusinya yakni secara numerik. Namun perhitungan secara numerik ini membutuhkan waktu yang lama dan ketelitian agar tidak terdapat kesalahan. Hal ini sesuai dengan firman Allah Swt. dalam al-Quran yaitu

لَقَدْ أَحْصَاهُمْ وَعَدَّهُمْ عَدًّا ﴿٩٤﴾

“*Sesungguhnya Allah telah menentukan jumlah mereka dan menghitung mereka dengan hitungan yang teliti*” (QS. Maryam/19:94).

Menurut Shihab (2003) dari ayat di atas dapat diketahui bahwa Allah yang dilukiskan sebagai *ahshaahum* atau dalam istilah hadits *Asma' al-Husna* adalah Al-mushi dipahami oleh banyak ulama sebagai Dia yang mengetahui kadar setiap peristiwa, baik yang dapat dijangkau oleh manusia maupun yang tidak, seperti hembusan nafas, dan rincian perolehan rizki. Allah adalah Dia yang mengetahui dengan amat teliti rincian segala sesuatu dari segi jumlah dan kadarnya, panjang dan lebarnya, jauh dan dekatnya, tempat dan waktunya, dan lain sebagainya.

BAB IV PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah diuraikan, diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Solusi untuk persamaan k Bessel adalah fungsi k Bessel yaitu:

$$y(z) = c_1 \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{z}{2}\right)^{2r+\frac{v}{k}}}{r! \Gamma_k(rk+v+k)} + c_2 \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{z}{2}\right)^{2r-\frac{v}{k}}}{r! \Gamma_k(rk-v+k)}.$$

2. Dengan program Maple dibuktikan bahwa fungsi k Bessel memenuhi

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dy}{dz} + \frac{1}{k^2} \left(k - \frac{v^2}{z^2}\right) y = 0.$$

4.2 Saran

Bagi penelitian selanjutnya, disarankan untuk menyelesaikan teorema hubungan antara fungsi k Bessel dengan fungsi Bessel.

DAFTAR RUJUKAN

- Abdussakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press
- Ault, J.C dan Ayres, F. 1992. *Persamaan Diferensial dalam Satuan SI Metric*. Jakarta: Erlangga.
- Diaz, R dan Pariguan, E. 2007. On Hypergeometric Functions and Pochhammer k -Symbol. *Divulgaciones Matematicas*. 15(2): 179-192.
- Gehlot, K.S. 2014. Differential Equation of k -Bessel's Function and its Properties. *Nonl. Analysis and Differential Equations*. 2 (2): 61-67.
- Haeri, S.F. 2001. *Cahaya Al-Quran Tafsir Juz 'Amma*. Jakarta: PT Serambi Ilmu Semesta.
- Kreyszig, E. 1979. *Advanced Engineering Mathematics (4th ed)*. Canada.
- Kreyszig, E. 1999. *Advanced Engineering Mathematics, Eighth Edition*. Singapura: John Willey and Sons, Inc.
- Kusumah, Y. 1989. *Persamaan Diferensial*. Jakarta: Departemen Pendidikan dan Kebudayaan.
- Muhammad, S. tth. *Tafsir Juz 'Amma*. Solo: At-Tibyan
- Munir, R. 2008. *Metode Numerik*. Bandung: Informatika Bandung.
- Mursita, D. 2009. *Matematika Dasar Untuk Perguruan Tinggi*. Bandung: Rekayasa Sains.
- Nagy, G. 2012. *Ordinary Differential Equations*. Michigan State University: Mathematics Department
- Pipes, L.A. 1991. *Matematika Terapan: untuk Para Insinyur dan Fisikawan*. Yogyakarta: Gajah Mada University Press.
- Romero, L.G, Dorrego, G.A, dan Cerutti, R.A. 2012. The K -Bessel Function of the First Kind. *International Mathematical Forum*, 7 (38): 1859-1864.
- Sangadji. 2009. Solusi Persamaan Diferensial Linier Tingkat Dua Di Titik Regular Singular Dengan Deret Pangkat. *Mat Stat*. 9 (2): 118-125
- Shihab, M.Q. 2003. *Tafsir Al-Mishbah: Pesan, Kesan, dan Keserasian Al-Qur'an*. Jakarta: Lentera Hati.

LAMPIRAN

Lampiran 1. Script M-file Solusi Persamaan k Bessel menggunakan metode Frobenius

> restart;

> GAMMAKPOSITIF := int($t^{(rk + v + k) - 1} \cdot \exp^{-\frac{t^k}{k}}$, $t = 0 .. \infty$);

$$GAMMAKPOSITIF := \int_0^{\infty} t^{rk + v + k - 1} \exp^{-\frac{t^k}{k}} dt$$

> GAMMAKNEGATIF := int($t^{(rk - v + k) - 1} \cdot \exp^{-\frac{t^k}{k}}$, $t = 0 .. \infty$);

$$GAMMAKNEGATIF := \int_0^{\infty} t^{rk - v + k - 1} \exp^{-\frac{t^k}{k}} dt$$

> $y := \text{sum} \left(\frac{(-1)^r \left(\frac{z}{2}\right)^{2r + \frac{v}{k}}}{r! \text{int} \left(t^{(rk) + v + k} - 1 \cdot \exp^{-\frac{t^k}{k}}, t = 0 .. \infty \right)}, r = 0 .. \infty \right)$
 $+ \text{sum} \left(\frac{(-1)^r \left(\frac{z}{2}\right)^{2r - \frac{v}{k}}}{r! (k) \text{int} \left(t^{(rk) - v + k} - 1 \cdot \exp^{-\frac{t^k}{k}}, t = 0 .. \infty \right)}, r = 0 .. \infty \right)$
 $;$

$$y := \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left((-1)^r \left(\frac{1}{2} z\right)^{2r + \frac{v}{k}} \right)}{r! \left(\int_0^{\infty} t^{rk + v + k - 1} \exp^{-\frac{t^k}{k}} dt \right)} + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left((-1)^r \left(\frac{1}{2} z\right)^{2r - \frac{v}{k}} \right)}{r! k \left(\int_0^{\infty} t^{rk - v + k - 1} \exp^{-\frac{t^k}{k}} dt \right)}$$

> turunanpertama := Diff(y, z);

$$\text{turunanpertama} := \frac{\partial}{\partial z} \left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left((-1)^r \left(\frac{1}{2} z \right)^{2r + \frac{v}{k}} \right)}{r! \left(\int_0^{\infty} t^{rk + v + k - 1} \exp^{-\frac{t^k}{k}} dt \right)} \right) + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left((-1)^r \left(\frac{1}{2} z \right)^{2r - \frac{v}{k}} \right)}{r! k \left(\int_0^{\infty} t^{rk - v + k - 1} \exp^{-\frac{t^k}{k}} dt \right)}$$

> turunankedua := Diff(y, z, z);

$$\text{turunankedua} := \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left((-1)^r \left(\frac{1}{2} z \right)^{2r + \frac{v}{k}} \right)}{r! \left(\int_0^{\infty} t^{rk + v + k - 1} \exp^{-\frac{t^k}{k}} dt \right)} \right) + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left((-1)^r \left(\frac{1}{2} z \right)^{2r - \frac{v}{k}} \right)}{r! k \left(\int_0^{\infty} t^{rk - v + k - 1} \exp^{-\frac{t^k}{k}} dt \right)}$$

> persamaanbessel := turunankedua + \frac{1}{z} \cdot turunanpertama + \frac{1}{k^2} \cdot \left(k - \frac{v^2}{z^2} \right) y;

$$\begin{aligned}
\text{persamaanbessel} &:= \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left((-1)^r \left(\frac{1}{2} z \right)^r \right)^{2r + \frac{v}{k}}}{r! \left(\int_0^{\infty} t^{k+v+k-1} \exp^{-\frac{t^k}{k}} dt \right)} \right. \\
&+ \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left((-1)^r \left(\frac{1}{2} z \right)^r \right)^{2r - \frac{v}{k}}}{r! k \left(\int_0^{\infty} t^{k-v+k-1} \exp^{-\frac{t^k}{k}} dt \right)} \left. \right) \\
&+ \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} \left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left((-1)^r \left(\frac{1}{2} z \right)^r \right)^{2r + \frac{v}{k}}}{r! \left(\int_0^{\infty} t^{k+v+k-1} \exp^{-\frac{t^k}{k}} dt \right)} + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left((-1)^r \left(\frac{1}{2} z \right)^r \right)^{2r - \frac{v}{k}}}{r! k \left(\int_0^{\infty} t^{k-v+k-1} \exp^{-\frac{t^k}{k}} dt \right)} \right) \\
&+ \frac{1}{k^2} \left(k \left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left((-1)^r \left(\frac{1}{2} z \right)^r \right)^{2r + \frac{v}{k}}}{r! \left(\int_0^{\infty} t^{k+v+k-1} \exp^{-\frac{t^k}{k}} dt \right)} + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left((-1)^r \left(\frac{1}{2} z \right)^r \right)^{2r - \frac{v}{k}}}{r! k \left(\int_0^{\infty} t^{k-v+k-1} \exp^{-\frac{t^k}{k}} dt \right)} \right) \right. \\
&\left. - \frac{v^2}{z^2} \left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left((-1)^r \left(\frac{1}{2} z \right)^r \right)^{2r + \frac{v}{k}}}{r! \left(\int_0^{\infty} t^{k+v+k-1} \exp^{-\frac{t^k}{k}} dt \right)} + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left((-1)^r \left(\frac{1}{2} z \right)^r \right)^{2r - \frac{v}{k}}}{r! k \left(\int_0^{\infty} t^{k-v+k-1} \exp^{-\frac{t^k}{k}} dt \right)} \right) \right)
\end{aligned}$$

> $A := \text{simplify}(\text{persamaanbessel});$

$$\begin{aligned}
A := & \frac{1}{z^2 k^2} \left(\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[\sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left((-1)^r \left(\frac{1}{2} z \right)^r \right)^{\frac{2rk+v}{k}}}{r! \left(\int_0^{\infty} t^{k+v+k-1} \exp \left(-\frac{t^k}{k} \right) dt \right)} \right] + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left((-1)^r \left(\frac{1}{2} z \right)^r \right)^{\frac{2rk-v}{k}}}{r! k \left(\int_0^{\infty} t^{k-v+k-1} \exp \left(-\frac{t^k}{k} \right) dt \right)} \right) z^2 k^2 + \frac{\partial}{\partial z} \left[\sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left((-1)^r \left(\frac{1}{2} z \right)^r \right)^{\frac{2rk+v}{k}}}{r! \left(\int_0^{\infty} t^{k+v+k-1} \exp \left(-\frac{t^k}{k} \right) dt \right)} + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left((-1)^r \left(\frac{1}{2} z \right)^r \right)^{\frac{2rk-v}{k}}}{r! k \left(\int_0^{\infty} t^{k-v+k-1} \exp \left(-\frac{t^k}{k} \right) dt \right)} \right] z k^2 + k z^2 \left[\sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left((-1)^r \left(\frac{1}{2} z \right)^r \right)^{\frac{2rk+v}{k}}}{r! \left(\int_0^{\infty} t^{k+v+k-1} \exp \left(-\frac{t^k}{k} \right) dt \right)} + k z^2 \left[\sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left((-1)^r \left(\frac{1}{2} z \right)^r \right)^{\frac{2rk-v}{k}}}{r! k \left(\int_0^{\infty} t^{k-v+k-1} \exp \left(-\frac{t^k}{k} \right) dt \right)} \right] - v^2 \left[\sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left((-1)^r \left(\frac{1}{2} z \right)^r \right)^{\frac{2rk+v}{k}}}{r! \left(\int_0^{\infty} t^{k+v+k-1} \exp \left(-\frac{t^k}{k} \right) dt \right)} - v^2 \left[\sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left((-1)^r \left(\frac{1}{2} z \right)^r \right)^{\frac{2rk-v}{k}}}{r! k \left(\int_0^{\infty} t^{k-v+k-1} \exp \left(-\frac{t^k}{k} \right) dt \right)} \right] \right) \right)
\end{aligned}$$

> $H := \text{subs}(z = 1000, k = 100, v = 1, r = \infty, A);$

$$\begin{aligned}
 H := & \text{Diff} \left(\sum_{\infty=0}^{\infty} \frac{((-1)^{\infty(500)})^{\infty}}{\infty! \left(\int_0^{\infty} t^{r^k + 100} \exp^{-\frac{1}{100} t^{100}} dt \right)} + \sum_{\infty=0}^{\infty} \right. \\
 & \left. \frac{1}{100} \frac{((-1)^{\infty(500)})^{\infty}}{\infty! \left(\int_0^{\infty} t^{r^k + 98} \exp^{-\frac{1}{100} t^{100}} dt \right)}, 1000, 1000 \right) \\
 & + \frac{1}{1000} \text{Diff} \left(\sum_{\infty=0}^{\infty} \frac{((-1)^{\infty(500)})^{\infty}}{\infty! \left(\int_0^{\infty} t^{r^k + 100} \exp^{-\frac{1}{100} t^{100}} dt \right)} + \sum_{\infty=0}^{\infty} \right. \\
 & \left. \frac{1}{100} \frac{((-1)^{\infty(500)})^{\infty}}{\infty! \left(\int_0^{\infty} t^{r^k + 98} \exp^{-\frac{1}{100} t^{100}} dt \right)}, 1000 \right) \\
 & + \frac{99999999}{10000000000} \sum_{\infty=0}^{\infty} \frac{((-1)^{\infty(500)})^{\infty}}{\infty! \left(\int_0^{\infty} t^{r^k + 100} \exp^{-\frac{1}{100} t^{100}} dt \right)} \\
 & + \frac{99999999}{10000000000} \sum_{\infty=0}^{\infty} \frac{1}{100} \frac{((-1)^{\infty(500)})^{\infty}}{\infty! \left(\int_0^{\infty} t^{r^k + 98} \exp^{-\frac{1}{100} t^{100}} dt \right)}
 \end{aligned}$$

> $G := \text{subs}(z = \infty, k = 100, v = 1, r = \infty, A)$

$G := 0$

>
>

RIWAYAT HIDUP

Suryani Aswatul Asyiah, lahir di Kabupaten Mojokerto Jawa Timur pada tanggal 25 Oktober 1992, biasa dipanggil Ani, tinggal di Jalan Raya Abdillah dusun Genitri RT.05 RW.02 desa Tirtomoyo Kec. Pakis Kab. Malang. Anak pertama dari pasangan bapak Mas'al Hadi Kusuma (alm) & ibu Eka Surya Iswanti.

Pendidikan dasar ditempuh di SDN Kedungmungal dan lulus pada tahun 2004, setelah itu melanjutkan ke SMP Negeri 2 Pungging dan lulus tahun 2007. Kemudian melanjutkan pendidikan ke SMA Negeri 1 Ngoro Mojokerto dan lulus tahun 2010. Selanjutnya, pada tahun 2010 menempuh kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang mengambil Jurusan Matematika.

Selama menjadi mahasiswa, dia berperan aktif pada organisasi intra kampus. Untuk organisasi intra kampus, dia pernah menjadi anggota Himpunan Mahasiswa Jurusan (HMJ) Matematika pada periode 2011/2012. Dia juga mengikuti program khusus perkuliahan Bahasa Arab pada tahun 2010. Selanjutnya, mengikuti program khusus perkuliahan Bahasa Inggris pada tahun 2011.



KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
Jln. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Suryani Aswatul Asyiah
NIM : 10610073
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi : Penyelesaian Persamaan K Bessel Menggunakan Metode Frobenius
Pembimbing I : Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd
Pembimbing II : Ach. Nashichuddin, M.A

No	Tanggal	Materi Konsultasi	Tanda Tangan
1	07 Januari 2015	Konsultasi Bab I dan II	1.
2	14 Januari 2015	Konsultasi Kajian Keagamaan	2.
3	17 Maret 2015	Revisi Bab I, Konsultasi Bab III	3.
4	19 Maret 2015	Acc Kajian Keagamaan	4.
5	20 Maret 2015	Acc Bab I, II	5.
6	05 Mei 2015	Revisi, Bab I, II, III	6.
7	15 September 2015	Konsultasi Kajian Keagamaan	7.
8	21 Oktober 2015	Revisi Kajian Keagamaan	8.
9	5 September 2016	Konsultasi Bab I, II, III	9.
10	22 September 2016	Revisi Bab I, III	10.
11	7 Oktober 2016	Konsultasi Bab III	11.
12	01 November 2016	Konsultasi Kajian Keagamaan	12.
13	03 November 2016	Acc Keseluruhan Kajian Keagamaan	13.
14	04 November 2016	Acc Keseluruhan Bab I, II, III, IV, dan Abstrak	14.
15	09 November 2016	Acc Keseluruhan	15.

Malang, 09 November 2016
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

