DIMENSI METRIK GRAF $K_r + mK_s, m, r, s \in N$

SKRIPSI

Oleh:
HINDAYANI
NIM. 06510034

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2011

DIMENSI METRIK GRAF $K_r + mK_s, m, r, s \in N$

SKRIPSI

Diajukan kepada:
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:

HINDAYANI
NIM. 06510034

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2011

DIMENSI METRIK GRAF $K_r + mK_s, m, r, s \in N$

SKRIPSI

oleh:
HINDAYANI
NIM. 06510034

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji:

Tanggal: 15 Desember 2010

Pembimbing I,

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

Pembimbing II,

Ach. Nashichuddin, MA
NIP. 19730705 200003 1 002

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

DIMENSI METRIK GRAF $K_r + mK_s, m, r, s \in N$

SKRIPSI

oleh:
HINDAYANI
NIM. 06510034

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 20 Januari 2011

Penguji Utama	: Wahyu H. Irawan, M. Pd NIP. 19710420 200003 1 003	1.
Ketua Penguji	: Hairur Rahman, M.Si NIP. 19800429 200604 1 003	2.
Sekretaris Penguji	: Abdussakir, M.Pd NIP. 19751006 200312 1 001	3.
Anggota Penguji	: Ach. Nashichuddin, MA NIP. 19730705 200003 1 002	4.

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Hindayani
NIM : 06510034
Jurusan : Matematika
Fakultas : Sains dan Teknologi

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri dan bukan merupakan pengambil alihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 28 Januari 2011
Yang membuat pernyataan,

Hindayani
NIM. 06510034

MOTTO

“Di dunia ini, tak ada orang gagal, yang ada adalah orang yang mudah menyerah.”

HALAMAN PERSEMBAHAN

Bismillahirrahmanirrahiim

Untuk adik penulis, Kukuh Prayogi yang sampai detik ini masih berjuang melawan leukemia.

Untuk Orang Tua Penulis, Kamyudi dan Tarti.

Untuk Muhammad Ihsan.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Syukur alhamdulillah penulis haturkan kehadirat Allah SWT yang telah melimpahkan Rahmat dan Hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan studi di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang sekaligus menyelesaikan skripsi ini dengan baik. Selanjutnya penulis haturkan ucapan terima kasih seiring do'a dan harapan *jazakumullah ahsanal jaza'* kepada semua pihak yang telah membantu terselesaikannya skripsi ini. Ucapan terima kasih ini penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku rektor UIN Maulana Malik Ibrahim Malang, yang telah banyak memberikan pengetahuan dan pengalaman yang berharga.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU., D.Sc selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Bapak Abdussakir, M.Pd selaku ketua jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang sekaligus sebagai pembimbing skripsi, yang telah banyak meluangkan waktu, tenaga dan pikiran.
4. Bapak Ach. Nasichuddin, MA selaku dosen pembimbing skripsi, yang telah banyak memberikan pengarahan dan pengalaman yang berharga.

5. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, terutama seluruh dosen, terima kasih atas segenap ilmu dan bimbingannya.
6. Ayahanda dan Ibunda tercinta yang senantiasa memberikan doa dan restunya kepada penulis dalam menuntut ilmu.
7. Adik penulis yang tak pernah berhenti memberi semangat kepada penulis untuk menyelesaikan skripsi ini.
8. Bapak Haris, Ibu Nurul dan Nabiela Amaliya yang telah memberikan tempat tinggal kepada penulis selama menempuh studi.
9. Lina Maria Ulfa, Selamet Hariadi, dan Muhammad Izzul Islam yang selalu memberi dukungan penuh kepada penulis.
10. Sahabat-sahabatku senasib seperjuangan mahasiswa Matematika 2006 dan Matematika 2007 terima kasih atas segala pengalaman berharga dan kenangan indah yang telah terukir.
11. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik berupa materiil maupun moril.

Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan skripsi ini masih terdapat kekurangan dan penulis berharap semoga skripsi ini bisa memberikan manfaat kepada para pembaca khususnya bagi penulis secara pribadi. *Amin Ya Rabbal Alamin.*

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Malang, Januari 2011

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Hindayani. 2011. **Dimensi Metrik Graf $K_r + mK_s, m, r, s \in N$**. Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains Dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: 1. Abdussakir, M.Pd
2. Ach. Nashichuddin, MA

Kata Kunci: jarak, himpunan pemisah, dimensi metrik, graf $K_r + mK_s$

Konsep himpunan pemisah yang mempunyai kardinalitas minimum telah terbukti sangat berguna dan atau terpakai untuk pembahasan pada bidang lain seperti Kimia, Navigasi Robot dan Pencarian dan Optimasi Kombinasi. Oleh karena itu, penulisan skripsi ini ditujukan untuk menjelaskan dimensi metrik graf $K_r + mK_s, m, r, s \in N$.

Himpunan pemisah dari suatu graf G adalah subset dari himpunan $V(G)$ yang memiliki representasi jarak yang berbeda terhadap setiap titik di graf G. Himpunan pemisah dengan kardinalitas minimum disebut himpunan pemisah minimum, dan kardinalitas dari himpunan pemisah minimum tersebut dinamakan dimensi metrik dari G dinotasikan $dim(G)$.

Dengan menggambar grafnya, akan dapat dengan mudah dicari himpunan pemisah, himpunan pemisah minimum dan tentu saja dimensi metriknya. Kemudian dimensi metrik tersebut diformulasikan dalam bentuk teorema.

Hasil dari penelitian ini adalah $\dim(K_r + mK_1) = m + (r-2)$ dan $\dim(K_r + mK_s) = (s-1) + m(r-1)$. Penelitian ini dapat dilanjutkan dengan menjelaskan dimensi metrik dari graf dengan operasi berbeda dan atau pada graf yang dipartisi.

ABSTRACT

Hindayani. 2011. **On the Metric Dimension of Graph $\boldsymbol{K_r + mK_s, m, r, s \in N}$.** Thesis. Mathematics Department Faculty of Science and Technology The State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang.
Advisor: 1. Abdussakir, M.Pd
2. Ach. Nashichuddin, MA

Key words: distance, resolving set, metric dimension, graph $K_r + mK_s$

The concept of minimum resolving set has proved to be useful and or related to a variety of fields such as Chemistry, Robotic Navigation, and Combinatorial Search and Optimization. So that, this thesis explains the metric dimension of graph $K_r + mK_s, m, r, s \in N$.

Resolving set of a graph G is a subset of $V(G)$ that its distance representation is distinct to all vertices of graph G. Resolving set with minimum cardinality is called minimum resolving set, and cardinal states metric dimension of G and noted with $dim(G)$.

By drawing the graph, it will be found the resolving set, minimum resolving set and the metric dimension easily. After that, formulate those metric dimensions into a theorem.

This research search for the metric dimension of $K_r + mK_s, m \geq 2, m, r, s \in N$ and its outcome are $\dim(K_r + mK_1) = m + (r - 2)$ and $\dim(K_r + mK_s) = (s - 1) + m(r - 1)$. This research can be continued for determining the metric dimension of another graph, by changing the operation of its graph or partition graph.

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Kehidupan adalah mukjizat yang tak dapat dihadirkan oleh tangan manusia. Hanya tangan Allah yang dapat menghadirkan mukjizat-mukjizat dan meniupkan ruh kehidupan dalam benda mati. Melihat tumbuhan yang sedang berkembang, kebun-kebun yang rindang, dan buah-buahan yang ranum, akan membuka mata dan hati untuk melihat tangan Allah Yang Maha Menciptakan (Quthb, 2004:392).

Segala sesuatu yang ada di alam semesta ini juga berpasang-pasangan, baik benda maupun sifatnya. Langit berpasangan dengan bumi, panas berpasangan dengan dingin, laki-laki berpasangan dengan perempuan, daratan berpasangan dengan lautan, baik berpasangan dengan buruk, dan kebaikan berpasangan dengan kemungkaran (Al Jazairi, 2009:93). Sebagaimana firman Allah dalam surat Yasin ayat 36, sebagai berikut:

سُبْحَـٰنَ ٱلَّذِى خَلَقَ ٱلْأَزْوَٰجَ كُلَّهَا مِمَّا تُنۢبِتُ ٱلْأَرْضُ وَمِنْ أَنفُسِهِمْ وَمِمَّا لَا يَعْلَمُونَ ﴿٣٦﴾

"Maha Suci Tuhan yang telah menciptakan pasangan-pasangan semuanya, baik dari apa yang ditumbuhkan oleh bumi dan dari diri mereka maupun dari apa yang tidak mereka ketahui."

Allah menciptakan dua jenis kelamin dari semua makhluk yakni jantan dan betina, agar manusia mengingat keesaan Allah SWT dan keagungan-Nya. Jadi, semua makhluk berpasangan sedangkan Allah tidak ada duanya, tidak ada sekutu bagi-Nya, dan tidak beristri ataupun beranak (Aidh, 2007:188).

Tak hanya tentang konsep berpasangan, Keagungan Allah SWT juga dapat dilihat dari keteraturan bilangan, bentuk dan keharmonisan sistem kerja segala sesuatu yang ada di alam ini. Kaitannya dengan matematika yaitu jika manusia menguasai sains khususnya matematika, manusia akan mengetahui bagaimana alam akan bertingkah laku pada kondisi dan situasi tertentu dan dapat memprediksi bagaimana alam akan memberikan reaksi terhadap aksi yang dilakukan kepadanya. Manusia juga dapat merekayasa kondisi yang telah ia pilih sehingga alam memberikan respons yang dapat menguntungkannya. Sederhananya, matematika yang dikuasai manusia dapat dijadikan sebagai sumber teknologi dalam memanfaatkan lingkungan yang dikelolanya dengan baik hingga manusia pantas disebut sebagai *khalifah* di bumi.

Senada dengan hal di atas, menurut Abdussakir (2007:79), alam semesta memuat bentuk-bentuk dan konsep matematika, meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Alam semesta serta segala isinya diciptakan Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan, dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi.

Menurut Qarani (2007:346), seorang matematikawan sejati adalah orang yang melihat segala penciptaan Tuhan dari sudut pandang di atas, yaitu orang–orang yang memikirkan segala ciptaan Allah SWT dari sudut pandang keteraturan konsep matematika yang dipakai. Orang-orang yang memikirkan penciptaan Allah SWT, pada hakikatnya adalah orang-orang yang senantiasa berzikir kepada-Nya dengan hati, lisan dan anggota tubuh mereka. Mereka berzikir dalam segala keadaan, bahkan kesibukan tidak menghalangi mereka dari berzikir dan terus merenungi ayat-ayat Allah SWT dan segala penciptaan-Nya di langit dan di bumi.

Mereka memandang bahwa setiap makhluk merupakan ketepatan yang telah dituliskan dalam kitab-Nya sebagai bukti kekuasaan Sang Pencipta. Bagi mereka, alam semesta ini merupakan bilangan-bilangan yang berbicara dan persaksian yang kekal atas keagungan yang Maha Agung, juga atas kekuasaan, hikmah dan keindahan ciptaan-Nya (Al-Qarani, 2007:346).

Telah diketahui bersama bahwa dewasa ini banyak sekali penelitian yang menunjukkan bahwa segala sesuatu memang berpasangan, salah satunya yaitu unsur terkecil dalam kehidupan ini yaitu atom, ia pun memuat dua muatan yang berpasangan yaitu muatan positif dan muatan negatif. Hal ini sangat jelas sebagai sebuah bukti bahwa segala sesuatu memang berpasang-pasangan. Atom ini merupakan salah satu contoh sesuatu yang memuat pasangan yang tidak diketahui sebelumnya, yang kemudian diketahui seiring dengan perkembangan ilmu pengetahuan. Oleh karena itu, tidak menutup kemungkinan jika suatu saat akan ditemukan pasangan-pasangan baru dengan ilmu pengetahuan, salah satunya dalam ilmu matematika.

Matematika merupakan dasar bagi ilmu pengetahuan lain, tidak heran jika dewasa ini semakin banyak muncul penggunaan model matematika maupun penalaran matematika sebagai alat bantu dalam menyelesaikan permasalahan yang dihadapi dalam berbagai disiplin ilmu. Teori graf merupakan salah satu cabang matematika yang penting dan banyak manfaatnya. Dengan mengkaji dan menganalisis model atau rumusan teori graf dapat diperlihatkan peranan dan kegunaannya dalam memecahkan permasalahan. Permasalahan yang dirumuskan dengan teori graf dibuat sederhana, yaitu diambil aspek-aspek yang diperlukan dan dibuang aspek-aspek lainnya.

Dari penjelasan di atas, penulis memilih pokok bahasan dimensi metrik untuk menunjukkan pasangan, kerapian, dan ukuran alam dengan cara mencari dimensi metrik dari sebuah graf.

Dimensi Metrik menjadi menarik untuk dibahas karena konsep himpunan pemisah yang mempunyai kardinalitas minimum telah terbukti sangat berguna dan atau terpakai untuk pembahasan pada bidang lain seperti Kimia (berdasarkan jurnal *Chartrand*, *dkk*, *Boundary vertices in Graph and Poisson and Zhang*, *The Metric Dimension of unicyclic graphs*), Navigasi Robot dan Pencarian (berdasarkan jurnal *Khuller*, *Raghavachari, and Rosenfeld*, *Landmarks in graphs*) dan Optimasi Kombinasi (berdasarkan jurnal *Sebo and Tannier*, *On Metric generator of graphs*) (Hernando, dkk, 1).

Dimensi Metrik adalah kardinalitas minimum himpunan pemisah (*resolving set*) pada G. Misalkan u dan v adalah *vertex-vertex* dalam graf terhubung G, maka jarak $d(u, v)$ adalah panjang lintasan terpendek antara u dan v pada G. Untuk himpunan terurut $W = \{w_1, w_2, w_3, \dots, w_k\}$ dari *vertex-vertex* dalam graf terhubung G dan vertex $v \in V(G)$, representasi dari v terhadap W adalah k-vektor (pasangan k-*tuple*)

$$r(v|W) = (d(v, w_1), d(v, w_2), \dots, d(v, w_k))$$

Jika $r(v|W)$ untuk setiap *vertex* $v \in V(G)$ berbeda, maka W disebut himpunan pemisah dari $V(G)$. Himpunan pemisah dengan kardinalitas minimum disebut himpunan pemisah minimum (basis metrik), dan kardinalitas dari basis metrik tersebut dinamakan dimensi metrik dari G dinotasikan $dim(G)$ (Wahyudi dan Sumarno, 2010:736).

Kajian tentang dimensi metrik pada graf ini merupakan kajian yang sedang marak dibicarakan. Terbukti dengan adanya banyak jurnal dan penelitian-penelitian yang membahas tentang kajian ini, misalnya *Graphs with Metric Dimension Two- A Characterization* (Sudhakara dan Herman, 2009), *On the Metric Dimension of Grassmann graphs* (Robert dan Karen, 2010), *On the Metric Dimension of Some Families of Graphs* (Jose dan Mari, 2010), Dimensi Metrik Graf Kincir dengan Pola $K_1 + mK_3$ (Wahyudi dan Sumarno, 2010), *On the Metric Dimension of Corona Product Graphs* (Yero, dkk, 2010) dan lain sebagainya. Semuanya membahas tentang dimensi metrik pada graf. Penelitian ini sendiri sebenarnya merupakan pengembangan dari penelitian tentang dimensi metrik graf yang telah diteliti oleh peneliti sebelumnya, yaitu Dimensi Metrik Graf Kincir dengan Pola $K_1 + mK_3$.

Graf Kincir dinotasikan dengan W_2^m adalah graf yang dibangun dengan menghubungkan semua *vertex* mK_2 dengan sebuah *vertex* pusat. Peneliti ingin mengembangkan penelitian ini pada graf $K_r + mK_s$. Oleh sebab itu, peneliti memilih judul **"Dimensi Metrik Graf $\boldsymbol{K_r + mK_s, m, r, s \in N}$"**.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah yang telah dipaparkan di atas maka masalah yang dapat dirumuskan adalah berapa dimensi metrik pada graf $K_r + mK_s$?

1.3 Tujuan

Penelitian ini dilakukan dengan tujuan untuk menjelaskan dimensi metrik pada graf $K_r + mK_s$.

1.4 Manfaat Penelitian

Hasil Penelitian diharapkan bermanfaat bagi:

a. Pengembangan ilmu pengetahuan

Diharapkan agar dapat menjadi suatu wacana pengembangan ilmu pengetahuan yaitu ilmu matematika khususnya terapan teori graf.

b. Bagi penulis

Sebagai tambahan pengalaman yang sangat berharga dalam mengaktualisasi diri sebagai insan akademik dalam menerapkan pengalaman serta teori – teori ilmu pengetahuan yang telah diperoleh selama menjalani perkuliahan.

c. Bagi lembaga UIN Maulana Malik Ibrahim Malang

Sebagai bahan kepustakaan yang dijadikan sarana pengembangan wawasan keilmuan khususnya di jurusan matematika untuk mata kuliah teori graf.

1.5 Metode Penelitian

Dalam penulisan skripsi ini, penulis menggunakan metode penelitian kepustakaan (*library research*), yaitu usaha mendalami, mencermati, menelaah dan mengidentifikasi pengetahuan yang ada dalam kepustakaan, dalam hal ini dapat berupa buku-buku referensi, majalah-majalah, jurnal-jurnal ataupun hasil penelitian orang lain (Hasan, 2002: 45).

Langkah-langkah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1) Merumuskan masalah
2) Menentukan tujuan
3) Mencari sejumlah data pendukung, yaitu data primer diperoleh dengan cara mencari dimensi metrik pada graf $K_2 + mK_s, K_3 + mK_s, K_4 + mK_s, K_5 + mK_s, K_6 + mK_s, K_r + mK_s$.
4) Menganalisis data

   Langkah – langkah untuk menganalisis data adalah sebagai berikut:

   a) Menggambar graf $K_2 + mK_s, K_3 + mK_s, K_4 + mK_s, K_5 + mK_s, K_6 + mK_s, K_r + mK_s$
   b) Mencari dimensi metrik pada graf $K_2 + mK_s, K_3 + mK_s, K_4 + mK_s, K_5 + mK_s, K_6 + mK_s, K_r + mK_s$ dengan cara:
      - Menetukan himpunan pemisahnya
      - Menentukan basis metrik
      - Menyimpulkan dimensi metriknya
      - Membuat pola secara umum
   c) Merumuskan hasil pencarian dimensi metrik dalam teorema.
   d) Membuktikan rumusan hasil dimensi metrik.

1.6 Sistematika Penulisan

Agar penulisan skripsi ini lebih terarah, mudah ditelaah dan dipahami, maka digunakan sistematika penulisan yang terdiri dari empat bab. Masing-masing bab dibagi ke dalam beberapa subbab.

Bab I adalah pendahuluan yang meliputi latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian dan sistematika penulisan. Bab berikutnya adalah kajian pustaka. Bagian ini terdiri atas konsep-konsep (teori-teori) yang mendukung bagian pembahasan. Konsep-konsep tersebut antara lain membahas tentang pengertian graf, derajat suatu titik, lintasan, graf komplit dan kincir, dan pengertian dimensi metrik graf. Bab III adalah pembahasan yang memaparkan tentang penentuan pola dimensi metrik graf $K_r + mK_s$. Bagian terakhir adalah bab IV yaitu penutup. Pada bab ini dibahas tentang kesimpulan dan saran.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Graf

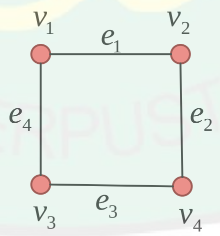
2.1.1 Definisi Graf

Suatu graf G adalah suatu pasangan himpunan (V, E) dimana V adalah himpunan tak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut titik (*vertex*), dan E adalah himpunan dari pasangan tak terurut dari titik-titik berbeda di V yang disebut sisi (*edge*). Himpunan titik di graf G ditulis $V(G)$ dan himpunan sisi di graf G dilambangkan dengan $E(G)$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:4).

Contoh:

Misal $G: (V, E)$ dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $E(G) = \{(v_1, v_2), (v_2, v_4),$ $(v_3, v_4), (v_3, v_1)\}$

Jadi graf G digambar sebagai berikut;

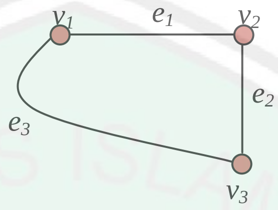


Gambar 2.1 Graf G dengan empat titik dan empat sisi

2.1.2 Definisi *Order* dan *Size*

Banyaknya anggota himpunan titik pada suatu graf G disebut *order* G dan dinotasikan dengan $p(G)$ atau p saja. Sedangkan banyaknya anggota himpunan sisinya disebut *size* G dan dinotasikan dengan $q(G)$ atau q. Apabila ada suatu notasi graf (p, q) maka artinya adalah graf tersebut mempunyai *order* p dan *size* q (Chartrand dan Lesniak, 1986:4).

Contoh:



Gambar 2.2 Graf $G(3,3)$

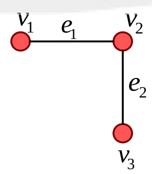
Graf G di atas mempunyai *order* 3 dan *size* 3 yang dapat dinotasikan sebagai graf $G(3,3)$.

2.1.3 Definisi Terhubung Langsung dan Terkait Langsung

Suatu sisi $e = (u, v)$ dikatakan menghubungkan titik u dan v. Jika $e = (u, v)$ adalah sisi pada graf G maka u dan v disebut terhubung langsung (*adjacent*) sedangkan u dan e disebut terkait langsung (*incident*), begitu juga dengan v dan e (Chartrand dan Lesniak, 1986:4).

Contoh:

Misal $G: (V, E)$ dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3\}$, $E(G) = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3)\}$, graf G dapat digambar sebagai berikut;



Gambar 2.3 Graf G dengan titik yang terhubung langsung dan titik dan sisi yang terkait langsung

Dari graf G di atas, terlihat bahwa v_1 dan v_2 terhubung langsung (*adjacent*) begitu pula dengan v_2 dan v_3. Sedangkan v_1 dan e_1, v_2 dan e_1, v_2 dan e_2, v_3 dan e_2 disebut terkait langsung (*incident*).

2.1.4 Definisi Derajat

Derajat dari suatu titik v pada graf G adalah banyak sisi pada graf G yang terkait langsung dengan titik v. Derajat suatu titik v di G dinotasikan dengan $deg_G v$. Suatu titik berderajat 0 disebut suatu titik terisolasi dan titik yang berderajat 1 disebut titik ujung (Chartrand dan Lesniak, 1986:7).

Teorema 2.1.4

Misalkan G adalah sebuah graf dengan *order* p dan *size* q, dimana $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots\ldots, v_p\}$. Maka

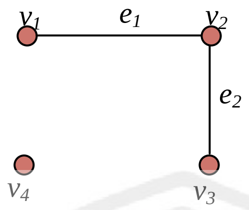
$$\sum_{i=1}^{p} d_G(v_i) = 2q$$

(Chartrand dan Lesniak, 1986:7).

Bukti:

Setiap menghitung derajat suatu titik di G, maka suatu sisi dihitung 1 kali. Karena setiap sisi menghubungkan dua titik berbeda maka ketika menghitung derajat semua titik, sisi akan terhitung dua kali. Dengan demikian diperoleh bahwa jumlah semua derajat titik di G sama dengan 2 kali banyak sisi di G.

Contoh:



Gambar 2.4 Graf G dengan titik berderajat 1, 2, dan 0

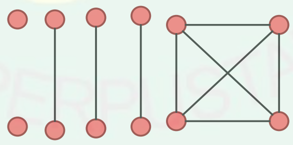
Titik v_1 mempunyai derajat 1, $deg_G(v_1)$ = 1, titik v_2 mempunyai derajat 2, $deg_G(v_2)$ = 2 dan titik v_4 mempunyai derajat 0, $deg_G(v_4)$ = 0. Titik v_1 dan titik v_3 disebut titik ujung. Sedangkan titik v_4 disebut titik terisolasi.

2.2 Operasi pada Graf

2.2.1 Operasi Gabungan

Gabungan (*union*) dari G_1 dan G_2, ditulis $G = G_1 \cup G_2$, adalah graf dengan $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2)$. Jika graf G merupakan gabungan dari sebanyak n graf H, $n \geq 2$, maka ditulis $G = nH$ (Abdussakir, dkk, 2009:33).

Contoh:

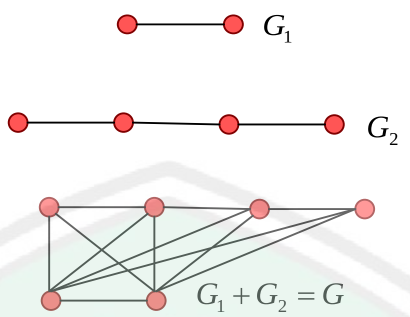


Gambar 2.5 Graf $2K_1 \cup 3K_2 \cup K_4$

2.2.2 Operasi Jumlah

Definisi operasi jumlah dari graf G_1 dan G_2 ditulis $G = G_1 + G_2$, adalah graf dengan himpunan *vertex* $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan himpunan *edge*-nya $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{(u, v)|u \in V(G_1), v \in V(G_2)\}$ (Abdussakir, dkk, 2009:33).

Contoh dari operasi penjumlahan pada graf dapat dilihat di bawah ini;



Gambar 2.6 Graf $G = G_1 + G_2$

2.3 Graf Terhubung

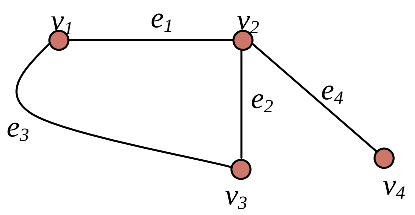
2.3.1 Definisi Lintasan

Misalkan u dan v adalah adalah titik-titik pada graf G. Sebuah jalan (*walk*) $u - v$ pada graf G adalah barisan selang-seling antar titik dan sisi,

$$u = u_0, e_1, u_1, e_2, \ldots, u_{n-1}, e_n, u_n = v$$

dimulai dengan titik u dan diakhiri dengan titik v, dimana $e_i = u_{i-1}u_i$ untuk i = 1, 2, 3, ..., n . Bilangan n disini menunjukkan panjangnya jalan. Sebuah jalan trivial tidak mempunyai sisi, $n = 0$. Perlu diperhatikan bahwa pada jalan ada kemungkinan pengulangan sisi dan titik. Sebuah $u - v$ *trail* adalah sebuah jalan $u - v$ yang tidak terdapat pengulangan sisi, sedangkan sebuah jalan $u - v$ yang tidak terdapat pengulangan titik dan sisi adalah lintasan $u - v$. Oleh sebab itu, setiap lintasan pasti merupakan *trail* (Chartrand dan Lesniak, 1986:26).

Contoh:



Jalan $v_1 - v_2$: $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_1, e_1, v_2, e_4, v_4$.

Trail $v_2 - v_4$: $v_2, e_2, v_3, e_3, v_1, e_1, v_2, e_4, v_4$.

Lintasan $v_3 - v_4$: $v_3, e_3, v_1, e_1, v_2, e_4, v_4$.

Gambar 2.7 Graf G dengan jalan, *trail*, dan lintasannya

Contoh jalan pada graf G di atas adalah jalan $v_1 - v_2$, yaitu $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_1, e_1, v_2, e_4, v_4$.

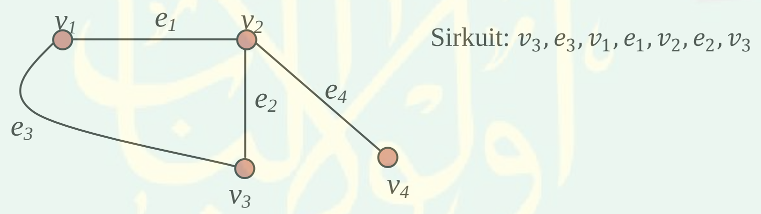
Contoh *trail* pada graf G di atas adalah *trail* $v_2 - v_4$, yaitu $v_2, e_2, v_3, e_3, v_1, e_1, v_2, e_4, v_4$.

Contoh lintasan pada graf G di atas adalah lintasan $v_3 - v_4$, yaitu $v_3, e_3, v_1, e_1, v_2, e_4, v_4$.

2.3.2 Definisi Sirkuit

Suatu *trail* tertutup dan tak trivial di graf G disebut sebagai suatu sirkuit pada graf G (Chartrand dan Lesniak, 1986:28).

Contoh:



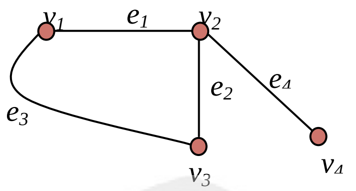
Gambar 2.8 Graf G dan sirkuitnya

Salah satu sirkuit pada graf G di atas adalah *trail* dari v_3 ke v_3, yaitu $v_3, e_3, v_1, e_1, v_2, e_2, v_3$.

2.3.3 Definisi Sikel

Jika ada suatu sirkuit $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v_n, v_1$, dimana $n \geq 3$ dan memiliki sebanyak n titik v_i, akan disebut sikel jika titik v_i berbeda, dengan $i = 1,2,3, \ldots, n$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:28).

Contoh:



Gambar 2.9 Graf G dengan sikelnya

Salah satu sikel pada graf G di atas adalah sirkuit dari v_1 ke v_3, yaitu v_1, v_2, v_3, v_1 dan yang bukan merupakan sikel adalah $v_1, v_3, v_2, v_4, v_2, v_1$.

2.3.4 Definisi Jarak, Eksentrisitas, dan Diameter Graf

Jarak $d(u, v)$ antara dua titik u dan v adalah panjang minimum dari lintasan yang menghubungkan $u - v$ pada graf G jika ada, jika tidak ada $d(u, v) = \infty$ (Harary, 1969:14).

Eksentrisitas titik u di graf G dinotasikan dengan $e(u)$ adalah jarak terbesar dari u ke semua titik di G. Jadi,

$$e(u) = max\{d(u, v)|v \in V(G)\}$$

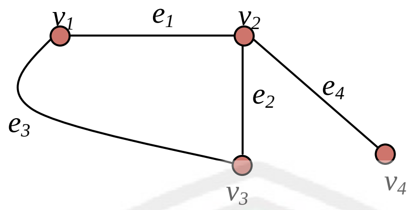
Jika u dan v adalah titik pada G sehingga $e(u) = d(u, v)$, maka v disebut titik eksentrik dari u. Dengan kata lain, titik v disebut titik eksentrik dari u jika jarak dari u ke v sama dengan eksentrisitas dari u.

Diameter dari graf G dinotasikan dengan $diam\,(G)$, adalah eksentrisitas terbesar dari semua titik di G. Jadi,

$$diam\,(G) = max\{e(v)|v \in V\}$$

(Abdussakir, dkk, 2009:56-57).

Contoh:



$d(v_{1,}v_2) = 1$, $d(v_1, v_3) = 1$

$d(v_1, v_4) = 2$, $e(v_1) = 2$,

$diam\ (G) = 2$

Gambar 2.10 Graf G dengan jarak, eksentrisitas, dan diameternya

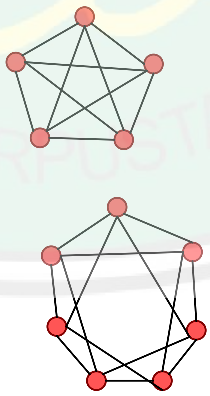
Jarak dari v_1 ke v_2, v_3, dan v_4 adalah $d(v_{1,}v_2) = 1$, $d(v_1, v_3) = 1$ dan $d(v_1, v_4) = 2$. Sehingga $e(v_1) = 2$. Dengan cara yang sama diperoleh $e(v_2) = 1, e(v_3) = 2, e(v_4) = 2$. Dengan demikian, $diam\ (G) = 2$.

2.4 Jenis-Jenis Graf

Berikut ini dijelaskan beberapa jenis graf khusus, diantaranya:

2.4.1 Graf Beraturan

Graf G dikatakan beraturan-r atau beraturan dengan derajat r jika masing-masing titik v di G, maka $deg_G(v) = r$, untuk bilangan bulat tak negatif r. Graf beraturan tiga disebut dengan graf kubik. Berikut adalah gambar graf beraturan 4;



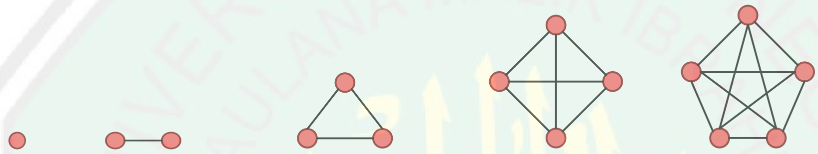
Gambar 2.11 Graf beraturan 4

(Abdussakir, dkk, 2009:20).

2.4.2 Graf Komplit atau Graf Lengkap

Graf G dikatakan komplit jika setiap dua titik yang berbeda saling terhubung langsung (*adjacent*). Graf komplit dengan *order* n dinyatakan dengan K_n. Dengan demikian, maka graf K_n merupakan graf beraturan $(n-1)$ dengan *order* $p = n$ dan *size* $q = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$

Berikut ini adalah gambar graf $K_1, K_2, K_3, K_4, dan\ K_5$;

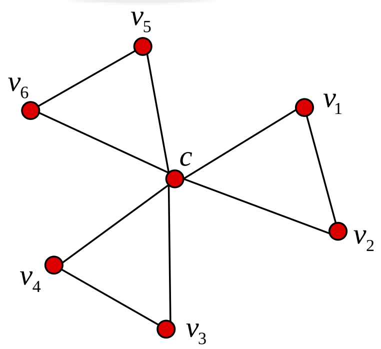


Gambar 2.12 Graf Komplit $K_1, K_2, K_3, K_4, dan\ K_5$

2.4.3 Graf Kincir

Graf kincir dinotasikan dengan W_2^m adalah graf yang dibangun dengan menghubungkan semua *vertex* $mK_2 = \underbrace{K_2 \cup K_2 \ldots \cup K_2}_{m}$ dengan sebuah *vertex* yang disebut *vertex* pusat c. Secara matematis graf kincir dituliskan dengan $W_2^m = K_1 + mK_2$. *Vertex* pusat dalam graf kincir diberi nama c, sedangkan v_i untuk dua *vertex* luar di bilah i dimana $1 \leq i \leq m$ (Wahyudi dan Sumarno, 2010736).

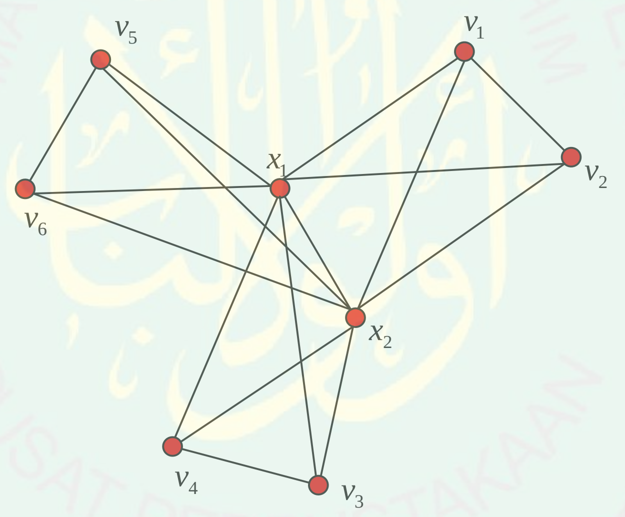
Berikut adalah contoh dari graf kincir dengan 3-bilah;



Gambar 2.13 Graf Kincir dengan 3 bilah W_2^3

2.4.4 Graf $K_2 + mK_2$

Graf $K_2 + mK_2$ ini sebenarnya merupakan pengembangan dari graf kincir yang memiliki dua titik pusat. Graf dengan pola $K_2 + mK_2$ ini didefinisikan sebagai graf yang dibangun dengan menghubungkan semua *vertex* mK_2 dengan dua buah *vertex* yang disebut *vertex* pusat x_1 dan x_2 yang saling terhubung. Dua *vertex* pusat dalam graf tersebut diberi nama x_1 dan x_2, sedangkan v_i untuk dua *vertex* luar di bilah *i* dimana $1 \leq i \leq m$. Contoh dari graf dengan pola $K_2 + mK_2$ dengan 3-bilah;



Gambar 2.14 Graf dengan Pola $K_2 + 3K_2$

2.5 Dimensi Metrik

Dimensi Metrik adalah kardinalitas minimum himpunan pemisah (*resolving set*) pada G. Misalkan u dan v adalah *vertex-vertex* dalam graf terhubung G, maka jarak $d(u, v)$ adalah panjang lintasan terpendek antara u dan v pada G. Untuk himpunan terurut $W = \{w_1, w_2, w_3, \ldots, w_k\}$ dari *vertex-vertex* dalam graf terhubung G dan *vertex* $v \in V(G)$, representasi dari v terhadap W adalah k-vektor (pasangan k-*tuple*)

$$r(v|W) = (d(v, w_1), d(v, w_2), \dots, d(v, w_k))$$

Jika $r(v|W)$ untuk setiap *vertex* $v \in V(G)$ berbeda, maka W disebut himpunan pemisah dari $V(G)$. Himpunan pemisah dengan kardinalitas minimum disebut himpunan pemisah minimum (basis metrik), dan kardinalitas dari basis metrik tersebut dinamakan dimensi metrik dari G dinotasikan $dim(G)$ (Wahyudi dan Sumarno, 2010: 736).

Lemma 2.5.1

Graf G dan H saling lepas dan ber-*order* minimum 2, berlaku:

$$\dim(G + H) \geq \dim(G) + \dim(H)$$

Bukti:

Misal S adalah himpunan pemisah di $G + H$. Diameter dari $G + H$ paling banyak 2. Karena itu, jarak di $G + H$ antara sebuah titik di $V(G)$ dan sebuah anggota himpunan $S \cap V(G)$ adalah 0, 1, atau 2 tergantung pada apakah v di S, terhubung langsung pada sebuah anggota himpunan $S \cap V(G)$, atau yang lain. Jarak di G antara sebuah titik $v \in V(G)$ dengan sebuah titik $u \in S \cap V(G)$ adalah 0, 1 atau paling tidak 2 tergantung dari apakah $d_{G+H}(v, u)$ adalah 0,1, atau tepat 2.

Cara yang sama berlaku pada graf H, yaitu antara graf H dengan $S \cap V(H)$. Karena $S \cap V(G)$ adalah himpunan pemisah untuk graf G maka $S \cap V(H)$ adalah himpunan pemisah untuk graf H (Glenn, dkk. 2005:5).

Lemma 2.5.2

Misal G dan H graf dengan *order* minimum 2, G dan H saling lepas, dan misal

$\dim(G) = d_1$ dan $\dim(H) = d_2$

maka

$$\dim(G \cup H) = \dim(G) + \dim(H)$$

Bukti:

$\dim(G) = d_1$, berarti G mempunyai himpunan pemisah minimum yang kardinalitasnya d_1, sebut $S_G = \{v_1, v_2, \dots, v_{d_1}\}$. $\dim(H) = d_2$, berarti H mempunyai himpunan pemisah minimum dengan kardinalitas d_2 sebut $S_H = \{u_1, u_2, \dots, u_{d_2}\}$.

Ambil $x, y \in V(G \cup H)$ maka ada beberapa kemungkinan:

a. $x, y \in G$ maka representasi jarak S_G berbeda dan minimum terhadap graf $G \cup H$. $\dim(G \cup H) = d_1$.

b. $x, y \in H$ maka representasi jarak S_H berbeda dan minimum terhadap graf $G \cup H$. $\dim(G \cup H) = d_2$.

c. $x \in G$ dan $y \in H$ maka representasi jarak antara $x\ dan\ y$ adalah tak hingga. Oleh karena itu, $S_G\ dan\ S_H$ memuat anggota himpunan ∞. Jadi representasi jarak $S_G\ dan\ S_H$ yang memuat ∞ berbeda dan minimum terhadap graf $G \cup H$. $\dim(G \cup H) = d_1 + d_2$.

d. $x \in H$ dan $y \in G$ maka representasi jarak antara $x\ dan\ y$ adalah tak hingga. Oleh karena itu, $S_G\ dan\ S_H$ memuat anggota himpunan ∞. Jadi representasi jarak $S_G\ dan\ S_H$ yang memuat ∞ berbeda dan minimum terhadap graf $G \cup H$. $\dim(G \cup H) = d_1 + d_2$.

sehingga terbukti bahwa:

$$\dim(G \cup H) = \dim(G) + \dim(H)$$

Lemma 2.5.3

Jika $K_s, s \geq 2$ dan $mK_s = \underbrace{K_s \cup K_s \cup K_s \cup \ldots \cup K_s}_{m}$, maka:

$$\dim(mK_s) = m \dim(K_s)$$

Bukti:

Akan dibuktikan dengan induksi matematika;

Untuk $m = 1$, $\dim(K_s) = \dim(K_s)$, benar

Untuk $m = 2$, $\dim(2K_s) = \dim(K_s \cup K_s)$

$$= \dim(K_s) + \dim(K_s)$$

$$= 2\dim(K_s), benar$$

Diasumsikan benar untuk $m = k$, maka $\dim(kK_s) = \dim\left(\underbrace{K_s \cup K_s \cup \ldots \cup K_s}_{k}\right)$

$\dim(kK_s) = \underbrace{\dim(K_s) + \dim(K_s) + \cdots + \dim(K_s)}_{k}$

$\dim(kK_s) = k\dim(K_s)$

Akan ditunjukkan benar untuk $m = k + 1$

$\dim((k+1)K_s) = \dim\left(\underbrace{K_s \cup K_s \cup \ldots \cup K_s}_{k+1}\right)$

$\dim((k+1)K_s) = \dim\left(\underbrace{K_s \cup K_s \cup \ldots \cup K_s}_{k} \cup K_s\right)$

Misal $G = \underbrace{K_s \cup K_s \cup \ldots \cup K_s}_{k}$, maka

$\dim((k+1)K_s) = \dim(G \cup K_s)$

$\dim((k+1)K_s) = \dim(G) + \dim(K_s)$

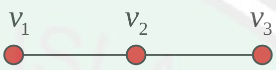
$\dim((k+1)K_s) = k\dim(K_s) + \dim(K_s)$

$\dim((k+1)K_s) = (k+1)\dim(K_s)$

Jadi, terbukti bahwa $\dim(mK_s) = m\dim(K_s)\ dengan\ s \geq 2$.

Contoh 1

Diberikan graf lintasan dengan tiga titik sebagai berikut;



Gambar 2.15 Graf lintasan dengan tiga titik

Misal diambil $S = \{v_2\}$, maka representasinya adalah:

$r(v_1|S) = (1)$ $\quad$ $r(v_2|S) = (0)$ $\quad$ $r(v_3|S) = (1)$,

karena masih terdapat nilai representasi yang sama yaitu $r(v_1|S) = (1) = r(v_3|S)$, maka $S = \{v_2\}$ bukan merupakan himpunan pemisah

Misal diambil $S = \{v_1\}$, maka representasinya adalah:

$r(v_1|S) = (0)$ $\quad$ $r(v_2|S) = (1)$ $\quad$ $r(v_1|S) = (2)$

karena $S = \{v_1\}$ mempunyai nilai representasi yang berbeda maka $S = \{v_1\}$ merupakan salah satu himpunan pemisah. Begitu juga apabila diambil $S = \{v_3\}$, representasinya adalah sebagai berikut:

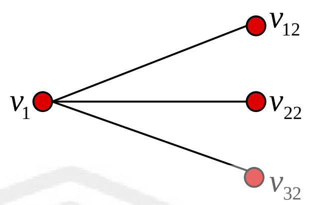
$r(v_1|S) = (2)$ $\quad$ $r(v_2|S) = (1)$ $\quad$ $r(v_1|S) = (0)$

karena $S = \{v_1\}$ dan S=$\{v_3\}$ merupakan himpunan pemisah dari graf di atas.

$S = \{v_1\}$ dan S=$\{v_3\}$ disebut sebagai himpunan pemisah yang mempunyai jumlah anggota minimum (basis metrik) sehingga dim(G) = 1. Untuk selanjutnya apabila ada dua basis metrik atau lebih maka akan diambil satu basis metrik untuk mempercepat penghitungan dimensi metriknya.

Contoh 2

Diberikan Graf tiga lintasan dengan dua titik sebagai berikut;



Gambar 2.16 Graf tiga lintasan dengan dua titik

Ambil S = $\{v_{12}\}$, maka representasi jaraknya adalah:

$r(v_1|S) = (1)$ $\quad$ $r(v_{12}|S) = (0)$

$r(v_{22}|S) = (2)$ $\quad$ $r(v_{32}|S) = (2)$

karena masih terdapat nilai representasi yang sama yaitu r$(v_{11}|S) = (2) = r(v_{32}|S)$ maka $S = \{v_{12}\}$ bukan merupakan himpunan pemisah. Oleh sebab itu, dicoba untuk mengambil dua titik.

Ambil $S = \{v_{12}, v_{22}\}$, maka representasi jarak untuk himpunan S yang memiliki lebih dari satu anggota dihitung mulai dari representasi jarak dari anggota pertama diikuti representasi anggota kedua dan seterusnya. Agar lebih jelas, amatilah representasi jarak berikut;

Representasi jarak $S = \{v_{12}, v_{22}\}$ adalah:

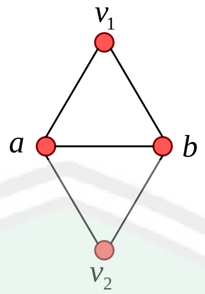
$r(v_1|S) = (1,1)$ $\quad$ $r(v_{12}|S) = (0,2)$

$r(v_{22}|S) = (2,0)$ $\quad$ $r(v_{32}|S) = (2,2)$

karena $S = \{v_{12}, v_{22}\}$ mempunyai nilai representasi jarak yang berbeda dan mempunyai banyak anggota minimum yaitu 2, maka $S = \{v_{12}, v_{22}\}$ adalah basis metrik graf tiga lintasan dengan dua titik (P_{32}), maka dimensi metrik graf (P_{32}) adalah dua, dim(P_{32}) = 2

Contoh 3

Diberikan graf $K_2 + 2K_1$;



Gambar 2.17 Graf $K_2 + 2K_1$

Ambil $S = \{v_1\}$, representasi jaraknya adalah:

$r(v_1|S) = (0)$

$r(v_2|S) = (2)$

$r(a|S) = (1)$

$r(b|S) = (1)$

karena $r(a|S)$= $r(b|S) = (1)$ maka $S = \{v_1\}$ bukan himpunan pemisah dan juga bukan merupakan basis metrik. Sehingga banyaknya anggota $S = \{v_1\}$ tidak dapat dikatakan sebagai dimensi metrik. Oleh karena itu, ambil S yang lain.

Ambil $S = \{v_1, a\}$, representasi jaraknya adalah:

$r(v_1|S) = (0,1)$

$r(v_2|S) = (2,1)$

$r(a|S) = (1,0)$

$r(b|S) = (1,1)$

karena tidak ada satupun representasi jarak yang sama untuk $S = \{v_1, a\}$, maka $S = \{v_1, a\}$ merupakan himpunan pemisah dan basis metrik. Selain itu, banyaknya anggota basis ini merupakan yang paling minimum sehingga banyaknya anggota

$S = \{v_1, a\}$ dapat dinyatakan sebagai dimensi metrik dari graf dengan pola $K_2 + 2K_1$. Jadi, dim($K_2 + 2K_1$) = 2.

2.6 Konsep Al Qur'an tentang Berpasang-pasangan

Allah berfirman dalam surat Yasin ayat 36, sebagai berikut:

سُبْحَٰنَ ٱلَّذِى خَلَقَ ٱلْأَزْوَٰجَ كُلَّهَا مِمَّا تُنۢبِتُ ٱلْأَرْضُ وَمِنْ أَنفُسِهِمْ وَمِمَّا لَا يَعْلَمُونَ ﴿٣٦﴾

"Maha Suci Tuhan yang telah menciptakan pasangan-pasangan semuanya, baik dari apa yang ditumbuhkan oleh bumi dan dari diri mereka maupun dari apa yang tidak mereka ketahui."

Berikut makna ayat tersebut menurut beberapa *muffassir*:

1. Ibnu Katsir

   "Maha Suci Rabb yang telah menciptakan pasangan-pasangan semuanya, baik dari apa yang ditumbuhkan oleh bumi," yaitu berupa tumbuh-tumbuhan, buah-buahan dan tanam-tanaman. *"Dan dari diri mereka,"* dimana Dia menjadikan laki-laki dan perempuan. *"Maupun dari apa yang tidak mereka ketahui,"* yaitu berupa makhluk-makhluk lain yang tidak mereka ketahui. Sebagaimana Allah Yang Maha Agung berfirman: *"Segala sesuatu Kami ciptakan berpasang-pasangan supaya kamu mengingat akan kebesaran Allah. (Adz-dzariyat, 51:49)"* (Ibnu Katsir, 2007:645).

2. Al Maraghiy

   Maha Suci Allah yang telah menciptakan segala macam tetumbuhan, buah-buahan dan berbagai macam tanaman ini seluruhnya, dan yang telah menciptakan anak-anak mereka, ada yang laki-laki dan ada pula yang wanita, dan yang telah menciptakan pula barang-barang yang tidak mereka ketahui, yaitu Allah belum memberitahukan barang-barang tersebut kepada mereka dan tidak memberi jalan kepada mereka untuk mengetahuinya secara rinci, tetapi memberitahukan kepada mereka hal itu secara ijmal, seperti firman-Nya: *"Dan Allah menciptakan apa yang kamu tidak mengetahuinya." (An-nahl, 16:8).* Agar semua itu mereka jadikan sebagai dalil atas kebesaran Yang Maha Pencipta, dan betapa luas kerajaan dan betapa besar Kekuasaan-Nya. Kesimpulannya, Maha Suci Tuhan kita, pencipta makhluk yang luas ini, yang terdiri dari tumbuh-tumbuhan, binatang, manusia dan pencipta dari apa yang tidak kita ketahui hakikatnya. Hal ini merupakan dalil atas betapa besar kekuasaan Allah dan betapa luas kerajaan-Nya. Maha Suci Tuhan kita dari segala kekurangan yang tidak sesuai dengan keagungan dan kebesaran-Nya (Al Maraghiy, 1989:7-8).

3. Al Qurthubi

"Maha Suci Tuhan yang telah menciptakan pasangan-pasangan semuanya." Allah menyucikan diri-Nya dari perkataan orang-orang kafir, yang mana mereka menyembah selain-Nya, sekalipun mereka mengetahui nikmat dan bekas-bekas dari kekuasaan-Nya. Dalam hal itu terdapat makna perintah, atau sucikanlah Dia dari apa yang tidak sesuai dengannya.

Ada yang mengatakan, "Dalam hal itu terdapat makna *Ta'ajjub* (keheranan), atau sungguh mengherankan mereka itu dalam kekufurannya padahal mereka menyaksikan tanda-tanda itu. Orang yang kaget akan sesuatu akan mengatakan, *Subhanallah*! *Al Azwaaj* artinya *Al Anwaa'* (bermacam-macam), dan *Al-Anshaaf* (berjenis-jenis). Setiap pasangan adalah jenis karena ia berbeda-beda dalam warna, rasa bentuk, kecil, dan besarnya. Perbedaan itulah yang menunjukkan macam-macamnya." Qatadah berkata, "Yakni jantan dan betina."

"Baik dari apa yang ditumbuhkan oleh bumi," yakni tumbuh-tumbuhan, karena ia bermacam-macam. *"Dan dari diri mereka,"* yakni Dia menciptakan dari mereka anak-anak yang berpasang-pasang dan, jantan dan betina. *"Maupun dari apa yang tidak mereka ketahui,"* maksudnya, dari jenis makhluknya di darat, laut, langit, dan bumi. Kemudian apa yang diciptakan oleh Allah, bisa jadi tidak diketahui oleh manusia dan diketahui malaikat, dan bisa juga tidak diketahui makhluk (Al-Qurthubi, 2009:65).

4. Al Jazairi

"Maha Suci Allah yang telah menciptakan semuanya berpasang-pasangan," maksudnya yang berpasangan adalah laki-laki dan perempuan karena memakai *Al Azwaaj*, hal ini sebagai bentuk pengagungan terhadap Allah yang telah menciptakan semuanya berpasang-pasangan, *"Baik dari apa yang ditumbuhkan oleh bumi dan dari diri mereka maupun dari apa yang mereka tidak ketahui,"* Allah menyusikan diri-Nya dari sifat lemah dalam mengembalikan makhluk menjadi hidup setelah kematian mereka. Pada konteks ini disebutkan tanda-tanda kekuasaan dan ilmu Allah. Hal ini terlihat pada penciptaan makhluk yang berpasang-pasangan, baik tumbuh-tumbuhan, binatang, manusia serta apa-apa yang tidak diketahui mereka.

Tidak ada yang tunggal kecuali Allah Ta'ala. Allah juga menyucikan dirinya dari sifat-sifat makhluk-Nya, seperti memiliki pasangan atau istri. Ini semua merupakan dalil akal yang menunjukkan tentang adanya kehidupan kedua (akhirat) setelah kehidupan pertama yakni di dunia (Al Jazairi, 2009:167-168).

5. Sayyid Quthb

Ini adalah *tasbih* yang bergerak pada waktunya dan di tempatnya yang tepat. Bersamanya terlukiskan hakikat yang besar dari hakikat-hakikat wujud ini. Hakikat kesatuan makhluk, kesatuan kaidah dan pembentukan. Yakni, bahwa Allah menciptakan makhluk-makhluk hidup secara berpasang-pasangan. Tetumbuhan berpasangan seperti manusia juga. Demikian juga yang lainnya, *"Dari apa yang tidak mereka ketahui."*

Kesatuan ini menunjukkan kesatuan tangan yang menciptakan. Yang mengadakan kaidah penciptaan (bersama perbedaan bentuk, bobot, macam, jenis, karakter, dan ciri) pada makhluk-makhluk hidup ini yang hanya diketahui secara detail oleh Allah. Siapa tahu barangkali ini adalah kaidah alam semesta seluruhnya hingga benda mati juga. Sebagaimana diketahui bahwa atom (partikel materi terkecil yang diketahui manusia) terdiri dari dua pasang yang berbeda dari radiasi listrik negatif dan positif yang saling bersisian dan bersatu. Demikian juga kita dapati ribuan pasang bintang. Terbentuk dari dua bintang yang berkaitan yang saling menarik pasangannya. Selanjutnya berputar pada orbit yang sama, seakan-akan keduanya mengikuti irama musik yang teratur (Sayyid Quthb, 2004:393).

Kesimpulannya, para *muffassir* memiliki pendapat yang saling melengkapi satu sama lain, pendapat yang saling menguatkan dan saling menjelaskan. Memang seperti terlihat berbeda, namun sebenarnya maksud mereka adalah sama, yaitu segala sesuatu berpasangan, hingga hal-hal yang tidak diketahui oleh makhluk dan diketahui oleh makhluk jika Allah berkehendak membuat makhluk tersebut mengerti.

BAB III
PEMBAHASAN

Pada pembahasan kali ini, akan dikemukakan terlebih dahulu Lemma pendukung yang akan berguna untuk menentukan himpunan pemisah dari graf $K_2 + mK_s, K_3 + mK_s, K_4 + mK_s, K_5 + mK_s,$ dan $K_6 + mK_s$ yang akan sangat berguna kemudian untuk menentukan dimensi metrik dari graf $K_r + mK_s$.

3.1 Dimensi Metrik Graf $K_r + mK_s$

Lemma 3.1

Untuk graf $K_r + mK_s$ dengan $m, r, s \in N$ berlaku;

$$d(u,v) = \begin{cases} 0 & jika\, u = v \\ 1 & jika\, u \text{ dan } v \text{ pada daun atau bilah yang sama} \\ & \text{atau jika } u \text{ atau } v \text{ adalah titik di } K_r \\ 2 & jika\, u \text{ dan } v \text{ berada pada daun atau bilah yang berbeda} \end{cases}$$

Bukti:

Jika $u \; dan \; v$ pada satu bilah yang sama dan graf yang digunakan pada bilahnya adalah graf komplit maka jarak dari setiap titik ke titik lainnya adalah 1, karena setiap titik dihubungkan oleh satu sisi. Sedang titik yang terletak pada bilah yang berbeda akan terpisah oleh titik pusatnya sehingga jaraknya adalah 2. Dan titik pusat dengan titik yang ada pada daun atau bilahnya mempunyai jarak 1.

Lemma 3.2

Basis metrik dari graf $K_r + mK_s$, dengan $m, s \geq 2$ dan $m, r, s \in N$ diperoleh dengan memasukkan sebanyak $(r-1)$ titik yang ada pada K_r ke dalam subhimpunan S.

Bukti:

Menurut Lemma 3.1, diperoleh bahwa jarak titik daun terhadap pusat (K_r) adalah 1, sehingga jika tidak ada titik dari K_r yang masuk ke dalam subhimpunan S, maka representasi jaraknya akan sama untuk masing-masing titik pada K_r terhadap subhimpunan yang diambil. Sehingga harusnya hanya ada satu titik dari K_r yang tidak masuk dalam subhimpunan S.

Lemma 3.3

Untuk graf $K_2 + mK_s$, dengan $m, s \in N$, maka:

$$\dim(\mathrm{K}_2 + mK_s) = \begin{cases} m & untuk\ m \geq 2, s = 1 \\ (s-1)m + 1 & untuk\ m, s \geq 2 \end{cases}$$

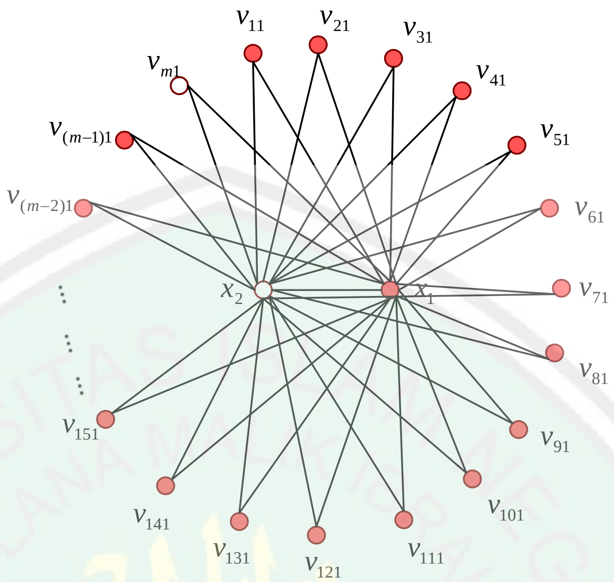
Bukti:

1. Untuk $\mathrm{s} = 1, \mathrm{m} \geq 2$ akan dibuktikan bahwa $\dim(\mathrm{K}_2 + \mathrm{mK}_1) = m$.

   Untuk menentukan dimensi metrik dari graf $K_2 + mK_s$ dengan $m \geq 2, s = 1$, maka dicari dulu batas atas terkecil dan batas bawah terbesar dari graf $K_2 + mK_1$ tersebut.

   i. Untuk menemukan batas atas $\dim(K_2 + mK_1)$, maka ambil $S = \{x_1, v_{11}, v_{21}, v_{31}, \dots, v_{(m-1)1}\}$.

      Graf $K_2 + mK_1$ dengan pengambilan S dapat digambarkan sebagai berikut;



Gambar 3.1 Graf $K_2 + mK_1$ dengan pengambilan S

Sehingga S mempunyai representasi jarak yang berbeda terhadap setiap titik pada graf $K_2 + mK_1$. Dengan demikian S merupakan himpunan pemisah dari graf $K_2 + mK_1$ yang kardinalitasnya $|S| = m$, yang diperoleh dari sebanyak $(m-1)$ titik pada daun dan 1 titik pada K_2. S ini merupakan himpunan pemisah, tapi belum tentu merupakan sebuah basis metrik. Jika S bukan merupakan basis metrik, maka tentu saja ada S yang kardinalitasnya lebih minimum menjadi sebuah basis metrik. Jadi berlaku, batas atas $\dim(K_2 + mK_1) \leq m$.

ii. Untuk menemukan batas bawahnya ambil $|S| = m - 1$. Maka pasti S ini bukan himpunan pemisah, karena ada setidaknya dua titik pada graf $K_2 + mK_1$ yang memiliki representasi jarak yang sama. Misal diambil $S = \{x_1, v_{11}, v_{12}, v_{13}, \dots, v_{(m-2)1}\}$, maka akan didapatkan dua titik pada graf $K_2 + mK_1$ yang mempunyai jarak yang sama terhadap S, yaitu $v_{(m-1)1}$ dan v_{m1}. Sehingga S pada pemisalan ini bukan merupakan himpunan pemisah. Titik yang tidak dimasukkan sebagai anggota himpunan S pada pemisalan tersebut adalah $x_2, v_{(m-1)1}, v_{m1}$. Artinya, ada dua titik pada dua bilah yang berbeda yang tidak masuk sebagai anggota himpunan S, padahal jika ingin mendapatkan representasi jarak yang berbeda hanya boleh ada satu titik dari keseluruhan daun yang tidak termasuk dalam anggota himpunan S. Hal inilah yang kemudian memberikan representasi jarak yang sama pada $v_{(m-1)1}$ dan v_{m1}. Sehingga salah satu dari $v_{(m-1)1}$ dan v_{m1} harus menjadi anggota himpunan S. Untuk memudahkan penulisan, yang masuk sebagai anggota himpunan S adalah $v_{(m-1)1}$, dengan asumsi bahwa m adalah bilah terakhir dari $K_2 + mK_1$. Jadi batas bawahnya $m \leq |S|$ atau dapat dituliskan $m \leq \dim(K_2 + mK_1)$. Karena batas atas dan batas bawah dari $\dim(K_2 + mK_1)$ adalah $m \leq \dim(K_2 + mK_1) \leq m$ maka $\dim(K_2 + mK_1) = m$. Jadi, terbukti bahwa $\dim(K_2 + mK_s) = m$, untuk $m \geq 2, s = 1$.

2. Untuk $s \geq 2, m \geq 2$ akan dibuktikan bahwa

$$\dim(K_2 + mK_s) = 1 + m(s-1)$$

Menurut Lemma 2.5.1, diperoleh:

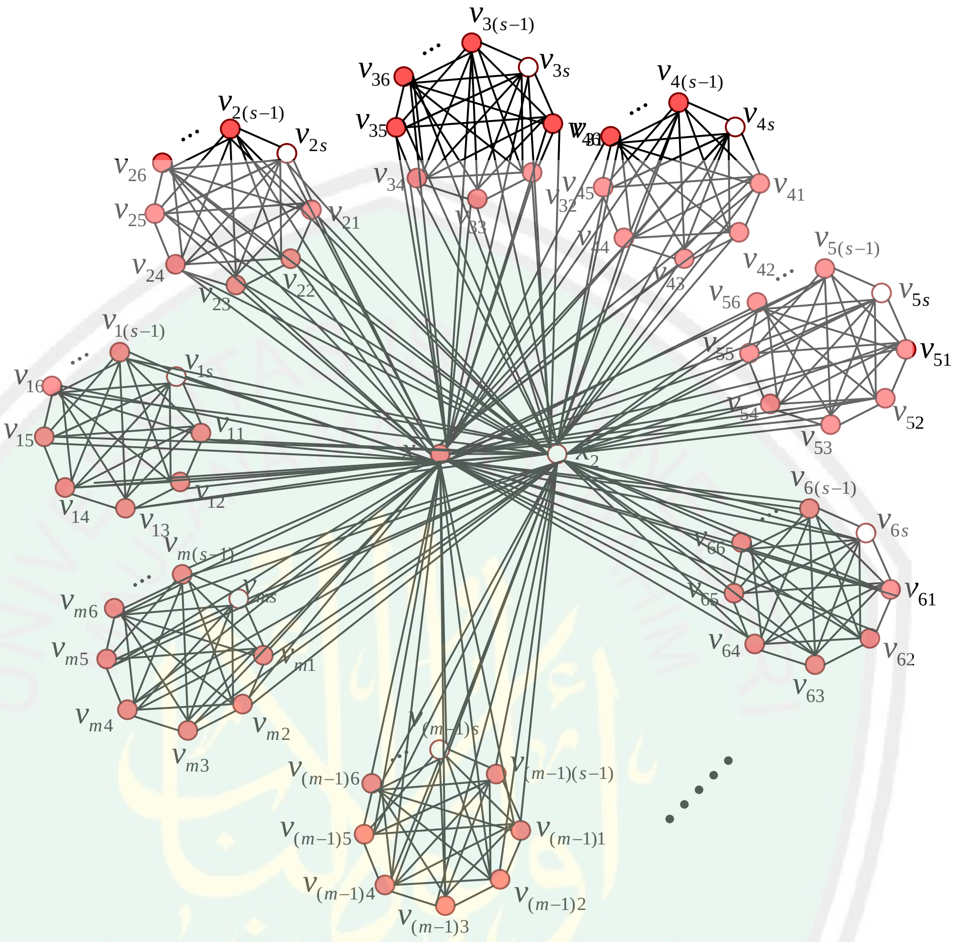
$$\dim(K_2 + mK_s) \geq \dim(K_2) + \dim(mK_s)$$

$$\dim(K_2 + mK_s) \geq 1 + m(s-1)$$

Ambil

$S = \{x_1, v_{11}, v_{12}, \dots, v_{1(s-1)}, v_{21}, v_{22}, \dots, v_{2(s-1)}, \dots, v_{m1}, v_{m2}, \dots, v_{m(s-1)}\}$.

Berikut adalah gambar graf $K_2 + mK_s$ dengan pengambilan S;



Gambar 3.2 Graf $K_2 + mK_s$ dengan pengambilan S

Karena S memiliki representasi jarak yang berbeda maka S ini adalah himpunan pemisah. Misal B adalah basis metrik berlaku:

$$|B| \leq |S|$$

$$\dim(K_2 + mK_1) \leq |S|$$

$|S|$ diperoleh dengan memasukkan sebanyak $m(s-1)$ titik di daun dan 1 titik graf K_2. $|S| = m(s-1) + 1$, sehingga diperoleh:

$$\dim(K_2 + mK_1) \leq 1 + m(s-1)$$

Kesimpulannya,

$\dim(K_2 + mK_1) \geq 1 + m(s-1)$ dan

$\dim(K_2 + mK_1) \leq 1 + m(s-1)$

Jadi, terbukti bahwa:

$$\dim(K_2 + mK_1) = 1 + m(s-1)$$

Lemma 3.4

Untuk graf $K_3 + mK_{s,}$ dengan $m, s \in N$, maka:

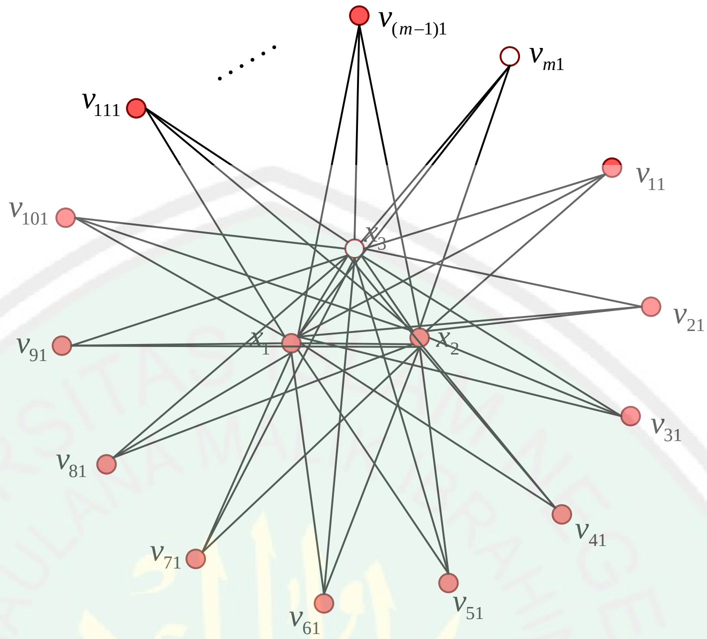
$$\dim(\mathrm{K}_3 + mK_s) = \begin{cases} m+1 & \textit{untuk } m \geq 2, s = 1 \\ (s-1)m+2 & \textit{untuk } m, s \geq 2 \end{cases}$$

Bukti:

1. Untuk $m \geq 2, s = 1$, akan dibuktikan $\dim(K_3 + mK_1) = m + 1$.

   Untuk menentukan dimensi metrik dari graf $K_3 + mK_s$ dengan $m \geq 2, s = 1$, maka dicari dulu batas atas terkecil dan batas bawah terbesar dari graf $K_3 + mK_1$ tersebut.

   i. Untuk menemukan batas atas $\dim(K_3 + mK_1)$, maka ambil $S = \{x_1, x_2, v_{11}, v_{21}, v_{31}, \dots, v_{(m-1)1}\}$. Graf $K_3 + mK_1$ dapat dilihat pada gambar di bawah ini;



Gambar 3.3 Graf $K_3 + mK_1$ dengan pengambilan S

Sedemikian sehingga S mempunyai representasi jarak yang berbeda terhadap setiap titik pada graf $K_3 + mK_1$. Dengan demikian S merupakan himpunan pemisah dari graf $K_3 + mK_1$ yang kardinalitasnya $|S| = m + 1$, yaitu sebanyak $m - 1$ titik di bilah dan 2 titik yang ada di graf K_3. S ini merupakan himpunan pemisah, tapi belum tentu merupakan sebuah basis metrik. Jika S bukan merupakan basis metrik, maka tentu saja ada S yang kardinalitasnya lebih minimum menjadi sebuah basis metrik. Jadi berlaku, batas atas $\dim(K_3 + mK_1) \leq m + 1$.

ii. Untuk menemukan batas bawahnya ambil $|S| = m$ Maka pasti S ini bukan himpunan pemisah, karena ada setidaknya dua titik pada graf $K_3 + mK_1$ yang memiliki representasi jarak yang sama. Misal diambil $S = \{x_1, x_2, v_{11}, v_{12}, v_{13}, \dots, v_{(m-2)1}\}$ maka akan didapatkan dua titik pada graf $K_3 + mK_1$ yang mempunyai jarak yang sama terhadap S yaitu

$v_{(m-1)1}$ dan v_{m1}. Sehingga S pada pemisalan ini bukan merupakan himpunan pemisah. Telah diketahui bahwa titik yang tidak termasuk dalam anggota himpunan S pada pemisalan tersebut adalah $x_3, v_{(m-1)1}, v_{m1}$. Artinya, ada dua titik pada dua bilah yang berbeda yang tidak masuk sebagai anggota himpunan S, padahal jika ingin mendapatkan representasi jarak yang berbeda hanya boleh ada satu titik dari keseluruhan bilah yang tidak termasuk dalam anggota himpunan S. Hal inilah yang kemudian memberikan representasi jarak yang sama pada $v_{(m-1)1}$ dan v_{m1}. Sehingga salah satu dari $v_{(m-1)1}$ dan v_{m1} harus menjadi anggota himpunan S. Untuk memudahkan penulisan, yang masuk sebagai anggota himpunan S adalah $v_{(m-1)1}$, dengan asumsi bahwa m adalah bilah terakhir dari $K_3 + mK_1$. Jadi batas bawahnya $m + 1 \leq |S|$ atau dapat dituliskan $m + 1 \leq \dim(K_3 + mK_1)$. Karena batas atas dan batas bawah dari $\dim(K_3 + mK_1)$ adalah $m + 1 \leq \dim(K_3 + mK_1) \leq m + 1$ maka $\dim(K_3 + mK_1) = m + 1$. Jadi terbukti bahwa $\dim(K_3 + mK_s) = m + 1$, untuk $m \geq 2, s = 1$.

2. Untuk $m, s \geq 2$, akan dibuktikan bahwa
$$\dim(K_3 + mK_s) = 2 + m(s-1)$$

Menurut Lemma 2.5.1, diperoleh:

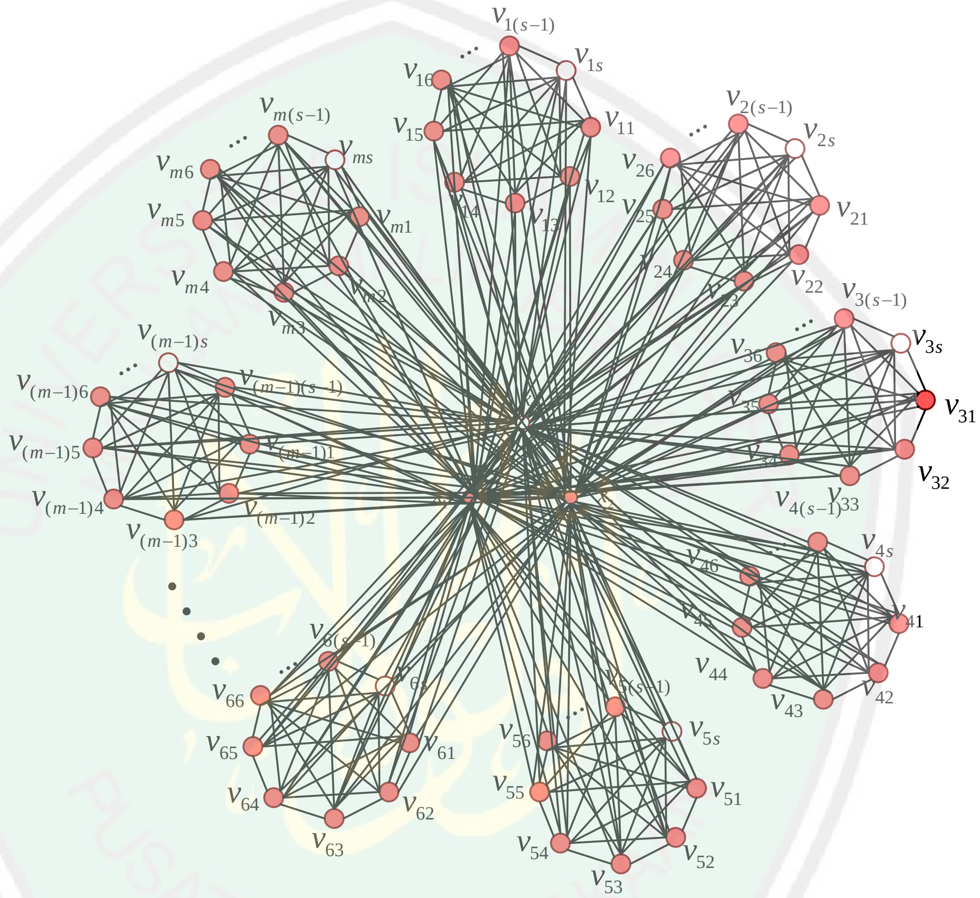
$$\dim(K_3 + mK_s) \geq \dim(K_3) + \dim(mK_s)$$
$$\dim(K_3 + mK_s) \geq 2 + m(s-1)$$

Ambil

$S =$

$\{x_1, x_2, v_{11}, v_{12}, \dots, v_{1(s-1)}, v_{21}, v_{22}, \dots, v_{2(s-1)}, \dots, v_{m1}, v_{m2}, \dots, v_{m(s-1)}\}$.

Maka graf $K_3 + mK_s$ dengan pengambilan S dapat dilihat pada gambar di bawah ini;



Gambar 3.4 Graf $K_3 + mK_s$ dengan pengambilan S

Karena S mempunyai representasi jarak yang berbeda terhadap seluruh titik pada graf $K_3 + mK_s$ maka S adalah himpunan pemisah dan jika B adalah basis, berlaku:

$$|B| \leq |S|$$

$$\dim(K_3 + mK_s) \leq |S|$$

Karena $|S| = 2 + m(s-1)$, $|S|$ ini diperoleh dengan memasukkan sebanyak $m(s-1)$ titik yang ada di daun dan 2 titik yang berada di K_3, maka:

$$\dim(K_3 + mK_s) \leq 2 + m(s-1)$$

Sehingga diperoleh:

$\dim(K_3 + mK_s) \geq 2 + m(s-1)$ dan

$\dim(K_3 + mK_s) \leq 2 + m(s-1)$

Maka terbukti bahwa:

$$\dim(K_3 + mK_s) = 2 + m(s-1)$$

Lemma 3.5

Untuk graf $K_4 + mK_{s,}$ dengan $m, s \in N$, maka:

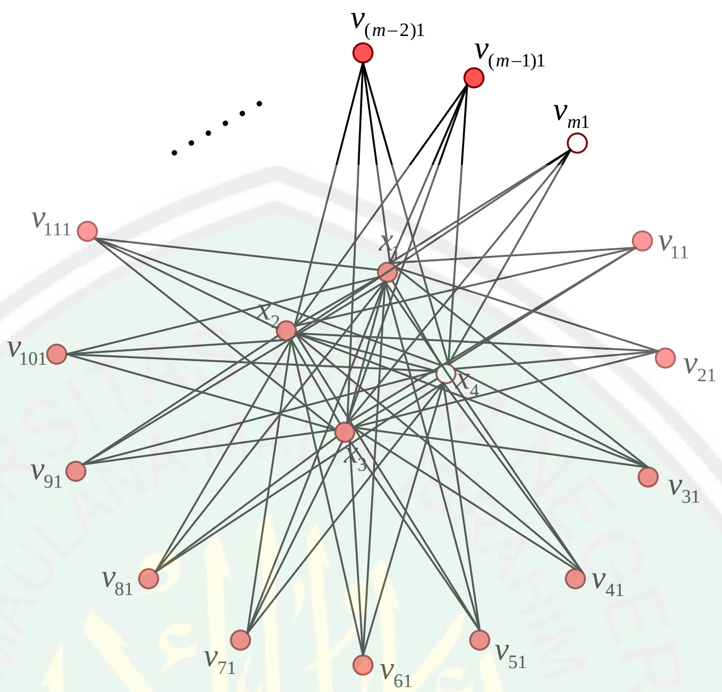
$$\dim(K_4 + mK_s) = \begin{cases} m+2 & untuk\ m \geq 2, s = 1 \\ (s-1)m+3 & untuk\ m, s \geq 2 \end{cases}$$

Bukti:

1. *Untuk* $m \geq 2, s = 1$ akan dibuktikan bahwa $\dim(K_4 + mK_1) = m + 2$.

   Untuk menentukan dimensi metrik dari graf $K_4 + mK_s$ dengan $m \geq 2, s = 1$, maka dicari dulu batas atas terkecil dan batas bawah terbesar dari graf $K_4 + mK_1$ tersebut.

   i. Untuk menemukan batas atas $\dim(K_4 + mK_1)$, maka ambil $S = \{x_1, x_2, x_3, v_{11}, v_{21}, v_{31}, \dots, v_{(m-1)1}\}$. Berikut adalah gambar graf $K_4 + mK_1$ dengan pengambilan *S;*



Gambar 3.5 Graf $K_4 + mK_1$ dengan pengambilan S

Sedemikian sehingga S mempunyai representasi jarak yang berbeda terhadap setiap titik pada graf $K_4 + mK_1$. Dengan demikian S merupakan himpunan pemisah dari graf $K_4 + mK_1$ yang kardinalitasnya $|S| = m + 2$, yaitu sebanyak $m - 1$ titik di bilah dan 3 titik dari graf K_4. S ini merupakan himpunan pemisah, tapi belum tentu merupakan sebuah basis metrik. Jika S bukan merupakan basis metrik, maka tentu saja ada S yang kardinalitasnya lebih minimum menjadi sebuah basis metrik. Jadi berlaku, batas atas $\dim(K_4 + mK_1) \leq m + 2$.

ii. Untuk menemukan batas bawahnya ambil $|S| = m + 1$ Maka pasti S ini bukan himpunan pemisah, karena ada setidaknya dua titik pada graf $K_4 + mK_1$ yang memiliki representasi jarak yang sama. Misal diambil $S = \{x_1, x_2, x_3, v_{11}, v_{12}, v_{13}, \dots, v_{(m-2)1}\}$ maka akan didapatkan dua titik pada graf $K_4 + mK_1$ yang mempunyai jarak yang sama terhadap S yaitu $v_{(m-1)1}$ dan v_{m1}. Sehingga S pada pemisalan ini bukan merupakan himpunan pemisah. Telah diketahui bahwa titik yang tidak termasuk dalam anggota himpunan S pada pemisalan tersebut adalah $x_4, v_{(m-1)1}, v_{m1}$. Artinya, ada dua titik pada dua bilah yang berbeda yang tidak masuk sebagai anggota himpunan S, padahal jika ingin mendapatkan representasi jarak yang berbeda hanya boleh ada satu titik dari keseluruhan bilah yang tidak termasuk dalam anggota himpunan S. Hal inilah yang kemudian memberikan representasi jarak yang sama pada $v_{(m-1)1}$ dan v_{m1}. Sehingga salah satu dari $v_{(m-1)1}$ dan v_{m1} harus menjadi anggota himpunan S. Untuk memudahkan penulisan, yang masuk sebagai anggota himpunan S adalah $v_{(m-1)1}$, dengan asumsi bahwa m adalah bilah terakhir dari $K_4 + mK_1$. Jadi batas bawahnya $m + 2 \leq |S|$ atau dapat dituliskan $m + 2 \leq \dim(K_4 + mK_1)$. Karena batas atas dan batas bawah dari $\dim(K_4 + mK_1)$ adalah $m + 2 \leq \dim(K_4 + mK_1) \leq m + 2$ maka $\dim(K_4 + mK_1) = m + 2$. Jadi terbukti bahwa $\dim(K_4 + mK_s) = m + 2$, untuk $m \geq 2, s = 1$.

2. Untuk $m, s \geq 2$, akan dibuktikan bahwa

$$\dim(K_4 + mK_s) = 3 + m(s - 1)$$

Dari Lemma 2.5.1 diperoleh:

$$\dim(K_4 + mK_s) \geq \dim(K_4) + \dim(mK_s)$$

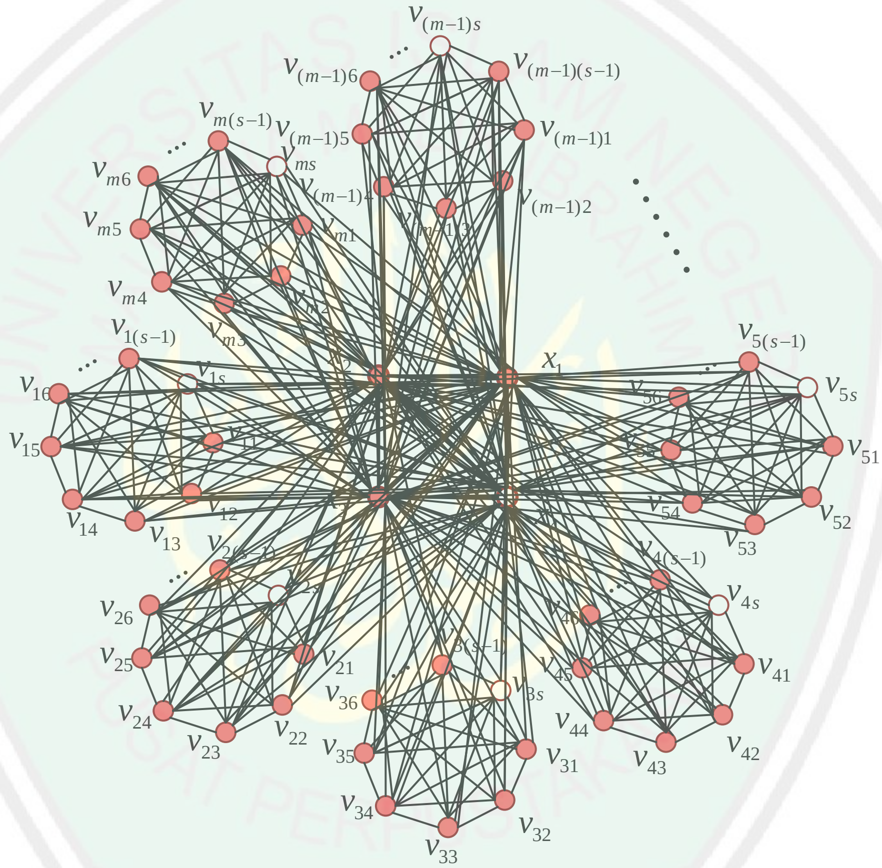
$$\dim(K_4 + mK_s) \geq 3 + m(s - 1)$$

Ambil

$S =$

$\{x_1, x_2, x_3, v_{11}, v_{12}, \dots, v_{1(s-1)}, v_{21}, v_{22}, \dots, v_{2(s-1)}, \dots, v_{m1}, v_{m2}, \dots, v_{m(s-1)}\}$.

Sehingga graf $K_4 + mK_s$ dapat digambarkan sebagai berikut;



Gambar 3.6 Graf $K_4 + mK_s$ dengan pengambilan S

Karena S memiliki representasi jarak yang berbeda terhadap graf $K_4 + mK_s$ dan misal B basis, maka berlaku:

$$|B| \leq |S|$$

$$\dim(K_4 + mK_s) \leq |S|$$

$|S| = 3 + m(s-1)$ yaitu sebanyak $m(s-1)$ titik di daun dan 3 titik di K_4, maka $\dim(K_4 + mK_s) \leq 3 + m(s-1)$.

Sehingga didapatkan:

$\dim(K_4 + mK_s) \geq 3 + m(s-1)$ dan

$\dim(K_4 + mK_s) \leq 3 + m(s-1)$

Maka terbukti bahwa:

$$\dim(K_4 + mK_s) = 3 + m(s-1)$$

Lemma 3.6

Untuk graf $K_5 + mK_{s,}$ dengan $m, s \in N$, maka:

$$\dim(K_5 + mK_s) = \begin{cases} m+3 & \text{untuk } m \geq 2, s = 1 \\ (s-1)m+4 & \text{untuk } m, s \geq 2 \end{cases}$$

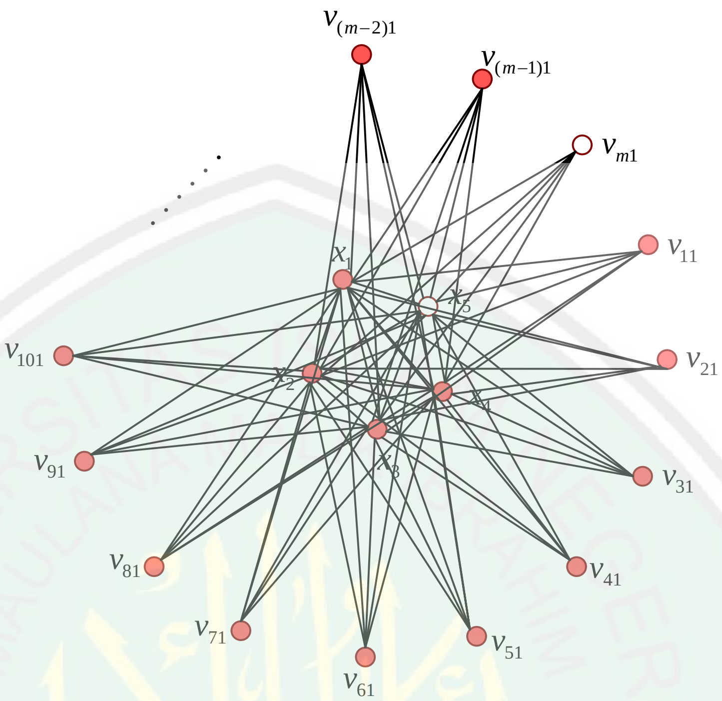
Bukti:

1. Untuk $m \geq 2, s = 1$ akan dibuktikan bahwa $\dim(K_5 + mK_1) = m + 3$.

   Untuk menentukan dimensi metrik dari graf $K_5 + mK_s$ dengan $m \geq 2, s = 1$, maka dicari dulu batas atas terkecil dan batas bawah terbesar dari graf $K_5 + mK_1$ tersebut.

   i. Untuk menemukan batas atas $dim\ (K_5 + mK_1)$, maka ambil $S = \{x_1, x_2, x_3, x_4, v_{11}, v_{21}, v_{31}, \ldots, v_{(m-1)1}\}$.

      Graf $K_5 + mK_1$ dengan pengambilan S dapat digambarkan sebagai berikut;



Gambar 3.7 Graf $K_5 + mK_1$ dengan pengambilan S

Sedemikian sehingga S mempunyai representasi jarak yang berbeda terhadap setiap titik pada graf $K_5 + mK_1$. Dengan demikian S merupakan himpunan pemisah dari graf $K_5 + mK_1$ yang kardinalitasnya $|S| = m + 3$ yaitu, sebanyak $m - 1$ titik dari graf yang ada di bilah dan 4 titik dari graf K_5. S ini merupakan himpunan pemisah, tapi belum tentu merupakan sebuah basis metrik. Jika S bukan merupakan basis metrik, maka tentu saja ada S yang kardinalitasnya lebih minimum menjadi sebuah basis metrik. Jadi berlaku, batas atas $\dim(K_5 + mK_1) \leq m + 3$.

ii. Untuk menemukan batas bawahnya ambil $|S| = m + 2$ Maka pasti S ini bukan himpunan pemisah, karena ada setidaknya dua titik pada graf $K_5 + mK_1$ yang memiliki representasi jarak yang sama. Misal diambil $S = \{x_1, x_2, x_3, x_4, v_{11}, v_{12}, v_{13}, \dots, v_{(m-2)1}\}$ maka akan didapatkan dua titik pada graf $K_5 + mK_1$ yang mempunyai jarak yang sama terhadap S yaitu $v_{(m-1)1}$ dan v_{m1}. Sehingga S pada pemisalan ini bukan merupakan himpunan pemisah. Telah diketahui bahwa titik yang tidak termasuk dalam anggota himpunan S pada pemisalan tersebut adalah $x_5, v_{(m-1)1}, v_{m1}$. Artinya, ada dua titik pada dua bilah yang berbeda yang tidak masuk sebagai anggota himpunan S, padahal jika ingin mendapatkan representasi jarak yang berbeda hanya boleh ada satu titik dari keseluruhan bilah yang tidak termasuk dalam anggota himpunan S. Hal inilah yang kemudian memberikan representasi jarak yang sama pada $v_{(m-1)1}$ dan v_{m1}. Sehingga salah satu dari $v_{(m-1)1}$ dan v_{m1} harus menjadi anggota himpunan S. Untuk memudahkan penulisan, yang masuk sebagai anggota himpunan S adalah $v_{(m-1)1}$, dengan asumsi bahwa m adalah bilah terakhir dari $K_5 + mK_1$. Jadi batas bawahnya $m + 3 \leq |S|$ atau dapat dituliskan $m + 3 \leq \dim(K_5 + mK_1)$. Karena batas atas dan batas bawah dari $\dim(K_5 + mK_1)$ adalah $m + 3 \leq \dim(K_5 + mK_1) \leq m + 3$ maka $\dim(K_5 + mK_1) = m + 3$. Jadi terbukti bahwa $\dim(K_5 + mK_s) = m + 3$, untuk $m \geq 2, s = 1$.

2. Untuk $m, s \geq 2$, akan dibuktikan bahwa

$$\dim(K_5 + mK_s) = 4 + m(s-1)$$

Dari Lemma 2.5.1, diperoleh:

$$\dim(K_5 + mK_s) \geq \dim(K_5) + \dim(mK_s)$$

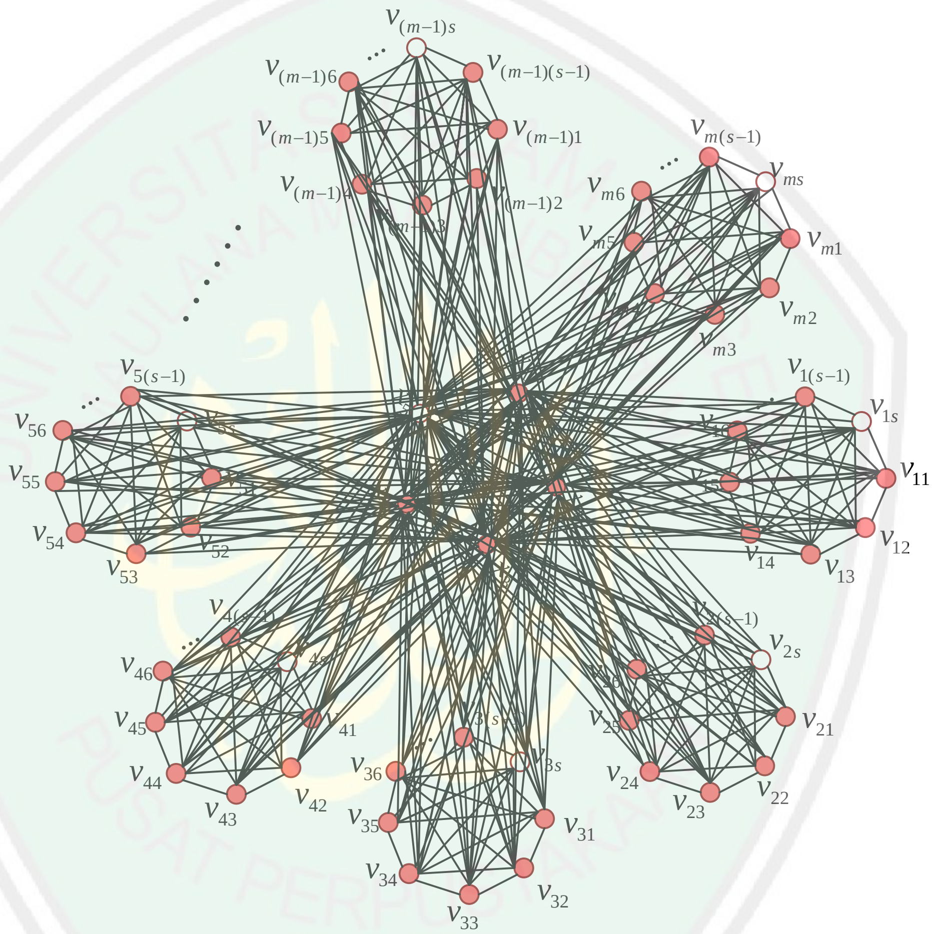
$$\dim(K_5 + mK_s) \geq 4 + m(s-1)$$

Ambil

S

$= \{x_1, x_2, x_3, x_4, v_{11}, v_{12}, \dots, v_{1(s-1)}, v_{21}, v_{22}, \dots, v_{2(s-1)}, \dots, v_{m1}, v_{m2}, \dots, v_{m(s-1)}\}.$

Maka graf $K_5 + mK_s$ dapat digambarkan sebagai berikut;



Gambar 3.8 Graf $K_5 + mK_s$ dengan pengambilan S

Karena representasi jarak S terhadap graf $K_5 + mK_s$ berbeda, maka S adalah himpunan pemisah dan misal B basis metrik maka berlaku:

$$|B| \leq |S|$$

$$\dim(K_5 + mK_s) \leq |S|$$

Karena $|S|$ merupakan sebanyak $m(s-1)$ titik pada daun dan 4 titik di K_5 maka $|S| = 4 + m(s-1)$. Dengan demikian, maka $\dim(K_5 + mK_s) \leq 4 + m(s-1)$, sehingga diperoleh:

$\dim(K_5 + mK_s) \geq 4 + m(s-1)$ dan

$\dim(K_5 + mK_s) \leq 4 + m(s-1)$

Maka terbukti bahwa:

$$\dim(K_5 + mK_s) = 4 + m(s-1)$$

Lemma 3.7

Untuk graf $K_6 + mK_{s,}$ dengan $m, s \in N$, maka:

$$\dim(K_6 + mK_s) = \begin{cases} m+4 & untuk\ m \geq 2, s = 1 \\ (s-1)m+5 & untuk\ m, s \geq 2 \end{cases}$$

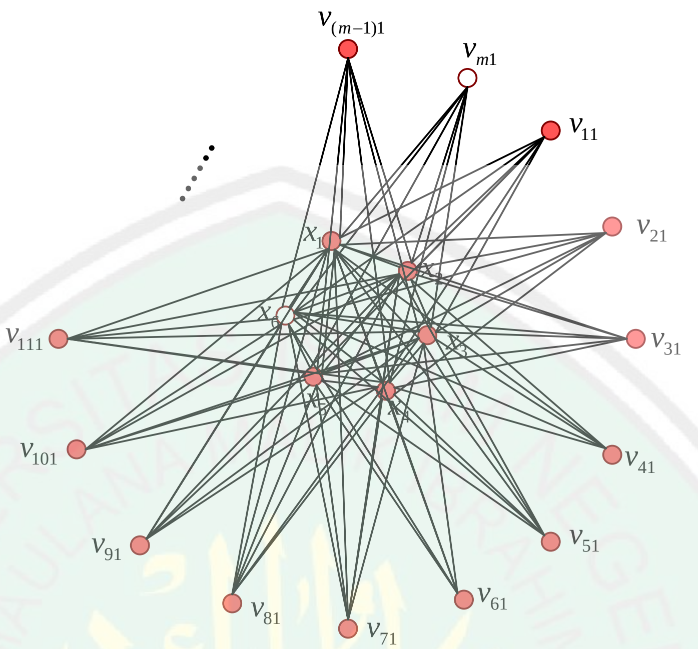
Bukti:

1. Untuk $m \geq 2, s = 1$ akan dibuktikan bahwa $\dim(K_6 + mK_s) = m + 4$.

   Untuk menentukan dimensi metrik dari graf $K_6 + mK_s$ dengan $m \geq 2, s = 1$, maka dicari dulu batas atas terkecil dan batas bawah terbesar dari graf $K_6 + mK_1$ tersebut.

   i. Untuk menemukan batas atas $\dim(K_6 + mK_1)$, maka ambil $S = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, v_{11}, v_{21}, v_{31}, \dots, v_{(m-1)1}\}$.

   Graf $K_6 + mK_1$ dengan pengambilan S dapat dilihat pada gambar di bawah ini;



Gambar 3.9 Graf $K_6 + mK_1$ dengan pengambilan S

Sedemikian sehingga S mempunyai representasi jarak yang berbeda terhadap setiap titik pada graf $K_6 + mK_1$. Dengan demikian S merupakan himpunan pemisah dari graf $K_6 + mK_1$ yang kardinalitasnya $|S| = m + 4$, yaitu sebanyak $m - 1$ titik pada bilah dan 5 titik pada graf K_6. S ini merupakan himpunan pemisah, tapi belum tentu merupakan sebuah basis metrik. Jika S bukan merupakan basis metrik, maka tentu saja ada S yang kardinalitasnya lebih minimum menjadi sebuah basis metrik. Jadi berlaku, batas atas $\dim(K_6 + mK_1) \leq m + 4$.

ii. Untuk menemukan batas bawahnya ambil $|S| = m + 3$. Maka pasti S ini bukan himpunan pemisah, karena ada setidaknya dua titik pada graf $K_6 + mK_1$ yang memiliki representasi jarak yang sama. Misal diambil $S = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, v_{11}, v_{12}, v_{13}, \ldots, v_{(m-2)1}\}$ maka akan didapatkan dua titik pada graf $K_6 + mK_1$ yang mempunyai jarak yang sama terhadap S yaitu $v_{(m-1)1}$ dan v_{m1}. Sehingga S pada pemisalan ini bukan merupakan himpunan pemisah. Telah diketahui bahwa titik yang tidak termasuk dalam anggota himpunan S pada pemisalan tersebut adalah $x_6, v_{(m-1)1}, v_{m1}$. Artinya, ada dua titik pada dua bilah yang berbeda yang tidak masuk sebagai anggota himpunan S, padahal jika ingin mendapatkan representasi jarak yang berbeda hanya boleh ada satu titik dari keseluruhan bilah yang tidak termasuk dalam anggota himpunan S. Hal inilah yang kemudian memberikan representasi jarak yang sama pada $v_{(m-1)1}$ dan v_{m1}. Sehingga salah satu dari $v_{(m-1)1}$ dan v_{m1} harus menjadi anggota himpunan S. Untuk memudahkan penulisan, yang masuk sebagai anggota himpunan S adalah $v_{(m-1)1}$, dengan asumsi bahwa m adalah bilah terakhir dari $K_6 + mK_1$. Jadi batas bawahnya $m + 4 \leq |S|$ atau dapat dituliskan $m + 4 \leq \dim(K_6 + mK_1)$. Karena batas atas dan batas bawah dari $\dim(K_6 + mK_1)$ adalah $m + 4 \leq \dim(K_6 + mK_1) \leq m + 4$ maka $\dim(K_6 + mK_1) = m + 4$. Jadi terbukti bahwa $\dim(K_6 + mK_s) = m + 4$, untuk $m \geq 2, s = 1$.

2. Untuk $m, s \geq 2$, akan dibuktikan bahwa

$$\dim(K_6 + mK_s) = 5 + m(s - 1)$$

Dari Lemma 2.5.1, diperoleh:

$$\dim(K_6 + mK_s) \geq \dim(K_6) + \dim(mK_s)$$

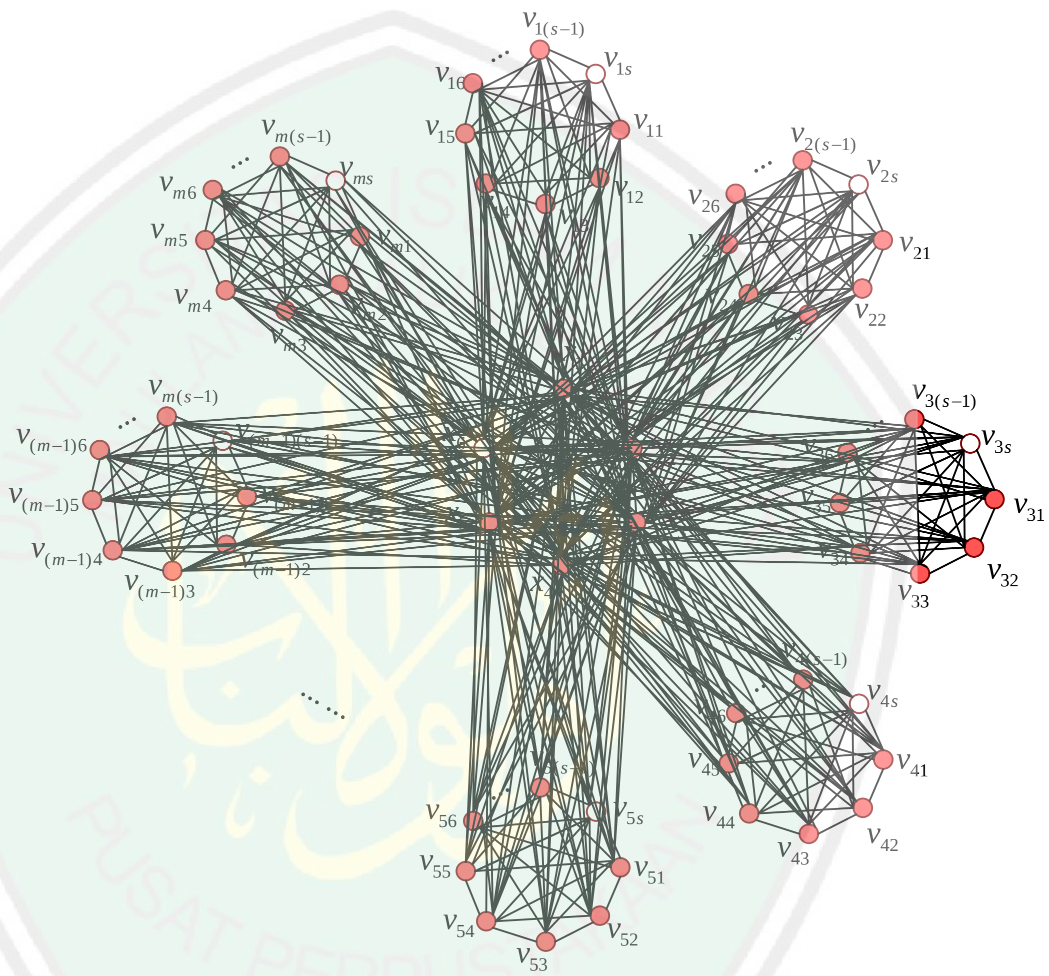
$$\dim(K_6 + mK_s) \geq 5 + m(s - 1)$$

Ambil

$S =$

$\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, v_{11}, v_{12}, \dots, v_{1(s-1)}, v_{21}, v_{22}, \dots, v_{2(s-1)}, \dots, v_{m1}, v_{m2}, \dots, v_{m(s-1)}\}$.

Maka graf $K_6 + mK_s$ dengan pengambilan S dapat digambarkan sebagai berikut;



Gambar 3.10 Graf $K_6 + mK_s$ dengan pengambilan S

Karena S ini himpunan pemisah, artinya ia mempunyai representasi jarak yang berbeda terhadap graf $K_6 + mK_s$ dan misal B basis maka berlaku:

$$|B| \leq |S|$$

$$\dim(K_6 + mK_s) \leq |S|$$

Karena $|S|$ diperoleh dari sebanyak $m(s-1)$ titik di daun dan 5 titik di graf K_6 maka $|S| = 5 + m(s-1)$. Dengan demikian diperoleh $\dim(K_6 + mK_s) \leq 5 + m(s-1)$, sehingga didapatkan:

$\dim(K_6 + mK_s) \geq 5 + m(s-1)$ dan

$\dim(K_6 + mK_s) \leq 5 + m(s-1)$

Terbukti bahwa:

$$\dim(K_6 + mK_s) = 5 + m(s-1)$$

Teorema 3.1

Untuk graf $K_r + mK_s$, dengan $m, r, s \in N$, berlaku:

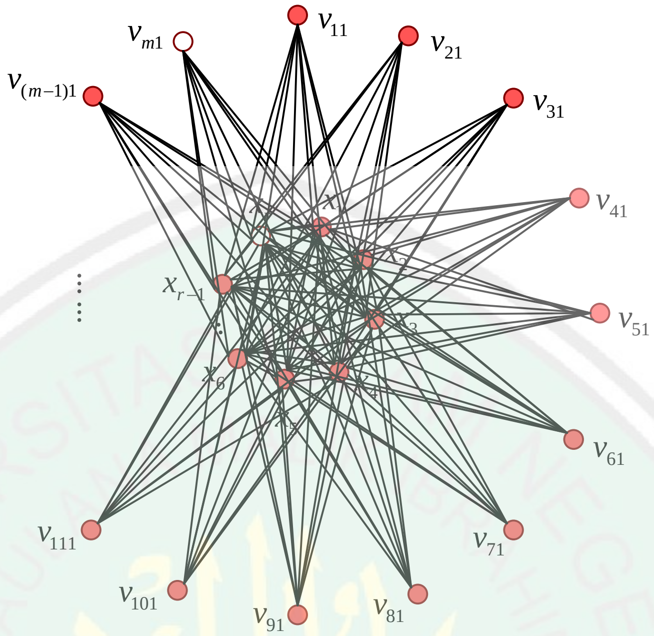
$$\dim(\mathrm{K}_r + mK_s) = \begin{cases} m + (r-2) & \textit{untuk } m \geq 2, s = 1 \\ (s-1)m + (r-1) & \textit{untuk } m, s \geq 2 \end{cases}$$

Bukti:

1. Untuk $m \geq 2, s = 1$, akan dibuktikan bahwa $\dim(K_r + mK_s) = \mathrm{m} + (\mathrm{r} - 2)$.

   Untuk menentukan dimensi metrik dari graf $K_r + mK_s$ dengan $m \geq 2, s = 1$, maka dicari dulu batas atas terkecil dan batas bawah terbesar dari graf $K_r + mK_1$ tersebut.

   i. Untuk menemukan batas atas $\dim(K_r + mK_1)$, maka ambil $S = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \dots, x_{r-1}, v_{11}, v_{21}, v_{31}, \dots, v_{(m-1)1}\}$. Gambar Graf $K_r + mK_1$ dengan pengambilan S adalah sebagai berikut;



Gambar 3.11 Graf $K_r + mK_1$ dengan pengambilan S

Sedemikian sehingga S mempunyai representasi jarak yang berbeda terhadap setiap titik pada graf $K_r + mK_1$. Dengan demikian S merupakan himpunan pemisah dari graf $K_r + mK_1$ yang kardinalitasnya $|S| = m + (r-2)$, yaitu sebanyak $m-1$ titik pada bilah dan $r-1$ titik pada graf K_r. S ini merupakan himpunan pemisah, tapi belum tentu merupakan sebuah basis metrik. Jika S bukan merupakan basis metrik, maka tentu saja ada S yang kardinalitasnya lebih minimum menjadi sebuah basis metrik. Jadi berlaku, batas atas $\dim(K_r + mK_1) \leq m + (r-2)$.

ii. Untuk menemukan batas bawahnya ambil $|S| = m + (r-3)$. Maka pasti S ini bukan himpunan pemisah, karena ada setidaknya dua titik pada graf $K_r + mK_1$ yang memiliki representasi jarak yang sama. Misal diambil $S = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \dots, x_{r-1}, v_{11}, v_{12}, v_{13}, \dots, v_{(m-2)1}\}$ maka akan didapatkan dua titik pada graf $K_r + mK_1$ yang mempunyai jarak yang sama terhadap S yaitu $v_{(m-1)1}$ dan v_{m1}. Sehingga S pada pemisalan ini bukan merupakan himpunan pemisah. Telah diketahui bahwa titik yang tidak termasuk dalam anggota himpunan S pada pemisalan tersebut adalah $x_r, v_{(m-1)1}, v_{m1}$. Artinya, ada dua titik pada dua bilah yang berbeda yang tidak masuk sebagai anggota himpunan S, padahal jika ingin mendapatkan representasi jarak yang berbeda hanya boleh ada satu titik dari keseluruhan bilah yang tidak termasuk dalam anggota himpunan S. Hal inilah yang kemudian memberikan representasi jarak yang sama pada $v_{(m-1)1}$ dan v_{m1}. Sehingga salah satu dari $v_{(m-1)1}$ dan v_{m1} harus menjadi anggota himpunan S. Untuk memudahkan penulisan, yang masuk sebagai anggota himpunan S adalah $v_{(m-1)1}$, dengan asumsi bahwa m adalah bilah terakhir dari $K_r + mK_1$. Jadi batas bawahnya $m + (r-2) \leq |S|$ atau dapat dituliskan $m + (r-2) \leq \dim(K_r + mK_1)$. Karena batas atas dan batas bawah dari $\dim(K_r + mK_1)$ adalah $m + (r-2) \leq \dim(K_r + mK_1) \leq m + (r-2)$ maka $\dim(K_r + mK_1) = m + (r-2)$. Jadi terbukti bahwa $\dim(K_r + mK_s) = m + (r-2)$, untuk $m \geq 2, s = 1$.

2. Untuk $m, s \geq 2$, akan dibuktikan bahwa

$$\dim(K_r + mK_s) = (r-1) + m(s-1)$$

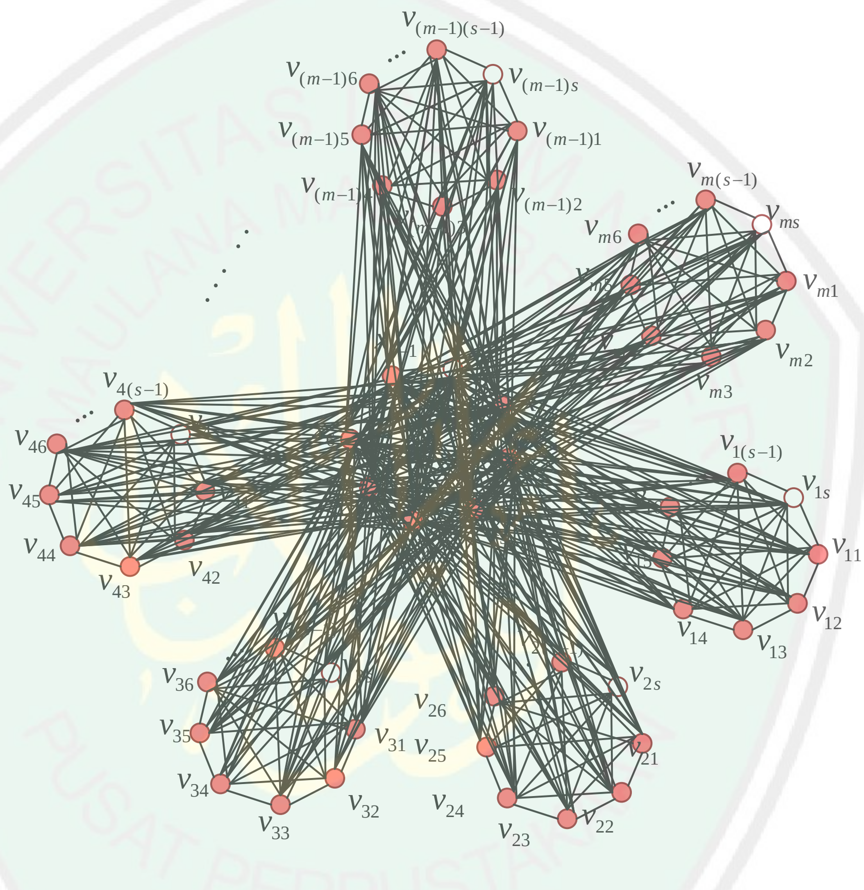
Dari Teorema 2.5.1, Lemma 3.3, Lemma 3.4, Lemma 3.5, Lemma 3.6, dan Lemma 3.7, diperoleh:

$$\dim(K_r + mK_s) \geq \dim(K_r) + \dim(mK_s)$$

$$\dim(K_r + mK_s) \geq (r-1) + m(s-1)$$

Ambil $S = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots, x_{r-1}, v_{11}, v_{12}, \ldots, v_{1(s-1)}, v_{21}, v_{22}, \ldots, v_{2(s-1)}, \ldots, v_{m1}, v_{m2}, \ldots, v_{m(s-1)}\}$.

Graf $K_r + mK_s$ dengan pengambilan S dapat digambarkan sebagai berikut;



Gambar 3.12 Graf $K_r + mK_s$ dengan pengambilan S

S mempunyai representasi jarak yang berbeda terhadap graf $K_r + mK_s$, sehingga S merupakan himpunan pemisah. Misal B adalah basis metrik, maka berlaku:

$$|B| \leq |S|$$

$$\dim(K_r + mK_s) \leq |S|$$

Karena $|S| = (r-1) + m(s-1)$, maka:

$$\dim(K_r + mK_s) \leq (r-1) + m(s-1)$$

Dan diperoleh:

$$(r-1)+m(s-1) \leq \dim(K_r + mK_s) \leq (r-1)+m(s-1)$$

Maka terbukti bahwa:

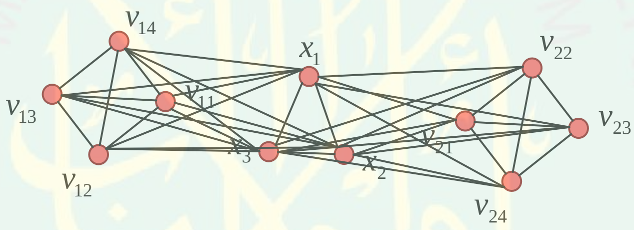
$$\dim(K_r + mK_s) = (r-1)+m(s-1)$$

Contoh 1

Diberikan graf $K_3 + 2K_4$, tentukan dimensi metrik dari graf tersebut!

Jawab:

Graf $K_3 + 2K_4$ dapat digambarkan sebagai berikut;



Gambar 3.13 Graf $K_3 + 2K_4$

Menurut Teorema 3.1; $\dim(K_3 + 2K_4) = (3-1) + 2(4-1)$

$$= 2 + 2.3$$

$$= 2 + 6$$

$$= 8$$

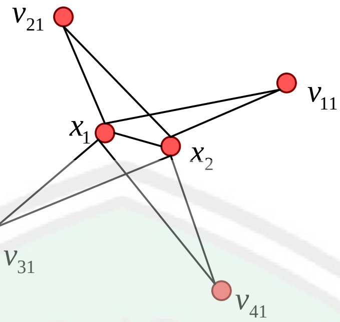
Jadi dimensi metrik dari graf $K_3 + 2K_4$ adalah 8.

Contoh 2

Diberikan graf $K_2 + 4K_1$, tentukan dimensi metrik dari graf tersebut!

Jawab:

Graf $K_2 + 4K_1$ dapat digambarkan sebagai berikut;



Gambar 3.14 Graf $K_2 + 4K_1$

Menurut Teorema 3.1, $\dim(K_2 + 4K_1) = 4 + (2 - 1)$

$$= 4 + 1$$

$$= 5$$

Jadi, dimensi metrik graf $K_2 + 4K_1$ adalah 5

3.2 Konsep Berpasang-pasangan dalam Al-Quran pada Dimensi Metrik

Dari arti ayat yang tertulis pada halaman 25 di atas dapat diambil kesimpulan bahwa segala sesuatu diciptakan berpasang-pasangan. Baik itu makhluk dengan bentuknya, makhluk dengan sifatnya maupun yang lain. Misalnya, baik dengan buruk, lelaki dengan perempuan, buah-buahan dengan rasanya, dan lain sebagainya. Hal-hal yang baru saja disebutkan termasuk dalam kategori termasuk sesuatu yang kita ketahui artinya dapat kita lihat secara langsung.

Lalu, dalam penggalan arti ayat tersebut disebutkan bahwa ternyata terdapat pasangan-pasangan yang tidak diketahui oleh makhluk. Beberapa *muffassir* mengartikan bahwa hal tersebut berupa hal-hal yang memang belum diketahui oleh makhluk. Sayyid Quthb misalnya, beliau mencontohkan atom yang memuat pasangan muatan positif dan negatif sebagai sesuatu yang berpasangan yang baru diketahui oleh makhluk seiring perkembangan ilmu pengetahuan.

Oleh karena itu, tidak menutup kemungkinan di masa ini dan di masa yang akan datang terdapat penemuan lain yang menunjukkan bahwa segala sesuatu berpasang-pasangan. Sehingga dalam penelitian ini, penulis ingin menunjukkan bahwa dimensi metrik juga merupakan sebuah pasangan. Yaitu pasangan sebuah graf dengan dimensi metriknya.

Untuk menghitung dimensi merik dari sebuah graf, terlebih dahulu harus dicari himpunan pemisah. Dari himpunan pemisah tersebut barulah dapat kita tentukan basis metrik, yaitu himpunan pemisah yang kardinalitasnya minimum. Baru kemudian dapat kita tentukan dimensi metrik grafnya, yaitu kardinalitas dari basis metrik yang telah didapatkan. Ternyata dari dimensi metrik yang didapatkan dari masing-masing graf dapat dibentuk sebuah pola dalam mencari dimensi metrik pada suatu graf.

Oleh sebab itu, satu graf berpasangan dengan dimensi metrik masing-masing sesuai dengan pola yang telah ditemukan. Graf $K_2 + 2K_1$ misalnya, graf ini memiliki dimensi metrik 2 berbeda dengan $K_2 + 2K_2$ yang memiliki dimensi metrik 3. Lebih khusus, sebuah graf akan berpasangan satu-satu dengan dimensi metriknya jika dibandingkan dengan graf dengan pusat yang berbentuk sama.

Hal ini menunjukkan bahwa betapa Maha Besar Allah yang telah menciptakan segala sesuatu berpasang-pasangan. Bahkan hingga hal-hal terkecil yang terkadang luput dari pandangan manusia. Oleh karena itu, ayat ini juga mengandung arti "*mentasbihkan*" Allah dan perintah untuk selalu bertasbih.

BAB IV
PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Dari pembahasan tentang dimensi metrik graf $K_r + mK_s$ ini didapatkan kesimpulan bahwa untuk $m, r, s \in N$, berlaku:

$$\dim(K_r + mK_s) = \begin{cases} m + (r-2) & \textit{untuk } m \geq 2, s = 1 \\ (s-1)m + (r-1) & \textit{untuk } m, s \geq 2 \end{cases}$$

Jadi, graf $K_r + mK_s$ memiliki dimensi masing-masing sesuai dengan m, r, s yang diinginkan.

4.2 Saran

Karena penelitian ini masih membahas tentang dimensi metrik pada graf $K_r + mK_s$ maka penelitian ini dapat dilanjutkan dengan mencari dimensi metrik graf lain, misalnya penelitian terhadap dimensi metrik graf-graf beraturan lain dengan operasi yang berbeda ($C_n \times P_n$ misalnya) dan dimensi metrik dari graf partisi atau yang lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir. 2007. *Ketika Kiai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press.

Abdussakir, dkk. 2009. *Teori Graf*. Malang: UIN Malang Press.

Al-Jazairi, Syaikh Abu Bakar Jabir. 2009. *Tafsir Al-Qur'an Al-Aisar Jilid 6*. Jakarta: Darus Sunnah.

Al-Jazairi, Syaikh Abu Bakar Jabir. 2009. *Tafsir Al-Qur'an Al-Aisar Jilid 7*. Jakarta: Darus Sunnah.

Al Maghariy, Ahmad Musthafa. *Tafsir Al Maghariy Juz XXIII*. Semarang: CV Tohaputra.

Al Qarani. 2005. *Tafsir Ibnu Katsir Jilid 2*. Bandung: CV Penerbit Diponegoro.

Al-Qarni, 'Aidh. 2007. *Tafsir Muyassar Jilid 4*. Jakarta: Qisthi Press.

Al-Qurthubi, Syaikh Imam. 2009. *Tafsir Al Qurthubi Jilid 15*. Jakarta: Pustaka Azzam.

Hernando, Carmen, dkk. *On The Metric Dimension of Some Families of Graphs*. preprint.

Chartrand, Garry dan Linda Lesniak. 1986. *Graph and Digraphs*. California: Pacific Graw.

Glenn, dkk. 2005. *Bounds on The Metric and Partition Dimension of a Graph*. University of Alaska.

Harary, Frank. 1969. *Graph Theory*. America: Addison-Wesley Publishing Company Inc.

Hasan, M. Iqbal. 2002. *Pokok-Pokok Materi Metodologi Penelitian dan Aplikasinya*. Bogor: Penerbit Ghalia Indonesia.

Katsir, Ibnu. 2007. *Tafsir Ibnu Katsir Jilid 6*. Jakarta: Pustaka Imam Syafi'i.

Quthb, Sayyid. 2004. *Tafsir fi Zhilalil Qur'an di Bawah Naungan Al-Qur'an Jilid 9*. Jakarta: Gema Insani Press.

Quthb, Sayyid. 2004. *Tafsir fi Zhilalil Qur'an di bawah Naungan Al-Qur'an Jilid 11*. Jakarta: Gema Insani Press.

Wahyudi, Suhud dan Sumarno. 2010. *Dimensi Metrik pada Graf Kincir dengan Pola* $K_1 + mK_3$. FMIPA ITS, 731-744.

Lampiran 1. Tabel Dimensi Metrik Graf $K_r+mK_s, m, r, s \in N$

K_r+mK_s		Kardinalitas Himpunan Pemisah Minimum			Dimensi
		Daun	K_r	Total	
K_1+mK_s	$s=1$	$m-1$	0	$m-1$	$m-1$
	$s\geq 2$	$m(s-1)$	0	$m(s-1)$	$m(s-1)$
K_2+mK_s	$s=1$	$m-1$	1	m	m
	$s\geq 2$	$m(s-1)$	1	$m(s-1)+1$	$m(s-1)+1$
K_3+mK_s	$s=1$	$m-1$	2	$m+1$	$m+1$
	$s\geq 2$	$m(s-1)$	2	$m(s-1)+2$	$m(s-1)+2$
K_4+mK_s	$s=1$	$m-1$	3	$m+2$	$m+2$
	$s\geq 2$	$m(s-1)$	3	$m(s-1)+3$	$m(s-1)+3$
K_5+mK_s	$s=1$	$m-1$	4	$m+3$	$m+3$
	$s\geq 2$	$m(s-1)$	4	$m(s-1)+4$	$m(s-1)+4$
K_6+mK_s	$s=1$	$m-1$	5	$m+4$	$m+4$
	$s\geq 2$	$m(s-1)$	5	$m(s-1)+5$	$m(s-1)+5$
…					
K_r+mK_s	$s=1$	$m-1$	$r-1$	$m+(r-2)$	$m+(r-2)$
	$s\geq 2$	$m(s-1)$	$r-1$	$m(s-1)+(r-1)$	$m(s-1)+(r-1)$

KEMENTERIAN AGAMA
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN)
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jln. Gajayana 50 Telp. (0341) 551354 Faks (0341) 572533
Malang 65144

BUKTI KONSULTASI

Nama : Hindayani
NIM : 06510034
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
Pembimbing : Abdussakir, M.Pd
Ach. Nashichuddin, MA
Judul skripsi : Dimensi Metrik Graf $K_r + mK_s, m, r, s \in N$

No	Tanggal	Materi	Ttd. Pembimbing	
1	7 Oktober 2010	Konsultasi masalah	1.	
2	13 Oktober 2010	Konsultasi BAB I		2.
3	20 Oktober 2010	ACC BAB I dan konsultasi BAB II	3.	
4	9 November 2010	Konsultasi kajian agama		4.
5	10 November 2010	ACC BAB II	5.	
6	12 November 2010	Konsultasi kajian agama		6.
7	26 November 2010	Konsultasi BAB III	7.	
8	1 Desember 2010	Revisi BAB III		8.
9	9 Desember 2010	ACC BAB III	9.	
10	10 Desember 2010	Konsultasi BAB IV		10.
11	11 Desember 2010	Konsultasi kajian agama	11.	
12	13 Desember 2010	ACC BAB IV		12.
13	15 Desember 2010	ACC keseluruhan	13.	

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001