KAJIAN TENTANG *FUZZY DIGRAPH*

SKRIPSI

Oleh:
RUSDIANA AUTAR
NIM. 05510031

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN)
MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2009

KAJIAN TENTANG *FUZZY DIGRAPH*

SKRIPSI

Diajukan Kepada :
Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh :

RUSDIANA AUTAR
NIM. 05510031

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN)
MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2009

KAJIAN TENTANG FUZZY DIGRAPH

SKRIPSI

Oleh:
RUSDIANA AUTAR
NIM. 05510031

Telah Disetujui oleh:

Dosen Pembimbing I	Dosen Pembimbing II
Evawati Alisah, M.Pd	Munirul Abidin, M.Ag
NIP. 150 291 271	NIP. 150 321 634

Tanggal, 25 Juli 2009

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M. Si
NIP. 150 318 321

KAJIAN TENTANG *FUZZY DIGRAPH*

SKRIPSI

Oleh:
RUSDIANA AUTAR
NIM. 05510031

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal:

28 Juli 2009

Susunan Dewan Penguji:		**Tanda Tangan**
1. Penguji Utama	: **Abdussakir, M.Pd** **NIP. 150 327 247**	( )
2. Ketua	: **Usman Pagalay, M.Si** **NIP. 150 327 240**	( )
3. Sekretaris	: **Evawati Alisah, M.Pd** **NIP: 150 291 271**	( )
4. Anggota	: **Munirul Abidin, M.Ag** **NIP: 150 321 634**	( )

Mengetahui dan Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M.Si
NIP: 150 318 321

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama	: RUSDIANA AUTAR
NIM	: 05510031
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambil alihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri.

Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang,

Yang membuat pernyataan

Rusdiana Autar

NIM. 05510031

MOTTO

"Setiap orang di dunia ini adalah seorang tamu, dan uangnya adalah pinjaman. Tamu itu pastilah akan pergi, cepat atau lambat, dan pinjaman itu haruslah dikembalikan."

(Ibnu Mas'ud)

"Orang yang sukses adalah orang yang bisa membangun landasan yang kuat dengan batubata yang dilemparkan orang lain kepadanya."

(David Brinkley)

Dengan iringan doa dan rasa syukur yang teramat besar,
Karya tulis ini penulis persembahkan kepada:

Almarhum Ayahanda tercinta, sumber motivasi dalam setiap langkahku.
Ibunda tercinta, penyejuk hati dalam hidupku.
Saudara-saudaraku tersayang, warna-warni hidup akan selalu kita hadapi bersama.

Dia yang tak pernah lelah menanti, yang telah luluhkan hati sekeras batu karang, semoga tapak kaki kita akan berjalan beriringan.

KATA PENGANTAR

بسم الله الرحمن الرحيم

Assalamu'alaikum Wr.Wb.

Alhamdulillahirrobbil 'alamin, segala puji syukur ke hadirat Allah SWT atas limpahan rahmat, taufiq dan hidayah-Nya, hingga penulis mampu menyelesaikan penulisan skripsi yang berjudul "KAJIAN TENTANG *FUZZY DIGRAPH*" ini dengan baik. Sholawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada Nabi besar Muhammad SAW sebagai *uswatun hasanah* dalam meraih kesuksesan di dunia dan akhirat.

Penulis menyadari bahwa banyak pihak yang telah berpartisipasi dan membantu dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Oleh karena itu, iringan do'a dan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya penulis sampaikan, terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo selaku Rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Malang .
2. Prof. Dr. Sutiman Bambang Sumitro, SU, D.Sc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Malang.
3. Sri Harini. M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Malang.
4. Evawati Alisah, M.Pd selaku dosen pembimbing, yang telah meluangkan waktunya untuk memberikan pengarahan selama penulisan skripsi ini.
5. Munirul Abidin, M.Ag yang telah bersedia memberikan bimbingan dan pengarahan selama penulisan skripsi di bidang agama.
6. Segenap dosen dan civitas akademik di UIN Malang khususnya dari Fakultas Sains dan Teknologi.
7. Almarhum Ayahanda tercinta yang akan selalu menjadi penyemangat bagi penulis dalam ketiadaannya dan Ibunda tercinta, yang selalu memberikan semangat dan motivasi baik moril maupun spirituil dan perjuangannya yang tak pernah kenal lelah dalam mendidik dan membimbing penulis

hingga penulis sukses dalam meraih cita-cita serta ketulusan do'anya kepada penulis sampai dapat menyelesaikan skripsi ini.

8. Kakak dan Adik-adik tersayang, yang telah memberikan semangat dan dukungan selama kuliah serta dalam menyelesaikan skripsi ini.
9. Didik Safarudin, yang telah mengembalikan semangatku yang sempat hilang.
10. Teman-teman kost Kertorejo 15B yang selalu memberikan keceriaan serta doa dalam menyelesaikan skripsi ini.
11. Teman-teman Matematika '04 dan '05, terima kasih atas doa serta kenangan yang kalian berikan.
12. Semua pihak yang tidak mungkin penulis sebut satu persatu, atas keikhlasan bantuan moril dan sprituil penulis ucapkan terima kasih.

Semoga skripsi ini bermanfaat dan dapat menambah wawasan keilmuan khususnya Matematika. Amien.

Wassalamu'alaikum Wr.Wb

.

Malang, 26 Juli 2009

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

ABSTRAK

Autar, Rusdiana. 2009. *Kajian tentang Fuzzy Digraf.* Skripsi, Jurusan matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: Evawati Alisah, M.Pd dan Munirul Abidin, M.Ag.

Kata kunci: Fuzzy digraph, fuzzy, digraph.

Dalam matematika dikenal teori himpunan yang mengelompokkan elemen-elemennya secara tegas. Hingga akhirnya seorang guru besar dari *University of California, Lotfi Asker Zadeh* mengembangkan konsep himpunan baru yang lebih fleksibel dengan menggunakan "derajat keanggotaan" yang akan mampu menyelesaikan berbagai masalah dalam kehidupan. Kemudian konsep tersebut dikembangkan oleh beberapa matematikawan, yaitu dengan menggabungkan beberapa teori-teori dasar matematika dengan konsep fuzzy set. Salah satu penggabungan yang menarik adalah teori *fuzzy digraph*. Berdasarkan latar belakang tersebut, maka penulis akan mengkaji tentang *fuzzy digraph* beserta teorema-teoremanya.

Dalam kajian ini, penulis mendeskripsikan tentang digraph, himpunan fuzzy dan relasi fuzzy. Setelah mengetahui apa itu digraph dan fuzzy maka penulis definisikan apa itu *fuzzy digraph* dengan mendeskripsikan beberapa contoh dan pembuktian dari teorema-teoremanya.

Himpunan fuzzy $\tilde{A}$ dalam semesta wacana X didefinisikan sebagai sebagai himpunan pasangan terurut $\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) | x \in X\}$ di mana μ_A adalah fungsi keanggotaan dari himpunan fuzzy $\tilde{A}$ yang merupakan suatu pemetaan dari himpunan semesta X ke selang tertutup [0, 1]. Dan digraph didefinisikan sebagai suatu pasangan himpunan (V, E) yang memiliki arah di mana V adalah himpunan tak kosong dari unsur-unsur yang disebut titik (*vertex*) dan E adalah himpunan pasangan tak terurut (u, v) dari titik-titik u dan v yang berbeda di V yang disebut sisi (*edge*). Sehingga *fuzzy digraph* dalam pembahasan ini didefinisikan sebagai suatu pasangan terurut dari himpunan fuzzy dan relasi fuzzy, yang dinotasikan dengan di mana $\tilde{A} = (X, \mu_A)$ adalah himpunan fuzzy dan $\tilde{R} = \{X \times X, \mu_R\}$ adalah relasi fuzzy.

Untuk penelitian selanjutnya penulis menyarankan untuk memperluas bahasan tentang fuzzy yang mengkaji masalah komposisi dari *fuzzy digraph,* komposisi dari dua fuzzy digraph, dan juga fuzzy yang diperluas dalam *multiobyektif* yang dihubungkan dengan *multidigraph.*

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Matematika merupakan ilmu pengetahuan dasar yang dibutuhkan oleh masyarakat untuk menyelesaikan berbagai permasalahan dalam kehidupan sehari-hari. Akan tetapi banyak orang yang memandang matematika sebagai ilmu yang sulit, abstrak, teoritis, penuh dengan lambang-lambang, rumus-rumus yang rumit dan membingungkan. Bagi mereka matematika tidak banyak hubungannya dengan dunia nyata dan manusia. Padahal telah dijelaskan bahwa ilmu Pengetahuan Allah SWT meliputi segala sesuatu semua yang ada di bumi dan di langit. Di mana matematika juga merupakan ilmu pengetahuan Allah yang telah ditemukan oleh manusia. Yang keberadaannya tidak lain adalah untuk memenuhi kebutuhan manusia menjalani kehidupan dunia. Sesungguhnya Allah telah mengajarkan semua yang dibutuhkan oleh manusia yang kesemuanya telah terangkum dalam Al-Qur'an dan Sunnah. Oleh karenanya Allah selalu memerintahkan kita untuk selalu belajar dari apa-apa yang ada di diri dan sekitar kita, sebagai mana yang diterangkan dalam surat Ar-Ruum ayat 8:

أَوَلَمْ يَتَفَكَّرُوا۟ فِىٓ أَنفُسِهِم ۗ مَّا خَلَقَ ٱللَّهُ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضَ وَمَا بَيْنَهُمَآ إِلَّا بِٱلْحَقِّ وَأَجَلٍ مُّسَمًّى ۗ وَإِنَّ كَثِيرًا مِّنَ ٱلنَّاسِ بِلِقَآئِ رَبِّهِمْ لَكَٰفِرُونَ ﴿٨﴾

Artinya: Dan mengapa mereka tidak memikirkan tentang (kejadian) diri mereka? Allah tidak menjadikan langit dan bumi dan apa yang ada diantara keduanya melainkan dengan (tujuan) yang benar dan waktu yang *ditentukan. Dan sesungguhnya kebanyakan diantara manusia benar-benar ingkar akan pertemuan dengan Tuhannya.*

Ilmu matematika sangat dibutuhkan dalam pengembangan disiplin ilmu yang lain, baik itu ilmu dalam bidang umum maupun ilmu dalam bidang agama. Dalam bidang umum ilmu matematika banyak digunakan dalam pengembangan ilmu-ilmu fisika, kimia, biologi, teknologi, perbankan, ekonomi, komunikasi, dan cabang-cabang ilmu pengetahuan lainnya. Sedangkan dalam bidang agama ilmu matematika banyak digunakan dalam perhitungan zakat, faraidh, ru'yah, dll.

Ada pendapat terkenal yang memandang matematika sebagai pelayan dan sekaligus ratu dari ilmu-ilmu lain. Sebagai pelayan, matematika adalah ilmu dasar yang mendasari dan melayani berbagai ilmu pengetahuan lain. Sejak masa sebelum masehi, misalnya jaman Mesir kuno, cabang tertua dan termudah dari matematika (aritmetika) sudah digunakan untuk membuat piramida, digunakan untuk menentukan waktu turun hujan, dsb.

Sebagai ratu, perkembangan matematika tak tergantung pada ilmu-ilmu lain. Banyak cabang matematika yang dulu biasa disebut *matematika murni*, dikembangkan oleh beberapa matematikawan yang mencintai dan belajar matematika hanya sebagai hobi tanpa memperdulikan fungsi dan manfaatnya untuk ilmu-ilmu lain. Dengan perkembangan teknologi, banyak cabang-cabang matematika murni yang ternyata kemudian hari bisa diterapkan dalam berbagai ilmu pengetahuan dan teknologi mutakhir serta mampu mengatasi berbagai masalah dalam kehidupan (Fajar, *http://www.indoskripsi.com/makalah-matematika.html*. 2 januari 2009).

Dalam matematika terdapat konsep himpunan (set) yang akan mewakili sekelompok manusia dalam masyarakat. Pada konsep himpunan dikenal dua himpunan yang sering digunakan yaitu himpunan tegas (*crisp*), yaitu suatu himpunan yang secara tegas membedakan anggota-anggotanya apakah termasuk dalam himpunan atau tidak, yang biasanya disimbolkan dengan 0 dan 1. dan juga himpunan fuzzy yang merupakan himpunan yang mendefinisikan anggota-anggotanya dalam interval 0 sampai 1 (Satoh,dkk: 2).

Konsep himpunan tersebut ternyata juga telah dibahas dalam al-Qur'an, walaupun tidak dijelaskan secara eksplisit. Sebagaimana firman Allah SWT dalam Al-Qur'an surat Al-Faathir ayat 1:

ٱلْحَمْدُ لِلَّهِ فَاطِرِ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضِ جَاعِلِ ٱلْمَلَٰٓئِكَةِ رُسُلًا أُو۟لِىٓ أَجْنِحَةٍ مَّثْنَىٰ
وَثُلَٰثَ وَرُبَٰعَ ۚ يَزِيدُ فِى ٱلْخَلْقِ مَا يَشَآءُ ۚ إِنَّ ٱللَّهَ عَلَىٰ كُلِّ شَىْءٍ قَدِيرٌ ﴿١﴾

Artinya: Segala puji bagi Allah [pencipta langit dan bumi, yang menjadikan malaikat-malaikat sebagai utusan-utusan (untuk mengurus berbagai macam urusan) yang mempunyai sayap, masing-masing (ada yang) dua, tiga dan empat. Allah menambahkan pada ciptaan-Nya apa yang dikehendaki-Nya. Sesungguhnya Allah Maha Kuasa atas segala sesuatu." (Q.S. Al-Faathir:1).

Dalam ayat 1 surat Al-faathir ini dijelaskan sekelompok, segolongan atau sekumpulan makhluk yang disebut malaikat. Dalam kelompok malaikat tersebut terdapat malaikat yang mempunyai dua sayap, tiga sayap, atau empat sayap. Bahkan sangat dimungkinkan terdapat kelompok malaikat yang mempunyai lebih dari empat sayap jika Allah SWT menghendaki. Di dalam ayat tersebut terdapat konsep matematika yang terkandung di dalamnya yaitu kumpulan-objek-objek yang mempunyai ciri-ciri yang sangat jelas. Inilah yang dalam matematika di sebut dengan himpunan (Abdussyakir, 2007: 108).

Selama ini kita mengenal himpunan yang mengelompokkan elemen-elemennya secara tegas, apakah elemen itu termasuk dalam suatu himpunan atau tidak. Sehingga konsep himpunan ini dianggap terlalu kaku untuk mendeskripsikan realita kehidupan dunia yang sangat kompleks. Untuk itulah *Lotfi Asker Zadeh,* seorang guru besar pada *University of California, Berkeley, Amerika Serikat* mengembangkan konsep himpunan baru yang lebih fleksibel dengan menggunakan "derajat keanggotaan" yang akan mampu menyelesaikan berbagai permasalahan di dunia, yaitu dengan karangan ilmiahnya yang berjudul "*fuzzy set*" (himpunan kabur). Dalam himpunan fuzzy zadeh mendefinisikannya dengan menggunakan apa yang disebut fungsi keanggotaan (membership function), yang nilainya berada dalam selang tertutup [0,1] (Susilo, 2006: 5).

Sebagaimana yang telah dijelaskan dalam Al-Qur'an, di mana pada manusia sering terjadi keragu-raguan dalam hal kepercayaan, seperti yang terdapat dalam Q.S. An-Nisaa ayat 142-143:

إِنَّ ٱلْمُنَٰفِقِينَ يُخَٰدِعُونَ ٱللَّهَ وَهُوَ خَٰدِعُهُمْ وَإِذَا قَامُوٓا۟ إِلَى ٱلصَّلَوٰةِ قَامُوا۟ كُسَالَىٰ
يُرَآءُونَ ٱلنَّاسَ وَلَا يَذْكُرُونَ ٱللَّهَ إِلَّا قَلِيلًا ﴿١٤٢﴾ مُّذَبْذَبِينَ بَيْنَ ذَٰلِكَ لَآ إِلَىٰ هَٰٓؤُلَآءِ
وَلَآ إِلَىٰ هَٰٓؤُلَآءِ ۚ وَمَن يُضْلِلِ ٱللَّهُ فَلَن تَجِدَ لَهُۥ سَبِيلًا ﴿١٤٣﴾

Artinya: Sesungguhnya orang-orang munafik itu menipu Allah, dan Allah akan membalas tipuan mereka. Dan apabila mereka berdiri untuk shalat mereka berdiri dengan malas. Mereka bermaksud riya (dengan shalat) di hadapan manusia. Dan tidaklah mereka menyebut Allah kecuali sedikit sekali.

Mereka dalam keadaan ragu-ragu antara yang demikian (iman atau kafir): tidak masuk kepada golongan ini (orang-orang beriman) dan tidak (pula) kepada golongan itu (orang-orang kafir), maka kamu sekali-kali tidak akan mendapat jalan (untuk memberi petunjuk) baginya.

Ayat di atas menjelaskan tentang golongan yang masih diragukan kedudukannya apakah mereka iman atau kafir pada Allah SWT. Golongan tersebut disebut dengan orang-orang munafik. Dalam ayat lainnya dijelaskan secara tegas bahwa "orang munafik adalah orang yang fasik"

ٱلْمُنَـٰفِقُونَ وَٱلْمُنَـٰفِقَـٰتُ بَعْضُهُم مِّنۢ بَعْضٍ ۚ يَأْمُرُونَ بِٱلْمُنكَرِ وَيَنْهَوْنَ عَنِ ٱلْمَعْرُوفِ وَيَقْبِضُونَ أَيْدِيَهُمْ ۚ نَسُوا۟ ٱللَّهَ فَنَسِيَهُمْ ۗ إِنَّ ٱلْمُنَـٰفِقِينَ هُمُ ٱلْفَـٰسِقُونَ ﴿٦٧﴾

Artinya: Orang-orang munafik laki-laki dan perempuan. sebagian dengan sebagian yang lain adalah sama, mereka menyuruh membuat yang munkar dan melarang berbuat yang ma'ruf dan mereka menggenggamkan tangannya. Mereka telah lupa kepada Allah, maka Allah melupakan mereka. Sesungguhnya orang-orang munafik itu adalah orang-orang yang fasik. (Q.S. At-Taubah:67)

Akan tetapi karena orang munafik memiliki sifat-sifat khusus yang membuat beberapa orang menganggap munafik dan fasik itu berbeda. Sehingga dianggap perlu untuk memperlakukan munafik sebagai kategori yang berbeda yang sama tingkatannya dengan kafir dan iman dalam pembagian seluruh bidang akhlak islam menjadi 3 kategori utama: (1) *Mukmin* "orang yang percaya", (2) *Kafir* "orang yang tidak percaya", (3) *Munafik* "hipokrit". Beberapa ahli filologi Arab menilai munafik sebagai salah satu jenis dari kafir, dan menyebutkan "*kufr al-nifaq* ", yang secara harfiah "*jenis munafik dari kafir*". Akan tetapi terdapat pendapat tertentu di mana munafik muncul lebih diperlakukan secara tepat sebagai suatu kategori semantik independen yang terdapat diantara ”percaya” dan ”tidak percaya”. Jika diintegrasikan dalam teori fuzzy, maka orang munafik merupakan suatu anggota himpunan yang memiliki derajat keanggotaan pada interval [0, 1]. Di mana derajat keanggotaan 1 untuk orang yang beriman dan derajat keanggotaan 0 untuk orang yang kafir (Izutsu, 1993: 213).

Konsep himpunan fuzzy telah mampu menyelesaikan beberapa masalah yang lebih kompleks saat ini. Akan tetapi masih banyak konsep matematika lainnya yang saat-saat ini juga telah menjadi bahan pembicaraan, salah satunya adalah teori graph karena teori ini mampu menggambarkan model matematika untuk setiap himpunan dari sejumlah obyek diskrit, yaitu dimana beberapa pasangan unsur dari himpunan tersebut terikat menurut suatu aturan tertentu. Obyek diskrit dari himpunan tersebut misalnya dapat berupa orang-orang dengan aturan kenal, atau juga himpunan nama kota dengan aturan jalan yang menghubungkan antara kota satu ke kota yang lain.

Saat ini teori graf semakin berkembang dan menarik karena keunikan dan banyak sekali penerapannya. Keunikan teori graph adalah kesederhanaan pokok bahasan yang dipelajarinya, karena dapat disajikan sebagai titik *(vertex)* dan sisi *(edge)*. Graph merupakan suatu himpunan yang tidak kosong dari elemen-elemen yang disebut titik dengan setiap garis yang menghubungkan dua titik. Banyak sekali struktur yang direpresentasikan dengan graph, dan banyak masalah yang dapat terselesaikan dengan bantuan teori graph ini (Purwanto, 1998: 1). Pada awalnya teori graph hanya digunakan oleh tukang pos Cina untuk mengantar surat-surat dan untuk pewarnaan peta. Selanjutnya dengan perkembangan teknologi, teori graph telah dapat diterapkan dalam ilmu komputer dan lainnya. Sebenarnya perkembangan teori graph yang terjadi beberapa tahun terakhir ini banyak didorong oleh kebutuhan untuk memecahkan masalah tertentu dalam industri yaitu dalam masalah jaringan atau sains manajemen (*operation research*). Akan tetapi dalam graph hanya memberi tahu kita titik-titik mana yang dihubungkan, tanpa mengimplikasikan adanya titik yang lebih dominan dari titik lain.

Oleh karena itu untuk mengimplikasikan titik-titik yang dominan dibutuhkan teori yang menunjukkan arah dan nilai pada titik-titik yang lebih dominan. Suatu graph yang memiliki arah pada sisinya disebut dengan *digraph*, untuk lebih menegaskannya kembali, kita membutuhkan pelabelan titik dan sisi, disini kita tidak akan cukup jika hanya menggunakan crisp graph yang hanya memiliki dwi nilai yaitu 0 dan 1. Oleh karena itu, kita membutuhkan teori yang lebih fleksibel seperti konsep fuzzy yang akan memberikan nilai dengan suatu derajat keanggotaan yang berada pada suatu interval [0,1]. Maka dalam skripsi ini akan dibahas suatu penggabungan konsep *digraph* dengan *fuzzy*, yang akan penulis beri judul "***Kajian tentang Fuzzy Digraph*** ".

1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah di atas dapat ditarik rumusan permasalahan yang akan dibahas yaitu bagaimanakah mendeskripsikan konsep fuzzy digraph dan teorema-teorema dari *fuzzy digraph*?

1.3. Tujuan Penulisan

Adapun tujuan penulisan ini adalah untuk mendeskripsikan kajian tentang fuzzy digraph beserta teorema-teoremanya.

1.4. Manfaat Penulisan

Dalam skripsi ini diharapkan dapat bermanfaat bagi berbagai pihak, diantaranya:

a. Bagi Penulis, sebagai tambahan informasi dan wawasan pengetahuan mengenai *fuzzy digraph*.
b. Bagi Pembaca, dapat menambah wawasan pengetahuan tentang *fuzzy digraph*.
c. Bagi pemerhati matematika, sebagai tambahan pengetahuan bidang matematika, khususnya Teori Graph mengenai teori *fuzzy digraph.*

1.5. Metodologi Penulisan

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode penelitian kepustakaan (*library research)* atau kajian pustaka, yakni melakukan penelitian untuk memperoleh data-data dan informasi-informasi serta objek yang digunakan dalam pembahasan masalah tersebut. Langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah :

1. Merumuskan masalah

   Sebelum peneliti melakukan penelitian, terlebih dahulu disusun rencana penelitian bermula dari suatu masalah tentang *fuzzy* pada *digraph*.

2. Mengumpulkan Data.

   Mengumpulkan data melalui buku-buku antara lain *Gary Chartrand* dan *Linda Lesniak* (*Graphs & Digraphs*), dan *Robin J. Wilson* dan *John J. Watkins* (*Graph an Introductiory Approach*), *George J. Klir* dan *Bo Yuan* (*Fuzzy Set and Fuzzy Logic, Theory and Aplication*) dan sumber-sumber lain yang relevan.

3. Menganalisis Data

   Langkah-langkah yang diambil untuk menganalisis data dalam penelitian ini adalah :

   a. Mendefinisikan digraph.
   b. Mendefinisikan fuzzy set.
   c. Mendefinisikan relasi fuzzy.
   d. Mendefinisikan *fuzzy digraph*.
   e. Membuktikan teorema-teorema *fuzzy digraph*.
   f. Memberikan contoh dan mendeskripsikannya.

1.6. Sistematika Pembahasan

Agar penulisan skripsi ini lebih terarah, mudah ditelaah dan dipahami, maka digunakan sistematika pembahasan yeng terdiri dari empat bab. Masing-masing bab dibagi ke dalam beberapa subbab dengan rumusan sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN

Pendahuluan meliputi: latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II KAJIAN PUSTAKA

Bagian ini terdiri atas konsep-konsep (teori-teori) yang mendukung bagian pembahasan. Konsep-konsep tersebut antara lain berisi tentang digraph, fuzzy set dan relasi fuzzy.

BAB III PEMBAHASAN

Pembahasan berisi tentang *fuzzy digraph*, yaitu definisi, teorema, pembuktian, contoh-contoh dan deskripsinya.

BAB IV PENUTUP

Pada bab ini dibahas tentang kesimpulan dan saran.

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1. DIGRAPH

Seperti yang diketahui tentang graph, di mana graph didefinisikan sebagai suatu pasangan himpunan (V, E) dimana V adalah himpunan tak kosong dari unsur-unsur yang disebut titik (*vertex*) dan E adalah himpunan pasangan tak terurut (u, v) dari titik-titik u dan v yang berbeda di V yang disebut sisi (*edge*). Selanjutnya sisi $e = (u, v)$ pada graph G ditulis $e = uv$. Banyaknya unsur di V disebut order dari G yang dilambangkan dengan p, sedangkan banyaknya unsur di E disebut ukuran dari G yang dilambangkan dengan q (Chartrand and Lesniak, 1986: 4).

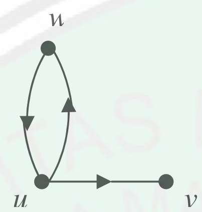
Sedangkan graph yang memiliki arah disebut dengan *digraph* (*directed graph*) atau graph berarah. Noktah-noktahnya disebut "*titik*", dan 'garis-garis berarahnya' atau 'panah-panahnya' disebut *busur*.

Definisi 1.

Digraph D terdiri dari himpunan elemen yang disebut titik (*vertex*), dan himpunan pasangan terurut dari elemen-elemen ini yang disebut sisi berarah (*arc*). Himpunan titik ini disebut himpunan titik *D*, dinotasikan *V(D)*, dan himpunan sisi berarah *D*, dinotasikan *E(D)*. Jika *u* dan *v* adalah titik-titik *D*, maka suatu sisi *uv* dikatakan berarah dari *u* ke *v*, atau menghubungkan *u* ke *v* (Wilson dan Watkins, 1990: 85).

Sebagai contoh, misal $V(D) = \{u, v, w\}$dan $E(D) = \{(u, w),(w, u),(u, v)\}$, maka *D* dapat digambarkan sebagai berikut

D:



Gambar 2.1. Digraph

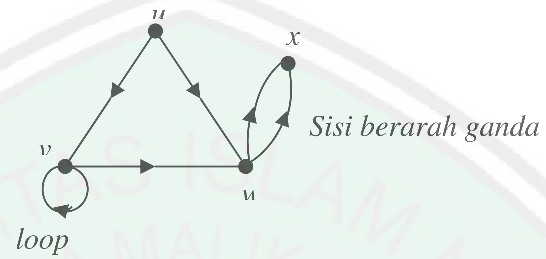
Banyaknya unsur di $V(D)$, $|V(D)|$, disebut order dari *D* dan banyaknya unsur di $E(D)$, $|E(D)|$ disebut ukuran dari *D*. Misalnya *u* adalah sebuah titik di digraf *D*. Banyaknya sisi berarah yang menuju ke titik *u* disebut derajat masuk (*in-degree*) dari *u* yang dinotasikan dengan $id(u)$, dan banyaknya sisi berarah yang keluar dari titik *u* disebut derajat keluar (*out degree*) dari *u* yang dinotasikan dengan $od(u)$. Sedangkan derajat dari *u*, $deg(u)$, didefinisikan dengan,

$deg(u) = od(u) + id(u)$ (chartrand and lesniak, 1986: 15)

Pada gambar 2.1 digraph *D* memiliki $od(u) = 2$, $id(u) = id(v) = id(w) = od(w) = 1$, dan $od(v) = 0$. Dan untuk $deg(u) = 3, deg(v) = 2, deg(w) = 1$.

Definisi 2.

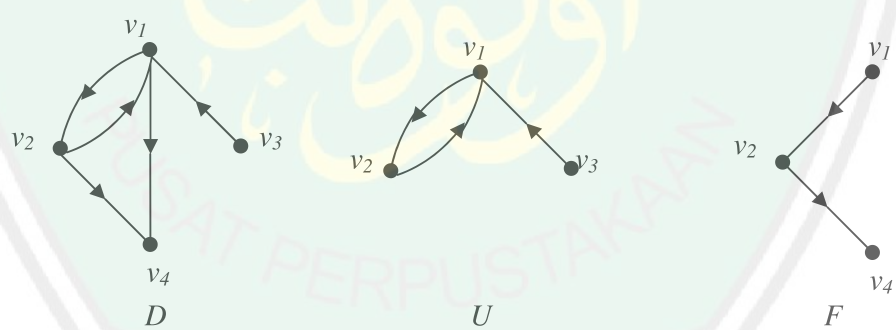
Dua atau lebih sisi yang menghubungkan pasangan titik-titik yang sama dalam arah yang sama disebut sisi berarah ganda, dan suatu sisi yang menghubungkan suatu titik ke dirinya sendiri disebut *loop* (simpul). Suatu digraph yang tidak mempunyai *loop* atau sisi berarah ganda disebut digraph sederhana (Wilson dan Watkins, 1990: 85).



Gambar 2.2. Digraph dengan Sisi Berarah Ganda dan Loop

Definisi 3.

Misal *D* adalah digraph dengan himpunan titik *V(D)* dan himpunan sisi *E(D)*. ***Subdigraph*** dari *D* adalah digraph yang semua titiknya dimiliki oleh *V(D)* dan semua sisinya dimiliki oleh *E(D)* (Wilson dan Watkins, 1990: 86).



Gambar 2.3. Subdigraph, $U \subseteq D$ *dan* $U \subseteq F$

Definisi 4.

Dua digraf *C* dan *D* adalah ***isomorfik*** jika *D* dapat diperoleh dengan memberi nama lagi (*relabeling*) titiknya, yaitu jika ada korespondensi satu-satu antara titik *C* dan titik-titik *D*, sedemikian hingga banyaknya sisi yang menghubungkan setiap pasang titik di C sama dengan banyaknya sisi yang menghubungkan pasangan titik yang berkorespondensi (dengan arah sama) di D (Wilson dan Watkins, 1990: 86).

2.2. Himpunan Fuzzy

2.2.1. Definisi Himpunan Fuzzy

Secara matematis suatu himpunan fuzzy $\tilde{A}$ dalam semesta wacana X dapat dinyatakan sebagai himpunan pasangan terurut

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) | x \in X\}$$

di mana $\mu_{\tilde{A}}$ adalah fungsi keanggotaan dari himpunan fuzzy $\tilde{A}$ yang merupakan suatu pemetaan dari himpunan semesta X ke selang tertutup [0,1]. Apabila semesta X adalah himpunan yang kontinu, maka himpunan fuzzy $\tilde{A}$ dinyatakan dengan

$$\tilde{A} = \int_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x) / x$$

di mana lambang $\int$ di sini bukan lambang integral seperti yang dikenal dalam kalkulus, tetapi melambangkan keseluruhan unsur-unsur $x \in X$ bersama dengan derajat keanggotaannya dalam himpunan fuzzy $\tilde{A}$. Apabila semesta X adalah himpunan derajat diskrit, maka himpunan fuzzy $\tilde{A}$ dinyatakan dengan

$$\tilde{A} = \sum_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x) / x$$

di mana lambang $\sum$ di sini bukan melambangkan operasi penjumlahan seperti yang dikenal dalam aritmatika, tetapi melambangkan keseluruhan unsur-unsur

$x \in X$ bersama dengan derajat keanggotaannya dalam himpunan fuzzy $\tilde{A}$ (Susilo, 2006: 51)

Pada himpunan fuzzy nilai keanggotaan terletak pada rentang 0 sampai 1. apabila x memiliki nilai keanggotaan fuzzy $\mu_{\tilde{A}}(x) = 0$ berarti x tidak menjadi anggota himpunan $\tilde{A}$, demikian pula apabila x memiliki nilai keanggotaan fuzzy $\mu_{\tilde{A}}(x) = 1$ berarti x menjadi anggota penuh pada himpunan $\tilde{A}$ (Kusumadewi dan Purnomo, 2004: 6).

2.2.2. Notasi-notasi Himpunan Fuzzy

Himpunan fuzzy memiliki dua atribut, yaitu:

a. *Linguistic*, yaitu penamaan suatu grup yang mewakili suatu keadaan atau kondisi tertentu dengan menggunakan bahasa alami, seperti: MUDA, PAROBAYA, TUA, PANAS, DINGIN.

b. *Numeris*, yaitu suatu nilai (angka) yang menunjukkan ukuran dari suatu variabel seperti: 40, 25, 50, dan sebagainya.

Ada beberapa hal yang perlu diketahui dalam memahami sistem fuzzy, yaitu:

a. *Variabel fuzzy*, merupakan variabel yang hendak di bahas dalam suatu sistem fuzzy. Contohnya: umur, temperatur, permintaan, dsb.

b. *Himpunan fuzzy*, merupakan suatu grup yang mewakili suatu kondisi atau keadaan tertentu dalam suatu variabel fuzzy. Contoh: variabel umur, terbagi menjadi 3 himpunan fuzzy, yaitu: MUDA, PAROBAYA, dan TUA.

c. *Semesta pembicaraan*, adalah keseluruhan nilai yang diperbolehkan untuk dioperasikan dalam suatu variabel fuzzy. Semesta pembicaraan merupakan himpunan bilangan real yang senantiasa naik (bertambah) secara monoton dari kiri ke kanan. Nilai semesta pembicaraan dapat berupa bilangan positif maupun negatif. Adakalanya nilai semesta pembicaraan ini tidak dibatasi batas atasnya.

   Contoh:

   1) Semesta pembicaraan untuk variabel umur: $[0,+\infty]$

      (berada pada range 0 sampai dengan tak terhingga)

   2) Semesta pembicaraan untuk variabel temperatur: [0,40]

      (berada pada range 0˚C sampai dengan 40˚C)

d. *Domain himpunan fuzzy*, adalah keseluruhan nilai yang diizinkan dalam semesta pembicaaraan dan boleh dioperasikan dalam suatu himpunan fuzzy. Seperti halnya semesta pembicaraan, domain merupakan himpunan bilangan real yang senantiasa naik (bertambah) secara monoton dari kiri ke kanan. Nilai domain dapat berupa bilangan positif maupun negatif.

   Contoh domain himpunan fuzzy:

   1) MUDA = [0, 45]
   2) PAROBAYA = [35, 55]
   3) TUA = $[45, +\infty]$

2.2.3. Fungsi Keanggotaan

Setiap elemen dari semesta pada wacana merupakan anggota dari himpunan fuzzy untuk beberapa angka, mungkin juga *nol*. Fungsi yang menghubungkan nilai dengan beberapa elemen x dari semesta disebut fungsi keanggotaan ($\mu_{\tilde{A}}(x)$). Dalam perkataan lain, fungsi keanggotaan dari suatu himpunan fuzzy $\tilde{A}$ dari semesta X merupakan pemetaan $\mu_{\tilde{A}}$ dari X ke selang [0, 1] yaitu $\mu_{\tilde{A}} : X \rightarrow [0, 1]$.

Kebanyakan himpunan fuzzy berada dalam semesta himpunan semua bilangan real $\mathbb{R}$ dengan fungsi keanggotaan yang dinyatakan dalam bentuk suatu formula matematis. Fungsi keanggotaan ini memainkan peranan sentral dalam teori himpunan fuzzy (Susilo, 2006: 55).

2.2.4. Operasi-operasi Himpunan Fuzzy

a. Komplemen himpunan fuzzy

Misal $\tilde{A}$ himpunan fuzzy pada himpunan semesta X dengan fungsi keanggotaan $\mu_{\tilde{A}}$. Komplemen dari $\tilde{A}$ adalah himpunan fuzzy $\overline{A}$ di X dengan fungsi keanggotaan $\mu_{\overline{A}}$ dengan

$$\mu_{\overline{A}}(x) = c(\mu_{\tilde{A}}(x)), \forall x \in X$$

c adalah fungsi komplemen fuzzy, c: [0,1] → [0,1]. Fungsi komplemen ada beberapa jenis antara lain:

Komplemen *fuzzy standar*: $c(\mu_{\tilde{A}}(x)) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x), \forall x \in X$

Komplemen *fuzzy sugeno*:

$$c_\lambda(\mu_{\tilde{A}}(x)) = \frac{1-\mu_{\tilde{A}}(x)}{1+\lambda\mu_{\tilde{A}}(x)}, \lambda \in (-1,\infty), \forall x \in X$$

Komplemen *fuzzy yager*:

$$c_w(\mu_{\tilde{A}}(x)) = (1-(\mu_{\tilde{A}}(x))^w)^{1/w}, w \in (0,\infty), \forall x \in X$$

b. Irisan himpunan fuzzy

Misal $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ adalah himpunan fuzzy pada himpunan semesta X dengan fungsi keanggotaan masing-masing $\mu_{\tilde{A}}$ dan. $\mu_{\tilde{B}}$ Irisan dari $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ didefinisikan sebagai himpunan fuzzy yang memiliki fungsi keanggotaan $\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}$ dengan

$$\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(x) = i(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)), \forall x \in X$$

i adalah fungsi irisan, i = [0, 1] → [0,1]. Fungsi ini memasangkan derajat keanggotaan himpunan fuzzy $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ ke derajat keanggotaan himpunan $\tilde{A} \cap \tilde{B}$. Fungsi irisan yang sering digunakan antara lain:

Irisan standar: min(x, y)

Perkalian aljabar: xy

Selisih terbatas: max(0, x + y - 1) (Klir dan Yuan, 1995: 62-63)

c. Gabungan himpunan fuzzy

Misal $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ adalah himpunan fuzzy pada himpunan semesta X dengan fungsi keanggotaan masing-masing $\mu_{\tilde{A}}$ dan. $\mu_{\tilde{B}}$. Gabungan dari $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ didefinisikan sebagai himpunan fuzzy $\tilde{A} \cup \tilde{B}$ yang memiliki fungsi keanggotaan $\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}$ dengan

$$\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = u(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)), \forall x \in X$$

u adalah fungsi irisan, $u = [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0,1]$. Fungsi ini memasangkan derajat keanggotaan himpunan fuzzy $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ ke derajat keanggotaan himpunan $\tilde{A} \cup \tilde{B}$. Fungsi gabungan yang sering digunakan antara lain:

Gabungan standar: $u(x, y) = \max(x, y)$

Penjumlahan aljabar: $u(x, y) = x + y - xy$

Penjumlahan terbatas: $u(x, y) = \min(1, x + y)$ (Klir dan Yuan, 1995: 76-77)

2.2.5. Relasi Fuzzy

Relasi fuzzy (biner) $\tilde{\mathbf{R}}$ antara elemen-elemen dalam himpunan X dengan elemen-elemen dalam himpunan Y didefinisikan sebagai himpunan bagian fuzzy dari perkalian cartesius $X \times Y$, yaitu himpunan fuzzy

$$\tilde{\mathbf{R}} = \{((x, y), \mu_{\tilde{\mathbf{R}}}(x, y)) | (x, y) \in X \times Y\}$$

Relasi fuzzy $\tilde{\mathbf{R}}$ disebut juga relasi fuzzy pada himpunan (semesta) $X \times Y$. Jika $X = Y$, maka $\tilde{\mathbf{R}}$ disebut relasi fuzzy pada himpunan X. Relasi klasik hanya menyatakan adanya ($(x,y) \in \mathbf{R}$) atau tidak adanya ($(x,y) \notin \mathbf{R}$) hubungan antara elemen-elemen dari sesuatu himpunan dengan elemen-elemen dari himpunan lainnya, sedangkan relasi fuzzy lebih luas dari itu juga menyatakan derajat eratnya hubungan tersebut (Susilo, 2006: 91).

Contoh:

Misalnya X = {31, 78, 205}, Y = {1, 27, 119}, dan $\tilde{\mathbf{R}}$ adalah relasi fuzzy "jauh lebih besar" antara elemen-elemen dalam X dengan elemen-elemen dalam Y. Maka relasi $\tilde{\mathbf{R}}$ tersebut dapat disajikan sebagai $\tilde{\mathbf{R}}$ = 0.3/(31,1) + 0.1/(31,27) + 0.5/(78,1) + 0.3/(78,27) + 0.9/(205,1) + 0.7/(205,27) + 0.4/(205,119).

Misalkan $\tilde{A} = (X, \mu_{\tilde{A}})$, $\tilde{B} = (X, \mu_{\tilde{B}})$ adalah dua himpunan fuzzy X. Maka kita definisikan relasi sebagai berikut:

1) *Kesamaan*, $\tilde{A} = \tilde{B}$ jika dan hanya jika $\mu_{\tilde{A}} = \mu_{\tilde{B}}$, untuk $\forall x \in X$.
2) *Ketidaksamaan*, $\tilde{A} \leq \tilde{B}$ jika dan hanya jika $\mu_{\tilde{A}} \leq \mu_{\tilde{B}}$, untuk $\forall x \in X$.

   untuk $\forall a, b \in \mathbf{R}$, di mana berlaku $a \vee b = \max\{a, b\}$ dan $a \wedge b = \min\{a, b\}$, maka:
3) *Disjungsi*, $\tilde{D} = \tilde{A} \vee \tilde{B}$ jika dan hanya jika $\mu_{\tilde{D}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) \vee \mu_{\tilde{B}}(x)$, untuk $\forall x \in X$.
4) *Konjungsi*, $\tilde{C} = \tilde{A} \wedge \tilde{B}$ jika dan hanya jika $\mu_{\tilde{C}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(x)$, untuk $\forall x \in X$.
5) *Komplemen*, $\tilde{E} = (\tilde{A})^C$ jika dan hanya jika $\mu_{\tilde{E}}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x)$, untuk $\forall x \in X$.
6) *Product aljabar*, $\tilde{F} = \tilde{A} \cdot \tilde{B}$ jika dan hanya jika $\mu_{\tilde{F}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x)$, untuk $\forall x \in X$.
7) *Jumlah aljabar*, $\tilde{C} = \tilde{A} \oplus \tilde{B}$ jika dan hanya jika $\mu_{\tilde{C}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - \mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x)$, untuk $\forall x \in X$.

Dari definisi-definisi di atas, terdapat beberapa teorema:

Teorema 2.1.

Misal $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ adalah himpunan fuzzy di *X*. Maka terdapat 4 kondisi yang ekuivalen: (1) $\tilde{A} \le \tilde{B}$, (2) $\tilde{A} \vee \tilde{B} = \tilde{B}$, (3) $\tilde{A} \wedge \tilde{B} = \tilde{A}$, (4) $(\tilde{B})^C \le (\tilde{A})^C$

Bukti:

(1) $\tilde{A} \le \tilde{B} \leftrightarrow \mu_{\tilde{A}} \le \mu_{\tilde{B}}$

(2) $\tilde{A} \vee \tilde{B} \leftrightarrow \mu_{\tilde{A}}(x) \vee \mu_{\tilde{B}}(x) = \text{maks}(\mu_{\tilde{A}}, \mu_{\tilde{B}})$

Karena $\tilde{A} \le \tilde{B}$ dan $\mu_{\tilde{A}} \le \mu_{\tilde{B}}$, maka

$\text{maks}(\mu_{\tilde{A}}, \mu_{\tilde{B}}) = \mu_{\tilde{B}} \rightarrow \mu_{\tilde{B}} = \tilde{B}$

jadi, benar bahwa $\tilde{A} \vee \tilde{B} = \tilde{B}$

(3) $\tilde{A} \wedge \tilde{B} \leftrightarrow \mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(x) = \min(\mu_{\tilde{A}}, \mu_{\tilde{B}})$

Karena $\tilde{A} \le \tilde{B}$ dan $\mu_{\tilde{A}} \le \mu_{\tilde{B}}$, maka

$\min(\mu_{\tilde{A}}, \mu_{\tilde{B}}) = \mu_{\tilde{B}} \rightarrow \mu_{\tilde{B}} = \tilde{A}$

jadi, benar bahwa $\tilde{A} \wedge \tilde{B} = \tilde{A}$

(4) $(\tilde{A})^C = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x)$, dan $(\tilde{B})^C = 1 - \mu_{\tilde{B}}(x)$, maka

$$\tilde{A} \le \tilde{B}$$

$$\mu_{\tilde{A}} \le \mu_{\tilde{B}}$$

$$(1 - \mu_{\tilde{A}}(x)) \le (1 - \mu_{\tilde{B}}(x))$$

$$-\mu_{\tilde{A}} \le -\mu_{\tilde{B}}$$

$$\mu_{\tilde{B}} \le \mu_{\tilde{A}}$$

Teorema 2.2.

Misal $\tilde{A}$ adalah himpunan fuzzy di *X*, maka:

(1) $\tilde{A} \vee \tilde{A} = \tilde{A}$, (2) $\tilde{A} \wedge \tilde{A} = \tilde{A}$, (3) $\left(\left(\tilde{A}\right)^C\right)^C = \tilde{A}$, (4) $\tilde{A} \cdot \tilde{\phi} = \tilde{\phi}$,

(5) $\tilde{A} \cdot \tilde{S} = \tilde{S}$, (6) $\tilde{A} \oplus \tilde{\phi} = \tilde{A}$, (7) $\tilde{A} \oplus \tilde{S} = \tilde{S}$, di mana $\tilde{\phi} = \{(x,0) | x \in X\}$

dan $\tilde{S} = \{(x,1) | x \in X\}$ yang merupakan dua himpunan fuzzy khusus.

Teorema 2.3.

Misal $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ adalah himpunan fuzzy di X, maka:

(1) $\tilde{A} \vee \tilde{B} = \tilde{B} \vee \tilde{A}$ (2) $\tilde{A} \wedge \tilde{B} = \tilde{B} \wedge \tilde{A}$ (3) $\tilde{A} \cdot \tilde{B} = \tilde{B} \cdot \tilde{A}$

(4) $\tilde{A} \oplus \tilde{B} = \tilde{B} \oplus \tilde{A}$ (5) $\left(\tilde{A} \vee \tilde{B}\right)^C = \left(\tilde{A}\right)^C \wedge \left(\tilde{B}\right)^C$

(6) $\left(\tilde{A} \wedge \tilde{B}\right)^C = \left(\tilde{A}\right)^C \vee \left(\tilde{B}\right)^C$ (7) $\left(\tilde{A} \cdot \tilde{B}\right)^C = \left(\tilde{A}\right)^C \oplus \left(\tilde{B}\right)^C$

(8) $\left(\tilde{A} \oplus \tilde{B}\right)^C = \left(\tilde{A}\right)^C \cdot \left(\tilde{B}\right)^C$ (9) $\left(\tilde{A} \oplus \tilde{B}\right)^C \leq \left(\tilde{A}\right)^C \oplus \left(\tilde{B}\right)^C$

(10) $\left(\tilde{A}\right)^C \cdot \left(\tilde{B}\right)^C \leq \left(\tilde{A} \cdot \tilde{B}\right)^C$ (11) $\tilde{A} \wedge \left(\tilde{A} \vee \tilde{B}\right) = \tilde{A}$

(12) $\tilde{A} \vee \left(\tilde{A} \wedge \tilde{B}\right) = \tilde{A}$ (13) $\tilde{A} \oplus \tilde{B} \geq \tilde{A} \vee \tilde{B} \geq \tilde{A} \wedge \tilde{B} \geq \tilde{A} \cdot \tilde{B}$

Bukti:

(1) $\tilde{A} \vee \tilde{B} = \mu_{\tilde{A}}(x) \vee \mu_{\tilde{B}}(x)$

$= \max\left(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\right)$

$= \max\left(\mu_{\tilde{B}}(x), \mu_{\tilde{A}}(x)\right)$

$= \mu_{\tilde{B}}(x) \vee \mu_{\tilde{A}}(x)$

$= \tilde{B} \vee \tilde{A}$

(2) $\tilde{A} \wedge \tilde{B} = \mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(x)$

$= \min\left(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\right)$

$= \min\left(\mu_{\tilde{B}}(x), \mu_{\tilde{A}}(x)\right)$

$= \mu_{\tilde{B}}(x) \vee \mu_{\tilde{A}}(x) = \tilde{B} \wedge \tilde{A}$

(3) $\tilde{A} \cdot \tilde{B} = \mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x)$

$= \mu_{\tilde{B}}(x) \cdot \mu_{\tilde{A}}(x)$

$= \tilde{B} \cdot \tilde{A}$

(4) $\tilde{A} \oplus \tilde{B} = \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - \mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x)$

$= \mu_{\tilde{B}}(x) + \mu_{\tilde{A}}(x) - \mu_{\tilde{B}}(x) \cdot \mu_{\tilde{A}}(x)$

$= \tilde{B} \oplus \tilde{A}$

(5) $\left(\tilde{A} \vee \tilde{B}\right)^C = \left(\tilde{A}\right)^C \wedge \left(\tilde{B}\right)^C$

(i) Akan dibuktikan $\left(\tilde{A} \vee \tilde{B}\right)^C \subset \left(\tilde{A}\right)^C \wedge \left(\tilde{B}\right)^C$

Ambil $x \in \left(\tilde{A} \vee \tilde{B}\right)^C$

Maka $x \notin \tilde{A} \vee \tilde{B}$

$x \notin \tilde{A}$ dan $x \notin \tilde{B}$

$x \in \left(\tilde{A}\right)^C$ dan $x \in \left(\tilde{B}\right)^C$

$x \in \left(\tilde{A}\right)^C \wedge \left(\tilde{B}\right)^C$

Jadi $\left(\tilde{A} \vee \tilde{B}\right)^C \subset \left(\tilde{A}\right)^C \wedge \left(\tilde{B}\right)^C$

(ii) Akan dibuktikan $\left(\tilde{A}\right)^C \wedge \left(\tilde{B}\right)^C \subset \left(\tilde{A} \vee \tilde{B}\right)^C$

Ambil $y \in (\tilde{A})^C \wedge (\tilde{B})^C$

Maka $y \in (\tilde{A})^C$ dan $y \in (\tilde{B})^C$

$y \notin \tilde{A}$ dan $y \notin \tilde{B}$

$y \notin (\tilde{A} \vee \tilde{B})$

$y \in (\tilde{A} \vee \tilde{B})^C$

Jadi $(\tilde{A})^C \wedge (\tilde{B})^C \subset (\tilde{A} \vee \tilde{B})^C$

(6) $(\tilde{A} \wedge \tilde{B})^C = (\tilde{A})^C \vee (\tilde{B})^C$

(i) Akan dibuktikan $(\tilde{A} \wedge \tilde{B})^C \subset (\tilde{A})^C \vee (\tilde{B})^C$

Ambil $x \in (\tilde{A} \wedge \tilde{B})^C$

Maka $x \notin \tilde{A} \wedge \tilde{B}$

$x \notin \tilde{A}$ atau $x \notin \tilde{B}$

$x \in (\tilde{A})^C$ atau $x \in (\tilde{B})^C$

$x \in (\tilde{A})^C \vee (\tilde{B})^C$

Jadi $(\tilde{A} \wedge \tilde{B})^C \subset (\tilde{A})^C \vee (\tilde{B})^C$

(ii) Akan dibuktikan $(\tilde{A})^C \vee (\tilde{B})^C \subset (\tilde{A} \wedge \tilde{B})^C$

Ambil $y \in (\tilde{A})^C \vee (\tilde{B})^C$

Maka $y \in (\tilde{A})^C$ atau $y \in (\tilde{B})^C$

$y \notin \tilde{A}$ atau $y \notin \tilde{B}$

$y \notin (\tilde{A} \wedge \tilde{B})$

$y \in \left(\tilde{A} \wedge \tilde{B}\right)^C$

Jadi $\left(\tilde{A}\right)^C \vee \left(\tilde{B}\right)^C \subset \left(\tilde{A} \wedge \tilde{B}\right)^C$

(7) $\left(\tilde{A} \cdot \tilde{B}\right)^C = \left(\tilde{A}\right)^C \oplus \left(\tilde{B}\right)^C$

Misal: $\tilde{P} = \left(\tilde{A} \cdot \tilde{B}\right)^C$ dan $\tilde{Q} = \left(\tilde{A}\right)^C \oplus \left(\tilde{B}\right)^C$ untuk semua $x \in X$

$\mu_{\tilde{Q}}(x) = \left(1 - \mu_{\tilde{A}}(x)\right) + \left(1 - \mu_{\tilde{B}}(x)\right) - \left(1 - \mu_{\tilde{A}}(x)\right) \cdot \left(1 - \mu_{\tilde{B}}(x)\right)$

$= 1 - \mu_{\tilde{A}}(x) + 1 - \mu_{\tilde{B}}(x) - 1 + \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - \mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x)$

$= 1 - \mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{P}}(x)$

Jadi, karena $\mu_{\tilde{Q}}(x) = \mu_{\tilde{P}}(x)$ maka $\tilde{P} = \tilde{Q}$ atau $\left(\tilde{A} \cdot \tilde{B}\right)^C = \left(\tilde{A}\right)^C \oplus \left(\tilde{B}\right)^C$

(8) $\left(\tilde{A} \oplus \tilde{B}\right)^C = \left(\tilde{A}\right)^C \cdot \left(\tilde{B}\right)^C$

Misal: $\tilde{P} = \left(\tilde{A} \oplus \tilde{B}\right)^C$ dan $\tilde{Q} = \left(\tilde{A}\right)^C \cdot \left(\tilde{B}\right)^C$ untuk semua $x \in X$

$\mu_{\tilde{Q}}(x) = \left(1 - \mu_{\tilde{A}}(x)\right) \cdot \left(1 - \mu_{\tilde{B}}(x)\right)$

$= 1 - \mu_{\tilde{A}}(x) - \mu_{\tilde{B}}(x) + \mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x)$

$= 1 - \left(\mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - \mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x)\right)$

$= 1 - \left(\mu_{\tilde{A}}(x) \oplus \mu_{\tilde{B}}(x)\right)$

$= \left(\mu_{\tilde{A}}(x) \oplus \mu_{\tilde{B}}(x)\right)^C$

$= \mu_{\tilde{P}}(x)$

Jadi, karena $\mu_{\tilde{Q}}(x) = \mu_{\tilde{P}}(x)$, berarti $\tilde{P} = \tilde{Q}$ sehingga terbukti bahwa $\left(\tilde{A} \oplus \tilde{B}\right)^C = \left(\tilde{A}\right)^C \cdot \left(\tilde{B}\right)^C$

(9) $\left(\tilde{A} \oplus \tilde{B}\right)^C \leq \left(\tilde{A}\right)^C \oplus \left(\tilde{B}\right)^C$

Telah diketahui bahwa $\left(\tilde{A}\right)^C \oplus \left(\tilde{B}\right)^C = \left(\tilde{A}\cdot\tilde{B}\right)^C$. Maka akan ditunjukkan $\tilde{A}\oplus\tilde{B} \ge \tilde{A}\cdot\tilde{B}$.

Diketahui bahwa $0 \le \mu_{\tilde{A}}(x) \le 1$ dan $0 \le \mu_{\tilde{B}}(x) \le 1$, sehingga didapat $0 \le 1-\mu_{\tilde{A}}(x)$ dan $0 \le 1-\mu_{\tilde{B}}(x)$. Jika kedua pertidaksamaan tersebut disubstitusikan maka akan didapat

$$\mu_{\tilde{A}}(x)\left(1-\mu_{\tilde{B}}(x)\right)+\mu_{\tilde{B}}(x)\left(1-\mu_{\tilde{A}}(x)\right) \ge 0$$

$$\mu_{\tilde{A}}(x)-\mu_{\tilde{A}}(x)\cdot\mu_{\tilde{B}}(x)+\mu_{\tilde{B}}(x)-\mu_{\tilde{A}}(x)\cdot\mu_{\tilde{B}}(x) \ge 0$$

$$\mu_{\tilde{A}}(x)+\mu_{\tilde{B}}(x)-\mu_{\tilde{A}}(x)\cdot\mu_{\tilde{B}}(x) \ge \mu_{\tilde{A}}(x)\cdot\mu_{\tilde{B}}(x)$$

$$\mu_{\tilde{A}}(x)\oplus\mu_{\tilde{B}}(x) \ge \mu_{\tilde{A}}(x)\cdot\mu_{\tilde{B}}(x)$$

$$\tilde{A}\oplus\tilde{B} \ge \tilde{A}\cdot\tilde{B}$$

Jadi terbukti bahwa $\tilde{A}\oplus\tilde{B} \ge \tilde{A}\cdot\tilde{B}$. Oleh karena itu, $\left(\tilde{A}\oplus\tilde{B}\right)^C \le \left(\tilde{A}\cdot\tilde{B}\right)^C = \left(\tilde{A}\right)^C \oplus \left(\tilde{B}\right)^C$

(10) $\left(\tilde{A}\right)^C \cdot \left(\tilde{B}\right)^C \le \left(\tilde{A}\cdot\tilde{B}\right)^C$

Telah diketahui bahwa $\left(\tilde{A}\oplus\tilde{B}\right)^C = \left(\tilde{A}\right)^C \cdot \left(\tilde{B}\right)^C$ dan $\left(\tilde{A}\oplus\tilde{B}\right)^C \le \left(\tilde{A}\cdot\tilde{B}\right)^C$.

Oleh karena itu, akan didapatkan

$$\left(\tilde{A}\cdot\tilde{B}\right)^C \le \left(\tilde{A}\oplus\tilde{B}\right)^C = \left(\tilde{A}\right)^C \cdot \left(\tilde{B}\right)^C$$

Yang berarti $\left(\tilde{A}\right)^C \cdot \left(\tilde{B}\right)^C \le \left(\tilde{A}\cdot\tilde{B}\right)^C$.

(11) $\tilde{A}\wedge\left(\tilde{A}\vee\tilde{B}\right) = \mu_{\tilde{A}}(x)\wedge\left(\mu_{\tilde{A}}(x)\vee\mu_{\tilde{B}}(x)\right)$

$$= \mu_{\tilde{A}}(x)\wedge\left(\max\left(\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)\right)\right)$$

$$= \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), (\max(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)))\}$$

$$= \mu_{\tilde{A}}(x) = \tilde{A}$$

Jadi terbukti bahwa $\tilde{A} \wedge (\tilde{A} \vee \tilde{B}) = \tilde{A}$

(12) $\tilde{A} \vee (\tilde{A} \wedge \tilde{B}) = \mu_{\tilde{A}}(x) \vee (\mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(x))$

$$= \mu_{\tilde{A}}(x) \vee (\min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)))$$

$$= \max\{\mu_{\tilde{A}}(x), (\min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)))\}$$

$$= \mu_{\tilde{A}}(x) = \tilde{A}$$

Jadi terbukti bahwa $\tilde{A} \vee (\tilde{A} \wedge \tilde{B}) = \tilde{A}$

(13) $\tilde{A} \oplus \tilde{B} \geq \tilde{A} \vee \tilde{B} \geq \tilde{A} \wedge \tilde{B} \geq \tilde{A} \cdot \tilde{B}$

Untuk membuktikan pertidaksamaan tersebut, maka akan dibuktikan bahwa: (i) $\tilde{A} \oplus \tilde{B} \geq \tilde{A} \vee \tilde{B}$, (ii) $\tilde{A} \vee \tilde{B} \geq \tilde{A} \wedge \tilde{B}$, (iii) $\tilde{A} \wedge \tilde{B} \geq \tilde{A} \cdot \tilde{B}$

(i) $\tilde{A} \wedge \tilde{B} \geq \tilde{A} \cdot \tilde{B}$

Karena $0 \leq \mu_{\tilde{A}}(x) \leq 1$ dan $0 \leq \mu_{\tilde{B}}(x) \leq 1$, maka $0 \leq 1 - \mu_{\tilde{A}}(x)$ dan $0 \leq 1 - \mu_{\tilde{B}}(x)$, dan didapat

$$\mu_{\tilde{B}}(x)(1 - \mu_{\tilde{A}}(x)) + \mu_{\tilde{A}}(x)(1 - \mu_{\tilde{B}}(x)) \geq 0$$

$$\mu_{\tilde{A}}(x) - \mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - \mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x) \geq 0$$

$$\mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) \geq 2(\mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x))$$

$$\mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(x) \geq 2(\mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x))$$

$$\mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(x) \geq \mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x)$$

$\tilde{A} \wedge \tilde{B} \geq \tilde{A} \cdot \tilde{B}$

Jadi , terbukti bahwa $\tilde{A} \wedge \tilde{B} \geq \tilde{A} \cdot \tilde{B}$.

(ii) $\tilde{A} \vee \tilde{B} \geq \tilde{A} \wedge \tilde{B}$

$$\tilde{A} \vee \tilde{B} = \mu_{\tilde{A}}(x) \vee \mu_{\tilde{B}}(x) = \max\left(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\right)$$
$$\geq \min\left(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\right) = \mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(x) = \tilde{A} \wedge \tilde{B}$$

Jadi, benar bahwa $\tilde{A} \vee \tilde{B} \geq \tilde{A} \wedge \tilde{B}$

(iii) $\tilde{A} \oplus \tilde{B} \geq \tilde{A} \vee \tilde{B}$

$$\tilde{A} \oplus \tilde{B} = \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - \mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x)$$

$$\tilde{A} \vee \tilde{B} = \mu_{\tilde{A}}(x) \vee \mu_{\tilde{B}}(x)$$

$$= \max\left(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\right)$$

$= \mu_{\tilde{A}}(x)$ atau $\mu_{\tilde{B}}(x)$

$\max\left(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\right) = \mu_{\tilde{A}}(x)$, jika $\mu_{\tilde{A}}(x) \geq \mu_{\tilde{B}}(x)$

$\max\left(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\right) = \mu_{\tilde{B}}(x)$, jika $\mu_{\tilde{A}}(x) < \mu_{\tilde{B}}(x)$

Karena, $\tilde{A} \oplus \tilde{B} \geq \mu_{\tilde{A}}(x)$ dan $\tilde{A} \oplus \tilde{B} \geq \mu_{\tilde{B}}(x)$

Sehingga benar bahwa $\tilde{A} \oplus \tilde{B} \geq \tilde{A} \vee \tilde{B}$

Dari pembuktian (i), (ii) dan (iii) dapat diambil kesimpulan bahwa $\tilde{A} \oplus \tilde{B} \geq \tilde{A} \vee \tilde{B} \geq \tilde{A} \wedge \tilde{B} \geq \tilde{A} \cdot \tilde{B}$ benar.

2.3. Kajian tentang Digraph dan Himpunan Fuzzy dalam Al Qur'an

Al Qur'an dikenal sebagai kitab yang aktif. Ia bisa memberikan berbagai landasan-landasan sebagai dasar sumber adanya ilmu pengetahuan lainnya. Secara umum konsep dasar dari ilmu matematika terdapat dalam al Qur'an, dan beberapa konsep dasar dari berbagai cabang dari ilmu matematika juga dibahas dalam al Qur'an yang salah satunya adalah digraph dan himpunan fuzzy.

Digraph yang menurut definisinya adalah suatu pasangan himpunan dari himpunan yang tidak kosong yang memuat elemen-elemen yang disebut titik, dan suatu daftar pasangan tidak terurut elemen itu yang disebut sisi berarah. Dalam al-Qur'an elemen-elemen yang dimaksud meliputi Pencipta (Allah) dan hamba-hambanya, sedangkan sisi atau garis yang menghubungkan elemen-elemen tersebut adalah bagaimana hubungan antara Allah dengan hambanya dan juga hubungan sesama hamba yang terjalin, *Hablun min Allah wa Hablun min An-Nas*. Hal ini dikuatkan oleh firman Allah dalam al-Qur'an surat al-Hujurat ayat 10 yaitu:

ضُرِبَتْ عَلَيْهِمُ ٱلذِّلَّةُ أَيْنَ مَا ثُقِفُوٓا۟ إِلَّا بِحَبْلٍ مِّنَ ٱللَّهِ وَحَبْلٍ مِّنَ ٱلنَّاسِ وَبَآءُو بِغَضَبٍ
مِّنَ ٱللَّهِ وَضُرِبَتْ عَلَيْهِمُ ٱلْمَسْكَنَةُ ۚ ذَٰلِكَ بِأَنَّهُمْ كَانُوا۟ يَكْفُرُونَ بِـَٔايَـٰتِ ٱللَّهِ وَيَقْتُلُونَ
ٱلْأَنۢبِيَآءَ بِغَيْرِ حَقٍّ ۚ ذَٰلِكَ بِمَا عَصَوا۟ وَّكَانُوا۟ يَعْتَدُونَ ﴿١١٢﴾

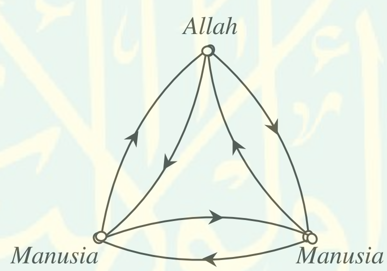
Artinya: "*Mereka diliputi kehinaan di mana saja mereka berada, kecuali jika mereka berpegang kepada tali (agama) Allah dan tali (perjanjian) dengan manusia[218], dan mereka kembali mendapat kemurkaan dari Allah dan mereka diliputi kerendahan. yang demikian itu[219] Karena mereka kafir kepada ayat-ayat Allah dan membunuh para nabi tanpa alasan yang benar. yang demikian itu[220] disebabkan mereka durhaka dan melampaui batas*".

Dalam ayat lain disebutkan bahwa umat manusia yang beriman itu bersaudara. Sehingga mereka harus menjalin hubungan yang baik, rukun antara sesama umat. Ayat tersebut yaitu:

إِنَّمَا ٱلْمُؤْمِنُونَ إِخْوَةٌ فَأَصْلِحُوا۟ بَيْنَ أَخَوَيْكُمْ ۚ وَٱتَّقُوا۟ ٱللَّهَ لَعَلَّكُمْ تُرْحَمُونَ ﴿١٠﴾

Artinya: "Orang-orang beriman itu sesungguhnya bersaudara. Sebab itu damaikanlah (perbaikilah hubungan) antara kedua saudaramu itu dan takutlah terhadap Allah, supaya kamu mendapat rahmat" (Q. S. Al-Hujurat: 10).

Sehingga dengan demikian, telah ditunjukkan adanya keterkaitan antara titik yang satu dengan titik yang lain. Yaitu antara manusia dengan manusia dan manusia dengan Tuhannya. Dalam matematika ketentuan tersebut dapat direpresentasikan dalam sebuah digraph, di mana setiap titik saling terhubung dan memiliki hubungan timbal balik. Sebagaimana yang ditunjukkan dalam gambar berikut:



Gambar 2.4. Hubungan antara Allah dengan HambaNya serta Sesama Hamba

Dari gambar di atas terlihat jelas bagaimana manusia yang memiliki keterikatan dengan Allah dan manusia dengan manusia, manusia memiliki kewajiban untuk beribadah kepada Allah dan Allah yang akan membalas setiap amal ibadah yang dilakukan oleh hamba-Nya. Allah SWT juga memerintahkan hambanya untuk menjaga hubungan baik dengan sesamanya, karena sesama manusia itu saling membutuhkan dan saling melengkapi.

Salah satu cabang ilmu matematika lainnya yang dibahas dalam bab ini adalah himpunan fuzzy, himpunan fuzzy disebut juga himpunan kabur atau samar. Kekaburan dan kesamaran ini ada karena banyaknya permasalahan yang tidak pasti, banyak keraguan dan ketidak pastian, seperti halnya permasalahan orang munafik dalam islam yang memiliki kedudukan yang tidak pasti dalam islam, kaum munafik mengaku islam tetapi hatinya tidak, mereka selalu dalam keragu-raguan sebagaimana yang diterangkan dalam surat An nisaa' ayat 143:

مُّذَبْذَبِينَ بَيْنَ ذَٰلِكَ لَآ إِلَىٰ هَٰٓؤُلَآءِ وَلَآ إِلَىٰ هَٰٓؤُلَآءِ ۚ وَمَن يُضْلِلِ ٱللَّهُ فَلَن تَجِدَ لَهُۥ سَبِيلًا ﴿١٤٣﴾

Artinya: Mereka dalam keadaan ragu-ragu antara yang demikian (iman atau kafir): tidak masuk kepada golongan ini (orang-orang beriman) dan tidak (pula) kepada golongan itu (orang-orang kafir), maka kamu sekali-kali tidak akan mendapat jalan (untuk memberi petunjuk) baginya.

Dalam matematika, golongan orang-orang munafik ini termasuk dalam anggota dari himpunan fuzzy dalam hal kepercayaan. Di mana terdapat orang mukmin dan orang kafir yang berada dalam tingkatan percaya dan tidak percaya, sedangkan orang munafik berada diantara keduanya, karena masih ada dalam keragu-raguan. Permasalahan lain yang juga termasuk dalam permasalahan fuzzy adalah permasalahan ayat-ayat yang *muhkamaat* dan ayat-ayat *mutasyaabihaat*, sebagaimana yang dijelaskan dalam Al-Qur'an surat Ali Imran ayat 7-8 Allah SWT berfirman:

هُوَ ٱلَّذِىٓ أَنزَلَ عَلَيْكَ ٱلْكِتَٰبَ مِنْهُ ءَايَٰتٌ مُّحْكَمَٰتٌ هُنَّ أُمُّ ٱلْكِتَٰبِ وَأُخَرُ مُتَشَٰبِهَٰتٌ ۖ فَأَمَّا ٱلَّذِينَ فِى قُلُوبِهِمْ زَيْغٌ فَيَتَّبِعُونَ مَا تَشَٰبَهَ مِنْهُ ٱبْتِغَآءَ ٱلْفِتْنَةِ

وَٱبۡتِغَآءَ تَأۡوِيلِهِۦۗ وَمَا يَعۡلَمُ تَأۡوِيلَهُۥٓ إِلَّا ٱللَّهُۗ وَٱلرَّٰسِخُونَ فِي ٱلۡعِلۡمِ يَقُولُونَ ءَامَنَّا بِهِۦ كُلّٞ مِّنۡ عِندِ رَبِّنَاۗ وَمَا يَذَّكَّرُ إِلَّآ أُوْلُواْ ٱلۡأَلۡبَٰبِ ۝٧ رَبَّنَا لَا تُزِغۡ قُلُوبَنَا بَعۡدَ إِذۡ هَدَيۡتَنَا وَهَبۡ لَنَا مِن لَّدُنكَ رَحۡمَةًۚ إِنَّكَ أَنتَ ٱلۡوَهَّابُ ۝٨

Artinya: "Dia-lah yang menurunkan Al Kitab (Al Qur'an) kepada kamu. Di antara (isi) nya ada ayat-ayat yang muhkamaat, itulah pokok-pokok isi Al Qur'an dan yang lain (ayat-ayat) mutasyaabihaat. Adapun orang-orang yang dalam hatinya condong kepada kesesatan, maka mereka mereka mengikuti sebahagian ayat-ayat yang mutasyaabihaat daripadanya untuk menimbulkan fitnah untuk mencari-cari ta'wilnya, padahal tidak ada yang mengetahui ta'wilnya melainkan Allah. Dan orang-orang yang mendalam ilmunya berkata:"Kami beriman kepada ayat-ayat yang mutasyaabihaat, semuanya itu dari sisi Tuhan kami." Dan tidak dapat mengambil pelajaran (daripadanya) melainkan orang-orang yang berakal. (mereka berdo'a): "Ya Tuhan kami, janganlah Engkau jadikan hati kami condong kepada kesesatan sesudah Engkau beri petunjuk kepada kami, dan karuniakanlah kepada kami rahmat dari sisi Engkau; karena sesungguhnya Engkau-lah Maha Pemberi (karunia)" " (QS. Ali Imron: 7-8)

Ayat di atas menerangkan bahwa dalam Al Qur'an terdapat ayat-ayat yang jelas dan tegas pengertiannya (*muhkamat*) dan ada juga ayat-ayat yang mengandung banyak arti dan tidak dapat ditentukan arti mana yang dimaksud kecuali sudah dikaji secara mendalam dan hanya Allah saja yang tahu maksudnya (*mutasyaabihaat*). Dalam ayat tersebut di atas disebutkan bahwa tidak ada yang mengetahui ta'wilnya kecuali Allah, penggunaan kata ta'wil bermakna mutlak. Dan penggunaannya dalam Al Qur'an memiliki dua makna: pertama: ta'wil yang berarti hakekat sesuatu dan apa yang dikembalikan permasalahan kepadanya. Seperti firman Allah yang artinya, "*Wahai Ayahku, inilah ta'wil (hakekat/kenyataan/kebenaran) mimpiku yang dahulu itu*" (QS. Yusuf: 100). Jika yang dimaksudkan ta'wil adalah pengertian ini, maka hakekat segala sesuatu itu tidak diketahui secara pasti kecuali Allah semata. Tetapi jika yang dimaksud ta'wil adalah makna yang lain, kedua: yaitu tafsir, keterangan, dan penjelasan mengenai sesuatu hal, seperti firman Allah yang Artinya, "*Berikanlah kepada kami ta'wilnya*." (QS. Yusuf: 36). Disebutkan ta'wilnya hanya diketahui oleh orang-orang yang memiliki ilmu yang mendalam, karena mereka mengetahui dan memahami apa yang difirmankan kepada mereka dengan ungkapan seperti itu, meskipun mereka secara tidak penuh mengetahui segala hal. Jika diintegrasikan dengan pencarian derajat keanggotaan, maka derajat keanggotaan hanya bisa didapatkan jika ada variable-variabel fuzzy yang nilainya selain 0 dan 1.

Sebagaimana dalam teori himpunan fuzzy yang menyebutkan adanya derajat keanggotaan yang terletak antara [0,1], dalam Al Qur'an menyebutkan adanya ayat-ayat muhkamat dan ayat-ayat mutasyaabihaat yang artinya perlu kajian yang mendalam, begitu derajat keanggotaan hanya dapat ditentukan dengan menghitung secara teliti dan mendalam.

BAB III

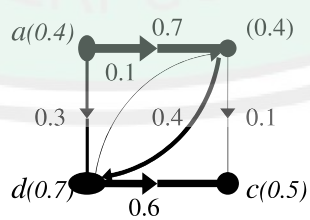
PEMBAHASAN

Pada bab ini penulis akan membahas tentang *fuzzy digraph*, di mana akan menjelaskan definisi dari *fuzzy digraph* dan memberikan beberapa contoh serta pembuktian beberapa teorema.

Fuzzy digraph merupakan pengembangan dari teori himpunan fuzzy dengan teori digraph yang didefinisikan sebagai berikut:

Misal X merupakan suatu himpunan terbatas, $\tilde{A} = (X, \mu_{\tilde{A}})$ adalah himpunan fuzzy di X, dan $\tilde{R} = \{X \times X, \mu_{\tilde{R}}\}$ adalah fuzzy relasi di X, maka pasangan terurut $(\tilde{A}, \tilde{R})$ disebut *fuzzy digraph*.

Misalkan diberikan sebuah contoh di mana X ={a, b, c, d}, $\tilde{A} = \{(a,0.4),(b,0.2),(c,0.5),(d,0.7)\}$ yang merupakan himpunan fuzzy, dan $\tilde{R} = \{((a,b),0.7),((b,c),0.1),((a,d),0.3),((d,c),0.6),((d,b),0.1),((b,d),0.4)\}$ yang merupakan relasi fuzzy di X. Sehingga dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.1. Contoh Fuzzy Digraph

Sebenarnya dalam penggambaran suatu *fuzzy digraph* memerlukan perbedaan tebal tipisnya garis untuk membedakan derajat keanggotaannya. Akan tetapi untuk memudahkan penggambaran dan juga untuk lebih dapat membedakan perbedaan derajat keanggotaan tersebut, maka akan digunakan warna yang berbeda untuk setiap derajat keanggotaan yang berbeda, yaitu:

: Untuk garis dan titik yang memiliki derajat keanggotaan 1

: Untuk garis dan titik yang memiliki derajat keanggotaan 0.9

: Untuk garis dan titik yang memiliki derajat keanggotaan 0.8

: Untuk garis dan titik yang memiliki derajat keanggotaan 0.7

: Untuk garis dan titik yang memiliki derajat keanggotaan 0.6

: Untuk garis dan titik yang memiliki derajat keanggotaan 0.5

: Untuk garis dan titik yang memiliki derajat keanggotaan 0.4

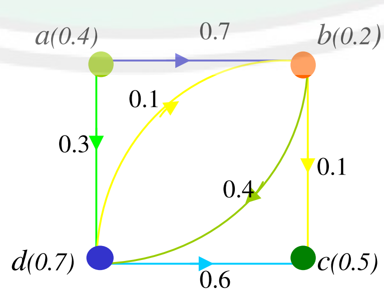
: Untuk garis dan titik yang memiliki derajat keanggotaan 0.3

: Untuk garis dan titik yang memiliki derajat keanggotaan 0.2

: Untuk garis dan titik yang memiliki derajat keanggotaan 0.1

: Untuk garis dan titik yang memiliki derajat keanggotaan 0

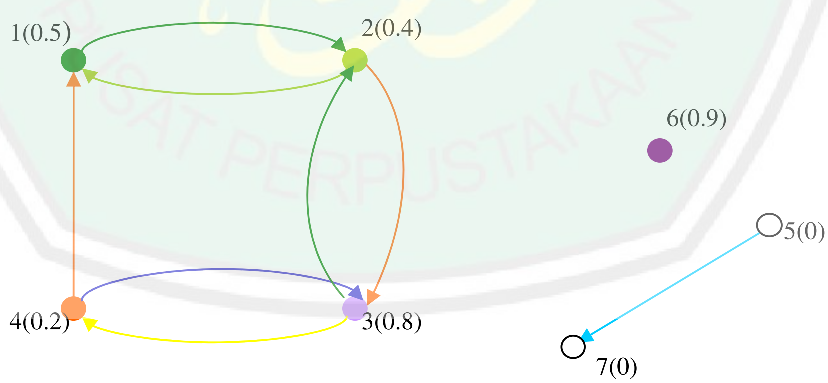
Maka gambar 3.1 dari contoh di atas akan menjadi:



Gambar 3.2. Penggambaran Fuzzy Digraph dengan Menggunakan Warna

Gambar tersebut merupakan contoh dari *fuzzy digraph*, di mana setiap titik dan sisinya memiliki derajat keanggotaan yang terletak antara [0,1]. Dimisalkan $\tilde{D} = (\tilde{A}, \tilde{R})$ adalah *fuzzy digraph* di *X*. Jika $\mu_{\tilde{A}}(x) > 0$, untuk $x \in X$, maka *x* disebut *node* (*titik*) di $\tilde{D}$. Jika $\mu_A(x) = 0$, untuk $x \in X$, maka *x* disebut *node (titik) kosong* di $\tilde{D}$. Jika $\mu_R(x, y) > 0$, maka pasangan terurut (*x,y*) disebut *sisi (arc)* di $\tilde{D}$. Jika $\mu_R(x, y) = 0$, maka pasangan terurut (*x,y*) disebut sisi kosong di $\tilde{D}$. Untuk seterusnya penulis akan menggambarkan *fuzzy digraph* dengan menggunakan perbedaan warna.

Sebagai contoh, misalkan *X* = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, misal $\tilde{A} = \{(1,0.5),(2,0.4),(3,0.8),(4,0.2),(5,0),(6,0.9),(7,0)\}$ adalah himpunan fuzzy dari *X*, dan $\tilde{R} = \{((1,2),0.5),\ ((2,1),0.4),\ ((1,3),0.6),\ ((4,1),0.2),\ ((2,3),0.2),\ ((3,2),0.5),\ ((3,4),0.1),\ ((4,3),0.7),\ ((5,7),0.6)\}$ dan pasangan (*x,y*) lainnya sama dengan nol atau ((*x,y*), 0). Maka $(\tilde{A}, \tilde{R})$ adalah *fuzzy digraph* di *X*.



Gambar 3.3. Fuzzy Digraph dengan titik kosong dan sisi kosong

Pada gambar *fuzzy digraph* di atas, terdapat titik kosong yaitu titik 5 dan 7 akan tetapi ada sisi yang menghubungkan kedua titik kosong tersebut. Sedangkan beberapa pasangan titik lainnya dimana ((*x*,*y*), 0) memiliki derajat keanggotaan 0, sehingga tidak ada sisi yang menghubungkan titik-titiknya.

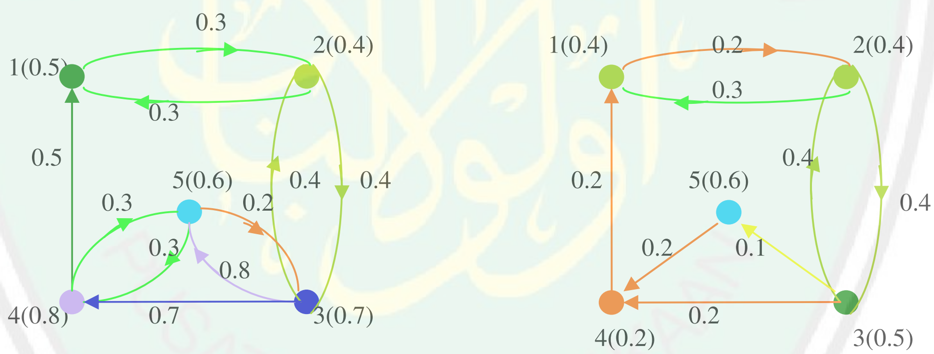
Setelah mendefinisikan *fuzzy digraph*, maka akan didefinisikan tentang *fuzzy subdigraph*. Misal $(\tilde{A}_1, \tilde{R}_1)$ dan $(\tilde{A}_2, \tilde{R}_2)$ adalah dua *fuzzy digraph* di *X*. Maka $(\tilde{A}_2, \tilde{R}_2)$ disebut ***fuzzy subdigraph*** dari $(\tilde{A}_1, \tilde{R}_1)$ jika,

$$\mu_{\tilde{A}_2}(x) \leq \mu_{\tilde{A}_1}(x), \qquad \text{untuk } \forall x \in X$$

$$\mu_{\tilde{R}_2}(x, y) \leq \mu_{\tilde{R}_1}(x, y), \qquad \text{untuk } \forall x \in X$$

Sehingga dapat ditulis bahwa $(\tilde{A}_2, \tilde{R}_2) \leq (\tilde{A}_1, \tilde{R}_1)$.

Sebagai contoh maka dimisalkan X = {1, 2, 3, 4, 5} dan misalkan dua *fuzzy digraph* digambarkan pada gambar berikut:



Gambar 3.4. Contoh Fuzzy Subdigraph

Pada gambar kedua fuzzy digraph di atas, sebagian besar derajat keanggotaan titik dan sisi $(\tilde{A}_2, \tilde{R}_2) \leq (\tilde{A}_1, \tilde{R}_1)$, misalnya saja titik 1, pada $\tilde{A}_1$ derajat keanggotaan titiknya 0.5, sedangkan pada $\tilde{A}_2$ derajat keanggotaan titiknya 0.4, sehingga $\mu_{\tilde{A}_2}(1) \leq \mu_{\tilde{A}_1}(1)$, dan juga seperti derajat keanggotaan pada sisi (1,2), pada $\tilde{R}_1$ di mana $\mu_{\tilde{R}_1}(1,2) = 0.3$, sedangkan pada $\tilde{R}_2$ yang memiliki

$\mu_{\tilde{R}_2}(1,2) = 0.2$, sehingga $\mu_{\tilde{R}_2}(1,2) \le \mu_{\tilde{R}_1}(1,2)$. Dan karena semua derajat keanggotaan titik dan sisi pada *fuzzy digraph* $(\tilde{A}_2, \tilde{R}_2) \le (\tilde{A}_1, \tilde{R}_1)$, maka dapat dikatakan bahwa $(\tilde{A}_2, \tilde{R}_2)$ adalah *fuzzy subdigraph* dari $(\tilde{A}_1, \tilde{R}_1)$.

Dalam *fuzzy digraph*, terdapat beberapa sifat operasi yang memenuhi, yaitu misalkan terdapat dua *fuzzy digraph* $\tilde{P} = (\tilde{A}_1, \tilde{R}_1)$ dan $\tilde{Q} = (\tilde{A}_2, \tilde{R}_2)$ maka berlaku :

1. *Disjungsi* di $\tilde{P}$ dan $\tilde{Q}$, dinotasikan dengan $\tilde{P} \vee \tilde{Q}$, yang berarti:

$$\tilde{P} \vee \tilde{Q} = (\tilde{A}_1 \vee \tilde{A}_2, \tilde{R}_1 \vee \tilde{R}_2)$$

2. *Konjungsi* di $\tilde{P}$ dan $\tilde{Q}$, dinotasikan dengan $\tilde{P} \wedge \tilde{Q}$, yang berarti:

$$\tilde{P} \wedge \tilde{Q} = (\tilde{A}_1 \wedge \tilde{A}_2, \tilde{R}_1 \wedge \tilde{R}_2)$$

3. *Komplemen* di $\tilde{P}$, dinotasikan dengan $(\tilde{P})^C$, yang berarti:

$$(\tilde{P})^C = ((\tilde{A})^C, (\tilde{R})^C)$$

4. *Jumlah aljabar* dari $\tilde{P}$ dan $\tilde{Q}$, dinotasikan dengan $\tilde{P} \oplus \tilde{Q}$, yang berarti:

$$\tilde{P} \oplus \tilde{Q} = (\tilde{A}_1 \oplus \tilde{A}_2, \tilde{R}_1 \oplus \tilde{R}_2)$$

5. *Product aljabar* dari $\tilde{P}$ dan $\tilde{Q}$, dinotasikan dengan $\tilde{P} \cdot \tilde{Q}$, yang berarti:

$$\tilde{P} \cdot \tilde{Q} = (\tilde{A}_1 \cdot \tilde{A}_2, \tilde{R}_1 \cdot \tilde{R}_2)$$

Dari beberapa sifat tersebut, terdapat beberapa teorema yang mengikuti, diantaranya:

Teorema 3.1.

Misal $\tilde{P}$, $\tilde{Q}$ adalah dua *fuzzy digraph* di *X*, maka kita peroleh

(1) $\tilde{P} \le \tilde{P} \vee \tilde{Q}$ (2) $\tilde{Q} \le \tilde{P} \vee \tilde{Q}$ (3) $\tilde{P} \wedge \tilde{Q} \le \tilde{P}$

(4) $\tilde{P} \wedge \tilde{Q} \le \tilde{Q}$ (5) $\tilde{P} \oplus \tilde{Q} \ge \tilde{P} \vee \tilde{Q} \ge \tilde{P} \wedge \tilde{Q}$

(6) $\left(\tilde{P} \vee \tilde{Q}\right)^C = \left(\tilde{P}\right)^C \wedge \left(\tilde{Q}\right)^C$ (7) $\left(\tilde{P} \vee \tilde{Q}\right)^C = \left(\tilde{P}\right)^C \wedge \left(\tilde{Q}\right)^C$

(8) $\left(\tilde{P} \cdot \tilde{Q}\right)^C \ge \left(\tilde{P}\right)^C \cdot \left(\tilde{Q}\right)^C$ (9) $\left(\tilde{P} \oplus \tilde{Q}\right)^C \le \left(\tilde{P}\right)^C \oplus \left(\tilde{Q}\right)^C$

(10) $\left(\tilde{P} \oplus \tilde{Q}\right)^C = \left(\tilde{P}\right)^C \cdot \left(\tilde{Q}\right)^C$ (11) $\left(\tilde{P} \cdot \tilde{Q}\right)^C = \left(\tilde{P}\right)^C \oplus \left(\tilde{Q}\right)^C$

(12) $\tilde{P} \wedge \left(\tilde{P} \vee \tilde{Q}\right) = \tilde{P}$ (13) $\tilde{P} \vee \left(\tilde{P} \wedge \tilde{Q}\right) = \tilde{P}$

Bukti:

(1) $\tilde{P} \le \tilde{P} \vee \tilde{Q}$

Ambil $\tilde{P} = \left(\tilde{A}_1, \tilde{R}_1\right)$ dan $\tilde{Q} = \left(\tilde{A}_2, \tilde{R}_2\right)$

$\tilde{P} \vee \tilde{Q} = \left(\tilde{A}_1, \tilde{R}_1\right) \vee \left(\tilde{A}_2, \tilde{R}_2\right)$

$= \left(\tilde{A}_1 \vee \tilde{A}_2, \tilde{R}_1 \vee \tilde{R}_2\right)$

Berdasarkan sifat himpunan fuzzy $a \vee b = \max(a,b)$, maka ambil sebarang $x \in \tilde{A}_1 \vee \tilde{A}_2$ sehingga $x \in \tilde{A}_1$ atau $x \in \tilde{A}_2$, di mana x merupakan derajat keanggotaan titik maksimal pada $\{\tilde{A}_1, \tilde{A}_2\}$, $x = \tilde{A}_1$ jika $\tilde{A}_1 \ge \tilde{A}_2$ dan $x = \tilde{A}_2$ jika $\tilde{A}_1 < \tilde{A}_2$. Dan ambil sebarang $y \in \tilde{R}_1 \vee \tilde{R}_2$ sehingga $y \in \tilde{R}_1$ atau $y \in \tilde{R}_2$, di mana y merupakan derajat keanggotaan sisi berarah maksimal pada $\{\tilde{R}_1, \tilde{R}_2\}$, $y = \tilde{R}_1$ jika $\tilde{R}_1 \ge \tilde{R}_2$ dan $y = \tilde{R}_2$ jika $\tilde{R}_1 < \tilde{R}_2$. Karena x dan y merupakan derajat keanggotaan maksimal dari fuzzy digraph $\tilde{P}$ dan $\tilde{Q}$, maka $\{x, y\}$ memiliki dua kemungkinan yaitu,

i) Jika $x = \tilde{A}_1$ dan $y = \tilde{R}_1$, maka $\{x, y\} = (\tilde{A}_1, \tilde{R}_1) = \tilde{P}$. Sehingga pernyataan $\tilde{P} \leq \tilde{P} \vee \tilde{Q}$ benar.

ii) Jika $x = \tilde{A}_2$ dan $y = \tilde{R}_2$, maka $\{x, y\} = (\tilde{A}_2, \tilde{R}_2) = \tilde{Q} \geq \tilde{P}$. Sehingga pernyataan $\tilde{P} \leq \tilde{P} \vee \tilde{Q}$ benar.

Jadi, terbukti bahwa $\tilde{P} \leq \tilde{P} \vee \tilde{Q}$ benar.

(2) $\tilde{Q} \leq \tilde{P} \vee \tilde{Q}$,

Ambil $\tilde{P} = (\tilde{A}_1, \tilde{R}_1)$ dan $\tilde{Q} = (\tilde{A}_2, \tilde{R}_2)$

$\tilde{P} \vee \tilde{Q} = (\tilde{A}_1, \tilde{R}_1) \vee (\tilde{A}_2, \tilde{R}_2)$

$= (\tilde{A}_1 \vee \tilde{A}_2, \tilde{R}_1 \vee \tilde{R}_2)$

Berdasarkan sifat himpunan fuzzy $a \vee b = \max(a, b)$, maka ambil sebarang $x \in \tilde{A}_1 \vee \tilde{A}_2$ sehingga $x \in \tilde{A}_1$ atau $x \in \tilde{A}_2$, di mana x merupakan derajat keanggotaan titik maksimal pada $\{\tilde{A}_1, \tilde{A}_2\}$, $x = \tilde{A}_1$ jika $\tilde{A}_1 \geq \tilde{A}_2$ dan $x = \tilde{A}_2$ jika $\tilde{A}_1 < \tilde{A}_2$. Dan ambil sebarang $y \in \tilde{R}_1 \vee \tilde{R}_2$ sehingga $y \in \tilde{R}_1$ atau $y \in \tilde{R}_2$, di mana y merupakan derajat keanggotaan sisi berarah maksimal pada $\{\tilde{R}_1, \tilde{R}_2\}$, $y = \tilde{R}_1$ jika $\tilde{R}_1 \geq \tilde{R}_2$ dan $y = \tilde{R}_2$ jika $\tilde{R}_1 < \tilde{R}_2$. Karena x dan y merupakan derajat keanggotaan maksimal dari fuzzy digraph $\tilde{P}$ dan $\tilde{Q}$, maka $\{x, y\}$ memiliki dua kemungkinan yaitu,

i) Jika $x = \tilde{A}_1$ dan $y = \tilde{R}_1$, maka $\{x, y\} = (\tilde{A}_1, \tilde{R}_1) = \tilde{P} \geq \tilde{Q}$. Sehingga pernyataan $\tilde{Q} \leq \tilde{P} \vee \tilde{Q}$ benar.

ii) Jika $x = \tilde{A}_2$ dan $y = \tilde{R}_2$, maka $\{x, y\} = (\tilde{A}_2, \tilde{R}_2) = \tilde{Q}$. Sehingga pernyataan $\tilde{Q} \le \tilde{P} \vee \tilde{Q}$ benar.

Karena kedua kemungkinan yang terjadi memenuhi pertidaksamaan tersebut. Jadi, terbukti bahwa $\tilde{Q} \le \tilde{P} \vee \tilde{Q}$ benar.

Contoh untuk Teorema 1 dan 2:

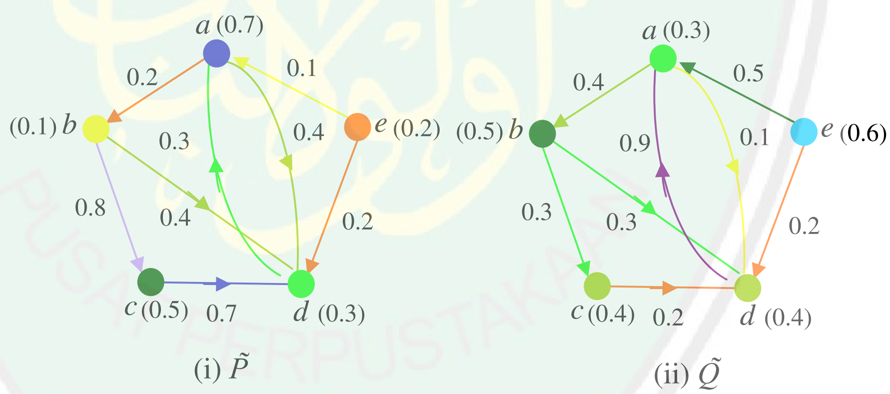
Diketahui $\tilde{P} = (\tilde{A}_1, \tilde{R}_1)$ dan $\tilde{Q} = (\tilde{A}_2, \tilde{R}_2)$.

$$\tilde{A}_1 = \{(a,0.7), (b,0.1), (c,0.5), (d,0.4), (e,0.2)\}$$

$$\tilde{R}_1 = \begin{Bmatrix} ((a,b),0.2), ((a,d),0.4), ((b,c),0.8), ((b,d),0.4), ((c,d),0.7), ((d,a),0.3), \\ ((e,d),0.2), ((e,a),0.1) \end{Bmatrix}$$

$$\tilde{A}_2 = \{(a,0.3), (b,0.5), (c,0.4), (d,0.4), (e,0.6)\}$$

$$\tilde{R}_2 = \begin{Bmatrix} ((a,b),0.4), ((a,d),0.1), ((b,c),0.3), ((b,d),0.3), ((c,d),0.2), ((d,a),0.9), \\ ((e,d),0.2), ((e,a),0.5) \end{Bmatrix}$$



Gambar 3.5. Fuzzy Digraph $\tilde{P}$ dan $\tilde{Q}$

Pada gambar 3.5 di atas digambarkan suatu himpunan $X = \{a, b, c, d, e\}$ dan terdapat dua buah fuzzy digraph $\tilde{P}$ dan $\tilde{Q}$. Di mana $\tilde{P}$ dan $\tilde{Q}$ memiliki himpunan fuzzy dan relasi fuzzy.

untuk $\tilde{P} \vee \tilde{Q} = \{(\tilde{A}_1, \tilde{R}_1) \vee (\tilde{A}_2, \tilde{R}_2)\} = \{(\tilde{A}_1 \vee \tilde{A}_2), (\tilde{R}_1 \vee \tilde{R}_2)\}$ diambil nilai-nilai maksimal untuk setiap derajat keanggotaan titik dan sisi pada fuzzy digraph $\tilde{P}$ dan $\tilde{Q}$. Misalnya

$$\max(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2) = \max(\mu_{\tilde{A}_1}(a), \mu_{\tilde{A}_2}(a)) = \{\max(0.7, 0.3)\} = 0.7$$

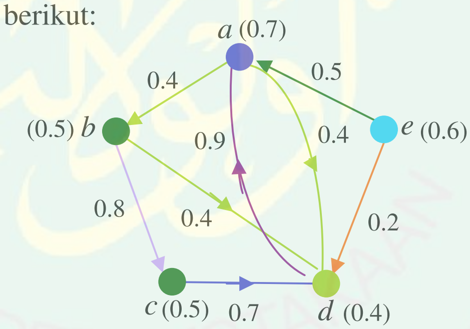
$$\max(\tilde{R}_1, \tilde{R}_2) = \max(\mu_{\tilde{R}_1}(a,b), \mu_{\tilde{E}_2}(a,b)) = \{0.2, 0.4\} = 0.4$$

Kita lakukan cara yang sama untuk semua $x, y \in X$. Sehingga didapat

$$\tilde{P} \vee \tilde{Q} = \{(\tilde{A}_1 \vee \tilde{A}_2), (\tilde{R}_1 \vee \tilde{R}_2)\} =$$

$$\left\{[(a,0.7),(b,0.5),(c,0.5),(d,0.4),(e,0.6)], \begin{bmatrix} ((a,b),0.4),((a,d),0.4),((b,c),0.8),((b,d),0.4), \\ ((c,d),0.7),((d,a),0.9),((e,d),0.2),((e,a),0.5) \end{bmatrix}\right\}$$

Sebagaimana di atas, maka teorema tersebut digambarkan dengan fuzzy digraph berikut:



Gambar 3.6. $\tilde{P} \vee \tilde{Q}$

(3) $\tilde{P} \wedge \tilde{Q} \le \tilde{P}$

Ambil $\tilde{P} = (\tilde{A}_1, \tilde{R}_1)$ dan $\tilde{Q} = (\tilde{A}_2, \tilde{R}_2)$

$\tilde{P} \wedge \tilde{Q} = (\tilde{A}_1, \tilde{R}_1) \wedge (\tilde{A}_2, \tilde{R}_2) = (\tilde{A}_1 \wedge \tilde{A}_2, \tilde{R}_1 \wedge \tilde{R}_2)$

Berdasarkan sifat himpunan fuzzy $a \wedge b = \min(a,b)$, maka ambil sebarang $x \in \tilde{A}_1 \wedge \tilde{A}_2$ sehingga $x \in \tilde{A}_1$ dan $x \in \tilde{A}_2$, di mana x

merupakan derajat keanggotaan titik minimum dari { $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2$ }, $x = \tilde{A}_1$ jika $\tilde{A}_1 \leq \tilde{A}_2$ dan $x = \tilde{A}_2$ jika $\tilde{A}_1 > \tilde{A}_2$. Dan ambil sebarang $y \in \tilde{R}_1 \vee \tilde{R}_2$ sehingga $y \in \tilde{R}_1$ dan $y \in \tilde{R}_2$, di mana y merupakan derajat keanggotaan sisi minimum dari { $\tilde{R}_1, \tilde{R}_2$ }, $y = \tilde{R}_1$ jika $\tilde{R}_1 \leq \tilde{R}_2$ dan $y = \tilde{R}_2$ jika $\tilde{R}_1 > \tilde{R}_2$. Karena x dan y merupakan derajat keanggotaan minimum dari fuzzy digraph $\tilde{P}$ dan $\tilde{Q}$, yang memiliki dua kemungkinan hasil yang terjadi.

i) Jika $x = \tilde{A}_1$ dan $y = \tilde{R}_1$, maka $\{x, y\} = (\tilde{A}_1, \tilde{R}_1) = \tilde{P} < \tilde{Q}$. Sehingga pernyataan $\tilde{P} \wedge \tilde{Q} \leq \tilde{P}$ benar.

ii) Jika $x = \tilde{A}_2$ dan $y = \tilde{R}_2$, maka $\{x, y\} = (\tilde{A}_2, \tilde{R}_2) = \tilde{Q}$. Sehingga pernyataan $\tilde{P} \vee \tilde{Q} \leq \tilde{P}$ juga benar.

Karena kedua kemungkinan yang terjadi memenuhi pernyataan $\tilde{P} \vee \tilde{Q} \leq \tilde{P}$. Jadi pernyataan tersebut benar.

(4) $\tilde{P} \wedge \tilde{Q} \leq \tilde{Q}$

Ambil $\tilde{P} = (\tilde{A}_1, \tilde{R}_1)$ dan $\tilde{Q} = (\tilde{A}_2, \tilde{R}_2)$

$\tilde{P} \wedge \tilde{Q} = (\tilde{A}_1, \tilde{R}_1) \wedge (\tilde{A}_2, \tilde{R}_2)$

$= (\tilde{A}_1 \wedge \tilde{A}_2, \tilde{R}_1 \wedge \tilde{R}_2)$

Berdasarkan sifat himpunan fuzzy $a \wedge b = \min(a,b)$, maka ambil sebarang $x \in \tilde{A}_1 \wedge \tilde{A}_2$ sehingga $x \in \tilde{A}_1$ dan $x \in \tilde{A}_2$, di mana x merupakan derajat keanggotaan titik minimum dari { $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2$ }, $x = \tilde{A}_1$

jika $\tilde{A}_1 \leq \tilde{A}_2$ dan $x = \tilde{A}_2$ jika $\tilde{A}_1 > \tilde{A}_2$. Dan ambil sebarang $y \in \tilde{R}_1 \vee \tilde{R}_2$ sehingga $y \in \tilde{R}_1$ dan $y \in \tilde{R}_2$, di mana y merupakan derajat keanggotaan sisi minimum dari $\{\tilde{R}_1, \tilde{R}_2\}$, $y = \tilde{R}_1$ jika $\tilde{R}_1 \leq \tilde{R}_2$ dan $y = \tilde{R}_2$ jika $\tilde{R}_1 > \tilde{R}_2$. Karena x dan y merupakan derajat keanggotaan minimum dari fuzzy digraph $\tilde{P}$ dan $\tilde{Q}$, yang memiliki dua kemungkinan hasil yang terjadi.

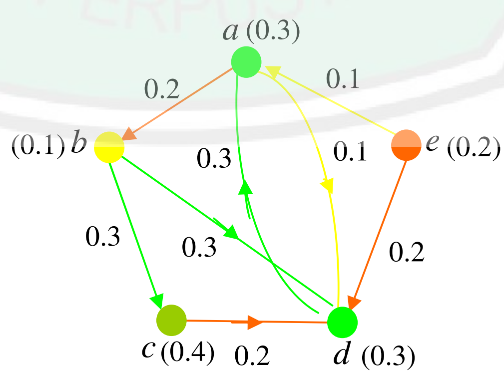
i) Jika $x = \tilde{A}_1$ dan $y = \tilde{R}_1$, maka $\{x, y\} = (\tilde{A}_1, \tilde{R}_1) = \tilde{P} < \tilde{Q}$. Sehingga pernyataan $\tilde{P} \wedge \tilde{Q} \leq \tilde{Q}$ benar.

ii) Jika $x = \tilde{A}_2$ dan $y = \tilde{R}_2$, maka $\{x, y\} = (\tilde{A}_2, \tilde{R}_2) = \tilde{Q}$. Sehingga pernyataan $\tilde{P} \wedge \tilde{Q} \leq \tilde{Q}$ juga benar.

Karena kedua kemungkinan yang terjadi memenuhi pernyataan $\tilde{P} \wedge \tilde{Q} \leq \tilde{P}$. Jadi pernyataan tersebut benar.

Contoh untuk Teorema 3 dan 4:

Kita ambil contoh pada teorema 1 dan 2, maka dapat kita gambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.7. $\tilde{P} \wedge \tilde{Q}$

Berdasarkan contoh pada teorema 1 dan 2, gambar 3.6 menggambarkan *fuzzy digraph* yang derajat keanggotaannya merupakan derajat keanggotaan minimum untuk semua titik dan sisi pada fuzzy digraph $\tilde{P}$ dan $\tilde{Q}$.

$$\tilde{P} \wedge \tilde{Q} = \{(\tilde{A}_1, \tilde{R}_1) \wedge (\tilde{A}_2, \tilde{R}_2)\} = \{(\tilde{A}_1 \wedge \tilde{A}_2), (\tilde{R}_1 \wedge \tilde{R}_2)\}$$

$$= \{\min(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2), \min(\tilde{R}_1, \tilde{R}_2)\}$$

(5) $\tilde{P} \oplus \tilde{Q} \geq \tilde{P} \vee \tilde{Q} \geq \tilde{P} \wedge \tilde{Q}$

$$\tilde{P} \oplus \tilde{Q} = (\tilde{A}_1 \oplus \tilde{A}_2, \tilde{R}_1 \oplus \tilde{R}_2), \tilde{P} \vee \tilde{Q} = (\tilde{A}_1 \vee \tilde{A}_2, \tilde{R}_1 \vee \tilde{R}_2),$$

$$\tilde{P} \wedge \tilde{Q} = (\tilde{A}_1 \wedge \tilde{A}_2, \tilde{R}_1 \wedge \tilde{R}_2)$$

Berdasarkan sifat himpunan fuzzy, maka

$$\tilde{A}_1 \oplus \tilde{A}_2 = \mu_{\tilde{A}_1}(x) + \mu_{\tilde{A}_2}(x) - \mu_{\tilde{A}_1}(x) \cdot \mu_{\tilde{A}_2}(x) \text{ dan}$$

$$\tilde{R}_1 \oplus \tilde{R}_2 = \mu_{\tilde{R}_1}(x) + \mu_{\tilde{R}_2}(x) - \mu_{\tilde{R}_1}(x) \cdot \mu_{\tilde{R}_2}(x)$$

$$\tilde{A}_1 \vee \tilde{A}_2 = \max(\mu_{\tilde{A}_1}(x), \mu_{\tilde{A}_2}(x)) \text{ dan } \tilde{R}_1 \vee \tilde{R}_2 = \max(\mu_{\tilde{R}_1}(x), \mu_{\tilde{R}_2}(x))$$

$$\tilde{A}_1 \wedge \tilde{A}_2 = \min(\mu_{\tilde{A}_1}(x), \mu_{\tilde{A}_2}(x)) \text{ dan } \tilde{R}_1 \wedge \tilde{R}_2 = \min(\mu_{\tilde{R}_1}(x), \mu_{\tilde{R}_2}(x))$$

Untuk membuktikan pertidaksamaan tersebut, terlebih dahulu harus dibuktikan:

(i) $\tilde{P} \vee \tilde{Q} \geq \tilde{P} \wedge \tilde{Q}$

(ii) $\tilde{P} \oplus \tilde{Q} \geq \tilde{P} \vee \tilde{Q}$

Bukti:

(i) $\tilde{P} \wedge \tilde{Q} = \{(\tilde{A}_1, \tilde{R}_1) \wedge (\tilde{A}_2, \tilde{R}_2)\}$

$$= \{(\tilde{A}_1 \wedge \tilde{A}_2), (\tilde{R}_1 \wedge \tilde{R}_2)\}$$

$$= \{\min(\tilde{A}_1, .\tilde{A}_2), \min(\tilde{R}_1, \tilde{R}_2)\} \leq \{\max(\tilde{A}_1, .\tilde{A}_2), \max(\tilde{R}_1, \tilde{R}_2)\}$$

$$= \{(\tilde{A}_1 \vee \tilde{A}_2), (\tilde{R}_1 \vee \tilde{R}_2)\} = \{(\tilde{A}_1, \tilde{R}_1) \vee (\tilde{A}_2, \tilde{R}_2)\} = \tilde{P} \vee \tilde{Q}$$

Jadi benar bahwa $\tilde{P} \vee \tilde{Q} \geq \tilde{P} \wedge \tilde{Q}$

(ii) $\tilde{P} \vee \tilde{Q} = \{(\tilde{A}_1 \vee \tilde{A}_2), (\tilde{R}_1 \vee \tilde{R}_2)\} = \{\max(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2), \max(\tilde{R}_1, \tilde{R}_2)\}$

$$\tilde{P} \oplus \tilde{Q} = \{(\tilde{A}_1 \oplus \tilde{A}_2), (\tilde{R}_1 \oplus \tilde{R}_2)\} = \{(\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 - \tilde{A}_1 \cdot \tilde{A}_2), (\tilde{R}_1 + \tilde{R}_2 - \tilde{R}_1 \cdot \tilde{R}_2)\}$$

$\max(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2) = \tilde{A}_1$ jika $\tilde{A}_1 \geq \tilde{A}_2$, dan $\max(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2) = \tilde{A}_2$ jika $\tilde{A}_1 < \tilde{A}_2$

$\max(\tilde{R}_1, \tilde{R}_2) = \tilde{R}_1$ jika $\tilde{R}_1 \geq \tilde{R}_2$, dan $\max(\tilde{R}_1, \tilde{R}_2) = \tilde{R}_2$ jika $\tilde{R}_1 < \tilde{R}_2$

Karena hasil yang akan didapat untuk $\tilde{P} \vee \tilde{Q}$ merupakan derajat keanggotaan maksimum yang ada pada setiap titik dan sisi fuzzy digraph $\tilde{P}$ dan $\tilde{Q}$, sehingga yang dihasilkan adalah sebuah fuzzy digraph $\tilde{P} \vee \tilde{Q} \geq$ fuzzy digraph $\tilde{P}$ atau fuzzy digraph $\tilde{Q}$. Maka untuk

$\tilde{P}$ atau $\tilde{Q} \leq \tilde{P} \vee \tilde{Q} = \{(\tilde{A}_1 \vee \tilde{A}_2), (\tilde{R}_1 \vee \tilde{R}_2)\} = \{\max(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2), \max(\tilde{R}_1, \tilde{R}_2)\}$

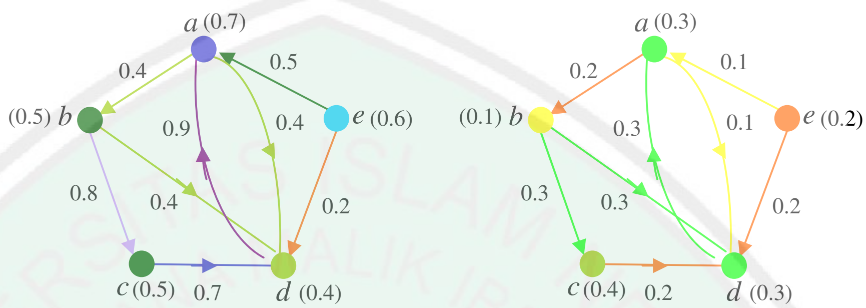
=($\tilde{A}_1$ atau $\tilde{A}_2$, $\tilde{R}_1$ atau $\tilde{R}_2$) $\leq \{(\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 - \tilde{A}_1 \cdot \tilde{A}_2), (\tilde{R}_1 + \tilde{R}_2 - \tilde{R}_1 \cdot \tilde{R}_2)\}$

$= \{(\tilde{A}_1 \oplus \tilde{A}_2), (\tilde{R}_1 \oplus \tilde{R}_2)\} = \tilde{P} \oplus \tilde{Q}$

Jadi benar bahwa $\tilde{P} \oplus \tilde{Q} \geq \tilde{P} \vee \tilde{Q}$.

Karena kedua pembuktian di atas benar, maka $\tilde{P} \oplus \tilde{Q} \geq \tilde{P} \vee \tilde{Q} \geq \tilde{P} \wedge \tilde{Q}$ benar. Akan diberikan contoh untuk lebih memperjelas teorema tersebut.

Sama halnya dengan teorema-teorema sebelumnya, untuk mempermudah akan diambil contoh yang sama. Dari contoh pada teorema (1) sampai dengan (4), telah diketahui:



(i) $\tilde{P} \vee \tilde{Q}$ (ii) $\tilde{P} \wedge \tilde{Q}$

Gambar 3.8. $\tilde{P} \vee \tilde{Q}$ *dan* $\tilde{P} \wedge \tilde{Q}$

Dari gambar di atas didapat bahwa untuk setiap derajat keanggotaan pada setiap titik $\tilde{P} \vee \tilde{Q} \geq \tilde{P} \wedge \tilde{Q}$, seperti yang di jelaskan dalam tabel berikut:

Tabel.3.1. Perbandingan $\tilde{P} \vee \tilde{Q}$ dan $\tilde{P} \wedge \tilde{Q}$

Var. Titik	$\tilde{P} \vee \tilde{Q}$	$\tilde{P} \wedge \tilde{Q}$	Var. sisi	$\tilde{P} \vee \tilde{Q}$	$\tilde{P} \wedge \tilde{Q}$
a	0.7	0.3	(a,b)	0.4	0.2
b	0.5	0.1	(b,c)	0.8	0.1
c	0.5	0.4	(a,d)	0.4	0.1
d	0.9	0.3	(b,d)	0.4	0.3
e	0.6	0.2	(c,d)	0.7	0.2
			(d,a)	0.9	0.3
			(e,d)	0.2	0.2
			(e,a)	0.5	0.1

Dari tabel di atas jelas bahwa $\tilde{P} \vee \tilde{Q} \geq \tilde{P} \wedge \tilde{Q}$. Karena semua derajat keanggotaan titik dan sisi pada *fuzzy digraph* $\tilde{P} \vee \tilde{Q}$ lebih besar dari derajat keanggotaan titik dan sisi pada *fuzzy digraph* $\tilde{P} \wedge \tilde{Q}$.

Selanjutnya untuk *fuzzy digraph* $\tilde{P} \oplus \tilde{Q}$, terlebih dahulu dicari derajat keanggotaan untuk setiap titik dan sisi pada *fuzzy digraph* $\tilde{P} \oplus \tilde{Q}$. Yaitu,

$$\tilde{P} \oplus \tilde{Q} = \left\{\left(\tilde{A}_1 \oplus \tilde{A}_2\right), \left(\tilde{R}_1 \oplus \tilde{R}_2\right)\right\} = \left\{\left(\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 - \tilde{A}_1 \cdot \tilde{A}_2\right), \left(\tilde{R}_1 + \tilde{R}_2 - \tilde{R}_1 \cdot \tilde{R}_2\right)\right\}$$

Maka,

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_{\tilde{P}\oplus\tilde{Q}} :\ & a = 0.7 + 0.3 - 0.7 \cdot 0.3 = 0.79 \\
& b = 0.1 + 0.5 - 0.1 \cdot 0.5 = 0.55 \\
& c = 0.5 + 0.4 - 0.5 \cdot 0.4 = 0.7 \\
& d = 0.3 + 0.4 - 0.3 \cdot 0.4 = 0.58 \\
& e = 0.2 + 0.6 - 0.2 \cdot 0.6 = 0.68
\end{aligned}$$

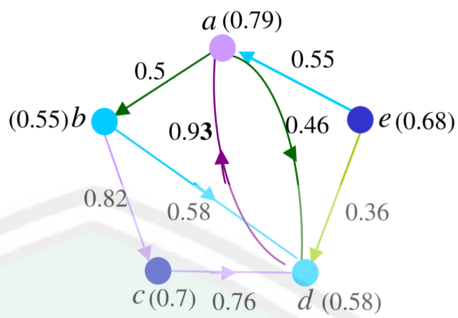
$$\begin{aligned}
\tilde{R}_{\tilde{P}\oplus\tilde{Q}} :\ & (a,b) = 0.2 + 0.4 - 0.2 \cdot 0.4 = 0.5 \\
& (b,c) = 0.8 + 0.1 - 0.8 \cdot 0.1 = 0.82 \\
& (a,d) = 0.4 + 0.1 - 0.4 \cdot 0.1 = 0.46 \\
& (b,d) = 0.4 + 0.3 - 0.4 \cdot 0.3 = 0.58 \\
& (c,d) = 0.7 + 0.2 - 0.7 \cdot 0.2 = 0.76 \\
& (d,a) = 0.3 + 0.9 - 0.3 \cdot 0.9 = 0.93 \\
& (e,d) = 0.2 + 0.2 - 0.2 \cdot 0.2 = 0.36 \\
& (e,a) = 0.1 + 0.5 - 0.1 \cdot 0.5 = 0.55
\end{aligned}$$

Sehingga didapat:

$$\tilde{P} \oplus \tilde{Q} = \left\{\left(\tilde{A}_1 \oplus \tilde{A}_2\right), \left(\tilde{R}_1 \oplus \tilde{R}_2\right)\right\}$$

$$= \left\{\begin{bmatrix} (a,0.79),(b,0.55),(c,0.7), \\ (d,0.58),(e,0.68) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ((a,b),0.5),((b,c),0.82),((a,d),0.46),((b,d),0.58), \\ ((c,d),0.76),((d,a),0.93),((e,d),0.36),((e,a),0.55) \end{bmatrix}\right\}$$

Sehingga dapat digambarkan sebagai berikut,



Gambar.3.9. $\tilde{P} \oplus \tilde{Q}$

Jika dibandingkan dengan *fuzzy digraph* $\tilde{P} \vee \tilde{Q}$, maka *fuzzy digraph* $\tilde{P} \oplus \tilde{Q} \geq \tilde{P} \vee \tilde{Q}$. Karena setiap derajat keanggotaan titik dan sisi yang terdapat pada $\tilde{P} \oplus \tilde{Q}$ jelas lebih besar dibandingkan dengan derajat keanggotaan yang terdapat pada $\tilde{P} \vee \tilde{Q}$. Dari contoh ini, dapat mempertegas pembuktian teorema yang telah penulis lakukan, yang menyatakan bahwa $\tilde{P} \oplus \tilde{Q} \geq \tilde{P} \vee \tilde{Q} \geq \tilde{P} \wedge \tilde{Q}$.

(6). $\left(\tilde{P} \vee \tilde{Q}\right)^C = \left(\tilde{P}\right)^C \wedge \left(\tilde{Q}\right)^C$

$$\left(\tilde{P} \vee \tilde{Q}\right)^C = \left\{\left(\tilde{A}_1, \tilde{R}_1\right) \vee \left(\tilde{A}_2, \tilde{R}_2\right)\right\}^C$$

$$= \left\{\left(\tilde{A}_1 \vee \tilde{A}_2\right), \left(\tilde{R}_1 \vee \tilde{R}_2\right)\right\}^C$$

$$= \left\{\left(\tilde{A}_1 \vee \tilde{A}_2\right)^C, \left(\tilde{R}_1 \vee \tilde{R}_2\right)^C\right\}$$

$$= \left\{\left(\tilde{A}_1{}^C \wedge \tilde{A}_2{}^C\right), \left(\tilde{R}_1{}^C \wedge \tilde{R}_2{}^C\right)\right\}$$

$$= \left\{\left(\tilde{A}_1, \tilde{R}_1\right) \wedge \left(\tilde{A}_2, \tilde{R}_2\right)\right\}$$

$$= \left(\tilde{P}\right)^C \wedge \left(\tilde{Q}\right)^C$$

Jadi terbukti bahwa $\left(\tilde{P} \vee \tilde{Q}\right)^C = \left(\tilde{P}\right)^C \wedge \left(\tilde{Q}\right)^C$.

(7). $\left(\tilde{P} \wedge \tilde{Q}\right)^C = \left(\tilde{P}\right)^C \vee \left(\tilde{Q}\right)^C$

$$\left(\tilde{P} \wedge \tilde{Q}\right)^C = \left\{\left(\tilde{A}_1, \tilde{R}_1\right) \wedge \left(\tilde{A}_2, \tilde{R}_2\right)\right\}^C$$

$$= \left\{\left(\tilde{A}_1 \wedge \tilde{A}_2\right), \left(\tilde{R}_1 \wedge \tilde{R}_2\right)\right\}^C$$

$$= \left\{\left(\tilde{A}_1 \wedge \tilde{A}_2\right)^C, \left(\tilde{R}_1 \wedge \tilde{R}_2\right)^C\right\}$$

$$= \left\{\left(\tilde{A}_1^{\ C} \vee \tilde{A}_2^{\ C}\right), \left(\tilde{R}_1^{\ C} \vee \tilde{R}_2^{\ C}\right)\right\}$$

$$= \left\{\left(\tilde{A}_1, \tilde{R}_1\right) \vee \left(\tilde{A}_2, \tilde{R}_2\right)\right\}$$

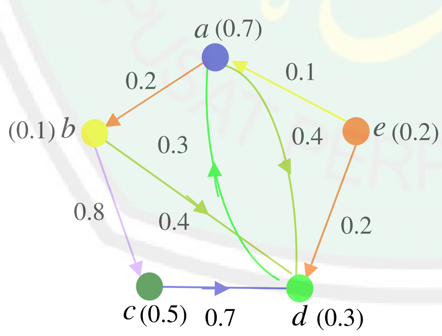
$$= \left(\tilde{P}\right)^C \vee \left(\tilde{Q}\right)^C$$

Jadi terbukti bahwa $\left(\tilde{P} \wedge \tilde{Q}\right)^C = \left(\tilde{P}\right)^C \vee \left(\tilde{Q}\right)^C$.

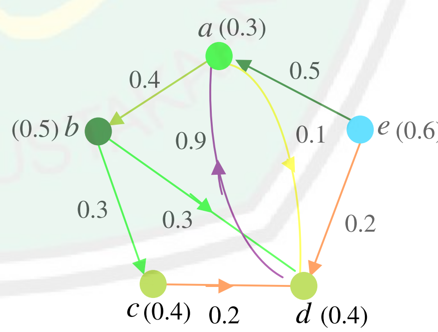
Akan diberikan contoh untuk teorema (6) dan (7), sebagai berikut:

Dari contoh yang sebelumnya telah diketahui

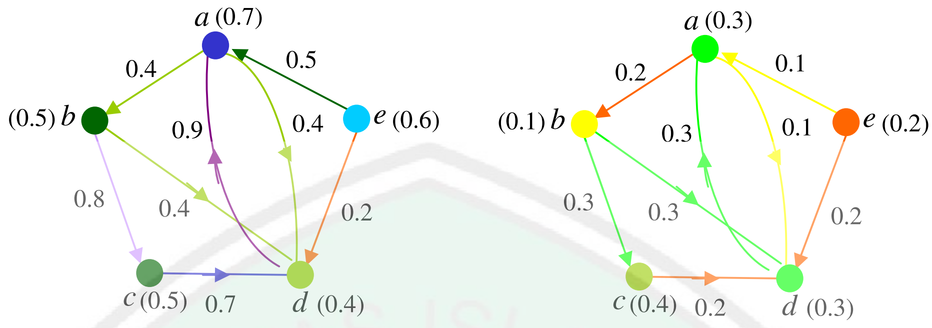
$\left(\tilde{P}\right)^C = 1 - \tilde{P}$, $\left(\tilde{Q}\right)^C = 1 - \tilde{Q}$, $\left(\tilde{P} \vee \tilde{Q}\right)^C = 1 - \left(\tilde{P} \vee \tilde{Q}\right)$ dan $\left(\tilde{P} \wedge \tilde{Q}\right)^C = 1 - \left(\tilde{P} \wedge \tilde{Q}\right)$



(i) $\tilde{P}$



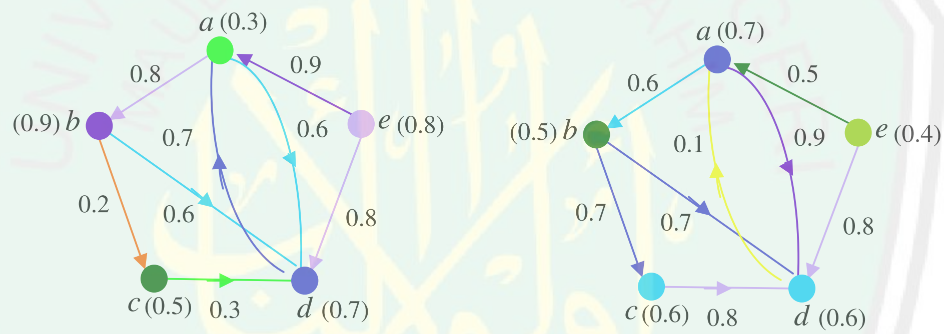
(ii) $\tilde{Q}$



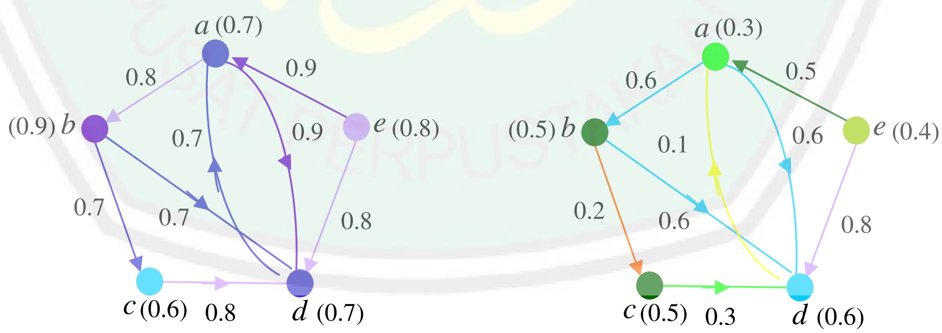
(iii) $\tilde{P} \vee \tilde{Q}$ (iv) $\tilde{P} \wedge \tilde{Q}$

Gambar 3.10. Contoh fuzzy digraph yang telah diketahui

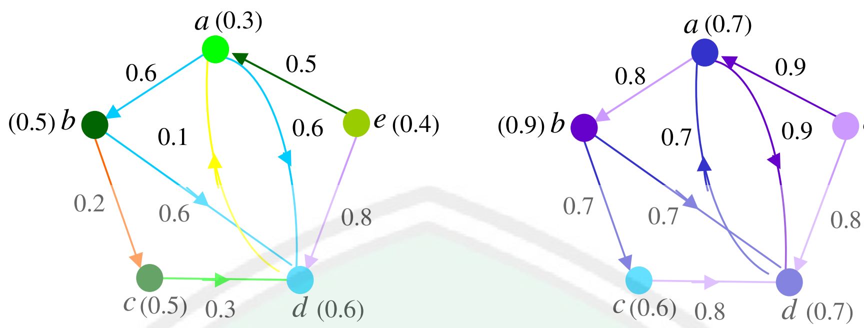
Dari yang telah diketahui di atas, didapat



(i) $(\tilde{P})^C$ (ii) $(\tilde{Q})^C$



(iii) $(\tilde{P})^{C\vee} (\tilde{Q})^C$ (iv) $(\tilde{P})^{C\wedge} (\tilde{Q})^C$



(v) $(\tilde{P} \vee \tilde{Q})^C$ (vi) $(\tilde{P} \wedge \tilde{Q})^C$

Gambar 3.11. Fuzzy Digraph untuk Teorema (6) dan (7)

Dari penggambaran setiap *fuzzy digraph* di atas, dapat diambil kesimpulan bahwa

$\left(\tilde{P} \vee \tilde{Q}\right)^C = \left(\tilde{P}\right)^C \wedge \left(\tilde{Q}\right)^C$ dan $\left(\tilde{P} \wedge \tilde{Q}\right)^C = \left(\tilde{P}\right)^C \vee \left(\tilde{Q}\right)^C$

(8). $\left(\tilde{P} \cdot \tilde{Q}\right)^C \geq \left(\tilde{P}\right)^C \cdot \left(\tilde{Q}\right)^C$

Pada teorema yang berlaku pada fuzzy telah dibuktikan bahwa $\left(\tilde{A} \oplus \tilde{B}\right)^C = \left(\tilde{A}\right)^C \cdot \left(\tilde{B}\right)^C$ dan $\left(\tilde{A}\right)^C \cdot \left(\tilde{B}\right)^C \leq \left(\tilde{A} \cdot \tilde{B}\right)^C$. maka didapat:

$$\left(\tilde{P} \cdot \tilde{Q}\right)^C = \left\{\left(\tilde{A}_1, \tilde{R}_1\right) \cdot \left(\tilde{A}_2, \tilde{R}_2\right)\right\}^C$$

$$= \left(\tilde{A}_1, \tilde{R}_1\right)^C \oplus \left(\tilde{A}_2, \tilde{R}_2\right)^C$$

$$= \left(\tilde{A}_1{}^C, \tilde{R}_1{}^C\right) \oplus \left(\tilde{A}_2{}^C, \tilde{R}_2{}^C\right)$$

$$= \left\{\left(\tilde{A}_1{}^C \oplus \tilde{A}_2{}^C\right), \left(\tilde{R}_1{}^C \oplus \tilde{R}_2{}^C\right)\right\}$$

$$= \left\{\left(\left(1 - \tilde{A}_1\right) \oplus \left(1 - \tilde{A}_2\right)\right), \left(\left(1 - \tilde{R}_1\right) \oplus \left(1 - \tilde{R}_2\right)\right)\right\}$$

$$= \left\{\left(\left(1 - \tilde{A}_1\right) + \left(1 - \tilde{A}_2\right) - \left(1 - \tilde{A}_1\right) \cdot \left(1 - \tilde{A}_2\right)\right), \left(\left(1 - \tilde{R}_1\right) + \left(1 - \tilde{R}_2\right) - \left(1 - \tilde{R}_1\right) \cdot \left(1 - \tilde{R}_2\right)\right)\right\}$$

$$= \left\{\left(1 - \tilde{A}_1 + 1 - \tilde{A}_2 - 1 + \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 - \tilde{A}_1 \cdot \tilde{A}_2\right), \left(1 - \tilde{R}_1 + 1 - \tilde{R}_2 - 1 + \tilde{R}_1 + \tilde{R}_2 - \tilde{R}_1 \cdot \tilde{R}_2\right)\right\}$$

$$= \left\{\left(1 - \tilde{A}_1 \cdot \tilde{A}_2\right), \left(1 - \tilde{R}_1 \cdot \tilde{R}_2\right)\right\}$$

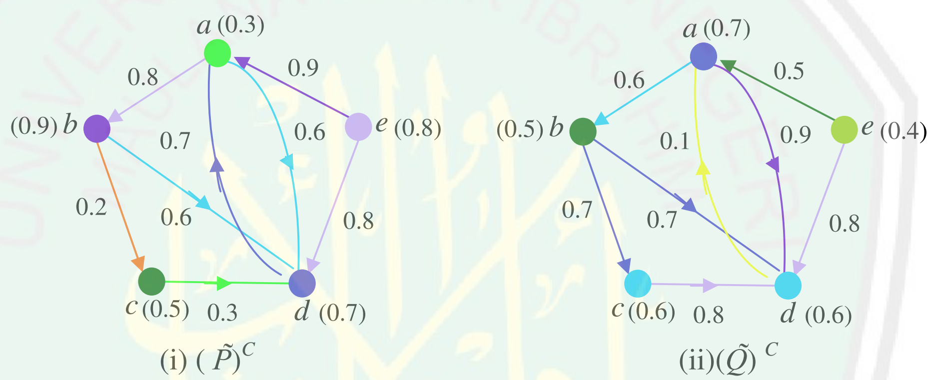
$$= \left\{ \left(\tilde{A}_1 \cdot \tilde{A}_2 \right)^C, \left(\tilde{R}_1 \cdot \tilde{R}_2 \right)^C \right\}$$

$$\geq \left\{ \left(\tilde{A}_1{}^C \cdot \tilde{A}_2{}^C \right), \left(\tilde{R}_1{}^C \cdot \tilde{R}_2{}^C \right) \right\}$$

$$\geq \left(\tilde{A}_1{}^C, \tilde{R}_1{}^C \right) \cdot \left(\tilde{A}_2{}^C, \tilde{R}_2{}^C \right)$$

$$\geq \left(\tilde{P} \right)^C \cdot \left(\tilde{Q} \right)^C$$

Jadi terbukti bahwa $\left(\tilde{P} \cdot \tilde{Q} \right)^C \geq \left(\tilde{P} \right)^C \cdot \left(\tilde{Q} \right)^C$. Kemudian akan diberikan contoh yang akan menggambarkan teorema tersebut.



Gambar 3.12. Fuzzy Digraph

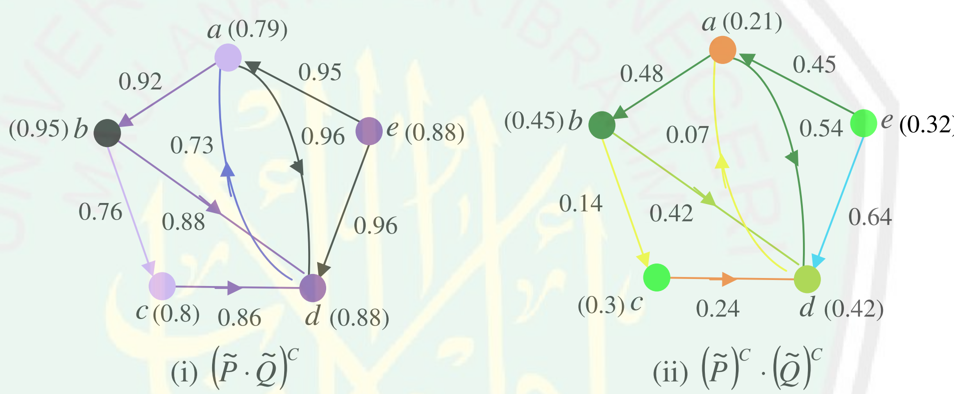
Dari kedua gambar *fuzzy digraph* di atas, akan dicari *fuzzy digraph* untuk $\left(\tilde{P} \cdot \tilde{Q} \right)^C$ dan $\left(\tilde{P} \right)^C \cdot \left(\tilde{Q} \right)^C$.

Tabel 3.2. perbandingan antara $\left(\tilde{P} \cdot \tilde{Q} \right)^C$ *dan* $\left(\tilde{P} \right)^C \cdot \left(\tilde{Q} \right)^C$

Var. Titik	$\tilde{P}$	$\tilde{Q}$	$\tilde{P} \cdot \tilde{Q}$	$\left(\tilde{P} \cdot \tilde{Q} \right)^C$	Var. sisi	$\tilde{P}$	$\tilde{Q}$	$\tilde{P} \cdot \tilde{Q}$	$\left(\tilde{P} \cdot \tilde{Q} \right)^C$
a	0.7	0.3	0.21	0.79	(*a*,*b*)	0.2	0.4	0.08	0.92
b	0.1	0.5	0.05	0.95	(*b*,*c*)	0.8	0.3	0.24	0.76
c	0.5	0.4	0.20	0.80	(*a*,*d*)	0.4	0.1	0.04	0.96
d	0.3	0.4	0.12	0.88	(*b*,*d*)	0.4	0.3	0.12	0.88
e	0.2	0.6	0.12	0.88	(*c*,*d*)	0.7	0.2	0.14	0.86
$\left(\tilde{P} \cdot \tilde{Q} \right)^C = 1 - \tilde{P} \cdot \tilde{Q}$					(*d*,*a*)	0.3	0.9	0.27	0.73
					(*e*,*d*)	0.2	0.2	0.04	0.96
					(*e*,*a*)	0.1	0.5	0.05	0.95

Var. Titik	$(\tilde{P})^C$	$(\tilde{Q})^C$	$(\tilde{P})^C \cdot (\tilde{Q})^C$	Var. sisi	$(\tilde{P})^C$	$(\tilde{Q})^C$	$(\tilde{P})^C \cdot (\tilde{Q})^C$
a	0.3	0.7	0.21	(a,b)	0.8	0.6	0.48
b	0.9	0.5	0.45	(b,c)	0.2	0.7	0.14
c	0.5	0.6	0.30	(a,d)	0.6	0.9	0.54
d	0.7	0.6	0.42	(b,d)	0.6	0.7	0.42
e	0.8	0.4	0.32	(c,d)	0.3	0.8	0.24
				(d,a)	0.7	0.1	0.07
				(e,d)	0.8	0.8	0.64
				(e,a)	0.9	0.5	0.45

Tabel 3.2 dapat digambarkan sebagai berikut,



Gambar 3.13. Fuzzy Digraph untuk $(\tilde{P} \cdot \tilde{Q})^C$ *dan* $(\tilde{P})^C \cdot (\tilde{Q})^C$

Gambar *fuzzy digraph* di atas menggambarkan perbandingan yang terjadi antara keduanya. Pada gambar *fuzzy digraph* (i) menggambarkan suatu *fuzzy digraph* yang memiliki nilai-nilai derajat keanggotaan yang lebih besar di bandingkan dengan derajat keanggotaan yang terdapat pada *fuzzy digraph* (ii). Di mana ditandai dengan warna-warna yang gelap untuk *fuzzy digraph* (i) dan warna-warna yang sedikit lebih terang untuk *fuzzy digraph* (ii). Contoh tersebut telah dapat menjelaskan pembuktian dari teorema ini.

(9). $\left(\tilde{P} \oplus \tilde{Q}\right)^C \leq \left(\tilde{P}\right)^C \oplus \left(\tilde{Q}\right)^C$

Pada teorema yang berlaku pada fuzzy telah dibuktikan bahwa $\left(\tilde{A} \oplus \tilde{B}\right)^C = \left(\tilde{A}\right)^C \cdot \left(\tilde{B}\right)^C$ dan $\left(\tilde{A} \oplus \tilde{B}\right)^C \leq \left(\tilde{A}\right)^C \oplus \left(\tilde{B}\right)^C$. Maka didapat:

$$\left(\tilde{P} \oplus \tilde{Q}\right)^C = \left\{\left(\tilde{A}_1, \tilde{R}_1\right) \oplus \left(\tilde{A}_2, \tilde{R}_2\right)\right\}^C$$

$$= \left(\tilde{A}_1, \tilde{R}_1\right)^C \cdot \left(\tilde{A}_2, \tilde{R}_2\right)^C$$

$$= \left(\tilde{A}_1{}^C, \tilde{R}_1{}^C\right) \cdot \left(\tilde{A}_2{}^C, \tilde{R}_2{}^C\right)$$

$$= \left\{\left(\tilde{A}_1{}^C \cdot \tilde{A}_2{}^C\right), \left(\tilde{R}_1{}^C \cdot \tilde{R}_2{}^C\right)\right\}$$

$$= \left\{\left(\left(1 - \tilde{A}_1\right) \cdot \left(1 - \tilde{A}_2\right)\right), \left(\left(1 - \tilde{R}_1\right) \cdot \left(1 - \tilde{R}_2\right)\right)\right\}$$

$$= \left\{\left(1 - \tilde{A}_1 - \tilde{A}_2 + \tilde{A}_1 \cdot \tilde{A}_2\right), \left(1 - \tilde{R}_1 - \tilde{R}_2 + \tilde{R}_1 \cdot \tilde{R}_2\right)\right\}$$

$$= \left\{\left(1 - \left(\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 - \tilde{A}_1 \cdot \tilde{A}_2\right)\right), \left(1 - \left(\tilde{R}_1 + \tilde{R}_2 - \tilde{R}_1 \cdot \tilde{R}_2\right)\right)\right\}$$

$$= \left\{\left(1 - \tilde{A}_1 \oplus \tilde{A}_2\right), \left(1 - \tilde{R}_1 \oplus \tilde{R}_2\right)\right\}$$

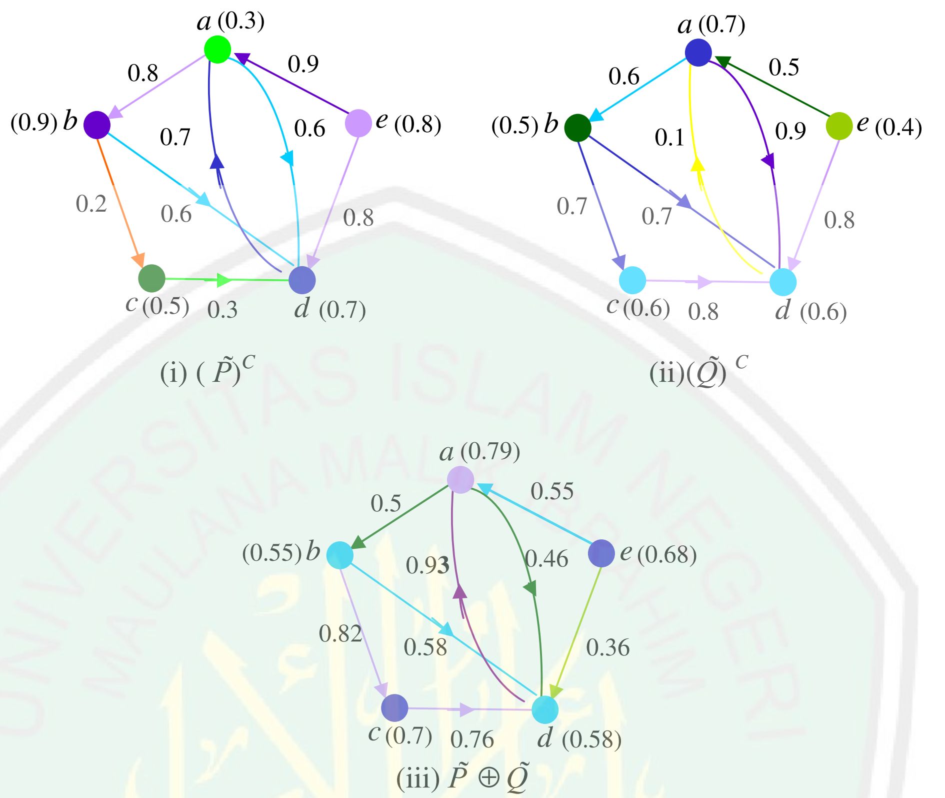
$$= \left\{\left(\tilde{A}_1 \oplus \tilde{A}_2\right)^C, \left(\tilde{R}_1 \oplus \tilde{R}_2\right)^C\right\}$$

$$\leq \left\{\left(\tilde{A}_1{}^C \oplus \tilde{A}_2{}^C\right), \left(\tilde{R}_1{}^C \oplus \tilde{R}_2{}^C\right)\right\}$$

$$\leq \left(\tilde{A}_1{}^C, \tilde{R}_1{}^C\right) \oplus \left(\tilde{A}_2{}^C, \tilde{R}_2{}^C\right)$$

$$\leq \left(\tilde{P}\right)^C \oplus \left(\tilde{Q}\right)^C$$

Jadi terbukti bahwa $\left(\tilde{P} \oplus \tilde{Q}\right)^C \leq \left(\tilde{P}\right)^C \oplus \left(\tilde{Q}\right)^C$. Kemudian akan diberikan contoh yang akan melengkapi pembuktian dari teorema tersebut, berdasarkan contoh pada teorema-teorema sebelumnya telah diketahui



Gambar 3.14. Fuzzy Digraph yang Diketahui untuk Membuktikan Teorema (9)

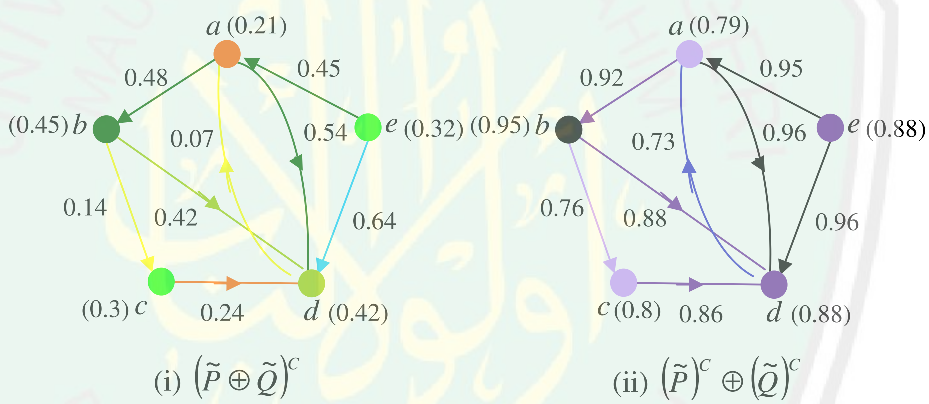
Untuk mendapatkan *fuzzy digraph* $\left(\tilde{P} \oplus \tilde{Q}\right)^C$ dan $\left(\tilde{P}\right)^C \oplus \left(\tilde{Q}\right)^C$, terlebih dahulu kita harus mendapatkan derajat-derajat keanggotaannya.

Tabel 3.3. Derajat keanggotaan titik dan sisi $\left(\tilde{P} \oplus \tilde{Q}\right)^C$ dan $\left(\tilde{P}\right)^C \oplus \left(\tilde{Q}\right)^C$

Var. Titik	$\tilde{P} \oplus \tilde{Q}$	$\left(\tilde{P} \oplus \tilde{Q}\right)^C$	Var. sisi	$\tilde{P} \oplus \tilde{Q}$	$\left(\tilde{P} \oplus \tilde{Q}\right)^C$
a	0.79	0.21	*(a,b)*	0.5	0.5
b	0.55	0.45	*(b,c)*	0.82	0.18
c	0.7	0.3	*(a,d)*	0.46	0.54
d	0.58	0.42	*(b,d)*	0.58	0.42
e	0.68	0.32	*(c,d)*	0.76	0.24
			(d,a)	0.93	0.07
			(e,d)	0.36	0.64
			(e,a)	0.55	0.45

Var. Titik	$(\tilde{P})^C$	$(\tilde{Q})^C$	$(\tilde{P})^C \oplus (\tilde{Q})^C$	Var. sisi	$(\tilde{P})^C$	$(\tilde{Q})^C$	$(\tilde{P})^C \oplus (\tilde{Q})^C$
a	0.3	0.7	0.79	(a,b)	0.8	0.6	0.92
b	0.9	0.5	0.95	(b,c)	0.2	0.7	0.76
c	0.5	0.6	0.80	(a,d)	0.6	0.9	0.96
d	0.7	0.6	0.88	(b,d)	0.6	0.7	0.88
e	0.8	0.4	0.88	(c,d)	0.3	0.8	0.86
$(\tilde{P})^C \oplus (\tilde{Q})^C =$				(d,a)	0.7	0.1	0.73
$(\tilde{P})^C + (\tilde{Q})^C - (\tilde{P})^C \cdot (\tilde{Q})^C$				(e,d)	0.8	0.8	0.96
				(e,a)	0.9	0.5	0.95

Dari kedua tabel di atas dapat kita gambarkan fuzzy digrafnya sebagai berikut:



Gambar 3.15. Fuzzy Digraph dari Tabel 3.3

Kedua gambar di atas menggambarkan dua buah *fuzzy digraph* yang keduanya memiliki derajat-derajat keanggotaan yang berbeda. Di mana *fuzzy digraph* $(\tilde{P})^C \oplus (\tilde{Q})^C$ memiliki derajat-derajat keanggotaan yang lebih besar dibandingkan dengan derajat-derajat keanggotaan pada *fuzzy digraph* $(\tilde{P} \oplus \tilde{Q})^C$, yang ditandai dengan perbedaan warna yang nyata sekali. Pada *fuzzy digraph* $(\tilde{P})^C \oplus (\tilde{Q})^C$ memiliki warna sisi titik dan sisi yang lebih gelap dibandingkan dengan warna titik dan sisi pada $(\tilde{P} \oplus \tilde{Q})^C$. Sehingga pernyataan yang menyatakan bahwa $\left(\tilde{P}\oplus\tilde{Q}\right)^C \leq \left(\tilde{P}\right)^C \oplus \left(\tilde{Q}\right)^C$ adalah benar sesuai dengan contoh yang diberikan.

(10). $\left(\tilde{P}\oplus\tilde{Q}\right)^C = \left(\tilde{P}\right)^C \cdot \left(\tilde{Q}\right)^C$

$$\begin{aligned}
\left(\tilde{P}\oplus\tilde{Q}\right)^C &= 1-\left\{\tilde{P}\oplus\tilde{Q}\right\} \\
&= 1-\left\{\left(\tilde{A}_1,\tilde{R}_1\right)\oplus\left(\tilde{A}_2,\tilde{R}_2\right)\right\} \\
&= 1-\left\{\left(\tilde{A}_1,\tilde{R}_1\right)+\left(\tilde{A}_2,\tilde{R}_2\right)-\left(\tilde{A}_1,\tilde{R}_1\right)\cdot\left(\tilde{A}_2,\tilde{R}_2\right)\right\} \\
&= 1-\left\{\tilde{P}+\tilde{Q}-\tilde{P}\cdot\tilde{Q}\right\} \\
&= 1-\tilde{P}-\tilde{Q}+\tilde{P}\cdot\tilde{Q} \\
&= \left(1-\tilde{P}\right)\cdot\left(1-\tilde{Q}\right) \\
&= \left(\tilde{P}\right)^C\cdot\left(\tilde{Q}\right)^C
\end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa $\left(\tilde{P}\oplus\tilde{Q}\right)^C = \left(\tilde{P}\right)^C \cdot \left(\tilde{Q}\right)^C$

(11). $\left(\tilde{P}\cdot\tilde{Q}\right)^C = \left(\tilde{P}\right)^C \oplus \left(\tilde{Q}\right)^C$

$$\begin{aligned}
\left(\tilde{P}\cdot\tilde{Q}\right)^C &= 1-\left\{\tilde{P}\cdot\tilde{Q}\right\} \\
&= 1-\left\{\left(\tilde{A}_1,\tilde{R}_1\right)\cdot\left(\tilde{A}_2,\tilde{R}_2\right)\right\} \\
&= 1-\left\{\left(\tilde{A}_1\cdot\tilde{A}_2\right),\left(\tilde{R}_1\cdot\tilde{R}_2\right)\right\} \\
&= \left\{1-\left(\tilde{A}_1\cdot\tilde{A}_2\right),1-\left(\tilde{R}_1\cdot\tilde{R}_2\right)\right\} \\
&= \left\{\left(1-\tilde{A}_1\right)\cdot\left(1-\tilde{A}_2\right),\left(1-\tilde{R}_1\right)\cdot\left(1-\tilde{R}_2\right)\right\} \\
&= \left\{\left(1-\tilde{A}_1-\tilde{A}_2+\tilde{A}_1\cdot\tilde{A}_2\right),\left(1-\tilde{R}_1-\tilde{R}_2+\tilde{R}_1\cdot\tilde{R}_2\right)\right\} \\
&= \left\{\left(1-\tilde{A}_1-\tilde{A}_2+\tilde{A}_1\cdot\tilde{A}_2\right),\left(1-\tilde{R}_1-\tilde{R}_2+\tilde{R}_1\cdot\tilde{R}_2\right)\right\}
\end{aligned}$$

$$= \left\{1-\left(\tilde{A}_1+\tilde{A}_2-\tilde{A}_1\cdot\tilde{A}_2\right), 1-\left(\tilde{R}_1+\tilde{R}_2-\tilde{R}_1\cdot\tilde{R}_2\right)\right\}$$

$$= \left\{1-\left(\tilde{A}_1\oplus\tilde{A}_2\right), 1-\left(\tilde{R}_1\oplus\tilde{R}_2\right)\right\}$$

$$= \left\{\left(\tilde{A}_1\oplus\tilde{A}_2\right)^C, \left(\tilde{R}_1\oplus\tilde{R}_2\right)^C\right\}$$

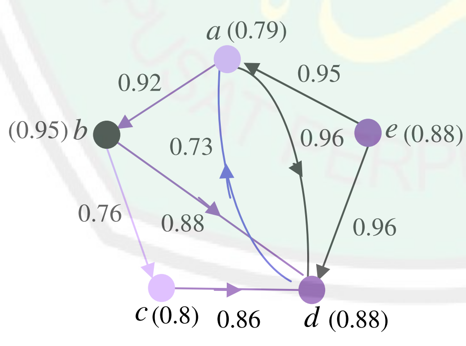
$$\leq \left\{\left(\tilde{A}_1^{\,C}\oplus\tilde{A}_2^{\,C}\right), \left(\tilde{R}_1^{\,C}\oplus\tilde{R}_2^{\,C}\right)\right\}$$

$$= \left\{\left(\tilde{A}_1^{\,C}, \tilde{R}_1^{\,C}\right)\oplus\left(\tilde{A}_2^{\,C}, \tilde{R}_2^{\,C}\right)\right\}$$

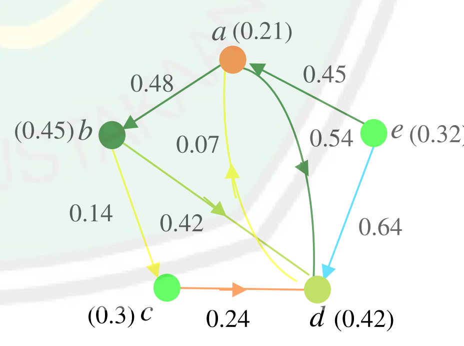
$$= \left(\tilde{P}\right)^C \oplus \left(\tilde{Q}\right)^C$$

Jadi, terbukti bahwa $\left(\tilde{P}\cdot\tilde{Q}\right)^C = \left(\tilde{P}\right)^C \oplus \left(\tilde{Q}\right)^C$.

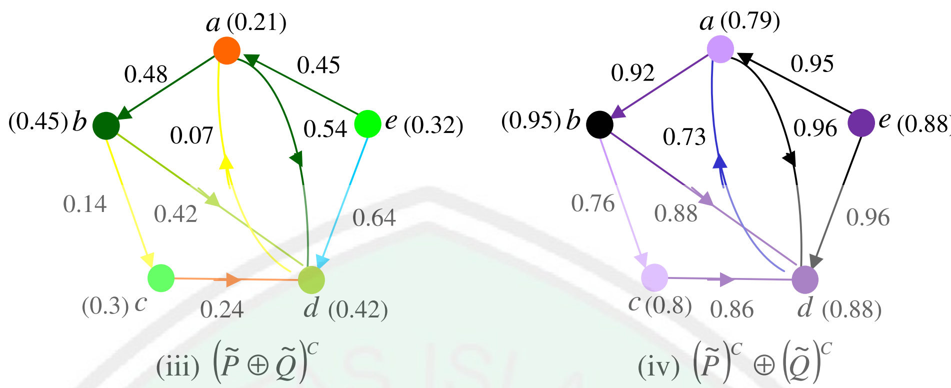
Untuk teorema (10) dan (11) akan diberikan contoh yang akan mewakili keduanya, dengan tetap mengambil contoh-contoh yang telah ada. Pada teorema (10) dan (11) dinyatakan bahwa $\left(\tilde{P}\oplus\tilde{Q}\right)^C = \left(\tilde{P}\right)^C \cdot \left(\tilde{Q}\right)^C$ dan $\left(\tilde{P}\cdot\tilde{Q}\right)^C = \left(\tilde{P}\right)^C \oplus \left(\tilde{Q}\right)^C$. Seperti yang telah kita ketahui dari contoh-contoh sebelumnya, di mana:



(i) $\left(\tilde{P}\cdot\tilde{Q}\right)^C$



(ii) $\left(\tilde{P}\right)^C \cdot \left(\tilde{Q}\right)^C$



Gambar 3.16. Fuzzy Digraph yang Diketahui untuk Membuktikan Teorema (10) dan (11)

Dari gambar di atas, tampak jelas bahwa ada kesamaan dari keempat *fuzzy digraph* tersebut. Misalnya saja *fuzzy digraph* $(\tilde{P} \cdot \tilde{Q})^C$ memiliki derajat keanggotaan titik dan sisi yang sama dengan fuzzy digraph $(\tilde{P})^C \oplus (\tilde{Q})^C$, sehingga gambar untuk kedua *fuzzy digraph* ini sama. Sama halnya dengan *fuzzy digraph* $(\tilde{P})^C \cdot (\tilde{Q})^C$ dan *fuzzy digraph* $(\tilde{P} \oplus \tilde{Q})^C$, yang keduanya juga memiliki derajat keanggotaan titik dan sisi yang sama. Sehingga contoh-contoh tersebut telah memenuhi teorema yang menyatakan bahwa $(\tilde{P} \oplus \tilde{Q})^C = (\tilde{P})^C \cdot (\tilde{Q})^C$ dan $(\tilde{P} \cdot \tilde{Q})^C = (\tilde{P})^C \oplus (\tilde{Q})^C$.

(12). $\tilde{P} \wedge (\tilde{P} \vee \tilde{Q}) = \tilde{P}$

$$\begin{aligned}
\tilde{P} \wedge (\tilde{P} \vee \tilde{Q}) &= (\tilde{A}_1, \tilde{R}_1) \wedge \{(\tilde{A}_1, \tilde{R}_1) \vee (\tilde{A}_2, \tilde{R}_2)\} \\
&= (\tilde{A}_1, \tilde{R}_1) \wedge \{(\tilde{A}_1 \vee \tilde{A}_2), (\tilde{R}_1 \vee \tilde{R}_2)\} \\
&= (\tilde{A}_1, \tilde{R}_1) \wedge \{\max(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2), \max(\tilde{R}_1, \tilde{R}_2)\} \\
&= \{(\tilde{A}_1 \wedge \max(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2)), (\tilde{R}_1 \wedge \max(\tilde{R}_1, \tilde{R}_2))\} \\
&= \{\min(\tilde{A}_1, \max(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2)), \min(\tilde{R}_1, \max(\tilde{R}_1, \tilde{R}_2))\}
\end{aligned}$$

$$= \left(\tilde{A}_1, \tilde{R}_1\right)$$

$$= \tilde{P}$$

Jadi, benar bahwa $\tilde{P} \wedge \left(\tilde{P} \vee \tilde{Q}\right) = \tilde{P}$

(13). $\tilde{P} \vee \left(\tilde{P} \wedge \tilde{Q}\right) = \tilde{P}$

$$\tilde{P} \vee \left(\tilde{P} \wedge \tilde{Q}\right) = \left(\tilde{A}_1, \tilde{R}_1\right) \vee \left\{\left(\tilde{A}_1, \tilde{R}_1\right) \wedge \left(\tilde{A}_2, \tilde{R}_2\right)\right\}$$

$$= \left(\tilde{A}_1, \tilde{R}_1\right) \vee \left\{\left(\tilde{A}_1 \wedge \tilde{A}_2\right), \left(\tilde{R}_1 \wedge \tilde{R}_2\right)\right\}$$

$$= \left(\tilde{A}_1, \tilde{R}_1\right) \vee \left\{\min\left(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2\right), \min\left(\tilde{R}_1, \tilde{R}_2\right)\right\}$$

$$= \left\{\left(\tilde{A}_1 \vee \min\left(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2\right)\right), \left(\tilde{R}_1 \vee \min\left(\tilde{R}_1, \tilde{R}_2\right)\right)\right\}$$

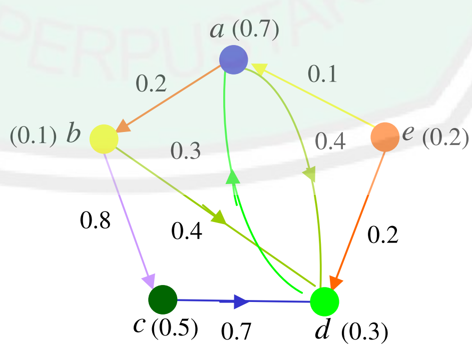
$$= \left\{\max\left(\tilde{A}_1, \min\left(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2\right)\right), \max\left(\tilde{R}_1, \min\left(\tilde{R}_1, \tilde{R}_2\right)\right)\right\}$$

$$= \left(\tilde{A}_1, \tilde{R}_1\right)$$

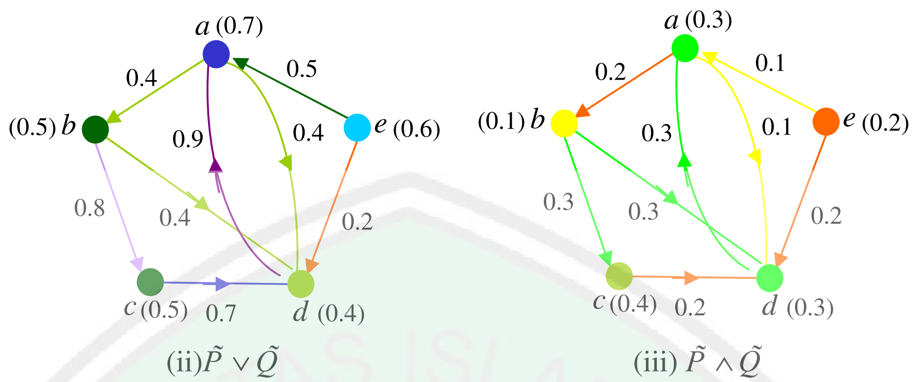
$$= \tilde{P}$$

Jadi, terbukti bahwa $\tilde{P} \vee \left(\tilde{P} \wedge \tilde{Q}\right) = \tilde{P}$

Akan diberikan contoh untuk teorema (12) dan (13) dengan mengikuti contoh-contoh sebelumnya. Dari contoh-contoh sebelumnya telah didapat:



(i) $\tilde{P}$



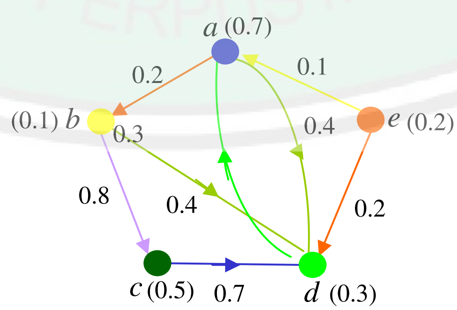
Gambar 3.17. Fuzzy Digraph yang Telah Diketahui untuk Membuktikan Teorema (12) dan (13)

Dari fuzzy digraph yang telah diketahui di atas, kita dapatkan:

Tabel.3.4. $\tilde{P} \wedge \left(\tilde{P} \vee \tilde{Q}\right)$

Var. Titik	$\tilde{P}$	$\tilde{P} \vee \tilde{Q}$	$\tilde{P} \wedge \left(\tilde{P} \vee \tilde{Q}\right) = \tilde{P}$	Var. sisi	$\tilde{P}$	$\tilde{P} \wedge \tilde{Q}$	$\tilde{P} \vee \left(\tilde{P} \wedge \tilde{Q}\right) = \tilde{P}$
a	0.7	0.7	0.7	(a,b)	0.2	0.4	0.2
b	0.1	0.5	0.1	(b,c)	0.8	0.8	0.8
c	0.5	0.5	0.5	(a,d)	0.4	0.4	0.4
d	0.3	0.4	0.3	(b,d)	0.4	0.4	0.4
e	0.2	0.6	0.2	(c,d)	0.7	0.7	0.7
$\tilde{P} \wedge \left(\tilde{P} \vee \tilde{Q}\right) = \min\left(\tilde{P}, \left(\tilde{P} \vee \tilde{Q}\right)\right)$				(d,a)	0.3	0.9	0.3
				(e,d)	0.2	0.2	0.2
				(e,a)	0.1	0.5	0.1

Dari tabel di atas dapat kita gambarkan sebagai berikut:

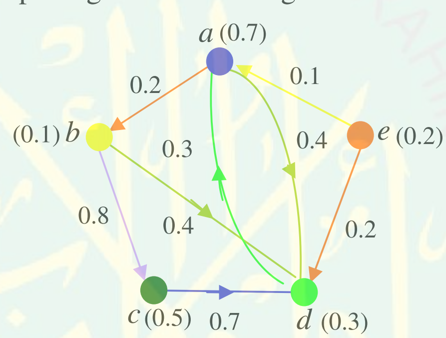


Gambar 3.18. Fuzzy Digraph untuk $\tilde{P} \wedge \left(\tilde{P} \vee \tilde{Q}\right) = \tilde{P}$

Tabel.3.5. $\tilde{P} \vee (\tilde{P} \wedge \tilde{Q})$

Var. Titik	$\tilde{P}$	$\tilde{P} \wedge \tilde{Q}$	$\tilde{P} \vee (\tilde{P} \wedge \tilde{Q}) = \tilde{P}$	Var. sisi	$\tilde{P}$	$\tilde{P} \wedge \tilde{Q}$	$\tilde{P} \vee (\tilde{P} \wedge \tilde{Q}) = \tilde{P}$
a	0.7	0.3	0.7	(a,b)	0.2	0.2	0.2
b	0.1	0.1	0.1	(b,c)	0.8	0.1	0.8
c	0.5	0.4	0.5	(a,d)	0.4	0.1	0.4
d	0.3	0.3	0.3	(b,d)	0.4	0.3	0.4
e	0.2	0.2	0.2	(c,d)	0.7	0.2	0.7
$\tilde{P} \vee (\tilde{P} \wedge \tilde{Q}) = \max(\tilde{P}, (\tilde{P} \wedge \tilde{Q}))$				(d,a)	0.3	0.3	0.3
				(e,d)	0.2	0.2	0.2
				(e,a)	0.1	0.1	0.1

Tabel di atas dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.19. Fuzzy Digraph untuk $\tilde{P} \vee (\tilde{P} \wedge \tilde{Q}) = \tilde{P}$

Teorema 3.2.

Misal $\tilde{P}$, $\tilde{Q}$, $\tilde{S}$ adalah tiga buah fuzzy digraph di *X*. Maka kita dapat:

(1) $\tilde{P} \vee (\tilde{Q} \wedge \tilde{S}) = (\tilde{P} \vee \tilde{Q}) \wedge (\tilde{P} \vee \tilde{S})$ (3) $\tilde{P} \cdot (\tilde{Q} \oplus \tilde{S}) = (\tilde{P} \cdot \tilde{Q}) \oplus (\tilde{P} \cdot \tilde{S})$

(2) $\tilde{P} \wedge (\tilde{Q} \vee \tilde{S}) = (\tilde{P} \wedge \tilde{Q}) \vee (\tilde{P} \wedge \tilde{S})$ (4) $\tilde{P} \oplus (\tilde{Q} \cdot \tilde{S}) = (\tilde{P} \oplus \tilde{Q}) \cdot (\tilde{P} \oplus \tilde{S})$

Bukti:

(1) $\tilde{P} \vee (\tilde{Q} \wedge \tilde{S}) = (\tilde{P} \vee \tilde{Q}) \wedge (\tilde{P} \vee \tilde{S})$

$$\tilde{P} \vee (\tilde{Q} \wedge \tilde{S}) = (\tilde{A}_1, \tilde{R}_1) \vee \{(\tilde{A}_2, \tilde{R}_2) \wedge (\tilde{A}_3, \tilde{R}_3)\}$$

$$= (\tilde{A}_1, \tilde{R}_1) \vee \{(\tilde{A}_2 \wedge \tilde{A}_3), (\tilde{R}_2 \wedge \tilde{R}_3)\}$$

$$= (\tilde{A}_1 \vee (\tilde{A}_2 \wedge \tilde{A}_3)), \{\tilde{R}_1 \vee (\tilde{R}_2 \wedge \tilde{R}_3)\}$$

$$= ((\tilde{A}_1 \vee \tilde{A}_2) \wedge (\tilde{A}_1 \vee \tilde{A}_3)), \{(\tilde{R}_1 \vee \tilde{R}_2) \wedge (\tilde{R}_1 \vee \tilde{R}_3)\}$$

$$= ((\tilde{A}_1 \vee \tilde{A}_2), (\tilde{R}_1 \vee \tilde{R}_2)) \wedge \{(\tilde{A}_1 \vee \tilde{A}_3), (\tilde{R}_1 \vee \tilde{R}_3)\}$$

$$= ((\tilde{A}_1, \tilde{R}_1) \vee (\tilde{A}_2, \tilde{R}_2)) \wedge \{(\tilde{A}_1, \tilde{R}_1) \vee (\tilde{A}_3, \tilde{R}_3)\}$$

$$= (\tilde{P} \vee \tilde{Q}) \wedge (\tilde{P} \vee \tilde{S})$$

(2) $\tilde{P} \wedge (\tilde{Q} \vee \tilde{S}) = (\tilde{P} \wedge \tilde{Q}) \vee (\tilde{P} \wedge \tilde{S})$

$$\tilde{P} \wedge (\tilde{Q} \vee \tilde{S}) = (\tilde{A}_1, \tilde{R}_1) \wedge \{(\tilde{A}_2, \tilde{R}_2) \vee (\tilde{A}_3, \tilde{R}_3)\}$$

$$= (\tilde{A}_1, \tilde{R}_1) \wedge \{(\tilde{A}_2 \vee \tilde{A}_3), (\tilde{R}_2 \vee \tilde{R}_3)\}$$

$$= (\tilde{A}_1 \wedge (\tilde{A}_2 \vee \tilde{A}_3)), \{\tilde{R}_1 \wedge (\tilde{R}_2 \vee \tilde{R}_3)\}$$

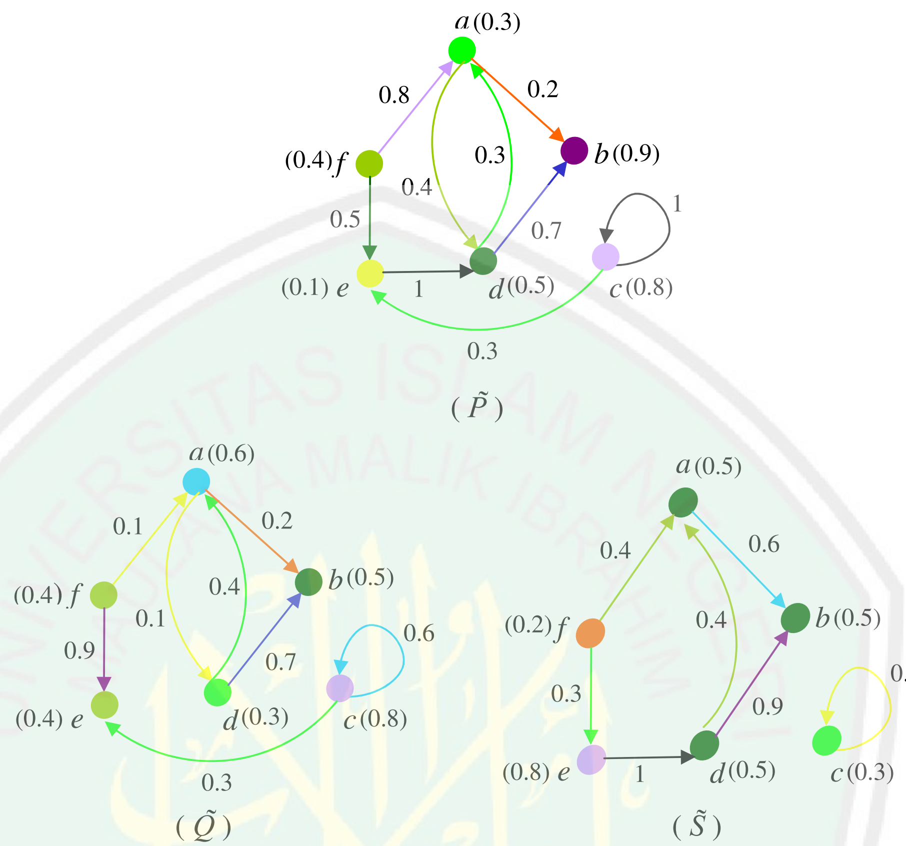
$$= ((\tilde{A}_1 \wedge \tilde{A}_2) \vee (\tilde{A}_1 \wedge \tilde{A}_3)), \{(\tilde{R}_1 \wedge \tilde{R}_2) \vee (\tilde{R}_1 \wedge \tilde{R}_3)\}$$

$$= ((\tilde{A}_1 \wedge \tilde{A}_2), (\tilde{R}_1 \wedge \tilde{R}_2)) \vee \{(\tilde{A}_1 \wedge \tilde{A}_3), (\tilde{R}_1 \wedge \tilde{R}_3)\}$$

$$= ((\tilde{A}_1, \tilde{R}_1) \wedge (\tilde{A}_2, \tilde{R}_2)) \vee \{(\tilde{A}_1, \tilde{R}_1) \wedge (\tilde{A}_3, \tilde{R}_3)\}$$

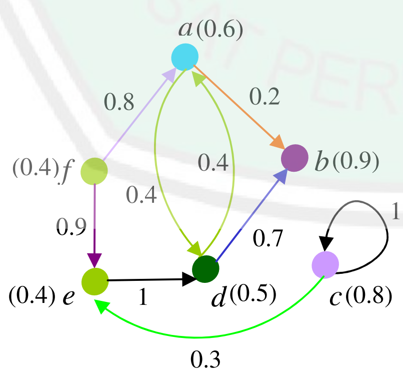
$$= (\tilde{P} \wedge \tilde{Q}) \vee (\tilde{P} \wedge \tilde{S})$$

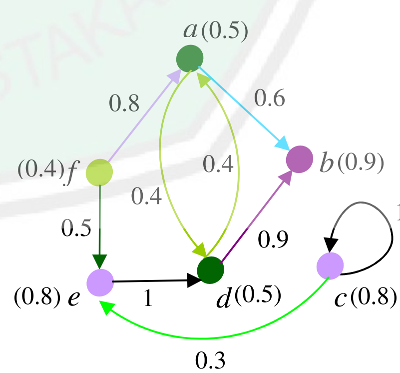
Akan diberikan contoh untuk teorema (1) dan (2) agar lebih memperjelas pembuktian dari kedua teorema tersebut. Misalkan terdapat tiga buah fuzzy digraph seperti yang digambarkan di bawah ini,

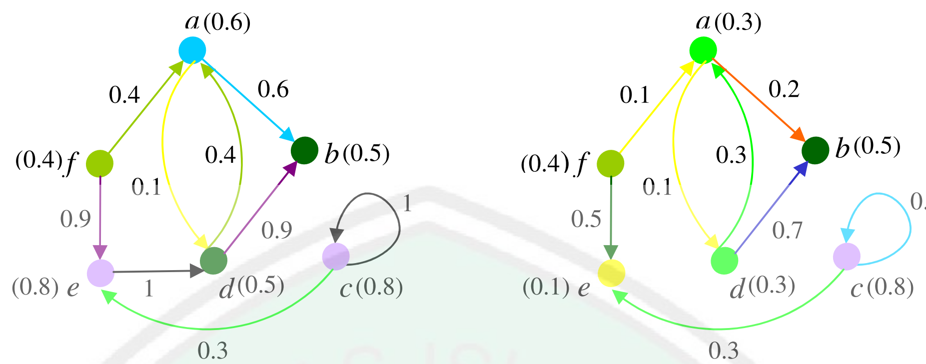


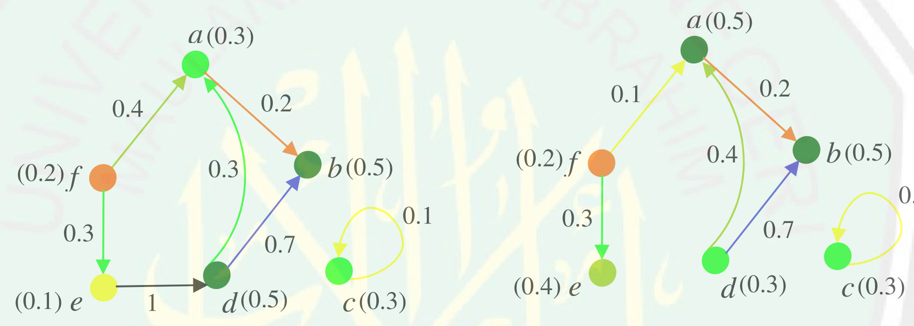
Gambar 3.20. Fuzzy Digraph $\tilde{P}$, $\tilde{Q}$ dan $\tilde{S}$

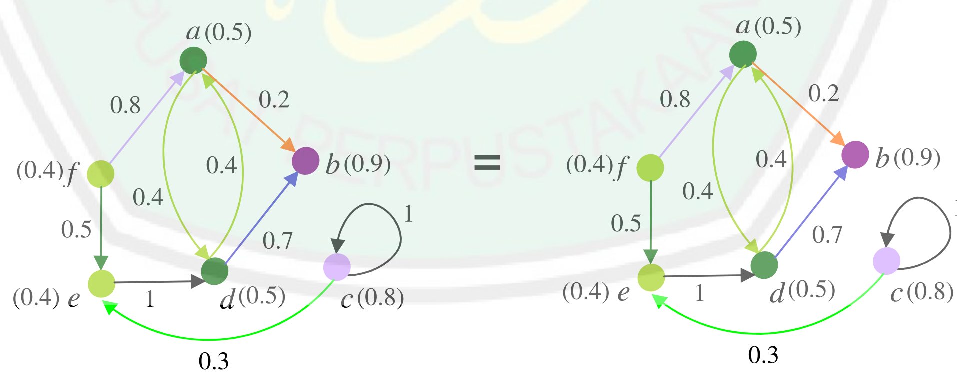
Dari ketiga gambar fuzzy digraph di atas bila dioperasikan dengan operasi $\wedge$ dan $\vee$, maka didapat:






a (0.6)
0.4
0.6
(0.4) f
0.4
b (0.5)
0.1
0.9
0.9
1
(0.8) e
1
d (0.5)
c (0.8)
0.3
a (0.3)
0.1
0.2
(0.4) f
0.3
b (0.5)
0.1
0.5
0.7
0.6
(0.1) e
d (0.3)
c (0.8)
0.3


a (0.3)
0.4
0.2
(0.2) f
0.3
b (0.5)
0.3
0.1
0.7
(0.1) e
1
d (0.5)
c (0.3)
a (0.5)
0.1
0.2
(0.2) f
0.4
b (0.5)
0.3
0.1
0.7
(0.4) e
d (0.3)
c (0.3)


a (0.5)
0.8
0.2
(0.4) f
0.4
b (0.9)
0.4
0.5
1
0.7
(0.4) e
1
d (0.5)
c (0.8)
0.3
=
a (0.5)
0.8
0.2
(0.4) f
0.4
b (0.9)
0.4
0.5
0.7
1
(0.4) e
1
d (0.5)
c (0.8)
0.3

Gambar 3.21. Operasi $\wedge$ dan $\vee$ pada Fuzzy Digraph $\tilde{P}$, $\tilde{Q}$ dan $\tilde{S}$

(3) $\tilde{P}\cdot(\tilde{Q}\oplus\tilde{S})=(\tilde{P}\cdot\tilde{Q})\oplus(\tilde{P}\cdot\tilde{S})$

$$
\begin{aligned}
\tilde{P}\cdot(\tilde{Q}\oplus\tilde{S}) &= (\tilde{A}_1,\tilde{R}_1)\cdot\{(\tilde{A}_2,\tilde{R}_2)\oplus(\tilde{A}_3,\tilde{R}_3)\} \\
&= (\tilde{A}_1,\tilde{R}_1)\cdot\{(\tilde{A}_2\oplus\tilde{A}_3),(\tilde{R}_2\oplus\tilde{R}_3)\} \\
&= (\tilde{A}_1\cdot(\tilde{A}_2\oplus\tilde{A}_3)),\{\tilde{R}_1\cdot(\tilde{R}_2\oplus\tilde{R}_3)\} \\
&= ((\tilde{A}_1\cdot\tilde{A}_2)\oplus(\tilde{A}_1\cdot\tilde{A}_3)),\{(\tilde{R}_1\cdot\tilde{R}_2)\oplus(\tilde{R}_1\cdot\tilde{R}_3)\} \\
&= ((\tilde{A}_1\cdot\tilde{A}_2),(\tilde{R}_1\cdot\tilde{R}_2))\oplus\{(\tilde{A}_1\cdot\tilde{A}_3),(\tilde{R}_1\cdot\tilde{R}_3)\} \\
&= ((\tilde{A}_1,\tilde{R}_1)\cdot(\tilde{A}_2,\tilde{R}_2))\oplus\{(\tilde{A}_1,\tilde{R}_1)\cdot(\tilde{A}_3,\tilde{R}_3)\} \\
&= (\tilde{P}\cdot\tilde{Q})\oplus(\tilde{P}\cdot\tilde{S})
\end{aligned}
$$

Jadi terbukti bahwa $\tilde{P}\cdot(\tilde{Q}\oplus\tilde{S})=(\tilde{P}\cdot\tilde{Q})\oplus(\tilde{P}\cdot\tilde{S})$

(4) $\tilde{P}\oplus(\tilde{Q}\cdot\tilde{S})=(\tilde{P}\oplus\tilde{Q})\cdot(\tilde{P}\oplus\tilde{S})$

$$
\begin{aligned}
\tilde{P}\oplus(\tilde{Q}\cdot\tilde{S}) &= (\tilde{A}_1,\tilde{R}_1)\oplus\{(\tilde{A}_2,\tilde{R}_2)\cdot(\tilde{A}_3,\tilde{R}_3)\} \\
&= (\tilde{A}_1,\tilde{R}_1)\oplus\{(\tilde{A}_2\cdot\tilde{A}_3),(\tilde{R}_2\cdot\tilde{R}_3)\} \\
&= (\tilde{A}_1\cdot(\tilde{A}_2\oplus\tilde{A}_3)),\{\tilde{R}_1\cdot(\tilde{R}_2\oplus\tilde{R}_3)\} \\
&= ((\tilde{A}_1\oplus\tilde{A}_2)\cdot(\tilde{A}_1\oplus\tilde{A}_3)),\{(\tilde{R}_1\oplus\tilde{R}_2)\cdot(\tilde{R}_1\oplus\tilde{R}_3)\} \\
&= ((\tilde{A}_1\oplus\tilde{A}_2),(\tilde{R}_1\oplus\tilde{R}_2))\cdot\{(\tilde{A}_1\oplus\tilde{A}_3),(\tilde{R}_1\oplus\tilde{R}_3)\} \\
&= ((\tilde{A}_1,\tilde{R}_1)\oplus(\tilde{A}_2,\tilde{R}_2))\cdot\{(\tilde{A}_1,\tilde{R}_1)\oplus(\tilde{A}_3,\tilde{R}_3)\} \\
&= (\tilde{P}\oplus\tilde{Q})\cdot(\tilde{P}\oplus\tilde{S})
\end{aligned}
$$

Jadi terbukti bahwa $\tilde{P} \oplus \left(\tilde{Q} \cdot \tilde{S}\right) = \left(\tilde{P} \oplus \tilde{Q}\right) \cdot \left(\tilde{P} \oplus \tilde{S}\right)$

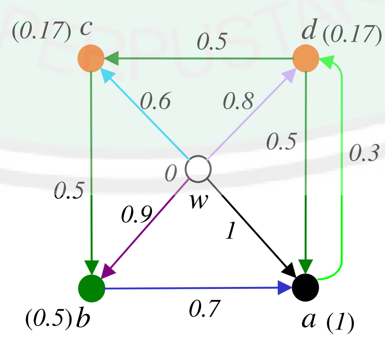
Dalam kehidupan sehari-hari *fuzzy digraph* dapat dihubungkan dengan ilmu waris (*faraidh*). Ilmu waris adalah ilmu tentang warisan. Ilmu ini juga disebut "*ilmu faraidh*'', yaitu ilmu yang membahas tentang pengaturan pembagian harta warisan bagi ahli waris menurut bagian yang telah ditentukan dalam Al-Qur'an. Salah satu surat yang menjelaskan tentang ilmu waris dan pembagiannya adalah QS. An-Nisaa:11-12,

يُوصِيكُمُ ٱللَّهُ فِيٓ أَوۡلَٰدِكُمۡۖ لِلذَّكَرِ مِثۡلُ حَظِّ ٱلۡأُنثَيَيۡنِۚ فَإِن كُنَّ نِسَآءٗ فَوۡقَ ٱثۡنَتَيۡنِ
فَلَهُنَّ ثُلُثَا مَا تَرَكَۖ وَإِن كَانَتۡ وَٰحِدَةٗ فَلَهَا ٱلنِّصۡفُۚ وَلِأَبَوَيۡهِ لِكُلِّ وَٰحِدٖ مِّنۡهُمَا
ٱلسُّدُسُ مِمَّا تَرَكَ إِن كَانَ لَهُۥ وَلَدٞۚ فَإِن لَّمۡ يَكُن لَّهُۥ وَلَدٞ وَوَرِثَهُۥٓ أَبَوَاهُ فَلِأُمِّهِ ٱلثُّلُثُۚ
فَإِن كَانَ لَهُۥٓ إِخۡوَةٞ فَلِأُمِّهِ ٱلسُّدُسُۚ مِنۢ بَعۡدِ وَصِيَّةٖ يُوصِي بِهَآ أَوۡ دَيۡنٍۗ ءَابَآؤُكُمۡ
وَأَبۡنَآؤُكُمۡ لَا تَدۡرُونَ أَيُّهُمۡ أَقۡرَبُ لَكُمۡ نَفۡعٗاۚ فَرِيضَةٗ مِّنَ ٱللَّهِۗ إِنَّ ٱللَّهَ كَانَ عَلِيمًا
حَكِيمٗا ١١

Artinya: 11. Allah mensyari'atkan bagimu tentang (pembagian pusaka untuk) anak-anakmu. yaitu : bahagian seorang anak lelaki sama dengan bagahian dua orang anak perempuan, dan jika anak itu semuanya perempuan lebih dari dua, Maka bagi mereka dua pertiga dari harta yang ditinggalkan; jika anak perempuan itu seorang saja, Maka ia memperoleh separo harta. dan untuk dua orang ibu-bapa, bagi masing-masingnya seperenam dari harta yang ditinggalkan, jika yang meninggal itu mempunyai anak; jika orang yang meninggal tidak mempunyai anak dan ia diwarisi oleh ibu-bapanya (saja), Maka ibunya mendapat sepertiga; jika yang meninggal itu mempunyai beberapa saudara, Maka ibunya mendapat seperenam. (Pembagian-pembagian tersebut di atas) sesudah dipenuhi wasiat yang ia buat atau (dan) sesudah dibayar hutangnya. (Tentang) orang tuamu dan anak-anakmu, kamu tidak mengetahui siapa di antara mereka yang lebih dekat (banyak) *manfaatnya bagimu. Ini adalah ketetapan dari Allah. Sesungguhnya Allah Maha mengetahui lagi Maha Bijaksana.*

Berdasarkan ayat 11 surat An-Nisaa diatas Allah memerintahkan kita untuk berbuat adil, karena pada masa jahiliyah, orang-orang memberikan seluruh harta warisan hanya untuk laki-laki, tidak untuk perempuan. Maka Allah memerintahkan kesamaan diantara mereka dalam hal sama-sama menjadi ahli waris, dan membedakan bagian yang diperoleh diantara dua jenis tersebut, dimana bagian laki-laki sama dengan dua bagian perempuan. Hal itu disebabkan karena laki-laki bertanggung jawab atas nafkah, kebutuhan, usaha dan resiko tanggung jawab (Tafsir Ibnu Katsir, 2006: 439).

Dalam teori *fuzzy digraph*, harta warisan yang akan dibagikan kepada ahli waris dapat diartikan sebagai derajat keanggotaan titik yang akan menentukan seberapa besar bagian yang akan diperoleh oleh ahli waris. Sedangkan derajat keanggotaan garis kita tentukan sebagai tingkatan pertalian kekerabatan dengan pewaris. Sehingga dari ayat di atas dapat digambarkan fuzzy digrafnya sebagai berikut:



Gambar 3.22. Representasi Surat An-Nisa Ayat 11

Keterangan:
Titik *w* : Pewaris (orang yang meninggal).

Titik a : Anak laki-laki dari w.
Titik b : Anak perempuan dari w
Titik c : Ibu dari w.
Titik d : Ayah dari w

Dari gambar tersebut dijelaskan seorang pewaris (w) meninggalkan beberapa ahli waris yaitu anak laki-laki (a), anak perempuan (b), ibu (c), dan ayah (d). Sebagaimana yang dijelaskan pada surat An-nisaa' ayat 11 di atas bagian untuk seorang anak laki-laki dua kali dari bagian anak perempuan, sedangkan bagian ayah dan ibu, jika pewaris memiliki anak maka akan mendapatkan bagian seperenam, jika pewaris tidak memliki anak maka ibu memiliki bagian sepertiga.

Derajat-derajat keanggotaan titik pada gambar di atas menggambarkan bagian harta waris yang didapat masing-masing ahli waris, sedangkan derajat keanggotaan garis menggambarkan ahli waris yang harus lebih diutamakan, sedangkan ayah mendapatkan ashabah untuk tiap pembagian harta warisan.

Seorang pewaris mewariskan hartanya yang utama diperuntukkan kepada anak laki-laki dan anak perempuannya yaitu dari titik (w,a) dan (w,b) di mana derajat keanggotaan titik $a = 2 \cdot b$, dan yang ditunjukkan pula dengan garis yang berwarna lebih gelap. Kemudian harta warisan yang dibagikan kepada ayah dan ibu dari pewaris ditunjukkan dengan garis (w,c) dan (w,d) dan digambarkan oleh garis yang berwarna lebih terang. Jika salah satu ahli waris tidak ada maka akan beralih ke ahli waris yang lainnya seperti yang ditunjukkan oleh arah panah dan sesuai dengan tingkatan derajat keanggotaan setiap garis.

BAB IV

PENUTUP

4.1. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang penulis telah uraikan pada bab III, maka dapat diambil kesimpulan bahwa:

a. *Fuzzy digraph* ini diartikan sebagai suatu himpunan fuzzy yang digambarkan dalam sebuah digraph, di mana setiap titik dan garis dari digraph tersebut memiliki nilai fuzzy (derajat keanggotaan) yang terletak pada interval [0,1]. Untuk penggambaran *fuzzy digraph* dalam skripsi ini penulis menggunakan perbedaan warna untuk menunjukkan perbedaan derajat keanggotaan.

b. Dari hasil pembahasan bab III, ternyata setiap teorema yang terdapat pada teori fuzzy dan digraph berlaku pada teori *fuzzy digraph*.

4.2. Saran

Pembahasan pada skripsi ini hanya difokuskan pada pembahasan teori *fuzzy digraph* dan *fuzzy subdigraph* serta teorema-teorema aljabar dari *fuzzy digraph*. Maka untuk penulisan skripsi selanjutnya, penulis menyarankan untuk mengkaji masalah komposisi dari *fuzzy digraph*, komposisi dari dua *fuzzy digraph* beserta pembuktiannya, dan juga fuzzy yang diperluas dalam *multiobyektif* yang dihubungkan dengan *multidigraph*.

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir. 2007. *Ketika Kiai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press.

Chartrand, Gery and Lesniak, Linda. 1986. *Graphs and Digraphs Second Edition*. California: a Division of Wadsworth, Inc.

Chen, In Chu dan Wu, Sun yen. *Fuzzy Digraph. http: //140.122.100.145/ntnuj/j30/j30.asp?appl=j30-14.pdf*. diakses tanggal 11 maret 2009.

Djauhari, Maman A. 1990. *Himpunan Kabur*. Jakarta: Karunika Universitas Terbuka.

Izutsu, Toshihiko. 1993. *Ethico-Religius Concepts in the Qur'an.* Terjemahan Agus Fahri Husein. Yogyakarta: PT. Tiara Wacana.

Jamilia, Yuli Hikma. 2008. *Cayley Color Graph dari Grup Simetri dan Grup Dihedral. Skripsi* Tidak Diterbitkan. Malang: Jurusan Matematika UIN Malang.

Klir, G.J., and Yuan, B.1995. *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs NJ.

Munawaroh, Siti. 2007. *Graf Fuzzy. Skripsi* Tidak Diterbitkan. Malang: Jurusan Matematika UIN Malang.

Purwanto, 1998. *Matematika Diskrit*. Malang: IKIP Malang.

Rofiq, Ahmad. 2002. *Fiqh Mawaris edisi revisi.* Jakarta: PT. Raja Grafindo Persada

Satoh, Akira , Yamashita, H., & Suda, H. *Fuzzy Graf Modelling and Its Analysis System. http: //www.mssanz.org.au/MODSIM97/Vol%202/**Satoh**.pdf*. Diakses tanggal 13 Desember 2008.

Setiadji. 2009. *Himpunan & Logika Samar Serta Aplikasinya.* Yogyakarta: Graha Ilmu.

Siang, Jong Jek. 2004. *Matematika Diskrit dan aplikasinya pada ilmu computer*. Yogyakarta: Andi.

Sulistyowati, Anita. 2008. *Sistem Informasi Jurusan Matematika Berbasis Fuzzy Database Model Tahani. Skripsi* Tidak Diterbitkan. Malang: Jurusan Matematika UIN Malang.

Thalib, Sajuti. 2002. *Hukum Kewarisan Islam di Indonesia.* Jakarta: Sinar Grafika.

Wilson, Robin J dan Watkins, John J. 1990. *Graph and introductory approach.* Terjemahan Dra.Theresia M.H Tirta. Surabaya: University Press IKIP.

Zadeh, L.A. dan Bellman, R.E. 1970. *Decision-Making in a Fuzzy Environment.* University of California for NASA. *http: //www.imamu.edu.sa/.../**Decision Making**%20In%20**Fuzzy**%20**Environment**.pdf*. Diakses tanggal 22 April 2009

Fajar. 2008. *Matematika.* *http://www.indoskripsi.com/makalah matematika.html*. 2 januari 2009.

DEPARTEMEN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN)
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang (0341)551345
Fax. (0341)572533

BUKTI KONSULTASI

Nama : **Rusdiana Autar**

Nim : **05510031**

Jurusan : **Matematika**

Dosen Pembimbing : **I. Evawati Alisah, M.Pd**

II . Munirul Abidin, M.Ag

Judul skripsi : **Kajian tentang *Fuzzy Digraph***

No	Tanggal	Hal yang Dikonsultasikan	Tanda Tangan	
1	20 November 2008	Proposal	1.	
2	14 Januari 2009	Konsultasi BAB I		2.
3	26 Januari 2009	Konsultasi BAB I, II	3.	
4	11 Februari 2009	Revisi BAB I, II		4.
5	19 Maret 2009	Konsultasi BAB III	5.	
6	14 April 2009	Revisi BAB III		6.
7	22 Mei 2009	Revisi BAB III	7.	
8	23 Mei 2009	Konsultasi Keagamaan		8.
9	22 Juli 2009	Konsultasi BAB IV	9.	
10	23 Juli 2009	Revisi Keagamaan		10
11	23 Juli 2009	ACC Keagamaan	11	
12	25 Juli 2009	Revisi Keseluruhan		12
13	25 Juli 2009	ACC Keseluruhan	13.	

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M.Si
NIP. 150 318 321