APLIKASI TRANSFORMASI SCHWARZ-CHRISTOFFEL PADA SUMBU X DI BIDANG-Z

SKRIPSI

oleh:
KURNIATI
NIM. 06510058

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2011

APLIKASI TRANSFORMASI SCHWARZ-CHRISTOFFEL PADA SUMBU X DI BIDANG-Z

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

oleh:
KURNIATI
NIM. 06510058

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2011

APLIKASI TRANSFORMASI SCHWARZ-CHRISTOFFEL PADA SUMBU X DI BIDANG-Z

SKRIPSI

oleh:
KURNIATI
NIM. 06510058

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal: 20 Agustus 2011

Pembimbing I,

Hairur Rahman, S. Pd, M. Si
NIP. 19800429 200604 1 003

Pembimbing II,

Abdul Aziz, M. Si
NIP. 19760318 200604 1 002

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M. Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

APLIKASI TRANSFORMASI SCHWARZ-CHRISTOFFEL PADA SUMBU X DI BIDANG-Z

SKRIPSI

oleh:
KURNIATI
NIM. 06510058

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal: 12 September 2011

Susunan Dewan Penguji:		Tanda Tangan
1. Penguji Utama	: Usman Pagalay, M. Si NIP. 19650414 200312 1 001	( )
2. Ketua Penguji	: Abdussakir, M. Pd NIP. 19751006 200312 1 001	( )
3. Sekretaris Penguji	: Hairur Rahman, S. Pd, M. Si NIP. 19800429 200604 1 003	( )
4. Anggota Penguji	: Abdul Aziz, M. Si NIP. 19760318 200604 1 002	( )

Mengetahui dan Mengesahkan
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M. Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Kurniati

NIM : 06510058

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambil-alihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 20 Agustus 2011

Yang membuat pernyataan

Kurniati

NIM. 06510058

MOTTO

BERPIKIR DAN BERDZIKIR

Hidup ini adalah keyakinan dan perjuangan, dan perjuangan seseorang mukmin sejati tidak akan berhenti kecuali ketika kedua telapak kakinya telah menginjak pintu surga.

" Dan Percayalah pasti indah pada waktunya"

Persembahan

Untuk:

Ayah dan Bunda tercinta,

Ida Wahyu Ningsih, Ach. Syarifudin, Alfian Maulidi, Ahmad Efendi, Hosnol Hotimah,

Orang yang selalu memberi semangat serta segenap keluarga terkasih,

Sumber semangat dan inspirasi untuk menentukan pilihan hidup.

KATA PENGANTAR

بسم الله الرحمن الرحيم

Syukur alhamdulillah penulis haturkan ke hadirat Allah SWT yang telah memberikan segala kemudahan dan hidayah-Nya sehingga mampu menyelesaikan studi di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang sekaligus menyelesaikan penulisan skripsi dengan judul **“Aplikasi Transformasi Schwarz-Christoffel pada Sumbu x di Bidang-z”** dengan baik. Sholawat dan salam semoga senantiasa tercurahkan kepada junjungan kita semua, Nabi Muhammad SAW.

Pada kesempatan ini, penulis ingin mengucapkan terima kasih yang tak terhingga beriring doa kepada yang terhormat:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU., D.Sc selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang.
3. Abdussakir, M.Pd selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Hairur Rahman, S. Pd, M.Si dan Abdul Aziz, M.Si selaku dosen pembimbing yang senantiasa dengan sabar meluangkan waktu buat kami.
5. Segenap civitas akademika Jurusan Matematika, terutama seluruh dosen-dosen, terima kasih atas segenap ilmu dan bimbingannya.

6. Ayah dan Bunda, terima kasih atas segala pengorbanan tanpa pamrih, dan saudara-saudaraku tercinta serta segenap keluarga yang selalu memberikan doa, semangat dan kasih sayang tanpa batas.
7. Orang yang selalu memberi inspirasi dan semangat tanpa batas.
8. Sahabat-sahabat tercinta yang tinggal di Al-Mumtazah, teman-teman senasib seperjuangan Matematika 2006 terima kasih atas segala kenangan indah yang telah kalian ukir.
9. Semua pihak yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini baik secara lanngsung maupun tidak langsung.

Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan skripsi ini masih terdapat kekurangan dan penulis berharap semoga skripsi ini bisa memberikan manfaat kepada para pembaca khususnya bagi penulis secara pribadi. Amin.

Malang, 20 Agustus 2011

Penulis

DAFTAR ISI

ABSTRAK

Kurniati. 2011. **Aplikasi Transformasi Schwarz-Christoffel pada Sumbu-X di Bidang-Z**. Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: (I) Hairur Rahman, S.Pd, M.Si.
(II) Abdul Aziz, M.Si.

Teori fungsi variabel kompleks merupakan salah satu ilmu matematika yang saat ini mengalami perkembangan yang cukup pesat, dimana banyak buku, paper dan internet mengkaji tentang peubah kompleks. Jika suatu fungsi kompleks w = f(z) didefinisikan pada suatu domain di bidang-Z, maka setiap titik di bidang-Z tersebut berpadanan dengan titik-titik di bidang-W. Dengan demikian, diperoleh suatu pemetaan dari bidang-Z ke bidang-W. Pemetaan w = f(z) dikatakan konformal apabila mempertahankan besar dan arah sudut kecuali pada titik z dengan f(z) = 0. Salah satu bentuk dari fungsi konformal adalah transformasi konformal. Pada transformasi konformal ini, dapat dibangun suatu transformasi yang lebih spesifik, yaitu transformasi Schwarz-Christoffel. Transformasi ini dilandaskan pada transformasi konformal, dengan menentukan suatu fungsi w = f(z) sedemikian hingga memetakan sumbu riil di bidang-Z pada suatu segi-*n* di bidang-W oleh suatu fungsi analitik $w = f[z(t)], f'(z) \neq 0$ dengan t adalah parameter. Dari pemetaan tersebut diperoleh suatu fungsi transformasi yang memetakan setengah bidang atas dengan $y \geq 0$ pada segi-*n*. Pada daerah setengah bidang atas tersebut $f'(z)$ analitik kecuali pada titik-titik $z = x_j$. Titik-titik $x_j, j = 1,2,3,\ldots, n-1$ dan $x_n = \infty$ menjadi titik pada bidang-Z yang dapat ditentukan sembarang dan bayangan dari titik-titik tersebut menjadi titik-titik pada segi banyak. Titik-titik x_j dipilih sedemikian hingga sisi-sisi dari segi banyak tidak berpotongan satu sama lain. Bentuk dari transformasi Schwarz-Christoffel tersebut adalah $w = A\int[(s - x_1)^{k_1}(s - x_2)^{k_2} \ldots (s - x_{n-1})^{k_{n-1}}]\,ds + B$ dengan batas atas z dan batas bawah z_0 dengan A dan B adalah konstanta kompleks yang menentukan ukuran, orientasi (arah) dan posisi segi-*n*.

Kata Kunci: *Fungsi Kompleks, Transformasi Konformal, Transformasi Schwarz-Christoffel.*

ABSTRACT

Kurniati. 2011. **Application of Schwarz-Christoffel transformation of the X-axis in Z-Plane.** Thesis, Department of Mathematics Faculty of Science and Technology State Islamic University of Malang Maulana Malik Ibrahim.
Supervisor: (I) Hairur Rahman, S. Pd, M. Si
(II) Abdul Aziz, M.Sc.

The theory of functions of complex variables is one of the mathematical sciences that are currently experiencing a fairly rapid development, where many books, papers and internet review of complex variables. If a complex function w = f(z) defined on a domain in the Z-plane, then every point in the Z-plane is matched with the points in the W-plane. Thus, obtained by a mapping from Z-plane to W-plane. Mapping w = f(z) is said conformal if maintaining the magnitude and direction angle except at the point z with f(z) = 0. One form of the conformal function is a conformal transformation. In this conformal transformation, a transformation that can be built more specific, the Schwarz-Christoffel transformation. This transformation is based on conformal transformations, by defining a function w = f(z) such that maps the real axis in the Z-plane in a side-n in the plane-W by an analytic function $w = f[z(t)], f'(z) \neq 0$ with t the parameters. From mapping to obtain a transformation function that maps the upper half with $y \geq 0$ the *n*-side. In the area of the upper half is $f'(z)$ analytic except at points $z = x_j$. The points $x_j, j = 1,2,3,\ldots,n-1$ and $x_n = \infty$ the points in the Z-plane can be determined that any and shadows of the points into points on many aspects. The points x_j are chosen so that the sides of many terms do not intersect each other . The form of the Schwarz-Christoffel transformation is $w = A \int [(s - x_1)^{k_1}(s - x_2)^{k_2} \ldots (s - x_{n-1})^{k_{n-1}}]\, ds + B$ with an upper limit z and lower limit z_0 with A and B are complex constants that determine the size, orientation (direction) and the n-side position.

Keywords: *Complex functions, conformal transformations, Schwarz-Christoffel Transformation.*

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Alam semesta memuat bentuk-bentuk dan konsep matematika, meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Alam semesta serta segala isinya diciptakan Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang baik, dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi. Sungguh, tidak salah kiranya jika penulis menyatakan bahwa Allah Maha Matematis. Seperti yang tercantum di firman Allah dalam Al-Qur'an surat Al-Qamar ayat 49 berikut:

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَٰهُ بِقَدَرٍ ﴿٤٩﴾

Artinya: *"Sesungguhnya kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran".*

Demikian juga dalam Al-Qur'an surat Al-Furqan ayat 2:

وَخَلَقَ كُلَّ شَيْءٍ فَقَدَّرَهُۥ تَقْدِيرًا ﴿٢﴾

Artinya: *"....Dan dia Telah menciptakan segala sesuatu, dan dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya".*

Semua yang ada di alam ini ada ukurannya, ada hitung-hitungannya, ada rumusnya, atau ada persamaannya (Abdusysyakir, 2007:79-80).

Al-Qur'an merupakan kitab yang memberikan petunjuk kepada umat manusia. Dalam hubungannya dengan ilmu pengetahuan, Al-Qur'an mendorong umat manusia untuk menggunakan akal pikirannya dalam melakukan observasi alam semesta sehingga diperoleh penemuan baru yang selaras dengan Al-Qur'an (Shihab, 1999).

Allah menurunkan Al-qur'an agar manusia berfikir tentang ciptaan-Nya melalui ayat-ayatNya. Ayat-ayat Al-qur'an bagaikan intan, setiap sudutnya memancarkan cahaya yang berbeda dengan apa yang terpancar dari sudut-sudut lain. Dengan demikian Al-qur'an dapat memberikan bermacam-macam makna tergantung dari sudut pandang kedalaman ilmu pengetahuan seseorang (Wisnu, 2004: 55).

Allah berfirman dalam surat Shaad ayat 29, sebagai berikut:

كِتَٰبٌ أَنزَلْنَٰهُ إِلَيْكَ مُبَٰرَكٌ لِّيَدَّبَّرُوٓا۟ ءَايَٰتِهِۦ وَلِيَتَذَكَّرَ أُو۟لُوا۟ ٱلْأَلْبَٰبِ ﴿٢٩﴾

Artinya: *"Ini adalah sebuah Kitab yang kami turunkan kepadamu penuh dengan berkah supaya mereka memperhatikan ayat-ayatNya dan supaya mendapat pelajaran orang-orang yang mempunyai fikiran".* (QS. Shaad : 29)

Teori fungsi variabel kompleks merupakan salah satu ilmu matematika yang saat ini mengalami perkembangan yang cukup pesat, dimana banyak buku, paper dan internet mengkaji tentang peubah kompleks. Salah satu pokok bahasan yang cukup menarik dalam analisis kompleks adalah pemetaan konformal yaitu suatu transformasi yang mempertahankan besar dan arah sudut kecuali pada titik z dimana $f'(z) = 0$ (Soemantri, 1994). Dari pemetaan yang konformal tersebut dapat dibangun suatu fungsi transformasi yang lebih spesifik, salah satunya adalah Transformasi *Schwarz-Christoffel*.

Oleh karena itu, penulis bermaksud untuk mengkaji cara membangun atau membentuk Transformasi *Schwarz-Christoffel*, yaitu dengan menentukan suatu fungsi $f(z)$ sehingga memetakan sumbu riil di bidang-Z pada suatu segi-n di bidang-W serta memberi contoh dalam penggunaan transformasi tersebut.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam skripsi ini adalah:

1. Bagaimana cara membangun atau mendapatkan Transformasi *Schwarz-Christoffel*?
2. Bagaimana penggunaan Transformasi *Schwarz-Christoffel* untuk memetakan daerah setengah bidang atas pada sumbu X di bidang-Z?

1.3 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan yang ingin dicapai dalam penulisan skripsi ini yaitu:

1. Untuk mengetahui cara membangun atau mendapatkan Transformasi *Schwarz-Christoffel* yang berlandaskan pada transformasi konformal dan memberi contoh penggunaan transformasi tersebut.
2. Untuk mengetahui penggunaan Transformasi *Schwarz-Christoffel* untuk memetakan daerah setengah bidang atas pada sumbu X di bidang-Z.

1.4 Batasan Masalah

Agar penulisan akhir ini lebih terarah dan dapat mencapai tujuan yang diinginkan, maka perlu dilakukan pembatasan masalah. Dalam penelitian ini, penulis membatasi permasalahan pada penggunaan transformasi konformal untuk membentuk Transformasi *Schwarz-Christoffel* dan contoh penggunaannya untuk memetakan setengah bidang atas yang diketahui tiga titik dan empat titik pada sumbu X di bidang-Z dan tidak dibandingkan dengan transformasi variabel kompleks yang lainnya.

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah :

1. Bagi penulis

   Penelitian ini digunakan sebagai penambah wawasan ilmu pengetahuan mengenai teori fungsi variabel kompleks, terutama informasi tentang Transformasi *Schwarz-Christoffel*.

2. Bagi lembaga

   Hasil penelitian ini dapat dijadikan sebagai sarana penunjang pengembangan wawasan keilmuan dalam mata kuliah kompleks dan dapat dijadikan sebagai tambahan kepustakaan, terutama di jurusan matematika.

3. Bagi pengembang ilmu

   Hasil penelitian ini dapat dijadikan bahan penelitian lebih lanjut dan sebagai bahan kajian keilmuan untuk menambah wawasan keilmuan tentang fungsi variabel kompleks.

1.6 Metode Penelitian

Dalam penulisan skripsi ini penulis menggunakan metode kajian pustaka (studi literatur), yaitu penelitian yang bertujuan untuk mengumpulkan data dan informasi dengan bantuan bermacam-macam material yang terdapat di ruang perpustakaan, seperti: buku-buku, jurnal, makalah-makalah, catatan, dan juga internet.

Dalam penulisan ini, langkah-langkah umum yang dilakukan penulis adalah sebagai berikut:

1. Merumuskan masalah dengan membuat rancangan terlebih dahulu mengenai permasalahan yang akan dibahas.
2. Mengumpulkan berbagai literatur yang berhubungan dengan permasalahan yang akan dibahas dengan cara membaca dan memahami literatur-literatur yang berkaitan.
3. Menyelesaikan dan menganalisis permasalahan yang telah diperoleh dengan langkah-langkah sebagai berikut: mendefinisikan, bilangan kompleks, deret laurent, transformasi konformal, untuk selanjutnya mengaplikasikan Transformasi Schwarz-Christoffel pada sumbu X dibidang-Z.
4. Merumuskan kesimpulan dari hasil analisis yang telah dilakukan.

1.7 Sistematika Penulisan

Dalam skripsi ini, sistematika penulisan yang digunakan penulis sebagai berikut:

BAB I. PENDAHULUAN Dalam bab ini dijelaskan latar belakang masalah, pembatasan dan rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian dan sistematika pembahasan.

BAB II. KAJIAN TEORI Dalam bab ini dikemukakan hal-hal yang mendasari dalam teori yang dikaji.

BAB III. PEMBAHASAN Dalam bab ini dipaparkan hasil-hasil kajian dan beberapa landasan ilmu yang terkait.

BAB IV. PENUTUP Dalam bab ini dikemukakan kesimpulan akhir penelitian dan diajukan beberapa saran.

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Bilangan Kompleks

Bilangan kompleks z didefinisikan oleh bilangan yang berbentuk a + bi atau a + ib dengan a dan b bilangan real dan $i^2 = -1$, dimana i disebut satuan imajiner (*imaginary unit*). Z digunakan untuk menyatakan bilangan kompleks, dan huruf x dan y umumnya selalu menyatakan bilangan real. Jika $z = x + iy$ menyatakan sebarang bilangan kompleks, maka bilangan riil x disebut bagian riil dari z atau $x = \text{Re}(z)$ dan bilangan riil y disebut bagian imajiner dari z atau $y = \text{Im}(z)$ (Soemantri, 1994:2).

Kompleks sekawan, atau disingkat kawan dari suatu bilangan kompleks $a + bi$ adalah bilangan $a - bi$. Kompleks sekawan suatu bilangan kompleks z dapat dilambangkan dengan $\bar{z}$ atau z* (Spiegel, 1964:2).

Contoh 2.1

Misal $z = 6 - 2i$, bilangan ini memiliki $\text{Re}(z) = 6$ dan $\text{Im}(z) = -2$ dan sekawannya adalah $\bar{z} = 6 + 2i$.

Bentuk operasi dengan bilangan kompleks dapat dikerjakan seperti pada aljabar bilangan riil dengan menggantikan i^2 dengan -1 bilamana ia muncul (Spiegel, 1964:2).

Misal $z_1 = x_1 + y_1 i$ dan $z_2 = x_2 + y_2 i$.

1. Kesamaan

   z_1 dikatakan sama dengan z_2 jika $x_1 = x_2$ dan $y_1 = y_2$ ditulis $z_1 = z_2$.

2. Penjumlahan

   $$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

3. Pengurangan

   $$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

4. Perkalian

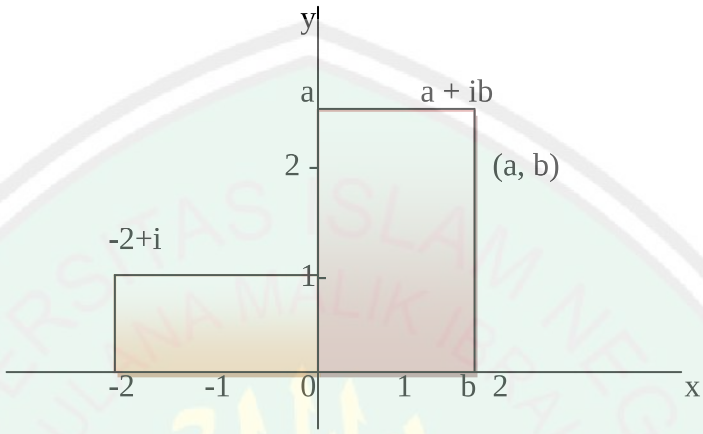
   $$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_2 x_1).$$

5. Pembagian

   $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \quad z_2 \neq 0.$$

2.2 Penyajian Geometris

Himpunan bilangan real (**R**) disajikan secara geometris dengan garis lurus yang dinamakan garis real diwakili oleh tepat satu titik pada garis, dan setiap titik mewakili tepat satu biangan real. Dengan demikian terdapat korespondensi satu-satu antara himpunan bilangan real dan himpunan titik-titik garis real. Suatu bilangan kompleks $x + iy$ dapat kita nyatakan dengan titik (x, y) dari bidang xoy. Bilangan $a + ib$ (dengan a dan b bilangan real) yang dinyatakan oleh titik (a, b) pada bidang xoy. Pada bidang kompleks (Cartesian), sumbu-*X* sebagai sumbu riil dan sumbu-*Y* sebagai sumbu imajiner. Titik yang koordinatnya (x, y) menyatakan bilangan kompleks $z = (x, y) = x + iy$. Pada titik O(0,0) menyatakan bilangan kompleks $0+i0=0$. Jadi, kecuali disajikan oleh titik p(a, b), bilangan kompleks $a+ib$ juga dapat disajikan oleh vektor $o\vec{p}$ di bidang kompleks.

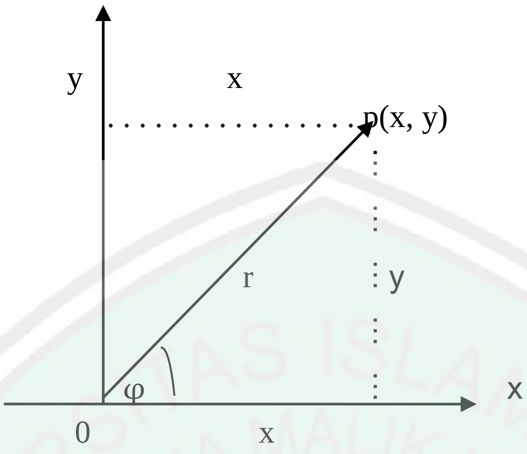


Gambar 2.2.1 Bidang Kompleks

Karena vektor-vektor yang sama besar dan sama arah merupakan vektor yang sama, maka a + ib juga boleh diwakili oleh vektor yang sama dengan vektor $o\vec{p}$ pada bidang kompleks (Soemantri, 1994:14-15).

2.3 Bentuk Kutub

Dalam pelajaran kalkulus telah dikenal hubungan antara koordinat titik p(x, y) dalam koordinat cartesius dan koordinat titik p(r, φ) dalam koordinat kutub: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ dan $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Dengan demikian bentuk kutub bilangan $z = x+iy$ dapat dinyatakan dengan $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ disebut bentuk kutub bilangan kompleks z sedangkan Sudut φ disebut *argumen* dari $z = x+iy$ yang merupakan sudut antara vektor $o\vec{p}$ dengan sumbu-o*x* positif yang diukur dalam radian (Soemantri, 1994:17).



Gambar 2.3 Bilangan Kompleks dalam bentuk koordinat kutub

Pada sub bab sebelumnya telah dibahas mengenai operasi bilangan kompleks, berikut dijelaskan mengenai perkalian dan pembagian bilangan kompleks menggunakan koordinat kutub.

Jika diberikan $z_1 = r(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ dan $z_2 = r(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$, maka berlaku:

Perkalian dua bilangan kompleks,

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 \left[\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)\right] \\ &= r_1 r_2 \left[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right] \end{aligned}$$

$$\arg(z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2 = \arg z_1 + \arg z_2 .$$

Pembagian dua bilangan kompleks,

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)}\,\frac{(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)}{(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)} \\ &= \frac{r_1}{r_2}\left[\frac{(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2)}{\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2}\right] \\ &= \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\right], \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh

$$\arg\frac{z_1}{z_2} = \theta_1 - \theta_2 = \arg z_1 - \arg z_2 .$$

Teorema 2.3.1 Teorema De'Movrie (Spiegel, 1964:5)

Jika

$$z_1 = r(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$$
$$z_2 = r(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$z_n = r(\cos\theta_n + i\sin\theta_n), \qquad n \text{ bilangan asli.}$$

Maka

$$z_1 z_2 \cdots z_n = r_1 r_2 \cdots r_n (\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) + i\sin(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n))$$

Dalam hal khusus, jika $z_1 = z_2 = ... = z_n = z$, maka $z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$.

Lebih khusus lagi jika $r = 1$, maka diperoleh

$z^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = (\cos n\theta + i\sin n\theta)$, n bilangan asli.

Teorema tersebut akan dibuktikan menggunakan prinsip induksi matematika, sebagai berikut. Andaikan hasil tersebut benar untuk bilangan bulat positif khusus k, yaitu $(\cos\theta + i\sin\theta)^k = (\cos k\theta + i\sin k\theta)$.

Kemudian kedua ruas dikalikan $\cos\theta + i\sin\theta$, diperoleh

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^k(\cos\theta + i\sin\theta) = (\cos k\theta + i\sin k\theta)\,(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$(\cos k\theta + i\sin k\theta)^{k+1} \qquad = \cos\,(k+1)\theta + i\sin\,(k+1)\theta.$$

Jadi jika hasil tersebut benar untuk $n = k$, maka ia benar pula untuk $n = k + 1$.

Oleh karena hasil tersebut jelas benar untuk $n = 1$, maka ia harus benar untuk $n = 1 + 1 = 2$, $n = 2 + 1 = 3$ dan seterusnya sehingga benar untuk semua bilangan bulat positif.

Jadi, teorema De-Movrie tersebut terbukti.

2.4 Fungsi Variabel Kompleks

Suatu subhimpunan domain (***D***) dibidang kompleks ($\mathcal{C}$) dan suatu fungsi f dimana dari D ke dalam ($\mathcal{C}$). Jika z menyatakan sebarang titik di dalam D, maka z menyatakan bilangan kompleks dalam D, sehingga z dinamakan suatu variable kompleks. Untuk suatu nilai fungsi $f(z)$ yang terdapat $z \in D$ maka disebut bilangan kompleks. Fungsi yang bernilaikan bilangan kompleks disebut fungsi kompleks. Jadi fungsi f ini adalah fungsi kompleks dari variable kompleks dengan daerah definisi D. Nilai fungsi kompleks kerap dinyatakan dengan huruf w, sehingga fungsi f dengan domain definisi D ditulis sebagai berikut:

W = f(z) dengan z ∈ D.

Suatu definisi fungsi biasanya diberikan dengan disertakan domain yang secara eksplisit. Akan tetapi, jika suatu fungsi diberikan tanpa disertakan domain, maka definisi domain selalu disebut himpunan yang paling besar yang dapat dijadikan definisi fungsi domain tersebut. Misalkan diberikan fungsi $w = \frac{1}{z}$, maka definisi domainnya adalah $\mathbb{C}$ - {0} yaitu seluruh bidang kompleks $\mathbb{C}$ kecuali titik 0, sebab untuk z = 0 fungsi tidak didefinisikan.

Pada intinya, fungsi variabel kompleks adalah aturan yang mengatur dari bilangan kompleks ke bidang kompleks. Sehingga fungsi variabel kompleks memiliki domain bilangan kompleks $(x + yi)$ dan kodomain berupa bidang kompleks.

Telah kita ketahui bahwa setiap bilangan kompleks mempunyai bagian riil dan imajiner. Anggap bahwa w = u + iv dengan u ∈ ℝ dan v ∈ ℝ adalah nilai fungsi f di z = x + iy, jadi u + iv = f(x + iy). Tampak bahwa hubungan ruas kanan adalah fungsi variabel riil x dan y, dengan demikian u dan v diruas kiri. Jadi dengan demikian diperolehlah suatu pernyataan sebagai berikut (Soemantri, 1994:44-45):

"Jika diberikan suatu fungsi bernilai kompleks dari variabel kompleks f(z), maka f(z) = u(x, y) + iv(x, y) dengan u dan v adalah fungsi bernilai rill dari variabel riil x dan y. Fungsi u(x, y) dan v(x, y) berturut-turut dinamakan bagian riil dan bagian imajiner dari fungsi f(z)".

2.5 Aturan Pendiferensialan Kompleks

Suatu fungsi f(z) dapat didiferensialkan (*differentiable*) di z_0, dan limitnya dinamakan turunan f di z_0 (*derivative of f at* z_0) dan dituliskan $f'(z_0)$ atau $w'(z_0)$ (Paliouras, 1987:44). Suatu fungsi $f(z)$ dikatakan mempunyai *limit* l untuk z mendekati z_0, dituliskan $\lim_{z \to z_0} f(z) = l$ jika diberikan sebarang $\varepsilon > 0$ maka terdapat $\delta > 0$ sehingga $|f(z) - l| < \varepsilon$ bilamana $0 < |z - z_0| < \delta$.

Jika $f(z)$ fungsi tunggal dalam suatu daerah dari bidang-Z, maka turunan dari $f(z)$ yang dinyatakan dengan $f'(z)$ adalah $f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$, asalkan limitnya ada.

Suatu fungsi f dikatakan kontinu pada suatu titik z_0 jika tiga kondisi dibawah ini terpenuhi

1. $\lim_{z \to z_0} f(z) = l$ harus ada
2. $f(z_0)$ harus ada, yaitu $f(z)$ terdefinisi di z_0
3. $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

Suatu fungsi $f(z)$ dikatakan kontinu dalam suatu daerah jika $f(z)$ kontinu disetiap titik pada daerah tersebut. Jika limitnya ada untuk semua z dalam sebuah R, maka $f(z)$ dinamakan analitik dalam R. Supaya analitik di R, maka $f(z)$ harus berharga tunggal dan kontinu.

2.6 Integral Kompleks

Integral kompleks didefinisikan sama dengan definisi integral fungsi nyata, dengan mengganti interval integrasi dengan suatu lintasan. Kita ingat kembali bahwa integral fungsi nyata f(x) pada interval a ≤ x ≤ b didefinisikan sebagai $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\mu \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)(\Delta x)_k$ (Paliouras, 1987:146). Misalkan banyaknya pembagian n membesar sehingga panjang busur yang terbesar $|\Delta z_k|$ mendekati nol, maka jumlah s_n mendekati suatu limit yang tidak bergantung pada cara pembagian busurnya dan kita menyatakan limit. Integral fungsi $f(z)$ sepanjang C didefinisikan dengan $\int_C f(z)dz = \int_{t=a}^{b} f(z)dz$, dengan C adalah lintasan integrasi.

Jika $f(z)$ bernilai tunggal dan kontinu di dalam sebuah daerah R maka integral dari $f(z)$ sepanjang lintasan C dalam R dari titik z_1 ke titik z_2 dengan $z_1 = x_1 + iy_1$ dan $z_2 = x_2 + iy_2$ adalah

$$\int_C f(z)dz = \int_C (u+iv)(dx+idy)$$

$$= \int_C udx + i^2 vdy + i\int_C vdx + udy$$

$$= \int_C udx - vdy + i\int_C vdx + udy.$$

(Spiegel, 1964:104)

2.7 Deret Taylor

Suatu fungsi $f(z)$ analitik di dalam dan pada suatu kurva tertutup sederhana C, jika a dan $a + h$ adalah dua titik dalam C, maka

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{f^n(a)}{n!}(z-a)^n + \cdots.$$

Atau dengan menuliskan z = a + h, h = z – a,

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \ldots + \frac{f^n(a)}{n!}(z-a)^n + \cdots.$$

(Spiegel, 1964:156).

Berikut ini merupakan teorema dasar deret *Taylor* beserta buktinya.

Teorema 2.7.1 Deret *Taylor* (Roziana, 2008:23 – 25)

Andaikan $f(z)$ merupakan suatu fungsi sedemikian hingga $f(z)$ dan semua turunan-turunannya ada dalam suatu selang $(z_0 - r, z_0 + r)$. Maka fungsi ini dapat diuraikan menjadi deret *Taylor* dalam rumusan sebagai berikut:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n$$

untuk semua *z* sehingga $|z-z_0|<r$ jika dan hanya jika

$$\lim_{n\to\infty} R_n(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(z-z_0)^{n+1} = 0$$

dengan setiap *c* ada diantara *z* dan z_0.

Bukti:

Di dalam selang $(z_0 - r, z_0 + r)$, fungsi $f(z)$ memenuhi hipotesis sebagai berikut:

$$f(z) = P_n(z) + R_n(z)$$

dengan $P_n(z)$ adalah polinom *Taylor* berderajat *n* dari fungsi $f(z)$ dan $R_n(z)$ adalah suku sisa pemotongan yang dinyatakan sebagai

$$R_n(z) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(z-z_0)^{n+1}$$

dengan setiap *c* ada diantara *z* dan z_0.

$P_n(z)$ adalah jumlah *n* buah suku pertama dari deret *Taylor* fungsi $f(z)$ pada z_0. Jadi, apabila kita buktikan bahwa $\lim_{n\to\infty} P_n(z)$ ada dan sama dengan $f(z)$ jika dan hanya jika $\lim_{n\to\infty} R_n(z) = 0$, maka teorema ini akan terbukti. Karena

$$P_n(z) = f(z) - R_n(z),$$

jika $\lim_{n\to\infty} R_n(z) = 0$, maka

$$\lim_{n\to\infty} P_n(z) = f(z) - \lim_{n\to\infty} R_n(z)$$

$$= f(z) - 0$$

$= f(z).$

Selanjutnya, dari hipotesis bahwa $\lim_{n\to\infty} P_n(z) = f(z)$ kita akan membuktikan bahwa $\lim_{n\to\infty} R_n(z) = 0$. Karena

$R_n(z) = f(z) - P_n(z)$,

sehingga

$$\lim_{n\to\infty} R_n(z) = f(z) - \lim_{n\to\infty} P_n(z)$$

$$= f(z) - f(z)$$

$$= 0.$$

Dengan demikian, maka teorema tersebut terbukti.

Menurut Munir (2006: 20), karena suku-suku deret *Taylor* tak hingga banyaknya, maka untuk alasan praktis deret *Taylor* dipotong sampai suku orde tertentu. Deret *Taylor* yang dipotong sampai suku orde ke-*n* dinamakan deret *Taylor* terpotong dan dinyatakan oleh

$$f(z) \approx f(z_0) + \frac{(z-z_0)}{1!} f'(z_0) + \cdots + \frac{(z-z_0)^n}{n!} f^n(z_0) + R_n(z)$$

dimana

$$R_n(z) = \frac{(z-z_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c), \qquad z_0 < c < z$$

disebut sisa suku pemotongan (residu).

Dari persamaan di atas, maka deret *Taylor* yang hanya memperhitungkan satu suku pertama di ruas kanan akan mempunyai bentuk umum sebagai berikut:

$$f(z_1) \approx f(z_0)$$

Bentuk tersebut dinamakan sebagai perkiraan orde nol. Perkiraan tersebut adalah benar jika fungsi yang diperkirakan adalah konstan. Jika fungsi yang diperkirakan tidak konstan, maka harus dipertimbangkan suku-suku berikutnya dari deret *Taylor*.

Bentuk deret *Taylor* yang memperhitungkan dua suku pertama atau disebut deret *Taylor* orde satu ditulis sebagai berikut:

$$f(z_1) \approx f(z_0) + \frac{(z - z_0)}{1!} f'(z_0)$$

Bentuk tersebut merupakan suatu persamaan garis lurus (persamaan linier). Dengan cara yang sama, maka deret *Taylor* yang memperhitungkan tiga suku pertama atau disebut deret *Taylor* orde dua dapat dituliskan dalam bentuk berikut:

$$f(z_1) \approx f(z_0) + \frac{(z - z_0)}{1!} f'(z_0) + \frac{(z - z_0)^2}{2!} f''(z_0).$$

Berikut ini diberikan contoh ekspansi suatu fungsi ke dalam deret *Taylor*.

Contoh 2.7.2

Tentukan ekspansi deret *Taylor* untuk $f(z) = \frac{1}{z-1}$ dalam suatu kitar titik $z_0 = 3$.

Jawab:

Fungsi $f(z)$ analitik kecuali di $z = 1$. Radius kekonvergenan deret *Taylor* dalam pangkat $(z-3)$ adalah $R = 2$. Untuk $|z-3| < 2$, maka dalam domain ini berlaku bahwa $\left|\frac{z-3}{2} < 1\right|$. Sehingga ekspansi deret *Taylor*nya adalah

$$f(3) = f(3) + \frac{f'(3)}{1!}(z-3) + \frac{f''(3)}{2!}(z-3)^2 + \cdots$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(z-3) + \frac{1}{8}(z-3)^2 + \cdots$$

2.8 Deret Laurent

Penguraian suatu fungsi $f(z)$ ke dalam deret *Taylor* menyatakan fungsi itu di dalam lingkaran konvergensinya, tetapi yang hampir selalu hanya merupakan bagian daerah analitis f. Deret *Laurent* itu sendiri adalah bentuk umum deret *Taylor*, yang di dalamnya memuat bentuk (z - c) berpangkat bilangan negatif ditambah dengan bentuk (z - c) berpangkat bilangan bulat positif (berhingga atau takberhingga). Kita akan melihat juga bahwa deret *Laurent* suatu fungsi $f(z)$ konvergen, pada umumnya, di dalam anulus melingkar $r < |z - c| < \rho$ (Paliouras, 1987: 244).

Fungsi yang tidak analitik di z_0 tidak mungkin diekspansi ke dalam deret *Taylor* dalam pangkat $(z - z_0)$. Namun, fungsi ini mungkin dapat diekspansi ke dalam deret dengan pangkat bulat (negatif, nol, atau positif) dari $(z - z_0)$.

Definisi 2.8.1 Deret Laurent

Jika $f(z)$ suatu fungsi yang tidak analitik di z_0 tetapi analitik di tiap-tiap titik lain di dalam dan pada sebuah lingkaran ***C*** yang berpusat di z_0, maka $(z - z_0)^n$ dari $f(z)$ analitik disemua titik di dalam dan pada ***C*** dan mempunyai deret *Taylor* disekitar z_0 sehingga

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \frac{a_{-n+1}}{(z-z_0)^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots$$

dinamakan deret *Laurent* untuk $f(z)$ (Spiegel, 1999:142).

Menurut Soemantri (1994: 180), secara lebih sederhana bentuk tersebut dapat dinyatakan sebagai

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}.$$

Contoh 1

Tentukan $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)}$ dalam suatu deret *Laurent* yang berlaku untuk, 1 < |*z*| < 3.

Penyelesaian:

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+3}\right)$$

Jika |*z*| > 1, maka

$$\frac{1}{2(z+1)} = \frac{1}{2z(1+1/z)} = \frac{1}{2z}\left(1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} + \dots\right) = \frac{1}{2z} - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{2z^3} - \frac{1}{2z^4} + \dots$$

Jika |*z*| <3, maka

$$\frac{1}{2(z+3)} = \frac{1}{6(1+3)} = \frac{1}{6}\left(1 - \frac{z}{3} + \frac{z^2}{9} - \frac{z^3}{27} + \dots\right) = \frac{1}{6} - \frac{z}{18} + \frac{z^2}{54} - \frac{z^3}{162} + \dots$$

Maka deret *Laurent* untuk |*z*| > 1 dan |*z*| < 3, yaitu 1 < |*z*| < 3, adalah

$$= -\frac{1}{2z^4} + \frac{1}{2z^3} - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{2z} - \frac{1}{6} + \frac{z}{18} - \frac{z^2}{54} + \frac{z^3}{162} - \dots.$$

2.9 Kajian Keislaman tentang Fungsi dan Deret Pangkat Tak Hingga

Secara umum beberapa konsep dari disiplin ilmu telah dijelaskan dalam Al-Qur'an, salah satunya adalah matematika. Menurut Afzalur Rahman (2007: 111), sumber kajian-kajian matematika, sebagaimana sumber ilmu pengetahuan lainnya dalam Islam adalah konsep *tauhid* yaitu Keesaan Allah.

Salah satu konsep matematika yang dapat diambil dari ayat al-Qur'an adalah tentang perbandingan. Dari konsep perbandingan inilah, kita bisa membentuk suatu persamaan fungsi. Konsep perbandingan ini misalnya dijelaskan dalam al-Qur'an surat al-Anfaal ayat 65 – 66 sebagai berikut:

يَٰٓأَيُّهَا ٱلنَّبِيُّ حَرِّضِ ٱلۡمُؤۡمِنِينَ عَلَى ٱلۡقِتَالِۚ إِن يَكُن مِّنكُمۡ عِشۡرُونَ صَٰبِرُونَ يَغۡلِبُواْ مِاْئَتَيۡنِۚ وَإِن يَكُن
مِّنكُم مِّاْئَةٞ يَغۡلِبُوٓاْ أَلۡفٗا مِّنَ ٱلَّذِينَ كَفَرُواْ بِأَنَّهُمۡ قَوۡمٞ لَّا يَفۡقَهُونَ ٦٥ ٱلۡـَٰٔنَ خَفَّفَ ٱللَّهُ عَنكُمۡ وَعَلِمَ
أَنَّ فِيكُمۡ ضَعۡفٗاۚ فَإِن يَكُن مِّنكُم مِّاْئَةٞ صَابِرَةٞ يَغۡلِبُواْ مِاْئَتَيۡنِۚ وَإِن يَكُن مِّنكُمۡ أَلۡفٞ يَغۡلِبُوٓاْ أَلۡفَيۡنِ بِإِذۡنِ
ٱللَّهِۗ وَٱللَّهُ مَعَ ٱلصَّٰبِرِينَ ٦٦

Artinya: " Hai nabi, kobarkanlah semangat para mukmin untuk berperang. Jika ada dua puluh orang yang sabar diantaramu, niscaya mereka akan dapat mengalahkan dua ratus orang musuh. Dan jika ada seratus orang yang sabar diantaramu, niscaya mereka akan dapat mengalahkan seribu dari pada orang kafir, disebabkan orang-orang kafir itu kaum yang tidak mengerti (65). Sekarang Allah Telah meringankan kepadamu dan dia Telah mengetahui bahwa padamu ada kelemahan. Maka jika ada diantaramu seratus orang yang sabar, niscaya mereka akan dapat mengalahkan dua ratus orang kafir; dan jika diantaramu ada seribu orang (yang sabar), niscaya mereka akan dapat mengalahkan dua ribu orang, dengan seizin Allah. dan Allah beserta orang-orang yang sabar. " (QS. Al-Anfaal: 65 – 66).

Ayat di atas menjelaskan tentang perbandingan banyaknya orang mukmin yang sabar dengan orang kafir. Menurut Abdusysyakir (2006: 85 – 86), pada ayat ke 65, Allah menjelaskan bahwa perbandingan orang mukmin dan orang kafir tersebut adalah 1:10 yaitu

$$\frac{20}{200}=\frac{100}{1000}=\frac{1}{10}.$$

Seandainya, pada ayat ke 65 hanya disebutkan bahwa 20 orang mukmin yang sabar akan mengalahkan 200 orang kafir sehingga perbandingannya dapat dinyatakan sebagai 1:10, maka akan sulit menyatakan perbandingannya untuk 30, 50, atau 100 orang mukmin yang sabar. Namun, al-Qur'an telah mempertegas kembali dengan menyatakan bahwa 100 orang mukmin yang sabar akan mengalahkan 1000 orang kafir. Hal ini menunjukkan bahwa perbandingannya selalu 1:10. Jika x menyatakan banyaknya orang mukmin yang sabar dan y menyatakan banyaknya orang kafir, maka diperoleh rumus perbandingan

$$\frac{x}{y}=\frac{1}{10}.$$

Maka, bisa dibentuk suatu fungsi $f(x)=y$ sehingga

$$f(x)=10x.$$

Dengan cara yang sama, maka berdasarkan ayat 66 diperoleh bahwa

$$\frac{x}{y}=\frac{1}{2} \text{ atau } y=2x.$$

Selain konsep tentang fungsi sebagaimana diuraikan di atas, kita juga bisa menganalogkan bahwa keberadaan Allah apabila ingin dijangkau oleh manusia merupakan sebuah deret tak hingga. Suku-suku dalam deret ini menyatakan setiap perbuatan manusia yang digunakan untuk selalu mendekatkan diri kepada Allah. Dalam konsep matematika, fungsi *f(z)* yang diekspansi dalam suatu deret tak hingga tidak mungkin dapat dihitung secara langsung nilai eksaknya. Oleh karena itu, perlu dilakukan aproksimasi untuk menghampiri nilainya. Begitu pula dengan

Allah swt. Manusia tidak akan bisa mencapai Allah secara mutlak. Manusia memerlukan suatu cara untuk bisa senantiasa mendekatkan diri kepada Allah sebagai upaya untuk mendapatkan rahmat, petunjuk dan mendekati kebenaran keberadaan-Nya. Cara-cara ini dapat dilakukan misalnya dengan melaksanakan ibadah serta memperbanyak berbuat kebajikan. Hal ini sebagaimana dinyatakan dalam al-Qur’an surat al-A’raaf ayat 56 yaitu sebagai berikut:

وَلَا تُفۡسِدُواْ فِي ٱلۡأَرۡضِ بَعۡدَ إِصۡلَٰحِهَا وَٱدۡعُوهُ خَوۡفٗا وَطَمَعًاۚ إِنَّ رَحۡمَتَ ٱللَّهِ قَرِيبٞ مِّنَ ٱلۡمُحۡسِنِينَ ٥٦

Artinya: ”Dan janganlah kamu berbuat kerusakan di muka bumi sesudah (Allah) memperbaikinya dan berdoalah kepada-Nya dengan rasa takut (tidak akan diterima) dan harapan (akan dikabulkan). Sesungguhnya rahmat Allah dekat dengan orang-orang yang berbuat baik”. (Q.S. al-A’raaf: 56).

Dari ayat di atas dapat diambil sebuah nilai penting bahwa dengan memperbanyak berbuat kebaikan maka seseorang akan semakin dekat dengan rahmat Allah. Orang yang dekat dengan rahmat Allah maka dia akan merasakan ketenteraman dalam hatinya. Dia tidak akan pernah merasa sendirian, karena kemanapun kakinya melangkah dia selalu merasa dekat dengan Allah swt.

Selain keberadaan Allah swt, nikmat Allah swt yang telah diberikan kepada hamba-Nya juga dapat dianalogkan sebagai suatu fungsi dalam deret tak hingga karena sesungguhnya manusia tidak akan pernah dapat menghitung nikmat-nikmat tersebut. Hal ini sebagaimana dinyatakan dalam al-Qur’an surat Ibrahim ayat 34 yaitu sebagai berikut:

وَءَاتَىٰكُم مِّن كُلِّ مَا سَأَلۡتُمُوهُۚ وَإِن تَعُدُّواْ نِعۡمَتَ ٱللَّهِ لَا تُحۡصُوهَآۗ إِنَّ ٱلۡإِنسَٰنَ لَظَلُومٞ كَفَّارٞ ٣٤

Artinya: "Dan Dia telah menganugerahkan kepada kamu dari segala apa yang kamu mohonkan kepada-Nya. Dan jika kamu menghitung nikmat Allah, tidaklah dapat kamu menghinggakannya. Sesungguhnya manusia itu sangat zalim dan sangat kafir". (Q.S Ibrahim: 34).

Dalam ayat yang lain yaitu surat an-Nahl ayat 18, Allah swt juga menegaskan bahwa:

وَإِن تَعُدُّواْ نِعۡمَةَ ٱللَّهِ لَا تُحۡصُوهَآۗ إِنَّ ٱللَّهَ لَغَفُورٞ رَّحِيمٞ ١٨

Artinya: "Dan jika kamu hendak menghitung-hitung nikmat Allah, niscaya kamu tak dapat menghinggakannya. Sesungguhnya Allah benar-benar Maha Pengampun lagi Maha Penyayang". (Q.S an-Nahl: 18).

Dari kedua ayat di atas, Allah swt menjelaskan bahwa sesungguhnya nikmat yang telah dilimpahkan kepada hamba-Nya sangatlah banyak dan jika dihitung maka kita tidak bisa menghingganya. Hal ini sesuai dengan pendapat Shihab (2002: 63) bahwa untuk menyebutkan nikmat Allah diperlukan sederetan ungkapan sedangkan untuk menghitungnya merupakan suatu hal yang mustahil.

Perbedaan penutup antara surat Ibrahim ayat 34 dengan surat an-Nahl ayat 18 disebabkan karena konteks yang digunakan. Ayat dalam surat Ibrahim menjelaskan tentang sikap manusia yang durhaka terhadap anugerah Allah. Mereka tidak mensyukurinya karena itu mereka dikecam. Sedangkan dalam surat an-Nahl menjelaskan tentang anugerah Allah dan kemurahan-Nya serta bagaimana Allah menghadapi manusia. Betapapun manusia itu mendurhakai nikmat Allah, namun Allah masih membuka pintu maaf serta tetap mencurahkan rahmat-Nya (Shihab, 2002: 65).

Nikmat-nikmat Allah yang sudah diberikan kepada kita misalnya nikmat bernafas dan menghirup oksigen dengan nyaman tanpa harus membayar, nikmat berupa kesehatan jasmani dan pikiran, nikmat berupa penglihatan yang baik, pendengaran yang baik, hati yang senantiasa masih mengingat-Nya, dan lain sebagainya yang tentu saja kita tidak dapat menyebutkannya satu persatu.

Jika tiap-tiap nikmat Allah yang diberikan kepada hamba-Nya kita anggap sebagai setiap suku dari suatu deret tak hingga, dari nikmat yang terkecil misalnya kita nyatakan sebagai a_0 sampai pada nikmat yang sangat besar kita misalkan sebagai $a_n(z-a)^n$, maka jumlah nikmat-nikmat tersebut dapat kita nyatakan sebagai suatu fungsi dalam deret pangkat tak hingga sebagaimana yang dikenal dalam konsep matematika yaitu sebagai berikut:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n$$

$$=a_0+a_1(z-a)+a_2(z-a)^2+a_3(z-a)^3+\cdots.$$

Semakin banyak kita mengingat nikmat Allah lalu kita mensyukurinya maka sesungguhnya kita akan semakin merasa cukup dengan apa yang kita miliki. Kita akan semakin menyadari bahwa anugerah tersebut adalah titipan dari Allah dan kita harus menggunakannya untuk senantiasa beribadah. Dalam al-Qur'an, Allah swt menjelaskan bahwa Allah akan menambah nikmat-Nya bagi orang-orang yang senantiasa bersyukur. Hal ini sebagaimana dinyatakan dalam surat Ibrahim ayat 7 sebagai berikut:

وَإِذْ تَأَذَّنَ رَبُّكُمْ لَئِن شَكَرْتُمْ لَأَزِيدَنَّكُمْ ۖ وَلَئِن كَفَرْتُمْ إِنَّ عَذَابِي لَشَدِيدٌ ﴿٧﴾

Artinya: "Dan (ingatlah juga), tatkala Tuhanmu memaklumkan: Sesungguhnya jika kamu bersyukur, pasti kami akan menambah (nikmat) kepadamu. Dan jika kamu mengingkari (nikmat-Ku), maka sesungguhnya adzab-Ku sangat pedih". (Q. S Ibrahim: 7).

Bersyukur merupakan salah satu perbuatan baik yang sangat dianjurkan dalam agama Islam. Bahkan di dalam al-Qur'an, Allah berjanji akan menambah nikmat yang diberikan kepada hamba-Nya bagi siapa saja yang bersyukur sebagaimana dinyatakan dalam ayat di atas. Dalam surat al-An'am ayat 160, Allah kembali menegaskan bahwa:

مَن جَآءَ بِٱلۡحَسَنَةِ فَلَهُۥ عَشۡرُ أَمۡثَالِهَاۖ وَمَن جَآءَ بِٱلسَّيِّئَةِ فَلَا يُجۡزَىٰٓ إِلَّا مِثۡلَهَا وَهُمۡ لَا يُظۡلَمُونَ ١٦٠

Artinya: "Barang siapa membawa amal yang baik, maka baginya (pahala) sepuluh kali lipat amalnya. Dan barang siapa yang membawa perbuatan jahat maka dia tidak diberi pembalasan melainkan seimbang dengan kejahatannya, sedang mereka tidak sedikitpun dianiaya (dirugikan)". (Q. S al-An'am: 160).

Dengan demikian, maka jelaslah bahwa manusia harus senantiasa mendekatkan diri kepada Allah swt dengan memperbanyak berbuat kebajikan baik dalam tatanan hubungan secara vertikal dengan Allah maupun hubungan secara horisontal dengan sesama manusia dan lingkungan alam semesta.

2.10 Transformasi Konformal

Jika f fungsi analitik pada domain D dalam bidang-z, c_1 dan c_2, dua kurva mulus dalam D yang berpotongan di $z_0 \in D$ dan nilai $f'(z_0) \neq 0$, maka oleh $w=f(z)$ kedua kurva itu di transformasikan menjadi kurva mulus c'_1 dan c'_2 yang berpotongan pada sudut yang besar dan arahnya sama seperti pada c_1 dan c_2. Karena f mempertahankan besar dan arah sudut di z_0, maka f dinamakan *transformasi konformal* di z_0. Jadi jika f analitik dan $f'(z_0) \neq 0$ di z_0 maka f konformal di z_0. Suatu transformasi dikatakan konformal pada suatu domain jika transformasi itu konformal di setiap titik domain itu (Soemantri, 1994:321-322).

$$\left.\begin{aligned} u &= u(x,y) \\ v &= v(x,y) \end{aligned}\right\}$$

Secara *umum* persamaan tersebut mendefinisikan suatu transformasi atau pemetaan yang mengaitkan titik-titik di dalam bidang-*XY* dan di dalam bidang-*UV*. Persamaan (1) dinamakan persamaan transformasi, jika tiap titik dalam bidang-*UV* dihubungkan tepat satu pada bidang-*XY* dan sebaliknya, maka dapat disebut transformasi atau pemetaan satu ke satu. Oleh karena itu himpunan titik-titik pada bidang-*XY* dipetakan ke dalam himpunan titik di dalam bidang-*UV* dan sebaliknya. Himpunan titik-titik yang dihubungkan dalam dua bidang tersebut sering disebut peta atau bayangan dari satu terhadap yang lainnya (Spiegel, 1964:216).

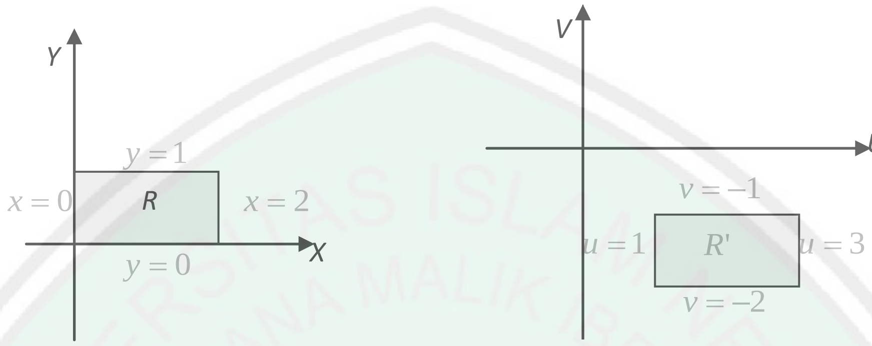
Contoh 2.10.1

Misalkan P adalah daerah persegi panjang di bidang z yang dibatasi oleh $x=0, y=0, x=2, y=1$. Tentukan daerah P' di bidang-W, dimana P dipetakan di bawah transformasi $w = z + (1-2i)$.

Penyelesaian:

Jika $w = z + (1-2i)$, maka $u + iv = x + iy + 1 - 2i = (x+1) + i(y-2)$ dan $u = x+1$, $v = y-2$.

Garis $x = 0$ dipetakan kedalam $u = 1$; $y = 0$ ke dalam $v = -2$; $x = 2$ ke dalam $u = 3$; $y = 1$ ke dalam $v = -1$ (Lihat Gambar 2.3).



Gambar 2.4 Pemetaan $w = z + (1 - 2i)$

Menurut Kreyszig (1993), suatu pemetaan di bidang datar dikatakan mempertahankan sudut atau pemetaan konformal, jika pemetaan ini mempertahankan besar atau arah sudut antara dua kurva terorientasi. Dengan kata lain, bayangan sembarang dua kurva yang berpotongan yang sama seperti dua kurva asalnya, baik besar maupun arahnya.

Gambar 2.5 Transformasi Konformal

Teorema 2.10.2

Jika $f(z)$ analitik dan $f'(z) \neq 0$ dalam suatu daerah R , maka pemetaan $w = f(z)$ konformal disemua titik dari *R*.

Misalkan kurva

$C : z(t) = x(t) + iy(t)$ (1)

di dalam domain fungsi $f(z)$. Akan ditunjukkan bahwa pemetaan $w = f(z)$ memutar garis tangen terhadap *C* disembarang titik z_0 di *C* [asalkan $f'(z_0) \neq 0$] sebesar sudut yang tidak tergantung pada *C*. Dengan demikian, garis tangen terhadap dua kurva yang melalui z_0 diputar sebesar sudut yang sama, sehingga menghasilkan bayangan yang mempunyai sudut sama, baik besar maupun arahnya. Menurut definisi, ini berarti kekonformalan.

Diasumsikan bahwa *C* adalah sebuah kurva mulus; dengan kata lain $z(t)$ di dalam Persamaan (1) terdiferensialkan dan turunannya $z'(t) = \dfrac{dz}{dt}$ kontinu dan tidak pernah sama dengan nol. Ini berarti *C* mempunyai tangen yang tidak berubah-ubah secara kontinu.

Perhatikan C' yang merupakan bayangan *C* oleh $w = f(z)$ (bukan fungsi konstan). C' adalah kurva yang dipresentasikan oleh

$$w(t) = f[z(t)].$$

Titik $z_0 = z(t_0)$ merupakan padanan titik $w(t_0)$ merepresentasikan vektor tangen terhadap C' di titik ini.

Berdasarkan kaidah rantai

$$\frac{dw}{dt} = \frac{df}{dz}\frac{dz}{dt}. \qquad (2)$$

Jadi, jika $f'(z) \neq 0$, maka $w'(t_0) \neq 0$ dan C' mempunyai tangen tunggal di $w(t_0)$. Sudut antara vektor tangen tunggal di $w'(t_0)$ dan sumbu-U positif adalah $\arg w'(t_0)$, yang dapat ditunjukkan berdasarkan bentuk kutub bilangan kompleks. Dari Persamaan (2) diperoleh

$\arg w'(t_0) = \arg f'(z_0) + \arg z'(t_0)$.

Jadi, di bawah pemetaan tersebut, vektor tangen terhadap C di z_0 diputar dengan sudut sebesar $\arg w'(t_0) - \arg z'(t_0) = \arg f'(z_0)$.

yaitu sudut antara kedua vektor tangen terhadap C dan C'. Karena ekspresi di ruas kanan tidak tergantung pada C yang diambil, berarti sudut ini tidak tergantung pada C. Dapat disimpulkan bahwa pemetaan $w = f(z)$ memutar semua kurva yang melalui z_0 sebesar sudut yang sama, yaitu $\arg f'(z_0)$. Dengan demikian bayangan $C_1^{'}$ dan $C_2^{'}$ dari sembarang dua kurva C_1 dan C_2 yang melalui z_0 membuat sudut yang sama dengan sudut antara dua kurva itu sendiri, baik besar maupun arahnya. Ini berimplikasikan kekonformalan $w = f(z)$ di z_0 dan karena z_0 adalah sembarang titik di dalam daerah asal $f(z)$.

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Pemetaan Sumbu Riil pada Suatu Segi-*n*

Pemetaan sumbu riil dari bidang-Z pada suatu segi-*n* di bidang-W, memiliki titik sudut $w_1, w_2, \ldots, w_n$ dengan sudut dalam yang berkaitan berturut-turut adalah $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Misalkan titik-titik $w_1, w_2, \ldots, w_n$ berturut-turut dipetakan kedalam titik-titik $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pada sumbu riil di bidang *Z* (spiegel, 1964:220). Dimana akan diperkenalkan terlebih dahulu sebelum membahas mengenai cara membangun Transformasi *Schwarz-Christoffel* yang berlandaskan pada transformasi konformal.

Suatu transformasi $w = f(z)$ yang dibangun dengan memetakan setiap titik pada sumbu-*X* di bidang-Z pada suatu segi-*n*, dengan $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ adalah titik-titik pada sumbu-*X* dan $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_{n-1} < x_n$, dimana titik-titik pada bidang-Z merupakan domain dari transformasi tersebut. Titik-titik tersebut dipetakan menjadi titik-titik pada segi-*n*, yaitu $w_j = f(x_j)$, $j = 1, 2, \ldots, n-1$ dan $w_n = f(\infty)$ dalam bidang-W. Fungsi *f* dipilih sedemikian hingga $\arg f'(z)$ bernilai konstan yang berlainan pada saat *z* bergerak sepanjang sumbu-*X*.

Jika diberikan *f* sedemikian hingga

$$f'(z) = A(z - x_1)^{k_1}(z - x_2)^{k_2} \ldots (z - x_{n-1})^{k_{n-1}}, \tag{3.1}$$

dengan A adalah suatu konstanta kompleks dan setiap k_j, dengan $j = 1,2,3,\ldots,n-1$ adalah konstanta riil. Karena argumen suatu hasil kali bilangan-bilangan kompleks sama dengan jumlah argumen masing-masing faktornya, maka

$$\arg f'(z) = \arg A - k_1 \arg(z - x_1) - k_2 \arg(z - x_2) - \ldots - k_{n-1} \arg(z - x_{n-1}). \quad (3.2)$$

Perhatikan bidang-Z (Gambar 3.1), bilangan-bilangan riil $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ terletak pada sumbu riil bidang-Z. Jika z adalah suatu bilangan riil, maka bilangan

$$N_j = z - x_j, \quad (3.3)$$

adalah bernilai positif jika z lebih besar dari x_j dan negatif jika z kurang dari x_j.

Jadi

$$\arg(z - x_j) = \begin{cases} 0, \text{ jika } z > x_j \\ \pi, \text{ jika } z < x_j. \end{cases} \quad (3.4)$$

Andaikan z bergerak sepanjang sumbu riil bidang-Z dari kiri ke kanan seperti ditunjukan dalam gambar 3.1.

Jika $z = x$ dan $x < x_1$, maka

$$\arg(z - x_1) = \arg(z - x_2) = \ldots = \arg(z - x_{n-1}) = \pi. \quad (3.5)$$

Jika $z = x$ dan $x_{r-1} < x < x_r$, $j = 1,2,\ldots,r-1,r,r+1,\ldots n-1$,

misalkan

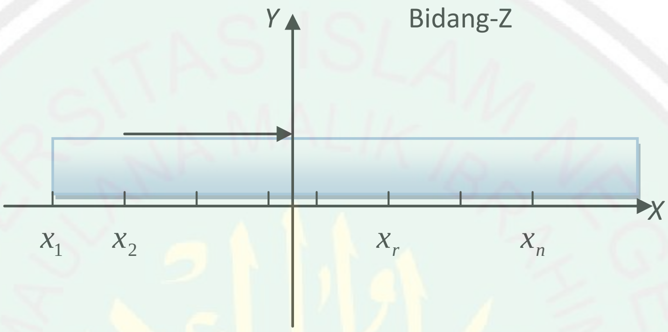
$$\phi_{r-1} = \arg f'(z), \quad (3.6)$$

maka menurut Persamaan (3.2) dan (3.4) berlaku

$$\begin{aligned} \arg f'(z) &= \arg A - k_1 \arg(z - x_1) - k_2 \arg(z - x_2) - \cdots - k_{n-1} \arg(z - x_{n-1}) \\ \phi_{r-1} &= \arg A - k_r \arg(z - x_r) - k_{r+1} \arg(z - x_{r+1}) - \cdots - k_{n-1} \arg(z - x_{n-1}) \\ &= \arg A - k_r\pi - k_{r+1}\pi - k_{r+2}\pi - \cdots - k_{n-1}\pi \\ &= \arg A - (k_r + k_{r+1} + k_{r+2} + \cdots + k_{n-1})\pi \end{aligned} \quad (3.7)$$

dan

$$\begin{aligned}
\arg f'(z) &= \arg A - k_1 \arg(z - x_1) - k_2 \arg(z - x_2) - \cdots - k_{n-1} \arg(z - x_{n-1}) \\
\phi_r &= \arg A - k_{r+1} \arg(z - x_{r+1}) - k_{r+2} \arg(z - x_{r+2}) - \cdots - k_{n-1} \arg(z - x_{n-1}) \\
&= \arg A - k_{r+1}\pi - k_{r+2}\pi - k_{r+3}\pi - \cdots - k_{n-1}\pi \\
&= \arg A - (k_{r+1} + k_{r+2} + k_{r+3} + \cdots + k_{n-1})\pi \qquad (3.8)
\end{aligned}$$



Gambar 3.1 Bidang-Z

Jadi

$$\phi_r - \phi_{r-1} = [\arg A - (k_{r+1} + k_{r+2} + k_{r+3} + \cdots + k_{n-1})\pi] - [\arg A - (k_r + k_{r+1} + k_{r+2} + \cdots + k_{n-1})\pi]$$

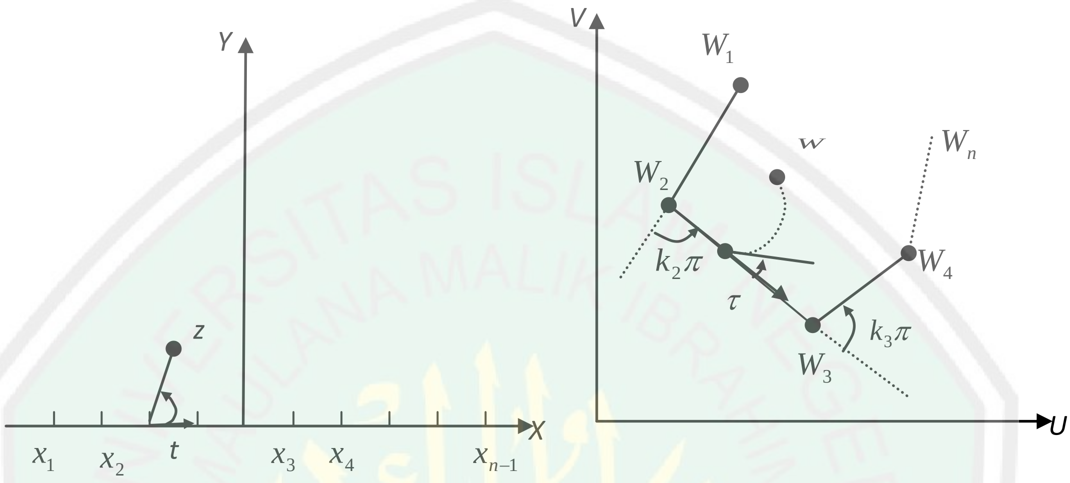
$$\phi_r - \phi_{r-1} = k_r \pi \text{, dengan } j = 1,2,3,\ldots,r-1,r,\ldots,n-1. \qquad (3.9)$$

Selanjutnya

$$\arg f'(z) = \arg \frac{df(z)}{dz} = \arg \frac{[du(z) - idv(z)]}{dz} = \tan^{-1} \frac{dv(z)}{du(z)}.$$

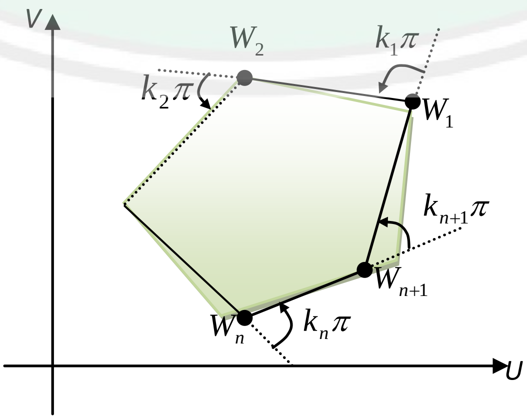
Tampak bahwa $\arg f'(z)$ merupakan sudut yang dibentuk oleh unsur $df(z)$ dalam bidang-W, yakni hasil transformasi dz oleh Transformasi (3.1) dengan sumbu riil bidang-W. Jadi jika z bergerak sepanjang sumbu riil bidang-Z, maka titik bayangannya menelusuri suatu segi-n di bidang-W.

Dengan demikian, jika $z = x$ dan $x_{j-1} < x < x_j$, $j = 1,2,\ldots,n-1$ dengan z bergerak sepanjang sumbu riil bidang-Z dari sebelah kiri titik x_j ke sebelah kanannya, maka vektor τ di bidang-W berubah dengan sudut $k_j\pi$, pada setiap titik bayangan x_j, seperti ditunjukkan pada Gambar 3.2. Sudut $k_j\pi$ adalah sudut luar dari segi-*n* pada titik W_j.



Gambar 3.2 Pemetaan $f(z)$ dengan $z = x$ dan $x_{j-1} < x < x_j$

Diasumsikan bahwa sisi-sisi segi-*n* tidak berpotongan satu sama lain dan sudutnya diambil berlawanan dengan arah jarum jam. Sudut-sudut luar dapat didekati oleh sudut antara π dan $-\pi$, sehingga $-1 < k_j < 1$. Jika segi-*n* tertutup, maka jumlah sudut luarnya adalah 2π. Untuk membuktikannya dipandang segi banyak tertutup mempunyai sisi $(n+1)$, lihat Gambar 3.3.



Gambar 3.3 Segi Banyak Tertutup mempunyai sisi $n+1$

(Zill, 410)

Telah diketahui bahwa $k_j\pi$ adalah besarnya sudut luar pada titik W_j yang merupakan bayangan dari titik x_j. Jika segi banyak mempunyai sisi $n+1$, maka

$$\begin{aligned} k_2\pi &= \phi_2 - \phi_1 \\ k_3\pi &= \phi_3 - \phi_2 \\ k_4\pi &= \phi_4 - \phi_3 \\ &\vdots \\ k_n\pi &= \phi_n - \phi_{n-1}, \end{aligned}$$

sedangkan sudut $k_1\pi = \phi_1 - \phi_{n+1}$ dan $k_{n+1}\pi = \phi_{n+1} + 2\pi - \phi_n$.

Pada segi-*n*, $k_{n+1}\pi = 0$ sehingga $\phi_n = \phi_{n+1} + 2\pi$. Dengan demikian,

$$\begin{aligned} k_1\pi + k_2\pi + k_3\pi + \cdots + k_n\pi &= (\phi_1 - \phi_{n+1}) + (\phi_2 - \phi_1) + (\phi_3 - \phi_2) + \cdots + (\phi_n - \phi_{n-1}) \\ (k_1 + k_2 + k_3 + \cdots + k_n)\pi &= (\phi_n - \phi_{n+1}) \\ &= 2\pi \\ k_1 + k_2 + k_3 + \cdots + k_n &= 2 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Jadi jelas bahwa k_j dengan $j = 1,2,3,\ldots,n$ memenuhi kondisi

$$k_1 + k_2 + k_3 + \cdots + k_n = 2, -1 < k_j < 1. \tag{3.11}$$

3.2 Transformasi *Schwarz-Christoffel*

Dalam teori potensial, dalam hubungannya dengan persoalan nilai batas, seringkali untuk mentransformasikan setengah bagian atas bidang-Z secara satu-satu ke suatu daerah bidang W yang dibatasi oleh garis-garis lurus, penggal garis, atau sinar-sinar. Daerah tersebut dapat berupa segi-*n* tertutup sederhana dan juga suatu daerah tak terbatas, akan tetapi batas-batasnya terdiri dari garis-garis, penggal garis, atau sinar. Dapat ditunjukkan bahwa suatu pemetaan umum dapat dilakukan melalui suatu transformasi w = f(z) sedemikian hingga

$$f'(z) = A(z-x_1)^{k_1}(z-x_2)^{k_2}(z-x_3)^{k_3}\ldots(z-x_{n-1})^{k_{n-1}}, \qquad (3.12)$$

(Paliouras, 1987:291-292)

merupakan turunan dari suatu fungsi yang memetakan sumbu-*X* pada suatu segi-*n*. Faktor-faktor $(z-x_j)^{k_j}$ menyatakan cabang-cabang dari fungsi tersebut dengan perluasan irisan cabangnya di bawah sumbu-*X*. Secara jelas dapat ditulis

$$(z-x_j)^{k_j} = (|z-x_j|)^{k_j}\exp(-ik_j\theta_j). \qquad (3.13)$$

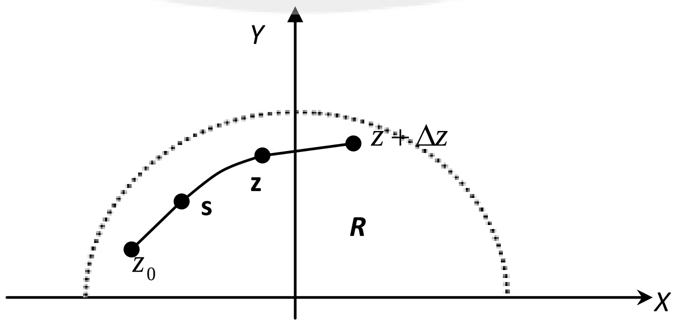
$$\left(-\frac{\pi}{2} < \theta_j < \frac{3\pi}{2}\right), \theta_j = \arg(z-x_j), \quad j = 1,2,3,\ldots,n-1$$

$f'(z)$ analitik pada setengah bidang atas atau $y \geq 0$ kecuali pada titik-titik x_j dengan $j = 1,2,3,\ldots,n-1$.

Jika z_0 adalah suatu titik pada daerah analitik itu (misal daerah itu *R*), maka fungsi

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f'(s)ds \qquad (3.14)$$

adalah fungsi bernilai tunggal dan analitik pada daerah yang sama, dengan lintasan integrasinya dari z_0 ke z adalah sembarang kontur dalam *R*. (Gambar 3.4).



Gambar 3.4 Lintasan Integrasi dari z_0 ke z

Untuk mendefinisikan fungsi F pada titik $z = x_1$ sehingga fungsi F kontinu pada titik tersebut, dinyatakan $(z-x_1)^{k_1}$ adalah satu-satunya faktor dalam Persamaan (3.12) yang tidak analitik pada x_1. Dari sini, jika $\phi(z)$ menyatakan perkalian faktor-faktor selain $(z-x_1)^{k_1}$, maka dapat ditulis

$$\phi(z) = (z-x_2)^{k_2}(z-x_3)^{k_3}\ldots(z-x_{n-1})^{k_{n-1}}, \qquad (3.15)$$

$\phi(z)$ analitik pada x_1 dan dapat dinyatakan pada suatu daerah terbuka $|z-x_1| < R$ oleh Deret Taylor di sekitar x_1, sehingga

$$\begin{aligned} f'(z) &= (z-x_1)^{k_1}\phi(z) \\ &= (z-x_1)^{k_1}\left[\phi(x_1) + \frac{\phi'(x_1)}{1!}(z-x_1) + \frac{\phi''(x_1)}{2!}(z-x_1)^2 + \cdots\right] \\ &= \phi(x_1)(z-x_1)^{k_1} + (z-x_1)^{1-k_1}\psi(z) \end{aligned} \qquad (3.10)$$

dengan

$$\psi(z) = \frac{\phi'(x_1)}{1!} + \frac{\phi''(x_1)}{2!}(z-x_1) + \frac{\phi'''(x_1)}{3!}(z-x_1)^2 + \cdots$$

$\psi(z)$ analitik dan kontinu pada seluruh daerah terbuka dengan $y \geq 0$ karena $1-k_1 > 0$, maka bagian terakhir dari Persamaan (3.16) menyatakan suatu fungsi z yang kontinu ke seluruh bagian atas dari daerah terbuka dengan $y \geq 0$ dan pada $z = x_1$ bernilai nol. Jika bagian terakhir Persamaan (3.16) diintegralkan sepanjang kontur z_1 ke z, maka

$$\int_{z_1}^{z} (s-x_1).\psi(s)\,ds \qquad (3.17)$$

dengan z_1 dan konturnya berada dalam setengah daerah terbuka dengan $y \geq 0$, merupakan suatu fungsi z yang kontinu pada $z = x_1$.

Karena integral

$$\int_{z_1}^{z} (s-x_1)^{k_1}\,ds = \frac{1}{1-k_1}\left[(z-x_1)^{1-k_1} - (z_1-x_1)^{1-k_1}\right], \tag{3.18}$$

sepanjang lintasan yang sama menyatakan suatu fungsi yang kontinu pada x_1, maka integral dari Fungsi (3.16) sepanjang lintasan yang ditentukan dari z_1 ke *z*, juga merupakan fungsi yang kontinu pada $y \geq 0$. Demikian pula untuk integral pada Persamaan (3.14), karena integral tersebut dapat dinyatakan sebagai suatu integral sepanjang suatu kontur dalam *R* dari z_0 ke z_1 ditambah integral dari z_1 ke *z*.

Fungsi pemetaan yang turunannya diberikan pada Persamaan (3.12) dapat ditulis

$$f'(z) = A(z-x_1)^{k_1}(z-x_2)^{k_2}(z-x_3)^{k_3}\ldots(z-x_{n-1})^{k_{n-1}}$$

$$w = A\int_{z_0}^{z}\left[(s-x_1)^{k_1}(s-x_2)^{k_2}\cdots(s-x_{n-1})^{k_{n-1}}\right]ds + B \tag{3.19}$$

atau $f(z) = F(z) + B$

dengan *A* dan *B* adalah konstanta kompleks. Fungsi tersebut disebut *Transformasi Schwarz-Christoffel* (Paliourus, 1987:291-292).

Transformasi (3.19) kontinu pada setengah bidang atas atau $y \geq 0$. Karena pada daerah tersebut $f(z)$ analitik kecuali pada titik-titik $z = x_j$ dengan $j = 1,2,3,\ldots,n-1$, maka Transformasi (3.19) konformal kecuali pada titik-titik tersebut. Bilangan k_j memenuhi kondisi

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_n = 2, \quad -1 < k_j < 1 \quad (j = 1,2,\ldots,n),$$

konstanta x_j dan k_j dipilih sedemikian hingga segi-*n* adalah suatu kontur tertutup sederhana. Titik z menggambarkan sumbu-*X* dengan arah positif, bayangannya menggambarkan segi-*n* juga dalam arah positif dan terdapat korespondensi satu-satu antara titik-titik pada sumbu-*X* dan titik pada segi-*n*.

Jika z suatu titik interior dari setengah bidang atas $y \geq 0$ dan x_0 adalah sembarang titik pada sumbu-*X* selain titik x_j, maka sudut yang di bentuk oleh vektor t pada titik x_0 dan garis yang menghubungkan titik x_0 dan z adalah positif dan kurang dari π, seperti ditunjukkan pada Gambar (3.4). Karena transformasi $f(z)$ konformal, maka pada titik w_0 sudut yang dibentuk oleh vektor τ dan bayangan dari segmen yang menghubungkan titik x_0 dan z mempunyai nilai yang sama, dimana sudutnya diambil berlawanan dengan arah jarum jam.

Diberikan suatu segi-*n* *P* pada bidang-W yang dinyatakan oleh Fungsi (3.21). Konstanta-konstanta dalam Transformasi *Schwarz-Christoffel* ditentukan sedemikian hingga memetakan sumbu-*X* ke dalam suatu segi-*n* *P*, dimana posisi dan ukuran segi-*n* bisa berbeda. Ukuran dan posisi dari *P* dapat diatur dengan memberikan nilai-nilai sembarang untuk *A* dan *B*. Posisi dari segi-*n* *P* tergantung dari nilai *B* dan ukurannya tergantung dari nilai *A*, dengan *A* dan *B* adalah konstanta kompleks. Jika diambil $z_0 = 0$, $A = 1$ dan $B = 0$, maka transformasi *Schwarz-Christoffel*-nya adalah

$$w = f(z) = A\int_{z_0}^{z}\left[(s-x_1)^{k_1}(s-x_2)^{k_2}\cdots(s-x_{n-1})^{k_{n-1}}\right]ds + B$$

$$= 1\int_{z_0}^{z}\left[(s-x_1)^{k_1}(s-x_2)^{k_2}\cdots(s-x_{n-1})^{k_{n-1}}\right]ds + 0$$

$$= \int_{0}^{z}\left[(s-x_1)^{k_1}(s-x_2)^{k_2}\ldots(s-x_{n-1})^{k_{n-1}}\right]ds \qquad (3.20)$$

Jelas dipenuhi bahwa sumbu-*X* dipetakan ke dalam suatu segi-*n* *P*. Bilangan-bilangan k_j ditentukan dari sudut-sudut luar pada titik-titik *P*. Konstanta dari x_j dengan $j = 1,2,3,\ldots,n-1$ tinggal dipilih dengan mengambil titik sembarang di dalam setengah bidang atas di bidang-Z, dengan $y \geq 0$ (Zill, 412-413).

3.3 Aplikasi Penggunaan Transformasi Schwarz-Christoffel Pada Sumbu-*X* di Bidang-Z

Pada bagian berikut, disajikan beberapa contoh penggunaan Transformasi *Schwarz-Christoffel* (3.20), yaitu akan ditransformasikan sumbu riil dibidang-Z ke suatu segi-*n* di bidang-W yang diketahui tiga titik dan empat titik pada sumbu *X* di bidang-Z

3.3.1 Tiga Titik pada Sumbu-X di Bidang-Z

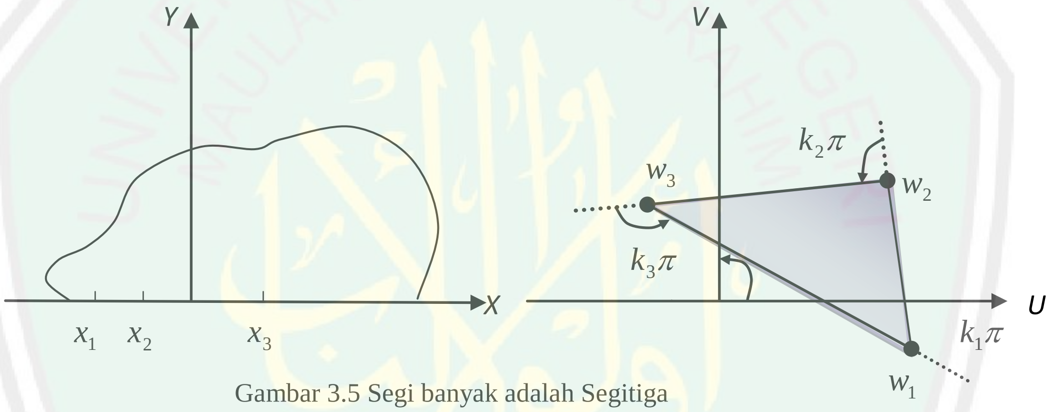
Jika pada sumbu *X* di bidang-Z diketahui tiga titik dengan titik-titik bayangan w_1, w_2, dan w_3, (Gambar 3.5) dan berbentuk segitiga, maka transformasi *Schwarz-Christoffel* dapat ditulis

$$w = A\int_{z_0}^{z}(s-x_1)^{k_1}(s-x_2)^{k_2}(s-x_3)^{k_3}\,ds + B, \qquad (3.23)$$

dengan $k_1 + k_2 + k_3 = 2$. Dalam bentuk sudut interior θ_j

$k_j = 1 - \frac{1}{\pi}\theta_j$, dengan $j = 1,2,3,$.

Dari sini telah jelas diberikan tiga titik x_j sebagai titik-titik berhingga pada sumbu *X*, yang biasanya telah ditentukan. Konstanta kompleks *A* dan *B*, yang berhubungan dengan ukuran dan posisi segitiga, dapat ditentukan sedemikian hingga setengah bidang atas dipetakan pada daerah segitiga yang dimaksud.



Gambar 3.5 Segi banyak adalah Segitiga

Jika diambil titik w_3 sebagai bayangan dari titik di tak hingga, transformasinya menjadi

$$w = A\int_{z_0}^{z}(s-x_1)^{k_1}(s-x_2)^{k_2}\,ds + B. \qquad (3.24)$$

<u>Contoh 1</u>

Jika diambil $k_1 = k_2 = k_3 = 2/3$ dan $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = \infty$, dengan $z_0 = 1, A = 1$ dan $B = 0$, maka dengan menggunakan Persamaan (3.24) Transformasi *Schwarz-Christoffel*nya menjadi:

$$w = \int_{z_0}^{z} (s+1)^{2/3}(s-1)^{2/3}\, ds \,. \tag{3.25}$$

Akan dibuktikan bahwa bayangannya adalah suatu segitiga sama sisi.

Penyelesaian:

a. Bayangan dari titik $z = 1$ adalah $w_2 = 0$

$$w_2 = \int_{1}^{1} (s+1)^{2/3}(s-1)^{2/3}\, ds = 0 \,.$$

b. Bayangan dari titik $z = -1$ adalah w_1

Untuk $z = -1$ dapat ditulis $s = x$, dengan $-1 < x < 1$, sehingga $x + 1 = 0$ dan $\arg(x+1) = 0$, karena $|x-1| = 1 - x$ dan $\arg(x-1) = \pi$.

$$\begin{aligned}
w_1 &= \int_{1}^{-1} (s+1)^{2/3}(s-1)^{2/3}\, ds \\
&= \int_{1}^{-1} (x+1)^{2/3}(1-x)^{2/3} \exp\left(-\frac{2\pi}{3} i\right) dx \\
&= \int_{1}^{-1} (1-x^2)^{2/3} \exp\left(-\frac{2\pi}{3} i\right) dx \\
&= -\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{2/3} \exp\left(-\frac{2\pi}{3} i\right) dx \\
&= -\exp\left(-\frac{2\pi}{3} i\right) \int_{0}^{1} 2(1-x^2)^{2/3}\, dx \\
&= \exp\left(\frac{\pi}{3} i\right) \int_{0}^{1} 2(1-x^2)^{2/3}\, dx
\end{aligned}$$

$$w_1 = \exp\left(\frac{\pi}{3} i\right) \int_{0}^{1} \frac{2dx}{(1-x^2)^{2/3}}\, dx. \tag{3.26}$$

Dengan subtitusi $x = \sqrt{t}$ dan

$$b = \int_0^1 \frac{2}{(1-x^2)^{2/3}}\,dx = \int_0^1 \frac{dt}{(1-(\sqrt{t})^2)^{2/3}}\,d\sqrt{t}$$
$$= \int_0^1 \frac{dt}{t^{1/2}(1-t^2)^{2/3}}$$
$$= \int_0^1 t^{1/2}(1-t^2)^{2/3}\,dt$$
$$= \beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right) \tag{3.27}$$

diperoleh titik w_1

$$w_1 = b\exp\left(\frac{\pi}{3}i\right).$$

Karena titik w_3 terletak pada sumbu-*U* positif, maka

$$w_3 = \int_1^{\infty}(x+1)^{2/3}(x-1)^{2/3}\,dx = \int_1^{\infty}\frac{dx}{(x^2-1)^{2/3}},$$

tetapi harga w_3 juga dapat dinyatakan dalam bentuk integral pada Persamaan (3.26). Jika *z* membentang ke tak hingga sepanjang sumbu-*X* negatif, sehingga

$$w_3 = \int_1^{-\infty}(x+1)^{2/3}(x-1)^{2/3}\,dx$$
$$= \int_1^{-1}(|x+1||x-1|)^{2/3}\exp\left(-\frac{2\pi}{3}i\right)dx + \int_{-1}^{-\infty}(|x+1||x-1|)^{2/3}\exp\left(-\frac{4\pi}{3}i\right)dx.$$

Dalam Persamaan (3.26) telah diperoleh hasil untuk w_1, sehingga

$$w_3 = w_1 + \exp\left(-\frac{4\pi}{3}i\right)\int_1^{-\infty}(|x+1||x-1|)^{2/3}\,dx$$
$$= b\exp\left(\frac{\pi}{3}i\right) + \exp\left(-\frac{\pi}{3}i\right)\int_1^{\infty}\frac{dx}{(x^2-1)^{2/3}}$$
$$= b\exp\left(\frac{\pi}{3}i\right) + w_3\exp\left(-\frac{\pi}{3}i\right),$$

diperoleh

$$w_3\left[1-\exp\left(-\frac{\pi}{3}i\right)\right] = \exp\left(\frac{\pi}{3}i\right)$$

$$w_3 = \frac{b\exp\frac{\pi}{3}i}{1-\exp\left(-\frac{\pi}{3}i\right)}$$

$$= \frac{b\left[\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right]}{1-\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]}$$

$$= \frac{b\left[\frac{1}{2}+i\frac{1}{2}\sqrt{3}\right]}{\left[\frac{1}{2}+i\frac{1}{2}\sqrt{3}\right]}$$

$$= b.$$

Jika $z=0$, maka dapat ditulis $s=x$ dengan $0<x<1$ sehingga diperoleh $x-1<0$. Karena $|x-1|=1-x$, maka $\arg(x-1)=\pi$. Transformasi *Schwarz-Christoffel*nya menjadi

$$w=\int_1^0 (x+1)^{2/3}(1-x)^{2/3}\exp\left(-\frac{2\pi}{3}i\right)dx$$

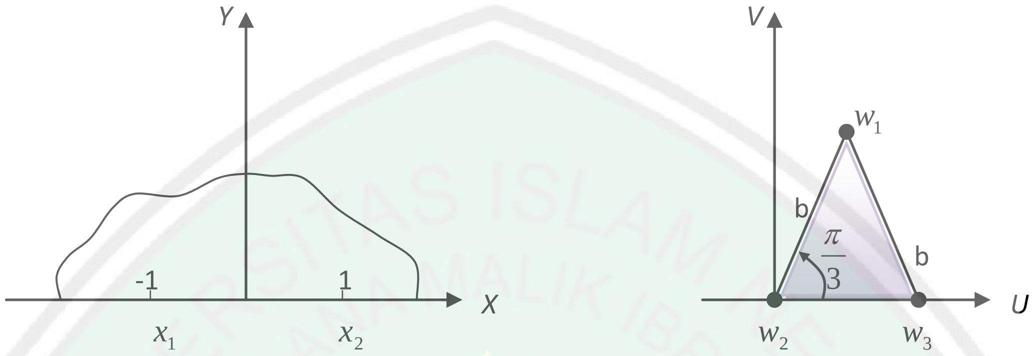
$$=\exp\left(\frac{\pi}{3}i\right)\int_0^1 \frac{dx}{(1-x^2)^{2/3}}.$$

Dengan memandang Persamaan (3.27)

$$w = \frac{b}{2}\exp\left(\frac{\pi}{3}i\right).$$

Jadi $w = \frac{b}{2}\exp\left(\frac{\pi}{3}i\right)$ pada $z=0$.

Terbukti bahwa bayangan dari titik $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = \infty$ adalah segitiga sama sisi dengan panjang sisinya *b*, dapat ditunjukkan pada Gambar (3.6)



Gambar 3.6 Segi banyak adalah segitiga dengan panjang sisi *b*

3.3.2 Empat Titik pada Sumbu-*X* pada Bidang-Z

Jika pada sumbu-*X* di bidang-Z diketahui empat titik dengan titik-titik bayangan w_1, w_2, w_3 dan w_4 dan bayangannya berbentuk empat persegi panjang, maka Transformasi *Schwarz-Christoffel*nya menjadi

$$w = A\int_{z_0}^{z}(s-x_1)^{k_1}(s-x_2)^{k_2}(s-x_3)^{k_3}(s-x_4)^{k_4}\,ds + B \qquad (3.28)$$

dengan $0 \le \arg(z - x_j) \le \pi$ dan $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = \frac{1}{2}$.

Dengan mengambil

$g(z) = (z-x_1)^{\frac{1}{2}}(z-x_2)^{\frac{1}{2}}(z-x_3)^{\frac{1}{2}}(z-x_4)^{\frac{1}{2}}$, diperoleh

$$w = A\int_{z_0}^{z} g(s)ds + B.$$

Contoh 2

Misal diambil titik-titik $x_1 = -a, x_2 = -1, x_3 = 1$ dan $x_4 = a, a > 0$ dengan $z_0 = 0, A = 1$ dan $B = 0$. Akan dibuktikan bahwa bayangan dari titik-titik x_1, x_2, x_3, x_4 adalah suatu empat persegi panjang.

Penyelesaian:

Karena $x_1 = -a, x_2 = -1, x_3 = 1$ dan $x_4 = a$, maka

$$
\begin{aligned}
g(z) &= (z+a)^{-\frac{1}{2}}(z+1)^{-\frac{1}{2}}(z-a)^{-\frac{1}{2}}(z-1)^{-\frac{1}{2}} \\
&= (z^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}(z^2-1)^{-\frac{1}{2}} \\
&= \left[(a^2-z^2)(-1)\right]^{-\frac{1}{2}}\left[(1-z^2)(-1)\right]^{-\frac{1}{2}} \\
&= (a^2-z^2)^{-\frac{1}{2}}(-1)^{-\frac{1}{2}}(1-z^2)^{-\frac{1}{2}}(-1)^{-\frac{1}{2}} \\
&= (a^2-z^2)^{-\frac{1}{2}}(1-z^2)^{-\frac{1}{2}}\left[(-1)(-1)\right]^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

$$g(z) = (a^2-z^2)^{-\frac{1}{2}}(1-z^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Diketahui bahwa $z_0 = 0, A = 1$ dan $B = 0$, dari sini diperoleh

$$w = A\int_{z_0}^{z} g(s)ds + B$$

$$w = \int_0^z g(s)ds = \int_0^z \frac{ds}{\sqrt{(a^2-s^2)\,(1-s^2)}}.$$

a. Jika $z = x$ dan $-1 < x < 0$, maka

$\arg(x+a) = \arg(x+1) = 0$ dan $\arg(x-1) = \arg(x-a) = \pi$, sehingga

$$g(x) = |g(x)|\left[\exp\left(-\frac{\pi}{2}i\right)\right]^2$$
$$= |g(x)|\exp(-\pi i)$$
$$= |g(x)|(\cos\pi - i\sin\pi)$$
$$= |g(x)|(-1-0)$$
$$= -|g(x)|.$$

b. Jika $-a < x < -1$, maka

$\arg(x+a) = 0$ dan $\arg(x+1) = \arg(x-1) = \arg(x-a) = \pi$,

sehingga

$$g(x) = |g(x)|\left[\exp\left(-\frac{\pi}{2}i\right)\right]^3$$
$$= |g(x)|\exp\left(-\frac{3\pi}{2}i\right)$$
$$= |g(x)|\left(\cos\frac{3\pi}{2} - i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$$
$$= |g(x)|\big(0 - i(-1)\big)$$
$$= i|g(x)|,$$

diperoleh

$$w_1 = \int_0^{x_1} g(s)ds$$
$$= \int_0^{-a} g(x)dx$$
$$= \int_0^{-1} g(x)dx - \int_{-1}^{-a} g(x)dx$$
$$= \int_0^{-1} |g(x)|dx - i\int_{-1}^{-a} |g(x)|dx.$$

Jika diambil

$$b = \int_0^1 |g(x)|dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\,(a^2-x^2)}}$$

$$c = \int_1^a |g(x)|dx = \int_1^a \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)\,(a^2-x^2)}},$$

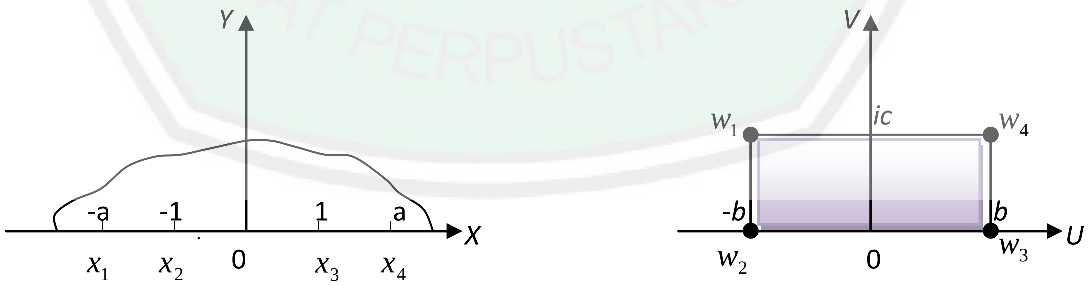
maka

$$\begin{aligned} w_1 &= \int_0^{-1} |g(x)|dx - i\int_{-1}^{-a} |g(x)|dx \\ &= -(b-ic) \\ &= -b+ic, \end{aligned}$$

kemudian

$$\begin{aligned} w_2 &= \int_0^{-1} g(x)dx = \int_0^{-1} |g(x)|dx = -b \\ w_3 &= \int_0^{1} g(x)dx = \int_0^{1} |g(x)|dx = b \\ w_4 &= \int_0^{a} g(x)dx = \int_0^{a} |g(x)|dx = \int_0^{1} |g(x)|dx + \int_1^{a} |g(x)|dx = b+ic. \end{aligned}$$

Posisi dari empat persegi panjang dapat ditunjukkan pada Gambar 3.7



Gambar 3.7 Segi banyak adalah empat persegi panjang

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan masalah yang telah diuraikan pada bab sebelumnya, maka dapat ditarik kesimpulan bahwa Transformasi Schwarz-Christoffel dibentuk dengan berlandaskan pemetaan sumbu riil pada suatu segi banyak oleh suatu fungsi analitik $w = f[z(t)], f'(z) \neq 0$ dengan t adalah parameter. Dari pemetaan tersebut diperoleh suatu fungsi transformasi yang memetakan setengah bidang atas dengan $y \geq 0$ pada segi-*n*. Pada daerah setengah bidang atas tersebut $f'(z)$ analitik kecuali pada titik-titik $z = x_j$. Titik-titik $x_j, j = 1,2,3,\ldots,n-1$ dan $x_n = \infty$ menjadi titik pada bidang-Z yang dapat ditentukan sembarang dan bayangan dari titik-titik tersebut menjadi titik-titik pada segi-*n*. Titik-titik x_j dipilih sedemikian hingga sisi-sisi dari segi banyak tidak berpotongan satu sama lain. Fungsi transformasi itu disebut *Transformasi Schwarz-Christoffel* yang dinyatakan dalam bentuk:

$$w = A\int_{z_0}^{z} \left[(s-x_1)^{k_1}(s-x_2)^{k_2}\cdots(s-x_{n-1})^{k_{n-1}}\right]ds + B$$

konstanta A dan B merupakan konstanta kompleks yang menentukan ukuran, orientasi (arah) dan posisi segi-*n*. Bilangan-bilangan k_j memenuhi kondisi $k_1 + k_2 + k_3 + \cdots + k_n = 2, \ -1 < k_j < 1$.

Untuk daerah setengah bidang atas yang memiliki tiga titik pada sumbu riil di bidang-Z, maka *Transformasi Schwarz-Christoffel* pada pemetaan tersebut adalah $w = A\int_{z_0}^{z} (s - x_1)^{k_1} (s - x_2)^{k_2} (s - x_3)^{k_3} ds + B$ dengan bayangannya berupa suatu segitiga dengan titik-titik bayangan w_1, w_2 dan w_3. Sedangkan untuk daerah setengah bidang atas yang memiliki empat titik pada sumbu riil di bidang-Z, maka *Transformasi Schwarz-Christoffel* pada pemetaan tersebut adalah $w = A\int_{z_0}^{z} (s - x_1)^{k_1} (s - x_2)^{k_2} (s - x_3)^{k_3} (s - x_4)^{k_4} ds + B$, dengan bayangannya berupa empat persegi panjang, dengan titik-titik bayangan w_1, w_2, w_3 dan w_4.

4.2 Saran

Tugas akhir ini membahas atau mengkaji secara teoritis tentang *Transformasi Schwarz-Christoffel*. Bagi pembaca yang tertarik pada materi ini dapat mengembangkannya pada penerapan *Transformasi Schwarz-Christoffel* di bidang fisika atau bidang lain.

DAFTAR PUSTAKA

Abdusysyakir. 2006. *Ada Matematika dalam Al Qur'an*. Malang: UIN Malang Press.

____________ . 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN-Malang Press.

Kreyszig, Erwin. 1993. *Matematika Teknik Lanjutan edisi ke-6*. Jakarta: PT. Gramedia Pustaka Utama.

Munir, Rinaldi. 2006. *Metode Numerik*. Bandung: Informatika Bandung.

Paliouras, John, D. 1987. *Peubah Kompleks untuk Ilmuwan dan Insinyur*. Jakarta: Penerbit Erlangga.

Rahman, Afzalur. 2007. *Ensiklopediana Ilmu dalam Al-Qur'an: Rujukan Terlengkap Isyarat-isyarat Ilmiah dalam Al-Qur'an* terjemahan Taufik Rahman. Bandung: Penerbit Mizania.

Roziana, Dewi Farida. 2008. *Solusi Analitik dan Solusi Numerik Persamaan Divusi Konveksi*. Malang: Skripsi Jurusan Matematika UIN Malang.

Shihab, M. Quraish. 2002. *Tafsir Al-Mishbah: Pesan, Kesan dan Keserasian Al-Qur'an Volume 3*. Jakarta: Lentera Hati.

Soemantri, R. 1994. *Fungsi Variabel Kompleks*. Yogyakarta: Unversitas Gajah Mada.

Spiegel, Murray, R. 1964. *Teori dan Soal-Soal Peubah Kompleks dengan Pengenalan Pemetaan Konvormal dan Penerapannya*. Jakarta: Penerbit Erlangga.

Wardhana, Arya Wisnu. 2004. *Alqur'an dan Nuklir*. Yogyakarta: Pustaka Pelajar Offset.

Zill, Dennis, G, dkk. *A First Course in Complex Analysis With Applications*. Los Angeles, CA: Loyola Marymount University.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Malang Telp. (0341) 551354
Fax. (0341) 572533

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Kurniati
NIM : 06510058
Fakultas/ Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi :Aplikasi Transformasi Schwarz-Christoffel pada Sumbu x di Bidang-z
Pembimbing I : Hairur Rahman, M.Si
Pembimbing II : Abdul Aziz, M.Si

No	Tanggal	Hal Yang Dikonsultasikan	Tanda Tangan	
1.	28 Maret 2011	Konsultasi judul	1.	
2.	3 Agustus 2011	Bab I, II		2.
3.	4 Agustus 2011	Revisi Bab I	3.	
4.	8 Agustus 2011	Revisi Bab II		4.
5.	9 Agustus 2011	Kajian Agama Bab I	5.	
6.	10 Agustus 2011	Acc Bab I,II		6.
7.	11 Agustus 2011	Acc Kajian Agama Bab I	7.	
8.	13 Agustus 2011	Bab III		8.
9.	15 Agustus 2011	Kajian Agama Bab II	9.	
10.	16 Agustus 2011	Acc Kajian Agama		10.
11.	16 Agustus 2011	Bab IV, Revisi Bab III	11.	
12.	18 Agustus 2011	Acc Keseluruhan		12.

Malang, 20 Agustus 2011
Mengetahui
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001