

KAJIAN INTEGRAL RIEMANN-STIELTJES

SKRIPSI

Oleh:

LILIS NURHIDAYATI ROMLI

NIM: 05510033



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2009**

KAJIAN INTEGRAL RIEMANN-STIELTJES

SKRIPSI

**Diajukan Kepada:
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)**

**Oleh:
LILIS NURHIDAYATI ROMLI
NIM: 05510033**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2009**

KAJIAN INTEGRAL RIEMANN-STIELTJES

SKRIPSI

Oleh:

LILIS NURHIDAYATI ROMLI

NIM: 05510033

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji:

Tanggal: 05 Oktober 2009

Pembimbing I,

Pembimbing II,

Hairur Rahman, M.Si
NIP. 198004292006041003

Abdussakir, M.Pd
NIP. 197510062003121001

Mengetahui,

Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 197510062003121001

KAJIAN INTEGRAL RIEMANN-STIELTJES

SKRIPSI

Oleh:

LIIS NURHIDAYATI ROMLI

NIM: 05510033

**Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)**

Tanggal: 09 Oktober 2009

Susunan Dewan Penguji:

Tanda Tangan

- | | | |
|-----------------------|---|-----------|
| 1. Penguji Utama | : <u>Usman Pagalay, M. Si</u>
NIP. 196504142003121001 | () |
| 2. Ketua Penguji | : <u>Wahyu Henky Irawan, M. Pd</u>
NIP. 197104202000031003 | () |
| 3. Sekretaris Penguji | : <u>Hairur Rahman, M. Si</u>
NIP. 198004292006041003 | () |
| 4. Anggota Penguji | : <u>Abdussakir, M. Pd</u>
NIP. 197510062003121001 | () |

**Mengetahui dan Mengesahkan
Ketua Jurusan Matematika**

**Abdussakir, M. Pd
NIP. 197510062003121001**

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : LILIS NURHIDAYATI

NIM : 05510033

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambil alihan data, tulisan atau pikiran orang lain, kecuali yang secara tertulis dikutip dalam naskah ini dan disebutkan dalam sumber kutipan dan daftar pustaka.

Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia untuk mempertanggung jawabkan, serta diproses sesuai dengan peraturan yang berlaku.

Malang, 06 Oktober 2009

Yang Membuat Pernyataan

Lilis Nurhidayati Romli

NIM. 05510033

MOTTO

“Nilai dari seseorang itu di tentukan dari keberaniannya memikul tanggungjawab, mencintai hidup dan pekerjaannya.”

(Kahlil Gibran)

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Skripsi ini Penulis persembahkan kepada

*Abah Moh. Romli dan Ibu Munawaroh,
Kakak Luqman Hakim Romli yang tanpa
lelah memberikan keagungan do'a, dorongan
moral, spiritual, finansial dan tak henti-
hentinya mencurahkan kasih sayangnya.*

*Imam Syafi'i dan keluarga yang selalu
memberikan cinta dan kasih sayang yang
tiada tergantikan, keagungan do'a, serta
dengan sabar memberikan dorongan.*

*Semoga Rahmat Allah SWT selalu menyertai
setiap langkahnya.*

KATA PENGANTAR

Syukur alhamdulillah penulis panjatkan kehadirat Allah Swt yang telah memberikan curahan rahmat, taufiq dan hidayahNya sehingga skripsi yang berjudul "*Kajian Integral Riemann-Stieltjes*" ini dapat terselesaikan. Sholawat serta salam semoga tetap terlimpahkan kepada junjungan nabi besar Muhammad SAW yang telah membawa kita dari jalan yang gelap menuju jalan yang terang benderang.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini tidak akan mendapatkan suatu hasil yang baik tanpa adanya bimbingan, bantuan, saran serta doa dari berbagai pihak. Oleh karena itu penulis menyampaikan ungkapan terima kasih kepada

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Dr. Sutiman Bambang Sumitro, SU. DSc. selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M. Pd selaku Ketua Jurusan Matematika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang; . Dosen Pembimbing II, terima kasih atas bimbingan yang telah diberikan.
4. Hairur Rahman, M.Si selaku Dosen Pembimbing I, yang senantiasa dengan sabar memberikan bimbingan.

5. Usman Pagalay, M. Si selaku Dosen Wali, terima kasih atas dukungan dan motivasi yang telah diberikan selama ini.
6. Segenap dosen Matematika yang telah berjasa memberikan ilmunya, membimbing dan memberikan motivasi dalam penyelesaian skripsi ini.
7. Kedua orangtua dan semua keluarga yang selalu mendoakan dan mendukung setiap langkah penulis.
8. Imam Syafi'i, yang selalu memberikan semangat, motivasi, dan inspirasi dalam penyelesaian skripsi ini.
9. Teman-teman matematika angkatan 2005, terima kasih atas dukungan, motivasi, dan kebersamaannya selama ini.
10. Teman-teman "Basecamp" (Silvia A, Amaliya R, Nilna N, Sitaresmi DP, Wiwit K) dan teman-teman "asrama 34" Kerto Pamuji, terima kasih atas keceriaan yang diberikan selama kebersamaan kita.
11. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu, yang telah banyak membantu dalam penyelesaian skripsi ini.

Kiranya skripsi ini masih jauh dari sempurna, oleh karena itu penulis mengharapkan kritik dan saran yang sifatnya membangun. Akhirnya, penulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi penulis khususnya dan bagi pembaca pada umumnya.

Malang, Oktober 2009

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL

HALAMAN PENGAJUAN

HALAMAN PERSETUJUAN

HALAMAN PENGESAHAN

HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

HALAMAN MOTTO

HALAMAN PERSEMBAHAN

KATA PENGANTAR i

DAFTAR ISI iii

DAFTAR GAMBAR v

DAFTAR SIMBOL vi

ABSTRAK vii

BAB I : PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang 1

1.2 Rumusan Masalah 5

1.3 Tujuan Penelitian 5

1.4 Batasan Masalah 6

1.5 Manfaat Penelitian 6

1.6 Metode Penelitian 7

1.7 Sistematika Penulisan 8

BAB II : KAJIAN TEORI

2.1 Supremum Dan Infimum	9
2.2 Limit Fungsi	11
2.3 Fungsi Monoton	14
2.4 Fungsi Kontinu	16
2.5 Kekontinuan Seragam	17
2.6 Integral Riemann	19
2.7 Keutamaan Berbagai Macam Ilmu Dalam Islam.....	26

BAB III: PEMBAHASAN

3.1 Fungsi Terintegral Riemann-Stieltjes	30
3.2 Sifat-sifat integral Riemann-Stieltjes	43
3.3 Konsep Integral Dalam Kajian Keislaman.....	50

BAB IV: PENUTUP

4.1 Kesimpulan	52
4.2 Saran	53

DAFTAR PUSTAKA**LAMPIRAN**

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.2.1.1 Ilustrasi Limit	11
Gambar 2.3.1.1 Ilustrasi Monoton	15
Gambar 2.4.1.1 Ilustrasi Kekontinuan	16



ABSTRAK

Romli, Lilis Nurhidayati. 2009. **Kajian Integral Riemann-Stieltjes**. Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: I. Hairur Rahman, S. Si. M. Pd.
II. Abdussakir, M. Pd.

Kata Kunci: Terintegral Riemann-Stieltjes, terbatas, monoton naik.

Konsep integral pertama kali ditemukan oleh Newton yang kemudian dikembangkan oleh ahli-ahli matematika, salah satunya Riemann. Selanjutnya teori integral ini terus dikembangkan, sehingga melahirkan teori-teori integral yang baru diantara salah satunya integral Riemann-Stieltjes. Berdasarkan latar belakang tersebut, maka penulis akan mengkaji tentang *Integral Riemann-Stieltjes* beserta teorema-teoremanya. Integral Riemann-Stieltjes itu sendiri merupakan bentuk dari integral Riemann yang diperluas.

Dalam Integral Riemann-Stieltjes terdapat beberapa hal pokok yang mendasari terbentuknya teori integral tersebut, diantaranya fungsi yang terbatas pada interval $[a, b]$ dan fungsi yang monoton naik pada interval $[a, b]$.

Dalam skripsi ini menjelaskan tentang bagaimana suatu fungsi bisa dikatakan terintegral Riemann-Stieltjes dan sifat-sifat dari Integral Riemann-Stieltjes itu sendiri. Sifat-sifat integral Riemann-Stieltjes meliputi:

1. Jika $f \in \mathcal{RS}_\alpha[a, b]$ dan $g \in \mathcal{RS}_\alpha[a, b]$, maka $\int_a^b f + g \, d\alpha = \int_a^b f \, d\alpha + \int_a^b g \, d\alpha$
2. Jika $f \in \mathcal{RS}_\alpha[a, b]$, $c \in \mathbb{R}$, maka $\int_a^b cf \, d\alpha = c \int_a^b f \, d\alpha$
3. Jika $f \in \mathcal{RS}_\alpha[a, b]$; $f(x) \geq 0$, maka $\int_a^b f \, d\alpha \geq 0$
4. Jika $f \in \mathcal{RS}_\alpha[a, b]$; $f \in \mathcal{RS}_\beta[a, b]$, maka $\int_a^b f \, d(\alpha + \beta) = \int_a^b f \, d\alpha + \int_a^b f \, d\beta$
5. Jika $f \in \mathcal{RS}_\alpha[a, b]$; $c \in \mathbb{R}$, maka $\int_a^b f \, d(c\alpha) = c \int_a^b f \, d\alpha$
6. $\int_a^b f \, d\alpha = \int_a^c f \, d\alpha + \int_c^b f \, d\alpha$

Setelah penulis menjelaskan tentang konsep integral Riemann-Stieltjes dan sifat-sifatnya, maka dengan mengganti α menjadi suatu fungsi disarankan kepada peneliti selanjutnya untuk mengembangkan kajian kepada integral Henstock.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Catatan dari usaha manusia secara *continue* untuk merumuskan konsep-konsep dan unsur-unsur dalam bidang ilmu pengetahuan agar dapat diuraikan ke dalam dunia nyata adalah sebagian dari sejarah ilmu pengetahuan alam. Berbicara tentang ilmu pengetahuan, Al-Qur'an telah memberikan kepada manusia kunci ilmu pengetahuan tentang dunia dan akhirat serta menyediakan peralatan untuk mencari dan meneliti segala sesuatu agar dapat mengungkap dan mengetahui keajaiban dari kedua dunia itu (Rahman, 1992:12). Secara umum semua konsep dari disiplin ilmu telah dijelaskan dalam Al-Quran, hal itu menunjukkan keluasan suatu ilmu. Dalam Al-Qur'an hal tersebut telah dijelaskan oleh Allah SWT dengan firman-Nya dalam surat Al-Kahfi ayat 109 yang berbunyi:

قُلْ لَوْ كَانَ الْبَحْرُ مِدَادًا لِّكَلِمَاتِ رَبِّي لَنَفِدَ الْبَحْرُ قَبْلَ أَنْ تَنفَدَ كَلِمَاتُ رَبِّي وَلَوْ جِئْنَا بِمِثْلِهِ
مَدَدًا

Artinya: "Katakanlah: sekiranya lautan menjadi tinta untuk (menulis) kalimat-kalimat Tuhanku, sungguh habislah lautan itu sebelum habis (ditulis) kalimat-kalimat Tuhanku, meskipun kami datangkan tambahan sebanyak itu (pula)"(Q. S. Al-Kahfi:109)

Ayat tersebut menjelaskan bahwa hendaknya manusia memahami akan kewajiban untuk menuntut ilmu serta mempelajarinya. Dalam mempelajari ilmu tidak hanya berbekal kemampuan intelektual semata saja, tetapi perlu didukung secara bersamaan dengan kemampuan emosional dan spiritual. Sehingga apabila

seseorang telah mampu memahami suatu ilmu, maka orang tersebut dapat menyampaikan ilmu yang telah dimiliki kepada orang yang belum mengetahui dengan disertai metode yang baik, sehingga apa yang disampaikan mudah dipahami oleh orang lain. Sebagaimana firman Allah SWT yang memerintahkan Rasulullah s.a.w untuk menyampaikan kepada manusia tentang suatu ilmu kepada umat manusia. Firman Allah tersebut terletak pada surat Al-Maidah ayat 99:

مَا عَلَى الرَّسُولِ إِلَّا أَلْبَلِغُ ۖ وَاللَّهُ يَعْلَمُ مَا تُبْدُونَ وَمَا تَكْتُمُونَ ﴿٩٩﴾

Artinya: "Kewajiban Rasul tidak lain hanyalah menyampaikan (ilmu), dan Allah mengetahui apa yang kamu lahirkan dan apa yang kamu sembunyikan" (Q. S. Al-Maidah: 99).

Dalam kehidupan di dunia, manusia tidak lepas dari berbagai permasalahan. Permasalahan-permasalahan tersebut menyangkut berbagai aspek, yang dalam penyelesaiannya diperlukan suatu pemahaman melalui suatu metode dan ilmu bantu tertentu. Matematika merupakan salah satu cabang ilmu yang mendasari berbagai macam ilmu yang lain dan selalu menghadapi berbagai macam fenomena yang semakin kompleks sehingga penting untuk dipelajari. Matematika merupakan alat untuk menyederhanakan penyajian dan pemahaman masalah. Dalam bahasan matematika, suatu masalah dapat menjadi lebih sederhana untuk disajikan, dipahami, dianalisis, dan dipecahkan. Untuk keperluan tersebut, pertama dicari pokok masalahnya, kemudian dibuat rumusan atau model matematikanya (Purwanto, 1998:1).

Persoalan yang melibatkan model matematika banyak muncul dalam berbagai disiplin ilmu pengetahuan, seperti dalam bidang fisika, kimia, ekonomi, dan persoalan rekayasa. Model matematika secara luas dapat didefinisikan sebagai

sebuah formulasi atau persamaan yang mengungkapkan segi utama suatu sistem atau proses fisika dalam istilah matematika (Chapra, 1991:12).

Mempelajari matematika yang sesuai dengan paradigma *ulul albab*, tidak cukup hanya berbekal kemampuan intelektual semata, tetapi perlu didukung secara bersamaan dengan kemampuan emosional dan spiritual. Pola pikir deduktif dan logis dalam matematika juga bergantung pada kemampuan intuitif dan imajinatif serta mengembangkan pendekatan rasionalis, empiris, dan logis. Sedangkan pola pikir deduktif itu sendiri adalah pola berfikir yang didasarkan pada kebenaran-kebenaran yang secara umum sudah terbukti benar (Abdussakir, 2007:24). Sebagaimana dalam firman Allah SWT dalam surat Ali-Imran ayat 191:

الَّذِينَ يَذْكُرُونَ اللَّهَ قِيَمًا وَقُعُودًا وَعَلَىٰ جُنُوبِهِمْ وَيَتَفَكَّرُونَ فِي خَلْقِ السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ رَبَّنَا مَا خَلَقْتَ هَذَا بَطْلًا سُبْحَنَكَ فَقِنَا عَذَابَ النَّارِ ﴿١٩١﴾

Artinya: "(yaitu) orang-orang yang mengingat Allah sambil berdiri atau duduk atau dalam keadan berbaring dan mereka memikirkan tentang penciptaan langit dan bumi (seraya berkata): "Ya Tuhan kami, tiadalah Engkau menciptakan Ini dengan sia-sia, Maha Suci Engkau, Maka peliharalah kami dari siksa neraka".(QS. Al-Imran:191)

Sesuai dengan tujuan pembelajaran matematika yang melatih cara berfikir secara sistematis, logis, analitis dan kritis, maka didalam matematika terdapat satu bidang yang dalam mempelajarinya dituntut untuk berfikir secara analitis, yaitu bidang analisis. Salah satu teori yang dipelajari dalam bidang analisis adalah teori integral. Seperti ilmu-ilmu yang lain di dalam matematika, teori integral merupakan ilmu deduktif dan masih tetap berkembang seperti ilmu-ilmu yang lainnya, baik dari segi teori maupun aplikasinya.

Konsep integral pertama kali dikemukakan oleh matematikawan berkebangsaan Inggris, Sir Issact Newton (1642-1727) sehingga disebut teori Integral Newton. Teori integral Newton ini kemudian memicu perkembangan teori integral yang terbukti dengan munculnya beberapa nama matematikawan seperti Bernoulli (1700-1783), Euler (1707-1783) dan Bernhard Riemann (1826-1866). Kemudian dikembangkan secara modern oleh Augustin-Luois Cauchy (1789-1857) dan Stieltjes (1856-1894).

Integral didefinisikan sebagai kebalikan dari operasi pendiferensialan, yaitu sebagai bentuk yang paling umum dari anti turunan. Integral adalah salah satu pokok bahasan yang terdapat dalam materi Analisis Real, Kalkulus, Persamaan Diferensial Biasa, dan Persamaan Diferensial Parsial. Beberapa jenis integral yang dipelajari adalah integral tentu/ Integral Riemann dan integral tak tentu, integral rangkap/integral lipat, dll.

Dewasa ini semakin banyak muncul penggunaan model matematika maupun penalaran matematika sebagai alat bantu dalam menyelesaikan permasalahan yang dihadapi dalam berbagai disiplin ilmu. Teori integral merupakan konsep yang sangat penting untuk matematikawan dan untuk orang yang menggunakan analisis matematika untuk menyelesaikan berbagai macam persoalan yang berkaitan dengan kalkulus. Teori integral ini berhubungan dengan keterbatasan, kekontinuan, kedifferensialan, dll. Aplikasi dari teori integral ini mencakup banyak hal, diantaranya adalah dalam hal pengetahuan, pembangunan, bahkan bisnis.

Seorang matematikawan asal Belanda, Stieltjes menyusun sebuah teori integral baru yang merupakan bentuk umum dari teori Integral Riemann. Sehingga dinamakan Integral Riemann-Stieltjes. Integral Riemann-Stieltjes ini memuat Integral Riemann, tetapi tidak berlaku sebaliknya. Dengan demikian sifat-sifat atau teorema-teorema tentang Integral Riemann-Stieltjes akan berlaku juga untuk integral Riemann setelah diadakan pengkhususan.

Jika suatu fungsi mempunyai nilai jumlahan atas Riemann-Stieltjes dan nilai jumlahan bawah Riemann-Stieltjes yang sama, maka dikatakan bahwa fungsi tersebut dapat *Terintegral Riemann-Stieltjes* pada suatu selang tertutup dan nilai ini dinamakan *Integral Riemann-Stieltjes* suatu fungsi pada suatu interval tertutup.

Terkait dengan pemaparan diatas, maka teori integral Riemann-Stieltjes merupakan salah satu kajian yang menarik untuk dikembangkan dan dikaji lebih dalam. Oleh karena itu, penulis tertarik ingin mengkaji lebih dalam tentang teori Integral Riemann-Stieltjes.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, maka rumusan masalah dalam penulisan skripsi ini antara lain:

1. Bagaimana suatu fungsi dapat dikatakan terintegral Riemann-Stieltjes pada $[a, b]$?
2. Bagaimana sifat-sifat dari Integral Riemann-Stieltjes?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan pada latar belakang dan rumusan masalah, maka tujuan penelitian yang dapat diambil adalah:

1. Menjelaskan tentang fungsi yang dapat terintegral Riemann-Stieltjes pada $[a, b]$.
2. Menjelaskan tentang sifat-sifat dari Integral Riemann-Stieltjes.

1.4 Batasan Masalah

Oleh karena luasnya ruang lingkup konsep dari Integral Riemann-Stieltjes, maka dalam penulisan ini penulis membatasi ruang lingkup permasalahan penelitian yaitu pada sifat-sifat dari Integral Riemann-Stieltjes pada interval tertutup $[a, b]$ garis riil.

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat yang dapat diambil dari penulisan ini adalah sebagai berikut:

1. Manfaat Bagi Penulis
 - a. Untuk memperdalam dan mengembangkan wawasan disiplin ilmu yang telah dipelajari untuk mengkaji permasalahan tentang Integral Riemann-Stieltjes.
 - b. Sebagai suatu bentuk partisipasi penulis dalam memberikan kontribusi dalam pengembangan keilmuan, khususnya dalam bidang matematika.

2. Manfaat Bagi Pembaca

- a. Sebagai tambahan wawasan dan pengetahuan tentang Integral Riemann-Stieltjes
- b. Sebagai motivasi kepada para pembaca agar dapat mempelajari dan mengembangkan ilmu dalam bidang matematika.

3. Manfaat Bagi Instansi

Untuk menambah wacana, informasi serta pengetahuan tentang Integral Riemann-Stieltjes.

1.6 Metode Penelitian

Metode merupakan cara yang digunakan untuk mencapai tujuan. Kebanyakan metode mengandung proses atau langkah-langkah tertentu untuk memperoleh suatu hasil. Untuk menunjang suatu metode, dibutuhkan adanya literatur-literatur. Metode yang menggunakan beberapa literatur untuk dikaji sehingga diperoleh suatu hasil disebut studi literatur.

Metode kajian yang digunakan dalam penulisan ini adalah studi literatur.

Adapun Langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah :

1. Merumuskan masalah

Sebelum penulis melakukan penelitian, terlebih dahulu disusun rencana penelitian bermula dari suatu masalah tentang *Integral Riemann-Stieltjes*.

2. Mengumpulkan Data

Mengumpulkan data melalui buku-buku antara lain *Robert. G. Bartle (The Elements of Real Analysis)*, *Effendi Hutahaeen (Analisis Real II)*, *Rudin. W (Principles of Mathematical Analysis Third Edition)* dan sumber-sumber lain yang relevan.

3. Mengolah Data

Langkah-langkah yang diambil untuk menganalisis data dalam penelitian ini adalah :

- a. Mendefinisikan *Integral Riemann-Stieltjes*.
- b. Pengumpulan teorema-teorema tentang *Integral Riemann-Stieltjes*.
- c. Membuktikan teorema-teorema *Integral Riemann-Stieltjes*.
- d. Memberikan contoh yang berkaitan dengan definisi dan teorema beserta penyelesaiannya.

4. Menarik Kesimpulan

1.7 Sistematika Pembahasan

Untuk mempermudah pembaca memahami tulisan ini, penulis membagi tulisan ini ke dalam empat bab sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN

Dalam bab ini dijelaskan latar belakang masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian dan sistematika pembahasan.

BAB II KAJIAN TEORI

Dalam bab ini dikemukakan hal-hal yang mendasari teori yang akan dikaji. Memuat supremum dan infimum, limit fungsi, fungsi monoton, fungsi kontinu, turunan dan Integral Riemann.

BAB III PEMBAHASAN

Dalam bab ini dipaparkan hasil-hasil kajian yang meliputi tentang sifat-sifat dan eksistensi dari Integral Riemann-Stieltjes itu sendiri.

BAB IV PENUTUP

Dalam bab ini dikemukakan kesimpulan akhir penelitian dan diajukan beberapa saran yang berkaitan dengan pembahasan.

BAB II

KAJIAN TEORI

Pada bagian ini akan dibahas beberapa definisi, sifat, dan teorema yang akan digunakan sebagai dasar pembahasan dalam bab selanjutnya. Teori-teori yang akan dibahas adalah supremum dan infimum, limit fungsi, fungsi monoton, fungsi kontinu, kekontinuan seragam dan integral Riemann.

2.1 Supremum dan Infimum

Definisi 2.1.1

Diberikan subset tak kosong $S \subset \mathbb{R}$.

- (a) Himpunan S dikatakan terbatas ke atas (bounded above) jika terdapat suatu bilangan $u \in \mathbb{R}$ sedemikian hingga $s \leq u$ untuk semua $s \in S$. Setiap bilangan u seperti ini disebut dengan batas atas (upper bound) dari S .
- (b) Himpunan S dikatakan terbatas ke bawah (bounded below) jika terdapat suatu bilangan $w \in \mathbb{R}$ sedemikian hingga $w \leq s$ untuk semua $s \in S$. Setiap bilangan w seperti ini disebut dengan batas bawah (lower bound) dari S .
- (c) Suatu himpunan dikatakan terbatas (bounded) jika terbatas ke atas dan terbatas ke bawah. Jika tidak, maka dikatakan tidak terbatas (unbounded) (Riyanto, 2008:18).

Contoh 2.1.2

Misalkan $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ himpunan A terbatas di atas ,karena $a \leq 8$, untuk semua $a \in A$ himpunan A juga terbatas di bawah karena $0 \leq a$, untuk semua $a \in A$ semua bilangan real $u \leq 6$ merupakan batas atas untuk A , dan semua

bilangan real $u \leq 1$ merupakan batas bawah untuk A , Jadi, himpunan A adalah terbatas.

Definisi 2.1.3

$M \in \mathbb{R}$ dikatakan batas atas terkecil dari S (Supremum S), dan biasanya disimbolkan $M = \sup S$. Dimana:

- a) $M \in U_S$, U_S adalah batas atas dari S
- b) $M \leq u, \forall u \in U_S$

$m \in \mathbb{R}$ dikatakan batas bawah terbesar dari S (Infimum S), dan biasanya disimbolkan $m = \inf S$. Dimana:

- a) $m \in L_S$, L_S adalah batas bawah dari S
- b) $m \leq l, \forall l \in U_S$ (Abdussakir. 2006:35).

Contoh 2.1.4

Himpunan $S = \{x: 0 \leq x \leq 1\}$ mempunyai batas atas 1. Tentukan supremum dari S .

Penyelesaian:

Akan dibuktikan bahwa 1 merupakan supremumnya. Jika $v < 1$, maka terdapat $s' \in S$ sedemikian sehingga $v < s'$. Oleh karena itu, v bukan merupakan batas atas S dan karena v merupakan sebarang $v < 1$, maka dapat disimpulkan bahwa $\sup S = 1$.

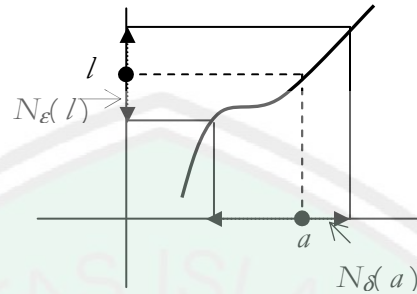
2.2 Limit Fungsi

Definisi 2.2.1

Diketahui fungsi $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dan a titik limit himpunan A . Jika ada bilangan $l \in \mathbb{R}$ sehingga untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ sehingga jika $x \in A \cap N_\delta(a)$ dan $0 < |x - a| < \delta$, maka

$$|f(x) - l| < \varepsilon \text{ (Bartle \& Sherbert, 2000:98)}$$

Untuk lebih jelasnya diberikan ilustrasi limit dibawah ini:



Gambar 2.2.1.1 ilustrasi limit

Pertidaksamaan $0 < |x - a|$ menunjukkan bahwa $x \neq a$, sehingga jika $x \in A \cap N_\delta(a)$ berakibat $f(x) \in N_\epsilon(l)$. Sehingga diperoleh $|f(x) - l| < \epsilon$, biasanya dituliskan dengan $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$.

Contoh 2.2.2

Tunjukkan bahwa $\lim_{x \rightarrow 2} (2x - 1) = 3$

Penyelesaian:

Untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ sedemikian sehingga $0 < |x - 2| < \delta$

Maka $|f(x) - 3| < \epsilon$, dimana $f(x) = 2x - 1$, sehingga

$$|f(x) - 3| = |(2x - 1) - 3| = |2x - 4| = 2|x - 2| < \epsilon$$

Hal ini berakibat $|x - 2| < \frac{\epsilon}{2}$, misalkan $\delta = \frac{\epsilon}{2}$

Sehingga diperoleh $0 < |x - 2| < \delta = \frac{\epsilon}{2}$

Maka $|f(x) - 3| = 2|x - 2| < 2\delta = \epsilon$

Karena $\epsilon > 0$, maka $\delta = \frac{\epsilon}{2} > 0$

Sehingga dapat dipastikan bahwa $f(x) \in N_\epsilon(3)$ dan $x \in N_\delta(2)$

Hal ini membuktikan bahwa $\lim_{x \rightarrow 2} (2x - 1) = 3$

Teorema 2.2.3

Jika $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ada maka nilainya tunggal (Parzynski & Zipse, 1982:71).

Bukti:

Misalkan $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ dan $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = K$. Akan ditunjukkan bahwa $L = K$.

Diberikan $\varepsilon > 0$ sebarang, maka terdapat $\delta_1, \delta_2 > 0$ sehingga:

- i. $|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$, untuk setiap $x \in A$ dengan $0 < |x - a| < \delta_1$
- ii. $|f(x) - K| < \frac{\varepsilon}{2}$, untuk setiap $x \in A$ dengan $0 < |x - a| < \delta_2$

Apabila diambil $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, maka untuk setiap $x \in A$ dengan $0 < |x - a| < \delta$, berlaku:

$$|L - K| \leq |L - f(x)| + |f(x) - K| < \varepsilon$$

diperoleh $|L - K| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

Hal ini berarti $L = K$.

Contoh 2.2.4

Tunjukkan bahwa $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ tidak ada.

Penyelesaian :

Untuk $x > 0$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1$$

Untuk $x < 0$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{x} = -1$$

Karena nilai limitnya tidak tunggal, maka $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ tidak ada.

Teorema 2.2.5

Misalkan $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = K, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ berlaku

1. $\lim_{x \rightarrow a}(\alpha f)(x) = \alpha \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha K$ untuk sebarang konstanta α .
2. $\lim_{x \rightarrow a}(f \pm g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = K \pm L$
3. $\lim_{x \rightarrow a}(fg)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = KL$
4. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f}{g}(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{K}{L}$, jika $L \neq 0$ (Bartle & Sherbert, 2000:106)

Bukti :

Diberikan $\varepsilon > 0$ sebarang, maka terdapat $\delta > 0$.

1. Untuk sebarang α , maka diperoleh:

$$\lim_{x \rightarrow a}(\alpha f)(x) = \alpha \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha \cdot K$$

2. $\lim_{x \rightarrow a}(f \pm g)(x) = \lim_{x \rightarrow a}\{f(x) \pm g(x)\}$

$$= \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$= K \pm L$$

3. $\lim_{x \rightarrow a}(fg)(x) = \lim_{x \rightarrow a}\{f(x) \cdot g(x)\}$

$$= \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$= KL$$

4. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f}{g}(x) = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

$$= \frac{K}{L} \quad \text{dengan } L \neq 0$$

Contoh 2.2.6

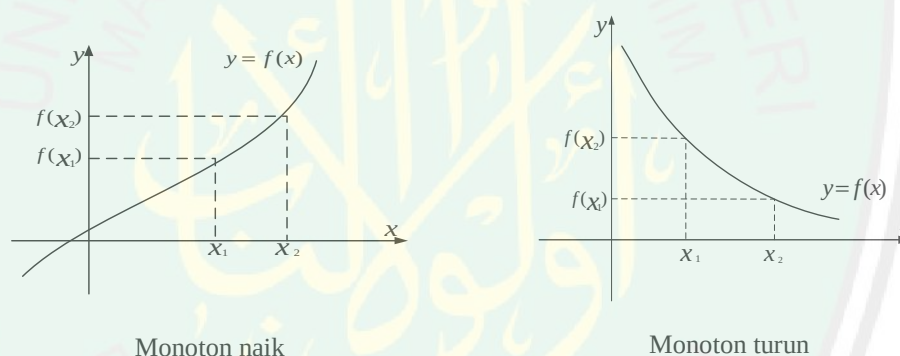
$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 2}(2x^2 - 7x + 6) &= \lim_{x \rightarrow 2} 2x^2 - \lim_{x \rightarrow 2} 7x + \lim_{x \rightarrow 2} 6 \\
 &= 2 \lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 7 \lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 6 \\
 &= 2(\lim_{x \rightarrow 2} x)^2 - 7 \lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 6 \\
 &= 2 \cdot 2^2 - 7 \cdot 2 + 6 = 0
 \end{aligned}$$

2.3 Fungsi Monoton

Definisi 2.3.1

Diketahui fungsi $f: A \rightarrow B$ disebut monoton naik pada A jika $f(x_1) \leq f(x_2)$ untuk setiap $x_1, x_2 \in A$ dengan $x_1 < x_2$ dan $f(x)$ disebut monoton turun pada A jika $f(x_1) \geq f(x_2)$ untuk setiap $x_1, x_2 \in A$ dengan $x_1 < x_2$ (Parzynski & Zipse, 1982:89)

Fungsi f dapat dikatakan monoton naik tegas pada A jika untuk setiap $x_1, x_2 \in A$ dan $x_1 < x_2$, maka $f(x_1) < f(x_2)$. Dan Fungsi dapat dikatakan monoton turun tegas pada A jika untuk setiap $x_1, x_2 \in A$ dan $x_1 < x_2$, maka $f(x_1) > f(x_2)$.



Gambar 2.3.1.1 Ilustrasi Monoton

Contoh 2.3.2

Diberikan fungsi $f(x) = x^3$ pada $\mathbb{R}$. Tunjukkan bahwa f adalah monoton naik tegas pada $\mathbb{R}$.

Penyelesaian:

Misalkan ada dua bilangan riil yang tak nol yaitu a dan b .

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 > 0$$

$$\text{Atau } a^2 + b^2 > -2ab,$$

$$\text{Sehingga diperoleh } a^2 + b^2 > \frac{1}{2}(a^2 + b^2) > -ab,$$

$$\text{Dan } a^2 + ab + b^2 > \frac{1}{2}(a^2 + b^2) > 0$$

Misal $a = x_1$ dan $b = x_2$

Karena menurut definisi $x_1 < x_2$, maka $x_2 - x_1 > 0$ dan sesuai dengan argumen diatas $x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2 > 0$

Sehingga $x_1^3 - x_2^3 = (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2) > 0$

Jadi $f(x_1) = x_1^3 < x_2^3 = f(x_2)$.

2.4 Fungsi Kontinu

Definisi 2.4.1

Suatu fungsi f dikatakan kontinu di x_0 jika $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ dan untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ sedemikian sehingga

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

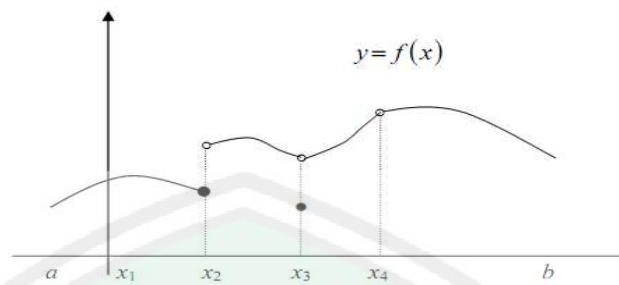
dimana $|x - x_0| < \delta$ (Parzynski & Zipse, 1982:94)

Definisi 2.4.1 di atas secara tidak langsung mensyaratkan tiga hal agar fungsi f kontinu di x_0 , yaitu: (i). $f(x_0)$ ada atau terdefiniskan,

(ii). $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ada

(iii). $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Secara grafik, fungsi f kontinu di $x = a$ jika grafik fungsi f pada suatu interval yang memuat a tidak terpotong di titik $(a, f(a))$. Jika fungsi f tidak kontinu di a maka dikatakan f diskontinu di a . Pada gambar, f kontinu di x_1 dan di setiap titik di dalam (a, b) kecuali di titik-titik x_2, x_3 dan x_4 . Fungsi f diskontinu di x_2 karena $\lim_{x \rightarrow x_2} f(x)$ tidak ada, diskontinu di x_3 karena $\lim_{x \rightarrow x_3} f(x)$ tidak sama dengan nilai fungsi di x_3 (meskipun keduanya ada), dan diskontinu di x_4 karena nilai fungsi di titik ini tidak ada.



Gambar 2.4.1.1 Ilustrasi Kekontinuan

Definisi 2.4.2

Diberikan $A \subseteq \mathbb{R}$ dan $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Jika B subset dari A , f dikatakan kontinu pada B jika f kontinu disetiap elemen B (Bartle & Sherbert, 2000:121)

Contoh 2.4.3

Tunjukkan bahwa fungsi konstan $f(x) := b$ kontinu pada $\mathbb{R}$.

Penyelesaian:

Jika $c \in \mathbb{R}$, maka $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = b$. Diberikan $f(c) = b$, sehingga diperoleh $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$. Hal ini menunjukkan bahwa f kontinu disetiap titik $c \in \mathbb{R}$, sehingga f kontinu pada $\mathbb{R}$.

2.5 Kekontinuan Seragam

Definisi 2.5.1

Fungsi f dikatakan kontinu seragam pada I jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika $x_1, x_2 \in I$ dengan $|x_1 - x_2| < \delta$, maka $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ (Parzynski & Zipse, 1982:111)

Contoh 2.5.2

Tunjukkan bahwa $f(x) = x^2$ kontinu seragam pada $[0, b]$.

Penyelesaian:

Diberikan $f(x) = x^2$ pada $[0, b]$, dimana b adalah sebarang bilangan riil positif.

Diberikan $\varepsilon > 0$ dan pilih $\delta = \varepsilon/2b$, jika $x_1, x_2 \in [0, b]$ dan $|x_1 - x_2| < \delta$.

$$\begin{aligned} \text{Diperoleh } |f(x_1) - f(x_2)| &= |x_1^2 - x_2^2| \\ &= |x_1 + x_2||x_1 - x_2| \leq 2b|x_1 - x_2| \\ &< 2b\delta = \varepsilon \end{aligned}$$

Sehingga $f(x) = x^2$ adalah kontinu seragam pada $[0, b]$.

Teorema 2.5.3

Jika fungsi f kontinu seragam pada I maka fungsi f kontinu pada I (Parzynski & Zipse, 1982:112)

Bukti:

Jika fungsi f kontinu seragam pada I , maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ berlaku $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ untuk setiap $x_1, x_2 \in I$ dimana $|x_1 - x_2| < \delta$ misalkan $x_1 = x$ dan $x_2 = x_0$, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ dimana $|x - x_0| < \delta$

Sehingga berlaku $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, atau dengan kata lain fungsi f kontinu pada $x_0 \in I$.

Contoh 2.5.4

Tunjukkan bahwa $f(x) = 1/x$ tidak kontinu seragam pada $(0,1)$

Penyelesaian:

fungsi f kontinu pada $\mathbb{R} - \{0\}$ dan f kontinu pada $(0,1)$. Misalkan $\varepsilon = \frac{1}{2}$ dan sebarang $\delta > 0$. Pilih bilangan asli $n > 1$ sedemikian sehingga $\frac{1}{n} < \delta$ dan $x_1 = \frac{1}{n}$ dan $x_2 = \frac{1}{n+1}$. Untuk $x_1, x_2 \in (0,1)$, maka

$$|x_1 - x_2| = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \delta$$

Disisi lain

$$|f(x) - f(x_0)| = \left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right| = |n - (n+1)| = 1 > \varepsilon$$

Untuk $\varepsilon = \frac{1}{2}$ tidak terdapat $\delta > 0$ yang memenuhi. Sehingga fungsi $f(x) = \frac{1}{x}$ tidak kontinu seragam pada $(0,1)$.

2.6 Integral Riemann

Misalkan fungsi riil f dan terbatas yang didefinisikan pada selang tertutup $[a, b]$.

Untuk setiap partisi P pada $[a, b]$ dibentuk jumlahan atas

$$U = \sum_{i=1}^n M_i (x_i - x_{i-1})$$

dari jumlahan bawah

$$L = \sum_{i=1}^n m_i (x_i - x_{i-1})$$

dengan $M_i = \sup f(x)$ dan $m_i = \inf f(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$. dengan $x_{i-1} \leq x \leq x_n$.

maka dapat dibentuk

$$\int_a^b f(x) dx = \inf U(P, f)$$

disebut *Integral Atas Riemann* fungsi f pada $[a, b]$ dan

$$\int_a^b f(x) dx = \sup L(P, f)$$

disebut *Integral Bawah Riemann* fungsi f pada $[a, b]$ dengan infimum dan supremum diambil meliputi semua partisi P pada $[a, b]$, jika nilai integral atas dan integral bawah sama, maka dikatakan bahwa f dapat *Riemann Integrable* pada $[a, b]$. Nilai yang sama ini dinamakan *Integral Riemann* fungsi f pada $[a, b]$ dan ditulis

$$\int_a^b f(x) dx$$

jadi

$$\int_a^b f(x) dx = \overline{\int}_a^b f(x) dx = \underline{\int}_a^b f(x) dx$$

Definisi 2.6.1

Fungsi $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dikatakan terintegral Riemann pada $[a, b]$ jika terdapat bilangan $l \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika P adalah partisi $[a, b]$, maka

$$|S(f; P) - l| < \varepsilon \text{ (Bartle \& Sherbert, 2000:196)}$$

Himpunan semua fungsi yang terintegral Riemann pada $[a, b]$ dinotasikan dengan $\mathfrak{R}[a, b]$.

Contoh 2.6.2

Tunjukkan bahwa untuk setiap fungsi konstan $f(x) = c$ terintegral Riemann pada interval $[a, b]$.

Penyelesaian:

Misal P sebarang partisi $[a, b]$.

$$P: a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < x_{i+1} < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

$$\text{maka } U(P, f) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^n c \Delta x_i = c \sum_{i=1}^n \Delta x_i = c(b - a)$$

$$\text{dan } L(P, f) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^n c \Delta x_i = c \sum_{i=1}^n \Delta x_i = c(b - a)$$

sehingga $U(P, f) = L(P, f) = c(b - a)$ untuk setiap P

dengan demikian $\overline{\int} f = c(b - a)$ dan $\underline{\int} f = c(b - a)$

jadi f terintegral Riemann dengan $\int_a^b f = c(b - a)$

Lemma 2.6.3

Untuk setiap partisi P pada $[a, b]$, maka berlaku

$$m(b - a) \leq L(P, f) \leq U(P, f) \leq M(b - a)$$

Bukti:

untuk setiap $i = 1, 2, 3, \dots, n$

$$m(x_i - x_{i-1}) \leq m_i(x_i - x_{i-1}) \leq M_i(x_i - x_{i-1}) \leq M(x_i - x_{i-1})$$

dimana

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n m(x_i - x_{i-1}) &\leq \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n M(x_i - x_{i-1})\end{aligned}$$

maka

$$m \sum_{i=1}^n \Delta x_i \leq m_i \sum_{i=1}^n \Delta x_i \leq M_i \sum_{i=1}^n \Delta x_i \leq M \sum_{i=1}^n \Delta x_i.$$

Sehingga terbukti bahwa

$$m(b-a) \leq L(P, f) \leq U(P, f) \leq M(b-a)$$

Definisi 2.6.4

Diberikan P dan Q partisi $[a, b]$ dan $P \subset Q$ sehingga dikatakan bahwa partisi P lebih halus dari pada Q , atau P suatu penghalusan Q . Jika P_1 dan P_2 partisi pada $[a, b]$ maka $P^* = P_1 \cup P_2$ merupakan partisi penghalusan untuk P_1 dan P_2 partisi P^* disebut penghalusan gabungan untuk P_1 dan P_2 (Parzynski & Zipse, 1982:153)

Teorema 2.6.5

Jika partisi P^* lebih halus dari partisi P maka $L(P, f) \geq L(P^*, f)$ dan $U(P, f) \leq U(P^*, f)$ (Parzynski & Zipse, 1982:153)

Bukti:

Diandaikan bahwa P^* hanya memuat satu titik sebut c .

dimana $x_{i-1} < c < x_i$.

Diberikan $M_1^* = \sup f(x)$ dan $m_1^* = \inf f(x)$ pada $[x_{i-1}, c]$

dan $M_2^* = \sup f(x)$ dan $m_2^* = \inf f(x)$ pada $[c, x_i]$, maka

$$\begin{aligned}m_i \Delta x_i &= m_i(x_i - c) + m_i(c - x_{i-1}) \\ &\leq m_2^*(x_i - c) + m_1^*(c - x_{i-1})\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}M_i \Delta x_i &= M_i(x_i - c) + M_i(c - x_{i-1}) \\ &\leq M_2^*(x_i - c) + M_1^*(c - x_{i-1})\end{aligned}$$

itu menunjukkan bahwa $L(P, f) \leq L(P^*, f)$ dan $U(P, f) \geq U(P^*, f)$ jika P^* memuat lebih dari satu titik misalnya n titik, maka bukti dikerjakan dengan mengulang proses di atas sampai n kali.

Lemma 2.6.6

Untuk setiap fungsi f yang terbatas pada selang $[a, b]$ didefinisikan

$$\overline{\int} f \leq \int f \text{ (Parzynski \& Zipse, 1982:153)}$$

Bukti:

Misalkan P_1 dan P_2 partisi dari selang $[a, b]$ dan $P^* = P_1 \cup P_2$.

sehingga berakibat, $L(P_1, f) \leq L(P^*, f) \leq U(P^*, f) \leq U(P_2, f)$

$$\int f = \sup L(P^*, f)$$

dan

$$\overline{\int} f = \inf U(P^*, f)$$

karena

$$\sup L(P^*, f) \leq \inf U(P^*, f)$$

Sehingga

$$\overline{\int} f \leq \int f$$

Teorema 2.6.7

Diberikan fungsi $f \in \mathfrak{R} [a, b]$ jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat partisi P pada $[a, b]$ sehingga berlaku $U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon$ (Parzynski & Zipse, 1982:154)

Bukti:

Syarat cukup: Untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat partisi P pada $[a, b]$, sehingga berlaku:

$$L(P, f) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq U(P, f)$$

jadi

$$0 \leq \int_a^b f(x)dx - \int_a^b f(x)dx \leq U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon$$

dengan demikian, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, sehingga

$$U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon$$

maka diperoleh hubungan

$$0 \leq \int_a^b f(x)dx - \int_a^b f(x)dx < \varepsilon$$

Syarat perlu: Sekarang diandaikan $f \in \mathcal{R}[a, b]$ dan diberikan $\varepsilon > 0$ karena

$$\int_a^b f(x)dx = \sup L(P, f) = \inf U(P, f)$$

maka terdapat partisi P_1 dan P_2 pada $[a, b]$ sedemikian hingga

$$\int_a^b f(x)dx \leq U(P_1, f) < \int_a^b f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2}$$

dan

$$\int_a^b f(x)dx - \frac{\varepsilon}{2} < L(P_2, f) \leq \int_a^b f(x)dx$$

Jika $P^* = P_1 \cup P_2$, maka berlaku

$$\int_a^b f(x)dx \leq U(P^*, f) \leq U(P_1, f) < \int_a^b f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\int_a^b f(x)dx - \frac{\varepsilon}{2} < L(P_2, f) \leq L(P^*, f) < \int_a^b f(x)dx$$

jadi diperoleh

$$\int_a^b f(x)dx - \frac{\varepsilon}{2} < L(P^*, f) \leq U(P^*, f) < \int_a^b f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2}$$

sehingga

$$U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon$$

Teorema 2.6.8

Jika f kontinu pada $[a, b]$, maka f terintegral Riemann pada $[a, b]$ (Parzynski & Zipse, 1982:156)

Bukti:

Diketahui f kontinu pada $[a, b]$ dan diberikan $\varepsilon > 0$. Terdapat partisi P pada $[a, b]$ dimana $U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon$. Jika f kontinu pada $[a, b]$, terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga $|f(u) - f(v)| < \varepsilon / (b - a)$, dimana $u, v \in [a, b]$ dengan $|u - v| < \delta$.

Misal P sebarang partisi pada $[a, b]$ dengan $|P| < \delta$ dan $u_i, v_i \in [x_{i-1}, x_i]$ untuk $i = 1, 2, \dots, n$ sedemikian sehingga $f(u_i) = M_i$ dan $f(v_i) = m_i$. Sekarang $|u_i - v_i| < x_i - x_{i-1} = \Delta x_i \leq |P| < \delta$ dan $M_i - m_i = |f(u_i) - f(v_i)| < \varepsilon / (b - a)$ untuk $i = 1, 2, \dots, n$.

Sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} U(P, f) - L(P, f) &= \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i - \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \\ &= \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i \\ &= \frac{\varepsilon}{(b-a)} (b-a) = \varepsilon \end{aligned}$$

Menurut teorema 2.6.7 menunjukkan bahwa f terintegral Riemann pada $[a, b]$.

Teorema 2.6.9

Jika f monoton pada $[a, b]$, maka f terintegral Riemann pada $[a, b]$ (Parzynski & Zipse, 1982:156)

Bukti:

Jika f fungsi konstan pada $[a, b]$ maka f terintegral Riemann. Diasumsikan f monoton naik pada $[a, b]$ dan $f(a) < f(b)$. Diberikan $\varepsilon > 0$, akan ditunjukkan bahwa terdapat partisi P pada $[a, b]$ dimana $U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon$. Misal sebarang partisi P dengan $|P| < \varepsilon / [f(b) - f(a)]$.

Maka f naik pada $[a, b]$, $f(x_i) = M_i$ dan $f(x_{i-1}) = m_i$ untuk $i = 1, 2, \dots, n$.

$$\begin{aligned} \text{Sehingga } U(P, f) - L(P, f) &= \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i - \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \\ &= \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) \Delta x_i \\
&< \frac{\varepsilon}{[f(a)-f(b)]} \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) \\
&= \frac{\varepsilon}{[f(a)-f(b)]} f(x_n) - f(x_0) = \varepsilon
\end{aligned}$$

Menurut teorema 2.6.7 menunjukkan bahwa f terintegral Riemann pada $[a, b]$.

Contoh 2.6.10

Buktikan bahwa $\int_0^1 f(x)dx$ ada, dimana

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{jika } x \neq 0 \\ 1 & \text{jika } x = 0 \end{cases}$$

Penyelesaian:

$(\sin x)/x$ kontinu untuk $x \neq 0$ dan $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)/x = 1 = f(0)$

Sehingga f kontinu pada $[0,1]$

Menurut teorema 2.6.8 f Riemann Integrable pada $[0,1]$.

Jadi $\int_0^1 f(x)dx$ ada.

2.7 Keutamaan Berbagai Macam Ilmu Dalam Islam

Pengetahuan tidak bisa dipungkiri merupakan suatu faktor penentu kemajuan suatu bangsa dan masyarakat. Bangsa yang maju biasanya ditandai dengan tingkat pengetahuan yang baik dalam segala aspek kehidupan. Begitu tingginya nilai ilmu dalam peradaban manusia, Allah menegaskan dalam Al Qur'an bahwa Allah akan meninggikan derajat orang-orang yang berilmu dan beriman, seperti yang telah dijelaskan dalam QS.

Al-Mujadillah ayat 11:

يَتْلُوهَا الَّذِينَ ءَامَنُوا إِذَا قِيلَ لَكُمْ تَفَسَّحُوا فِي الْمَجَالِسِ فَافْسَحُوا يَفْسَحِ اللَّهُ لَكُمْ وَإِذَا قِيلَ انشُزُوا فَانْشُزُوا يَرَفَعِ اللَّهُ الَّذِينَ ءَامَنُوا مِنْكُمْ وَالَّذِينَ أُوتُوا الْعِلْمَ دَرَجَاتٍ وَاللَّهُ بِمَا تَعْمَلُونَ خَبِيرٌ ﴿١١﴾

11. Hai orang-orang beriman apabila kamu dikatakan kepadamu: "Berlapang-lapanglah dalam majlis", Maka lapangkanlah niscaya Allah akan memberi kelapangan untukmu. dan apabila dikatakan: "Berdirilah kamu", Maka berdirilah, niscaya Allah akan meninggikan orang-orang yang beriman di antaramu dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat. dan Allah Maha mengetahui apa yang kamu kerjakan. (QS. Al-Mujadillah : 11)

Penjelasan di atas menunjukkan bahwa betapa Islam memberikan perhatian yang besar terhadap ilmu. Apapun bentuk ilmu itu, selama bisa memberikan kemanfaatan, maka ilmu tersebut harus dicari. Sehingga sangat bijaksana bahwa Allah dan Rasul-Nya tidak menyebut suatu disiplin ilmu tertentu yang menjadi penyebab seseorang akan diangkat derajatnya oleh Allah SWT, demikian juga tidak menyebut menunjuk ilmu-ilmu tertentu untuk dipelajari.

Dalam realitas sebagian masyarakat muslim, muncul kategorisasi ilmu menjadi dua hal, yakni ilmu dunia dan ilmu akhirat. Pembagian ini secara tidak langsung menjadikan banyak orang beranggapan bahwa mempelajari ilmu-ilmu umum, seperti kedokteran, biologi, ekonomi, matematika atau yang lain tidak terkategori sebagai ibadah kepada Allah. Akibat dari sikap ini, siapapun yang mempelajari ilmu-ilmu tersebut tidak mendapatkan pahala dari Allah SWT. Sebaliknya bagi yang mempelajari ilmu agama, seperti tasawuf, fiqih, aqidah, tajwid, bahasa Arab atau yang lain bisa termasuk di dalam rangkaian ibadah kepada Allah yang dengan sendirinya mendapat pahala dari Allah SWT.

Merujuk kepada sumber ilmu, maka tidak pada tempatnya jika ada orang meyakini bahwa mempelajari ilmu kedokteran atau matematika, misalnya tidak terkategori sebagai ibadah dan sebaliknya mempelajari fiqih, hadits dikategorikan sebagai ibadah. Suatu aktifitas ilmu akan diakui sebagai amalan ibadah manakala dilakukan hanya untuk mencari ridha Allah dan bukan yang lain. Dengan kata lain, orang yang mempelajari Al-Qur'an atau Hadist sekalipun, kalau tidak diniatkan kepada mencari ridha Allah, maka dipastikan yang bersangkutan tidak mendapatkan pahala dari Allah.

Sebaliknya orang yang mempelajari matematika misalnya, demi menciptakan kesejahteraan masyarakat dalam rangka mencari ridha Allah, pasti yang bersangkutan akan mendapat pahala dari-Nya.

Allah SWT telah memerintahkan hamba-Nya untuk menjadikan al-Qur'an dan Sunnah sebagai sumber pertama ilmu pengetahuan. Hal ini dikarenakan keduanya adalah langsung dari sisi Allah SWT dan dalam pengawasannya, sehingga terjaga dari kesalahan, karena ia diturunkan dari Yang Maha Berilmu dan Yang Maha Adil. Dalam surat Luqman ayat 27 Allah SWT berfirman:

وَلَوْ أَنَّ فِي الْأَرْضِ مِنْ شَجَرَةٍ أَقْلَمٌ وَالْبَحْرُ يَمُدُّهُ مِنْ بَعْدِهِ سَبْعَةُ أَنْحَارٍ مَا نَفَذْتُ كَلِمَتُ اللَّهِ إِنَّ اللَّهَ عَزِيزٌ حَكِيمٌ ﴿٢٧﴾

27. Dan seandainya pohon-pohon di bumi menjadi pena dan laut (menjadi tinta), ditambahkan kepadanya tujuh laut (lagi) sesudah (kering)nya, niscaya tidak akan habis-habisnya (dituliskan) kalimat Allah. Sesungguhnya Allah Maha Perkasa lagi Maha Bijaksana. (QS.Luqman : 27)

Yang dimaksud dengan kalimat Allah ialah ilmu-Nya dan nikmat-Nya. Karena begitu luasnya ilmu Allah SWT dan begitu melimpahnya nikmat yang diturunkan bagi umat manusia sehingga jika air laut menjadi tinta untuk menuliskan ilmu dan nikmat Allah SWT untuk manusia. Sekalipun ditambahkan tujuh kali lipatnya takkan cukup untuk menuliskan ilmu dan nikmat Allah, seperti yang dijelaskan dalam AlQur'an surat Al-Kahfi 109:

قُلْ لَوْ كَانَ الْبَحْرُ مِدَادًا لَكَلِمَتِ رَبِّي لَنَفِدَ الْبَحْرُ قَبْلَ أَنْ تَنفَدَ كَلِمَتُ رَبِّي وَلَوْ جِئْنَا بِمِثْلِهِ مَدَدًا ﴿١٠٩﴾

Artinya: Katakanlah: "sekiranya lautan menjadi tinta untuk (menulis) kalimat-kalimat Tuhanku, sungguh habislah lautan itu sebelum habis (ditulis) kalimat-kalimat Tuhanku, meskipun kami datangkan tambahan sebanyak itu (pula)". (QS. Al-Kahfi : 109)

Analisis merupakan suatu metode yang digunakan untuk meneliti dan menjelaskan suatu perkara. Dengan analisis manusia bisa berfikir lebih logis dan lebih teliti tentang segala hal, terutama tentang nikmat yang diberikan oleh Allah SWT berupa akal, sehingga dengan akal tersebut manusia bisa memperoleh ilmu pengetahuan lebih luas. Karena orang yang berilmu pengetahuan memiliki derajat yang lebih tinggi di mata Allah SWT daripada orang yang tidak berilmu.



BAB III

PEMBAHASAN

Integral Riemann-Stieltjes merupakan perluasan dari Integral Riemann. Dalam hal ini Integral Riemann-Stieltjes berperan sebagai suatu fungsi himpunan dan bukan fungsi titik. Untuk lebih jelasnya perlu diperhatikan bagaimana suatu fungsi yang terintegral Riemann-Stieltjes dan sifat-sifat dari Integral Riemann-Stieltjes dibawah ini.

3.1 Fungsi Terintegral Riemann-Stieltjes

Diberikan fungsi f terbatas pada selang tertutup $[a, b]$ dan fungsi α yang monoton naik pada $[a, b]$. Untuk setiap partisi $P = \{x_0, x_1, x_1, \dots, x_n\}$ pada $[a, b]$ berlaku $\Delta\alpha_i = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})$, jelas bahwa $\Delta\alpha_i \geq 0$.

Diberikan $M_i = \sup f(x)$ dan $m_i = \inf f(x)$ dengan $\inf$ dan $\sup$ yang diambil meliputi semua partisi pada $[a, b]$. Untuk setiap fungsi real f yang terbatas pada $[a, b]$ dibentuk jumlah

$$U(P, f, \alpha) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta\alpha_i \text{ dan } L(P, f, \alpha) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta\alpha_i.$$

Berturut-turut dinamakan jumlah Riemann-Stieltjes atas dan jumlah Riemann-Stieltjes bawah. Jika t_i adalah titik pada sub-interval $[x_{i-1}, x_i]$, maka jumlah Riemann-Stieltjes dari fungsi f terhadap α yang terkait dengan partisi P dinyatakan oleh $S(P, f, \alpha)$ dan didefinisikan sebagai

$$S(P, f, \alpha) = \sum_{i=1}^n f(t_i)(\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})).$$

Dari jumlah Riemann-Stieltjes atas dan jumlah Riemann-Stieltjes bawah tersebut terbentuklah integral Riemann-Stieltjes atas dan integral Riemann-

Stieltjes bawah, yang berturut-turut disimbolkan dengan $\overline{\int}_a^b f d\alpha$ dan $\underline{\int}_a^b f d\alpha$.

Didefinisikan $\overline{\int}_a^b f d\alpha = \inf U(P, f, \alpha)$ dan $\underline{\int}_a^b f d\alpha = \sup L(P, f, \alpha)$. Jika

$\overline{\int}_a^b f d\alpha = \underline{\int}_a^b f d\alpha$, maka nilai yang sama ini dinyatakan dengan $\int_a^b f d\alpha$ atau

$\int_a^b f(x) d\alpha(x)$ disebut *Integral Riemann-Stieltjes* fungsi f terhadap α pada $[a, b]$.

Jika $\int_a^b f(x) d\alpha(x)$ ada, maka $\overline{\int}_a^b f(x) d\alpha(x) = \underline{\int}_a^b f(x) d\alpha(x)$. Sehingga

dikatakan bahwa f dapat terintegral Riemann-Stieltjes terhadap α . Dengan mengambil $\alpha(x) = x$, terlihat bahwa Integral Riemann-Stieltjes merupakan perluasan dari Integral Riemann. Dikatakan perluasan karena ketika $\alpha(x) = x$ disubstitusikan terhadap $\int_a^b f(x) d\alpha(x)$, maka akan terbentuk integral Riemann, yakni $\int_a^b f(x) dx$. Dengan diketahui f terbatas pada $[a, b]$ maka baik $\inf U(P, f, \alpha)$ maupun $\sup L(P, f, \alpha)$ dijamin berhingga, sehingga masalah tentang keterintegralan f pada $[a, b]$ adalah masalah kesamaan $\inf U(P, f, \alpha)$ dan $\sup L(P, f, \alpha)$.

$\|P\| = \max \{x_i - x_{i-1} : i = 1, 2, 3, \dots, n\}$ dinamakan norm partisi P .

Definisi 3.1.1

Fungsi $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dikatakan terintegral Riemann-Stieltjes pada $[a, b]$

jika terdapat bilangan $l \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$

terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika P adalah partisi $[a, b]$, maka

$$|S(P, f, \alpha) - l| < \varepsilon. \quad (\text{Bartle, 1967:277})$$

Teorema 3.1.2

Untuk setiap partisi P pada $[a, b]$ berlaku

$$L(P, f, \alpha) \leq U(P, f, \alpha) \quad (\text{Hutahaean, 1989:3})$$

Bukti:

Misal $M = \sup f(x)$ dan $m = \inf f(x)$, maka

$$\begin{aligned} m\Delta\alpha_i &= m(\alpha(b) - \alpha(a)) \leq m_i(\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})) \\ &\leq M_i(\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})) \leq M(\alpha(b) - \alpha(a)) = M\Delta\alpha_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Dimana } \sum_{i=1}^n m(\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})) &\leq \sum_{i=1}^n m_i(\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})) \\ &\leq \sum_{i=1}^n M_i(\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})) \\ &\leq \sum_{i=1}^n M(\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})) \end{aligned}$$

$$\text{maka } m \sum_{i=1}^n \Delta\alpha_i \leq \sum_{i=1}^n m_i \Delta\alpha_i \leq \sum_{i=1}^n M_i \Delta\alpha_i \leq M \sum_{i=1}^n \Delta\alpha_i$$

sehingga terbukti bahwa

$$L(P, f, \alpha) \leq U(P, f, \alpha)$$

Contoh 3.1.3

Diketahui $f(x) = 2x + 1$ dan $\alpha(x) = x^2$ dengan $0 \leq x \leq 1$.

Tunjukkan bahwa $L(P, f, \alpha) \leq U(P, f, \alpha)$!

Penyelesaian:

$$\text{Misalkan } P = [0, 1], M = \sup f(x) = 2(1) + 1 = 3,$$

$$m = \inf f(x) = 2(0) + 1 = 1$$

$$\begin{aligned} m\Delta\alpha_i &= m(\alpha(b) - \alpha(a)) \leq M(\alpha(b) - \alpha(a)) \\ &= m(\alpha(1) - \alpha(0)) \leq M(\alpha(1) - \alpha(0)) \\ &= 1(1^2 - 0^2) \leq 3(1^2 - 0^2) \\ &= 1 \leq 3 = M\Delta\alpha_i \end{aligned}$$

sehingga terbukti bahwa

$$L(P, f, \alpha) \leq U(P, f, \alpha)$$

Sama seperti definisi penghalusan pada integral Riemann (Definisi 2.6.4), maka pada Integral Riemann-Stieltjes juga berlaku teorema-teorema tentang penghalusan partisi. Diantaranya sebagai berikut:

Teorema 3.1.4

Jika partisi P^* suatu penghalusan partisi P pada $[a, b]$, maka

$$U(P^*, f, \alpha) \leq U(P, f, \alpha) \quad \text{dan} \quad L(P^*, f, \alpha) \geq L(P, f, \alpha) \quad (\text{Rudin W, 1964:123})$$

Bukti:

Diketahui $P^* \subset P$, misalkan $\alpha_{i-1} < t_i < \alpha_i$

diberikan $M_1^* = \sup f(x)$ dan $m_1^* = \inf f(x)$ pada $[\alpha_{i-1}, t_i]$

$M_2^* = \sup f(x)$ dan $m_2^* = \inf f(x)$ pada $[t_i, \alpha_i]$

maka $m_i \Delta \alpha_i = m_i(\alpha_i - t_i) + m_i(t_i - \alpha_{i-1})$

$$\leq m_2^*(\alpha_i - t_i) + m_1^*(t_i - \alpha_{i-1})$$

dan $M_i \Delta \alpha_i = M_i(\alpha_i - t_i) + M_i(t_i - \alpha_{i-1})$

$$\geq M_2^*(\alpha_i - t_i) + M_1^*(t_i - \alpha_{i-1})$$

sehingga berlaku $U(P^*, f, \alpha) \leq U(P, f, \alpha)$ dan $L(P^*, f, \alpha) \geq L(P, f, \alpha)$

Contoh 3.1.5

Diketahui $f(x) = x^2 + 2x$ dan $\alpha(x) = x^2 + x$ dimana $0 \leq x \leq 2$ dengan

2 sub-interval. Tunjukkan bahwa $U(P^*, f, \alpha) \leq U(P, f, \alpha)$!

Penyelesaian:

Misalkan $P = [0,2]$, $P_1^* = [1,2]$, $P_2^* = [0,1]$ dan $P = P_1^* \cup P_2^*$, sehingga diperoleh $M = \sup f(x) = 2^2 + 2.2 = 8$

$$M_1^* = \sup f(x) = 2^2 + 2.2 = 8$$

$$M_2^* = \sup f(x) = 1^2 + 2.1 = 3$$

$$M(\alpha_i - c) + M(c - \alpha_{i-1}) \geq M_2^*(\alpha_i - c) + M_1^*(c - \alpha_{i-1})$$

$$M(2 - 1) + M(1 - 0) \geq M_2^*(1 - 0) + M_1^*(2 - 1)$$

$$8(2 - 1) + 8(1 - 0) \geq 3(1 - 0) + 8(2 - 1)$$

$$8 + 8 \geq 3 + 8 = 16 \geq 11$$

Hal ini menunjukkan bahwa $U(P^*, f, \alpha) \leq U(P, f, \alpha)$

Definisi 3.1.6

Fungsi f dikatakan terintegral Riemann-Stieltjes terhadap α pada $[a, b]$

jika dan hanya jika $\overline{\int}_a^b f d\alpha = \int_a^b f d\alpha$. Dan dituliskan $f \in \mathcal{RS}_\alpha[a, b]$.

Jika fungsi f terintegral Riemann-Stieltjes pada $[a, b]$, maka nilai persamaan diatas dituliskan sebagai $\int_a^b f d\alpha$. (Hutahaeen, 1989:3)

Teorema 3.1.7

Jika fungsi f terbatas pada $[a, b]$ dan α monoton naik, maka

$$\overline{\int}_a^b f d\alpha \geq \int_a^b f d\alpha. \text{ (Rudin W, 1964:124)}$$

Bukti:

Misalkan P_1 dan P_2 partisi dari selang $[a, b]$, $P^* = P_1 \cup P_2$ dan $\Delta\alpha_i \geq 0$

Sehingga berakibat, $(P_1, f, \alpha) \geq L(P^*, f, \alpha) \leq U(P^*, f, \alpha) \leq U(P_2, f, \alpha)$

$$\overline{\int}_a^b f d\alpha = \sup L(P^*, f, \alpha) \text{ dan } \int_a^b f d\alpha = \inf U(P^*, f, \alpha)$$

karena $\sup L(P^*, f, \alpha) \leq \inf U(P^*, f, \alpha)$

sehingga $\int_a^b f d\alpha \leq \overline{\int}_a^b f d\alpha$ atau dengan kata lain $\overline{\int}_a^b f d\alpha \geq \int_a^b f d\alpha$

Contoh 3.1.8

Diketahui fungsi f konstan, $a \leq x \leq b$ dan fungsi α monoton naik pada $[a, b]$. Selidiki apakah f terintegral Riemann-Stieltjes terhadap α pada $[a, b]$!

Penyelesaian:

Misalkan $P = \{x_0, x_1, x_1, \dots, x_n\}$ partisi sebarang dari $[a, b]$. Misal fungsi $f(x) = 1, a \leq x \leq b$, maka $m = \inf f(x) = 1 = M = \sup f(x)$

$$\begin{aligned} \text{Jadi } L(P, f, \alpha) &= \sum_{i=1}^n m(\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})) \\ &= \sum_{i=1}^n (\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})) \\ &= \alpha(x_n) - \alpha(x_0) = \alpha(b) - \alpha(a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U(P, f, \alpha) &= \sum_{i=1}^n M(\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})) \\ &= \sum_{i=1}^n (\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})) \\ &= \alpha(x_n) - \alpha(x_0) = \alpha(b) - \alpha(a) \end{aligned}$$

sehingga $\int_a^b f d\alpha = \sup L(P, f, \alpha)$ dan $\overline{\int}_a^b f d\alpha = \inf U(P, f, \alpha)$

Jadi menurut definisi 3.1.6 fungsi f terintegral Riemann-Stieltjes terhadap α pada $[a, b]$.

Teorema 3.1.9

Jika fungsi f terbatas pada $[a, b]$ dan α monoton naik pada $[a, b]$, maka $f \in \mathcal{RS}_\alpha[a, b]$ jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ yang diberikan terdapat suatu partisi P pada $[a, b]$ sehingga

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < \varepsilon. \text{ (Rudin W, 1964:124)}$$

Bukti:

Syarat perlu: Untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat partisi P pada $[a, b]$, sehingga berlaku

$$L(P, f, \alpha) \leq \int_a^b f d\alpha \leq \overline{\int}_a^b f d\alpha \leq U(P, f, \alpha)$$

$$\text{Jadi } 0 \leq \overline{\int}_a^b f d\alpha - \int_a^b f d\alpha \leq U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < \varepsilon$$

dengan demikian, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat P sehingga

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < \varepsilon,$$

maka diperoleh hubungan

$$0 \leq \overline{\int}_a^b f d\alpha - \int_a^b f d\alpha < \varepsilon$$

yang berlaku untuk setiap $\varepsilon > 0$ jadi

$$\overline{\int}_a^b f d\alpha - \int_a^b f d\alpha < \varepsilon$$

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < \varepsilon$$

yang berarti $f \in \mathcal{RS}_\alpha[a, b]$.

Syarat cukup: Sekarang diandaikan $f \in \mathcal{RS}_\alpha[a, b]$ dan diberikan $\varepsilon > 0$

$$\text{karena } \int_a^b f d\alpha = \sup L(P, f, \alpha) = \inf U(P, f, \alpha)$$

maka terdapatlah partisi P_1 dan P_2 dan pada $[a, b]$ sedemikian hingga

$$\int_a^b f d\alpha \leq U(P_1, f, \alpha) < \int_a^b f d\alpha + \varepsilon/2$$

dan

$$\int_a^b f d\alpha - \varepsilon/2 < L(P_2, f, \alpha) \leq \int_a^b f d\alpha$$

jika $P = P_1 \cup P_2$, maka berlaku

$$\int_a^b f \, d\alpha \leq U(P, f, \alpha) \leq U(P_1, f, \alpha) < \int_a^b f \, d\alpha + \varepsilon/2$$

$$\int_a^b f \, d\alpha - \varepsilon/2 < L(P_2, f, \alpha) \leq L(P, f, \alpha) \leq \int_a^b f \, d\alpha$$

Jadi diperoleh

$$\int_a^b f \, d\alpha - \varepsilon/2 < L(P, f, \alpha) \leq U(P, f, \alpha) < \int_a^b f \, d\alpha + \varepsilon/2$$

Sehingga $U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < \varepsilon$

Contoh 3.1.10

Diketahui $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ pada $[0,1]$ dan $\alpha(x) = 2x^2$.

Selidiki apakah $f \in \mathcal{RS}_\alpha[0,1]$?

Penyelesaian:

Diketahui $P = \{0,1\}$, maka $m = \inf f(x) = 0$ dan $M = \sup f(x) = \frac{1}{2}$.

Untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat partisi P pada $[0,1]$.

$$\begin{aligned} \text{Sehingga } L(P, f, \alpha) &= \sum_{i=1}^n m(\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})) \\ &= \sum_{i=1}^2 m(\alpha(x_2) - \alpha(x_{2-1})) \\ &= m(\alpha(1) - \alpha(0)) \\ &= 0(2 - 0) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{dan } U(P, f, \alpha) &= \sum_{i=1}^n M(\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})) \\ &= \sum_{i=1}^2 M(\alpha(x_2) - \alpha(x_{2-1})) \\ &= M(\alpha(1) - \alpha(0)) \\ &= \frac{1}{2}(2 - 0) = 1 \end{aligned}$$

Sehingga $L(P, f, \alpha) \leq U(P, f, \alpha) < \varepsilon$

Jadi untuk setiap $\varepsilon > 0$ berlaku $U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < \varepsilon$

Hal ini menunjukkan bahwa $f \in \mathcal{RS}_\alpha[a, b]$

Teorema 3.1.11

Jika fungsi f dan α terbatas pada $[a, b]$ dan $\lim_{||P|| \rightarrow 0} S(P, f, \alpha) = A$, maka fungsi f terintegral Riemann-Stieltjes terhadap α pada $[a, b]$ dan $A = \int_a^b f d\alpha$ (Hutahaeen, 1989:7)

Bukti:

Misalkan diberikan sebarang $\varepsilon > 0$. Karena $\lim_{||P|| \rightarrow 0} S(P, f, \alpha) = A$, terdapat $\delta > 0$ sehingga $||P|| < \delta$, berakibat

$$A - \varepsilon/2 < S(P, f, \alpha) < A + \varepsilon/2 \quad (1)$$

ambil P_ε tetap dengan $||P_\varepsilon|| < \delta$, maka

$$A - \varepsilon/2 < S(P_\varepsilon, f, \alpha) < A + \varepsilon/2$$

Jika P partisi sebarang dari $[a, b]$ dengan $P \supseteq P_\varepsilon$, maka $||P|| < \delta$

Sehingga menurut (1) $A - \varepsilon/2 < S(P, f, \alpha) < A + \varepsilon/2$

Jadi fungsi P terintegral Riemann-Stieltjes terhadap α pada $[a, b]$ dan

$$A = \int_a^b f d\alpha$$

Teorema 3.1.12

Jika fungsi f terbatas pada $[a, b]$, fungsi α kontinu pada $[a, b]$ dan fungsi f terintegral Riemann-Stieltjes terhadap α , maka

$$\lim_{||P|| \rightarrow 0} S(P, f, \alpha) = \int_a^b f d\alpha \quad (\text{Hutahaeen, 1989:8})$$

Bukti:

Diberikan sebarang $\varepsilon > 0$, maka ada partisi P_ε sehingga

$$U(P_\varepsilon, f, \alpha) < \int_a^b f d\alpha + \varepsilon/4$$

ambil $\delta_1 = \varepsilon/4Mn$ dimana n = jumlah titik partisi di P_ε

misalkan P partisi sebarang dengan $||P|| < \delta_1$, maka selang bagian P yang memuat P_ε mempunyai nilai

$$(n-1)\max \Delta \alpha_i < \frac{(n-1)\varepsilon M}{4Mn} < \varepsilon/4$$

jadi $U(P, f, \alpha) < U(P_\varepsilon, f, \alpha) + \varepsilon/4$

sehingga $U(P, f, \alpha) < \int_a^b f d\alpha + \varepsilon/2$, untuk setiap P dengan $||P|| < \delta_1$.

Dengan cara yang sama dibuktikan adanya $\delta_2 > 0$ sehingga

$$L(P, f, \alpha) < \int_a^b f d\alpha - \varepsilon/2$$

untuk setiap P dengan $||P|| < \delta_2$

ambil $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2\}$, maka untuk setiap partisi P dengan $||P|| < \delta$

berlaku $U(P, f, \alpha) < \int_a^b f d\alpha + \varepsilon/2$; $L(P, f, \alpha) < \int_a^b f d\alpha - \varepsilon/2$

untuk setiap P dengan $||P|| < \delta$.

karena $L(P, f, \alpha) \leq S(P, f, \alpha) \leq U(P, f, \alpha)$, maka

$$\int_a^b f d\alpha - \varepsilon/2 < S(P, f, \alpha) < \int_a^b f d\alpha + \varepsilon/2$$

untuk setiap partisi P dengan $||P|| < \delta$

ini menunjukkan $\lim_{||P|| \rightarrow 0} S(P, f, \alpha) = \int_a^b f d\alpha$

Teorema 3.1.13

Jika f kontinu pada $[a, b]$ maka f terintegral Riemann-Stieltjes pada $[a, b]$. (Rudin W, 1964:125)

Bukti:

Diberikan $\varepsilon > 0$. Karena f kontinu pada $[a, b]$ maka f kontinu seragam pada $[a, b]$. dapatlah dipilih $\delta > 0$ sehingga $\alpha(b) - \alpha(a) < \varepsilon$. Dengan demikian terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk semua x dan $y \in [a, b]$ dengan $|x - y| < \delta$ berlaku $|f(x) - f(y)| < \delta$. Dipilih suatu partisi P pada $[a, b]$ dengan $|P| < \delta$. Maka pada setiap subselang $[x_{i-1}, x_i]$ terdapat titik t'_i dan t''_i sehingga $f(t'_i) = M_i$ dan $f(t''_i) = m_i$.

Sehingga $|M_i - m_i| < \eta$, $(i = 1, 2, \dots, n)$

dengan demikian

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta \alpha_i$$

$$\eta \sum_{i=1}^n (\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})) = \eta (\alpha(b) - \alpha(a)) < \varepsilon$$

Maka $f \in \mathcal{RS}_\alpha[a, b]$

Teorema 3.1.14

Jika f fungsi monoton pada $[a, b]$ dan α kontinu pada $[a, b]$, maka $f \in \mathcal{RS}_\alpha[a, b]$. (Rudin W, 1964:126)

Bukti:

Diandaikan bahwa f monoton pada $[a, b]$. Karena α kontinu dan monoton naik pada $[a, b]$. Diberikan $\varepsilon > 0$, untuk setiap bilangan asli n dapat dipilih suatu partisi P pada $[a, b]$, sehingga

$$(\alpha(b) - \alpha(a))|f(b) - f(a)| < n\varepsilon$$

karena α kontinu dan monoton naik, maka pilih partisi

$P = \{a = x_0, x_1, x_1, \dots, x_n = b\}$ pada $[a, b]$ sedemikian sehingga

$$\Delta \alpha_i = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}) = \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n}$$

jika f monoton naik pada $[a, b]$, maka untuk setiap $i = 1, 2, 3, \dots, n$

$$M_i = \sup f(x) = f(x_i) \text{ dan } m_i = \inf f(x) = f(x_{i-1})$$

$$\begin{aligned} \text{dan } U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) &= \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta \alpha_i \\ &= \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n} \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \\ &= \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n} (f(b) - f(a)) < \varepsilon \end{aligned}$$

Sedangkan jika fungsi f monoton turun dengan:

$$M_i = \sup f(x) = f(x_{i-1}), m_i = \inf f(x) = f(x_i)$$

$$\begin{aligned} \text{Dan } U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) &= \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta \alpha_i \\ &= \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n} \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \\ &= \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n} (f(b) - f(a)) < \varepsilon \end{aligned}$$

Dengan demikian untuk setiap $\varepsilon > 0$, dengan mengambil n yang cukup besar dapat dicari partisi P pada $[a, b]$ sehingga $U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < \varepsilon$.

Sehingga fungsi $f \in \mathcal{RS}_\alpha[a, b]$.

3.2 Sifat-sifat Integral Riemann-Stieltjes

Teorema 3.2.1

Jika $f \in \mathcal{RS}_\alpha[a, b]$ dan $g \in \mathcal{RS}_\alpha[a, b]$, maka

$$f + g \in \mathcal{RS}_\alpha[a, b] \text{ dan } \int_a^b f + g d\alpha = \int_a^b f d\alpha + \int_a^b g d\alpha$$

(Hutahaeen, 1989:13)

Bukti:

Misalkan diberikan sebarang $\varepsilon > 0$. Karena $f, g \in \mathcal{R}_{\alpha}[a, b]$, maka ada $P_{\varepsilon 1}$ dan $P_{\varepsilon 2}$. Sehingga untuk setiap P dengan $P \supseteq P_{\varepsilon 1}$, $P \supseteq P_{\varepsilon 2}$ berlaku

$$\left| S(P, f, \alpha) - \int_a^b f d\alpha \right| < \varepsilon/2$$

$$\left| S(P, g, \alpha) - \int_a^b g d\alpha \right| < \varepsilon/2$$

ambil $P_{\varepsilon} = P_{\varepsilon 1} \cup P_{\varepsilon 2}$, maka $P_{\varepsilon} \supseteq P_{\varepsilon 1}$ dan $P_{\varepsilon} \supseteq P_{\varepsilon 2}$, sehingga untuk setiap partisi P dengan $P \supseteq P_{\varepsilon}$, berlaku

$$\left| S(P, f, \alpha) - \int_a^b f d\alpha \right| < \varepsilon/2 ; \left| S(P, g, \alpha) - \int_a^b g d\alpha \right| < \varepsilon/2$$

karena $S(P, f + g, \alpha) = S(P, f, \alpha) + S(P, g, \alpha)$, maka untuk setiap partisi P dengan $P \supseteq P_{\varepsilon}$ diperoleh $\left| S(P, f + g, \alpha) - \left[\int_a^b f d\alpha + \int_a^b g d\alpha \right] \right| < \varepsilon$

hal ini berarti $f + g \in \mathcal{R}_{\alpha}[a, b]$ dan $\int_a^b f + g d\alpha = \int_a^b f d\alpha + \int_a^b g d\alpha$

Contoh 3.2.2

Misalkan fungsi f, g dan α didefinisikan pada $[0, 1]$ oleh $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$ dan $\alpha(x) = 5x + 2$,

Penyelesaian:

Diketahui $f(x) = x^2$ dan $\alpha(x) = 5x + 2$,

$$\Delta\alpha_i = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})$$

$$= (5(b) + 2) - (5(a) + 2)$$

$$= 5(b - a) = 5(1 - 0) = 5$$

$$\text{maka } \int_0^1 f d\alpha = \int_0^1 f(x) d\alpha(x)$$

$$= \int_0^1 x^2 d\alpha(x)$$

$$= \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^1 \cdot \Delta \alpha_i$$

$$= \frac{1}{3} (1 - 0)^3 \cdot 5 = \frac{5}{3}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 g \, d\alpha &= \int_0^1 g(x) \, d\alpha(x) \\ &= \int_0^1 x^3 \, d\alpha(x) \\ &= \frac{1}{4} x^4 \Big|_0^1 \cdot \Delta \alpha_i \\ &= \frac{1}{4} (1 - 0)^4 \cdot 5 = \frac{5}{4} \\ \int_0^1 (f + g) \, d\alpha &= \int_0^1 (f(x) + g(x)) \, d\alpha(x) \\ &= \int_0^1 (x^2 + x^3) \, d\alpha(x) \\ &= \left(\frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{4} x^4 \right) \Big|_0^1 \cdot \Delta \alpha_i \\ &= \left(\frac{1}{3} (1 - 0)^3 + \frac{1}{4} (1 - 0)^4 \right) \cdot 5 \\ &= \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) \cdot 5 \\ &= \left(\frac{4}{12} + \frac{3}{12} \right) \cdot 5 \\ &= \left(\frac{7}{12} \right) \cdot 5 = \frac{35}{12} \end{aligned}$$

$$\text{Jadi } \int_0^1 f \, d\alpha + \int_0^1 g \, d\alpha = \int_0^1 (f + g) \, d\alpha$$

Teorema 3.2.3

Jika $f \in \mathfrak{RS}_\alpha[a, b]$, $c \in \mathbb{R}$, maka

$$cf \in \mathfrak{RS}_\alpha[a, b] \text{ dan } \int_a^b cf \, d\alpha = c \int_a^b f \, d\alpha \text{ (Hutahaean, 1989:14)}$$

Bukti:

Jika $c = 0$, maka $cf(x) = 0$, $a \leq x \leq b$.

dalam hal ini $cf \in \mathfrak{RS}_\alpha[a, b]$ dan $\int_a^b cf \, d\alpha = 0 = 0 \int_a^b f \, d\alpha = c \int_a^b f \, d\alpha$.

Jika $c \neq 0$ dan diberikan sebarang $\varepsilon > 0$, karena $f \in \mathcal{RS}_\alpha[a, b]$, maka ada partisi P_ε sehingga untuk setiap partisi P dengan $P \supseteq P_\varepsilon$ berlaku

$$\left| S(P, f, \alpha) - \int_a^b f d\alpha \right| < \varepsilon/|c|$$

Karena $S(P, cf, \alpha) = c S(P, f, \alpha)$

Maka untuk setiap partisi P dengan $P \supseteq P_\varepsilon$ diperoleh

$$\left| S(P, cf, \alpha) - c \int_a^b f d\alpha \right| = \left| c S(P, f, \alpha) - c \int_a^b f d\alpha \right| < |c| \cdot \varepsilon/|c| = \varepsilon$$

Dan ini berarti $cf \in \mathcal{RS}_\alpha[a, b]$ dan $\int_a^b cf d\alpha = c \int_a^b f d\alpha$

Contoh 3.2.4

Diketahui $f \in \mathcal{RS}_\alpha[a, b]$ pada $0 \leq x \leq 2$ dan $c = 2 \in \mathbb{R}$.

Jika $c = 2$, diberikan sebarang $\varepsilon > 0$, karena $f \in \mathcal{RS}_\alpha[0, 2]$, maka ada partisi P_ε sehingga untuk setiap partisi P dengan $P \supseteq P_\varepsilon$ berlaku

$$\left| S(P, f, \alpha) - \int_0^2 f d\alpha \right| < \varepsilon/2$$

Karena $S(P, cf, \alpha) = c S(P, f, \alpha)$

Maka untuk setiap partisi P dengan $P \supseteq P_\varepsilon$ diperoleh

$$\left| S(P, cf, \alpha) - c \int_a^b f d\alpha \right| = \left| 2 S(P, f, \alpha) - 2 \int_a^b f d\alpha \right| < 2 \cdot \varepsilon/2 = \varepsilon$$

Dan ini berarti $2f \in \mathcal{RS}_\alpha[0, 2]$ dan $\int_0^2 2f d\alpha = 2 \int_0^2 f d\alpha$

Teorema 3.2.5

Jika $f \in \mathcal{RS}_\alpha[a, b]$; $f(x) \geq 0$; $a \leq x \leq b$; $\alpha \in \mathcal{RS}_\alpha[a, b]$, maka

$$\int_a^b f d\alpha \geq 0. \text{ (Hutahaeen, 1989:16)}$$

Bukti:

Karena $f(x) \geq 0$; $a \leq x \leq b$, maka $M_i \geq 0$

(1)

Karena α monoton naik pada $[a, b]$, maka $\Delta\alpha_i \geq 0$

(2)

Dari (1) dan (2) diperoleh $S(P, f, \alpha) \geq 0$ untuk setiap partisi P . Karena $f \in \mathcal{R}\mathcal{S}_\alpha[a, b]$, maka

$$\int_a^b f d\alpha = \inf U(P, f, \alpha) \geq 0$$

Contoh 3.2.6

Diketahui $f(x) = \frac{x^2}{2}$; $0 \leq x \leq 2$ dan $\alpha(x) = 2x + 1$.

Buktikan bahwa $\int_a^b f d\alpha \geq 0$!

Penyelesaian:

Karena $f(x) \geq 0$; $0 \leq x \leq 2$,

$$\text{maka } M = \sup f(x) = \sup \frac{x^2}{2} = 4 \geq 0 \quad (1)$$

Karena α monoton naik pada $[0, 2]$,

$$\text{maka } \Delta\alpha = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}) = 5 - 3 = 2 \geq 0 \quad (2)$$

Sehingga $U(P, f, \alpha) = \sum_{i=1}^n M(\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}))$

$$= \sum_{i=1}^2 M(\alpha(x_2) - \alpha(x_{2-1}))$$

$$= M(\alpha(2) - \alpha(0))$$

$$= 4(5 - 3) = 8 \geq 0$$

Dari (1) dan (2) diperoleh $S(P, f, \alpha) \geq 0$ untuk setiap partisi P . Karena $f \in \mathcal{R}\mathcal{S}_\alpha[a, b]$, maka

$$\int_a^b f d\alpha = \inf U(P, f, \alpha) \geq 0$$

Teorema 3.2.7

Jika $\alpha \in \mathcal{RS}_\alpha[a, b]$; $f \in \mathcal{RS}_\beta[a, b]$, maka

$$f \in \mathcal{RS}_{\alpha+\beta}[a, b] \text{ dan } \int_a^b f d(\alpha + \beta) = \int_a^b f d\alpha + \int_a^b f d\beta.$$

(Hutahaeen,1989:16)

Bukti:

$$\begin{aligned} \text{Dari } \Delta(\alpha_i + \beta_i) &= (\alpha + \beta)(x_i) - (\alpha + \beta)(x_{i-1}) \\ &= (\alpha(x_i) + \beta(x_i)) - (\alpha(x_{i-1}) + \beta(x_{i-1})) \\ &= (\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})) + (\beta(x_i) - \beta(x_{i-1})) \\ &= \Delta\alpha_i + \Delta\beta_i \end{aligned}$$

Diperoleh $S(P, f, \alpha + \beta) = S(P, f, \alpha) + S(P, f, \beta)$, untuk setiap partisi

P . Selanjutnya karena $\alpha \in \mathcal{RS}_\alpha[a, b] = \int_a^b f d\alpha$; $f \in \mathcal{RS}_\beta[a, b] = \int_a^b f d\beta$,

maka

$$f \in \mathcal{RS}_{\alpha+\beta}[a, b] = \int_a^b f d(\alpha + \beta) = \int_a^b f d\alpha + \int_a^b f d\beta$$

Teorema 3.2.9

Jika $\alpha \in \mathcal{RS}_\alpha[a, b]$; $c \in \mathbb{R}$, maka

$$f \in \mathcal{RS}_{c\alpha}[a, b] \text{ dan } \int_a^b f d(c\alpha) = c \int_a^b f d\alpha. \text{ (Hutahaeen,1989:17)}$$

Bukti:

$$\begin{aligned} \text{Dari } \Delta(c\alpha_i) &= (c\alpha)(x_i) - (c\alpha)(x_{i-1}) \\ &= c(\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})) = c\Delta\alpha_i \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh $S(P, f, c\alpha) = c S(P, f, \alpha)$

Jika $c = 0$, maka $\int_a^b f d(c\alpha) = \int_a^b f d(0) = 0, a \leq x \leq b$.

dalam hal ini $f \in \mathcal{RS}_{c\alpha}[a, b]$ dan $\int_a^b f d(c\alpha) = 0 = 0 \int_a^b f d\alpha = c \int_a^b f d\alpha$.

Jika $c \neq 0$ dan diberikan sebarang $\varepsilon > 0$, karena $f \in \mathcal{RS}_{c\alpha}[a, b]$, maka ada partisi P_ε sehingga untuk setiap partisi P dengan $P \supseteq P_\varepsilon$ berlaku

$$\left| S(P, f, \alpha) - \int_a^b f d\alpha \right| < \varepsilon/|c|$$

Karena $S(P, f, c\alpha) = c S(P, f, \alpha)$

Maka untuk setiap partisi P dengan $P \supseteq P_\varepsilon$ diperoleh

$$\left| S(P, f, c\alpha) - c \int_a^b f d\alpha \right| = \left| c S(P, f, \alpha) - c \int_a^b f d\alpha \right| < |c| \cdot \varepsilon/|c| = \varepsilon$$

Dan ini berarti $f \in \mathcal{RS}_{c\alpha}[a, b]$ dan $\int_a^b f d(c\alpha) = c \int_a^b f d\alpha$

Teorema 3.2.10

Misalkan $a < c < b$ dan f terintegral Riemann-Stieltjes terhadap α pada kedua sub-interval $[a, c]$ dan $[c, b]$, maka f terintegral Riemann-Stieltjes terhadap α pada $[a, b]$ dan

$$\int_a^b f d\alpha = \int_a^c f d\alpha + \int_c^b f d\alpha \quad (\text{Bartle, 1967:282})$$

Bukti:

Diketahui $\int_a^c f d\alpha$ dan $\int_c^b f d\alpha$ ada, maka akan dibuktikan $\int_a^b f d\alpha$ ada dan

$$\int_a^b f d\alpha = \int_a^c f d\alpha + \int_c^b f d\alpha$$

Misalkan P partisi sebarang dari $[a, b]$ dan $c \in P$; maka $P \cap [a, c] = P_1$ adalah partisi sebarang dari $[a, c]$ dan $P \cap [c, b] = P_2$ adalah partisi sebarang dari $[c, b]$. Jelas bahwa $S(P, f, \alpha) = S(P_1, f, \alpha) + S(P_2, f, \alpha)$

Misalkan $\int_a^c f \, d\alpha$ dan $\int_c^b f \, d\alpha$ ada, dan untuk setiap $\varepsilon > 0$, maka ada partisi P_{ε_1} dari $[a, c]$; dan partisi P_{ε_2} dari $[c, b]$. Sehingga untuk setiap partisi P_1 dan P_2 dengan $P_1 \supseteq P_{\varepsilon_1}$, $P_2 \supseteq P_{\varepsilon_2}$ berlaku

$$|S(P_1, f, \alpha) - \int_a^c f \, d\alpha| < \varepsilon/2; \quad |S(P_2, f, \alpha) - \int_c^b f \, d\alpha| < \varepsilon/2$$

Ambil $P_\varepsilon = P_{\varepsilon_1} \cup P_{\varepsilon_2}$. Misalkan P partisi sebarang dari $[a, b]$ dengan $\sup P_\varepsilon$, $P_1 = P \cap [a, c]$ dan $P_2 = P \cap [c, b]$.

Jadi

$$\begin{aligned} |S(P, f, \alpha) - [\int_a^c f \, d\alpha + \int_c^b f \, d\alpha]| &= |[S(P_1, f, \alpha) - \int_a^c f \, d\alpha] + \\ &\quad [S(P_2, f, \alpha) - \int_c^b f \, d\alpha]| \\ &\leq |S(P_1, f, \alpha) - \int_a^c f \, d\alpha| + \\ &\quad |S(P_2, f, \alpha) - \int_c^b f \, d\alpha| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \end{aligned}$$

Dan ini berarti $f \in \mathcal{R}_{\mathcal{S}_\alpha}[a, b]$ dan $\int_a^b f \, d\alpha = \int_a^c f \, d\alpha + \int_c^b f \, d\alpha$

3.3 Konsep Integral Dalam Kajian Keislaman

Keilmuan matematika dapat dikatakan adalah salah satu topik yang sangat menyita perhatian para matematikawan dunia. Ilmu bilangan sangat terkait dengan perhitungan. Salah satunya adalah teori integral, integral biasanya digunakan untuk menghitung luas daerah yang dibatasi oleh kurva dan sumbu x terhadap sumbu y . Karena pada dasarnya konsep integral Riemann dalam proses penghitungannya menggunakan partisi-partisi, maka pendekatannya

menggunakan jumlah Riemann sehingga semakin kecil partisi-partisinya maka akan semakin mendekati nilai yang diinginkan. Dalam teori integral diperlukan ketelitian yang sangat besar, sehingga hasilnya tidak meleset jauh dari nilai sesungguhnya. Seperti yang telah dijelaskan dalam Surat al-Jinn ayat 28, diterangkan bahwa Tuhan menciptakan segala sesuatu (kejadian dan semua objek di alam semesta) dengan "hitungan yang teliti satu persatu".

لَيَعْلَمَنَّ أَنَّ قَدْ أَبْلَغُوا رَسُولَاتِ رَبِّهِمْ وَأَحَاطَ بِمَا لَدَيْهِمْ وَأَحْصَىٰ كُلَّ شَيْءٍ عَدَدًا ﴿٢٨﴾

28. Supaya dia mengetahui, bahwa Sesungguhnya rasul-rasul itu Telah menyampaikan risalah-risalah Tuhannya, sedang (sebenarnya) ilmu-Nya meliputi apa yang ada pada mereka, dan dia menghitung segala sesuatu satu persatu. (Q. S Al-Jinn : 28)

Dari ayat diatas dapat diambil kesimpulan bahwa Allah SWT rajanya berhitung, karena Allah SWT sangat cepat dalam menghitung dan sangat teliti. Hal ini seharusnya mendorong manusia untuk selalu bersikap teliti dan hati-hati dalam melakukan suatu pekerjaan. Ketelitian dan kecermatan dipentingkan sekali dalam kehidupan sehari-hari. Suatu pekerjaan yang dilakukan dengan teliti dan cermat akan menghasilkan hasil yang memuaskan dengan kemungkinan kesalahan lebih kecil. Sebagaimana dicontohkan dalam kehidupan sehari-hari, kecermatan dan ketelitian dalam memperhitungkan pengeluaran diperlukan sekali bagi setiap orang, agar dapat memperkirakan kebutuhan mana yang mendesak yang harus diprioritaskan dan yang lebih bermanfaat, mana yang perlu didahulukan dan mana yang bisa ditinggalkan.

Dalam Al-Qu'an banyak sekali ayat yang menjelaskan tentang betapa pentingnya ketelitian dan kecermatan, salah satunya firman Allah SWT dalam surat Maryam ayat 84 dan ayat 94:

فَلَا تَعْجَلْ عَلَيْهِمْ إِنَّمَا نَعُدُّ لَهُمْ عَذَابًا ۖ

84. Maka janganlah kamu tergesa-gesa memintakan siksa terhadap mereka, Karena Sesungguhnya kami Hanya menghitung datangnya (hari siksaan) untuk mereka dengan perhitungan yang teliti. (Q. S. Maryam : 84)

لَقَدْ أَحْصَيْنَاهُمْ وَعَدَّهُمْ عَذَابًا ۖ

94. Sesungguhnya Allah Telah menentukan jumlah mereka dan menghitung mereka dengan hitungan yang teliti. (Q. S. Maryam : 94)

Pada dasarnya perhitungan integral adalah penjumlahan dari semua luasan yang jumlahnya ditentukan oleh jumlah partisinya. Berbicara tentang integral Riemann, maka operasi perhitungan yang digunakan adalah operasi penjumlahan dan perkalian. Sedangkan operasi penjumlahan juga disebutkan dalam Al-Qur'an dalam surat Al-Kahfi ayat 25:

وَلَبِثُوا فِي كَهْفِهِمْ ثَلَاثَ مِائَةٍ سِنِينَ وَازْدَادُوا تِسْعًا ۖ

25. Dan mereka tinggal dalam gua mereka tiga ratus tahun dan ditambah sembilan tahun (lagi). (Al-Kahfi : 25)

Hal ini menunjukkan bahwa secara umum disimpulkan bahwa Al Qur'an didesain secara matematis, sehingga dapat diapresiasi bukan hanya oleh orang yang memiliki ilmu matematika tingkat tinggi, tetapi juga oleh orang yang hanya dapat melakukan penghitungan secara sederhana.

BAB IV

KESIMPULAN DAN SARAN

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang penulis telah uraikan pada bab III, maka dapat diambil kesimpulan bahwa Integral Riemann-Stieltjes merupakan perluasan dari Integral Riemann. Sifat $U(P, f, \alpha)$ dan $L(P, f, \alpha)$ pada integral Riemann-Stieltjes serupa dengan $U(P, f)$ dan $L(P, f)$ pada integral Riemann. Sedangkan konsep integral Riemann-Stieltjes sendiri terbentuk dari dua fungsi yaitu fungsi terbatas f dan fungsi monoton naik α yang masing-masing didefinisikan pada selang $[a, b]$.

Sifat-sifat integral Riemann-Stieltjes meliputi:

7. Jika $f \in \mathcal{RS}_\alpha[a, b]$ dan $g \in \mathcal{RS}_\alpha[a, b]$, maka $\int_a^b f + g \, d\alpha = \int_a^b f \, d\alpha + \int_a^b g \, d\alpha$
8. Jika $f \in \mathcal{RS}_\alpha[a, b]$, $c \in \mathbb{R}$, maka $\int_a^b cf \, d\alpha = c \int_a^b f \, d\alpha$
9. Jika $f \in \mathcal{RS}_\alpha[a, b]$; $f(x) \geq 0$, maka $\int_a^b f \, d\alpha \geq 0$
10. Jika $f \in \mathcal{RS}_\alpha[a, b]$; $f \in \mathcal{RS}_\beta[a, b]$, maka $\int_a^b f \, d(\alpha + \beta) = \int_a^b f \, d\alpha + \int_a^b f \, d\beta$
11. Jika $f \in \mathcal{RS}_\alpha[a, b]$; $c \in \mathbb{R}$, maka $\int_a^b f \, d(c\alpha) = c \int_a^b f \, d\alpha$
12. $\int_a^b f \, d\alpha = \int_a^c f \, d\alpha + \int_c^b f \, d\alpha$

4.2 Saran

Selaku penulis, maka dalam hal ini ada beberapa saran yang sifatnya konstruktif yang bisa diberikan demi kemajuan dan perkembangan ilmu matematika di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang.

Dalam skripsi ini hanya menjelaskan tentang konsep integral Riemann-Stieltjes dan sifat-sifat integral Riemann-Stieltjes. Setelah penulis menjelaskan tentang konsep integral Riemann-Stieltjes dan sifat-sifatnya, maka dengan mengganti α menjadi suatu fungsi diharapkan kepada peneliti selanjutnya untuk mengembangkan kajian pada integral Henstock.

DAFTAR PUSTAKA

- Abdussakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matamatika*. Malang: UIN Malang Press.
- Bartle, Robert. G. 1967. *The Elements of Real Analysis*. New York: John Wiley and Sons, Inc.
- Bartle, Robert. G. dan Donald. R. Sherbert. 2000. *Introduction to Real Analysis*. New York: John Wiley and Sons, Inc.
- Hutahaeen, Effendi. 1989. *Analisis Real II*. Jakarta: Karunika Jakarta Universitas Terbuka.
- Parzynski, William. R. dan Philip. W. Zipse. 1982. *Introduction to Mathematical Analysis*. Tokyo: Kosaido Printing Co, Ltd.
- Protter, Murray. H. 1998. *Basic Elements of Real Analysis*. Amerika Serikat: Springer.
- Purwanto. 1998. *Matematika Diskrit*. Malang: IKIP Malang.
- Rahman, Afzalur. 1992. *Al Qur'an Sumber Ilmu Pengetahuan*. Jakarta: Rineka Cipta.
- Riyanto, M. Zaki. 2008. *Pengantar Analisis Riil I*. <http://zaki.math.web.id>. Diakses tanggal 28 Mei 2009.
- Rudin. W. 1964. *Principles of Mathematical Analysis Third Edition*. New York: McGraw-Hill, Inc.



DEPARTEMEN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang (0341)551345
Fax. (0341)572533

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Lilis Nurhidayati Romli
NIM : 05510033
Fakultas/ Jurusan : Sains Dan Teknologi/ Matematika
Judul skripsi : "Kajian Integral Riemann-Stieltjes"
Pembimbing : Hairur Rahman, M. Si
Abdussakir, M. Pd

No.	Tanggal	Hal	Tanda tangan	
1.	15 April 2009	Konsultasi Masalah	1.	
2.	20 Mei 2009	Konsultasi BAB I		2.
3.	10 Juni 1009	Revisi BAB I	3.	
4.	25 Juni 2009	Konsultasi BAB II		4.
5.	16 Juli 2009	Konsultasi agama	5.	
6.	07 Agustus 2009	Konsultasi BAB II		6.
7.	10 Agustus 2009	Revisi BAB II dan Konsultasi BAB III	7.	
8.	29 Agustus 2009	Revisi BAB III		8.
9.	02 Oktober 2009	Konsultasi Keseluruhan	9.	
10.	02 Oktober 2009	Konsultasi agama		10.
11.	05 Oktober 2009	Acc Keseluruhan	11.	

Malang, Oktober 2009
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 197510062003121001