

**GRAF DUAL (*DUAL GRAPH*)
DARI GRAF RODA (W_n) DAN GRAF HELM TERTUTUP (cH_n)**

SKRIPSI

**OLEH
SUSANTIN FAJARIYAH
NIM. 03510044**



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
2009**

**GRAF DUAL (*DUAL GRAPH*)
DARI GRAF RODA (W_n) DAN GRAF HELM TERTUTUP (cH_n)**

SKRIPSI

**Diajukan kepada
Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri (UIN) Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)**

OLEH

**SUSANTIN FAJARIYAH
NIM. 03510044**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
2009**

HALAMAN PERSETUJUAN

**GRAF DUAL (*DUAL GRAPH*)
DARI GRAF RODA (W_n) DAN GRAF HELM TERTUTUP (cH_n)**

SKRIPSI

**OLEH
SUSANTIN FAJARIYAH
NIM. 03510044**

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diujikan
Pada Tanggal, 31 Maret 2009

Dosen Pembimbing I,

Dosen Pembimbing II,

**Abdussakir, M.Pd.
NIP. 150 327 247**

**Ahmad Barizi, M.A.
NIP. 150 283 991**

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika,

**Sri Harini, M.Si.
NIP. 150 318 321**

HALAMAN PENGESAHAN

**GRAF DUAL (*DUAL GRAPH*)
DARI GRAF RODA (W_n) DAN GRAF HELM TERTUTUP (cH_n)**

SKRIPSI

**OLEH
SUSANTIN FAJARIYAH
NIM. 03510044**

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal, 13 April 2009

SUSUNAN DEWAN PENGUJI

- | | | | |
|-----------------------|--|---|---|
| 1. Penguji Utama | : Sri Harini, M.Si.
NIP. 150 318 321 | (|) |
| 2. Ketua Penguji | : Wahyu H. Irawan, M.Pd.
NIP. 150 300 415 | (|) |
| 3. Sekretaris Penguji | : Abdussakir, M.Pd.
NIP. 150 327 247 | (|) |
| 4. Anggota Penguji | : Ahmad Barizi, M.A.
NIP. 150 283 991 | (|) |

Mengetahui dan Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika,

**Sri Harini, M.Si.
NIP. 150 318 321**

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Susantin Fajariyah
NIM : 03510044
Jurusan : Matematika
Fakultas : Sains dan Teknologi

menyatakan dengan sebenarnya bahwa Skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambil alihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri.

Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan Skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 31 Maret 2009

Yang membuat pernyataan,

Susantin Fajariyah
NIM. 03510044

BUKTI KONSULTASI

Nama : Susantin Fajariyah
 NIM : 03510044
 Fak./Jur. : Sains dan Teknologi/Matematika
 Judul Skripsi : Graf Dual (*Dual Graph*) dari Graf Roda (W_n) dan Graf Helm Tertutup (cH_n)
 Pembimbing I : Abdussakir, M.Pd.
 Pembimbing II : Ahmad Barizi, M.A.

No	Tanggal	Hal yang dikonsultasikan	Paraf
01	05 Jan. 2009	Topik Skripsi	1.
02	12 Jan. 2009	BAB I	2.
03	19 Jan. 2009	Revisi BAB I	3.
04	27 Jan. 2009	BAB II	4.
05	02 Feb. 2009	Revisi BAB II	5.
06	09 Feb. 2009	BAB III	6.
07	16 Feb. 2009	Revisi BAB II dan III	7.
08	24 Feb. 2009	Materi Keagamaan	8.
09	28 Feb. 2009	Revisi Materi Keagamaan	9.
10	07 Maret 2009	ACC Materi Keagamaan	10.
11	23 Maret 2009	Keseluruhan Skripsi	11.
12	30 Maret 2009	ACC Keseluruhan	12.

Malang, 31 Maret 2009

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika,

Sri Harini, M.Si.
NIP. 150 318 321

HALAMAN PERSEMBAHAN



Skripsi ini dipersembahkan untuk:

Kedua Orang Tua, yang telah banyak memberi pengorbanan yang tidak terhingga nilainya baik materiil maupun spiritual, sehingga penulis bisa sampai ke jenjang Perguruan Tinggi.

KATA PENGANTAR



Puji syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT. yang telah melimpahkan rahmat dan karunia-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi dengan judul **“Graf Dual (*Dual Graph*) dari Graf Roda (W_n) dan Graf Helm Tertutup (CH_n)”** tepat waktu. Shalawat dan salam, barokah yang seindah-indahnya, mudah-mudahan tetap terlimpahkan kepada Rasulullah SAW. yang telah membawa manusia dari alam kegelapan dan kebodohan menuju alam ilmiah.

Penulisan skripsi ini dimaksudkan untuk memenuhi salah satu persyaratan dalam menyelesaikan program Sarjana Matematika di Universitas Islam Negeri (UIN) Malang dan sebagai wujud serta partisipasi penulis dalam mengembangkan dan mengaktualisasikan ilmu-ilmu yang telah penulis peroleh selama di bangku kuliah.

Penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada semua pihak yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini, baik secara langsung maupun tidak langsung. Oleh karena itu, perkenankan penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Malang
2. Prof. Drs. H. Sutiman B. Sumitro, S.U., D.Sc., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Malang
3. Sri Harini, M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Universitas Islam Negeri (UIN) Malang

4. Abdussakir, M.Pd. dan Ahmad Barizi, M.A., selaku Dosen Pembimbing, yang telah membimbing dan mengarahkan penulis dalam menyusun Skripsi ini.
5. Segenap dosen Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, yang telah banyak memberikan ilmu kepada penulis sejak berada di bangku kuliah
6. Ayahanda dan Ibunda tercinta, yang telah banyak memberi pengorbanan yang tidak terhingga nilainya baik materiil maupun spirituil
7. Semua pihak yang telah membantu selesainya skripsi ini, yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu

Akhirnya, dengan segala bentuk kekurangan dan kesalahan, penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat.

Malang, 31 Maret 2009

Penulis,

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL.....	i
HALAMAN PENGAJUAN	ii
HALAMAN PERSETUJUAN.....	iii
HALAMAN PENGESAHAN	iv
HALAMAN PERSEMBAHAN.....	v
KATA PENGANTAR	vi
ABSTRAK.....	viii
DAFTAR ISI.....	ix
DAFTAR GAMBAR	xi
DAFTAR TABEL.....	xiii
 BAB I PENDAHULUAN	
A. Latar Belakang	1
B. Rumusan Masalah	6
C. Tujuan Penelitian	7
D. Manfaat Penelitian	7
E. Metode Penelitian.....	7
F. Sistematika Pembahasan	8
 BAB II KAJIAN PUSTAKA	
A. Teori Graf dalam Al-Qur'an	9
B. Graf	16
1. Definisi Graf	16
2. <i>Adjacent</i> dan <i>Incident</i>	18
3. Derajat	18
4. Graf Beraturan-r	20
5. Graf Komplit	20
C. Graf Terhubung.....	20
1. Definisi <i>Walk</i>	20
2. Definisi <i>Trail</i>	12
3. Definisi <i>Path</i>	21
4. Definisi Sirkuit	21
5. Definisi Sikel.....	21
D. Operasi Pada Graf	22
1. Operasi <i>Union</i> (Gabungan)	22
2. Operasi <i>Sum</i> (Penjumlahan)	22
3. Operasi Perkalian Kartesius	23
E. Graf Sikel	23
1. Graf Sikel Cn.....	23
2. Graf Roda (<i>Wheel Graph</i>)	24
3. Graf Helm.....	26
4. Graf Helm Tertutup	27
F. Graf Dual (<i>Dual Graph</i>).....	28

BAB III PEMBAHASAN

A. Graf Dual dari Graf Roda W_n	31
1. Graf Roda dengan $n = 3$	31
2. Graf Roda dengan $n = 4$	32
3. Graf Roda dengan $n = 5$	34
4. Graf Roda dengan $n = 6$	35
5. Graf Roda dengan $n = 7$	36
6. Graf Roda dengan $n = 8$	38
B. Graf Dual dari Graf Helm Tertutup cH_n	40
1. Graf Helm Tertutup dengan $n = 3$	41
2. Graf Helm Tertutup dengan $n = 4$	42
3. Graf Helm Tertutup dengan $n = 5$	44
4. Graf Helm Tertutup dengan $n = 6$	45
5. Graf Helm Tertutup dengan $n = 7$	47
6. Graf Helm Tertutup dengan $n = 8$	49

BAB IV PENUTUP

A. Kesimpulan	53
B. Saran.....	53

DAFTAR PUSTAKA	54
----------------------	----

DAFTAR GAMBAR

Gambar	Halaman
1.1 Hubungan antara Tuhan dengan hamba-Nya serta Sesama Hamba	3
1.2 Graf Roda Order 4 atau W_4	5
1.3 Representasi Ka'bah dalam Graf Roda.....	5
1.4 Representasi Garis Awal dan Akhir Thawaf dalam Bentuk Graf Helm Tertutup.....	6
2.1 Ilustrasi Ka'bah dan Manusia yang Beribadah Menghadap ke Arahnya..	11
2.2 Ka'bah di Masjidil Haram.....	12
2.3 Representasi Ka'bah dalam Graf Roda.....	12
2.4 Arah Perputaran Thawaf Mengelilingi Ka'bah	13
2.5 Representasi Garis Awal dan Akhir Thawaf dalam Bentuk Graf Helm Tertutup.....	13
2.6 Representasi Waktu Shalat.....	15
2.7 Graf G	16
2.8 Graf	17
2.9 Subgraf	18
2.10 Graf G	18
2.11 Graf dengan Derajat Titik	19
2.12 Graf G Beraturan-1 dan Beraturan-2	20
2.13 Graf Komplit	20
2.14 Jalan (<i>Walk</i>), Jalan Kecil (<i>Trail</i>), dan Lintasan (<i>Path</i>)	21
2.15 Gabungan Graf	22
2.16 Penjumlahan Dua Graf	22
2.17 Graf Hasil Kali Kartesius.....	23
2.18 Graf Sikel C_3 , C_4 , dan C_5	24
2.19 Graf Sikel C_3 dan graf komplit K_1	25
2.20 Graf Roda W_3 atau $W_3 = C_3 + K_1$	25
2.21 Graf Roda W_4 dan W_5	25
2.22 Graf Helm H_3 , H_4 , dan H_5	26
2.23 Graf Helm Tertutup cH_3 , cH_4 , dan cH_5	27
2.24 G adalah Planar dan H adalah Graf Bidang dari G	28
2.25 Muka Dalam dan Luar dari Graf G.....	29
2.26 Contoh Graf Bidang G dan Graf Dualnya	29
3.1 Graf Roda dengan $n = 3$	31
3.2 Graf Roda dengan $n = 4$	32
3.3 Graf Roda dengan $n = 5$	34
3.4 Graf Roda dengan $n = 6$	35
3.5 Graf Roda dengan $n = 7$	36
3.6 Graf Roda dengan $n = 8$	38
3.7 Graf roda W_n , $n \geq 3$	40
3.8 Graf Helm Tertutup.....	40
3.9 Graf Helm Tertutup dalam Bentuk Bidang Datar	41
3.10 Graf Helm Tertutup dengan $n = 3$	41
3.11 Graf Helm Tertutup dengan $n = 4$	42

3.12 Graf Helm Tertutup dengan $n = 5$	44
3.13 Graf Helm Tertutup dengan $n = 6$	45
3.14 Graf Helm Tertutup dengan $n = 7$	47
3.15 Graf Helm Tertutup dengan $n = 8$	49
3.16 Graf graf helm tertutup cHn , $n \geq 3$	52



DAFTAR TABEL

Tabel	Halaman
3.1 Graf Roda $W_3, W_4, \dots W_8$ dan Bentuk Graf Dualnya	39
3.2 Graf Helm Tertutup $cH_3, cH_4, \dots cH_8$ dan Bentuk Graf Dualnya	51



ABSTRAK

Fajariyah, Susantin. 2009. *Graf Dual (Dual Graph) dari Graf Roda (W_n) dan Graf Helm Tertutup (cH_n)*. Skripsi, Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri (UIN) Malang.

Pembimbing I: Abdussakir, M.Pd., Pembimbing II: Ahmad Barizi, M.A.

Kata kunci : Graf Dual, Graf Roda (W_n), Graf Helm Tertutup (cH_n)

Teori Graf adalah salah satu dari beberapa cabang ilmu matematika, yaitu suatu pokok bahasan yang mendapat banyak perhatian karena model-modelnya sangat berguna untuk aplikasi yang luas. Teori graf merupakan salah satu pokok bahasan yang memiliki banyak terapan praktis hingga saat ini. Graf digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut. Dengan model teori graf yang tepat, suatu permasalahan menjadi lebih jelas, sehingga mudah untuk dianalisis dan diselesaikan.

Dalam Al-Qur'an elemen-elemen pada graf yaitu titik dan sisi dapat merepresentasikan Allah dan hamba-hamba-Nya, sedangkan sisi atau garis yang menghubungkan elemen-elemen tersebut adalah bagaimana hubungan antara Allah dengan hamba-Nya dan juga hubungan sesama hamba yang terjalin.

Salah satu permasalahan dalam teori graf adalah menentukan graf dual dari suatu graf bidang. Graf dual adalah graf yang diperoleh dari suatu graf bidang dengan cara setiap daerah diwakili dengan satu titik, dan antar titik akan terhubung langsung jika daerah tersebut saling berbatasan langsung. Permasalahan mengenai graf dual belum pernah dikaji, sehingga pada skripsi ini penulis membahas graf dual dari graf roda (W_n) dan graf helm tertutup (cH_n). Graf ini sangat menarik untuk dikaji, karena graf roda dan graf helm tertutup adalah graf planar dan mempunyai bentuk yang khas. Fokus permasalahan dalam penulisan skripsi ini adalah bagaimana bentuk graf dual dari graf roda dan graf helm tertutup.

Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa: 1) Graf dual (*dual graph*) dari graf roda (W_n) berbentuk graf roda (W_n). 2) Graf dual (*dual graph*) dari graf helm tertutup (cH_n) berbentuk graf helm tertutup (cH_n). Dengan demikian, maka graf roda (W_n) dan graf helm tertutup (cH_n) adalah graf *self-dual*.

Berdasarkan hasil penelitian ini disarankan agar kepada pembaca untuk membahas graf dual dari graf lainnya atau membahas graf dual dikaitkan dengan pewarnaan atau pelabelan.

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Matematika secara umum merupakan sebuah ilmu yang mempelajari tentang pola dari struktur, perubahan, dan ruang. Secara informal, matematika dapat pula disebut sebagai ilmu tentang bilangan dan angka. Matematika merupakan alat yang dapat memperjelas dan menyederhanakan suatu keadaan atau situasi melalui abstraksi, idealisasi, atau generalisasi untuk suatu studi ataupun pemecahan masalah (Diknas, 2001:1).

Pada zaman dahulu, matematika merupakan sebuah alat berpikir yang sederhana dari sekelompok orang untuk menghitung dan mengukur barang-barang yang dimilikinya. Kemudian matematika mengalami perkembangan hingga menjadi alat pemikiran yang ampuh dari para ilmuwan untuk memecahkan persoalan-persoalan yang rumit dalam suatu bidang ilmu.

Matematika digunakan sebagai bahasa dari suatu ilmu dengan menetapkan berbagai lambang untuk mewakili sesuatu sasaran yang diolahnya. Dengan Matematika pula, pemikiran ilmiah dalam suatu bidang ilmu dapat dilakukan secara lebih jelas, lebih leluasa, dan lebih ringkas. Hasil-hasil pemikiran ilmiah yang diungkapkan dalam bahasa matematika lebih cermat dan tepat. Oleh karena itu, ilmu matematika dengan berbagai cabangnya memiliki banyak terapan yang luas sampai sekarang.

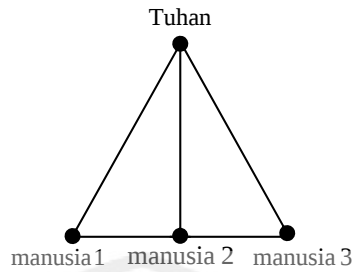
Teori graf adalah salah satu dari beberapa cabang ilmu matematika. Teori graf merupakan suatu pokok bahasan yang mendapat banyak perhatian karena model-modelnya sangat berguna untuk aplikasi yang luas, di antaranya diterapkan

dalam jaringan komunikasi, transportasi, ilmu komputer, riset operasi, dan lain sebagainya. Representasi visual dengan graf adalah dengan menyatakan obyek sebagai titik sedangkan hubungan antara obyek dinyatakan dengan garis. Graf dapat didefinisikan sebagai himpunan yang tidak kosong yang memuat elemen-elemen yang disebut titik, dan suatu daftar pasangan tidak terurut dari elemen itu yang disebut sisi.

Banyak rumus dalam teori graf termotivasi oleh keadaan nyata. Dari permasalahan yang timbul pada masalah kehidupan sehari-hari timbul ide untuk menemukan rumus matematikanya, tentu saja dengan dibebaskan dari arti dan makna sehari-hari. Teori graf sudah dipelajari sejak lama, secara formal muncul pertama pada tahun 1736, yakni pada tulisan Euler mengenai penyelesaian masalah jembatan Königsberg.

Teori graf merupakan salah satu pokok bahasan yang memiliki banyak terapan praktis hingga saat ini. Graf digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut. Dengan model teori graf yang tepat, suatu permasalahan menjadi lebih jelas, sehingga mudah untuk dianalisis. Permasalahan yang dirumuskan dengan teori graf dibuat sederhana, yaitu diambil aspek-aspek yang diperlukan dan dibuang aspek-aspek lainnya.

Dalam Al-Qur'an elemen-elemen pada graf yaitu titik dan sisi dapat merepresentasikan Allah dan hamba-hamba-Nya, sedangkan sisi atau garis yang menghubungkan elemen-elemen tersebut adalah bagaimana hubungan antara Allah dengan hamba-Nya dan juga hubungan sesama hamba yang terjalin.



Gambar 1.1. Hubungan antara Tuhan dengan Hamba-Nya serta Sesama Hamba

Hal ini dijelaskan oleh firman Allah dalam Al Qur'an surat Ali Imran ayat 112, yaitu:

ضُرِبَتْ عَلَيْهِمُ الذَّلِيلَةُ أَيْنَ مَا ثُقِفُوا إِلَّا بِحَبْلٍ مِّنَ اللَّهِ وَحَبْلٍ مِّنَ النَّاسِ وَبَاءُوا بِغَضَبٍ مِّنَ اللَّهِ وَضُرِبَتْ عَلَيْهِمُ الْمَسْكَنَةُ ذَٰلِكَ بِأَنَّهُمْ كَانُوا يَكْفُرُونَ بِآيَاتِ اللَّهِ وَيَقْتُلُونَ الْأَنْبِيَاءَ بِغَيْرِ حَقٍّ ذَٰلِكَ بِمَا عَصَوْا وَكَانُوا يَعْتَدُونَ ﴿١١٢﴾

Artinya: Mereka diliputi kehinaan di mana saja mereka berada, kecuali jika mereka berpegang kepada tali (agama) Allah dan tali (perjanjian) dengan manusia, dan mereka kembali mendapat kemurkaan dari Allah dan mereka diliputi kerendahan. Yang demikian itu, karena mereka kafir kepada ayat-ayat Allah dan membunuh para nabi tanpa alasan yang benar. Yang demikian itu, disebabkan mereka durhaka dan melampaui batas (Q.S. Ali Imran: 112).

Aplikasi dari teori graf sangat luas dan dipakai dalam berbagai disiplin ilmu maupun dalam kehidupan sehari-hari. Penggunaan graf di berbagai bidang tersebut digunakan untuk memudahkan suatu permasalahan dengan cara membuat sebuah model matematika dari permasalahan tersebut, kemudian model matematika tersebut diselesaikan. Teori graf juga sangat berguna untuk mengembangkan model-model yang terstruktur dalam berbagai situasi. Dalam implementasinya teori graf banyak digunakan antara lain di dalam bidang kelistrikan, kimia organik, ilmu komputer. Bahkan dewasa ini teori graf digunakan secara besar-besaran dalam bidang ekologi, geografi, antropologi,

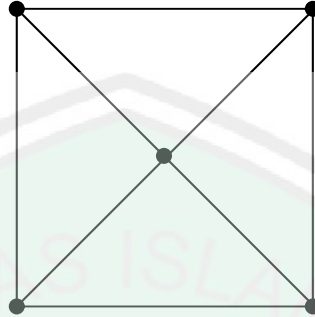
genetika, fisika, elektronika, pemrosesan informasi, arsitektur, dan desain. Selain itu juga, teori ini banyak dimanfaatkan secara praktis dalam bidang industri.

Suatu pokok bahasan dalam teori graf adalah graf planar. Graf disebut graf planar jika dapat digambarkan pada suatu bidang sehingga antara dua sisi berbeda hanya akan bersekutu pada titik ujung (Bondy dan Murty, 1976:135). Dengan kata lain, graf planar adalah graf yang dapat digambar pada bidang sehingga tidak ada sisi yang saling berpotongan. Graf planar yang sudah digambar pada bidang disebut graf bidang (*plane graf*).

Misalkan G adalah suatu graf bidang. Didefinisikan graf baru G^* sebagai berikut. Masing-masing muka pada G diwakili oleh titik pada G^* . Dua titik a dan b pada G^* akan saling terhubung langsung jika dan hanya jika muka yang diwakili oleh dua titik itu saling berbatasan langsung di G . dua titik a dan b akan terhubung langsung oleh sebanyak sisi yang terdapat pada perbatasan (*boundary*) dua muka yang diwakilinya pada G . Graf G^* ini kemudian disebut graf dual dari G . Graf dual dari graf bidang selalu berbentuk graf bidang. Suatu graf bidang yang isomorfik dengan graf dualnya disebut graf *self-dual*, yaitu graf yang dualnya adalah dirinya sendiri.

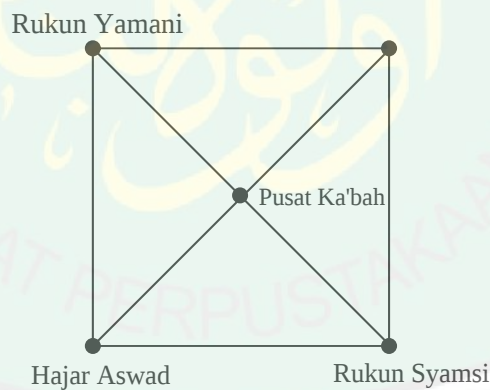
Permasalahan mengenai graf dual masih relatif baru dan belum ada yang membahas. Oleh sebab itu, dalam skripsi ini dibahas mengenai graf dual dari graf roda (W_n) dan graf helm tertutup (CH_n). Pemilihan graf roda dan graf helm tertutup berdasarkan alasan bahwa graf tersebut adalah graf planar dan mempunyai bentuk yang khas. Pembahasan akan difokuskan pada bentuk graf dual dari graf roda (W_n) dan graf helm tertutup (CH_n) serta melihat apakah graf roda dan graf helm tertutup merupakan graf *self-dual*.

Graf roda, khususnya graf roda dengan 4 empat titik atau W_4 dapat digambarkan sebagai berikut.



Gambar 1.2. Graf Roda Order 4 atau W_4

Gambar 1.2 tersebut dapat juga menjadi ilustrasi dari gambar ka'bah di Masjidil Haram. Titik pusat roda menggambarkan titik pusat ka'bah, sedangkan empat titik pada sikel menggambarkan titik sudut ka'bah. Titik sudut itu antara lain adalah titik Syamsi, titik Yamani, dan titik Hajar Aswad. Gambarnya adalah sebagai berikut.

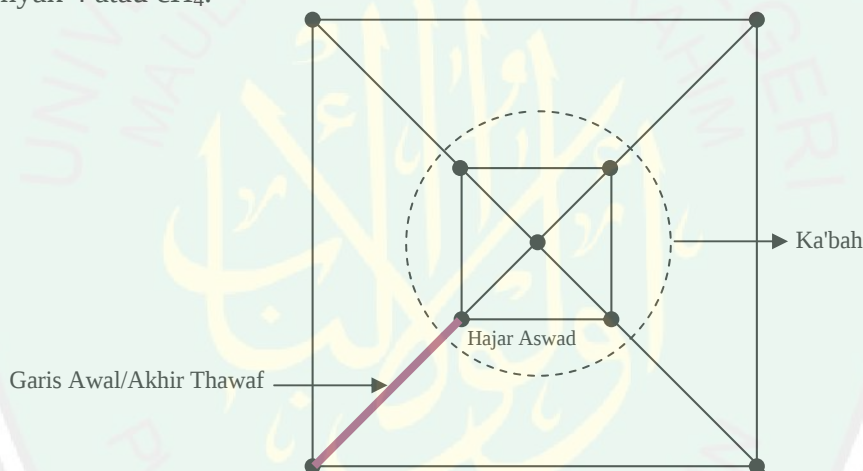


Gambar 1.3. Representasi Ka'bah dalam Graf Roda

Berkaitan dengan ka'bah di Masjidil Haram, terdapat suatu ibadah yang disebut Thawaf. Thawaf secara umum adalah ibadah dengan cara mengelilingi ka'bah sebanyak 7 kali, 3 putaran pertama dilakukan dengan berlari-lari kecil (jika mungkin), dan selanjutnya berjalan biasa. Satu putaran Thawaf dimulai dari Hajar Aswad dan diakhiri di Hajar Aswad lagi setelah melewati titik/rukun Yamani.

Thawaf dilakukan dengan memutar berlawanan arah dengan putaran jarum jam, atau dengan menempatkan ka'bah pada posisi orang yang berthawaf.

Mengingat banyaknya orang yang melakukan Thawaf, maka kemudian perlu menarik garis lurus yang melalui pusat ka'bah dan Hajar Aswad. Garis ini berfungsi sebagai pedoman bagi orang yang akan melakukan Thawaf pada lingkaran-lingkaran luar yang jauh dari Ka'bah. Di Masjidil Haram, garis ini dibuat berwarna coklat. Jika digambarkan dalam bentuk graf, maka akan diperoleh graf berikut, yang tidak lain berbentuk graf helm tertutup dengan titik sebanyak 4 atau cH_4 .



Gambar 1.4. Representasi Garis Awal dan Akhir Thawaf dalam Bentuk Graf Helm Tertutup

Berdasarkan uraian tersebut di atas, maka dalam penelitian ini penulis akan mengkaji tentang graf dual, dengan judul “**Graf Dual (*Dual Graph*) dari Graf Roda (W_n) dan Graf Helm Tertutup (cH_n).**”

B. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka dapat dirumuskan rumusan masalah sebagai berikut:

1. Bagaimana bentuk graf dual dari graf roda (W_n)?
2. Bagaimana bentuk graf dual dari graf helm tertutup (cH_n)?

C. Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan penelitian ini adalah:

1. Mendeskripsikan bentuk graf dual dari graf roda (W_n).
2. Mendeskripsikan bentuk graf dual dari graf helm tertutup (CH_n).

D. Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat, khususnya kepada penulis dan umumnya kepada semua pembaca baik secara teoritis maupun secara praktis.

1. Bagi Penulis

- a. Sebagai bentuk partisipasi penulis dalam memberikan kontribusi terhadap pengembangan keilmuan, khususnya dalam bidang ilmu Matematika.
- b. Sebagai suatu bentuk aplikasi ilmu yang telah penulis dapatkan selama berada di bangku kuliah.
- c. Sebagai bahan referensi dalam menambah pengetahuan tentang konsep graf

2. Bagi Pembaca

Penelitian ini diharapkan mampu menjadi sebuah wahana untuk menambah wawasan dan khasanah keilmuan serta menjadi bahan rujukan untuk melakukan penelitian lebih lanjut tentang graf dual.

E. Metode Penelitian

Penelitian ini penelitian kepustakaan (*library research*), yaitu dengan melakukan penelitian untuk memperoleh data-data dan informasi dengan menggunakan teknik dokumenter, baik yang berupa buku, artikel, jurnal, majalah,

maupun karya ilmiah lainnya yang berkaitan dengan topik atau permasalahan yang diteliti.

Adapun langkah-langkah yang diambil untuk menganalisis data dalam penelitian ini adalah:

1. Menggambar beberapa graf roda (W_n) dan graf helm tertutup (CH_n), kemudian menggambar graf dualnya.
2. Mencari pola bentuk graf dual dari graf roda (W_n) dan graf helm tertutup (CH_n).
3. Bentuk graf dual yang diperoleh kemudian dirumuskan secara umum dengan mengkonstruksi teorema dan kemudian dibuktikan.

F. Sistematika Pembahasan

Untuk memperoleh gambaran yang mudah dimengerti dan menyeluruh mengenai rancangan isi skripsi ini, secara global dapat dilihat dari sistematika pembahasan yang disusun sebagai berikut.

BAB I : Bagian ini merupakan bab Pendahuluan yang berisikan tentang Latar Belakang, Rumusan Masalah, Tujuan Penelitian, Manfaat Penelitian, dan Sistematika Pembahasan.

BAB II : Bagian ini merupakan bab Kajian Pustaka yang berisikan tentang Teori Graf dalam Al-Qur'an, Graf, Graf Terhubung, Operasi Pada Graf, Graf Sikel, dan Graf Dual (*Dual Graph*).

BAB III : Bagian ini merupakan bab Pembahasan, yang meliputi: Graf Dual Dari Graf roda (W_n) dan Graf Dual Dari Graf Helm Tertutup (CH_n).

BAB IV : Bagian ini merupakan bab Penutup yang berisikan tentang kesimpulan dan saran-saran.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

Pada bagian ini dijelaskan beberapa konsep yang mendukung terhadap pembahasan, yaitu: tentang Teori Graf dalam Al-Qur'an, Teori Graf, Graf Terhubung, Operasi pada Graf, Graf Sikel, dan Graf Dual (*Dual Graph*).

A. Teori Graf dalam Al-Qur'an

Allah SWT berfirman dalam QS Al-Maidah ayat 97 bahwa Ka'bah menjadi pusat peribadatan umat manusia. Ibadat yang dimaksud khususnya ibadah shalat dan ibadah haji.

جَعَلَ اللَّهُ الْكَعْبَةَ الْبَيْتَ الْحَرَامَ قِيَمًا لِلنَّاسِ وَالشَّهْرَ الْحَرَامَ وَاهْدَىٰ وَالْقَلِيدَ
ذَٰلِكَ لِتَعْلَمُوا أَنَّ اللَّهَ يَعْلَمُ مَا فِي السَّمَوَاتِ وَمَا فِي الْأَرْضِ وَأَنَّ اللَّهَ بِكُلِّ شَيْءٍ
عَلِيمٌ

Artinya: Allah Telah menjadikan Ka'bah, rumah Suci itu sebagai pusat (peribadatan dan urusan dunia) bagi manusia, dan (demikian pula) bulan Haram, had-ya, qalaid. (Allah menjadikan yang) demikian itu agar kamu tahu, bahwa Sesungguhnya Allah mengetahui apa yang ada di langit dan apa yang ada di bumi dan bahwa Sesungguhnya Allah Maha mengetahui segala sesuatu.

Dalam ibadah shalat, menghadap ka'bah sebagai pusat Masjidil Haram di Mekkah adalah suatu rukun. Ibadah shalat wajib hukumnya untuk menghadap ke Ka'bah. Ka'bah menjadi kiblat untuk ibadah shalat ditegaskan dalam QS Al-Baqarah ayat 144.

قَدْ نَرَى تَقَلُّبَ وَجْهِكَ فِي السَّمَاءِ ۚ فَلَنُوَلِّيَنَّكَ قِبْلَةً تَرْضَاهَا ۚ فَوَلِّ وَجْهَكَ شَطْرَ الْمَسْجِدِ الْحَرَامِ ۚ وَحَيْثُ مَا كُنْتُمْ فَوُودُوا وَجُوهَكُمْ شَطْرَهُ ۚ وَإِنَّ الَّذِينَ أُوتُوا الْكِتَابَ لَيَعْلَمُونَ أَنَّهُ الْحَقُّ مِنْ رَبِّهِمْ ۚ وَمَا اللَّهُ بِغَفِلٍ عَمَّا يَعْمَلُونَ ﴿١٤٤﴾

Artinya: Sungguh kami (sering) melihat mukamu menengadahkan ke langit[96], Maka sungguh kami akan memalingkan kamu ke kiblat yang kamu sukai. palingkanlah mukamu ke arah Masjidil Haram, dan dimana saja kamu berada, palingkanlah mukamu ke arahnya. dan Sesungguhnya orang-orang (Yahudi dan Nasrani) yang diberi Al Kitab (Taurat dan Injil) memang mengetahui, bahwa berpaling ke Masjidil Haram itu adalah benar dari Tuhannya; dan Allah sekali-kali tidak lengah dari apa yang mereka kerjakan.

Q.S Al-Baqarah ayat 140 tersebut juga dipertegas dengan ayat 149 dan 150 berikut.

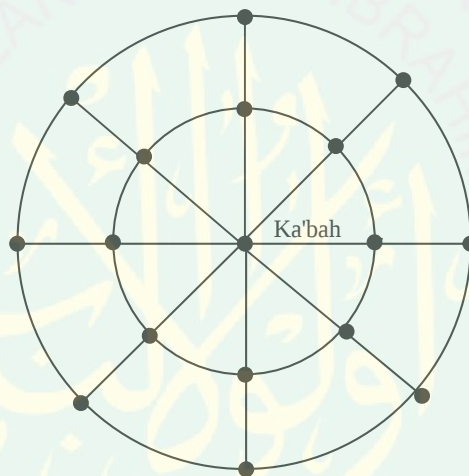
وَمِنْ حَيْثُ خَرَجْتَ فَوَلِّ وَجْهَكَ شَطْرَ الْمَسْجِدِ الْحَرَامِ ۚ وَإِنَّهُ لَلْحَقُّ مِنْ رَبِّكَ ۚ وَمَا اللَّهُ بِغَفِلٍ عَمَّا تَعْمَلُونَ ﴿١٤٩﴾

Artinya: Dan dari mana saja kamu keluar (datang), Maka palingkanlah wajahmu ke arah Masjidil Haram, Sesungguhnya ketentuan itu benar-benar sesuatu yang hak dari Tuhanmu. dan Allah sekali-kali tidak lengah dari apa yang kamu kerjakan.

وَمِنْ حَيْثُ خَرَجْتَ فَوَلِّ وَجْهَكَ شَطْرَ الْمَسْجِدِ الْحَرَامِ ۚ وَحَيْثُ مَا كُنْتُمْ فَوُودُوا وَجُوهَكُمْ شَطْرَهُ ۚ لَيْلًا يَكُونُ لِلنَّاسِ عَلَيْكُمْ حُجَّةٌ إِلَّا الَّذِينَ ظَلَمُوا مِنْهُمْ فَلَا تَخْشَوْهُمْ وَاخْشَوْنِي ۚ وَلَا تُمَنِّعُوا نِعْمَتِي عَلَيْكُمْ وَلَعَلَّكُمْ تَهْتَدُونَ ﴿١٥٠﴾

Artinya: Dan dari mana saja kamu (keluar), Maka palingkanlah wajahmu ke arah Masjidil Haram. dan dimana saja kamu (sekalian) berada, Maka palingkanlah wajahmu ke arahnya, agar tidak ada hujjah bagi manusia atas kamu, kecuali orang-orang yang zalim diantara mereka. Maka janganlah kamu takut kepada mereka dan takutlah kepada-Ku (saja). dan agar Ku-sempurnakan nikmat-Ku atasmu, dan supaya kamu mendapat petunjuk.

Masjidil Haram, yang di dalamnya terdapat Ka'bah, menjadi pusat dari lingkaran-lingkaran manusia yang mengelilinginya, yang sedang melaksanakan shalat menghadap ke arahnya. Terdapat banyak lingkaran yang mengelilingi pusat Masjidil Haram, baik dalam Masjidil Haram sendiri maupun di atas bumi ini secara umum. Jika digambarkan dalam bentuk graf, maka dapat digambarkan seperti pada Gambar 2.1. Gambar ini hanya mengilustrasikan dua lingkaran yang mengelilingi Ka'bah, sehingga berbentuk graf helm tertutup. Jika pada gambar tersebut hanya diambil satu lingkaran yang mengelilingi maka diperoleh graf roda.



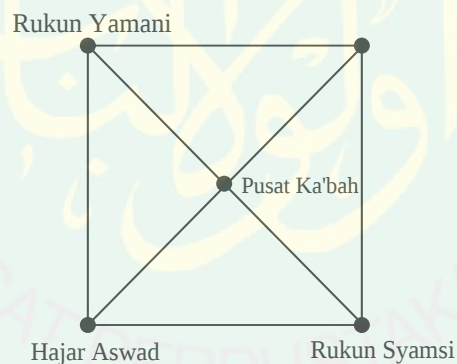
Gambar 2.1. Ilustrasi Ka'bah dan Manusia yang Beribadah Menghadap ke Arahnya

Pusat Masjidil Haram, yang menjadi kiblat atau arah ibadah shalat disebut Ka'bah. Ka'bah adalah suatu bangunan dari batu berbentuk balok, yang dibangun oleh nabi Ibrahim dan putranya nabi Ismail. Di sekitar Ka'bah terdapat maqam nabi Ibrahim, Hijr Ismail, dan Hajar Aswad (Batu Hitam) yang dipasang oleh nabi Muhammad pada sudut tenggara Ka'bah. Ka'bah mempunyai empat sudut yang salah satu sudutnya terdapat Hajar Aswad. Sudut yang lain yang mengapit sudut Hajar Aswad adalah sudut Syamsi dan sudut Yamani. Gambar ka'bah dapat dilihat pada gambar berikut.



Gambar 2.2. Ka'bah di Masjidil Haram

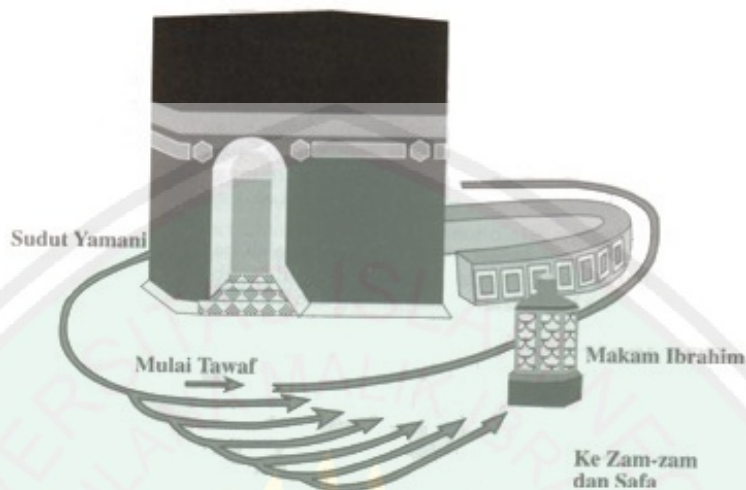
Gambar ka'bah di Masjidil Haram tersebut dapat diilustrasikan dalam bentuk graf, yaitu graf roda dengan empat titik, atau W_4 . Titik pusat roda menggambarkan titik pusat ka'bah, sedangkan empat titik pada sikel menggambarkan titik sudut ka'bah. Titik sudut itu antara lain adalah titik Syamsi, titik Yamani, dan titik Hajar Aswad. Gambarnya adalah sebagai berikut.



Gambar 2.3. Representasi Ka'bah dalam Graf Roda

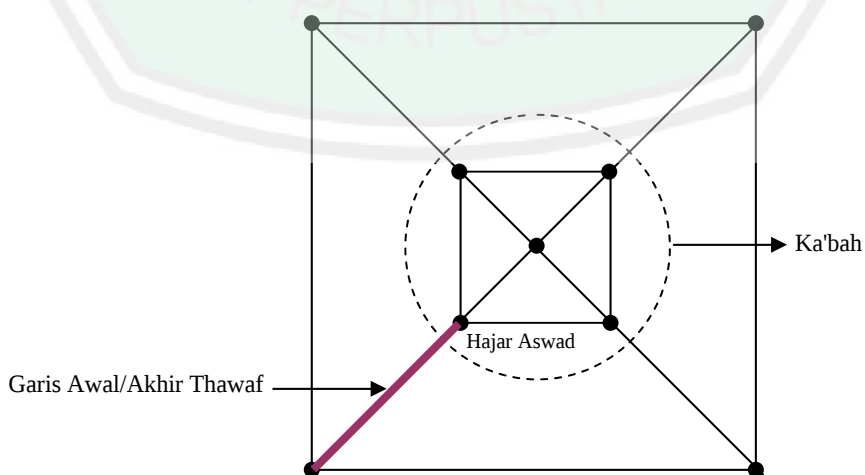
Berkaitan dengan ka'bah di Masjidil Haram, terdapat suatu ibadah yang disebut Thawaf. Thawaf secara umum adalah ibadah dengan cara mengelilingi ka'bah sebanyak 7 kali, 3 putaran pertama dilakukan dengan berlari-lari kecil (jika mungkin), dan selanjutnya berjalan biasa. Satu putaran Thawaf dimulai dari Hajar Aswad dan diakhiri di Hajar Aswad lagi setelah melewati titik/rukun Yamani. Thawaf dilakukan dengan memutar berlawanan arah dengan putaran jarum jam,

atau dengan menempatkan ka'bah pada posisi orang yang berthawaf. Gambar arah Thawaf di sekitar Ka'bah dapat digambarkan sebagai berikut.



Gambar 2.4. Arah Perputaran Thawaf Mengelilingi Ka'bah

Mengingat banyaknya orang yang melakukan Thawaf, maka kemudian perlu menarik garis lurus yang melalui pusat ka'bah dan Hajar Aswad. Garis ini berfungsi sebagai pedoman bagi orang yang akan melakukan Thawaf pada lingkaran-lingkaran luar yang jauh dari Ka'bah. Di Masjidil Haram, garis ini dibuat berwarna coklat. Jika digambarkan dalam bentuk graf, maka akan diperoleh graf berikut, yang tidak lain berbentuk graf helm tertutup dengan titik sebanyak 4 atau CH_4 .



Gambar 2.5. Representasi Garis Awal dan Akhir Thawaf dalam Bentuk Graf Helm Tertutup

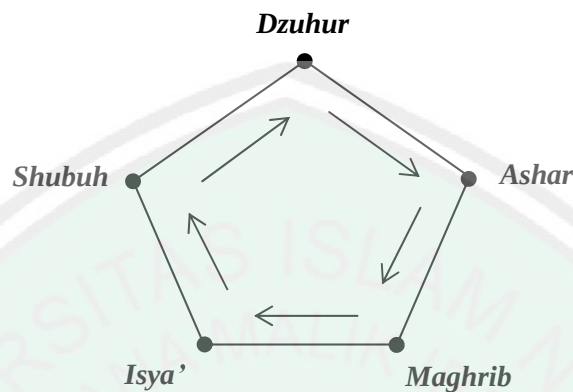
Selain itu, representasi suatu graf yang lainnya adalah shalat. Shalat mempunyai kedudukan yang amat penting dalam Islam dan merupakan pondasi yang kokoh bagi tegaknya agama Islam. Ibadah shalat dalam Islam sangat penting, sehingga shalat harus dilakukan pada waktunya, di manapun, dan bagaimanapun keadaan seorang muslim yang mukalaf. Dalam kaitannya dengan peribadatan sholat, Allah SWT berfirman:

فَإِذَا قَضَيْتُمُ الصَّلَاةَ فَادْكُرُوا اللَّهَ قِيَمًا وَقُعُودًا وَعَلَىٰ جُنُوبِكُمْ ۚ فَإِذَا
أَطْمَأْنَنْتُمْ فَأَقِيمُوا الصَّلَاةَ ۚ إِنَّ الصَّلَاةَ كَانَتْ عَلَى الْمُؤْمِنِينَ كِتَابًا مَّوْقُوتًا ﴿١٠٣﴾

Artinya: “Maka apabila kamu telah menyelesaikan shalat(mu), ingatlah Allah di waktu berdiri, di waktu duduk dan di waktu berbaring. Kemudian apabila kamu telah merasa aman, maka dirikanlah shalat itu (sebagaimana biasa). Sesungguhnya shalat itu adalah fardhu yang ditentukan waktunya atas orang-orang yang beriman” (Q.S. An-Nisaa’: 103).

Dalam ayat tersebut dijelaskan bahwa waktu-waktu sholat telah ditentukan waktunya dan telah menjadi suatu ketetapan, baik itu sholat fardhu maupun sholat sunnah. Sholat lima waktu diwajibkan dalam sehari (dhuhur, ‘ashar, maghrib, ‘isya’, dan subuh) merupakan sholat yang wajib ditunaikan dan tidak boleh ditinggalkan. Waktu pelaksanaan antara satu waktu sholat fardhu berbeda dengan empat waktu sholat yang lain dan telah ditetapkan oleh Allah swt. Akan tetapi kelima waktu sholat tersebut saling mengikat dan tidak diperbolehkan hanya melaksanakan satu sholat saja. Adapun hubungan waktu sholat tersebut dengan teori graf adalah bahwa waktu-waktu sholat tersebut merupakan suatu himpunan yang terdiri dari waktu sholat fardhu (dhuhur, ‘ashar, maghrib, ‘isya’ dan subuh) sebagai ekspresi dari himpunan titik dalam graf. Sedangkan keterikatan antara kelima sholat fardhu tersebut yang tidak dapat ditinggalkan salah satunya dalam

menunaikannya merupakan ekspresi dari garis atau sisi yang menghubungkan titik-titik dalam graf. Adapun bentuk graf dari waktu-waktu sholat fardhu yaitu



Gambar 2.6. Representasi Waktu-waktu Sholat

Dari Gambar di atas, graf representasi waktu-waktu shalat terdiri dari lima titik dan lima sisi, dan bisa juga disebut sebagai graf sikel. Pada graf representasi waktu-waktu shalat menunjukkan bahwa kelima sholat tersebut saling mengikat. Artinya bahwa waktu tiap sholat tersebut telah ditentukan, tidak boleh saling bertukar antara waktu sholat yang satu dengan sholat yang lain. Sebagai contoh apabila waktu sholat dhuhur telah habis, maka seseorang tidak boleh melakukan sholat dhuhur karena telah masuk pada waktu sholat selanjutnya, yaitu sholat ashar. Hal ini akan terus seperti itu untuk waktu sholat yang lain. Titik-titik yang digambarkan oleh waktu-waktu sholat di atas merupakan himpunan titik yang diikat oleh suatu ketetapan yang berantai.

B. Graf

6. Definisi Graf

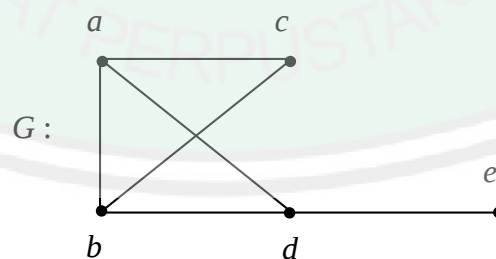
Graf G adalah pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari obyek-obyek yang disebut sebagai titik dan E adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di V yang disebut sebagai sisi. Himpunan titik di G dinotasikan dengan $V(G)$ dan himpunan sisi dinotasikan dengan $E(G)$. Sedangkan banyaknya unsur di V disebut order dari G dan dilambangkan dengan $p(G)$ dan banyaknya unsur di E disebut size dari G dan dilambangkan dengan $q(G)$. Jika graf yang dibicarakan hanya graf G , maka order dan ukuran dari G tersebut cukup ditulis dengan p dan q (Chartrand dan Lesniak, 1986: 4).

Perhatikan graf G yang memuat himpunan titik V dan himpunan sisi E seperti berikut ini.

$$V = \{a, b, c, d, e\}$$

$$E = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, d), (b, c), (d, e)\}.$$

Graf G tersebut dapat digambar sebagai berikut



Gambar 2.7. Graf G

Graf G mempunyai 5 titik sehingga order G adalah $p = 5$. Graf G mempunyai 6 sisi sehingga size graf G adalah $q = 6$.

Graf G dengan

$$V = \{a, b, c, d, e\}$$

$$E = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, d), (b, c), (d, e)\}$$

Dapat juga ditulis dengan

$$V = \{a, b, c, d, e\}$$

$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$$

dengan

$$e_1 = (a, b)$$

$$e_2 = (a, c)$$

$$e_3 = (a, d)$$

$$e_4 = (b, d)$$

$$e_5 = (b, c)$$

$$e_6 = (d, e)$$

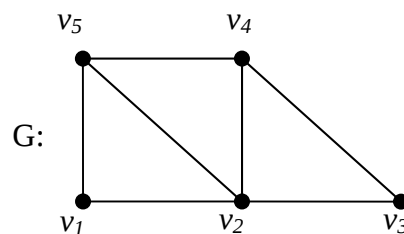
Graf H disebut subgraf dari G jika himpunan titik di H adalah subset dari himpunan titik-titik di G dan himpunan sisi-sisi di H adalah subset dari himpunan sisi di G . Dapat ditulis $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$. Jika H adalah subgraf G , maka dapat ditulis $H \subseteq G$ (Chartrand dan Lesniak, 1986: 8).

Perhatikan graf G yang memuat himpunan titik V dan himpunan sisi E seperti berikut ini.

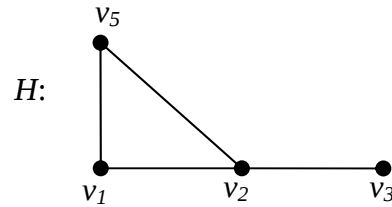
$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} \text{ dan}$$

$$E(G) = \{(v_1 v_2), (v_1 v_5), (v_2 v_3), (v_2 v_4), (v_2 v_5), (v_3 v_4), (v_4 v_5)\}$$

Graf G tersebut dapat digambar sebagai berikut



Gambar 2.8. Graf G



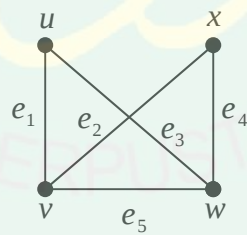
Gambar 2.9. H Subgraf G

Gambar 2.8 dan 2.9 di atas adalah dua graf G dan H yang menunjukkan bahwa H adalah subgraf G .

7. *Adjacent dan Incident*

Sisi $e = (u, v)$ dikatakan menghubungkan titik u dan v . Jika $e = (u, v)$ adalah sisi di graf G , maka u dan v disebut terhubung langsung (*adjacent*), u dan v serta v dan e disebut terkait langsung (*incident*). Untuk selanjutnya, sisi $e = (u, v)$ akan ditulis $e = uv$ (Chartrand dan Lesniak, 1986: 4).

Sebagai contoh, perhatikan graf G yang memuat himpunan $V = \{u, v, w, x\}$ dan himpunan sisi $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ berikut ini.



Gambar 2.10. Graf G

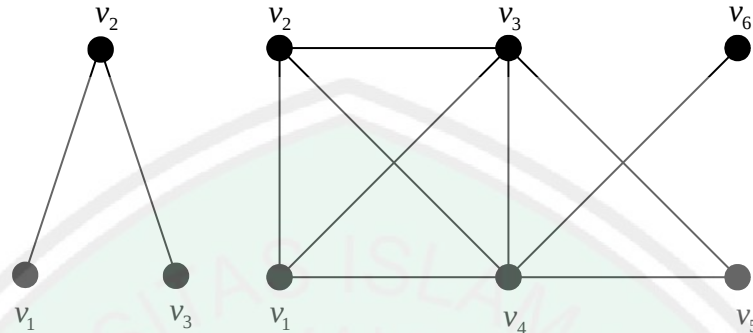
Dari Gambar 2.10 tersebut, titik u dan e_1 serta e_1 dan v adalah *incident* (terkait langsung) dan titik u dan v adalah *adjacent* (terhubung langsung).

8. Derajat

Derajat titik v pada graf G , ditulis dengan $\deg_G(v)$, adalah jumlah sisi yang terkait langsung (*incident*) pada v . Dengan kata lain, jumlah sisi yang

memuat v sebagai titik ujung. Titik v dikatakan genap atau ganjil tergantung dari jumlah $\deg_G(v)$ genap atau ganjil (Chartrand dan Lesniak, 1986:7).

Contoh:



Gambar 2.11. Graf dengan Derajat Titik

Teorema 2.1

Jika G dengan (p, q) adalah sebuah graf, di mana $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$,

maka $\sum_{i=1}^p \deg_G(v_i) = 2q$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:7-8).

Bukti:

Setiap sisi adalah terkait langsung dengan 2 titik, jika setiap derajat titik dijumlahkan, maka setiap sisi dihitung dua kali.

Teorema 2.2

Pada sebarang graf, jumlah derajat titik ganjil adalah genap.

Bukti:

Misalkan graf G dengan ukuran q . Maka ambil W yang memuat himpunan titik ganjil pada G serta U yang memuat himpunan titik genap di G .

Dari Teorema 2.1 maka diperoleh:

$$\sum_{v \in W} \deg_G v = \sum_{v \in W} \deg_G v + \sum_{v \in U} \deg_G v = 2q$$

dengan demikian karena $\sum_{v \in U} \deg_G v$ genap, maka $\sum_{v \in W} \deg_G v$ juga genap. Sehingga $|W|$ adalah genap.

9. Graf Beraturan-r

Graf beraturan – r adalah graf yang semua titiknya berderajat r , atau $\deg v=r$ (Chartrand dan Lesniak, 1986: 9).

Contoh:

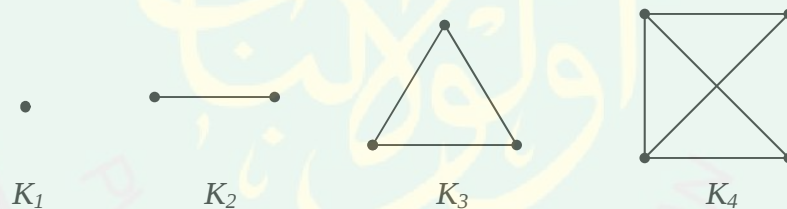


Gambar 2.12. Graf G Beraturan-1 dan Beraturan-2

10. Graf Komplit

Graf komplit (*Complete Graph*) adalah graf dengan dua titik yang berbeda saling *adjacent*. Graf komplit dengan n titik dinyatakan dengan K_n (Chartrand dan Lesniak, 1986: 9 dan Purwanto, 1998:21).

Contoh:



Gambar 2.13. Graf Komplit

C. Graf Terhubung

1. Definisi Walk

Sebuah jalan (*walk*) $u - v$ di graf G adalah barisan berhingga (tak kosong).

$W : u = u_0, e_1, u_1, e_2, \dots, u_{n-1}, e_n, u_n = v$ yang berselang seling antara titik dan sisi, yang dimulai dari titik u dan diakhiri dengan titik v , dengan $e_i = u_{i-1}u_i$ untuk $i = 1, 2, \dots, n$ adalah sisi di G . u_0 disebut titik awal, u_n disebut titik akhir, $u_1, u_2, \dots, u_{n-1}$ disebut titik interval, dan n menyatakan panjang dari W (Chartrand dan Lesniak, 1986: 26).

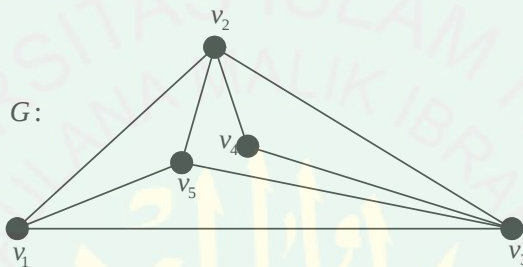
2. Definisi Trail

Jalan $u - v$ yang semua sisinya berbeda disebut *Trail* $u - v$. (Chartrand dan Lesniak, 1986: 26)..

3. Definisi Path

Jalan $u - v$ yang semua titiknya berbeda disebut *path* (lintasan) $u - v$. Dengan demikian, semua lintasan adalah *Trail* (Chartrand dan Lesniak, 1986: 26)..

Contoh:



Gambar 2.14. Jalan (*Walk*), Jalan Kecil (*Trail*), dan Lintasan (*Path*)

Dari graf di atas $W_1 : v_1, v_2, v_3, v_2, v_5, v_3, v_4$ merupakan jalan (*walk*) $v_1 - v_4$ tetapi bukan jalan kecil (*trail*), $W_2 : v_1, v_2, v_5, v_1, v_3, v_4$ merupakan jalan kecil (*trail*) $v_1 - v_4$ tetapi bukan lintasan (*path*), dan $W_3 : v_1, v_3, v_4$ merupakan lintasan (*path*) $v_1 - v_4$.

4. Definisi Sirkuit

Jalan kecil tertutup (*closed trail*) dan tak trivial pada graf G disebut Sirkuit G (Chartrand dan Lesniak, 1986:28).

5. Definisi Sikel

Sirkuit $v_1, v_2, \dots, v_n, v_1$ ($n \geq 3$) yang memiliki n titik serta v_i adalah titik-titik berbeda untuk $1 \leq i \leq n$ disebut Sikel (*cycle*) (Chartrand dan Lesniak, 1986:28).

D. Operasi pada Graf

1. Operasi Union (Gabungan)

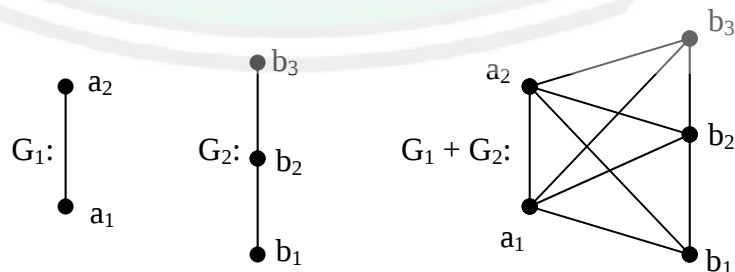
Gabungan dua graf G_1 dan G_2 yang dinotasikan dengan $G = G_1 \cup G_2$ mempunyai himpunan titik $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan himpunan sisi $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2)$. Jika graf G memuat sebanyak $n \geq 2$ graf H , maka dinotasikan dengan $G = {}_nH$. Graf $2K_1 \cup 3K_2 \cup K_{(1,3)}$ akan ditunjukkan pada gambar sebagai berikut (Chartrand and Lesniak, 1986: 11).



Gambar 2.15. Gabungan Graf

2. Operasi Sum (Penjumlahan)

Penjumlahan dua graf G_1 dan G_2 yang dinotasikan $G = G_1 + G_2$ mempunyai himpunan titik $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan himpunan sisi $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv | u \in V(G_1) \text{ dan } v \in V(G_2)\}$ di mana $E(G) = (a_1a_2) \cup (b_1b_2, b_2b_3) \cup \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_1, b_3), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_2, b_3)\}$ (Chartrand and Lesniak, 1986: 11).

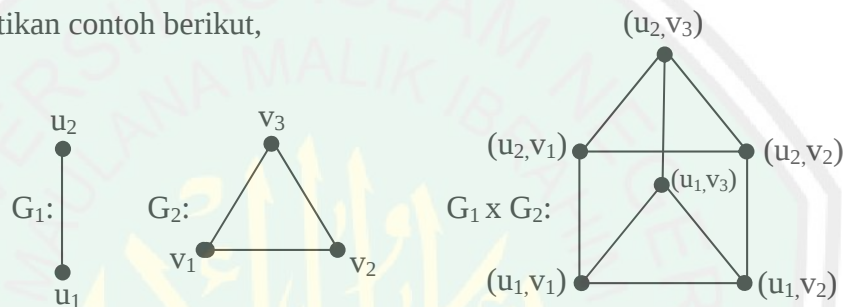


Gambar 2.16. Penjumlahan Dua Graf

3. Operasi Perkalian Kartesius

Hasil kali kartesius dari graf G_1 dan G_2 adalah graf yang dinotasikan $G = G_1 \times G_2$ dan mempunyai himpunan titik $V(G) = V(G_1) \times V(G_2) = \{u_1, u_2\} \times \{v_1, v_2, v_3\}$, dan dua titik (u_1, u_2) dan (v_1, v_2) dari graf G terhubung langsung jika dan hanya jika $u_1 = v_1$ dan $u_2 v_2 \in E(G_2)$ atau $u_2 = v_2$ dan $u_1 v_1 \in E(G_1)$ (Chartrand and Lesniak, 1986: 11).

Perhatikan contoh berikut,



Gambar 2.17. Graf Hasil Kali Kartesius

Dari gambar 2.17 tersebut bahwa $V(G_1) = \{u_1, u_2\}$ dan $V(G_2) = \{v_1, v_2, v_3\}$, maka $G_1 \times G_2$ adalah $V(G) = \{(u_1, v_1), (u_1, v_2), (u_1, v_3), (u_2, v_1), (u_2, v_2), (u_2, v_3)\}$. (u_1, v_1) dan (u_1, v_2) terhubung langsung jika dan hanya jika $u_1 = u_2$ dan $v_1 v_2 \in E(G_2)$.

E. Graf Sikel

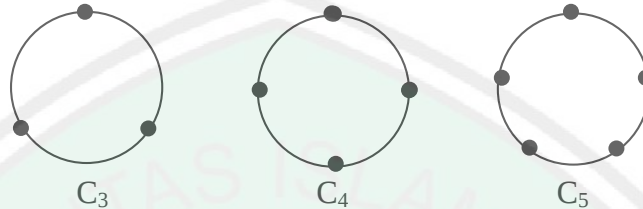
1. Graf Sikel C_n

Graf sikel C_n adalah graf terhubung n titik yang setiap titiknya berderajat

2. Misal graf sikel C_n mempunyai himpunan titik $V(C_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, maka graf tersebut mempunyai himpunan sisi $E(C_n) = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ di mana $e_i = v_i v_{i+1} \pmod{n}$ untuk setiap $i=1, 2, \dots, n$ (Gafur, 2008:8).

Sikel dengan panjang n disebut *sikel- n* (C_n). Sikel- n disebut genap atau ganjil bergantung pada n genap atau ganjil. Panjang sikel pada sebuah graf paling kecil adalah 3 (Chartrand dan Lesniak, 1986: 28).

Contoh:



Gambar 2.18. Graf Sikel C_3 , C_4 , dan C_5

Gambar di atas menunjukkan contoh dari graf sikel, graf sikel C_3 memiliki 3 titik yang masing-masing titiknya berderajat 2, graf sikel C_4 memiliki 4 titik dan masing-masing titiknya berderajat 2, sedangkan graf sikel C_5 memiliki 5 titik dan masing-masing titiknya juga berderajat 2.

2. Graf Roda (*Wheel Graph*)

Graf Roda W_n adalah graf yang memuat satu sikel yang setiap titik pada sikel terhubung langsung dengan titik pusat. Graf roda W_n diperoleh dengan operasi penjumlahan graf sikel C_n dengan graf komplit K_1 . Jadi

$$W_n = C_n + K_1, n > 2$$

Teorema 2.3

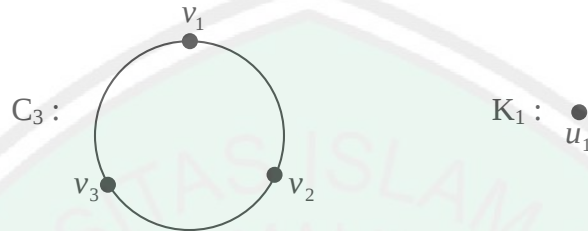
Graf Roda W_n memiliki $n+1$ titik dan $2n$ sisi.

Bukti

Karena graf roda W_n memiliki n buah titik pada sikel dan 1 buah titik pada titik pusat maka $|V| = n + 1$.

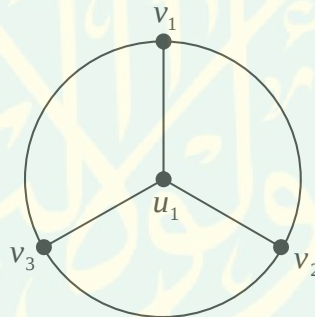
Karena graf roda W_n memiliki n buah titik pada siklus, maka banyaknya sisi pada siklus adalah n dan karena semua titik pada siklus terhubung langsung dengan titik pusat maka ada n buah sisi lagi, jadi $|E| = n + n = 2n$.

Contoh:



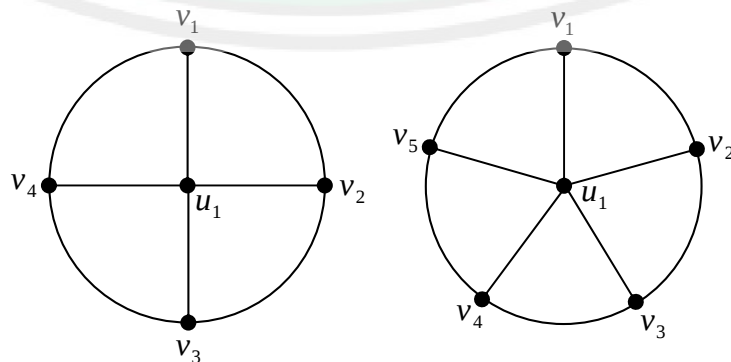
Gambar 2.19. Graf Sikel C_3 dan graf komplit K_1

Dari gambar 2.19 di atas, jika graf siklus C_3 dan graf komplit K_1 dijumlahkan, maka akan terbentuk graf roda W_3 seperti gambar berikut.



Gambar 2.20. Graf Roda W_3 atau $W_3 = C_3 + K_1$

Dengan cara yang sama, juga akan terbentuk graf roda W_4 dan W_5 seperti berikut ini.



Gambar 2.21. Graf Roda W_4 dan W_5

3. Graf Helm

Graf helm H_n adalah graf yang didapatkan dari sebuah graf roda W_n dengan menambahkan sisi anting-anting pada setiap titik di siklus (Gallian, 2007 : 7)

Teorema 2.4

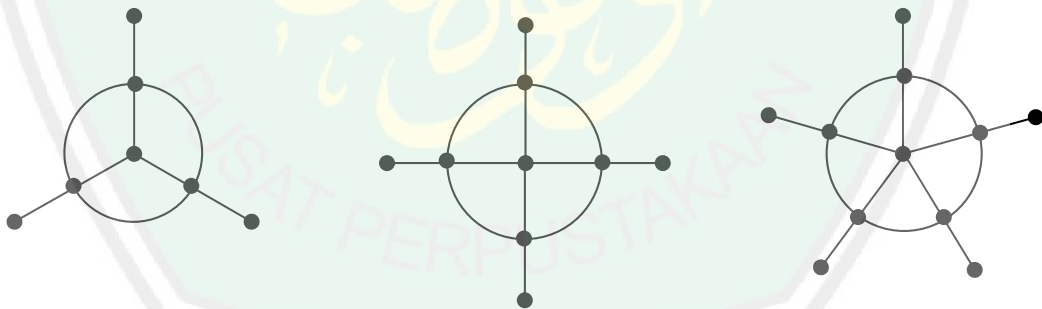
Graf helm H_n memiliki $2n+1$ titik dan $3n$ sisi.

Bukti :

Karena graf helm H_n memiliki n buah titik pada siklus dan n buah titik anting-anting serta 1 buah titik pada titik pusat maka $|V| = 2n+1$.

Karena graf helm H_n memiliki n buah memuat graf roda W_n yang mempunyai $2n$ sisi dan ada tambahan titik anting-anting yang terhubung langsung pada setiap titik di siklus maka akan ada n sisi lagi, jadi $|E| = 2n + n = 3n$

Contoh:



Gambar 2.22. Graf Helm H_3 , H_4 , dan H_5

H_3 : Adalah graf helm yang memuat graf roda W_3 dengan tambahan sisi anting-anting pada setiap titik di siklus.

H_4 : Adalah graf helm yang memuat graf roda W_4 dengan tambahan sisi anting-anting pada setiap titik di siklus.

H_5 : Adalah graf helm yang memuat graf roda W_5 dengan tambahan sisi anting-anting pada setiap titik di siklus.

4. Graf Helm Tertutup

Graf helm tertutup (cH_n) adalah graf yang diperoleh dari sebuah graf helm dengan menghubungkan tiap-tiap titik anting-anting untuk membentuk siklus yang baru (Gallian, 2007 :7).

Teorema 2.5

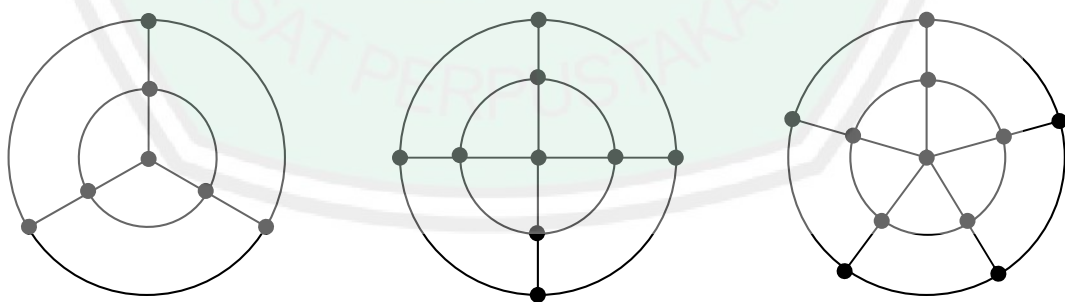
Graf helm cH_n memiliki $2n + 1$ titik dan $4n$ sisi.

Bukti :

Karena graf helm tertutup cH_n memiliki n titik pada siklus dalam dan n titik pada siklus serta 1 titik pada titik pusat maka $|V| = 2n + 1$.

Karena graf helm tertutup cH_n memuat graf helm H_n yang mempunyai $3n$ sisi dan setiap titik anting-anting terhubung langsung sehingga membentuk sebuah siklus maka akan ada n sisi lagi, jadi $|E| = 3n + n = 4n$.

Contoh:



Gambar 2.23. Graf Helm Tertutup cH_3 , cH_4 , dan cH_5

cH_3 : Adalah graf helm tertutup yang memuat graf helm H_3 dengan menghubungkan setiap titik anting-anting sehingga membentuk sebuah siklus.

cH_4 : Adalah graf helm tertutup yang memuat graf helm H_4 dengan menghubungkan setiap titik anting-anting sehingga membentuk sebuah siklus.

cH_5 : Adalah graf helm tertutup yang memuat graf helm H_5 dengan menghubungkan setiap titik anting-anting sehingga membentuk sebuah siklus.

F. Graf Dual (*Dual Graph*)

Graf disebut graf planar jika dapat digambarkan pada suatu bidang sehingga antara dua sisi berbeda hanya akan bersekutu pada titik ujung (Bondy dan Murty, 1976:135). Dengan kata lain, graf planar adalah graf yang dapat digambar pada bidang sehingga tidak ada sisi yang saling berpotongan. Graf planar yang sudah digambar pada bidang disebut graf bidang (*plane graph*).

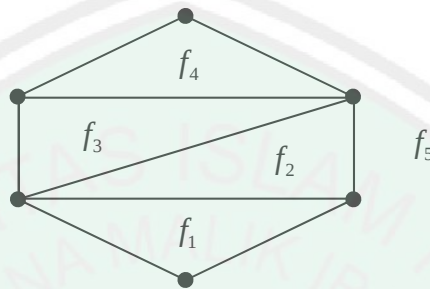


Gambar 2.24. G adalah planar dan H adalah graf bidang dari G.

Graf bidang G akan mempartisi bidang ke dalam sejumlah wilayah (*region*) yang saling terhubung. Wilayah-wilayah ini dapat disebut muka/wajah (*face*) dari graf G. Batas (*boundary*) dari suatu muka adalah titik-titik dan sisi-sisi yang membatasi wilayah tersebut.

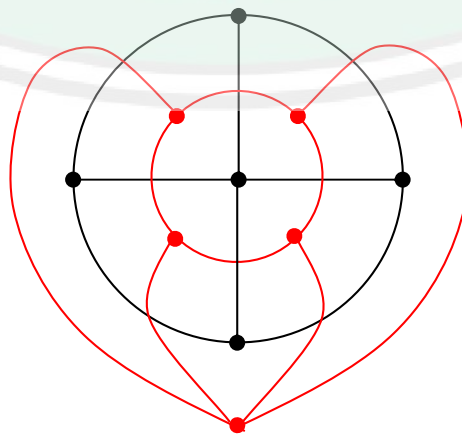
Setiap graf bidang mempunyai satu muka yang tidak terbatas yang disebut muka luar (*exterior face*). Graf bidang G berikut mempunyai lima muka yaitu f_1 ,

f_2 , f_3 , f_4 , dan f_5 . Muka f_1 , f_2 , f_3 , dan f_4 adalah muka dalam (*interior face*) dan f_5 adalah muka luar.



Gambar 2.25. Muka dalam dan luar dari graf G

Misalkan G adalah suatu graf bidang. Didefinisikan graf baru G^* sebagai berikut. Masing-masing muka pada G diwakili oleh titik pada G^* . Dua titik a dan b pada G^* akan saling terhubung langsung jika dan hanya jika muka yang diwakili oleh dua titik itu saling berbatasan langsung di G . dua titik a dan b akan terhubung langsung oleh sebanyak sisi yang terdapat pada perbatasan (*boundary*) dua muka yang diwakilinya pada G . Graf G^* ini kemudian disebut **graf dual** (*Dual Graph*) dari G . Graf dual dari graf bidang selalu berbentuk graf bidang. Berikut ini adalah contoh graf bidang G dan dual grafnya.



Gambar 2.26. Graf Bidang G dan Graf Dualnya

Misalkan G graf bidang dan G^* adalah graf dualnya. Jika G dan G^* mempunyai bentuk yang sama, maka graf G disebut graf *self-dual*. Permasalahan mengenai graf dual masih relatif baru dan belum ada yang membahas. Oleh sebab itu, dalam skripsi ini dibahas mengenai graf dual dari graf roda (W_n) dan graf helm tertutup (cH_n). Pembahasan akan difokuskan pada bentuk graf dualnya dan apakah graf roda (W_n) dan graf helm tertutup (cH_n) merupakan graf *self-dual*.



BAB III

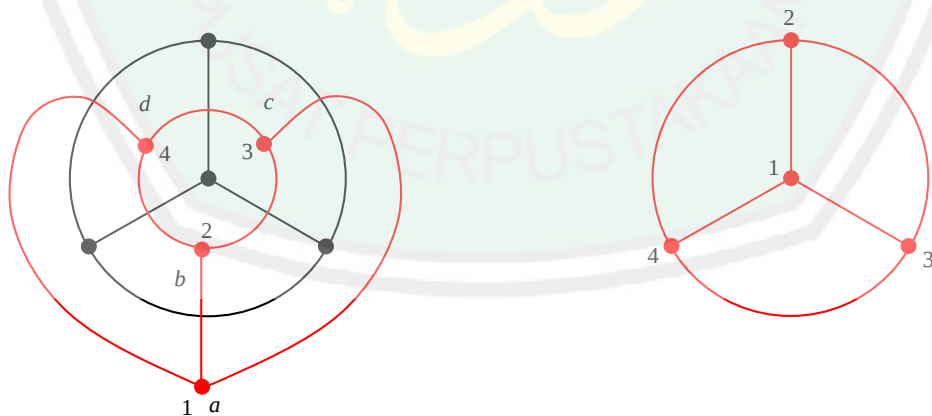
PEMBAHASAN

Pada bagian ini dibahas tentang cara menentukan graf dual dari graf roda dan graf helm tertutup. Untuk menentukan graf dual tersebut, mula-mula dibuat percobaan untuk menentukan graf dual dengan beberapa contoh, kemudian dibuat sebuah teorema. Teorema yang dihasilkan tersebut dibuktikan kebenarannya secara umum. Pada pembahasan ini, jika G adalah graf maka graf dual dari G dilambangkan dengan $D(G)$.

A. Graf Dual dari Graf Roda (W_n)

Untuk menentukan graf dual (*dual graph*) dari graf roda W_n , perhatikan beberapa contoh di bawah ini:

1. Graf Roda dengan $n = 3$



a) W_3 dan $D(W_3)$

b) $D(W_3)$ Digambar Ulang

Gambar 3.1. Graf Roda dengan $n = 3$

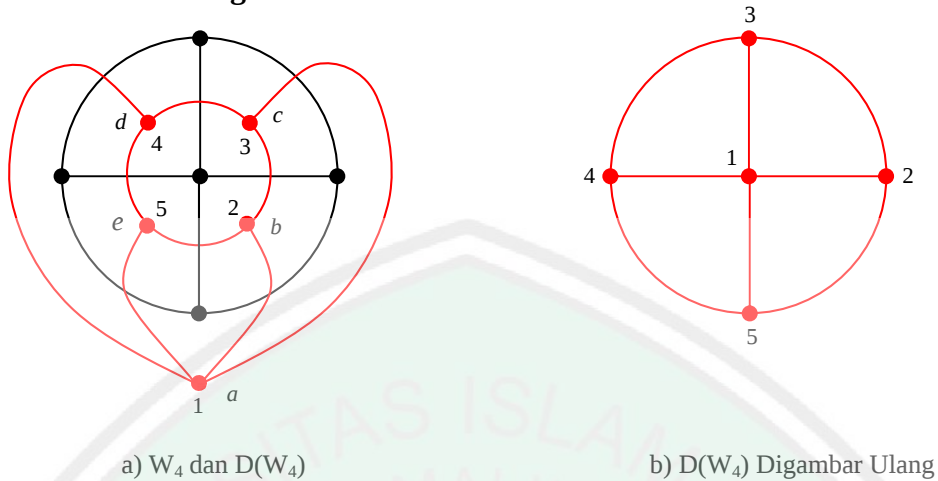
Dari gambar 3.1 di atas, gambar 3.1a menunjukkan gambar graf dual roda 3 dan gambar 3.1b adalah gambar graf roda 3 yang dihasilkan oleh graf dual roda 3 pada gambar 3.1a.

Perhatikan gambar 3.1a yang berwarna hitam di atas, mula-mula sebuah roda mempunyai 3 titik, dalam hal ini disebut graf roda 3. Kemudian jika graf roda 3 tersebut didualkan, maka setiap muka yang ada diwakili dengan sebuah titik, dan muka yang ada di luar gambar diasumsikan 1 titik. Seperti terlihat pada gambar yang berwarna merah, muka *a*, *b*, *c*, *d* berturut-turut diwakili oleh titik 1, 2, 3, 4. Untuk setiap muka yang berbatasan dengan muka yang lain dihubungkan langsung.

Mula-mula titik 1 dihubungkan dengan titik 2, titik 1 dihubungkan dengan 3, titik 1 dihubungkan dengan 4, titik 2 dihubungkan dengan 3, titik 3 dihubungkan dengan 4, dan titik 4 dihubungkan dengan 2.

Kemudian jika gambar 3.1a yang berwarna merah tersebut digambar ulang, yaitu titik 1 yang berada di luar muka kita pindahkan ke dalam, seperti tampak pada gambar 3.1b, titik 1 dipindah dan dihubungkan dengan titik 2, titik 1 dihubungkan dengan 3, titik 1 dihubungkan dengan 4, titik 2 dihubungkan dengan 3, titik 2 dihubungkan dengan 4, dan titik 3 dihubungkan dengan 4, maka akan terbentuk gambar baru yang mirip dengan gambar asalnya, yaitu graf roda 3.

2. Graf Roda dengan $n = 4$



Gambar 3.2. Graf Roda dengan $n = 4$

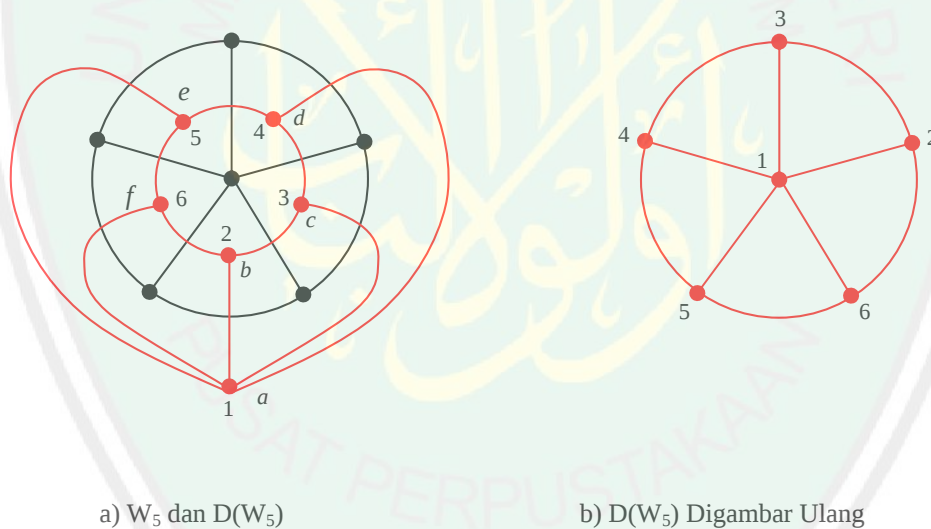
Dari gambar 3.2 di atas, gambar 3.2a menunjukkan gambar graf dual roda 4 dan gambar 3.2b adalah gambar graf roda 4 yang dihasilkan oleh graf dual roda 4 pada gambar 3.2a.

Perhatikan gambar 3.2a yang berwarna hitam di atas, mula-mula sebuah roda mempunyai 4 titik, dalam hal ini disebut graf roda 4. Kemudian jika graf roda 4 tersebut didualkan, maka setiap muka yang ada diwakili dengan sebuah titik, dan muka yang ada di luar gambar diasumsikan 1 titik. Seperti terlihat pada gambar yang berwarna merah, muka $a, b, \dots, e$, berturut-turut diwakili oleh titik 1, 2, ..., 5. Untuk setiap muka yang berbatasan dengan muka yang lain dihubungkan langsung.

Mula-mula titik 1 dihubungkan dengan titik 2, titik 1 dihubungkan dengan 3, titik 1 dihubungkan dengan 4, titik 1 dihubungkan dengan 5, titik 2 dihubungkan dengan 3, titik 3 dihubungkan dengan 4, titik 4 dihubungkan dengan 5, dan titik 5 dihubungkan dengan 2.

Kemudian jika gambar 3.2a yang berwarna merah tersebut digambar ulang, yaitu titik 1 yang berada di luar muka kita pindahkan ke dalam, seperti tampak pada gambar 3.2b, titik 1 dipindah dan dihubungkan dengan titik 2, titik 1 dihubungkan dengan 3, titik 1 dihubungkan dengan 4, titik 1 dihubungkan dengan 5, titik 2 dihubungkan dengan 3, titik 3 dihubungkan dengan 4, titik 4 dihubungkan dengan 5, dan titik 5 dihubungkan dengan 2, maka akan terbentuk gambar baru yang mirip dengan gambar asalnya, yaitu graf roda 4.

3. Graf Roda dengan $n = 5$



Gambar 3.3. Graf Roda dengan $n = 5$

Dari gambar 3.3 di atas, gambar 3.3a menunjukkan gambar graf dual roda 5 dan gambar 3.3b adalah gambar graf roda 5 yang dihasilkan oleh graf dual roda 5 pada gambar 3.3a.

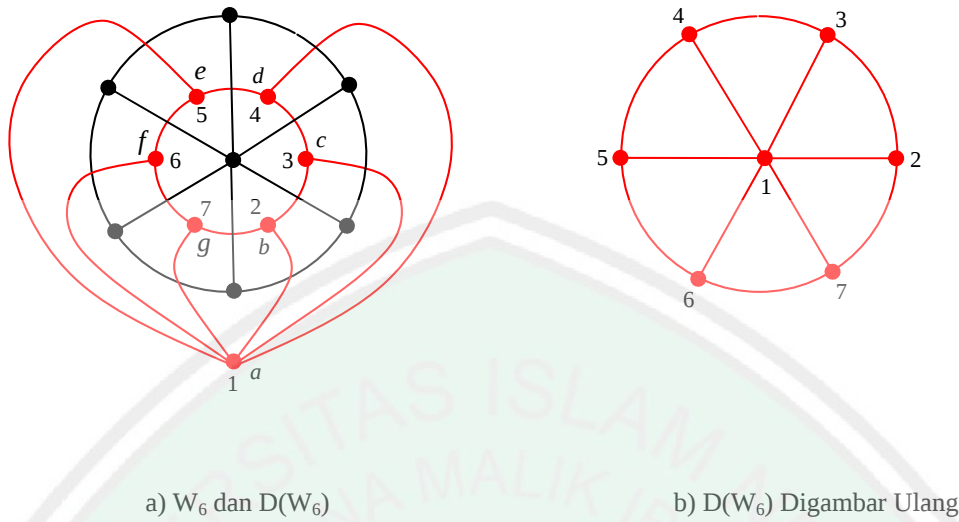
Perhatikan gambar 3.3a yang berwarna hitam di atas, mula-mula sebuah roda mempunyai 5 titik, dalam hal ini disebut graf roda 5. Kemudian jika graf

roda 5 tersebut didualkan, maka setiap muka yang ada diwakili dengan sebuah titik, dan muka yang ada di luar gambar diasumsikan 1 titik. Seperti terlihat pada gambar yang berwarna merah, muka $a, b, \dots, f$, berturut-turut diwakili oleh titik 1, 2, ..., 6. Untuk setiap muka yang berbatasan dengan muka yang lain dihubungkan langsung.

Mula-mula titik 1 dihubungkan dengan titik 2, titik 1 dihubungkan dengan 3, titik 1 dihubungkan dengan 4, titik 1 dihubungkan dengan 5, titik 1 dihubungkan dengan 6, titik 2 dihubungkan dengan 3, titik 3 dihubungkan dengan 4, titik 4 dihubungkan dengan 5, titik 5 dihubungkan dengan 6, dan titik 6 dihubungkan dengan 2.

Kemudian jika gambar 3.3a yang berwarna merah tersebut digambar ulang, yaitu titik 1 yang berada di luar muka kita pindahkan ke dalam, seperti tampak pada gambar 3.3b, titik 1 dipindah dan dihubungkan dengan titik 2, titik 1 dihubungkan dengan 3, titik 1 dihubungkan dengan 4, titik 1 dihubungkan dengan 5, titik 1 dihubungkan dengan 6, titik 2 dihubungkan dengan 3, titik 3 dihubungkan dengan 4, titik 4 dihubungkan dengan 5, titik 5 dihubungkan dengan 6, dan titik 6 dihubungkan dengan 2, maka akan terbentuk gambar baru yang mirip dengan gambar asalnya, yaitu graf roda 5.

4. Graf Roda dengan $n = 6$



Gambar 3.4. Graf Roda dengan $n = 6$

Dari gambar 3.4 di atas, gambar 3.4a menunjukkan gambar graf dual roda 6 dan gambar 3.4b adalah gambar graf roda 6 yang dihasilkan oleh graf dual roda 6 pada gambar 3.4a.

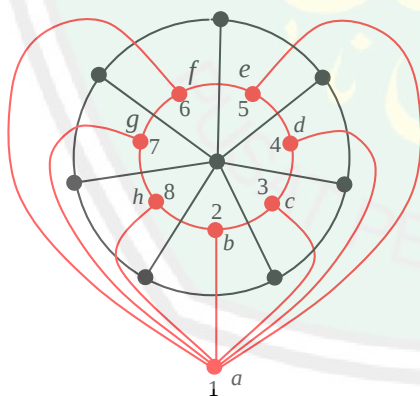
Perhatikan gambar 3.4a yang berwarna hitam di atas, mula-mula sebuah roda mempunyai 6 titik, dalam hal ini disebut graf roda 6. Kemudian jika graf roda 6 tersebut didualkan, maka setiap muka yang ada diwakili dengan sebuah titik, dan muka yang ada di luar gambar diasumsikan 1 titik. Seperti terlihat pada gambar yang berwarna merah, muka $a, b, \dots, g$, berturut-turut diwakili oleh titik 1, 2, ..., 7. Untuk setiap muka yang berbatasan dengan muka yang lain dihubungkan langsung.

Mula-mula titik 1 dihubungkan dengan titik 2, titik 1 dihubungkan dengan 3, titik 1 dihubungkan dengan 4, titik 1 dihubungkan dengan 5, titik 1 dihubungkan dengan 6, titik 1 dihubungkan dengan 7, titik 2 dihubungkan dengan 3, titik 3

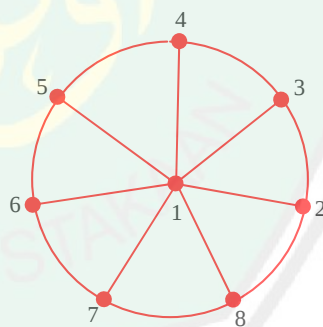
dihubungkan dengan 4, titik 4 dihubungkan dengan 5, titik 5 dihubungkan dengan 6, titik 6 dihubungkan dengan 7, dan titik 7 dihubungkan dengan 2.

Kemudian jika gambar 3.4a yang berwarna merah tersebut digambar ulang, yaitu titik 1 yang berada di luar muka kita pindahkan ke dalam, seperti tampak pada gambar 3.4b, titik 1 dipindah dan dihubungkan dengan titik 2, titik 1 dihubungkan dengan 3, titik 1 dihubungkan dengan 4, titik 1 dihubungkan dengan 5, titik 1 dihubungkan dengan 6, titik 1 dihubungkan dengan 7, titik 2 dihubungkan dengan 3, titik 3 dihubungkan dengan 4, titik 4 dihubungkan dengan 5, titik 5 dihubungkan dengan 6, titik 6 dihubungkan dengan 7, dan titik 7 dihubungkan dengan 2, maka akan terbentuk gambar baru yang mirip dengan gambar asalnya, yaitu graf roda 6.

5. Graf Roda dengan $n = 7$



a) W_7 dan $D(W_7)$



b) $D(W_7)$ Digambar Ulang

Gambar 3.5. Graf Roda dengan $n = 7$

Dari gambar 3.5 di atas, gambar 3.5a menunjukkan gambar graf dual roda 7 dan gambar 3.5b adalah gambar graf roda 7 yang dihasilkan oleh graf dual roda 7 pada gambar 3.5a.

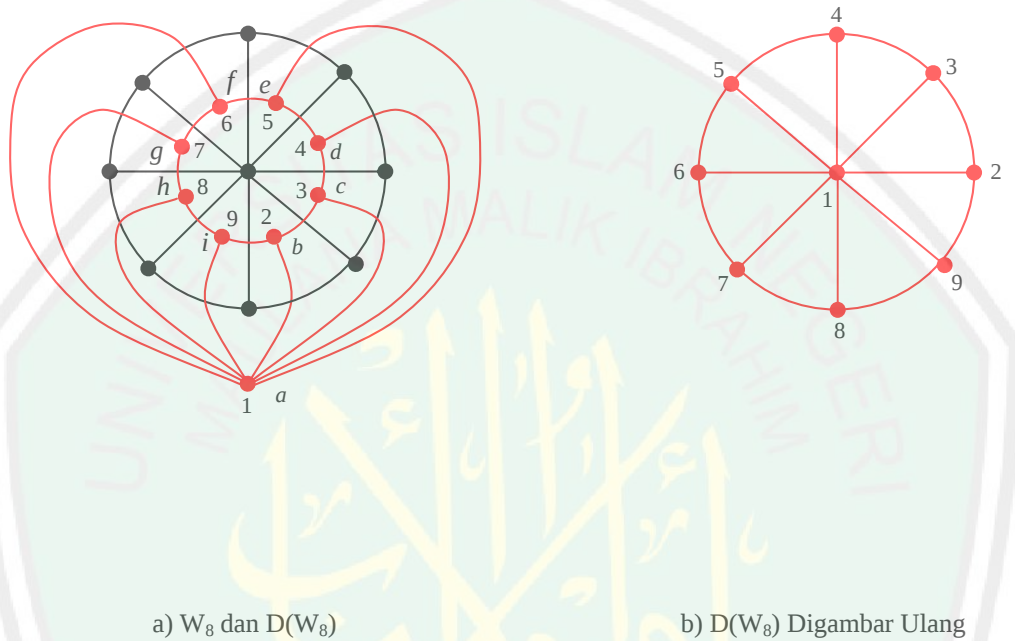
Perhatikan gambar 3.5a yang berwarna hitam di atas, mula-mula sebuah roda mempunyai 7 titik, dalam hal ini disebut graf roda 7. Kemudian jika graf roda 7 tersebut didualkan, maka setiap muka yang ada diwakili dengan sebuah titik, dan muka yang ada di luar gambar diasumsikan 1 titik. Seperti terlihat pada gambar yang berwarna merah, muka $a, b, \dots, h$, berturut-turut diwakili oleh titik 1, 2, ..., 8. Untuk setiap muka yang berbatasan dengan muka yang lain dihubungkan langsung.

Mula-mula titik 1 dihubungkan dengan titik 2, titik 1 dihubungkan dengan 3, titik 1 dihubungkan dengan 4, titik 1 dihubungkan dengan 5, titik 1 dihubungkan dengan 6, titik 1 dihubungkan dengan 7, titik 1 dihubungkan dengan 8, titik 2 dihubungkan dengan 3, titik 3 dihubungkan dengan 4, titik 4 dihubungkan dengan 5, titik 5 dihubungkan dengan 6, titik 6 dihubungkan dengan 7, titik 7 dihubungkan dengan 8, dan titik 8 dihubungkan dengan 2.

Kemudian jika gambar 3.5a yang berwarna merah tersebut digambar ulang, yaitu titik 1 yang berada di luar muka kita pindahkan ke dalam, seperti tampak pada gambar 3.5b, titik 1 dipindah dan dihubungkan dengan titik 2, titik 1 dihubungkan dengan 3, titik 1 dihubungkan dengan 4, titik 1 dihubungkan dengan 5, titik 1 dihubungkan dengan 6, titik 1 dihubungkan dengan 7, titik 1 dihubungkan dengan 8, titik 2 dihubungkan dengan 3, titik 3 dihubungkan dengan 4, titik 4 dihubungkan dengan 5, titik 5 dihubungkan dengan 6, titik 6 dihubungkan dengan

7, titik 7 dihubungkan dengan 8, dan titik 8 dihubungkan dengan 2, maka akan terbentuk gambar baru yang mirip dengan gambar asalnya, yaitu graf roda 7.

6. Graf Roda dengan $n = 8$



Gambar 3.6. Graf Roda dengan $n = 8$

Dari gambar 3.6 di atas, gambar 3.6a menunjukkan gambar graf dual roda 8 dan gambar 3.6b adalah gambar graf roda 8 yang dihasilkan oleh graf dual roda 8 pada gambar 3.6a.

Perhatikan gambar 3.6a yang berwarna hitam di atas, mula-mula sebuah roda mempunyai 8 titik, dalam hal ini disebut graf roda 8. Kemudian jika graf roda 8 tersebut didualkan, maka setiap muka yang ada diwakili dengan sebuah titik, dan muka yang ada di luar gambar diasumsikan 1 titik. Seperti terlihat pada gambar yang berwarna merah, muka $a, b, \dots, i$, berturut-turut diwakili oleh titik 1,

2, ..., 9. Untuk setiap muka yang berbatasan dengan muka yang lain dihubungkan langsung.

Mula-mula titik 1 dihubungkan dengan titik 2, titik 1 dihubungkan dengan 3, titik 1 dihubungkan dengan 4, titik 1 dihubungkan dengan 5, titik 1 dihubungkan dengan 6, titik 1 dihubungkan dengan 7, titik 1 dihubungkan dengan 8, titik 1 dihubungkan dengan 9, titik 2 dihubungkan dengan 3, titik 3 dihubungkan dengan 4, titik 4 dihubungkan dengan 5, titik 5 dihubungkan dengan 6, titik 6 dihubungkan dengan 7, titik 7 dihubungkan dengan 8, titik 8 dihubungkan dengan 9, dan titik 9 dihubungkan dengan 2.

Kemudian jika gambar 3.6a yang berwarna merah tersebut digambar ulang, yaitu titik 1 yang berada di luar muka kita pindahkan ke dalam, seperti tampak pada gambar 3.6b, titik 1 dipindah dan dihubungkan dengan titik 2, titik 1 dihubungkan dengan 3, titik 1 dihubungkan dengan 4, titik 1 dihubungkan dengan 5, titik 1 dihubungkan dengan 6, titik 1 dihubungkan dengan 7, titik 1 dihubungkan dengan 8, titik 1 dihubungkan dengan 9, titik 2 dihubungkan dengan 3, titik 3 dihubungkan dengan 4, titik 4 dihubungkan dengan 5, titik 5 dihubungkan dengan 6, titik 6 dihubungkan dengan 7, titik 7 dihubungkan dengan 8, titik 8 dihubungkan dengan 9, dan titik 9 dihubungkan dengan 2, maka akan terbentuk gambar baru yang mirip dengan gambar asalnya, yaitu graf roda 8.

Dari beberapa contoh graf dual roda di atas, dapat dibuat tabel berikut.

Tabel 3.1 Graf Roda $W_3, W_4, \dots, W_8$ dan Bentuk Graf Dualnya

No.	Graf	Bentuk Graf Dualnya
1	W_3	W_3
2	W_4	W_4
3	W_5	W_5
4	W_6	W_6
5	W_7	W_7
6	W_8	W_8

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa graf dual dari graf roda W_n berbentuk graf roda W_n , yang dinyatakan dalam teorema berikut.

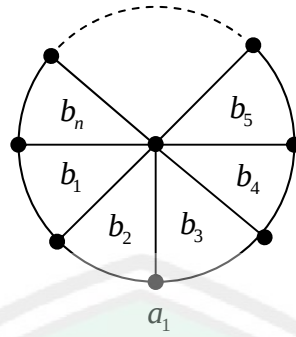
Teorema 3.1

Graf dual (*dual graph*) dari graf roda W_n berbentuk graf roda W_n

Bukti:

Perhatikan gambar graf roda W_n berikut, $n \geq 3$.

Muka luar yang disebut a_1 . Muka dalam pada siklus disebut $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$. Jadi dual graf dari graf W_n mempunyai $n + 1$ titik.



Gambar 3.7. Graf roda W_n , $n \geq 3$

Graf dual dari graf W_n akan mempunyai sisi sebagai berikut

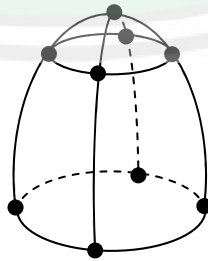
a. $a_1 b_i$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$

b. $b_i b_{i+1} \pmod{n}$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$

Dengan demikian, maka $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, b_1$ akan membentuk siklus dengan n titik. Karena a_1 terhubung langsung pada semua b_i , $i = 1, 2, 3, \dots, n$ maka graf dual ini akan berbentuk graf roda dengan n titik pada siklus luarnya. Jadi, graf dual dari graf roda W_n berbentuk graf roda W_n .

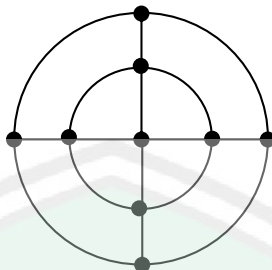
B. Graf Dual dari Graf Helm Tertutup (cH_n)

Untuk menentukan graf dual dari graf helm tertutup cH_n , mula-mula perhatikan gambar graf helm tertutup di bawah ini:



Gambar 3.8. Graf Helm Tertutup

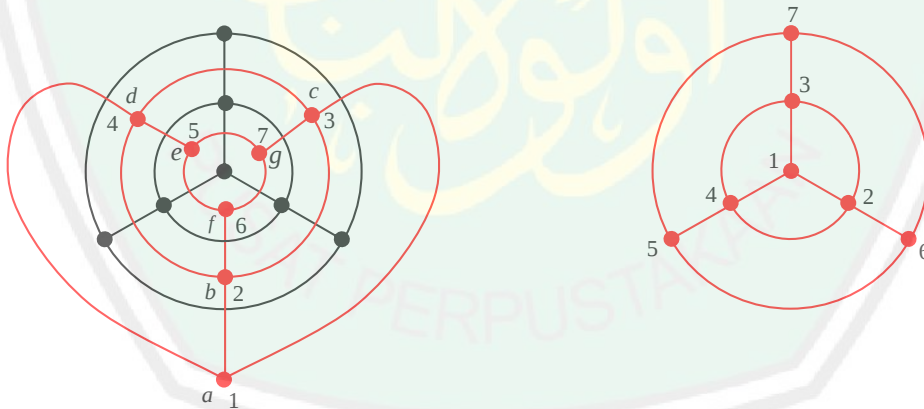
Jika gambar 3.7 di atas digambarkan dalam bentuk bidang datar, maka akan tampak seperti gambar berikut.



Gambar 3.9. Graf Helm Tertutup dalam Bentuk Bidang Datar

Untuk menentukan graf dual (*dual graph*) dari graf roda cH_n , perhatikan beberapa contoh di bawah ini:

1. Graf Helm Tertutup cH_n , $n = 3$



a) cH_3 dan $D(cH_3)$

b) $D(cH_3)$ Digambar Ulang

Gambar 3.10. Graf Helm Tertutup cH_3

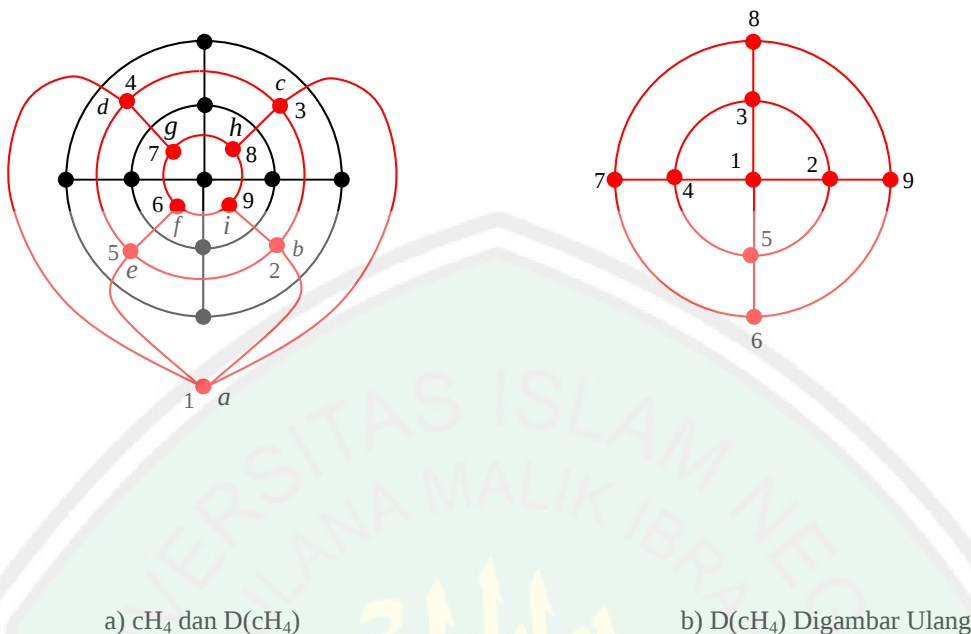
Dari gambar 3.8 di atas, gambar 3.8a menunjukkan gambar graf dual helm tertutup 3 dan gambar 3.8b adalah gambar graf helm tertutup 3 yang dihasilkan oleh graf dual helm tertutup 3 pada gambar 3.8a.

Perhatikan gambar 3.8a yang berwarna hitam di atas, mula-mula sebuah helm tertutup mempunyai 3 titik, dalam hal ini disebut graf helm tertutup 3. Kemudian jika graf helm tertutup 3 tersebut didualkan, maka setiap muka yang ada diwakili dengan sebuah titik, dan muka yang ada di luar gambar diasumsikan 1 titik. Seperti terlihat pada gambar yang berwarna merah, muka $a, b, \dots, f$, berturut-turut diwakili oleh titik 1, 2, ..., 6. Untuk setiap muka yang berbatasan dengan muka yang lain dihubungkan langsung.

Mula-mula titik 1 dihubungkan dengan titik 2, titik 1 dihubungkan dengan 3, titik 1 dihubungkan dengan 4, titik 2 dihubungkan dengan 3, titik 3 dihubungkan dengan 4, titik 4 dihubungkan dengan 2, titik 2 dihubungkan dengan 6, titik 3 dihubungkan dengan 7, titik 4 dihubungkan dengan 5, titik 5 dihubungkan dengan 6, titik 6 dihubungkan dengan 7, dan titik 7 dihubungkan dengan 5.

Kemudian jika gambar 3.8a yang berwarna merah tersebut digambar ulang, yaitu titik 1 yang berada di luar muka kita pindahkan ke dalam, seperti tampak pada gambar 3.8b, titik 1 dipindah dan dihubungkan dengan titik 2, titik 1 dihubungkan dengan 3, titik 1 dihubungkan dengan 4, titik 2 dihubungkan dengan 3, titik 3 dihubungkan dengan 4, titik 4 dihubungkan dengan 2, titik 2 dihubungkan dengan 6, titik 3 dihubungkan dengan 7, titik 4 dihubungkan dengan 5, titik 5 dihubungkan dengan 6, titik 6 dihubungkan dengan 7, dan titik 7 dihubungkan dengan 5, maka akan terbentuk gambar baru yang mirip dengan gambar asalnya, yaitu graf helm tertutup 3.

2. Graf Helm Tertutup cHn , $n = 4$



Gambar 3.11. Graf Helm Tertutup cH_4

Dari gambar 3.9 di atas, gambar 3.9a menunjukkan gambar graf dual helm tertutup 4 dan gambar 3.9b adalah gambar graf helm tertutup 4 yang dihasilkan oleh graf dual helm tertutup 4 pada gambar 3.9a.

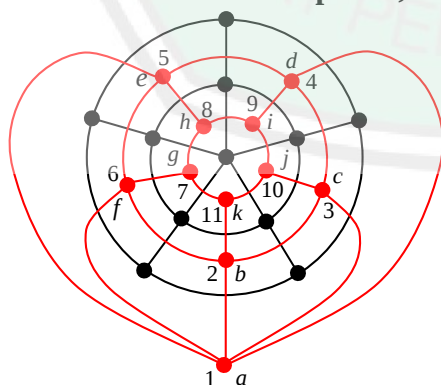
Perhatikan gambar 3.9a yang berwarna hitam di atas, mula-mula sebuah helm tertutup mempunyai 4 titik, dalam hal ini disebut graf helm tertutup 4. Kemudian jika graf helm tertutup 4 tersebut didualkan, maka setiap muka yang ada diwakili dengan sebuah titik, dan muka yang ada di luar gambar diasumsikan 1 titik. Seperti terlihat pada gambar yang berwarna merah, muka $a, b, \dots, i$, berturut-turut diwakili oleh titik 1, 2, ..., 9. Untuk setiap muka yang berbatasan dengan muka yang lain dihubungkan langsung.

Mula-mula titik 1 dihubungkan dengan titik 2, titik 1 dihubungkan dengan 3, titik 1 dihubungkan dengan 4, titik 1 dihubungkan dengan 5, titik 2 dihubungkan

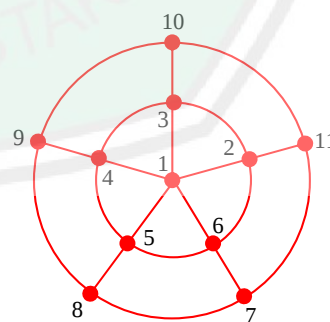
dengan 3, titik 3 dihubungkan dengan 4, titik 4 dihubungkan dengan 5, titik 5 dihubungkan dengan 2, titik 2 dihubungkan dengan 9, titik 3 dihubungkan dengan 8, titik 4 dihubungkan dengan 7, titik 5 dihubungkan dengan 6, titik 6 dihubungkan dengan 7, titik 7 dihubungkan dengan 8, titik 8 dihubungkan dengan 9, dan titik 9 dihubungkan dengan 6.

Kemudian jika gambar 3.9a yang berwarna merah tersebut digambar ulang, yaitu titik 1 yang berada di luar muka kita pindahkan ke dalam, seperti tampak pada gambar 3.9b, titik 1 dipindah dan dihubungkan dengan titik 2, titik 1 dihubungkan dengan 3, titik 1 dihubungkan dengan 4, titik 1 dihubungkan dengan 5, titik 2 dihubungkan dengan 3, titik 3 dihubungkan dengan 4, titik 4 dihubungkan dengan 5, titik 5 dihubungkan dengan 2, titik 2 dihubungkan dengan 9, titik 3 dihubungkan dengan 8, titik 4 dihubungkan dengan 7, titik 5 dihubungkan dengan 6, titik 6 dihubungkan dengan 7, titik 7 dihubungkan dengan 8, titik 8 dihubungkan dengan 9, dan titik 9 dihubungkan dengan 6, maka akan terbentuk gambar baru yang mirip dengan gambar asalnya, yaitu graf helm tertutup 4.

3. Graf Helm Tertutup cHn , $n = 5$



a) cH_5 dan $D(cH_5)$



b) $D(cH_5)$ Digambar Ulang

Gambar 3.12. Graf Helm Tertutup cH_5

Dari gambar 3.10 di atas, gambar 3.10a menunjukkan gambar graf dual helm tertutup 5 dan gambar 3.10b adalah gambar graf helm tertutup 5 yang dihasilkan oleh graf dual helm tertutup 5 pada gambar 3.10a.

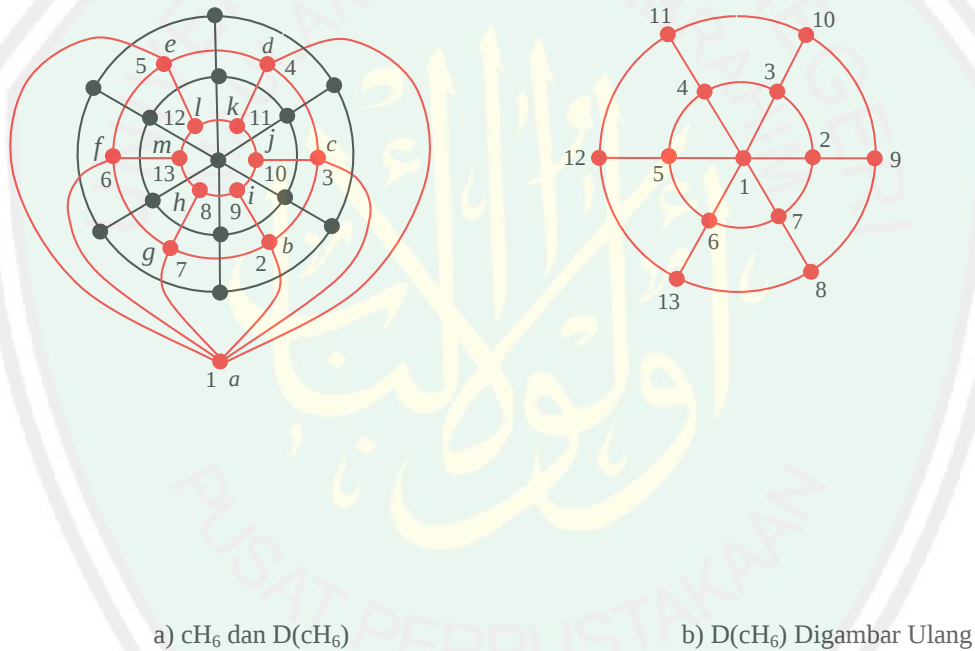
Perhatikan gambar 3.10a yang berwarna hitam di atas, mula-mula sebuah helm tertutup mempunyai 5 titik, dalam hal ini disebut graf helm tertutup 5. Kemudian jika graf helm tertutup 5 tersebut didualkan, maka setiap muka yang ada diwakili dengan sebuah titik, dan muka yang ada di luar gambar diasumsikan 1 titik. Seperti terlihat pada gambar yang berwarna merah, muka $a, b, \dots, k$, berturut-turut diwakili oleh titik 1, 2, ..., 11. Untuk setiap muka yang berbatasan dengan muka yang lain dihubungkan langsung.

Mula-mula titik 1 dihubungkan dengan titik 2, titik 1 dihubungkan dengan 3, titik 1 dihubungkan dengan 4, titik 1 dihubungkan dengan 5, titik 1 dihubungkan dengan 6, titik 2 dihubungkan dengan 3, titik 3 dihubungkan dengan 4, titik 4 dihubungkan dengan 5, titik 5 dihubungkan dengan 6, titik 6 dihubungkan dengan 2, titik 2 dihubungkan dengan 11, titik 3 dihubungkan dengan 10, titik 4 dihubungkan dengan 9, titik 5 dihubungkan dengan 8, titik 6 dihubungkan dengan 7, titik 7 dihubungkan dengan 8, titik 8 dihubungkan dengan 9, titik 9 dihubungkan dengan 10, titik 10 dihubungkan dengan 11, dan titik 11 dihubungkan dengan 7.

Kemudian jika gambar 3.10a yang berwarna merah tersebut digambar ulang, yaitu titik 1 yang berada di luar muka kita pindahkan ke dalam, seperti tampak pada gambar 3.10b, titik 1 dipindah dan dihubungkan dengan titik 2, titik 1 dihubungkan dengan 3, titik 1 dihubungkan dengan 4, titik 1 dihubungkan dengan 5, titik 1 dihubungkan dengan 6, titik 2 dihubungkan dengan 3, titik 3 dihubungkan dengan 4, titik 4 dihubungkan dengan 5, titik 5 dihubungkan dengan 6, titik 6

dihubungkan dengan 2, titik 2 dihubungkan dengan 11, titik 3 dihubungkan dengan 10, titik 4 dihubungkan dengan 9, titik 5 dihubungkan dengan 8, titik 6 dihubungkan dengan 7, titik 7 dihubungkan dengan 8, titik 8 dihubungkan dengan 9, titik 9 dihubungkan dengan 10, titik 10 dihubungkan dengan 11, dan titik 11 dihubungkan dengan 7, maka akan terbentuk gambar baru yang mirip dengan gambar asalnya, yaitu graf helm tertutup 5.

4. Graf Helm Tertutup cHn , $n = 6$



Gambar 3.13. Graf Helm Tertutup cH_6

Dari gambar 3.11 di atas, gambar 3.11a menunjukkan gambar graf dual helm tertutup 6 dan gambar 3.11b adalah gambar graf helm tertutup 6 yang dihasilkan oleh graf dual helm tertutup 6 pada gambar 3.11a.

Perhatikan gambar 3.11a yang berwarna hitam di atas, mula-mula sebuah helm tertutup mempunyai 6 titik, dalam hal ini disebut graf helm tertutup 6. Kemudian jika graf helm tertutup 6 tersebut didualkan, maka setiap muka yang

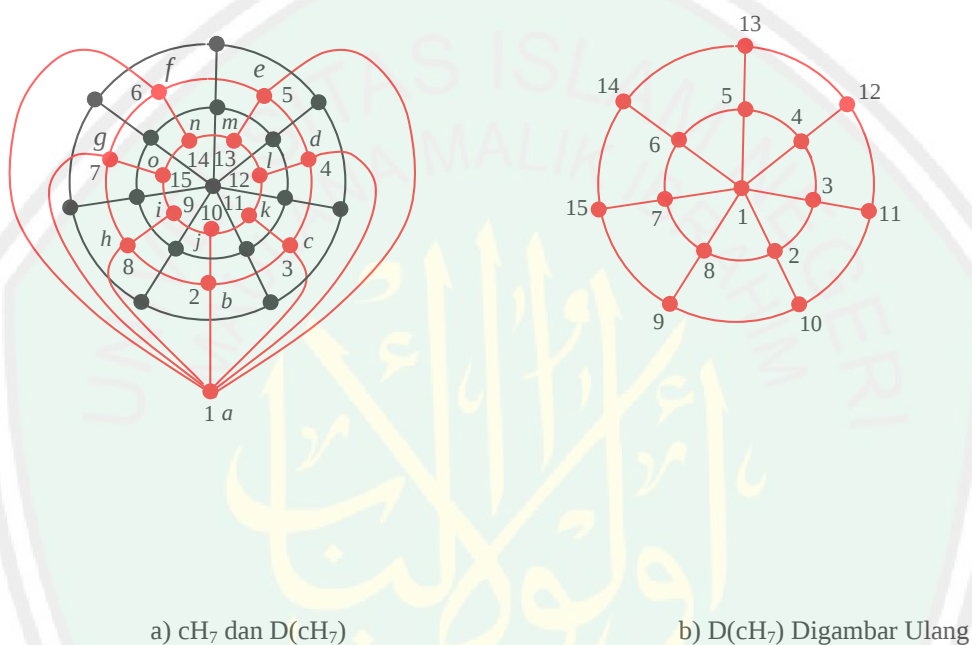
ada diwakili dengan sebuah titik, dan muka yang ada di luar gambar diasumsikan 1 titik. Seperti terlihat pada gambar yang berwarna merah, muka $a, b, \dots, m$, berturut-turut diwakili oleh titik 1, 2, ..., 13. Untuk setiap muka yang berbatasan dengan muka yang lain dihubungkan langsung.

Mula-mula titik 1 dihubungkan dengan titik 2, titik 1 dihubungkan dengan 3, titik 1 dihubungkan dengan 4, titik 1 dihubungkan dengan 5, titik 1 dihubungkan dengan 6, titik 1 dihubungkan dengan 7, titik 2 dihubungkan dengan 3, titik 3 dihubungkan dengan 4, titik 4 dihubungkan dengan 5, titik 5 dihubungkan dengan 6, titik 6 dihubungkan dengan 7, titik 7 dihubungkan dengan 2, titik 2 dihubungkan dengan 9, titik 3 dihubungkan dengan 10, titik 4 dihubungkan dengan 11, titik 5 dihubungkan dengan 12, titik 6 dihubungkan dengan 13, titik 7 dihubungkan dengan 8, titik 8 dihubungkan dengan 9, titik 9 dihubungkan dengan 10, titik 10 dihubungkan dengan 11, titik 11 dihubungkan dengan 12, titik 12 dihubungkan dengan 13, dan titik 13 dihubungkan dengan 8.

Kemudian jika gambar 3.11a yang berwarna merah tersebut digambar ulang, yaitu titik 1 yang berada di luar muka kita pindahkan ke dalam, seperti tampak pada gambar 3.11b, titik 1 dipindah dan dihubungkan dengan titik 2, titik 1 dihubungkan dengan 3, titik 1 dihubungkan dengan 4, titik 1 dihubungkan dengan 5, titik 1 dihubungkan dengan 6, titik 1 dihubungkan dengan 7, titik 2 dihubungkan dengan 3, titik 3 dihubungkan dengan 4, titik 4 dihubungkan dengan 5, titik 5 dihubungkan dengan 6, titik 6 dihubungkan dengan 7, titik 7 dihubungkan dengan 2, titik 2 dihubungkan dengan 9, titik 3 dihubungkan dengan 10, titik 4 dihubungkan dengan 11, titik 5 dihubungkan dengan 12, titik 6 dihubungkan dengan 13, titik 7 dihubungkan dengan 8, titik 8 dihubungkan dengan 9, titik 9 dihubungkan dengan 10,

titik 10 dihubungkan dengan 11, titik 11 dihubungkan dengan 12, titik 12 dihubungkan dengan 13, dan titik 13 dihubungkan dengan 8, maka akan terbentuk gambar baru yang mirip dengan gambar asalnya, yaitu graf helm tertutup 6.

5. Graf Helm Tertutup cHn , $n = 7$



Gambar 3.14. Graf Helm Tertutup cH_7

Dari gambar 3.12 di atas, gambar 3.12a menunjukkan gambar graf dual helm tertutup 7 dan gambar 3.12b adalah gambar graf helm tertutup 7 yang dihasilkan oleh graf dual helm tertutup 7 pada gambar 3.12a.

Perhatikan gambar 3.12a yang berwarna hitam di atas, mula-mula sebuah helm tertutup mempunyai 7 titik, dalam hal ini disebut graf helm tertutup 7. Kemudian jika graf helm tertutup 7 tersebut didualkan, maka setiap muka yang ada diwakili dengan sebuah titik, dan muka yang ada di luar gambar diasumsikan 1 titik. Seperti terlihat pada gambar yang berwarna merah, muka a , b , ..., o ,

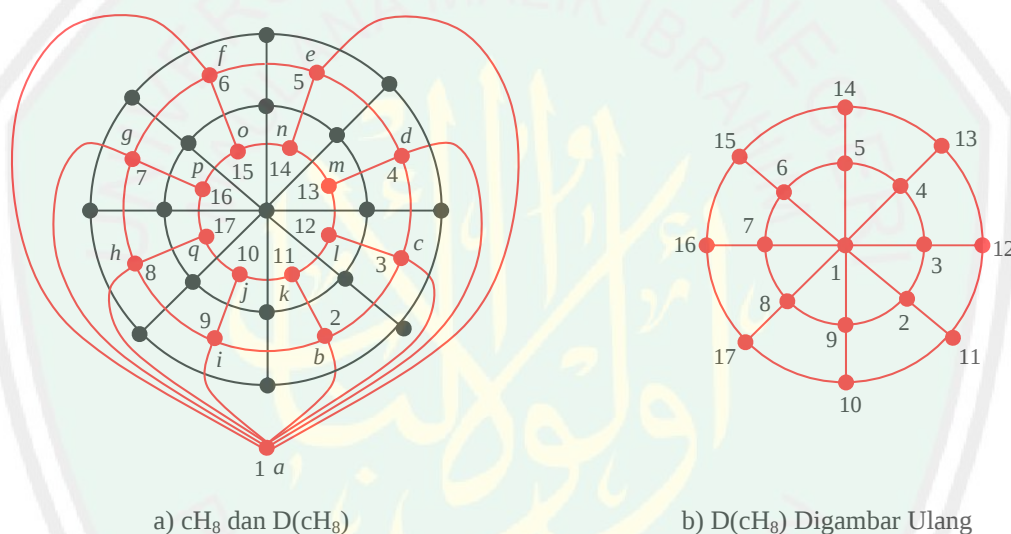
berturut-turut diwakili oleh titik 1, 2, ..., 15. Untuk setiap muka yang berbatasan dengan muka yang lain dihubungkan langsung.

Mula-mula titik 1 dihubungkan dengan titik 2, titik 1 dihubungkan dengan 3, titik 1 dihubungkan dengan 4, titik 1 dihubungkan dengan 5, titik 1 dihubungkan dengan 6, titik 1 dihubungkan dengan 7, titik 1 dihubungkan dengan 8, titik 2 dihubungkan dengan 3, titik 3 dihubungkan dengan 4, titik 4 dihubungkan dengan 5, titik 5 dihubungkan dengan 6, titik 6 dihubungkan dengan 7, titik 7 dihubungkan dengan 8, titik 8 dihubungkan dengan 2, titik 2 dihubungkan dengan 10, titik 3 dihubungkan dengan 11, titik 4 dihubungkan dengan 12, titik 5 dihubungkan dengan 13, titik 6 dihubungkan dengan 14, titik 7 dihubungkan dengan 15, titik 8 dihubungkan dengan 9, titik 9 dihubungkan dengan 10, titik 10 dihubungkan dengan 11, titik 11 dihubungkan dengan 12, titik 12 dihubungkan dengan 13, titik 13 dihubungkan dengan 14, titik 14 dihubungkan dengan 15, dan titik 15 dihubungkan dengan 9.

Kemudian jika gambar 3.12a yang berwarna merah tersebut digambar ulang, yaitu titik 1 yang berada di luar muka kita pindahkan ke dalam, seperti tampak pada gambar 3.12b, titik 1 dipindah dan dihubungkan dengan titik 2, titik 1 dihubungkan dengan 3, titik 1 dihubungkan dengan 4, titik 1 dihubungkan dengan 5, titik 1 dihubungkan dengan 6, titik 1 dihubungkan dengan 7, titik 1 dihubungkan dengan 8, titik 2 dihubungkan dengan 3, titik 3 dihubungkan dengan 4, titik 4 dihubungkan dengan 5, titik 5 dihubungkan dengan 6, titik 6 dihubungkan dengan 7, titik 7 dihubungkan dengan 8, titik 8 dihubungkan dengan 2, titik 2 dihubungkan dengan 10, titik 3 dihubungkan dengan 11, titik 4 dihubungkan dengan 12, titik 5 dihubungkan dengan 13, titik 6 dihubungkan dengan 14, titik 7 dihubungkan dengan

15, titik 8 dihubungkan dengan 9, titik 9 dihubungkan dengan 10, titik 10 dihubungkan dengan 11, titik 11 dihubungkan dengan 12, titik 12 dihubungkan dengan 13, titik 13 dihubungkan dengan 14, titik 14 dihubungkan dengan 15, dan titik 15 dihubungkan dengan 9, maka akan terbentuk gambar baru yang mirip dengan gambar asalnya, yaitu graf helm tertutup 7.

6. Graf Helm Tertutup cHn , $n = 8$



Gambar 3.15. Graf Helm Tertutup cH_8

Dari gambar 3.13 di atas, gambar 3.13a menunjukkan gambar graf dual helm tertutup 8 dan gambar 3.13b adalah gambar graf helm tertutup 8 yang dihasilkan oleh graf dual helm tertutup 8 pada gambar 3.13a.

Perhatikan gambar 3.13a yang berwarna hitam di atas, mula-mula sebuah helm tertutup mempunyai 8 titik, dalam hal ini disebut graf helm tertutup 8. Kemudian jika graf helm tertutup 8 tersebut didualkan, maka setiap muka yang ada diwakili dengan sebuah titik, dan muka yang ada di luar gambar diasumsikan

1 titik. Seperti terlihat pada gambar yang berwarna merah, muka $a, b, \dots, q$, berturut-turut diwakili oleh titik 1, 2, ..., 17. Untuk setiap muka yang berbatasan dengan muka yang lain dihubungkan langsung.

Mula-mula titik 1 dihubungkan dengan titik 2, titik 1 dihubungkan dengan 3, titik 1 dihubungkan dengan 4, titik 1 dihubungkan dengan 5, titik 1 dihubungkan dengan 6, titik 1 dihubungkan dengan 7, titik 1 dihubungkan dengan 8, titik 1 dihubungkan dengan 9, titik 2 dihubungkan dengan 3, titik 3 dihubungkan dengan 4, titik 4 dihubungkan dengan 5, titik 5 dihubungkan dengan 6, titik 6 dihubungkan dengan 7, titik 7 dihubungkan dengan 8, titik 8 dihubungkan dengan 9, titik 9 dihubungkan dengan 2, titik 2 dihubungkan dengan 11, titik 3 dihubungkan dengan 12, titik 4 dihubungkan dengan 13, titik 5 dihubungkan dengan 14, titik 6 dihubungkan dengan 15, titik 7 dihubungkan dengan 16, titik 8 dihubungkan dengan 17, titik 9 dihubungkan dengan 10, titik 10 dihubungkan dengan 11, titik 11 dihubungkan dengan 12, titik 12 dihubungkan dengan 13, titik 13 dihubungkan dengan 14, titik 14 dihubungkan dengan 15, titik 15 dihubungkan dengan 16, titik 16 dihubungkan dengan 17, dan titik 17 dihubungkan dengan 10.

Kemudian jika gambar 3.13a yang berwarna merah tersebut digambar ulang, yaitu titik 1 yang berada di luar muka kita pindahkan ke dalam, seperti tampak pada gambar 3.13b, titik 1 dipindah dan dihubungkan dengan titik 2, titik 1 dihubungkan dengan 3, titik 1 dihubungkan dengan 4, titik 1 dihubungkan dengan 5, titik 1 dihubungkan dengan 6, titik 1 dihubungkan dengan 7, titik 1 dihubungkan dengan 8, titik 1 dihubungkan dengan 9, titik 2 dihubungkan dengan 3, titik 3 dihubungkan dengan 4, titik 4 dihubungkan dengan 5, titik 5 dihubungkan dengan 6, titik 6 dihubungkan dengan 7, titik 7 dihubungkan dengan 8, titik 8 dihubungkan

dengan 9, titik 9 dihubungkan dengan 2, titik 2 dihubungkan dengan 11, titik 3 dihubungkan dengan 12, titik 4 dihubungkan dengan 13, titik 5 dihubungkan dengan 14, titik 6 dihubungkan dengan 15, titik 7 dihubungkan dengan 16, titik 8 dihubungkan dengan 17, titik 9 dihubungkan dengan 10, titik 10 dihubungkan dengan 11, titik 11 dihubungkan dengan 12, titik 12 dihubungkan dengan 13, titik 13 dihubungkan dengan 14, titik 14 dihubungkan dengan 15, titik 15 dihubungkan dengan 16, titik 16 dihubungkan dengan 17, dan titik 17 dihubungkan dengan 10, maka akan terbentuk gambar baru yang mirip dengan gambar asalnya, yaitu graf helm tertutup 8.

Dari beberapa contoh graf dual roda di atas, dapat dibuat tabel berikut.

Tabel 3.2 Graf Helm Tertutup cH_3 , cH_4 , ... cH_8 dan Bentuk Graf Dualnya

No	Graf	Bentuk Graf Dualnya
1	cH_3	cH_3
2	cH_4	cH_4
3	cH_5	cH_5
4	cH_6	cH_6
5	cH_7	cH_7
6	cH_8	cH_8

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa graf dual dari graf helm tertutup cH_n berbentuk graf helm tertutup cH_n , yang dinyatakan dalam teorema berikut.

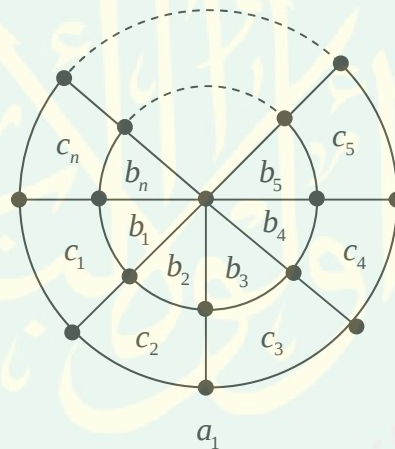
Teorema 3.2

Graf dual (*dual graph*) dari graf helm tertutup cH_n berbentuk graf helm tertutup cH_n

Bukti:

Perhatikan gambar graf helm tertutup cH_n berikut, $n \geq 3$.

Muka luar yang disebut a_1 . Muka dalam pada siklus luar disebut $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$. Muka dalam pada siklus dalam disebut $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$. Jadi dual graf dari graf cH_n mempunyai $2n + 1$ titik.



Gambar 3.16. Graf graf helm tertutup cH_n , $n \geq 3$

Graf dual dari graf cH_n akan mempunyai sisi sebagai berikut

- c. a_1b_i , $i = 1, 2, 3, \dots, n$
- d. $b_ib_{i+1} \pmod n$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$
- e. $c_ic_{i+1} \pmod n$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$
- f. b_ic_i , $i = 1, 2, 3, \dots, n$

Titik a_1 serta $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ serta sisi a_1b_i dan $b_ib_{i+1} \pmod n$, untuk $i = 1, 2, 3, \dots, n$ akan menghasilkan graf roda dengan n titik pada sikel luarnya. Dengan menambahkan titik $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ serta sisi b_ic_i , untuk $i = 1, 2, 3, \dots, n$ akan menghasilkan graf helm. Kemudian dengan menambahkan sisi $c_ic_{i+1} \pmod n$, untuk $i = 1, 2, 3, \dots, n$ akan menghasilkan graf helm tertutup. Jadi, graf dual dari graf helm tertutup CH_n berbentuk graf helm tertutup CH_n .



BAB IV

P E N U T U P

A. Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan pada bab sebelumnya, maka dapat disimpulkan bahwa:

3. Graf dual (*dual graph*) dari graf roda W_n berbentuk graf roda W_n .
4. Graf dual (*dual graph*) dari graf helm tertutup CH_n berbentuk graf helm tertutup CH_n .

Karena dual graf dari graf roda W_n dan graf helm tertutup CH_n masing-masing berbentuk graf roda W_n dan graf helm tertutup CH_n , maka graf roda W_n dan graf helm tertutup CH_n adalah graf *self-dual*.

B. Saran-saran

Berdasarkan hasil pembahasan skripsi ini maka disarankan kepada pembaca yang tertarik untuk membahas graf dual untuk menentukan bentuk umum graf dual dari jenis graf planar lainnya. Selain itu juga disarankan untuk membahas graf dual dikaitkan dengan topik pewarnaan dan pelabelan.

DAFTAR PUSTAKA

- Abdusysyahir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press.
- Badan Penelitian dan Pengembangan Kurikulum. 2001. *Kurikulum Berbasis Kompetensi: Mata Pelajaran Matematika*. Jakarta: Departemen Pendidikan Nasional.
- Bondy, J. A. & Murty, U. S. R. 1976. *Graf Theory with Applications*. London: The Macmillan, Inc.
- Chartrand, Gery and Linda Lesniak. 1986. *Graphs and Digraphs Second Edition*. California: a Division of Wadsworth, Inc.
- Departemen Agama RI. 1995. *Al-Qur'an dan Terjemahnya*. Semarang: PT. Karya Toha Putra.
- Gafur, Abdul. 2008. *Eksentrik Digraf dari Graf Star, Graf Double Star, Graf Komplit Bipartit dan Pelabelan Konsektif pada Graf Sikel dan Graf Bipartit Komplit*. (Online): (<http://www.combinatoric.com>. Diakses tanggal 15 Juli 2008).
- Gallian, J. A. 2007. "Dynamic Survey DS6: Graph Labeling" *Electronic J. Combinatorics*, DS6. (Online): (<http://mathworld.wolfram.com/www.combinatorics.org/Surveys/ds6.pdf>. Diakses tanggal 8 Maret pukul 10.00 WIB).
- http://www.dzikir.org/index.php?option=com_content&view=category&layout=blog&id=36&Itemid=71. (Online: diakses tanggal 06 April 2009, Pukul 09.45 AM)
- Purwanto, 1998. *Matematika Diskrit*. Malang: IKIP Malang.



This document was created with Win2PDF available at <http://www.daneprairie.com>.
The unregistered version of Win2PDF is for evaluation or non-commercial use only.