

**PELABELAN SUPER SISI AJAIB PADA GRAPH
CATERPILLAR**

SKRIPSI

Oleh:
AKHMAD FATHONI
NIM. 03510032



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
MALANG
2009**

**PELABELAN SUPER SISI AJAIB PADA GRAPH
CATERPILLAR**

SKRIPSI

Diajukan Kepada :
Universitas Islam Negeri Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh :
AKHMAD FATHONI
NIM. 03510032



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
MALANG
2009**

**PELABELAN SUPER SISI AJAIB PADA GRAPH
CATERPILLAR**

SKRIPSI

Oleh:
AKHMAD FATHONI
NIM. 03510032

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal: 16 Januari 2009

Pembimbing I

Abdussakir, M.Pd
NIP. 150 327 247

Pembimbing II

Achmad Nashichuddin, MA
NIP. 150 302 531

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M. Si
NIP. 150 318 321

PELABELAN SUPER SISI AJAIB PADA GRAPH CATERPILLAR

SKRIPSI

Oleh:
AKHMAD FATHONI
NIM. 03510032

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal: 20 Januari 2009

Susunan Dewan Penguji		Tanda Tangan	
1. Penguji Utama	: <u>Wahyu H. Irawan, M.Pd</u> NIP. 150 300 415	(	)
2. Ketua	: <u>Drs. H. Turmudi, M.Si</u> NIP. 150 209 630	(	)
3. Sekretaris	: <u>Abdussakir, M.Pd</u> NIP. 150 327 247	(	)
4. Anggota	: <u>Achmad Nashichuddin, MA</u> NIP. 150 302 531	(	)

Mengetahui dan Mengesahkan
Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M.Si
NIP. 150 318 321

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : AKHMAD FATHONI

NIM : 03510032

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambil alihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri.

Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 16 Januari 2009

AKHMAD FATHONI
NIM. 03510032

MOTTO

Ilmu itu ibarat taman, kuncinya adalah bertanya

(Imam Syafi'i)



PERSEMBAHAN



ALHAMDULILLAH ROBBIL 'A LAMIN SEGALA PUJA DAN PUJI
SYUKUR

DI PANJATKAN BAGI ALLAH SWT SERU SEKALIAN ALAM
YANG TELAH MEMBERIKAN ATAS RAHMAT, TAUFIK SERTA
HIDAYAH-NYA KEPADA KITA SEMUA

PENULIS PERSEMBAHKAN
KEPADA KEDUA ORANG TERBAIK & TERHEBAT
AYAH A. AFANDI DAN IBU NIDA'AH
SEBAGAI CINTA KASIH PENULIS

ADIKKU TERCINTA YANG SELALU MENDUKUNG
ISMAWATI DAN ULUL AZMI

KATA PENGANTAR



Alhamdulillahirrobbil 'alamin, segala puji syukur ke hadirat Allah SWT atas limpahan rahmat, taufiq dan hidayah-Nya, hingga penulis mampu menyelesaikan penulisan skripsi yang berjudul “PELABELAN SUPER SISI AJAIB PADA *GRAPH CATERPILLAR*” ini dengan baik. Sholawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada junjungan Nabi besar Muhammad SAW sebagai *uswatun hasanah* dalam meraih kesuksesan di dunia dan akhirat.

Penulis menyadari bahwa banyak pihak yang telah berpartisipasi dan membantu dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Oleh karena itu, iringan doa dan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya penulis sampaikan, terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo selaku Rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Malang.
2. Prof. Dr. Sutiman Bambang Sumitro, SU., D.Sc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Malang.
3. Sri Harini. M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Malang.
4. Abdussakir, M.Pd. selaku dosen pembimbing, yang telah meluangkan waktunya untuk memberikan pengarahan selama penulisan skripsi ini.
5. Achmad Nashichuddin, MA selaku dosen pembimbing keagamaan, yang telah memberikan saran dan bantuan selama penulisan skripsi ini.

6. Seluruh Dosen Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Malang yang telah memberikan ilmu pengetahuan kepada penulis selama di bangku kuliah, serta seluruh karyawan dan staf UIN Malang.
7. Bapak dan Ibu tercinta, yang telah memberikan bantuan dan dukungan baik moril maupun spirituil serta ketulusan do'anya kepada penulis sampai dapat menyelesaikan skripsi ini.
8. Adik-adik tersayang, Iamawati dan Ulul Azmi, yang selalu memberikan bantuan, semangat, dan do'a selama kuliah.
9. Dian Febriyanti, terima kasih atas semua saran dan bantuannya.
10. Selamed beserta istri dan anak, Taufiq, Ipung, kokok, Yusuf, Bunda serta teman-teman matematika angkatan 2003 dan semua pihak yang telah banyak membantu dalam penyelesaian skripsi ini.

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua dan menambah wawasan keilmuan khususnya Matematika. Amien.

Wassalamu'alaikum Wr.Wb

Malang, 16 Januari 2009

Penulis

DAFTAR ISI

Kata Pengantar	i
Daftar Isi	iii
Daftar Gambar	v
Abstrak.....	viii
 BAB I. PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang Masalah.....	1
1.2 Rumusan Masalah	6
1.3 Tujuan Penelitian	6
1.4 Batasan Masalah	6
1.5 Manfaat Penelitian	6
1.6 Metode Penelitian	7
1.7 Sistematika Penulisan	8
 BAB II. KAJIAN PUSTAKA	
2.1 Graf	
2.1.1 Definisi Graph.....	9
2.1.2 Adjacent dan Incident	13
2.2 Derajat Suatu Titik.....	15
2.3 Graph Terhubung.....	18
2.4 Graph <i>Caterpillar</i>	20
2.5 Fungsi	21
2.6 Pelabelan.....	23

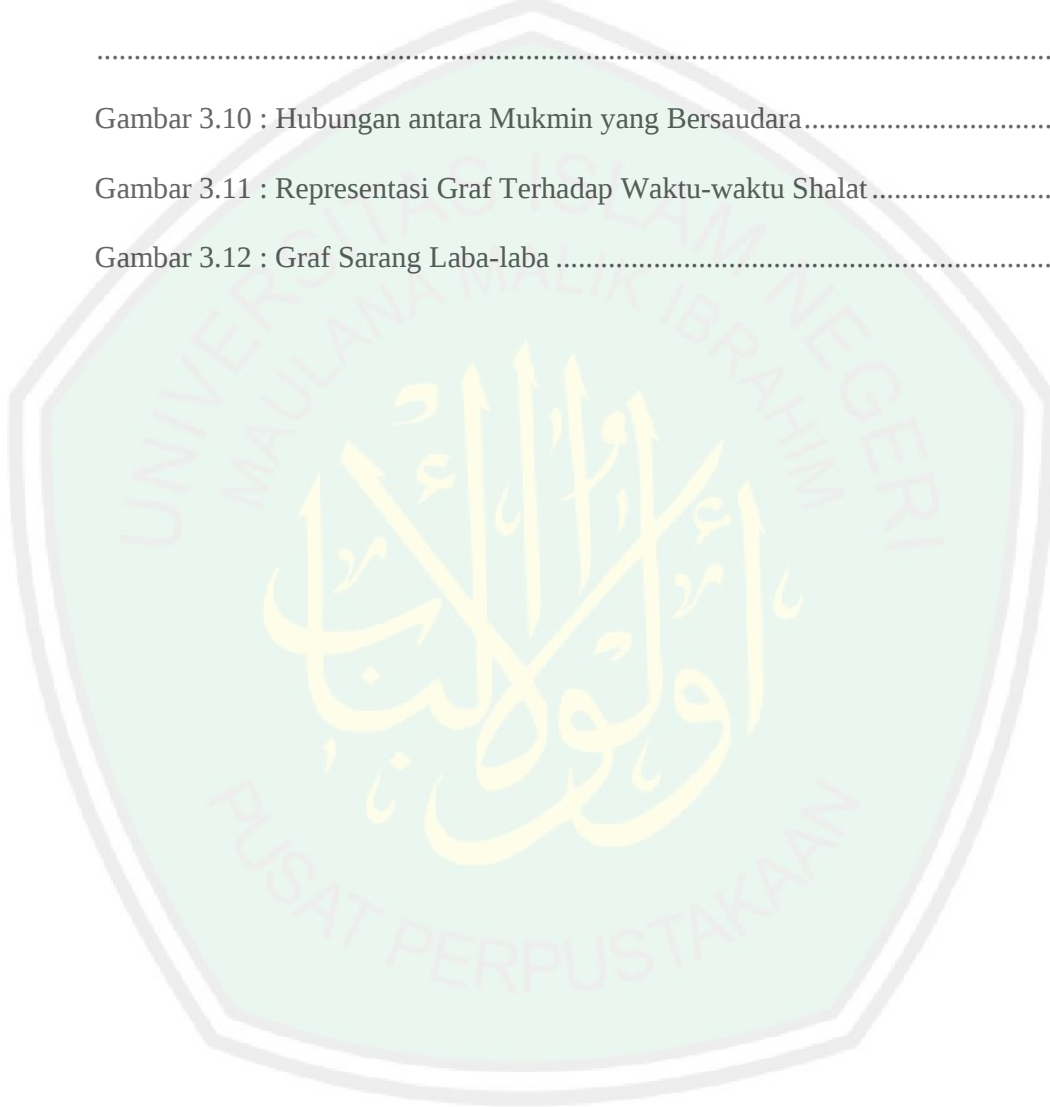
2.7 Pelabelan Konsektif.....	26
2.8 Pelabelan Total Sisi Ajaib (<i>Edge Magic Total Labeling</i>).....	28
2.9 Pelabelan Super Sisi Ajaib (<i>Super Edge Magic Labeling</i>).....	31
2.10 Hubungan Manusia dengan Tuhan.....	32
BAB III. PEMBAHASAN	
3.1 Pelabelan Total Super Sisi Ajaib <i>Pada Graf Caterpillar $Cp_{n,s}$ (n</i>	
bilangan asli ganjil)	37
3.1.1 Graf <i>Caterpillar Cp_n</i> , dimana $n = 1$	37
3.1.2 Graf <i>Caterpillar Cp_n</i> , dimana $n = 3$	42
3.1.2 Graf <i>Caterpillar Cp_n</i> , dimana $n = 5$	51
3.2 Kajian Hubungan Manusia dengan Tuhan dalam Teori Graf.....	66
BAB V. PENUTUP	
A. Kesimpulan.....	74
B. Saran.....	75
DAFTAR PUSTAKA	

DAFTAR GAMBAR

Gambar 1.1: Graf Caterpillar dengan kepala dan ekor	5
Gambar 2.1: Graph G.....	9
Gambar 2.2 : Graph G.....	11
Gambar 2.3 : Graf Trivial dan Null	12
Gambar 2.4 : Graf	13
Gambar 2.5 : Subgraf	13
Gambar 2.6 : Graf Adjacent dan Incident	14
Gambar 2.7 : Graf G.....	14
Gambar 2.8 : Graf dengan Derajat Titik	15
Gambar 2.9 : Graf Derajat Titik.....	17
Gambar 2.10 : Graf Derajat- r	17
Gambar 2.11 : Jalan pada Graph.....	18
Gambar 2.12 : Jalan, Lintasan, Trail, dan Sikel.....	19
Gambar 2.13 : Graf Terhubung (<i>connected</i>)	20
Gambar 2.14 : Graph Caterpillar dengan kepala dan ekor.....	21
Gambar 2.15 : Graph Caterpillar tanpa kepala dan ekor.....	21
Gambar 2.16: Fungsi	21
Gambar 2.17 : Fungsi Satu-satu.....	22
Gambar 2.18 : Fungsi Surjektif.....	22
Gambar 2.19 : Fungsi Bijektif.....	23
Gambar 2.20 : Penotasian Titik.....	23

Gambar 2.21 : Pelabelan Titik	24
Gambar 2.22 : Penotasian Sisi	24
Gambar 2.23 : Pelabelan Sisi	25
Gambar 2.24 : Penotasian Total	25
Gambar 2.25 : Pelabelan Total.....	26
Gambar 2.26 : Pelabelan Titik dan Sisi pada graf G	26
Gambar 2.27 : Pelabelan Konsektif pada Graf G	27
Gambar 2.28 : Graph Lingkaran dengan 3 titik	29
Gambar 2.29 : Diagram Fungsi dari himpunan titik dan sisi ke himpunan banyak titik ditambah banyak sisi.	30
Gambar 2.30 : Pelabelan Total Sisi Ajaib.....	30
Gambar 2.31 : Diagram Fungsi dari himpunan titik dan sisi ke himpunan banyak titik ditambah banyak sisi	31
Gambar 2.32 : Pelabelan Super Sisi Ajaib.....	32
Gambar 2.33 : Hubungan antara Allah dengan Hamba-Nya serta Sesama Hamba	34
Gambar 2.32 : Pelabelan Super Sisi Ajaib.....	32
Gambar 3.1 : Penotasian Titik dan Sisi Graf <i>Caterpillar</i> Cp_1	38
Gambar 3.2 : Fungsi Bijektif Graf Cp_1	38
Gambar 3.3 : Pelabelan Titik dan Sisi Graf <i>Caterpillar</i> Cp_1	40
Gambar 3.4 : Penotasian Titik dan Sisi Graf <i>Caterpillar</i> Cp_3	43
Gambar 3.5 : Pelabelan Titik dan Sisi Graf <i>Caterpillar</i> Cp_1	45
Gambar 3.6 : Penotasian Titik dan Sisi Graf <i>Caterpillar</i> Cp_5	51

Gambar 3.7 : Pelabelan Titik dan Sisi Graf <i>Caterpillar</i> Cp_5	55
Gambar 3.8 : Penotasian Titik dan Sisi Graf <i>Caterpillar</i> Cp_n	64
Gambar 3.9 : Hubungan antara Allah dengan Hamba-Nya serta Sesama Hamba	68
Gambar 3.10 : Hubungan antara Mukmin yang Bersaudara.....	70
Gambar 3.11 : Representasi Graf Terhadap Waktu-waktu Shalat.....	71
Gambar 3.12 : Graf Sarang Laba-laba	71



ABSTRAK

Fathoni, Akhmad. 2009. **Pelabelan Super Sisi Ajaib pada *Graph Caterpillar*.** Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Malang. Pembimbing: (I) Abdussakir, M.Pd. (II) Ach. Nashihuddin, M. Ag.

Kata Kunci: Graf *Caterpillar*, pelabelan super sisi ajaib.

Pelabelan total sisi ajaib (*edge magic total labeling*) pada suatu graf (V, E) dengan order p dan ukuran q adalah fungsi bijektif dari $V \cup E$ ke $\{1, 2, \dots, p+q\}$ sehingga untuk masing-masing sisi xy di G berlaku $f(x) + f(xy) + f(y) = k$, dengan k konstanta. Pelabelan super sisi ajaib (*super edge magic labeling*) adalah pelabelan total sisi ajaib pada graf G sehingga $V(G)$ dipetakan ke himpunan $\{1, 2, \dots, p\}$.

Graf *Caterpillars* adalah suatu graf terhubung yang jika titik ujungnya dipotong/ dibuang akan membentuk lintasan. Pada penelitian ini akan dijelaskan bahwa graf *Caterpillar* tanpa kepala dan ekor yang mempunyai 4 kaki pada tiap badan, dengan n bilangan asli ganjil adalah super sisi ajaib.

Berdasarkan penelitian ini diperoleh hasil graf *Caterpillar* adalah super sisi ajaib dengan konstanta ajaib $k = \frac{50n+10}{4}$.

Pembahasan mengenai pelabelan super sisi ajaib pada graf *Caterpillar* ini masih terbuka bagi peneliti lain untuk mengadakan penelitian yang sejenis dengan *Caterpillar* yang berbeda.

BAB I

PENDAHULUAN

1.5 Latar Belakang Masalah

Dalam Al Quran umat Islam dianjurkan untuk bersungguh-sungguh pada pencarian ilmu pengetahuan. Hal ini karena dunia sekarang dan masa depan, adalah dunia yang dikuasai ilmu pengetahuan dan teknologi. Siapapun yang menguasai keduanya, secara lahiriah akan menguasai dunia.

Dalam kehidupan di dunia, manusia tidak lepas dari berbagai permasalahan. Permasalahan-permasalahan tersebut menyangkut berbagai aspek, dimana dalam penyelesaiannya diperlukan sebuah pemahaman melalui suatu metode dan ilmu bantu tertentu. Salah satunya adalah ilmu matematika. Matematika merupakan alat untuk menyederhanakan penyajian dan pemahaman masalah. Dalam bahasan matematika, suatu masalah dapat menjadi lebih sederhana untuk disajikan, dipahami, dianalisis, dan dipecahkan. Untuk keperluan tersebut, pertama dicari pokok masalahnya, kemudian dibuat rumusan atau model matematikanya (Purwanto, 1998: 1).

Perlu kita ketahui bahwa matematika merupakan salah satu cabang ilmu yang mendasari berbagai macam ilmu yang lain, dimana matematika selalu menghadapi berbagai macam fenomena yang semakin kompleks. Hal ini disebabkan oleh kemajuan ilmu pengetahuan dan teknologi. Perhitungan matematika menjadi dasar bagi desain ilmu teknik, fisika, kimia maupun disiplin ilmu yang lainnya. Para ahli dari berbagai disiplin ilmu, menggunakan

matematika untuk berbagai keperluan yang berkaitan dengan keilmuan mereka. Misalnya para ahli fisika menggunakan matematika untuk mengukur kuat arus listrik, merancang pesawat ruang angkasa, pembuatan bom nuklir, menganalisis gerak, mengukur kecepatan, dan lain-lain.

Alam semesta memuat bentuk-bentuk dan konsep matematika, meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Alam semesta serta segala isinya diciptakan Allah dengan ukuran – ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan, dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi (Abdusysyakir, 2007: 79).

Dalam Al Qur'an surat Al Qamar ayat 49 disebutkan

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَاهُ بِقَدَرٍ ﴿٤٩﴾

Artinya: ...Sesungguhnya kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran (Al Qamar, 54: 49)

Shihab (2003: 482) menafsirkan bahwa kata *qadar* pada ayat di atas diperselisihkan oleh para ulama. Dari segi bahasa kata tersebut dapat berarti *kadar tertentu* yang tidak bertambah atau berkurang, atau berarti *kuasa*. Tetapi karena ayat tersebut berbicara tentang segala sesuatu yang berada dalam kuasa Allah, maka adalah lebih tepat memahaminya dalam arti *ketentuan* dan *system yang telah ditetapkan terhadap segala sesuatu*. Tidak hanya terbatas pada salah satu aspeknya saja. Manusia misalnya, telah ada *kadar yang ditetapkan* Allah baginya. Selaku jenis makhluk ia dapat makan, minum dan berkembang biak melalui *system yang ditetapkan-Nya*. Manusia memiliki potensi baik dan buruk. Ia dituntut untuk mempertanggungjawabkan pilihannya. Manusia dianugerahkan

Allah petunjuk dengan kedatangan sekian rasul untuk membimbing mereka. Akalpun dianugerahkan-Nya kepada mereka, demikian seterusnya yang kesemuanya dan yang selainnya termasuk dalam *system* yang sangat tepat, teliti dan akurat yang telah ditetapkan Allah swt. Demikian juga Allah telah menetapkan *system* dan *kadar* bagi ganjaran atau balasan-Nya yang akan diberikan kepada setiap orang.

Dalam ayat lain disebutkan

وَحَلَقَ كُلَّ شَيْءٍ فَقَدَرَهُ تَقْدِيرًا ﴿٢﴾

Artinya: ...Dan Dia Telah menciptakan segala sesuatu, dan Dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya (Al Furqan, 25: 2).

Dalam ayat lain juga disebutkan:

الَّذِي لَهُ مُلْكُ السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ وَلَمْ يَتَّخِذْ وَلَدًا وَلَمْ يَكُنْ لَهُ شَرِيكٌ فِي الْمُلْكِ
وَحَلَقَ كُلَّ شَيْءٍ فَقَدَرَهُ تَقْدِيرًا ﴿٢﴾

Artinya: "Yang kepunyaan-Nya-lah kerajaan langit dan bumi, dan dia tidak mempunyai anak, dan tidak ada sekutu baginya dalam kekuasaan(Nya), dan dia Telah menciptakan segala sesuatu, dan dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya" (Q.S. Al-Furqaan: 2).

Ayat di atas menjelaskan bahwa segala sesuatu yang ada di alam ini ada ukurannya, ada hitungan-hitungannya, ada rumusnya, atau ada persamaannya. Ahli matematika atau fisika tidak membuat suatu rumus sedikitpun. Mereka hanya menemukan rumus atau persamaan, sehingga rumus-rumus yang ada sekarang bukan diciptakan manusia sendiri, tetapi sudah disediakan. Manusia hanya menemukan dan menyimbolkan dalam bahasa matematika (Abdusysyikir, 1997:80).

Dari pemisalan di atas, maka kata ukuran juga menyangkut pada suatu jumlah dan jumlah disini dapat dinyatakan dalam bentuk bilangan atau angka. Begitu pula pada permasalahan pelabelan pada graf, suatu pelabelan graf akan menghasilkan bilangan ajaib yang diperoleh dari penjumlahan nilai label titik dan nilai label sisi. Label berupa bilangan-bilangan atau angka-angka. Jadi, teori graf ini merupakan salah satu ilmu yang telah diciptakan dan benar-benar telah diukur oleh Allah dengan segala kelebihan-kelebihannya.

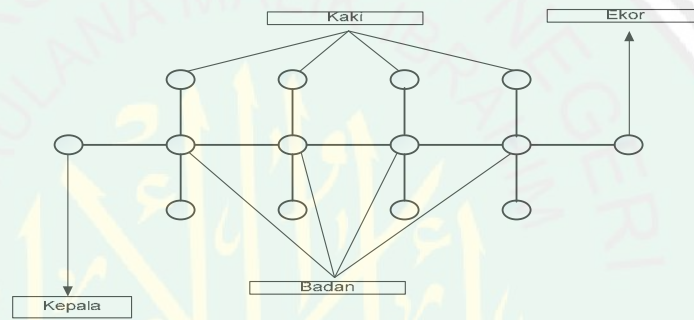
Teori *graf* diperkenalkan oleh Leonard Euler pada tahun 1736 ketika dia kembali mendiskusikan mungkin atau tidaknya melintasi semua jembatan yang ada di kota Kaliningrat-Rusia hanya dengan melewatinya satu kali. Solusi yang diusulkannya atas permasalahan tersebut berupa titik dan sisi yang kemudian dikenal sebagai teori *graf*. Sejak itu, topik dari *graf* ini mulai dipelajari oleh para ahli matematika (Cunnigham, 2004: 1).

Pelabelan graf merupakan salah satu topik dari teori graf yang mendapat perhatian khusus, karena model-model yang ada dalam teori graf berguna untuk aplikasi yang luas, misalnya, pada jaringan transportasi, komunikasi dan riset operasi. Salah satu aplikasi dalam teori graf adalah menentukan kota terjauh (maksimal lintasan terpendek) dari suatu kota ke kota lain yang terdiri dari kumpulan kota dalam suatu daerah (Widi, 2002: 2).

Pelabelan graf ini sudah banyak dikaji mulai tahun 60-an. Studi dari pemberian label pada graf telah memfokuskan pada penemuan graf-graf tertentu yang memiliki pelabelan tertentu, sehingga ada banyak jenis-jenis pelabelan, di antaranya adalah pelabelan simpul (*vertex labeling*), pelabelan sisi (*edge*

labeling), pelabelan total (*total labeling*), dan pelabelan ajaib (*magic labeling*), dimana pada pelabelan ajaib terdapat dua jenis, yaitu pelabelan total sisi ajaib (*edge magic total labeling*) dan pelabelan super sisi ajaib (*super edge magic labeling*).

Graf *caterpillar* adalah graf yang jika semua titik ujungnya dihilangkan akan menghasilkan lintasan. Perlu diingat kembali bahwa titik ujung adalah titik yang berderajat satu. Berikut ini adalah contoh graph ulat.



Gambar 1.1 Graf Caterpillar dengan kepala dan ekor

Pelabelan total sisi ajaib (*edge magic total labeling*) pada suatu graf (V, E) dengan order p dan ukuran q adalah fungsi bijektif dari $V \cup E$ ke $\{1, 2, \dots, p+q\}$ sehingga untuk masing-masing sisi xy di G berlaku $f(x) + f(xy) + f(y) = k$, dengan k konstanta. Sedangkan pelabelan super sisi ajaib (*super magic labeling*) adalah pelabelan total sisi ajaib pada graf G sehingga $V(G)$ dipetakan ke himpunan $\{1, 2, \dots, p\}$.

Dari beberapa uraian diatas, maka penulis kemudian bermaksud untuk mengadakan penelitian dengan judul **“Pelabelan Super Sisi Ajaib pada Graph Caterpillar ”**.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam skripsi ini adalah bagaimana pelabelan super sisi ajaib pada graf *Caterpillar* jika banyak badan adalah ganjil.

1.3 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penulisan ini adalah untuk menganalisis pelabelan super sisi ajaib pada graf *Caterpillar* dengan banyak badan ganjil.

1.4 Batasan Masalah

Agar pembahasan dalam skripsi ini tidak meluas, maka penulis membatasi bahwa graf *Caterpillar* yang akan diteliti adalah graph *Caterpillar* tanpa kepala dan ekor yang mempunyai 4 kaki pada tiap badan.

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penulisan skripsi ini adalah:

1. Jurusan Matematika

Hasil pembahasan ini dapat digunakan sebagai tambahan bahan dalam pengembangan ilmu matematika khususnya di kalangan mahasiswa jurusan matematika.

2. Peneliti

Melalui penelitian ini dapat menambah penguasaan materi, sebagai pengalaman dalam melakukan penelitian dan menyusun karya ilmiah dalam bentuk skripsi, serta media untuk mengaplikasikan ilmu matematika yang telah diterima dalam bidang keilmuannya.

3. Pengembangan ilmu pengetahuan

Menambah khasanah dan mempertegas keilmuan matematika dalam peranannya terhadap perkembangan teknologi dan disiplin ilmu lain.

1.6 Metode Penelitian

Jenis dari penelitian ini adalah deskriptif kualitatif dan penelitian ini merupakan sebuah penelitian kepustakaan (*library research*) dengan melakukan penelitian untuk memperoleh data-data dan informasi dengan menggunakan teknik dokumenter, artinya data-data sumber penelitian dikumpulkan dari dokumen-dokumen, baik yang berupa buku, artikel, jurnal, majalah, maupun karya ilmiah lainnya yang berkaitan dengan topik atau permasalahan yang diteliti.

Adapun tahapan-tahapan yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

- 1) Mencari, mempelajari dan menelaah sumber-sumber informasi yang berhubungan dengan topik yang diteliti.
- 2) Memberikan deskripsi dan pembahasan lebih lanjut terhadap hasil penelitian untuk memberikan jawaban atas rumusan masalah yang telah dikemukakan.
- 3) Mencoba melakukan pelabelan pada beberapa contoh graf *Caterpillar*.
- 4) Melalui beberapa contoh tersebut, akhirnya dicari pola tertentu. Pola yang didapatkan masih dapat dianggap sebagai dugaan (konjektur).
- 5) Konjektur yang dihasilkan kemudian dibuktikan dengan terlebih dahulu merumuskan konjekturnya sebagai suatu teorema yang dilengkapi dengan bukti-bukti.

- 6) Setelah ditemukan pola pelabelannya dengan membuktikan teorema kemudian mencari nilai konstanta ajaib pada graf *Caterpillar*.
- 7) Memberikan kesimpulan akhir dari hasil penelitian.

1.7 Sistematika Penulisan

Agar penulisan skripsi ini lebih terarah, mudah ditelaah dan dipahami, maka digunakan sistematika pembahasan yang terdiri dari empat bab. Masing-masing bab dibagi ke dalam beberapa subbab dengan rumusan sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN

Pendahuluan meliputi: latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II KAJIAN PUSTAKA

Kajian pustaka meliputi: graf, derajat titik, graf terhubung, graf *Caterpillar*, fungsi, pelabelan, pelabelan konsekutif, pelabelan total sisi ajaib (*Edge Magic Total Labeling*), Pelabelan Super Sisi Ajaib (*Super Edge Magic Labeling*), hubungan manusia dengan tuhan.

BAB III PEMBAHASAN

Berisikan pembahasan dari penelitian yaitu tentang pelabelan super sisi ajaib (*super egde magic labeling*) pada graf *Caterpillar*.

BAB IV PENUTUP

Pada bab ini akan dibahas tentang kesimpulan dan saran.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Graf

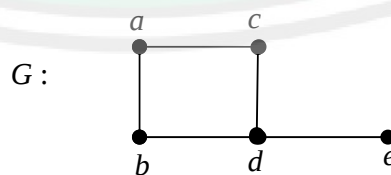
2.1.1 Definisi Graf

Secara Matematis, graf didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 1

Graf G adalah pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari obyek-obyek yang disebut sebagai titik dan E adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di V yang disebut sebagai sisi. Himpunan titik di G dinotasikan dengan $V(G)$ dan himpunan sisi dinotasikan dengan $E(G)$. Sedangkan banyaknya unsur di V disebut order dari G dan dilambangkan dengan $p(G)$ dan banyaknya unsur di E disebut ukuran dari G dan dilambangkan dengan $q(G)$. Jika graf yang dibicarakan hanya graf G , maka order dan ukuran dari G tersebut cukup ditulis dengan p dan q (Chartrand dan Lesniak, 1986:4).

Contoh:



Gambar 2.1 Graf G .

Dari gambar 2.1. Graf G mempunyai 5 titik sehingga order G adalah $p = 5$.

Graf G mempunyai 5 sisi sehingga ukuran graf G adalah $q = 5$ dengan

$$V(G) = \{a, b, c, d, e\}$$

$$E(G) = \{(a, b), (a, c), (b, d), (c, d), (d, e)\}.$$

Dapat juga ditulis dengan

$$V(G) = \{a, b, c, d, e\}$$

$$E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$$

untuk

$$e_1 = (a, b)$$

$$e_2 = (a, c)$$

$$e_3 = (b, d)$$

$$e_4 = (c, d)$$

$$e_5 = (d, e)$$

Definisi 2

Sisi $e = (u, v)$ dikatakan menghubungkan titik u dan v . Jika $e = (u, v)$ adalah sisi di graf G , maka u dan v disebut terhubung langsung (*adjacent*), u dan e serta v dan e disebut terkait langsung (*incident*). Untuk selanjutnya, sisi $e = (u, v)$ akan ditulis $e = uv$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:4)

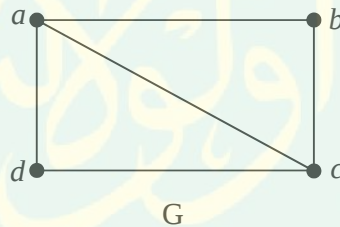
Dari Gambar 2.1 pada G_2 , titik v_1 dan sisi e_1, e_5 dan e_4 adalah *incident* dengan titik v_1 . Sedangkan titik v_1 dan v_4 adalah *adjacent* tetapi v_4 dan v_2 tidak.

Definisi 3

Suatu graf terdiri dari suatu himpunan tak kosong yang masing-masing unturnya disebut titik (*vertex*) dan suatu himpunan pasangan tak berurutan dari titik-titik tersebut yang disebut sisi (*edge*) (Purwanto, 1997:5).

Misalkan G adalah suatu graf. Himpunan titik di graf G dinyatakan sebagai $V(G) = \{v_i : 1 \leq i \leq n\}$ dengan v_i disebut titik atau *vertex* dan himpunan sisi di graf G dinyatakan sebagai $E(G) = \{v_j v_k : v_j \in V(G), v_k \in V(G)\}$ dengan $v_j v_k$ disebut sisi atau *edge*, sisi juga dapat dinotasikan dengan e_i . Graf G dapat dinyatakan dengan $G = (V(G), E(G))$ (Baskoro, 2007:7).

Contoh :



Gambar 2.2 Contoh Graf G

Graf G pada Gambar 2.1 dapat dinyatakan sebagai $G = (V(G), E(G))$. Graf G mempunyai 4 titik sehingga order G adalah $p = 4$ dan mempunyai 5 sisi sehingga ukuran graf G adalah $q = 5$ dengan

$$V(G) = \{a, b, c, d\}$$

$$E(G) = \{ab, ad, ac, bc, cd\}.$$

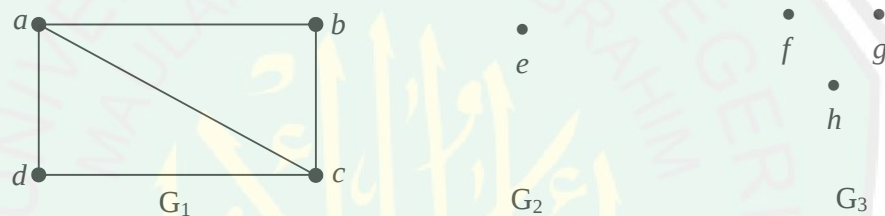
Dapat juga ditulis dengan

$$V(G) = \{a, b, c, d\}$$

$$E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$$

Jika banyaknya titik dan banyaknya sisi di G terhingga maka G disebut graf terhingga. Jika graf G hanya terdiri dari satu titik maka graf G disebut graf trivial. Jika graf G hanya terdiri dari himpunan titik tanpa himpunan sisi maka graf G disebut graf kosong (graph Null).

Contoh :



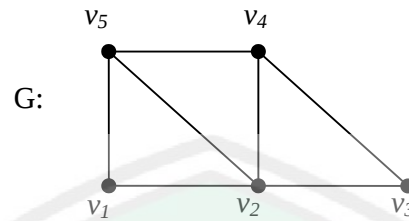
Gambar 2.3 Contoh Graf Trivial dan Null

Pada Gambar 2.2 graf G_1 dapat dinyatakan sebagai $G_1 = (V(G_1), E(G_1))$, dengan $V(G_1) = \{a, b, c, d\}$, $E(G_1) = \{ab, ad, ac, bc, cd\}$. Karena G_2 hanya terdiri dari himpunan satu titik maka graf G_2 disebut graf trivial. Dan karena $G_3 = (V(G_3), E(G_3))$ dengan $V(G_3) = \{a, b, c, d\}$ dan $E(G_3) = \{ \}$ maka G_3 disebut graf kosong (graph Null).

Definisi 4

Graf H disebut subgraf dari G jika himpunan titik di H adalah subset dari himpunan titik-titik di G dan himpunan sisi-sisi di H adalah subset dari himpunan sisi di G . Dapat ditulis $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$. Jika H adalah subgraf G , maka dapat ditulis $H \subseteq G$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:8).

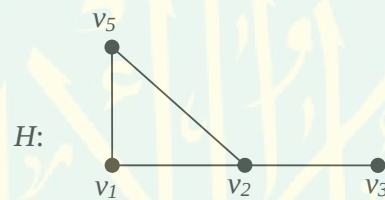
Contoh 2.2



Gambar 2.4 Graf

$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} \text{ dan}$$

$$E(G) = \{v_1 v_2, v_1 v_5, v_2 v_3, v_2 v_4, v_2 v_5, v_3 v_4, v_4 v_5\}$$



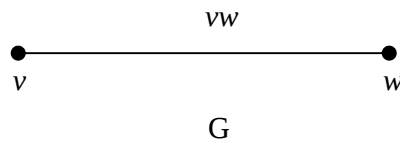
Gambar 2.5 Subgraf

Gambar 2.2 dan 2.3 menunjukkan dua graf G dan H dan menunjukkan bahwa H subgraf G .

2.1.2 Adjacent dan Incident

Definisi 3

Misalkan v dan w adalah titik-titik dari suatu graf. Jika v dan w dihubungkan oleh suatu sisi vw , maka v dan w disebut terhubung langsung (adjacent). Lebih lanjut, v dan w dikatakan terkait (*incident*) dengan vw , vw dikatakan terkait (*incident*) dengan v dan w , dan titik v dan w disebut titik ujung dari vw (Wilson dan Watkins, 1990:31).



Gambar 2.6 Graf Adjacent dan Incident

Dari Gambar 2.3 titik v dan vw serta vw dan w adalah *incident* (terkait langsung) dan titik v dan w adalah *adjacent* (terhubung langsung).

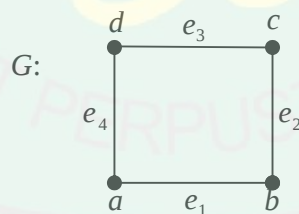
Definisi 5

Sisi $e = (u, v)$ dikatakan menghubungkan titik u dan v . Jika $e = (u, v)$ adalah sisi di graf G , maka u dan v disebut terhubung langsung (*adjacent*), u dan e serta v dan e disebut terkait langsung (*incident*). Untuk selanjutnya, sisi $e = (u, v)$ akan ditulis $e = uv$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:4).

Contoh:

Perhatikan graf G yang memuat

$V(G) = \{a, b, c, d, e\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ berikut:



Gambar 2.7 Graf G .

Dari Gambar 2.2 tersebut, titik a dan e_1 serta e_1 dan b adalah *incident* (terkait langsung) dan titik a dan b adalah *adjacent* (terhubung langsung).

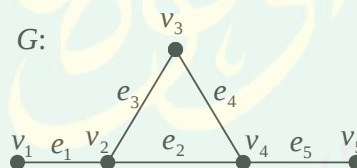
2.1.1. Derajat Titik

Definisi 6

*Derajat dari titik v di graf G , ditulis $\deg_G(v)$, adalah banyaknya sisi di G yang terkait langsung (incident) dengan v . Jika dalam konteks pembicaraan hanya terdapat satu graf G , maka tulisan $\deg_G(v)$ disingkat menjadi $\deg(v)$. Titik yang berderajat genap sering disebut *titik genap* (even vertices) dan titik yang berderajat ganjil disebut *titik ganjil* (odd vertices). Titik yang berderajat nol disebut *titik terisolasi* (isolated vertices) dan titik yang berderajat satu disebut *titik ujung* (end vertices) (Chartrand dan Lesniak, 1986:7).*

Contoh:

Perhatikan graf G berikut yang mempunyai himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$



Gambar 2.8 Graf dengan Derajat Titik

Berdasarkan Gambar 2.4, diperoleh bahwa:

$$\deg(v_1) = 1$$

$$\deg(v_2) = 3$$

$$\deg(v_3) = 2$$

$$\deg(v_4) = 3$$

$$\deg(v_5) = 1$$

Titik v_2 dan v_4 adalah titik ganjil, titik v_3 adalah titik genap, titik v_1 dan v_3 adalah titik ujung. Hubungan antara jumlah derajat semua titik dalam suatu graf G dengan banyak sisi, yaitu q , adalah

$$\sum_{v \in G} \deg(v) = 2q.$$

Hal ini dinyatakan dalam teorema berikut:

Teorema 1

Jika G graf dengan $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$

maka $\sum_{i=1}^p \deg(v_i) = 2q$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:7).

Bukti:

Setiap sisi adalah terkait langsung dengan 2 titik. Jika setiap derajat titik dijumlahkan, maka setiap sisi dihitung dua kali.

Corollary 1.

Pada sebarang graf, banyak titik ganjil adalah genap.

Bukti:

Misalkan graf G dengan size q . Misalkan W himpunan yang memuat titik ganjil pada G serta U himpunan yang memuat titik genap di G . Dari teorema 1 maka diperoleh:

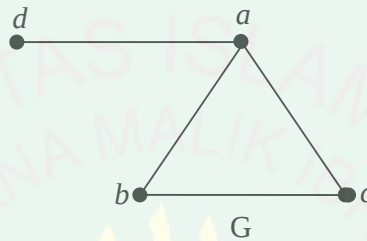
$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = \sum_{v \in W} \deg(v) + \sum_{v \in U} \deg(v) = 2q$$

Dengan demikian karena $\sum_{v \in U} \deg(v)$ genap, maka $\sum_{v \in W} \deg(v)$ juga genap. Sehingga $|W|$ adalah genap.

Definisi 7

Derajat suatu titik v di G , dinyatakan dengan $d(v)$, adalah banyak sisi di G yang terkait dengan v . Derajat minimum dan derajat maksimum titik-titik di G berturut-turut dinyatakan dengan $\delta(G)$ dan $\Delta(G)$ (Purwanto, 1997:7).

Contoh :

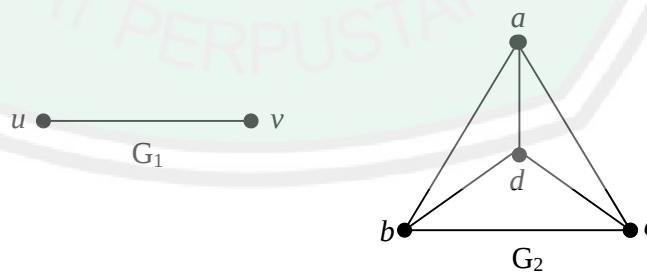


Gambar 2.9 Graf Derajat Titik

Untuk graf G pada Gambar 2.6 $d(a) = 3$, $d(b) = 2$, $d(c) = 2$, dan $d(d) = 1$ sedangkan $\delta(G) = 1$ dan $\Delta(G) = 3$.

Graf yang semua titiknya berderajat sama disebut graf beraturan (*regular graph*). Suatu graf dikatakan beraturan- r (*r-regular*) jika semua titiknya berderajat r (Purwanto, 1997:8).

Contoh :



Gambar 2.10 Graf Derajat- r .

Graf G_1 pada Gambar 2.7 merupakan graf beraturan-1, dan graf G_2 merupakan graf beraturan-3.

2.3 Graph Terhubung

Definisi 8

Sebuah jalan (*walk*) u - v di graf G adalah barisan berhingga (tak kosong) W : $u = u_0, e_1, u_1, e_2, \dots, u_{n-1}, e_n, u_n = v$ yang berselang seling antara titik dan sisi, yang dimulai dari titik u dan diakhiri dengan titik v , dengan $e_i = u_{i-1}u_i$ untuk $i = 1, 2, \dots, n$ adalah sisi di G . u_0 disebut titik awal, u_n disebut titik akhir, $u_1, u_2, \dots, u_{n-1}$ disebut titik internal, dan n menyatakan panjang dari W (Chartrand dan Lesniak, 1986:26).

Definisi 9

Jalan u - v disebut *terbuka* atau *tertutup* jika $u = v$ atau $u \neq v$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:26).

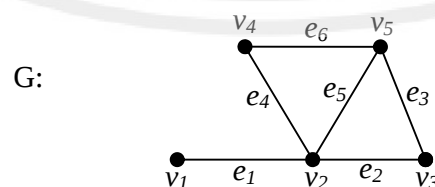
Definisi 10

Jalan u - v yang semua sisinya berbeda disebut *trail* u - v (Chartrand dan Lesniak, 1986:26).

Definisi 11

Jalan u - v yang semua sisi dan titiknya berbeda disebut *path* (lintasan) u - v . Dengan demikian, semua lintasan adalah *trail* (Chartrand dan Lesniak, 1986:26).

Contoh:



Gambar 2.11 Jalan pada Graph

Dari graph di atas $v_1, e_1, v_2, e_5, v_5, e_6, v_4, e_4, v_2, e_2, v_3$ disebut sebagai trail, sedangkan $v_1, e_1, v_2, e_5, v_5, e_6, v_4$ disebut sebagai path (lintasan).

Definisi 12

Suatu titik u yang membentuk lintasan (*path*) $u-u$ disebut jalan trivial (Chartrand dan Lesniak, 1986:26).

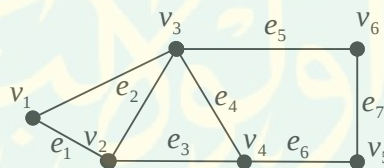
Definisi 13

Suatu jalan tertutup (*closed trail*) yang tak-trivial pada Graf G disebut Sirkuit G . (Chartrand dan Lesniak, 1986:28).

Definisi 14

Sirkuit $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, \dots, v_{n-1}, e_{n-1}, v_n, v_1$ dengan $n \geq 3$ dan v_i berbeda untuk setiap i disebut Sikel (*cycle*) (Chartrand dan Lesniak, 1986:28).

Contoh:



Gambar 2.12 Jalan, Lintasan, Trail, dan Sikel

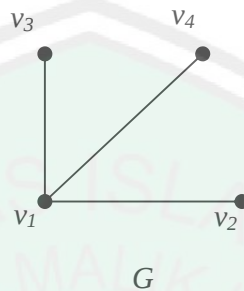
Dari Gambar 2.8. $v_1, v_3, v_6, v_5, v_4, v_2, v_1$ disebut jalan tertutup dengan panjang 6 dan $v_1, v_3, v_6, v_5, v_4, v_3, v_1, v_2$ disebut jalan terbuka dengan panjang 7. $v_1, v_3, v_6, v_5, v_4, v_3, v_2$ adalah trail tetapi bukan lintasan, sedangkan $v_1, v_3, v_6, v_5, v_4, v_2$ disebut sebagai *path* (lintasan) dan v_1, v_2, v_3, v_1 adalah sikel.

Definisi 15

Misalkan u dan v titik berbeda pada graf G . Maka titik u dan v dapat dikatakan terhubung (*connected*), jika terdapat lintasan $u - v$ di G .

Sedangkan suatu graf G dapat dikatakan terhubung (*connected*), jika untuk setiap titik u dan v di G terhubung (Chartrand dan Lesniak, 1986:28).

Contoh:



Gambar 2.13 Graf Terhubung (*connected*)

2.4 Graph Caterpillars

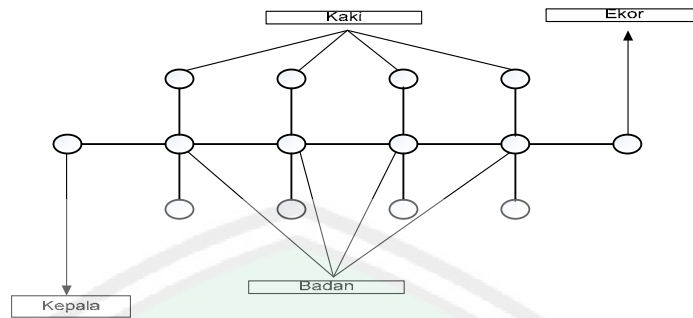
Definisi 16

Graph ulat (caterpillars) adalah suatu graph terhubung yang jika titik ujungnya dipotong/ dibuang akan membentuk lintasan.

Definisi 17

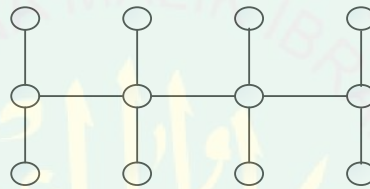
Misalkan G terhubung, G memuat tepat satu titik ujung yang terkait langsung dengan badan bagian depan dan belakang maka masing-masing bagian disebut dengan kepala dan ekor, sedangkan yang disebut badan yaitu jika berderajat lebih dari 2 atau tepatnya berderajat 3 dan 4, dan disebut kaki jika memuat tepat satu titik ujung yang terkait langsung dengan badan bagian kanan dan kiri.

Contoh: Graph ulat (Caterpillars) yang mempunyai kepala dan ekor.



Gambar 2.14 Graph Caterpillar dengan kepala dan ekor

Graph ulat (Caterpillars) tanpa kepala dan ekor



Gambar 2.15 Graph Caterpillar tanpa kepala dan ekor

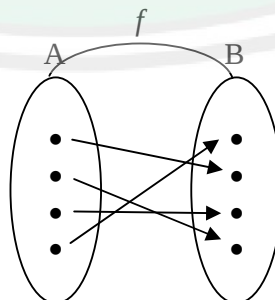
Dalam penelitian ini yang menjadi objek penelitian adalah graph *Caterpillar* tanpa kepala dan ekor yang mempunyai 4 kaki pada tiap badan dengan n bilangan asli ganjil.

2.5 Fungsi

Definisi 18

Suatu fungsi f dari x ke y ialah suatu aturan yang pada setiap anggota dari x dengan berpasangan dengan tunggal satu anggota dari y (Baisuni, 2005:7).

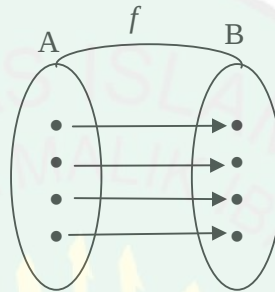
Contoh:



Gambar 2.16. Fungsi

Definisi 19

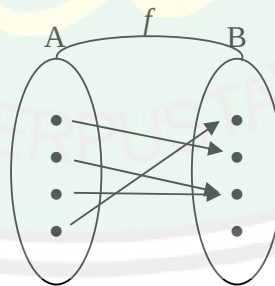
Pemetaan $f : A \rightarrow B$ dikatakan pada, atau Surjektif, jika untuk setiap unsur $y \in B$ terdapat unsur $x \in A$ yang memenuhi $f(x) = y$ (Arifin, 2000:8).



Gambar 2.17 Fungsi Satu-satu

Definisi 20

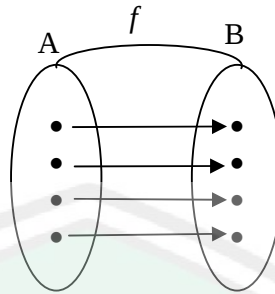
Pemetaan $f : A \rightarrow B$ dikatakan satu-satu, atau injektif, jika untuk setiap unsur x_1 dan x_2 di A yang dipetakan sama oleh f , yaitu $f(x_1) = f(x_2)$, berlaku $x_1 = x_2$ (Ibid, Hal: 8).



Gambar 2.18 Fungsi Surjektif

Definisi 21

Suatu fungsi $f : A \rightarrow B$ dikatakan bijektif jika keduanya injektif dan surjektif (Bartle dan Sherbert, 1927: 14).



Gambar 2.19 Fungsi Bijektif

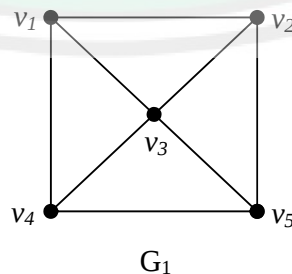
2.6 Pelabelan

Definisi 22

Pelabelan pada sebuah graf adalah pemetaan yang memetakan unsur-unsur pada suatu graf ke bilangan-bilangan (biasanya ke bilangan bulat positif atau bilangan bulat non-negatif) (W. D. Wallis dkk, 2000:2).

Ditinjau dari domainnya, terdapat bermacam-macam pelabelan pada graf, antara lain adalah pelabelan titik, pelabelan sisi, dan pelabelan total. Pelabelan titik adalah pemetaan yang memetakan titik-titik pada suatu graf ke bilangan-bilangan. Pelabelan sisi adalah pemetaan yang memetakan sisi-sisi pada suatu graf ke bilangan-bilangan. Sedangkan pelabelan total adalah pemetaan yang memetakan titik-titik dan sisi-sisi pada suatu graf ke bilangan-bilangan. Selain itu domain yang lain juga mungkin digunakan pada pelabelan pada graf.

Contoh 1:



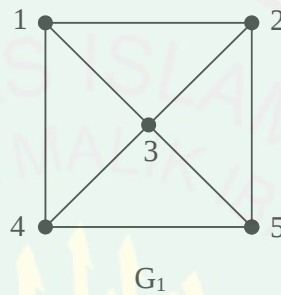
Gambar 2.20 Contoh Penotasian Titik

Jika G_1 pada Gambar 2.16 dilabeli dengan pelabelan sebagai berikut

$$f : V(G_1) \rightarrow \{1,2,3,4,5\}$$

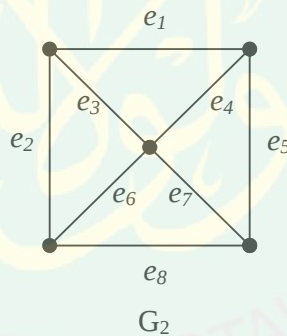
$$v_i \mapsto i \quad ; \text{ dengan } i = 1, 2, 3, 4, 5$$

Maka diperoleh graf dengan pelabelan titik pada Gambar 2.17 berikut



Gambar 2.21 Pelabelan Titik

Contoh 2:



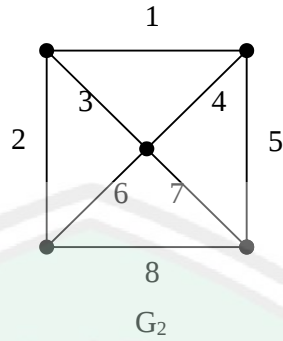
Gambar 2.22 Contoh Penotasian Sisi

Jika G_2 pada Gambar 2.18 dilabeli dengan pelabelan sebagai berikut

$$g : E(G_2) \rightarrow \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$$

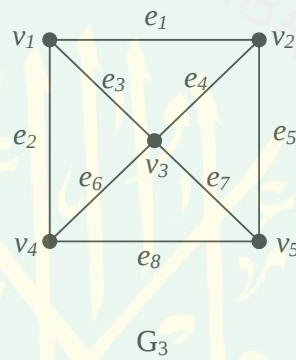
$$e_i \mapsto i \quad ; \text{ dengan } i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$$

Maka diperoleh graf dengan pelabelan sisi pada Gambar 2.23 berikut



Gambar 2.23 Pelabelan Sisi

Contoh 3:



Gambar 2.24 Penotasian Total

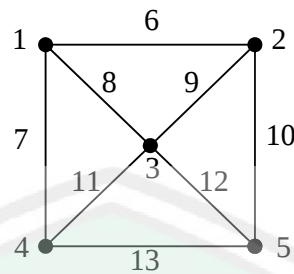
Jika G_3 pada Gambar 2.20 dilabeli dengan pelabelan sebagai berikut

$$g : V(G_3) \cup E(G_3) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 12, 13\}$$

$$v_i \mapsto i \quad ; \text{ dengan } i = 1, 2, 3, 4, 5$$

$$e_j \mapsto j + 5 \quad ; \text{ dengan } j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$$

Maka diperoleh graf dengan pelabelan total pada Gambar 2. 21 berikut

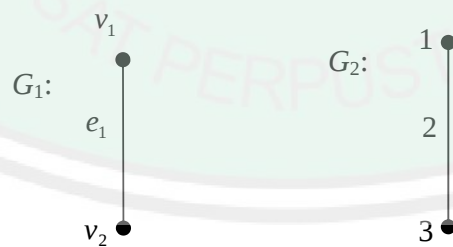
 G_3 **Gambar 2.25** Pelabelan Total

2.7 Pelabelan Konsektif

Definisi 23

Pelabelan graf G adalah pemetaan yang memetakan unsur-unsur graf ke bilangan (umumnya bilangan bulat non-negatif atau positif) yang disebut label. Pada umumnya domain dari pemetaan ini adalah himpunan titik (pelabelan titik), himpunan sisi (pelabelan sisi), atau himpunan titik dan sisi (sehingga pelabelan ini disebut pelabelan total) (Nurdin, Baskoro, dan Salman, 2005:1).

Contoh:

**Gambar 2.26** Pelabelan Titik dan Sisi pada graf G

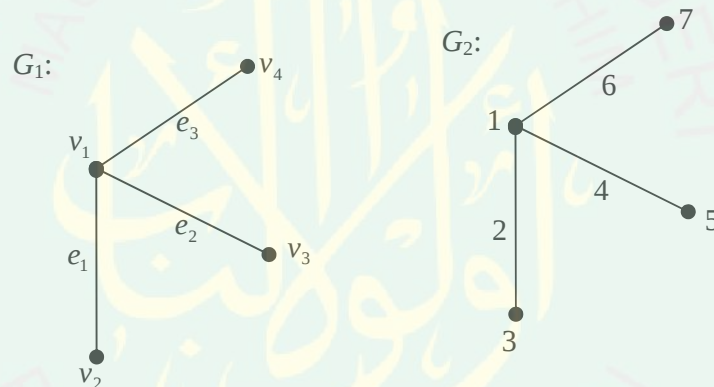
Pada gambar 2.20. Graf G_2 adalah hasil pelabelan titik dan sisi dari graf G_1 dimana v_1, v_2 dan e_1 dilabeli dengan 1, 3, dan 2.

Definisi 24

Misal G adalah graf dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$.

Pelabelan konsekutif graf G adalah fungsi bijektif dari $V(G) \cup E(G)$ ke himpunan bilangan bulat positif $\{1, 2, \dots, p, p+1, p+2, \dots, p+q\}$ sedemikian sehingga label sisi $e = uv$ merupakan harga mutlak dari selisih label dua titik yang dihubungkan oleh sisi e yaitu $f(e) = f(uv) = |f(u) - f(v)|$. Suatu graf dikatakan *konsekutif* jika graf tersebut dapat dilabeli secara konsekutif (Gafur, 2007:8 dan Wijaya 2004:1).

Contoh:



Gambar 2.27 Pelabelan Konsekutif pada Graf G

Pada gambar 2.27. Graf G_2 adalah hasil pelabelan konsekutif dari graf G_1 . Sehingga jika pelabelan tersebut adalah fungsi f , maka dapat dibentuk fungsi bijektif dari $V(S_n) \cup E(S_n)$ ke $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ sebagai berikut:

$$f(v_1) = 1$$

$$f(v_2) = 3$$

$$f(v_3) = 5$$

$$f(v_4) = 7$$

$$f(e_1) = f(v_1v_2) = |3-1| = 2$$

$$f(e_2) = f(v_1v_3) = |5-1| = 4$$

$$f(e_3) = f(v_1v_4) = |7-1| = 6$$

2.8 Pelabelan Total Sisi Ajaib (*Edge Magic Total Labeling*)

Pelabelan ajaib dikenalkan oleh Sedlacek dalam Joseph A. Gallian (2005:56) pada tahun 1963, teori tentang pelabelan ajaib ini termotivasi oleh teori tentang persegi ajaib (*magic squares*) dalam teori bilangan. Pengenalan tentang pelabelan ajaib oleh Sedlacek tersebut diteruskan dengan dipelajarinya pelabelan ajaib secara lebih luas. Diantaranya adalah pengenalan tentang pelabelan ajaib sisi dan pelabelan ajaib titik.

Lebih jauh lagi adalah dikenalkannya pelabelan total ajaib titik dan pelabelan total sisi ajaib (*EMT*). Pelabelan total ajaib titik, biasanya disebut hypermagic, merupakan pelabelan ajaib titik pada graf dengan pelabelan total. Pelabelan total ajaib sisi merupakan pelabelan ajaib sisi pada graf dengan pelabelan total (W. D. Wallis dkk, 2000:3).

Kotzig dan Rosa dalam W. D. Wallis (2000:3) telah mendefinisikan pelabelan ajaib yang menggunakan daerah asal berupa himpunan bilangan bulat berurutan $\{1, 2, \dots, p+q\}$ dan menggunakan pelabelan total pada tahun 1970. Istilah pelabelan ajaib mereka gunakan untuk menyatakan pelabelan total sisi ajaib (*EMT*), dan ini akan digunakan pada pembahasan selanjutnya pada skripsi ini.

Definisi 25

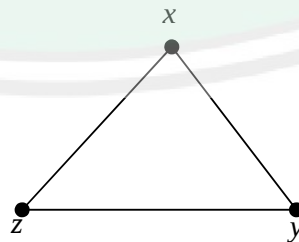
Pelabelan ajaib pada graf $G(p, q)$ adalah fungsi f yang bersifat satu-satu dan pada dari $V(G) \cup E(G)$ ke himpunan bilangan bulat $\{1, 2, \dots, p + q\}$ dengan sifat setiap sisi xy pada graf G yang diberikan berlaku $f(x) + f(xy) + f(y) = k$, untuk suatu konstanta k , dengan $f(x) + f(xy) + f(y)$ disebut jumlah sisi dari xy dan konstanta k disebut konstanta ajaib dari G . Suatu graf dikatakan ajaib jika terdapat pelabelan ajaib pada graf tersebut (W. D. Wallis dkk, 2000:3).

Definisi 26

Pelabelan total sisi ajaib (*edge magic total labeling*) pada suatu graph (V, E) dengan order p dan ukuran q adalah fungsi bijektif dari $V \cup E$ ke $\{1, 2, \dots, p+q\}$ sehingga untuk masing-masing sisi xy di G berlaku $f(x) + f(xy) + f(y) = k$, dengan k konstanta. (The Electronic Journal of Combinatorics, 2007 : 67)

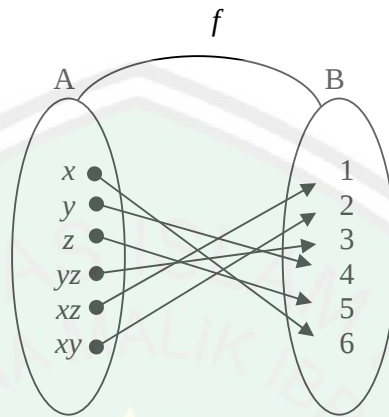
Pelabelan total sisi ajaib dapat dimaknai sebagai jumlah label suatu sisi dan label titik yang terkait dengan sisi tersebut adalah sama untuk semua sisi. Graph yang dapat dikenakan pelabelan total sisi ajaib disebut sebagai graph total sisi ajaib.

Contoh: G:



Gambar 2.28 Graph Lingkaran dengan 3 titik

Jika dibuat fungsi f dari $V(G) \cup E(G)$ ke himpunan $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ maka akan terlihat pada gambar berikut:



Gambar 2.29 Diagram Fungsi dari himpunan titik dan sisi ke himpunan banyak titik ditambah banyak sisi.

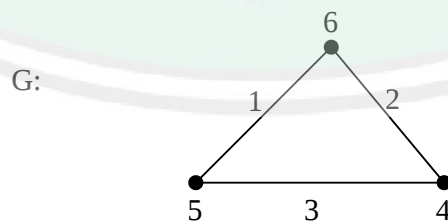
Maka diperoleh:

$$f(x) + f(xy) + f(y) = 1 + 6 + 2 = 9$$

$$f(x) + f(xy) + f(y) = 3 + 5 + 3 = 9$$

$$f(x) + f(xy) + f(y) = 2 + 4 + 3 = 9$$

Jadi fungsi f adalah pelabelan total sisi ajaib pada G . Pelabelan pada graph G sehingga diperoleh pelabelan super sisi ajaib yang dapat digambarkan sebagai berikut:



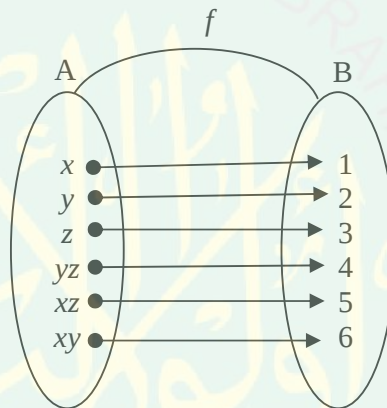
Gambar 2.30 Pelabelan Total Sisi Ajaib

2. 9 Pelabelan Super Sisi Ajaib (*Super Edge Magic Labeling*)

Definisi 27

Pelabelan super sisi ajaib (*super magic labeling*) adalah pelabelan total sisi ajaib pada graph G sehingga $V(G)$ dipetakan ke himpunan $\{1, 2, \dots, p\}$ (The Electronic Journal of Combinatorics, 2007 : 68).

Sebagai contoh perhatikan gambar 15 di atas. Jika dibuat suatu diagram, maka akan terlihat seperti gambar di bawah ini.



Gambar 2.31 Diagram Fungsi dari himpunan titik dan sisi ke himpunan banyak titik ditambah banyak sisi.

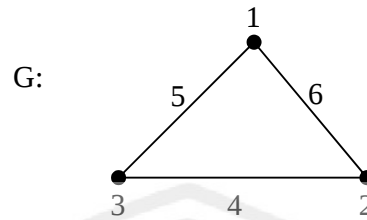
Maka diperoleh:

$$f(x) + f(xy) + f(y) = 1 + 6 + 2 = 9$$

$$f(x) + f(xy) + f(y) = 3 + 5 + 3 = 9$$

$$f(x) + f(xy) + f(y) = 2 + 4 + 3 = 9$$

Jadi fungsi f adalah pelabelan super sisi ajaib pada G . Pelabelan pada graph G sehingga diperoleh pelabelan super sisi ajaib yang dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 2.32 Pelabelan Super Sisi Ajaib

Jika pelabelan itu termasuk *super magic labeling* maka pelabelan tersebut pasti *edge magic total labeling* tetapi pernyataan ini tidak berlaku sebaliknya.

2.10 Hubungan Manusia dengan Tuhan

Mempelajari matematika yang sesuai dengan paradigma *ulul albab*, tidak cukup hanya berbekal kemampuan intelektual semata, tetapi perlu didukung secara bersamaan dengan kemampuan emosional dan spiritual. Pola pikir deduktif dan logis dalam matematika juga bergantung pada kemampuan intuitif dan imajinatif serta mengembangkan pendekatan rasionalis, empiris, dan logis (Abdusysyahir, 2007:24). Sebagaimana dalam firman Allah SWT dalam surat Shaad ayat 29:

كِتَابٌ أَنْزَلْنَاهُ إِلَيْكَ مُبَارَكٌ لِيَدَّبَّرُوا آيَاتِهِ وَلِيَتَذَكَّرَ أُولُوا الْأَلْبَابِ ﴿٢٩﴾

Artinya: "Ini adalah sebuah Kitab yang kami turunkan kepadamu penuh dengan berkah supaya mereka memperhatikan ayat-ayatnya dan supaya mendapat pelajaran orang-orang yang mempunyai fikiran (Q. S. Shaad: 29).

Secara umum beberapa konsep dari disiplin ilmu telah dijelaskan dalam Al-Qur'an. salah satunya adalah matematika. Konsep dari disiplin ilmu matematika serta berbagai cabangnya yang ada dalam Al-Qur'an di antaranya adalah masalah logika, pemodelan, statistik, teori graf, dan lain-lain.

Pada dasarnya manusia merupakan salah satu makhluk atau ciptaan Allah yang sempurna karena mereka diberi nafsu, akal dan indera-indera yang dapat dimanfaatkan oleh manusia. Interaksi-interaksi yang terjadi pun sangat beragam walaupun pada akhirnya akan kembali pada yang mencipta mereka. Dalam kehidupan sehari-hari manusia sering lupa akan pencipta-Nya dan sering kali tidak melaksanakan perintah-Nya dan tidak meninggalkan larangan-Nya. Padahal Allah telah memperingatkan manusia dengan firman-Nya bahwa manusia harus berada pada jalan yang benar yakni menjalankan perintah-Nya dan menjauhi larangan-Nya. Dalam Al Qur'an surat al-An'am ayat 153 dijelaskan bahwa:

وَأَنَّ هَذَا صِرَاطِي مُسْتَقِيمًا فَاتَّبِعُوهُ ۖ وَلَا تَتَّبِعُوا السُّبُلَ فَتَفَرَّقَ بِكُمْ عَنْ سَبِيلِهِ ۚ ذَٰلِكُمْ وَصَّاكُم بِهِ لَعَلَّكُمْ تَتَّقُونَ ﴿١٥٣﴾

Artinya: "Dan bahwa (yang Kami perintahkan ini) adalah jalanKu yang lurus, maka ikutlah dia, dan janganlah kamu mengikuti jalan-jalan (yang lain), karena jalan-jalan itu mencerai beraikan kamu dari jalan-Nya. Yang demikian itu diperintahkan Allah agar kamu bertakwa". (QS. Al An'am: 153)

Dan dalam surat Asy-Syuura ayat 13 Allah juga megaskan:

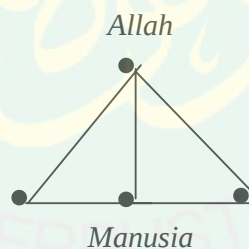
شَرَعَ لَكُمْ مِنَ الدِّينِ مَا وَصَّىٰ بِهِ نُوحًا وَالَّذِي أَوْحَيْنَا إِلَيْكَ وَمَا وَصَّيْنَا بِهِ إِبْرَاهِيمَ وَمُوسَىٰ وَعِيسَىٰ أَنْ أَقِيمُوا الدِّينَ وَلَا تَتَفَرَّقُوا فِيهِ ۚ كَبُرَ عَلَى الْمُشْرِكِينَ مَا تَدْعُوهُمْ إِلَيْهِ ۚ اللَّهُ يَجْتَبِي إِلَيْهِ مَنْ يَشَاءُ وَيَهْدِي إِلَيْهِ مَنْ يُنِيبُ ﴿١٣﴾

Artinya: "Dia telah mensyari'atkan bagi kamu tentang agama apa yang telah diwasiatkan-Nya kepada Nuh dan apa yang telah Kami wahyukan kepadamu dan apa yang telah Kami wasiatkan kepada Ibrahim, Musa dan Isa Yaitu: Tegakkanlah agama[1340] dan janganlah kamu berpecah belah tentangnya. Amat berat bagi orang-orang musyrik agama yang kamu seru mereka kepadanya. Allah menarik kepada

agama itu orang yang dikehendaki-Nya dan memberi petunjuk kepada (agama)-Nya orang yang kembali (kepada-Nya).(QS. Asy-Syuura: 13)

Dalam ayat ini bagaimana hubungan antara Allah dengan hambanya dan juga hubungan sesama hamba yang terjalin, *Hablun min Allah wa Hablun min An-Nas*. Ali bin Abi Thalha menyatakan dari Ibnu ‘Abbas, ia berkata: “Allah memerintahkan orang-orang yang beriman untuk senantiasa berjamaah (bersatu) dan melarang mereka berpecah-belah, dan Allah memberitahukan kepada mereka bahwa orang-orang sebelum mereka binasa akibat pertengkaran dan pertentangan mengenai agama Allah. (Abdullah, 2003: 328).

Sehingga dengan demikian, hal ini menunjukkan adanya suatu hubungan atau keterkaitan antara Allah dengan hamba-Nya. Maka dapat di asumsikan bagaimana hubungan antara Allah dengan hambanya dan juga hubungan sesama hamba yang terjalin, *Hablun min Allah wa Hablun min An-Nas*.



Gambar 2.33 Hubungan antara Allah dengan Hamba-Nya serta Sesama Hamba

Hal ini dikuatkan oleh firman Allah dalam Al Qur'an surat Ali Imran ayat 112 yaitu:

ضُرِبَتْ عَلَيْهِمُ الذَّلِيلَةُ أَيْنَ مَا تُقِفُوا إِلَّا بِحَبْلٍ مِّنَ اللَّهِ وَحَبْلِ مِّنَ النَّاسِ وَبَاءُ وَبِغَضَبٍ
 مِّنَ اللَّهِ وَضُرِبَتْ عَلَيْهِمُ الْمَسْكَنَةُ ذَٰلِكَ بِأَنَّهُمْ كَانُوا يَكْفُرُونَ بِآيَاتِ اللَّهِ وَيَقْتُلُونَ
 الْأَنْبِيَاءَ بِغَيْرِ حَقٍّ ذَٰلِكَ بِمَا عَصَوْا وَكَانُوا يَعْتَدُونَ ﴿١١٢﴾

Artinya: "Mereka diliputi kehinaan di mana saja mereka berada, kecuali jika mereka berpegang kepada tali (agama) Allah dan tali (perjanjian) dengan manusia, dan mereka kembali mendapat kemurkaan dari Allah dan mereka diliputi kerendahan. Yang demikian itu, karena mereka kafir kepada ayat-ayat Allah dan membunuh para nabi tanpa alasan yang benar. Yang demikian itu, disebabkan mereka durhaka dan melampaui batas". (QS. Ali Imran: 112).

Allah SWT. memerintahkan agar setiap manusia menyambung hubungan baik dengan orang fakir, tetangga, kerabat dan sanak famili. Apabila manusia memutuskan apa yang diperintahkan oleh Allah untuk dihubungkan, maka ikatan sosial masyarakat akan hancur berantakan, kerusakan menyebar di setiap tempat, kekacauan terjadi dimana-mana.

Menurut Al-Imam Abul Fida Ismail Ibnu Kasir dalam kitabnya Tafsir Ibnu Kasir menyatakan bahwa Allah menetapkan kehinaan dan rendah diri pada diri mereka di mana pun mereka berada. Sehingga hubungan Tuhan dengan hambannya terjalin. (Imam Abul Fida Isma'il, 2000: 94).

Bagaimana hubungan antara Allah dengan hambanya dan juga hubungan sesama hamba yang terjalin, *Hablun min Allah wa Hablun min An-Nas*. Sehingga dengan demikian, hal ini menunjukkan adanya suatu hubungan atau keterkaitan antara manusia dengan manusia. Hal ini dikuatkan oleh firman Allah dalam Al Qur'an surat Al Hujurat ayat 10 bahwa dalam ayat tersebut disebutkan bahwa

umat manusia yang beriman itu bersaudara. Sehingga mereka harus menjalin hubungan yang baik, rukun antara sesama umat. Ayat tersebut yaitu:

﴿إِنَّمَا الْمُؤْمِنُونَ إِخْوَةٌ فَأَصْلَحُوا بَيْنَ أَخَوِيكُمْ وَاتَّقُوا اللَّهَ لَعَلَّكُمْ تُرْحَمُونَ﴾

Artinya: "Orang-orang beriman itu sesungguhnya bersaudara. Sebab itu damaikanlah (perbaikilah hubungan) antara kedua saudaramu itu dan takutlah terhadap Allah, supaya kamu mendapat rahmat" (Q. S. Al-Hujurat: 10).

Sehingga dengan demikian, hal ini menunjukkan adanya suatu hubungan atau keterkaitan antara manusia dengan manusia, karena semua orang mukmin dipandang sebagai suatu keluarga, sebab mereka semua mempunyai asas tunggal, yaitu iman.

Dalam ayat-ayat ini Allah menjelaskan bagaimana para mukmin mendamaikan dua golongan yang bersengketa dan menyuruh para mukmin memerangi golongan yang kembali membuat aniaya (zalim) sesudah diadakan perdamaian, sehingga dengan demikian mereka bisa kembali kepada perdamaian yang mereka langgar.

Perdamaian, sebagaimana wajib kita lakukan antar dua golongan yang bermusuhan, begitu pula antara dua orang bersaudara yang bersengketa. Pada akhirnya, Allah menyuruh kita bertakwa kepada-Nya dan mengakui hukum-Nya. (Muhammad Hasbi, 1987: 3919).

BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibahas bagaimana cara menentukan pelabelan super sisi ajaib pada graf *Caterpillar* tanpa kepala dan ekor yang mempunyai n badan $4n$ kaki dan dimana n adalah bilangan asli.

Untuk menunjukkan pelabelan super sisi ajaib pada graf *Caterpillar* tanpa kepala dan ekor yang mempunyai 4 kaki pada tiap badan, dengan n bilangan asli ganjil, maka langkah yang akan ditentukan meliputi:

1. Memberikan contoh graf *Caterpillar* tanpa kepala dan ekor yang mempunyai 4 kaki pada tiap badan dengan n bilangan asli ganjil (dalam skripsi ini n yang diambil hanya sampai 5).
2. Memberikan pelabelan dengan bilangan asli.
3. Melakukan pengecekan dengan mendiskripsikan pola rumus yang cocok.

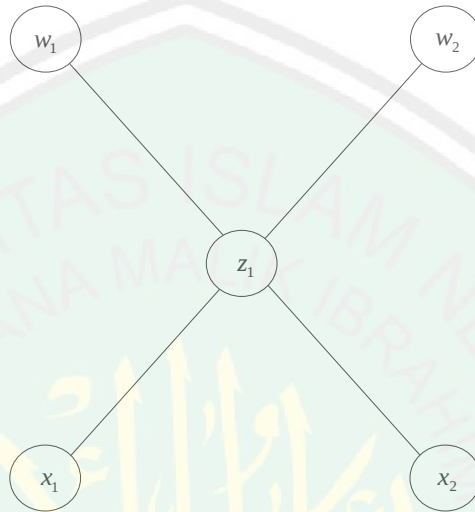
Dalam pembahasan ini penulis memulai dari $n = 1$ pada graf *Caterpillar* tanpa kepala dan ekor yang mempunyai 4 kaki pada tiap badan dan dimana n adalah bilangan asli ganjil.

3.1 Pelabelan Super Sisi Ajaib Pada Graf *Caterpillar* Cp_n (n bilangan asli ganjil)

3.1.1 Graf *Caterpillar* Cp_n , dimana $n = 1$

Langkah I

Pelabelan super sisi ajaib pada graf *Caterpillar* tanpa kepala dan ekor yang mempunyai 1 badan, 4 kaki dan 4 sisi, sehingga dapat dilakukan seperti pada gambar graf *Caterpillar* tanpa kepala dan ekor adalah sebagai berikut:



Gambar 3.1 Penotasian Titik dan Sisi Graf *Caterpillar* Cp_1

Langkah II

$$\text{Misal } A = \{w_1, w_2, z_1, x_1, x_2, w_1z_1, w_2z_1, x_1z_1, x_2z_1\}$$

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

Selanjutnya didefinisikan fungsi f dari A ke B yaitu:

w_1	→	1
w_2	→	2
x_1	→	3
x_2	→	4
z_1	→	5
x_1z_1	→	6
x_2z_1	→	7
w_2z_1	→	8
w_1z_1	→	9

Gambar 3.2 Fungsi Bijektif Graf Cp_1

Jika pelabelan tersebut di atas adalah fungsi f , maka pada graf Cp_1 fungsi f dapat dinyatakan bahwa:

$$\begin{aligned} f(w_1) &= 1 & f(z_1x_2) &= 6 \\ f(w_2) &= 2 & f(z_1x_1) &= 7 \\ f(x_1) &= 3 & f(z_1w_2) &= 8 \\ f(x_2) &= 4 & f(z_1w_1) &= 9 \\ f(z_1) &= 5 \end{aligned}$$

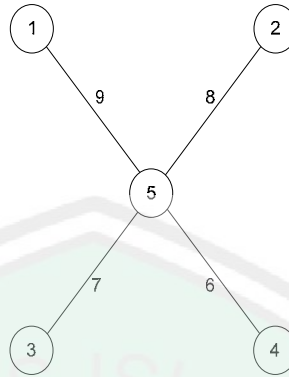
Setelah diberikan label pada masing-masing titik dan sisi kemudian menjumlahkan semua label titik dan sisi, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} f(w_1) + f(z_1w_1) + f(z_1) &= 1 + 9 + 5 = 15 \\ f(w_2) + f(z_1w_2) + f(z_1) &= 2 + 8 + 5 = 15 \\ f(x_1) + f(z_1x_1) + f(z_1) &= 3 + 7 + 5 = 15 \\ f(x_2) + f(z_1x_2) + f(z_1) &= 4 + 6 + 5 = 15 \end{aligned}$$

Dari penjumlahan semua label titik dan sisi di atas diperoleh suatu konstanta k yang sama pada setiap sisinya dan terlihat juga bahwa masing-masing himpunan titik dipasangkan ke himpunan $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Dengan demikian, dari penjumlahan semua label titik-titik dan sisi-sisi di atas diperoleh nilai yang sama yaitu konstanta $k = 15$.

Langkah III

Memberikan pelabelan pada masing-masing kaki, sisi dan badan dengan bilangan asli pada graf *Caterpillar* tanpa kepala dan ekor beserta labelnya nampak pada gambar berikut:



Gambar 3.3 Pelabelan Titik dan Sisi Graf *Caterpillar* Cp_1

Langkah IV

Untuk indeks titik ganjil pada posisi ganjil dapat ditemukan pola sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f(w_1) &= \left(\frac{5 \cdot 1 - 1}{4} \right) \\ &= \frac{4}{4} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x_1) &= \left(\frac{5 \cdot 1 + 7}{4} \right) \\ &= \left(\frac{12}{4} \right) = 3 \end{aligned}$$

Sehingga, dapat disimpulkan bahwa:

$$f(w_i) = \left(\frac{5i - 1}{4} \right)$$

dan

$$f(x_i) = \left(\frac{5i + 7}{4} \right)$$

Untuk indeks titik genap pada posisi ganjil dapat ditemukan pola sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f(w_2) &= \left(\frac{5 \cdot 2 - 2}{4} \right) \\ &= \left(\frac{8}{4} \right) = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x_2) &= \left(\frac{5 \cdot 2 + 6}{4} \right) \\ &= \left(\frac{16}{4} \right) = 4 \end{aligned}$$

Sehingga, dapat disimpulkan bahwa:

$$f(w_{i+1}) = \left(\frac{5(i+1) - 2}{4} \right)$$

dan

$$f(x_{i+1}) = \left(\frac{5(i+1) + 6}{4} \right)$$

Untuk indeks pada badan dapat ditemukan pola sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f(z_1) &= \left(\frac{2 \cdot 1 + 2 \cdot 1}{4} \right) (5) \\ &= 1(5) = 5 \end{aligned}$$

Sehingga, dapat disimpulkan bahwa:

$$f(z_i) = \left(\frac{2n + 2i}{4} \right) (5)$$

Untuk indeks titik genap pada sisi ganjil didapatkan pola sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f(z_1 w_1) &= \frac{40 \cdot 1 - 10 \cdot 1 + 6}{4} \\ &= \frac{36}{4} = 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(z_1 x_1) &= \frac{40 \cdot 1 - 10 \cdot 1 - 2}{2} \\ &= \frac{28}{4} = 7 \end{aligned}$$

Sehingga, dapat disimpulkan bahwa:

$$f(z_i w_i) = \frac{40n - 10i + 6}{4}$$

dan

$$f(z_i x_i) = \frac{40n - 10i - 2}{4}$$

Untuk indeks pada sisi genap didapatkan pola sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f(z_1 w_2) &= \frac{40 \cdot 1 - 10 \cdot 2 + 12}{4} \\ &= \frac{32}{4} = 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(z_1 x_2) &= \frac{40 \cdot 1 - 10 \cdot 2 + 4}{4} \\ &= \frac{24}{4} = 6 \end{aligned}$$

Sehingga, dapat disimpulkan bahwa:

$$f(z_i w_{i+1}) = \frac{40n - 10(i+1) + 12}{4}$$

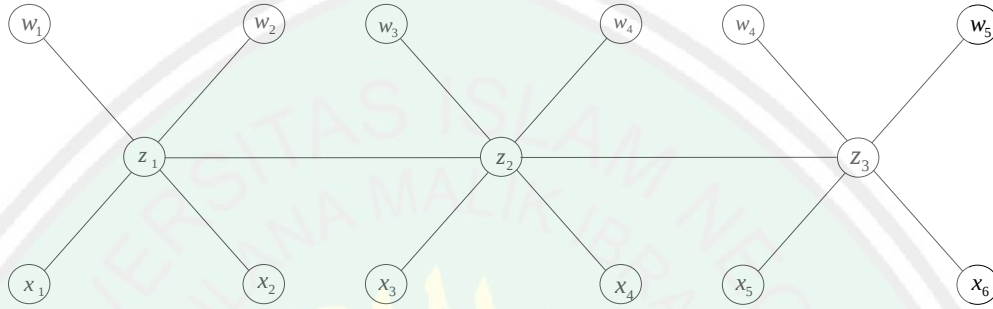
dan

$$f(z_i x_{i+1}) = \frac{40n - 10(i+1) + 4}{4}$$

3.1.2 Graf *Caterpillar* Cp_n , dimana $n = 3$

Langkah I

Pelabelan super sisi ajaib pada graf *Caterpillar* tanpa kepala dan ekor yang mempunyai 3 badan, 12 kaki dan 14 sisi, sehingga dapat dilakukan seperti pada gambar graf *Caterpillar* tanpa kepala dan ekor adalah sebagai berikut:



Gambar 3.4 Penotasian Titik dan Sisi Graf *Caterpillar* Cp_3

Langkah II

Misal $A = \{w_1, w_2, \dots, w_7, z_1, z_2, z_3, x_1, x_2, \dots, x_7, w_1z_1, \dots, w_7z_3, x_1z_1, \dots, x_7z_3\}$

$B = \{1, 2, 3, \dots, 29\}$

Selanjutnya di definisikan f dari A ke B yaitu:

$f(w_1) = 1$	$f(x_1) = 3$	$f(z_1) = 10$
$f(w_2) = 2$	$f(x_2) = 4$	$f(z_2) = 5$
$f(w_3) = 11$	$f(x_3) = 13$	$f(z_3) = 15$
$f(w_4) = 12$	$f(x_4) = 14$	
$f(w_5) = 6$	$f(x_5) = 8$	
$f(w_6) = 7$	$f(x_6) = 9$	
$f(z_1w_1) = 29$	$f(z_1x_1) = 27$	$f(z_1z_2) = 25$

$$f(z_1 w_2) = 28$$

$$f(z_1 x_2) = 26$$

$$f(z_2 z_3) = 20$$

$$f(z_2 w_3) = 24$$

$$f(z_2 x_3) = 22$$

$$f(z_2 w_4) = 23$$

$$f(z_2 x_4) = 21$$

$$f(z_3 w_5) = 19$$

$$f(z_3 x_5) = 17$$

$$f(z_3 w_6) = 18$$

$$f(z_3 x_6) = 16$$

Setelah diberikan label pada masing-masing titik dan sisi kemudian menjumlahkan semua label titik dan sisi, sehingga diperoleh:

$$f(w_1) + f(z_1 w_1) + f(z_1) = 1 + 29 + 10 = 40$$

$$f(w_2) + f(z_1 w_2) + f(z_1) = 2 + 28 + 10 = 40$$

$$f(w_3) + f(z_2 w_3) + f(z_2) = 11 + 24 + 5 = 40$$

$$f(w_4) + f(z_2 w_4) + f(z_2) = 12 + 23 + 5 = 40$$

$$f(w_5) + f(z_3 w_5) + f(z_3) = 6 + 19 + 15 = 40$$

$$f(w_6) + f(z_3 w_6) + f(z_3) = 7 + 18 + 15 = 40$$

$$f(x_1) + f(z_1 x_1) + f(z_1) = 3 + 27 + 10 = 40$$

$$f(x_2) + f(z_1 x_2) + f(z_1) = 4 + 26 + 10 = 40$$

$$f(x_3) + f(z_2 x_3) + f(z_2) = 13 + 22 + 5 = 40$$

$$f(x_4) + f(z_2 x_4) + f(z_2) = 14 + 21 + 5 = 40$$

$$f(x_5) + f(z_3 x_5) + f(z_3) = 8 + 17 + 15 = 40$$

$$f(x_6) + f(z_3 x_6) + f(z_3) = 9 + 16 + 15 = 40$$

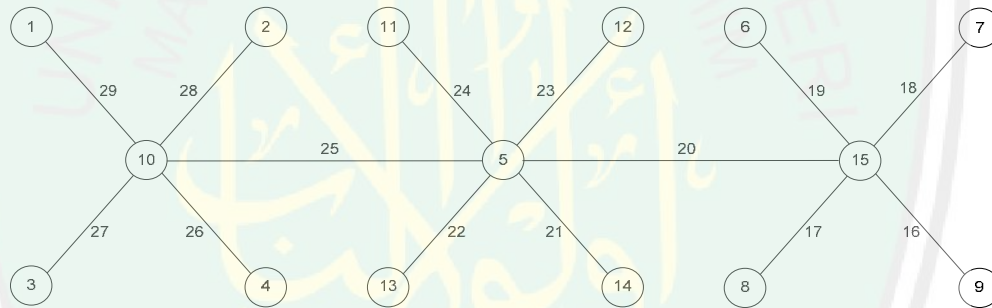
$$f(z_1) + f(z_1 z_2) + f(z_2) = 10 + 25 + 5 = 40$$

$$f(z_2) + f(z_2 z_3) + f(z_3) = 5 + 20 + 15 = 40$$

Dari penjumlahan semua label titik dan sisi di atas diperoleh suatu konstanta k yang sama pada setiap sisinya dan terlihat juga bahwa masing-masing himpunan titik dipasangkan ke himpunan $\{1, 2, 3, \dots, 29\}$. Dengan demikian, dari penjumlahan semua label titik-titik dan sisi-sisi di atas diperoleh nilai yang sama yaitu konstanta $k = 40$.

Langkah III

Memberikan pelabelan pada masing-masing kaki, sisi dan badan dengan bilangan asli pada graf *Caterpillar* tanpa kepala dan ekor beserta labelnya nampak pada gambar berikut:



Gambar 3.5 Pelabelan Titik dan Sisi Graf *Caterpillar* Cp_3

Langkah IV

Untuk indeks titik ganjil pada posisi ganjil dapat ditemukan pola sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f(w_1) &= \left(\frac{5 \cdot 1 - 1}{4} \right) \\ &= \frac{4}{4} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(w_5) &= \left(\frac{5 \cdot 5 - 1}{4} \right) \\ &= \left(\frac{24}{4} \right) = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x_1) &= \left(\frac{5 \cdot 1 + 7}{4} \right) \\ &= \left(\frac{12}{4} \right) = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x_5) &= \left(\frac{5 \cdot 5 + 7}{4} \right) \\ &= \left(\frac{32}{4} \right) = 8 \end{aligned}$$

Sehingga, dapat disimpulkan bahwa:

$$f(w_i) = \left(\frac{5i-1}{4} \right)$$

dan

$$f(x_i) = \left(\frac{5i+7}{4} \right)$$

Untuk indeks titik ganjil pada posisi genap dapat ditemukan pola sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f(w_3) &= \left(\frac{30+15-1}{4} \right) \\ &= \left(\frac{44}{4} \right) = 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x_3) &= \left(\frac{30+15+7}{4} \right) \\ &= \left(\frac{52}{4} \right) = 13 \end{aligned}$$

Sehingga, dapat disimpulkan bahwa:

$$f(w_i) = \left(\frac{10n+5i-1}{4} \right)$$

dan

$$f(x_i) = \left(\frac{10n + 5i + 7}{4} \right)$$

Untuk indeks titik genap pada posisi ganjil dapat ditemukan pola sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f(w_2) &= \left(\frac{5 \cdot 2 - 2}{4} \right) \\ &= \left(\frac{8}{4} \right) = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(w_6) &= \left(\frac{5 \cdot 6 - 2}{4} \right) \\ &= \left(\frac{28}{4} \right) = 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x_2) &= \left(\frac{5 \cdot 2 + 6}{4} \right) \\ &= \left(\frac{16}{4} \right) = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x_6) &= \left(\frac{5 \cdot 6 + 6}{4} \right) \\ &= \left(\frac{36}{4} \right) = 9 \end{aligned}$$

Sehingga, dapat disimpulkan bahwa:

$$f(w_{i+1}) = \left(\frac{5(i+1) - 2}{4} \right)$$

dan

$$f(x_{i+1}) = \left(\frac{5(i+1) + 6}{4} \right)$$

Untuk indeks titik genap pada posisi genap dapat ditemukan pola sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f(w_4) &= \left(\frac{10 \cdot 3 + 5 \cdot 4 - 2}{4} \right) \\ &= \left(\frac{48}{4} \right) = 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x_4) &= \left(\frac{10 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + 6}{4} \right) \\ &= \left(\frac{56}{4} \right) = 14 \end{aligned}$$

Sehingga, dapat disimpulkan bahwa:

$$f(w_{i+1}) = \left(\frac{10n + 5(i+1) - 2}{4} \right)$$

dan

$$f(x_{i+1}) = \left(\frac{10n + 5(i+1) + 6}{4} \right)$$

Untuk indeks ganjil pada badan dapat ditemukan pola sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f(z_1) &= \left(\frac{2 \cdot 3 + 2 \cdot 1}{4} \right) (5) \\ &= 2(5) = 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(z_3) &= \left(\frac{2 \cdot 3 + 2 \cdot 3}{4} \right) (5) \\ &= 3(5) = 15 \end{aligned}$$

Sehingga, dapat disimpulkan bahwa:

$$f(z_i) = \left(\frac{2n + 2i}{4} \right) (5)$$

Untuk indeks genap pada badan dapat ditemukan pola sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f(z_2) &= \left(\frac{10 \cdot 2}{4} \right) \\ &= 5 \end{aligned}$$

Sehingga, dapat disimpulkan bahwa:

$$f(z_{i+1}) = \left(\frac{10(i+1)}{4} \right)$$

Untuk indeks titik genap pada sisi ganjil didapatkan pola sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f(z_1 w_1) &= \frac{40 \cdot 3 - 10 \cdot 1 + 6}{4} \\ &= \frac{116}{4} = 29 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(z_2 w_3) &= \frac{40 \cdot 3 - 10 \cdot 3 + 6}{4} \\ &= \frac{96}{4} = 24 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(z_3 w_5) &= \frac{40 \cdot 3 - 10 \cdot 5 + 6}{4} \\ &= \frac{76}{4} = 19 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(z_1 x_1) &= \frac{40 \cdot 3 - 10 \cdot 1 - 2}{4} \\ &= \frac{108}{4} = 27 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(z_2 x_3) &= \frac{40 \cdot 3 - 10 \cdot 3 - 2}{4} \\ &= \frac{88}{4} = 22 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(z_3 x_5) &= \frac{40 \cdot 3 - 10 \cdot 5 - 2}{4} \\ &= \frac{68}{4} = 17 \end{aligned}$$

Sehingga, dapat disimpulkan bahwa:

$$f(z_i w_i) = \frac{40n - 10i + 6}{4}$$

dan

$$f(z_i x_i) = \frac{40n - 10i - 2}{4}$$

Untuk indeks pada sisi genap didapatkan pola sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f(z_1 w_2) &= \frac{40 \cdot 3 - 10 \cdot 2 + 12}{4} \\ &= \frac{112}{4} = 28 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(z_2 w_4) &= \frac{40 \cdot 3 - 10 \cdot 4 + 12}{4} \\ &= \frac{92}{4} = 23 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(z_3 w_6) &= \frac{40 \cdot 3 - 10 \cdot 6 + 12}{4} \\ &= \frac{72}{4} = 18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(z_1 x_2) &= \frac{40 \cdot 3 - 10 \cdot 2 + 4}{4} \\ &= \frac{104}{4} = 26 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(z_2 x_4) &= \frac{40 \cdot 3 - 10 \cdot 4 + 4}{4} \\ &= \frac{84}{4} = 21 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(z_3 x_6) &= \frac{40 \cdot 3 - 10 \cdot 6 + 4}{4} \\ &= \frac{64}{4} = 16 \end{aligned}$$

Sehingga, dapat disimpulkan bahwa:

$$f(z_i w_{i+1}) = \frac{40n - 10(i+1) + 12}{4}$$

dan

$$f(z_i x_{i+1}) = \frac{40n - 10(i+1) + 4}{4}$$

Untuk indeks pada sisi didapatkan pola sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f(z_1 z_2) &= \frac{40 \cdot 3 - 20 \cdot 1}{4} \\ &= \frac{100}{4} \\ &= 25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(z_2 z_3) &= \frac{40 \cdot 3 - 20 \cdot 2}{4} \\ &= \frac{80}{4} \\ &= 20 \end{aligned}$$

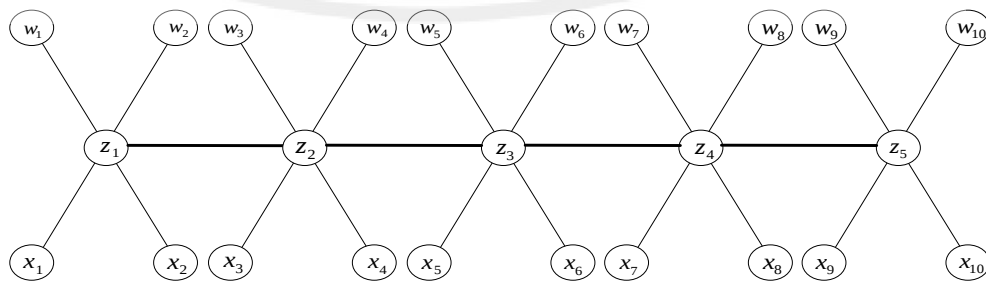
Sehingga, dapat disimpulkan bahwa:

$$f(z_i z_{i+1}) = \frac{40n - 20i}{4}$$

3.1.3 Graf *Caterpillar* Cp_n , dimana $n = 5$

Langkah I

Pelabelan super sisi ajaib pada graf *Caterpillar* tanpa kepala dan ekor yang mempunyai 5 badan, 20 kaki dan 24 sisi, sehingga dapat dilakukan seperti pada gambar graf *Caterpillar* tanpa kepala dan ekor adalah sebagai berikut:



Gambar 3.6 Penotasian Titik dan Sisi Graf *Caterpillar* Cp_5

Langkah II

Misal $A = \{w_1, w_2, \dots, w_{10}, z_1, z_2, \dots, z_5, x_1, x_2, \dots, x_{10}, w_1 z_1, \dots, w_{10} z_5, x_1 z_1, \dots, x_{10} z_5\}$

$$B = \{1, 2, 3, \dots, 49\}$$

Selanjutnya di definisikan f dari A ke B yaitu:

$$f(w_1) = 1$$

$$f(x_1) = 3$$

$$f(z_1) = 15$$

$$f(w_2) = 2$$

$$f(x_2) = 4$$

$$f(z_2) = 5$$

$$f(w_3) = 16$$

$$f(x_3) = 18$$

$$f(z_3) = 20$$

$$f(w_4) = 17$$

$$f(x_4) = 19$$

$$f(z_4) = 10$$

$$f(w_5) = 6$$

$$f(x_5) = 8$$

$$f(z_5) = 25$$

$$f(w_6) = 7$$

$$f(x_6) = 9$$

$$f(w_7) = 21$$

$$f(x_7) = 23$$

$$f(w_8) = 22$$

$$f(x_8) = 24$$

$$f(w_9) = 11$$

$$f(x_9) = 13$$

$$f(w_{10}) = 12$$

$$f(x_{10}) = 14$$

$$f(z_1 w_1) = 49$$

$$f(z_1 x_1) = 47$$

$$f(z_1 z_2) = 45$$

$$f(z_1 w_2) = 48$$

$$f(z_1 x_2) = 46$$

$$f(z_2 z_3) = 40$$

$$f(z_2 w_3) = 44$$

$$f(z_2 x_3) = 42$$

$$f(z_3 z_4) = 35$$

$$f(z_2 w_4) = 43$$

$$f(z_2 x_4) = 41$$

$$f(z_3 z_5) = 30$$

$$f(z_3 w_5) = 39$$

$$f(z_3 x_5) = 37$$

$$f(z_3 w_6) = 38$$

$$f(z_3 x_6) = 36$$

$$f(z_4 w_7) = 34$$

$$f(z_4 x_7) = 32$$

$$f(z_4 w_8) = 33$$

$$f(z_4 x_8) = 31$$

$$f(z_5 w_9) = 29$$

$$f(z_5 x_9) = 27$$

$$f(z_5 w_{10}) = 28$$

$$f(z_5 x_{10}) = 26$$

Setelah diberikan label pada masing-masing titik dan sisi kemudian menjumlahkan semua label titik dan sisi, sehingga diperoleh:

$$f(w_1) + f(z_1 w_1) + f(z_1) = 1 + 49 + 15 = 65$$

$$f(w_2) + f(z_1 w_2) + f(z_1) = 2 + 48 + 15 = 65$$

$$f(w_3) + f(z_2 w_3) + f(z_2) = 16 + 44 + 5 = 65$$

$$f(w_4) + f(z_2 w_4) + f(z_2) = 17 + 43 + 5 = 65$$

$$f(w_5) + f(z_3 w_5) + f(z_3) = 6 + 39 + 20 = 65$$

$$f(w_6) + f(z_3 w_6) + f(z_3) = 7 + 38 + 20 = 65$$

$$f(w_7) + f(z_4 w_7) + f(z_4) = 21 + 34 + 10 = 65$$

$$f(w_8) + f(z_4 w_8) + f(z_4) = 22 + 33 + 10 = 65$$

$$f(w_9) + f(z_5 w_9) + f(z_5) = 11 + 29 + 25 = 65$$

$$f(w_{10}) + f(z_5 w_{10}) + f(z_5) = 12 + 28 + 25 = 65$$

$$f(x_1) + f(z_1 x_1) + f(z_1) = 3 + 47 + 15 = 65$$

$$f(x_2) + f(z_1 x_2) + f(z_1) = 4 + 46 + 15 = 65$$

$$f(x_3) + f(z_2 x_3) + f(z_2) = 18 + 42 + 5 = 65$$

$$f(x_4) + f(z_2 x_4) + f(z_2) = 19 + 41 + 5 = 65$$

$$f(x_5) + f(z_3 x_5) + f(z_3) = 8 + 37 + 20 = 65$$

$$f(x_6) + f(z_3 x_6) + f(z_3) = 9 + 36 + 20 = 65$$

$$f(x_7) + f(z_4 x_7) + f(z_4) = 23 + 32 + 10 = 65$$

$$f(x_8) + f(z_4 x_8) + f(z_4) = 24 + 31 + 10 = 65$$

$$f(x_9) + f(z_5 x_9) + f(z_5) = 13 + 27 + 25 = 65$$

$$f(x_{10}) + f(z_5 x_{10}) + f(z_5) = 14 + 26 + 25 = 65$$

$$f(z_1) + f(z_1 z_2) + f(z_2) = 15 + 45 + 5 = 65$$

$$f(z_2) + f(z_2 z_3) + f(z_3) = 5 + 40 + 20 = 65$$

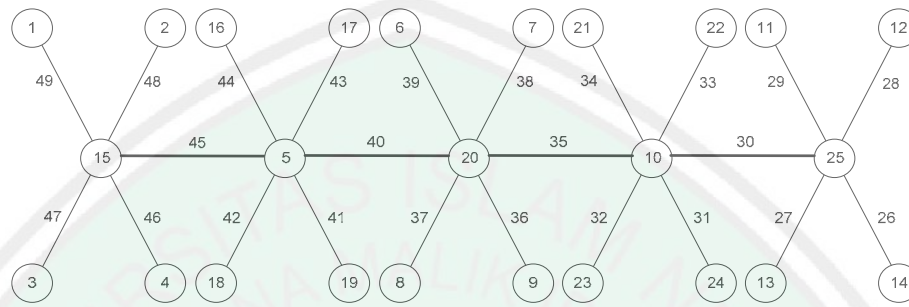
$$f(z_3) + f(z_3 z_4) + f(z_4) = 20 + 35 + 10 = 65$$

$$f(z_4) + f(z_4 z_5) + f(z_5) = 10 + 30 + 25 = 65$$

Dari penjumlahan semua label titik dan sisi di atas diperoleh suatu konstanta k yang sama pada setiap sisinya dan terlihat juga bahwa masing-masing himpunan titik dipasangkan ke himpunan $\{1, 2, 3, \dots, 49\}$. Dengan demikian, dari penjumlahan semua label titik-titik dan sisi-sisi di atas diperoleh nilai yang sama yaitu konstanta $k = 65$.

Langkah III

Memberikan pelabelan pada masing-masing kaki, sisi dan badan dengan bilangan asli pada graf *Caterpillar* tanpa kepala dan ekor beserta labelnya nampak pada gambar berikut:



Gambar 3.7 Pelabelan Titik dan Sisi Graf *Caterpillar* Cp_5

Langkah IV

Untuk indeks titik ganjil pada posisi ganjil dapat ditemukan pola sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f(w_1) &= \left(\frac{5 \cdot 1 - 1}{4} \right) \\ &= \frac{4}{4} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(w_5) &= \left(\frac{5 \cdot 5 - 1}{4} \right) \\ &= \left(\frac{24}{4} \right) = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(w_9) &= \left(\frac{5 \cdot 9 - 1}{4} \right) \\ &= \left(\frac{44}{4} \right) = 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x_1) &= \left(\frac{5 \cdot 1 + 7}{4} \right) \\ &= \left(\frac{12}{4} \right) = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x_5) &= \left(\frac{5 \cdot 5 + 7}{4} \right) \\ &= \left(\frac{32}{4} \right) = 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x_9) &= \left(\frac{5 \cdot 9 + 7}{4} \right) \\ &= \left(\frac{52}{4} \right) = 13 \end{aligned}$$

Sehingga, dapat disimpulkan bahwa:

$$f(w_i) = \left(\frac{5i-1}{4} \right)$$

dan

$$f(x_i) = \left(\frac{5i+7}{4} \right)$$

Untuk indeks titik ganjil pada posisi genap dapat ditemukan pola sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f(w_3) &= \left(\frac{10 \cdot 5 + 5 \cdot 3 - 1}{4} \right) \\ &= \left(\frac{64}{4} \right) = 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(w_7) &= \left(\frac{10 \cdot 5 + 5 \cdot 7 - 1}{4} \right) \\ &= \left(\frac{84}{4} \right) = 21 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x_3) &= \left(\frac{10 \cdot 5 + 5 \cdot 3 + 7}{4} \right) \\ &= \left(\frac{72}{4} \right) \\ &= 18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(x_7) &= \left(\frac{10 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + 7}{4} \right) \\
 &= \left(\frac{92}{4} \right) \\
 &= 23
 \end{aligned}$$

Sehingga, dapat disimpulkan bahwa:

$$f(w_i) = \left(\frac{10n + 5i - 1}{4} \right)$$

dan

$$f(x_i) = \left(\frac{10n + 5i + 7}{4} \right)$$

Untuk indeks titik genap pada posisi ganjil dapat ditemukan pola sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 f(w_2) &= \left(\frac{5 \cdot 2 - 2}{4} \right) \\
 &= \left(\frac{8}{4} \right) = 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(w_6) &= \left(\frac{5 \cdot 6 - 2}{4} \right) \\
 &= \left(\frac{28}{4} \right) = 7
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(w_{10}) &= \left(\frac{5 \cdot 10 - 2}{4} \right) \\
 &= \left(\frac{48}{4} \right) = 12
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(x_2) &= \left(\frac{5 \cdot 2 + 6}{4} \right) \\
 &= \left(\frac{16}{4} \right) = 4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x_6) &= \left(\frac{5 \cdot 6 + 6}{4} \right) \\ &= \left(\frac{36}{4} \right) = 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x_{10}) &= \left(\frac{5 \cdot 10 + 6}{4} \right) \\ &= \left(\frac{56}{4} \right) = 14 \end{aligned}$$

Sehingga, dapat disimpulkan bahwa:

$$f(w_{i+1}) = \left(\frac{5(i+1) - 2}{4} \right)$$

dan

$$f(x_{i+1}) = \left(\frac{5(i+1) + 6}{4} \right)$$

Untuk indeks titik genap pada posisi genap dapat ditemukan pola sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f(w_4) &= \left(\frac{10 \cdot 5 + 5 \cdot 4 - 2}{4} \right) \\ &= \left(\frac{68}{4} \right) = 17 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(w_8) &= \left(\frac{10 \cdot 5 + 5 \cdot 8 - 2}{4} \right) \\ &= \left(\frac{88}{4} \right) = 22 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x_4) &= \left(\frac{10 \cdot 5 + 5 \cdot 4 + 6}{4} \right) \\ &= \left(\frac{76}{4} \right) = 19 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(x_8) &= \left(\frac{10 \cdot 5 + 5 \cdot 8 + 6}{4} \right) \\
 &= \left(\frac{96}{4} \right) = 24
 \end{aligned}$$

Sehingga, dapat disimpulkan bahwa:

$$f(w_{i+1}) = \left(\frac{10n + 5(i+1) - 2}{4} \right)$$

dan

$$f(X_{i+1}) = \left(\frac{10n + 5(i+1) + 6}{4} \right)$$

Untuk indeks ganjil pada badan dapat ditemukan pola sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 f(z_1) &= \left(\frac{2 \cdot 5 + 2 \cdot 1}{4} \right) (5) \\
 &= 3(5) = 15
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(z_3) &= \left(\frac{2 \cdot 5 + 2 \cdot 3}{4} \right) (5) \\
 &= 4(5) = 20
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(z_5) &= \left(\frac{2 \cdot 5 + 2 \cdot 5}{4} \right) (5) \\
 &= 5(5) = 25
 \end{aligned}$$

Sehingga, dapat disimpulkan bahwa:

$$f(z_i) = \left(\frac{2n + 2i}{4} \right) (5)$$

Untuk indeks genap pada badan dapat ditemukan pola sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 f(z_2) &= \left(\frac{10 \cdot 2}{4} \right) \\
 &= 5
 \end{aligned}$$

$$f(z_4) = \left(\frac{10 \cdot 4}{4} \right) \\ = 10$$

Sehingga, dapat disimpulkan bahwa:

$$f(z_{i+1}) = \left(\frac{10(i+1)}{4} \right)$$

Untuk indeks pada sisi ganjil didapatkan pola sebagai berikut:

$$f(z_1 w_1) = \frac{40 \cdot 5 - 10 \cdot 1 + 6}{4} \\ = \frac{196}{4} = 49$$

$$f(z_2 w_3) = \frac{40 \cdot 5 - 10 \cdot 3 + 6}{4} \\ = \frac{176}{4} = 44$$

$$f(z_3 w_5) = \frac{40 \cdot 5 - 10 \cdot 5 + 6}{4} \\ = \frac{156}{4} = 39$$

$$f(z_4 w_7) = \frac{40 \cdot 5 - 10 \cdot 7 + 6}{4} \\ = \frac{136}{4} = 34$$

$$f(z_5 w_9) = \frac{40 \cdot 5 - 10 \cdot 9 + 6}{4} \\ = \frac{116}{4} = 29$$

$$f(z_1 x_1) = \frac{40 \cdot 5 - 10 \cdot 1 - 2}{4} \\ = \frac{188}{4} = 47$$

$$\begin{aligned} f(z_2x_3) &= \frac{40 \cdot 5 - 10 \cdot 3 - 2}{4} \\ &= \frac{168}{4} = 42 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(z_3x_5) &= \frac{40 \cdot 5 - 10 \cdot 5 - 2}{4} \\ &= \frac{148}{4} = 37 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(z_4x_7) &= \frac{40 \cdot 5 - 10 \cdot 7 - 2}{4} \\ &= \frac{128}{4} = 32 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(z_5x_9) &= \frac{40 \cdot 5 - 10 \cdot 9 - 2}{4} \\ &= \frac{189}{4} = 27 \end{aligned}$$

Sehingga, dapat disimpulkan bahwa:

$$f(z_iw_i) = \frac{40n - 10i + 6}{4}$$

dan

$$f(z_ix_i) = \frac{40n - 10i - 2}{4}$$

Untuk indeks pada sisi genap didapatkan pola sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f(z_1w_2) &= \frac{40 \cdot 3 - 10 \cdot 2 + 6}{4} \\ &= \frac{192}{4} = 48 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(z_2w_4) &= \frac{40 \cdot 5 - 10 \cdot 4 + 12}{4} \\ &= \frac{172}{4} = 43 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(z_3 w_6) &= \frac{40 \cdot 5 - 10 \cdot 6 + 12}{4} \\ &= \frac{152}{4} = 38 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(z_4 w_8) &= \frac{40 \cdot 5 - 10 \cdot 8 + 12}{4} \\ &= \frac{132}{4} = 33 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(z_5 w_{10}) &= \frac{40 \cdot 5 - 10 \cdot 10 + 12}{4} \\ &= \frac{112}{4} = 28 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(z_1 x_2) &= \frac{40 \cdot 5 - 10 \cdot 2 + 4}{4} \\ &= \frac{184}{4} = 46 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(z_2 x_4) &= \frac{40 \cdot 5 - 10 \cdot 4 + 4}{4} \\ &= \frac{164}{4} = 41 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(z_3 x_6) &= \frac{40 \cdot 5 - 10 \cdot 6 + 4}{4} \\ &= \frac{144}{4} = 36 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(z_4 x_8) &= \frac{40 \cdot 5 - 10 \cdot 8 + 4}{4} \\ &= \frac{124}{4} = 31 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(z_5 x_{10}) &= \frac{40 \cdot 5 - 10 \cdot 10 + 4}{4} \\ &= \frac{104}{4} = 26 \end{aligned}$$

Sehingga, dapat disimpulkan bahwa:

$$f(z_i w_{i+1}) = \frac{40n - 10(i+1) + 12}{4}$$

dan

$$f(z_i x_{i+1}) = \frac{40n - 10(i+1) + 4}{4}$$

Untuk indeks pada sisi didapatkan pola sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f(z_1 z_2) &= \frac{40 \cdot 5 - 20 \cdot 1}{4} \\ &= \frac{180}{4} \\ &= 45 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(z_2 z_3) &= \frac{40 \cdot 5 - 20 \cdot 2}{4} \\ &= \frac{160}{4} \\ &= 40 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(z_3 z_4) &= \frac{40 \cdot 5 - 20 \cdot 3}{4} \\ &= \frac{140}{4} \\ &= 35 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(z_4 z_5) &= \frac{40 \cdot 5 - 20 \cdot 4}{4} \\ &= \frac{120}{4} \\ &= 30 \end{aligned}$$

Sehingga, dapat disimpulkan bahwa:

$$f(z_i z_{i+1}) = \frac{40n - 20i}{4}$$

Berdasarkan pelabelan setiap kaki, sisi dan badan pada graf *Caterpillar* tanpa kepala dan ekor selalu memberikan nilai yang sama untuk nilai k , maka diperoleh teorema sebagai berikut:

Teorema IV:

Setiap graf *Caterpillar* tanpa kepala dan ekor Cp_n dengan n bilangan asli

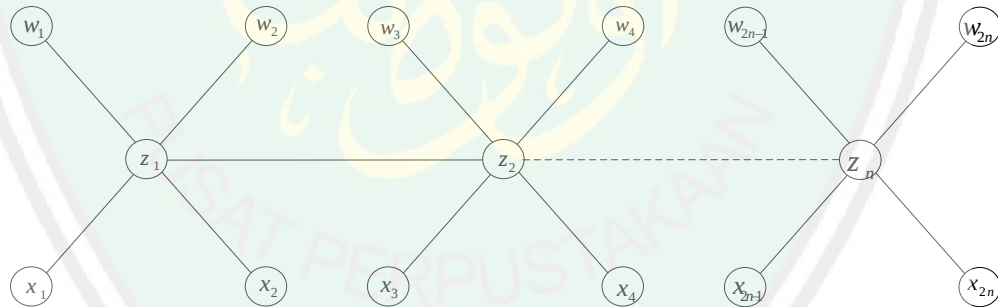
adalah sisi ajaib, dengan konstanta ajaib $k = \frac{50n+10}{4}$

Bukti:

Akan dibuktikan graf *Caterpillar* tanpa kepala dan ekor yang mempunyai 4 kaki pada tiap badan, mempunyai order $5n$ dengan ukuran $5n-1$

Misal himpunan titik adalah $\{w_1, w_2, \dots, w_n, z_1, z_2, \dots, z_n, x_1, x_2, \dots, x_n\}$

dan sisinya adalah $\begin{cases} \{z_i z_{i+1}\} & \text{untuk } i=1, 2, \dots, n-1 \\ \{z_i w_{2i-1}, z_i w_{2i}, z_i x_{2i-1}, z_i x_{2i}\} & \text{untuk } i=1, 2, \dots, n \end{cases}$



Gambar 3.8 Penotasian Titik dan Sisi Graf *Caterpillar* Cp_n

Didefinisikan fungsi f dari $V(G) \cup E(G)$ ke $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ dengan pengaitan sebagai berikut:

$$\text{a. } f(w_i) = \left(\frac{5i-1}{4} \right) \quad \begin{array}{l} \text{untuk } i=1, 5, 9, \dots, 2n-1 \text{ pada } z_j \\ \text{dengan } j=1, 3, 5, 7, \dots, n \end{array}$$

- b. $f(w_{i+1}) = \left(\frac{5(i+1)-2}{4} \right)$ untuk $i=1,5,9,\dots,2n-1$ pada z_j
dengan $j=1,3,5,7,\dots,n$
- c. $f(w_i) = \left(\frac{10n+5i-1}{4} \right)$ untuk $i=3,7,11,\dots,2n-3$ pada z_j
dengan $j=2,4,6,\dots,2n$
- d. $f(w_{i+1}) = \left(\frac{10n+5(i+1)-2}{4} \right)$ untuk $i=3,7,11,\dots,2n-2$ pada z_j
dengan $j=2,4,6,\dots,n-1$
- e. $f(x_i) = \left(\frac{5i+7}{4} \right)$ untuk $i=1,5,9,\dots,2n-1$ pada z_j
dengan $j=1,3,5,7,\dots,n$
- f. $f(x_{i+1}) = \left(\frac{5(i+1)+6}{4} \right)$ untuk $i=1,5,9,\dots,2n-1$ pada z_j
dengan $j=1,3,5,7,\dots,n$
- g. $f(x_i) = \left(\frac{10n+5i+7}{4} \right)$ untuk $i=3,7,11,\dots,2n-3$ pada z_j
dengan $j=2,4,6,\dots,n-1$
- h. $f(x_{i+1}) = \left(\frac{10n+5(i+1)+6}{4} \right)$ untuk $i=3,7,11,\dots,2n-3$ pada z_j
dengan $j=2,4,6,\dots,n-1$
- i. $f(z_i) = \left(\frac{2n+2i}{4} \right)(5)$ untuk $i=1,3,5,7,\dots,n$
- j. $f(z_i) = \left(\frac{10i}{4} \right)$ untuk $i=2,4,6,\dots,n-1$
- k. $f(z_i w_{2i-1}) = \frac{40n-10(2i-1)+6}{4}$ untuk $i=1,2,\dots,n$
- l. $f(z_i w_{2i}) = \frac{40n-10(2i)+12}{4}$ untuk $i=1,2,\dots,n$
- m. $f(z_i x_{2i-1}) = \frac{40n-10(2i-1)-2}{4}$ untuk $i=1,2,\dots,n$
- n. $f(z_i x_{2i}) = \frac{40n-10(2i)+4}{4}$ untuk $i=1,2,\dots,n$

$$o. \quad f(z_i z_{i+1}) = \frac{40n - 20i}{4} \quad \text{untuk } i = 1, 2, 3, \dots, n-1$$

Dengan demikian setiap graf *Caterpillar* tanpa kepala dan ekor Cp_n dengan n bilangan asli adalah super sisi ajaib (*Super Edge Magic Labeling*), dengan konstanta ajaib $k = \frac{50n + 10}{4}$

3.2 Kajian Hubungan Manusia dengan Tuhan dalam Teori Graf

Dari beberapa rumus-rumus di atas, jika direlevansikan dengan ayat-ayat Al-Qur'an adalah sejajar dengan ayat yang menyebutkan bahwa segala sesuatu yang ada di dunia ini diciptakan oleh Allah SWT. sesuai dengan ukurannya dan ditata-Nya dengan sedemikian rapi dan sempurna. Sebagaimana yang tertera pada surat Al-Qamar ayat 49:

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَاهُ بِقَدَرٍ ﴿٤٩﴾

Artinya: "Sesungguhnya kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran" (Q.S. Al-Qamar: 49).

Juga dalam surat Al-furqaan ayat 2:

الَّذِي لَهُ مُلْكُ السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ وَلَمْ يَتَّخِذْ وَلَدًا وَلَمْ يَكُنْ لَهُ شَرِيكٌ فِي الْمُلْكِ وَخَلَقَ كُلَّ شَيْءٍ فَقَدَرَهُ تَقْدِيرًا ﴿٢﴾

Artinya: "Yang kepunyaan-Nya-lah kerajaan langit dan bumi, dan dia tidak mempunyai anak, dan tidak ada sekutu baginya dalam kekuasaan(Nya), dan dia Telah menciptakan segala sesuatu, dan dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya" (Q.S. Al-Furqaan:2).

Dari pemisalan di atas, maka kata ukuran juga menyangkut pada suatu jumlah, dan jumlah disini dapat dinyatakan dalam bentuk bilangan atau angka.

Begitu pula pada permasalahan pelabelan pada graf, suatu pelabelan graf akan menghasilkan bilangan ajaib yang diperoleh dari penjumlahan nilai label titik dan nilai label sisi. Label berupa bilangan-bilangan atau angka-angka. Jadi, teori graf ini merupakan salah satu ilmu yang telah diciptakan dan benar-benar telah diukur oleh Allah dengan segala kelebihan-kelebihannya.

Dari penafsiran di atas kata *qadar* dapat direlevansikan antara konsep awal dari masalah pewarnaan titik, sisi, dan peta pada graf dengan Al-Qur'an (surat Al-Qamar ayat 49 dan Al-Furqaan ayat 2) adalah bahwa berdasarkan ayat di atas yang menyebutkan masalah *qadar* dari segala yang ada di muka bumi yang menurut penafsiran Alwi Shihab (*Tafsir Al-Misbah*, 2002:482) yakni *ketentuan dan sistem yang telah ditetapkan terhadap segala sesuatu yang ada di muka bumi ini*, sehingga dengan kekuasaan-Nya maka semua akan terlihat rapi, teratur, dan sempurna.

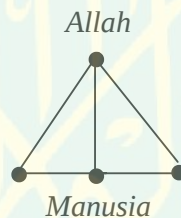
Dalam kehidupan sehari-hari manusia sering lupa akan pencipta-Nya dan sering kali tidak melaksanakan perintah-Nya dan tidak meninggalkan larangan-Nya. Padahal Allah telah memperingatkan manusia dengan firman-Nya bahwa manusia harus berada pada jalan yang benar yakni menjalankan perintah-Nya dan menjauhi larangan-Nya. Dalam Al Qur'an surat al-An'am ayat 153 dijelaskan bahwa:

وَأَنَّ هَذَا صِرَاطِي مُسْتَقِيمًا فَاتَّبِعُوهُ ۖ وَلَا تَتَّبِعُوا السُّبُلَ فَتَفَرَّقَ بِكُمْ عَنْ سَبِيلِهِ ۚ
ذَٰلِكُمْ وَصْنُكُمْ بِهِ ۚ لَعَلَّكُمْ تَتَّقُونَ ﴿١٥٣﴾

Artinya: “Dan bahwa (yang Kami perintahkan ini) adalah jalanKu yang lurus, maka ikutilah dia, dan janganlah kamu mengikuti jalan-jalan (yang lain)^[152], karena jalan-jalan itu mencerai beraikan kamu dari jalan-

*Nya. Yang demikian itu diperintahkan Allah agar kamu bertakwa".
(QS. Al An'am: 153)*

Sehingga dengan demikian, hal ini menunjukkan adanya suatu hubungan atau keterkaitan antara titik yang satu dengan titik yang lain. Jika dikaitkan dengan kehidupan nyata, maka banyaknya titik yang terhubung dalam suatu graf dapat diasumsikan sebagai banyaknya kejadian tertentu, yang selanjutnya kejadian-kejadian tersebut memiliki keterkaitan dengan titik lainnya yang merupakan kejadian sesudahnya. Maka dapat di asumsikan bagaimana hubungan antara Allah dengan hambanya dan juga hubungan sesama hamba yang terjalin, *Hablun min Allah wa Hablun min An-Nas.*



Gambar 3.9 Hubungan antara Allah dengan Hamba-Nya serta Sesama Hamba

Hal ini dikuatkan oleh firman Allah dalam Al Qur'an surat Ali Imran ayat 112 yaitu:

ضُرِبَتْ عَلَيْهِمُ الذَّلِيلَةُ أَيْنَ مَا تُقِفُوا إِلَّا أَنْحَلِ مِنْ اللَّهِ وَحَبَلَ مِنَ النَّاسِ وَبَاءُ وَبِغَضِبِ
مَنْ اللَّهُ وَضُرِبَتْ عَلَيْهِمُ الْمَسْكَنَةُ ذَلِكُمْ بِأَنَّهُمْ كَانُوا يَكْفُرُونَ بِعَايَةِ اللَّهِ وَيَقْتُلُونَ
الْأَنْبِيَاءَ بِغَيْرِ حَقٍّ ذَلِكُمْ بِمَا عَصَوْا وَكَانُوا يَعْتَدُونَ ﴿١١٢﴾

Artinya: "Mereka diliputi kehinaan di mana saja mereka berada, kecuali jika mereka berpegang kepada tali (agama) Allah dan tali (perjanjian) dengan manusia, dan mereka kembali mendapat kemurkaan dari Allah dan mereka diliputi kerendahan. Yang demikian itu, karena mereka

kafir kepada ayat-ayat Allah dan membunuh para nabi tanpa alasan yang benar. Yang demikian itu, disebabkan mereka durhaka dan melampaui batas”. (QS. Ali Imran: 112)

Allah SWT. memerintahkan agar setiap manusia menyambung hubungan baik dengan orang fakir, tetangga, kerabat dan sanak famili. Apabila manusia memutuskan apa yang diperintahkan oleh Allah untuk dihubungkan, maka ikatan sosial masyarakat akan hancur berantakan, kerusakan menyebar di setiap tempat, kekacauan terjadi dimana-mana.

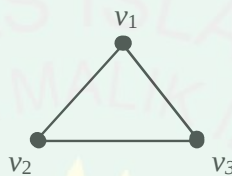
Dalam teori Islam elemen-elemen yang dimaksud meliputi Pencipta (Allah) dan hamba-hambanya, sedangkan sisi atau garis yang menghubungkan elemen-elemen tersebut adalah bagaimana hubungan antara Allah dengan hambanya dan juga hubungan sesama hamba yang terjalin, *Hablun min Allah wa Hablun min An-Nas*. Sehingga dengan demikian, hal ini menunjukkan adanya suatu hubungan atau keterkaitan antara titik yang satu dengan titik yang lain. Hal ini dikuatkan oleh firman Allah dalam Al Qur'an surat Al Hujurat ayat 10 bahwa dalam ayat tersebut disebutkan bahwa umat manusia yang beriman itu bersaudara. Sehingga mereka harus menjalin hubungan yang baik, rukun antara sesama umat. Ayat tersebut yaitu:

إِنَّمَا الْمُؤْمِنُونَ إِخْوَةٌ فَأَصْلَحُوا بَيْنَ أَخَوِيكُمْ وَاتَّقُوا اللَّهَ لَعَلَّكُمْ تُرْحَمُونَ

Artinya: "Orang-orang beriman itu sesungguhnya bersaudara. Sebab itu damaikanlah (perbaikilah hubungan) antara kedua saudaramu itu dan takutlah terhadap Allah, supaya kamu mendapat rahmat" (Q. S. Al-Hujurat: 10).

Sehingga dengan demikian, hal ini menunjukkan adanya suatu hubungan atau keterkaitan antara titik yang satu dengan titik yang lain. Jika dikaitkan dengan kehidupan nyata, maka banyaknya titik yang terhubung dalam suatu graf

dapat diasumsikan sebagai banyaknya kejadian tertentu, yang selanjutnya kejadian-kejadian tersebut memiliki keterkaitan dengan titik lainnya yang merupakan kejadian sesudahnya. Apabila di aplikasikan pada bentuk graf, maka kita dapat meng gambarkannya seperti berikut ini:



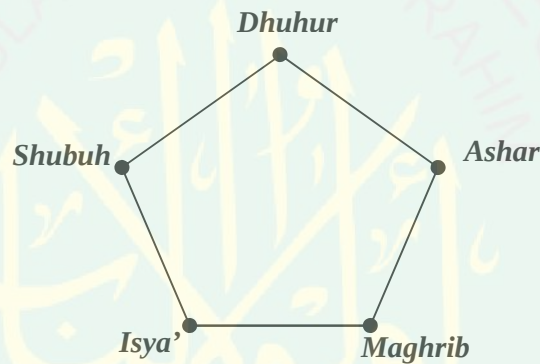
Gambar 3.10 Hubungan antara Mukmin yang Bersaudara

Sebuah graf dapat direpresentasikan sebagai waktu sholat. Shalat mempunyai kedudukan yang amat penting dalam Islam dan merupakan pondasi yang kokoh bagi tegaknya agama Islam. Ibadah shalat dalam Islam sangat penting, sehingga shalat harus dilakukan pada waktunya, dimanapun, dan bagaimanapun keadaan seorang muslim yang mukalaf. Dalam kaitannya dengan peribadatan sholat, Allah swt berfirman:

فَإِذَا قُضِيَتْ الصَّلَاةُ فَادْكُرُوا اللَّهَ قِيَمًا وَقُعُودًا وَعَلَىٰ جُنُوبِكُمْ ۚ فَإِذَا
 أَطْمَأْنَنْتُمْ فَأَقِيمُوا الصَّلَاةَ ۚ إِنَّ الصَّلَاةَ كَانَتْ عَلَى الْمُؤْمِنِينَ كِتَابًا مَّوْقُوتًا ﴿١٣﴾

Artinya: “Maka apabila kamu Telah menyelesaikan shalat(mu), ingatlah Allah di waktu berdiri, di waktu duduk dan di waktu berbaring. Kemudian apabila kamu Telah merasa aman, Maka Dirikanlah shalat itu (sebagaimana biasa). Sesungguhnya shalat itu adalah fardhu yang ditentukan waktunya atas orang-orang yang beriman” (Q.S. An-Nisaa’:103).

Dalam ayat tersebut dijelaskan bahwa waktu-waktu sholat telah ditentukan waktunya dan telah menjadi suatu ketetapan, baik itu sholat fardhu maupun sholat sunnah. Sholat lima waktu diwajibkan dalam sehari (dhuhur, 'ashar, maghrib, 'isya', dan subuh) merupakan sholat yang wajib ditunaikan dan tidak boleh ditinggalkan. Waktu pelaksanaan antara satu waktu sholat fardhu berbeda dengan empat waktu sholat yang lain dan telah ditetapkan oleh Allah SWT. Akan tetapi kelima waktu sholat tersebut saling mengikat dan tidak diperbolehkan hanya melaksanakan satu sholat saja.



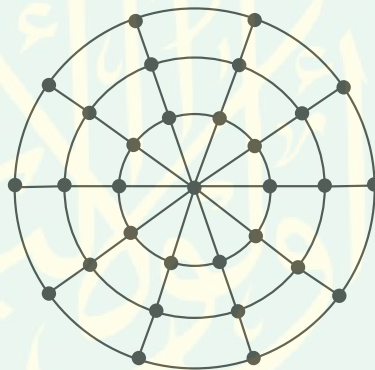
Gambar 3.11 Representasi Graf Terhadap Waktu-waktu Shalat

Contoh lain representasi graf adalah sarang laba-laba. Dimana Allah mengumpamakan penyembah-penyembah berhala-berhala itu, dengan laba-laba yang percaya kepada kekuatan rumahnya sebagai tempat ia berlindung dan tempat ia menjerat mangsanya, padahal kalau dihembus angin atau ditimpa oleh suatu barang yang kecil saja, rumah itu akan hancur. Begitu pula halnya dengan kaum musyrikin yang percaya kepada kekuatan sembahhan-sembahhan mereka sebagai tempat berlindung dan tempat meminta sesuatu yang mereka ingini, padahal sembahhan-sembahhan mereka itu tidak mampu sedikit juga menolong mereka dari

azab Allah waktu di dunia, seperti yang terjadi pada kaum Nuh, kaum Ibrahim, kaum Luth, kaum Syu'aib, kaum Saleh, dan lain-lain. Apalagi menghadapi azab Allah di akhirat nanti, sembahsan-sembahan mereka itu lebih tidak mampu menghindarkan dan melindungi mereka. Allah berfirman:

مَثَلُ الَّذِينَ أَخَذُوا مِنَ دُونِ اللَّهِ أَوْلِيَاءَ كَمَثَلِ الْعَنكَبُوتِ اتَّخَذَتْ بَيْتًا وَإِنَّ أَوْهَنَ الْبُيُوتِ لَبَيْتُ الْعَنكَبُوتِ لَوْ كَانُوا يَعْلَمُونَ ﴿٤١﴾

Artinya: "Perumpamaan orang-orang yang mengambil pelindung-pelindung selain Allah adalah seperti laba-laba yang membuat rumah. dan Sesungguhnya rumah yang paling lemah adalah rumah laba-laba kalau mereka Mengetahui". (Q.S. Al-Ankabuut:41)



Gambar 3.12 Graf Sarang Laba-laba

Pada graf sarang laba-laba banyaknya titik dan sisi tergantung pada besar kecilnya sarang tersebut. Secara umum bila sarangnya semakin besar, maka banyaknya sisi dan titik juga semakin banyak.

Begitu juga refleksinya dalam kehidupan, bahwa dalam menyelesaikan suatu permasalahan harus dikerjakan dengan hati-hati dan teliti serta tidak boleh tergesa-gesa. Dalam setiap melangkah harus tetap berpedoman pada aturan-aturan yang telah ditetapkan. Jadi dengan mempelajari matematika, dapat menambah

keimanan dan ketaqwaan, karena apa yang ada dalam Al Quran juga sejalan dengan apa yang ada pada matematika.

Ternyata setelah banyak mempelajari matematika yang merupakan ilmu hitung – menghitung serta banyak mengetahui mengenai masalah yang terdapat dalam matematika yang dapat direlevansikan dalam agama Islam sesuai dengan konsep-konsep yang ada dalam Al-Qur'an, maka akan dapat menambah keyakinan diri akan kebesaran Allah SWT selaku sang pencipta yang serba Maha, salah satunya adalah Maha Matematis. Karena Dialah sang raja yang sangat cepat dan teliti dalam semua masalah perhitungan (Abdusysyikir, 2007: 83).

Hal ini sesuai dalam Al Qur'an surat Al-Baqarah ayat 202:

أُولَٰئِكَ لَهُمْ نَصِيبٌ مِّمَّا كَسَبُوا ۖ وَاللَّهُ سَرِيعُ الْحِسَابِ

Artinya: “Mereka Itulah orang-orang yang mendapat bahagian daripada yang mereka usahakan; dan Allah sangat cepat perhitungan-Nya“. (Qs. Al-Baqarah: 202).

BAB IV

PENUTUP

4. 1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan, maka dapat disimpulkan bahwa untuk menunjukkan pelabelan sisi ajaib pada graf *Caterpillar* tanpa kepala dan ekor yang mempunyai 4 kaki pada tiap badan, n bilangan asli ganjil, dengan menggunakan pelabelan sebagai berikut:

Misal himpunan titik adalah $\{w_1, w_2, \dots, w_n, z_1, z_2, \dots, z_n, x_1, x_2, \dots, x_n, \}$

dan sisinya adalah $\begin{cases} \{z_i z_{i+1}\} & \text{untuk } i=1, 2, \dots, n-1 \\ \{z_i w_{2i-1}, z_i w_{2i}, z_i x_{2i-1}, z_i x_{2i}\} & \text{untuk } i=1, 2, \dots, n \end{cases}$

di definisikan fungsi f dari $V(G) \cup E(G)$ ke $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ dengan pengaitan sebagai berikut:

- a. $f(w_i) = \left(\frac{5i-1}{4}\right)$ untuk $i=1, 5, 9, \dots, 2n-1$ pada z_j
dengan $j = 1, 3, 5, 7, \dots, n$
- b. $f(w_{i+1}) = \left(\frac{5(i+1)-2}{4}\right)$ untuk $i=1, 5, 9, \dots, 2n-1$ pada z_j
dengan $j = 1, 3, 5, 7, \dots, n$
- c. $f(w_i) = \left(\frac{10n+5i-1}{4}\right)$ untuk $i=3, 7, 11, \dots, 2n-3$ pada z_j
dengan $j = 2, 4, 6, \dots, 2n$
- d. $f(w_{i+1}) = \left(\frac{10n+5(i+1)-2}{4}\right)$ untuk $i=3, 7, 11, \dots, 2n-2$ pada z_j
dengan $j = 2, 4, 6, \dots, n-1$
- e. $f(x_i) = \left(\frac{5i+7}{4}\right)$ untuk $i=1, 5, 9, \dots, 2n-1$ pada z_j
dengan $j = 1, 3, 5, 7, \dots, n$

- f. $f(x_{i+1}) = \left(\frac{5(i+1)+6}{4} \right)$ untuk $i=1,5,9,\dots,2n-1$ pada z_j
dengan $j=1,3,5,7,\dots,n$
- g. $f(x_i) = \left(\frac{10n+5i+7}{4} \right)$ untuk $i=3,7,11,\dots,2n-3$ pada z_j
dengan $j=2,4,6,\dots,n-1$
- h. $f(x_{i+1}) = \left(\frac{10n+5(i+1)+6}{4} \right)$ untuk $i=3,7,11,\dots,2n-3$ pada z_j
dengan $j=2,4,6,\dots,n-1$
- i. $f(z_i) = \left(\frac{2n+2i}{4} \right)(5)$ untuk $i=1,3,5,7,\dots,n$
- j. $f(z_i) = \left(\frac{10i}{4} \right)$ untuk $i=2,4,6,\dots,n-1$
- k. $f(z_i, w_{2i-1}) = \frac{40n-10(2i-1)+6}{4}$ untuk $i=1,2,\dots,n$
- l. $f(z_i, w_{2i}) = \frac{40n-10(2i)+12}{4}$ untuk $i=1,2,\dots,n$
- m. $f(z_i, x_{2i-1}) = \frac{40n-10(2i-1)-2}{4}$ untuk $i=1,2,\dots,n$
- n. $f(z_i, x_{2i}) = \frac{40n-10(2i)+4}{4}$ untuk $i=1,2,\dots,n$
- o. $f(z_i, z_{i+1}) = \frac{40n-20i}{4}$ untuk $i=1,2,3,\dots,n-1$

Maka graf *Caterpillar* dengan pelabelan tersebut adalah super sisi ajaib

(*Super Edge Magic Labeling*) dengan konstanta ajaib $k = \frac{50n+10}{4}$

4.2 Saran

Pembahasan mengenai pelabelan *Caterpillar* ini masih terbuka bagi peneliti lain untuk mengadakan penelitian yang sejenis dengan *Caterpillar* yang berbeda.

DAFTAR PUSTAKA

- Abdul, Al-Imam. 2000. *Tafsir ibnu Kasir Juz 4*. Bandung: Sinar Baru Algesindo
- Abdusysyahir. 2007. *Ketika Kiai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press.
- Arifin, Achmad. 2000. *Aljabar*, ITB Bandung: Bandung
- Baisuni, Hasyim. 2005. *Kalkulus*. Universitas Indonesia: Jakarta
- Bartle, Robert dan Sherbert, R Donald. 1927. *Introduction to Real Analysis*, edisi kedua, Singapore.
- Baskoro, Edy Tri. 2007. Mengenalkan Indonesia Melalui Teori Graf. *Pidato Ilmiah Guru Besar Institut Teknologi Bandung* (Balai Pertemuan Ilmiah ITB, 13 Juli 2007).
- Chartrand, G. & Lesniak, L. 1986. *Graph and Digraph 2nd Edition*. California: Wadsworth, Inc.
- Cunningham, D. 2004. *Vertex-Magic*, *Electronic Journal Of Undergraduted Mathematics*. 9, 2-20.
- Gafur, Abdul. 2008. *Eksentrik Digraf dari Graf Star, Graf Double Star, Graf Komplit Bipartit dan Pelabelan Konsektif pada Graf Sikel dan Graf Bipartit Komplit*. (Online): (<http://www.Combinatoric.Com>.)
- J. A. Gallian. 2007. *A dynamic Survey of Graph Labeling*. Electronic journal combinatorics. Dynamic Survey D#56
- Muhammad, Bin, Abdullah. 2007. *Tafsir Ibnu Kasir Jilid 3*. Jakarta: Pustaka Imam Asy-Syafi'i
- Muhammad, Teungku, Hasbi, Ash-Shiddiqie. 2000. *Tafsir Al-Qur'anul Majid An-Nur*. Semarang: Pustaka Rizki Putra.
- Nurdin. Baskoro E.T dan Salman A.N.M.. 2006. *Total Edge Irregular Strength of Lintang Graphs*. Departemen matematika, FMIPA-ITB S4G-06. (Online): (<http://www.Combinatoric.Com>.)
- Purwanto. 1997. *Matematika Diskrit*. Malang: IKIP MALANG.
- Shihab, M. Quraish. 2002. *Tafsir Al-Mishbah Pesan, Kesan dan Keserasian al-Quran*. Lentera Hati: Jakarta

Widi, Nugroho, Kutanto. 2002. *Ekstrensik Diagraf dari Graf star, Graf Double Star dan Graf Komplit Bipartit*.

Wallis, W. D., Baskoro, Edy T., Miller, and Slamin. Edge-Magic Total Labeling. *Australian Journal of Combinatorics* Volume 22 (2000) 1-15.

Wilson, R. J and Watkins, J. J. 1990. *Graphs: An Introductory Approach a First Course in Discrete Mathematics*. Canada: John Wiley and Sons, Inc.





DEPARTEMEN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang (0341)551345
Fax. (0341)572533

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : AKHMAD FATHONI
Nim : 03510032
Fakultas/ jurusan : Sains Dan Teknologi/ Matematika
Judul skripsi : Pelabelan Super Sisi Ajaib pada *Graph Caterpillar*
Pembimbing I : Abdussakir, M.Pd
Pembimbing II : Achmad Nashichuddin, MA

No	Tanggal	HAL	Tanda Tangan
1	26 Agustus 2008	Konsultasi Masalah	1.
2	30 Agustus 2008	Konsultasi BAB III	2.
3	03 September 2008	Revisi BAB III	3.
4	10 September 2008	Revisi BAB III	4.
5	19 November 2008	ACC BAB III	5.
6	29 November 2008	Konsultasi BAB I dan II	6.
7	09 Desember 2008	Konsultasi Keagamaan	7.
8	27 Desember 2008	Revisi BAB I dan II	8.
9	03 Januari 2009	Revisi Keagamaan	9.
10	10 Januari 2009	Revisi Keagamaan	10.
11	16 Januari 2009	Konsultasi Keseluruhan	11.
12	16 Januari 2009	ACC Keseluruhan	12.

Mengetahui,
Ketua Jurusan

Sri Harini, M. Si
NIP. 150300415