

ANALISIS PERILAKU MODEL GERAK VERTIKAL DAWAI

SKRIPSI

**OLEH
RURIN ANISTA
NIM. 11610022**



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2015**

ANALISIS PERILAKU MODEL GERAK VERTIKAL DAWAI

SKRIPSI

**Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)**

**Oleh
Rurin Anista
NIM. 11610022**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2015**

ANALISIS PERILAKU MODEL GERAK VERTIKAL DAWAI

SKRIPSI

Oleh
Rurin Anista
NIM. 11610022

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 13 Mei 2015

Pembimbing I,

Pembimbing II,

Ari Kusumastuti, S.Si., M.Pd
NIP. 19770521 200501 2 004

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

ANALISIS PERILAKU MODEL GERAK VERTIKAL DAWAI

SKRIPSI

Oleh
Rurin Anista
NIM. 11610022

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal 25 Juni 2015

Penguji Utama : Dr. Usman Pagalay, M.Si

Ketua Penguji : Hairur Rahman, M.Si

Sekretaris Penguji : Ari Kusumastuti, S.Si., M.Pd

Anggota Penguji : Dr. Abdussakir, M.Pd

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Rurin Anista

NIM : 11610022

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Analisis Perilaku Model Gerak Vertikal Dawai

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 13 Mei 2015
Yang membuat pernyataan,

Rurin Anista
NIM. 11610022

MOTO

“Jadilah pribadi yang selalu optimis dengan meningkatkan kualitas diri untuk menjadi lebih baik dan tidak mudah menyerah”

فَإِذَا فَرَغْتَ فَانصَبْ

Artinya: “Maka apabila kamu telah selesai (dari sesuatu urusan), kerjakanlah dengan sungguh-sungguh (urusan) yang lain” (QS. Alam Nasyroh/94:7).



PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Ayah Katirin dan Ibu Ismini yang selalu memberikan nasihat, semangat, doa,
motivasi, dan kasih sayang yang tidak ternilai dan adik tercinta Rika Dwi
Indahsari yang menjadi kebanggaan bagi penulis.



KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Alhamdulillah segala puji syukur penulis panjatkan kepada Allah Swt. yang telah melimpahkan rahmat, taufik, serta hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis banyak mendapat bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Untuk itu ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan yang setinggi-tingginya penulis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Hj. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, sekaligus dosen pembimbing II yang senantiasa selalu memberikan arahan, nasihat, dan berbagi ilmunya kepada penulis.
4. Ari Kusumastuti, S.Si., M.Pd, selaku dosen pembimbing I yang senantiasa memberikan arahan, nasihat, motivasi, dan berbagi pengalaman berharga kepada penulis.

5. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen, terima kasih atas segala ilmu dan bimbingannya.
6. Ayah dan Ibu yang selalu memberikan do'a, semangat, dan motivasi kepada penulis sampai saat ini.
7. Semua teman-teman di Jurusan Matematika angkatan 2011 yang berjuang bersama-sama untuk menggapai cita-cita.
8. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik moril maupun materiil.

Akhirnya penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat bagi penulis dan bagi pembaca.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, April 2015

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PENGAJUAN	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	
HALAMAN MOTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	x
DAFTAR TABEL	xii
DAFTAR GAMBAR	xiii
DAFTAR SIMBOL	xv
ABSTRAK	xvi
ABSTRACT	xvii
ملخص	xviii
BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	5
1.3 Tujuan Penelitian	5
1.4 Manfaat Penelitian	5
1.5 Batasan Masalah	5
1.6 Metode Penelitian	6
1.7 Sistematika Penulisan	6
BAB II KAJIAN PUSTAKA	
2.1 Persamaan Diferensial Gerak Vertikal Dawai	8
2.1.1 Sistem Linier Gerak Vertikal Dawai	10
2.2 Sistem Dinamik Gerak Vertikal Dawai	13
2.2.1 Nilai Eigen, Vektor Eigen, dan Persamaan Karakteristik.....	14
2.2.2 Potret Fase di Sekitar Titik Tetap	15
2.2.3 Kestabilan Titik Tetap Sistem Dinamik	17

2.3 Penelitian Terdahulu	19
2.4 Kajian Agama Model Gerak Vertikal Dawai dalam Al-Quran	26
BAB III PEMBAHASAN	
3.1 Model Matematika pada Gerak Vertikal Dawai	29
3.2 Analisis Perilaku Model Gerak Dawai	30
3.3 Hasil Simulasi dan Interpretasi Model Gerak Vertikal Dawai	50
3.4 Gerak Vertikal Dawai dalam Pandangan Islam	56
BAB IV PENUTUP	
4.1 Kesimpulan	58
4.2 Saran	59
DAFTAR PUSTAKA	60
LAMPIRAN-LAMPIRAN	
RIWAYAT HIDUP	

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1 Kestabilan Titik Tetap Sistem Dinamik Linier	18
--	----



DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Potret Fase dengan Node Tidak Stabil	18
Gambar 2.2	Potret Fase dengan Node Stabil	18
Gambar 2.3	Potret Fase Pelana	18
Gambar 2.4	Potret Fase dengan Stabil Fokus Spiral	19
Gambar 2.5	Potret Fase Mengelilingi Pusat Ellips	19
Gambar 2.6	Gerakan Meredam pada Pegas Bergetar	21
Gambar 2.7	Gerak Vertikal Dawai $y(t)$	22
Gambar 2.8	Partisi Balok Sebesar dm	24
Gambar 3.1	(a) Grafik $y(t)$ terhadap t (b) Perilaku $y(t)$ Membentuk <i>Saddle</i> dengan $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$	37
Gambar 3.2	(a) Grafik $y(t)$ terhadap t (b) Perilaku $y(t)$ Membentuk <i>Star</i> <i>Point</i> dengan $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$	39
Gambar 3.3	(a) Grafik $y(t)$ terhadap t (b) Perilaku $y(t)$ Membentuk <i>Star</i> <i>Point</i> dengan $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$	40
Gambar 3.4	(a) Grafik $y(t)$ terhadap t (b) Perilaku $y(t)$ Membentuk Titik Spiral dengan $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta, \alpha > 0$	42
Gambar 3.5	(a) Grafik $y(t)$ terhadap t (b) Perilaku $y(t)$ Membentuk Titik Spiral dengan $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta, \alpha < 0$	44
Gambar 3.6	(a) Grafik $y(t)$ terhadap t (b) Perilaku $y(t)$ Membentuk <i>Center</i> <i>Point</i> dengan $\lambda_{1,2} = \pm i\beta$	45
Gambar 3.7	Gambar Grafik $y(t)$ pada Waktu $t = 0 - 20$	51
Gambar 3.8	Gambar Potret Fase $y(t)$ pada Waktu $t = 0 - 20$	51
Gambar 3.9	Gambar Grafik $y(t)$ pada Waktu $t = 0 - 200$	51
Gambar 3.10	Gambar Potret Fase $y(t)$ pada Waktu $t = 0 - 200$	51
Gambar 3.11	Gambar Grafik $y(t)$ pada Waktu $t = 0 - 1500$	52
Gambar 3.12	Gambar Potret Fase $y(t)$ pada Waktu $t = 0 - 1500$	52
Gambar 3.13	Gambar Grafik $y(t)$ pada Waktu $t = 0 - 20$	53
Gambar 3.14	Gambar Potret Fase $y(t)$ pada Waktu $t = 0 - 20$	53
Gambar 3.15	Gambar Grafik $y(t)$ pada Waktu $t = 0 - 200$	53
Gambar 3.16	Gambar Potret Fase $y(t)$ pada Waktu $t = 0 - 200$	53
Gambar 3.17	Gambar Grafik $y(t)$ pada Waktu $t = 0 - 1500$	53
Gambar 3.18	Gambar Potret Fase $y(t)$ pada Waktu $t = 0 - 1500$	53

Gambar 3.19 Gambar Grafik $y(t)$ pada Waktu $t = 0 - 20$	54
Gambar 3.20 Gambar Potret Fase $y(t)$ pada Waktu $t = 0 - 20$	54
Gambar 3.21 Gambar Grafik $y(t)$ pada Waktu $t = 0 - 200$	54
Gambar 3.22 Gambar Potret Fase $y(t)$ pada Waktu $t = 0 - 200$	54
Gambar 3.23 Gambar Grafik $y(t)$ pada Waktu $t = 0 - 1500$	55
Gambar 3.24 Gambar Potret Fase $y(t)$ pada Waktu $t = 0 - 1500$	55



DAFTAR SIMBOL

- m : Massa per satuan panjang balok (Kgs^2/m) dengan formula $\frac{W}{g}$,
dengan massa $m = 657,3$ dan $260,2$
- K : Konstanta *spring* (Kg/m), $K = 1000$ (McKenna, 1999), nilai
 $K > 0$
- l : Panjang balok, $l = 60$
- δ : Parameter gesekan bernilai $0,01$ (Ohene, 2012), nilai $\delta > 0$
- g : Gaya gravitasi
- A : Beban pada balok
- $y(t)$: Lendutan (*downward distance*) yaitu besarnya perpanjangan
dawai ke bawah saat t

ABSTRAK

Anista, Rurin. 2015. **Analisis Perilaku Model Gerak Vertikal Dawai**. Skripsi. Jurusan Matematika. Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Ari Kusumastuti, S.Si., M.Pd. (II) Dr. Abdussakir, M.Pd.

Kata kunci: gerak vertikal dawai, osilasi, perlambatan (redaman).

Gerak vertikal dawai adalah gerak naik turun yang terjadi secara berulang-ulang yang akhirnya berhenti dalam waktu tertentu karena dipengaruhi oleh gaya perlambatan (redaman). Model matematika gerak vertikal dawai dinyatakan dalam persamaan diferensial biasa orde dua yang dinyatakan oleh McKenna (1999) dengan parameter K adalah konstanta spring, m adalah massa, δ adalah parameter gesekan, dan parameter g adalah gaya gravitasi, serta parameter $y(t)$ menyatakan dinamika pergerakan vertikal dawai. Pada penelitian ini suku g diabaikan sehingga nilai g adalah nol. Model pergerakan vertikal dawai menggunakan asumsi bahwa dawai tidak pernah kehilangan tegangan.

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah dengan menganalisis secara dinamik model gerak vertikal dawai dengan memaparkan hasil simulasi dan interpretasi berdasarkan grafik model gerak vertikal dawai. Dengan variasi parameter massa m , nilai awal $y_1(t)$ dan $y_2(t)$, konstanta $K = 1000$, dan $\delta = 0.01$, serta variasi waktu t maka dihasilkan akar-akar yang kompleks. Gerak naik turunnya $y(t)$ dalam waktu takterhingga amplitude semakin mengecil bergerak ke arah titik tetap. Sehingga gerakannya menjadi stabil asimtotik. Maka untuk penelitian selanjutnya diharapkan dapat mengembangkan penelitian ini dengan tidak mengabaikan gaya gravitasi.

ABSTRACT

Anista, Rurin. 2015. **Analysis of String Vertical Motion Behavior Model**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) Ari Kusumastuti, S.Si., M.Pd. (II) Dr. Abdussakir, M.Pd.

Keywords: string vertical motion, oscillations, damping.

String vertical movement is up and down motion of the strings that occur repeatedly and finally stopped in a certain time because it is influenced by the damping force. Mathematical model of the vertical motion of the strings is expressed in a second order ordinary differential equation denoted by McKenna (1999) with K is a constant for spring, m is mass, δ is a parameter of friction and g is the gravitational force and the $y(t)$ expressed the dynamics of the vertical movement of the strings. In this study the rate g ignored so that the value of g is zero. Model of vertical movement of the strings is assumed to never lose tension.

The method used in this research is to analyze the dynamic model of the vertical motion of the strings by presenting the results of the simulation and interpretation based graphics model of the vertical motion of the strings. With the variation of the mass parameter mass m , the initial value $y_1(t)$ and $y_2(t)$, constants $K = 1000$, and $\delta = 0.01$, and the variation of time t , then it was resulting complex roots. The up and down movement of $y(t)$ in infinite time, the amplitude become smaller and smaller moves towards a fixed point. So that the movement becomes asymptotically stable. Then for further research the author suggests to develop this research by not ignoring the gravity.

ملخص

أنستي، رورين. عام ٢٠١٥. تحليل سلوك نموذج حركة السلسلة العمودية. بحث جامعي. شعبة الرياضيات كلية العلوم والتكنولوجيا الجامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج. المشرف: (١) آري كسمستوتي، الماجستير (٢) الدكتور عبدالشاکر، الماجستير

الكلمات الرئيسية: حركة السلسلة العمودية، التذبذب، تباطؤ (تخميد).

حركة السلسلة مودية هي الحركة صعودا و نزولا من السلاسل التي تحدث مرارا وتكرارا و أن توقف أخيرا في وقت معين لأنه يتأثر قوة التباطؤ (التخميد). وأعرب عن نموذج الرياضي من الحركة العمودية من السلاسل في المعادلة التفاضلية على الرتبة الثانية الى أن هي العادية التي أعرب عنها ماكينا (١٩٩٩). كما أن K هو ثابت زنبرك، m هي كتلة، δ المعلمات الإحتكاك، g هي قوة الجاذبية، و $y(t)$ هي تنص على حركة السلسلة العمودية. في هذه الدراسة أن معدل g تجاهل فتكون قيمة g صفر. النموذج من سلسلة الحركة العمودية هو أن السلاسل لا تفقد إفتراضا أبدا و السلاسل.

الطريقة المستخدمة في هذه الدراسة هي تحليل نموذج ديناميكي من حركة السلسلة العمودية بخلال وصف نتائج النموذج الرسومات محاكاة وتفسيرها على أساس سلسلة الحركة العمودية. باختلاف المعلمة الجماعية m ، $y_1(t)$ و $y_2(t)$ هما القيم الأولية، ثابت $K=1000$ ، و $\delta=0.01$ ، والنتيجة عن ذلك هي الجذور المعقدة و الحركة صعودا و نزولا من $y(t)$ في زمن لا نهائي السعة تخلص التحرك نحو نقطة ثابتة. فلذلك الحركة أصبحت مستقرة مقارب. و لمزيد من البحث الآتي هو متوقع على تطوير هذا البحث بخلال عدم تجاهل قوة الجاذبية.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Dalam berkembangnya ilmu pengetahuan dan teknologi, manusia sudah mampu untuk mengkaji, meneliti, membahas, dan mengamati tentang kejadian-kejadian atau fenomena yang ada di alam ini. Salah satu contoh fenomena yang ada di alam ini adalah gerak osilasi. Fauzi (2010) mengatakan bahwa osilasi adalah gerakan bolak-balik di sekitar suatu titik keseimbangan. Osilasi terjadi jika suatu sistem diganggu dari posisi keseimbangan stabilnya. Salah satu contoh gerak osilasi adalah gerak vertikal pada dawai. Secara fisis, gerak vertikal dawai adalah suatu gerak osilasi yang dipengaruhi oleh perlambatan (redaman), sehingga dalam kurun waktu yang tak terhingga gerakannya menjadi stabil.

Pentingnya menganalisis gerak vertikal dawai adalah agar dapat mengetahui perilaku model dinamik pada perilaku gerak dawai. Sebagai analogi dalam kehidupan sehari-hari, bahwa segala sesuatu yang ada di alam ini sesungguhnya bersifat dinamis. Allah Swt. berfirman di dalam al-Quran surat al-Hadid/57:20 yaitu:

أَعْلَمُوا أَنَّمَا الْحَيَاةُ الدُّنْيَا لَعِبٌ وَهُوَ زِينَةٌ وَتَفَاخُرٌ بَيْنَكُمْ وَتَكَاثُرٌ فِي الْأَمْوَالِ وَالْأَوْلَادِ كَمَثَلِ
 غَيْثٍ أَعْجَبَ الْكُفَّارَ نَبَاتُهُ ثُمَّ يَهْبِجُ فَتَرْتَهُ مُصْفَرًّا ثُمَّ يَكُونُ حُطَمًا ۗ وَفِي الْآخِرَةِ عَذَابٌ
 شَدِيدٌ وَمَغْفِرَةٌ مِّنَ اللَّهِ وَرِضْوَانٌ ۗ وَمَا الْحَيَاةُ الدُّنْيَا إِلَّا مَتَاعُ الْغُرُورِ ﴿٢٠﴾

“Ketahuilah, bahwa sesungguhnya kehidupan dunia ini hanyalah permainan dan suatu yang melalaikan, perhiasan dan bermegah-megahan antara kamu serta berbangga-bangga tentang banyaknya harta dan anak, seperti hujan yang tanam-tanamannya mengagumkan para petani. Kemudian tanaman itu menjadi kering dan kamu lihat warnanya kuning kemudian menjadi hancur, dan di akhirat

(nanti) ada azab yang keras dan ampunan dari Allah serta keridhaan-Nya, dan kehidupan dunia ini tidak lain hanyalah kesenangan yang menipu” (QS. al-Hadid/57:20).

Ayat tersebut menjelaskan tentang banyaknya problema atau masalah kehidupan di dunia ini yang dialami oleh setiap makhluk. Salah satu contohnya adalah perjalanan hidup manusia. Manusia sering mengalami naik turunnya masalah dalam kehidupan sehari-hari, seperti halnya roda berputar atau seperti gerak naik turunnya dawai. Dalam hal ini, manusia kadang kala berada di bawah dan kadang kala berada di atas. Manusia yang berada di bawah, dapat diartikan bahwa ia sedang mengalami kesulitan hidup. Sedangkan manusia yang berada di atas, dapat diartikan bahwa ia mengalami masa kejayaan. Apabila diaplikasikan pada kasus gerak vertikal dawai, bahwa dawai dikatakan stabil apabila dawai dapat berfungsi dengan baik. Sebaliknya, dawai dikatakan tidak stabil apabila dawai tidak dapat berfungsi dengan baik. Sebagai analoginya adalah dawai yang terdapat pada senar gitar atau senar pada biola. Pada saat senar gitar atau biola stabil, maka senar akan berfungsi dengan baik dan menghasilkan bunyi yang indah. Sebaliknya apabila senar gitar atau biola tidak stabil, maka tidak akan berfungsi dengan baik, sehingga bunyi yang dihasilkan kurang indah.

Secara umum, pemodelan matematika adalah proses pemecahan masalah dalam dunia nyata dengan matematika yang dilakukan dengan mengubah masalah-masalah yang dihadapi tersebut menjadi bahasa matematika (Baiduri, 2002). Gerak vertikal dawai ini adalah bentuk dari pemodelan matematika. Model matematika sendiri memiliki ketentuan atau ukuran tertentu sebagaimana firman Allah Swt. dalam surat al-Furqan/25:2, yaitu:

الَّذِي لَهُ مُلْكُ السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ وَلَمْ يَتَّخِذْ وَلَدًا وَلَمْ يَكُن لَّهُ شَرِيكٌ فِي الْمُلْكِ وَخَلَقَ كُلَّ شَيْءٍ فَقَدَرَهُ تَقْدِيرًا ﴿٢﴾

“Yang kepunyaan-Nya-lah kerajaan langit dan bumi, dan Dia tidak mempunyai anak, dan tidak ada sekutu baginya dalam kekuasaan(Nya), dan Dia telah menciptakan segala sesuatu, dan Dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya” (QS.al-Furqan/25:2).

Ayat tersebut menjelaskan bahwa penciptaan alam semesta ini memuat bentuk-bentuk dan konsep matematika, meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Alam semesta serta segala isinya diciptakan oleh Allah Swt. dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan, dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi (Abdussakir, 2007). Begitu halnya dengan gerak vertikal dawai yang memiliki bentuk model matematika yang dapat diteliti dengan ilmu matematika.

Secara umum, model matematika adalah suatu usaha untuk menguraikan beberapa bagian yang berhubungan dengan dunia nyata ke dalam bentuk persamaan matematika yang merupakan pendekatan terhadap suatu fenomena fisik. Persamaan yang banyak digunakan untuk menggambarkan fenomena fisik adalah persamaan diferensial. Persamaan diferensial sering muncul dalam model matematika dimana persamaan tersebut menggambarkan keadaan kehidupan nyata. Banyak hukum-hukum alam dan hipotesis-hipotesis dapat diterjemahkan ke dalam persamaan yang mengandung turunan melalui bahasa matematika. Sebagai contoh turunan-turunan dalam fisika muncul sebagai kecepatan dan percepatan, dalam geometri sebagai kemiringan (tanjakan), dalam biologi sebagai jalur pertumbuhan populasi, dalam psikologi sebagai laju belajar, dalam kimia sebagai laju reaksi, dalam ekonomi sebagai laju perubahan biaya hidup, dan dalam keuangan sebagai laju pertumbuhan investasi (Finizio dan Ladas, 1988).

Pada penelitian sebelumnya tentang masalah dawai yang dilakukan oleh McKenna (1999), yaitu dengan asumsi bahwa model gelombang pada dawai merupakan model bergantung waktu. Ia menggambarkan dinamika pergerakan vertikal dawai yang dinyatakan sebagai $\ddot{y} = -\frac{2K}{m}y - \delta\dot{y} + g$. Dalam hal ini K adalah konstanta spring, m adalah massa, δ adalah parameter gesekan, dan g adalah gaya gravitasi. Nilai $y(t)$ pada penelitian tersebut menyatakan dinamika pergerakan vertikal dawai. Pada penelitian ini, penulis menyajikan hasil simulasi dari model gerak vertikal dawai berupa grafik dan potret fase. Asumsi yang digunakan pada model gerak vertikal dawai adalah bahwa kawat tidak pernah kehilangan tegangan. Tidak pernah kehilangan tegangan yang dimaksud adalah apabila gaya yang bekerja pada dawai dihilangkan, maka dawai tersebut akan kembali pada keadaan semula seperti halnya pegas yang mengikuti Hukum Hooke.

Penelitian Ohene (2012) membahas tentang penyelesaian numerik dengan Runge Kutta untuk memahami respon dan vibrasi yang dialami oleh dawai. Ia menggunakan beberapa uji coba yang hasilnya adalah bahwa dawai selalu menghasilkan respon yang lebih stabil dengan sudut torsi awal. Sedangkan pada penelitian ini, penulis mencoba melakukan analisis dinamik pergerakan vertikal pada model dawai. Manfaat yang dapat diambil dari penelitian ini, yaitu dapat melihat perilaku gerak vertikal yang dihasilkan oleh dawai.

Berdasarkan latar belakang di atas, maka penulis melakukan penelitian ini dengan memfokuskan pada judul “*Analisis Perilaku Model Gerak Vertikal Dawai*”.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah dalam penelitian ini adalah:

1. Bagaimana analisis perilaku model gerak vertikal pada dawai?
2. Bagaimana simulasi dan hasil interpretasi berdasarkan grafik model gerak vertikal dawai?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah:

1. Menganalisis perilaku model gerak vertikal pada dawai.
2. Memaparkan simulasi dan hasil interpretasi berdasarkan grafik model gerak vertikal dawai.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat penelitian ini adalah:

1. Memperdalam dan menambah wawasan disiplin ilmu tentang pemodelan matematika, khususnya tentang analisis perilaku model gerak vertikal dawai.
2. Simulasi dan interpretasi dari perilaku model gerak vertikal dawai dapat dijadikan dasar untuk penelitian berikutnya.

1.5 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam penelitian ini adalah:

1. Model yang digunakan pada penelitian ini merujuk pada model McKenna (1999), yaitu $\ddot{y} = -\frac{2K}{m}y - \delta\dot{y} + g$, di mana suku g pada model ini diabaikan sehingga menjadi $\ddot{y} = -\frac{2K}{m}y - \delta\dot{y}$.

2. Parameter yang digunakan pada penelitian ini menggunakan data sekunder dengan massa m dan konstanta $K = 1000$ (McKenna, 1999), serta gesekan $\delta = 0.01$ (Ohene, 2012).
3. Pada penelitian ini dilakukan simulasi dengan variasi perubahan massa m dan nilai awal.

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan pada penelitian ini adalah dengan menggunakan studi literatur dengan langkah-langkah penelitian sebagai berikut:

1. Menentukan titik tetap model.
2. Menentukan nilai eigen dan vektor eigen.
3. Menentukan solusi umum dan solusi khusus dari sistem persamaan.
4. Memberikan hasil grafik dan potret fase model.
5. Menganalisis hasil grafik dan potret fase model.
6. Simulasi dan pembahasan.

1.7 Sistematika Penulisan

Dalam penyusunan penelitian ini secara umum terdiri dari empat bab. Masing-masing bab dibagi ke dalam beberapa sub bab sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Dalam bab ini dijelaskan mengenai latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Dalam bab ini terdiri dari teori-teori yang mendasari penulisan penelitian ini, yang meliputi persamaan diferensial gerak vertikal dawai, sistem dinamik gerak vertikal dawai, model matematika gerak vertikal dawai, penelitian terdahulu, serta kajian agama model gerak vertikal dawai dalam al-quran.

Bab III Pembahasan

Pada bab ini terdapat hasil penelitian dan pembahasan, yang berisi tentang hasil penelitian dan analisis data dari hasil penelitian, meliputi model matematika pada gerak vertikal dawai, analisis perilaku model gerak dawai, hasil simulasi dan interpretasi model gerak vertikal dawai, serta gerak vertikal dawai dalam pandangan Islam.

Bab IV Penutup

Pada bab ini terdapat kesimpulan dan saran, yang berisi tentang kesimpulan dari hasil penelitian pada bab pembahasan serta saran-saran untuk penelitian sejenis berikutnya.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Diferensial Gerak Vertikal Dawai

Banyak masalah yang sangat penting dalam ilmu fisika, ilmu kedokteran, ilmu sosial dan ilmu-ilmu lainnya, ketika memformulasikan dalam bentuk matematika mensyaratkan fungsi yang memenuhi persamaan yang memuat satu atau lebih turunan-turunan dari fungsi yang tidak diketahui. Persamaan-persamaan tersebut dinamakan persamaan diferensial (Waluya, 2006).

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang mengandung satu atau beberapa turunan dari suatu fungsi yang tidak diketahui (Purcell, 1987). Apabila hanya terdapat fungsi tunggal yang akan ditentukan maka sudah cukup pada satu persamaan. Namun apabila terdapat dua atau lebih fungsi yang tidak diketahui maka sebuah sistem dari persamaan diperlukan (Waluya, 2006).

Sebagai contoh adalah persamaan diferensial pada gerak vertikal dawai. Gerak vertikal dawai adalah suatu gerak osilasi yang terjadi secara berulang-ulang yang akhirnya berhenti dalam waktu tertentu karena dipengaruhi perlambatan (redaman). Osilasi adalah gerakan bolak-balik di sekitar suatu titik keseimbangan. Osilasi terjadi jika suatu sistem diganggu dari posisi keseimbangan stabilnya (Fauzi, 2010). Persamaan diferensial dari gerak vertikal dawai adalah

$$\ddot{y} + \delta\dot{y} + \frac{2K}{m}y = 0 \quad (2.1)$$

Persamaan (2.1) di atas dapat diselesaikan dengan cara mendefinisikan variabel baru $y_2 = \dot{y}_1$ untuk membentuk sistem persamaan diferensial. Kemudian variabel

baru ini disubstitusikan ke persamaan (2.1) untuk memperoleh sistem persamaan diferensial sehingga,

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= -\frac{2K}{m}y_1 - \delta y_2 \end{aligned} \quad (2.2)$$

di mana y_1 dan y_2 adalah lendutan (*downward distance*) yang menyatakan besarnya jarak perpindahan batang ke bawah dari titik keseimbangan. Konstanta $\frac{2K}{m}$ dan δ didasarkan pada observasi empirik.

Darmawijoyo (2011) mengatakan bahwa bentuk umum sistem persamaan diferensial orde satu diberikan oleh:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y) \end{aligned}$$

di mana untuk x dan y adalah variabel terikat dan t adalah variabel bebas, dalam hal ini aplikasi t biasa mempresentasikan waktu. Solusi dari sistem persamaan diferensial ini adalah pasangan fungsi diferensiabel kontinu $(x(t), y(t))$ dimana persamaan diferensial ini merupakan persamaan diferensial yang bergantung waktu.

Reduksi orde adalah suatu cara untuk mencari penyelesaian suatu persamaan diferensial (linier) tertentu dengan menurunkan orde persamaan diferensial itu kemudian mencari penyelesaiannya. Hal yang menarik dari reduksi orde adalah bahwa didapatkan suatu penyelesaian kedua yang bebas linier dari suatu persamaan diferensial orde dua dengan koefisien peubah, dengan syarat telah diketahui satu penyelesaian tak trivial (tidak identik nol) dari persamaan diferensial itu (Finizio dan Ladas, 1988). Sedangkan orde dari persamaan

diferensial adalah derajat atau pangkat tertinggi dari turunan yang muncul dalam persamaan diferensial (Waluya, 2006).

2.1.1 Sistem Linier Gerak Vertikal Dawai

Suatu persamaan diferensial orde dua dikatakan linier apabila persamaan itu dapat dituliskan dalam bentuk:

$$\ddot{y} + p(x)\dot{y} + q(x)y = r(x) \quad (2.3)$$

Ciri khas dari persamaan (2.3) adalah linier dalam fungsi y yang tidak diketahui turunan-turunannya, sedangkan p, q , dan r dapat berupa sebarang fungsi dari x yang diberikan. Pada fungsi p dan q dinamakan koefisien persamaan, dan apabila p dan q keduanya berupa konstanta maka persamaan (2.3) disebut persamaan diferensial orde dua dengan koefisien konstan. Jika $r(x) = 0$ maka persamaan (2.3) dikatakan homogen, dan apabila $r(x) \neq 0$ maka dinamakan tidak homogen (Kartono, 2005). Dalam hal ini model gerak vertikal dawai pada persamaan (2.1) merupakan persamaan diferensial homogen orde dua.

Diperhatikan sistem dari dua persamaan diferensial dengan dua fungsi yang tidak diketahui yang berbentuk:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + f_1(t) \\ \dot{x}_2 &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + f_2(t) \end{aligned} \quad (2.4)$$

di mana koefisien $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ dan fungsi f_1, f_2 , semua merupakan fungsi t yang kontinu pada suatu selang I dan x_1, x_2 adalah fungsi t yang tidak diketahui. Seperti biasanya titik di x_1, x_2 dalam persamaan (2.4) menyatakan turunan peubah bebas t .

Dalam menangani sistem persamaan diferensial, biasanya digunakan lambang x_1, x_2, \dots, x_n untuk menyatakan fungsi-fungsi yang tidak diketahui dan

menggunakan t sebagai variabel (peubah) bebas. Dalam bagian ini, definisi-definisi dan teorema-teorema ini dengan mudah diperluas ke sistem n persamaan diferensial linier dengan n fungsi-fungsi yang tidak diketahui dalam bentuk:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ \dot{x}_2 &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\ \dot{x}_3 &= a_{31}(t)x_1 + a_{32}(t)x_2 + \cdots + a_{3n}(t)x_n + f_3(t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t)\end{aligned}\tag{2.5}$$

atau secara singkat,

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j + f_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Cara termudah untuk menyelesaikan sistem persamaan (2.4), yaitu dengan metode eliminasi. Sedangkan untuk sistem persamaan (2.5) cara termudah yaitu dengan metode matriks. Metode ini merupakan metode yang bagus. Akan tetapi penyajian terinci dan bukti kebenarannya memerlukan pengetahuan yang baik tentang analisis matriks dan aljabar linier (Finizio dan Ladas, 1988).

Secara umum, apabila diberikan pada persamaan diferensial linier orde dua, maka:

$$\ddot{x} = -kx - b\dot{x}\tag{2.6}$$

Persamaan (2.6) merupakan model linier dari fungsi pegas, di mana dapat ditulis \dot{x}

untuk $\frac{dx}{dt}$ dan \ddot{x} untuk $\frac{d^2x}{dt^2}$. Untuk menghitung pergerakannya, perlu diketahui

posisi x dan kecepatan \dot{x} . Diketahui bahwa posisi dan kecepatan merupakan kuantitas untuk menghitung gerak, sehingga dapat menggunakan koordinatnya.

Misal $x_1 = x$ dan $x_2 = \dot{x}$, sehingga persamaan (2.6) bisa ditulis sebagai sistem persamaan diferensial linier orde satu, yaitu:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -kx_1 - bx_2 \end{aligned} \quad (2.7)$$

atau dalam notasi matriks:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & -b \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad (2.8)$$

di mana $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ adalah vektor.

Robinson (2004) mengatakan bahwa sistem general dari persamaan diferensial linier tersebut dengan n variabel dengan koefisien konstan dapat ditulis sebagai berikut:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n \\ \dot{x}_2 &= a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,n}x_n \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

di mana untuk semua $a_{i,j}$ adalah konstanta bilangan real. Dengan menggunakan notasi matriks persamaan tersebut dapat ditulis:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (2.10)$$

\mathbf{A} adalah matriks $n \times n$ dengan diberikan konstanta real yang entrinya $a_{i,j}$ dan \mathbf{x} adalah vektor kolom di \mathbb{R}^n ,

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

di sini $(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ adalah transpos dari vektor baris. Pada sistem linier di mana koefisien $a_{i,j}(t)$ adalah fungsi, maka matriks $\mathbf{A}(t)$ bergantung terhadap waktu. Sehingga sistem linier bergantung waktu dapat ditulis:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$$

2.2 Sistem Dinamik Gerak Vertikal Dawai

Sistem persamaan diferensial yang berbentuk:

$$\dot{x} = f(x, y), \quad \dot{y} = g(x, y) \quad (2.12)$$

di mana fungsi-fungsi f dan g bebas dari waktu disebut sistem autonomus.

Sedangkan persamaan (2.12) dengan f dan g bergantung secara eksplisit terhadap waktu t disebut sistem non autonomus. Persamaan diferensial yang berbentuk

$$\dot{x} = f(x, y) \quad (2.13)$$

dapat juga ditulis sebagai sistem autonomus dengan menempatkan

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = f(x, y)$$

Jika (x_0, y_0) sebarang titik di D dan jika t_0 sebarang bilangan real, ada suatu penyelesaian tunggal, yaitu

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (2.14)$$

Dari sistem (2.12) yang terdefinisi di dalam suatu selang $a < t < b$ yang memuat t_0 dan memenuhi syarat awal

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0 \quad (2.15)$$

maka penyelesaian (2.14) menentukan sebuah kurva di ruang tiga dimensi t, x, y .

Apabila dipandang t sebagai parameter, maka t berubah di dalam selang $a < t <$

b , titik $(x(t), y(t))$ menelusuri sebuah kurva yang disebut trayektori atau orbit

dari penyelesaian (2.14) di bidang xy . Dalam kajian dari sistem fisis, pasangan

(x, y) disebut fase dari sistem dan karena itu, bidang x, y pada umumnya disebut

bidang fase (Hariyanto, 1992).

2.2.1 Nilai Eigen, Vektor Eigen dan Persamaan Karakteristik

Jika A adalah matriks $n \times n$ maka vektor tidak nol x pada R^n disebut dengan vektor eigen dari A apabila Ax adalah sebuah kelipatan skalar dari x atau dapat ditulis:

$$Ax = \lambda x$$

Untuk sebarang skalar λ , maka skalar λ disebut dengan nilai eigen dari A , dan x disebut dengan vektor eigen dari A yang terkait dengan λ (Anton dan Rorres, 2004).

Untuk mencari nilai eigen dari suatu matriks A pada $n \times n$ maka dituliskan ulang $Ax = \lambda x$ sebagai, $Ax = \lambda Ix$, atau ekuivalen dengan:

$$(\lambda I - A)x = 0 \tag{2.16}$$

Agar λ menjadi suatu nilai eigen, maka harus ada penyelesaian tak nol dari persamaan ini. Akan tetapi persamaan (2.16) mempunyai suatu penyelesaian tak nol jika dan hanya jika, $\det(\lambda I - A) = 0$, maka ini disebut dengan persamaan karakteristik dari A . Skalar-skalar yang memenuhi persamaan ini adalah nilai eigen dari A . Apabila diperluas, determinan $(\lambda I - A)$ adalah suatu polinomial dalam λ yang disebut polinomial karakteristik dari A . Apabila A adalah matriks $n \times n$, maka polinomial karakteristik A memiliki derajat n dan koefisien variabel λ^n adalah 1. Secara umum, polinomial karakteristik dari matriks $n \times n$ memiliki bentuk:

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + \dots + c_n$$

Menurut teorema dasar Aljabar, bahwa persamaan karakteristik

$$\lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + \dots + c_n = 0,$$

memiliki sebanyak-banyaknya n solusi yang berbeda, sehingga matriks $n \times n$ memiliki paling banyak n nilai eigen yang berbeda.

Untuk setiap pasangan nilai eigen dan vektor eigen $(\lambda_i, \lambda v^i)$ maka ada suatu vektor solusi yang bersesuaian $v^i e^{\lambda_i t}$ untuk matriks A . Jika nilai eigennya $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ dan semua berbeda, maka akan ada n solusi yaitu:

$$v^1 e^{\lambda_1 t}, v^2 e^{\lambda_2 t}, \dots, v^n e^{\lambda_n t}$$

Pada hal ini, solusi umum dari matriks A adalah kombinasi linier dari

$$x = C_1 v^1 e^{\lambda_1 t} + C_2 v^2 e^{\lambda_2 t} + \dots + C_n v^n e^{\lambda_n t}$$

Konstanta C_1, C_2, \dots, C_n bisa diperoleh dengan memberikan nilai awal pada persamaan $v^1 e^{\lambda_1 t}, \dots, v^n e^{\lambda_n t}$ (Boyce & DiPrima, 2001).

2.2.2 Potret Fase di Sekitar Titik Tetap

Titik tetap adalah suatu titik di mana tidak ada perubahan yang terjadi, misal titik tetap untuk $f(x) = 0$. Sedangkan potret fase dari sistem adalah gambar semua trayektori dari suatu sistem (Hariyanto, 1992). Potret fase (*phase portrait*) merupakan salah satu cara untuk menganalisis persamaan diferensial parsial. Proses potret fase lebih cocok pada ruang dua dimensi, misalnya pesawat. Pada potret fase lebih menekankan pada titik tetap, karena titik tetap sangat penting (Robinson, 2004).

Bidang fase merupakan bidang dengan gerakan pergeseran y dan kecepatan v sebagai koordinat persegi panjang. Bidang fase ini sangat penting untuk mempelajari sifat umum suatu solusi, terutama untuk persamaan-persamaan diferensial tidak linier, sering kali tanpa benar-benar memperoleh solusi dalam bentuk yang umum $y = y(t)$, di mana t menyatakan waktu. Suatu sistem fisis dikatakan autonomous apabila persamaan diferensialnya tidak mengandung

variabel bebas secara eksplisit. Pengembangan bidang fase ini mengarah pada sistem persamaan diferensial, yaitu:

$$\dot{x} = f(x, y), \quad \dot{y} = g(x, y)$$

Suatu titik di mana nilai f dan g adalah nol dinamakan titik kritis. Suatu sistem seperti ini di mana variabel bebas tidak muncul secara eksplisit dinamakan sistem otonom. Solusi $x(t), y(t)$ dan sistem autonomous menyatakan kurva C pada bidang $-xy$ dan dinamakan kurva solusi atau lintasan (yang juga kadang-kadang dinamakan trayektori) dari sistem autonomous. Arah pertambahan t dinamakan arah positif pada C dan dapat ditandai dengan kepala panah. Arah ini menentukan suatu orientasi pada C . Jika t menyatakan waktu dan C menyatakan lintasan dari suatu benda yang bergerak, maka arah positif adalah arah gerak benda sepanjang C selama berjalannya waktu. Penyelidikan sifat umum dari solusi-solusi di sekitar titik ini adalah sangat penting untuk memutuskan penggolongan titik ini dan stabilitasnya, sebagaimana diringkaskan secara grafik pada grafik stabilitas. Program aplikasi *Maple* telah menyediakan fasilitas untuk dapat menggambarkan bidang fase ini, yaitu *phase portrait* yang tersimpan di *DEtools library*, dengan mengetik “*with(DEtools): phaseportrait (dpers, vars, range, inisial, pers);*” di mana *dpers* adalah himpunan dari persamaan diferensial orde satu atau persamaan tunggal dari sebarang orde, *vars* adalah himpunan variabel tidak bebas, *range* adalah jangkauan dari variabel bebas, *inisial* adalah syarat awal untuk kurva-kurva solusi, dan *pers* adalah persamaan pilihan dari bentuk kata kunci (Kartono, 2005).

2.2.3 Kestabilan Titik Tetap Sistem Dinamik

Nilai eigen merupakan nilai yang diperoleh sebagai solusi dari persamaan karakteristik dari matriks Jacobi. Nilai eigen dapat menyimpulkan bentuk kestabilan suatu sistem. Asumsikan bahwa panah atau garis vektor x berbeda dari vektor nol. Nol vektor $x = 0$ selalu membuat persamaan $Ax = \lambda x$.

Tindakan A pada vektor eigen menjadi bentuk sederhana, jika menerapkan A pada suatu vektor eigen x . Vektor eigen memiliki suatu penafsiran geometris jika nilai eigen adalah λ bernilai riil, yaitu garis lurus melalui arah asal dari suatu vektor eigen.

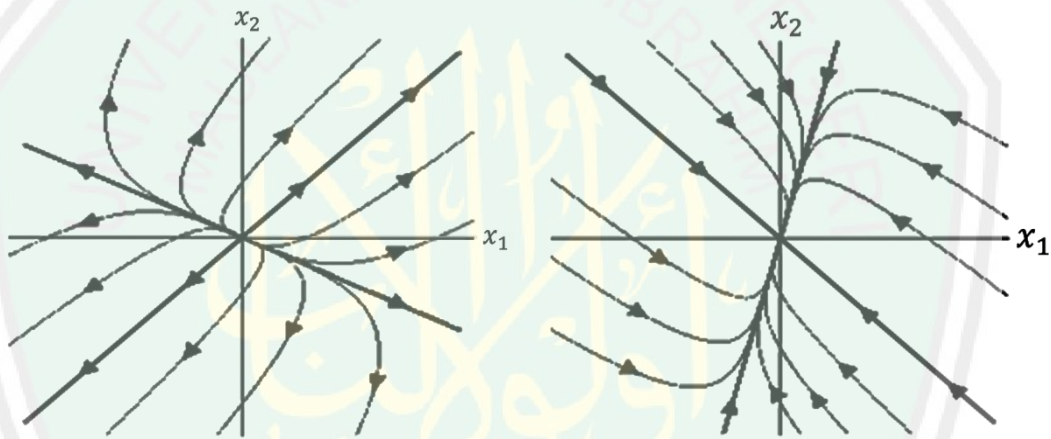
Teorema 2.1

Diberikan persamaan diferensial linier $\dot{x} = Ax$,

1. Jika semua nilai eigen λ dari A mempunyai bagian riil negatif, maka titik asal merupakan stabil asimtotik.
2. Jika salah satu nilai eigen λ_1 mempunyai bagian riil positif dan nilai eigen yang lainnya mempunyai bagian riil yang negatif, maka titik asalnya tidak stabil. Khususnya, pada pelana (*saddle*) masih memenuhi kondisi yang tidak stabil.
3. Dalam dua dimensi, jika nilai eigennya imajiner asli $\pm i\beta$, maka titik asalnya merupakan stabil tetapi bukan stabil asimtotik.
4. Dalam dua dimensi, jika salah satu nilai eigen adalah nol dan yang lain negatif, maka titik asalnya merupakan stabil tetapi bukan stabil asimtotik (Robinson, 2004).

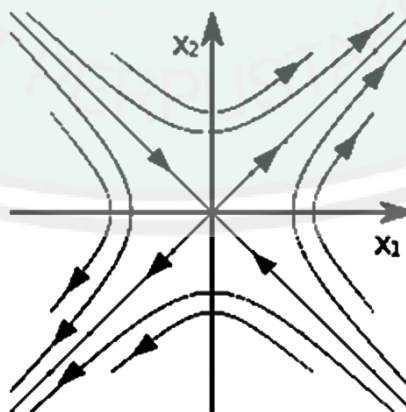
Tabel 2.1. Kestabilan Titik Tetap Sistem Dinamik Linier (Boyce & DiPrima, 2001)

No.	Nilai Eigen	Kestabilan	Jenis
1.	$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$	-	-
2.	$\lambda_1, \lambda_2 > 0$	Tidak Stabil	<i>Node / Simpul</i>
3.	$\lambda_1, \lambda_2 < 0$	Stabil Asimtotik	<i>Node / Simpul</i>
4.	$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$	Tidak Stabil	<i>Saddle / Pelana</i>
5.	$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	Tidak Stabil	<i>Node / Simpul</i>
6.	$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	Stabil Asimtotik	<i>Node / Simpul</i>
7.	$\lambda_{1,2} = a \pm bi \in \mathbb{C}$	-	-
8.	$a > 0$	Tidak Stabil	Spiral
9.	$a < 0$	Stabil Asimtotik	Spiral
10.	$a = 0$	Stabil	Terpusat / center

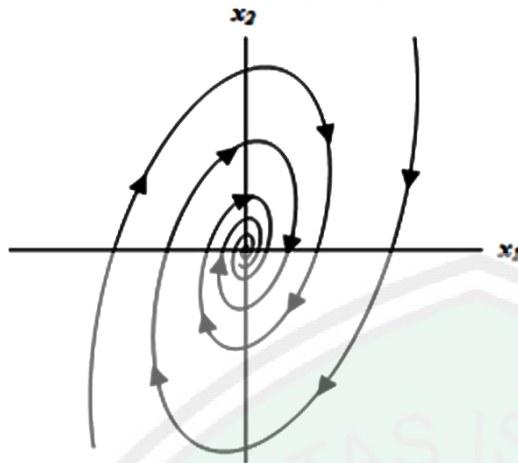


Gambar 2.1 Potret Fase dengan Node Tidak Stabil (Robinson, 2004)

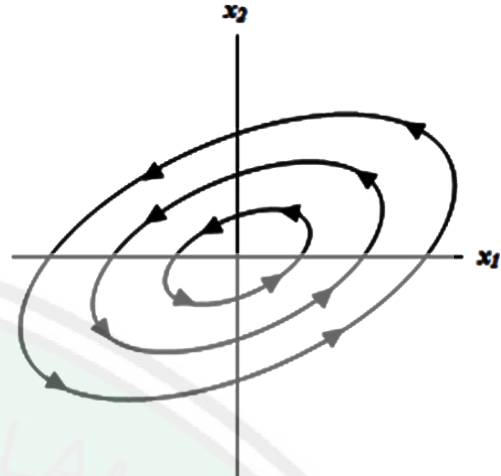
Gambar 2.2 Potret Fase dengan Node Stabil (Robinson, 2004)



Gambar 2.3 Potret Fase Pelana (Robinson, 2004)



Gambar 2.4 Potret Fase dengan Stabil Fokus Spiral (Robinson, 2004)



Gambar 2.5 Potret Fase Mengelilingi Pusat Elips (Robinson, 2004)

Diperhatikan pada gambar untuk kasus pada potret fase yang berbentuk spiral, dimana pada kasus ini nilai eigennya adalah kompleks yang dapat dinyatakan sebagai $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$. Hal ini akan menghasilkan perilaku yang berbentuk spiral di mana kestabilannya ditentukan oleh tanda dari bagian riil α . Apabila $\alpha > 0$, maka titik kritis atau titik ekuilibriumnya akan tidak stabil. Namun apabila $\alpha < 0$, maka titik kritis atau titik ekuilibriumnya akan stabil dan semua trayektori menuju titik tetap (Waluya, 2006). Dalam hal ini dapat dikatakan perilaku $y(t)$ pada model gerak vertikal dawai adalah stabil asimtotik karena nilai eigen adalah riil yang kompleks.

2.3 Penelitian Terdahulu

Secara umum gerak osilasi sebenarnya teredam. Dimisalkan dengan contoh lain dari penelitian ini adalah kasus dari pegas bergetar dengan redaman. Pada keadaan sesungguhnya, suatu pegas bergetar paling sering dipengaruhi oleh gaya gesekan atau gaya-gaya lain (sebagai contoh, gesekan udara) yang bekerjanya memperlambat (meredam) gerakan dan akhirnya menyebabkan sistem

itu berhenti. Jadi wajar apabila memisalkan bahwa pegas itu dipengaruhi oleh gaya redaman. Secara umum, gaya redaman susah dirumuskan secara tepat, akan tetapi percobaan telah menunjukkan bahwa besarnya redaman hampir berbanding dengan kecepatan massa, dengan syarat kecepatan massa itu kecil. Tentu saja gaya redaman seperti yang diutarakan sebelumnya, arahnya berlawanan dengan gaya pada massanya. Jadi, gaya redaman negatif bila $\frac{dy}{dt}$ positif dan gaya redaman positif bila $\frac{dy}{dt}$ negatif. Dengan demikian, dapat dinyatakan gaya redaman sebagai $-\alpha\left(\frac{dy}{dt}\right)$, di mana $\alpha > 0$ disebut konstanta redaman (Finizio dan Ladas, 1988).

Selain dari gerakan pegas bergetar adalah gerak vertikal dawai yang sesungguhnya juga dipengaruhi oleh gaya redaman (perlambatan). Persamaan pegas bergetar dengan redaman, yaitu:

$$\ddot{y} + \frac{\alpha}{m}\dot{y} + \frac{K}{m}y = 0$$

di mana $\alpha > 0$ merupakan konstanta redaman, $K > 0$ adalah konstanta pegas, dan $m > 0$ adalah massa. Untuk menghindari pecahan, sangat tepat bila diambil $2a = \frac{\alpha}{m}$ dan $b^2 = \frac{K}{m}$, $b > 0$. Jadi, persamaan gerakan itu berbentuk:

$$\ddot{y} + 2a\dot{y} + b^2y = 0 \tag{2.17}$$

Persamaan karakteristik yang sesuai dengan persamaan (2.17) adalah:

$$\lambda^2 + 2a\lambda + b^2 = 0$$

Sehingga akar-akar karakteristik persamaan tersebut adalah:

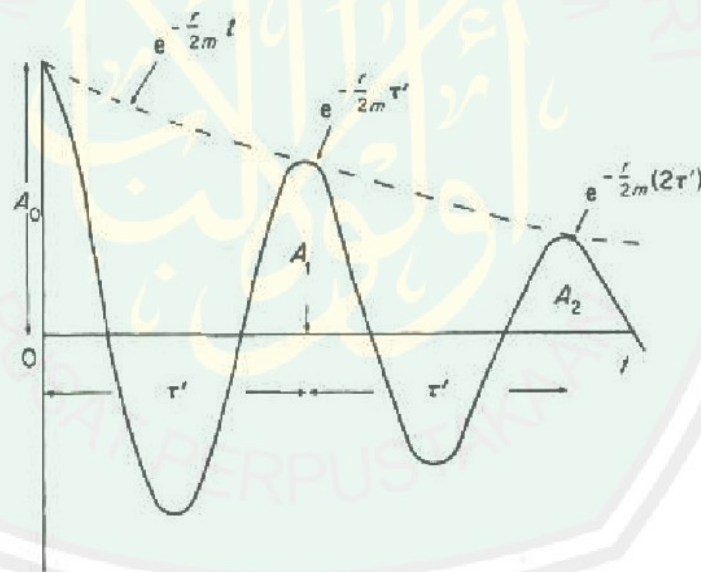
$$\lambda_1 = -a + \sqrt{a^2 - b^2} \text{ dan } \lambda_2 = -a - \sqrt{a^2 - b^2}$$

sehingga bentuk penyelesaian umum persamaan (2.17) tergantung sangat erat pada sifat akar-akar karakteristik di atas. Tiga kasus yang mungkin terjadi dibicarakan terpisah (Finizio dan Ladas, 1988).

Kasus 1: $b^2 > a^2$ maka ($b > a$) maka penyelesaian umum persamaan (2.14) berbentuk:

$$y(t) = e^{-at}(c_1 \cos\sqrt{b^2 - a^2}t + c_2 \sin\sqrt{b^2 - a^2}t)$$

Secara grafik, penyelesaian itu seperti terlihat dalam Gambar 2.6. Telah diamati bahwa gerakan $y(t)$ berosilasi sepanjang sumbu t , dan dengan alasan ini, digunakan istilah osilasi untuk gerakan ini. Akan tetapi, perlu diperhatikan bahwa amplitudo dari gerakan itu mengecil apabila waktu berjalan terus. Keadaan ini dikenal dengan sebutan kurang redam, dalam arti banyaknya redaman (konstanta redam) lebih kecil dari kekakuan pegas, oleh karena itu tidak cukup meredamkan osilasi itu.



Gambar 2.6 Gerakan Meredam pada Pegas Bergetar (Finizio dan Ladas, 1988).

Kasus 2: $b^2 = a^2$ maka ($b = a$). Penyelesaian umum persamaan (2.17) berbentuk:

$$y(t) = e^{-at}(c_1 t + c_2 t)$$

Karena $y(t)$ tidak memuat suku-suku sinus dan cosinus maka tidak ada getaran (osilasi). Tetapi, dengan berpedoman pada kasus 1, dengan sadar bahwa

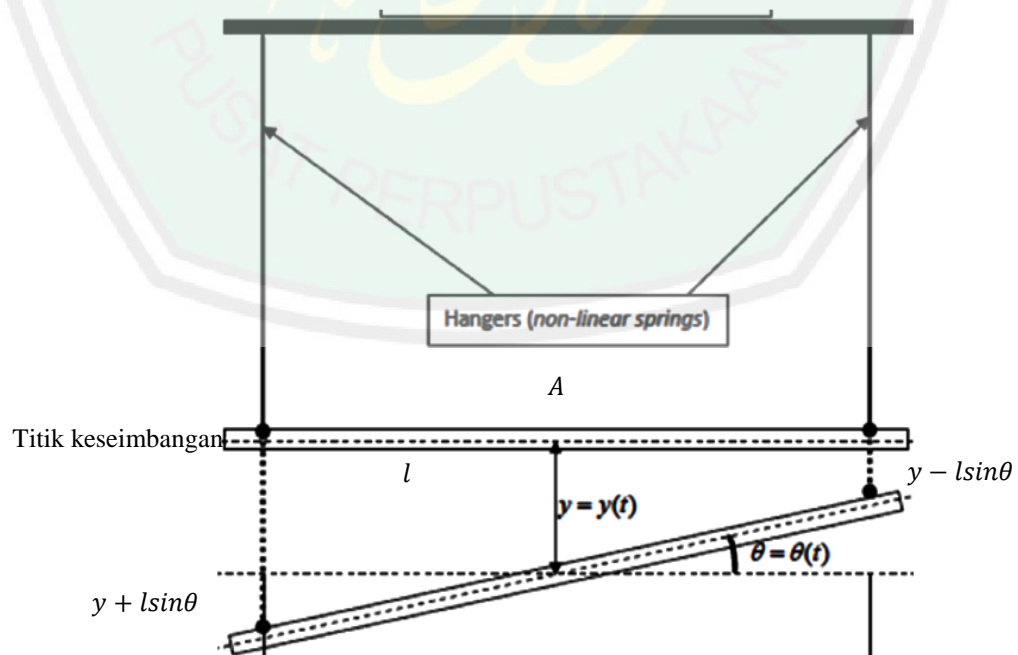
pengurangan redaman yang terkecil pun akan memberikan getaran. Sehingga pada kasus ini disebut redam kritis.

Kasus 3: $b^2 < a^2$ maka ($b < a$). Maka penyelesaian umum persamaan (2.17) berbentuk:

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

dengan λ_1 dan λ_2 kedua-duanya bilangan negatif. Dalam hal ini tidak ada osilasi dan grafik penyelesaiannya menghampiri sumbu t dengan sangat cepat bila waktu berjalan terus. Hal ini berarti gaya redaman yang menyebabkan sistem itu sangat cepat pada saat diperlambat, yaitu sangat kuat. Kasus ini dikenal sebagai terlampaui redam (Finizio dan Ladas, 1988).

Pada model gerakan dawai, McKenna menganggap penampang horizontal dawai sebagai batang (balok) dengan panjang $2l$ dan massa m yang ditanggihkan dengan kawat nonlinier, disini $y(t)$ adalah lendutan yang menunjukkan jarak ke bawah pusat gravitasi batang (Ohene, 2012).



Gambar 2.7 Gerak Vertikal Dawai $y(t)$ (Ohene, 2012).

Diasumsikan bahwa kawat (dawai) vertikal tidak pernah kehilangan tegangan. Apabila gaya yang bekerja pada dawai dihilangkan, maka dawai tersebut akan kembali pada keadaan semula. Hal ini seperti pada kasus pegas yang mengikuti Hukum Hooke, yaitu hukum atau ketentuan mengenai gaya dalam bidang ilmu fisika yang terjadi karena sifat elastisitas dari sebuah pegas. Pada Gambar 2.7, menunjukkan bahwa gerakan dari dua buah kawat menggantung pada sebuah balok dengan mengalami pembebanan gaya berat (gaya gravitasi yang bekerja pada benda) sebesar A . Akibat dari beban A maka perubahan lendutan $y(t)$ bagian kanan maupun kiri adalah sebesar $y - l \sin \theta$ dan $y + l \sin \theta$. Telah dijelaskan sebelumnya bahwa kasus gerak vertikal dawai ini tidak lain seperti pegas bergetar yang dipengaruhi oleh gaya redaman. Akibat dari gaya redaman menyebabkan sistem itu berhenti. Sehingga amplitudo dari gerakan naik turunnya $y(t)$ itu semakin lama mengecil apabila waktu berjalan terus menerus.

McKenna (1999) menunjukkan bahwa besar kecilnya hasil akhir gerakan periodik bergantung pada kondisi awal. Gaya pada dawai sebanding dengan pemanjangan pada dawai. Pada Gambar 2.7 ditunjukkan bahwa perpanjangan pada dawai bagian kanan adalah $(y - l \sin \theta)$. Oleh karena itu gaya yang digunakan pada bagian kanan adalah

$$-K(y - l \sin \theta)^+ = \begin{cases} -K(y - l \sin \theta), & y - l \sin \theta \geq 0 \\ 0, & y - l \sin \theta \leq 0 \end{cases} \quad (2.18)$$

Dengan cara yang sama, gaya yang digunakan pada dawai bagian kiri adalah

$$-K(y + l \sin \theta)^+ = \begin{cases} -K(y + l \sin \theta), & y + l \sin \theta \geq 0 \\ 0, & y + l \sin \theta \leq 0 \end{cases} \quad (2.19)$$

Penurunan persamaan ini mengikuti energi potensial (EP) pada dawai dengan konstanta spring K dan merentang sejauh x dari titik keseimbangan.

$$EP = \int kx dx = \frac{1}{2} kx^2 \quad (2.20)$$

di sini energi potensial total dari dawai kanan maupun kiri pada gambar 2.9 adalah

$$EP_{total} = \frac{1}{2} K(((y - l \sin\theta)^+)^2 + ((y + l \sin\theta)^+)^2) \quad (2.21)$$

Energi potensial EP_{balok} , beban dari batang dengan massa m yang mengalami perubahan posisi ke bawah dari posisi kesetimbangan dengan jarak y adalah sebagai berikut:

$$EP_{balok} = -mgy$$

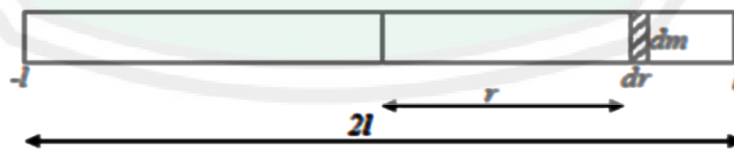
di mana g adalah gaya gravitasi. Sehingga pada energi potensial total dari model dawai dan batang adalah:

$$EP_M = \frac{K}{2} (((y - l \sin\theta)^+)^2 + ((y + l \sin\theta)^+)^2) - mgy \quad (2.22)$$

Kemudian dilanjutkan untuk energi kinetik total EK_M , karena pada pergerakan vertikal energi kinetik dari pusat massa batang adalah

$$EK_{vertikal} = \frac{1}{2} m\dot{y}^2$$

di mana \dot{y} adalah kecepatan dari berat batang.



Gambar 2.8 Partisi Balok Sebesar dm (Ohene, 2012).

EK_{balok} pada bagian yang sangat kecil dari batang dengan massa dm yang berada sejauh r dari pusat balok yang ditunjukkan pada gambar 2.8 di atas, maka energi kinetik pada massa dm adalah

$$EK_{dm} = \frac{1}{2} dm(r\dot{\theta})^2$$

Dimana $r\dot{\theta}$ adalah kecepatan linier v dari bagian yang sangat kecil dm . Disini massa balok adalah m dan panjangnya adalah $2l$, maka:

$$dm = \frac{m}{2l} dr$$

Berdasarkan pada prinsip *least action* gerakan balok memenuhi persamaan Euler-Lagrange, sehingga:

untuk $\frac{\partial L}{\partial y}$ adalah:

$$\frac{\partial L}{\partial y} = m\dot{y}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = m\ddot{y}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -K[(y - l \sin\theta)^+ - (y + l \sin\theta)^+] + mg$$

Kemudian $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$ menjadi:

$$m\ddot{y} = -K[(y - l \sin\theta)^+ - (y + l \sin\theta)^+] + mg \quad (2.23)$$

dengan penyederhanaan dan penambahan redaman $\delta\dot{y}$ untuk persamaan (2.23), maka diperoleh sistem persamaan diferensial orde dua sebagai berikut:

$$\ddot{y} = -\frac{K}{m}[(y - l \sin\theta)^+ - (y + l \sin\theta)^+] - \delta\dot{y} + g \quad (2.24)$$

Diasumsikan bahwa kabel tidak pernah kehilangan tegangan, maka dipunyai $y \pm l \sin\theta \geq 0$. Oleh karena itu $(y \pm l \sin\theta)^+ = y \pm l \sin\theta$. Sehingga pada persamaan (2.24) menjadi gerak vertikal, yaitu:

$$\ddot{y} = -\frac{2K}{m}y - \delta\dot{y} + g \quad (2.25)$$

Sehingga pada penelitian Ohene (2012) persamaan (2.25) merupakan model persamaan yang diusulkan McKenna.

2.4 Kajian Agama Model Gerak Vertikal Dawai dalam Al-Quran

Telah dijelaskan sebelumnya bahwa hidup itu bersifat dinamis, yang kadang kala kehidupan memberikan seribu masalah dengan kesedihan atau kesenangan sehingga membuat seseorang dapat menangis atau tertawa. Dinamika gerak vertikal dawai merupakan salah satu contoh refleksi pada kehidupan manusia. Allah Swt. berfirman dalam al-quran surat al-Hadid/57:20, yaitu:

أَعْلَمُوا أَنَّمَا الْحَيَاةُ الدُّنْيَا لَعِبٌ وَهَوٌّ وَزِينَةٌ وَتَفَاخُرٌ بَيْنَكُمْ وَتَكَاثُرٌ فِي الْأَمْوَالِ وَالْأَوْلَادِ كَمَثَلِ غَيْثٍ أَعْجَبَ الْكُفَّارَ نَبَاتُهُ ثُمَّ يَهَيِّجُ فَتْرَتَهُ مُصْفَرًّا ثُمَّ يَكُونُ حُطَمًا ۗ وَفِي الْآخِرَةِ عَذَابٌ شَدِيدٌ وَمَغْفِرَةٌ مِّنَ اللَّهِ وَرِضْوَانٌ ۗ وَمَا الْحَيَاةُ الدُّنْيَا إِلَّا مَتَاعُ الْغُرُورِ ﴿٢٠﴾

“Ketahuilah, bahwa sesungguhnya kehidupan dunia ini hanyalah permainan dan suatu yang melalaikan, perhiasan dan bermegah-megahan antara kamu serta berbangga-banggaan tentang banyaknya harta dan anak, seperti hujan yang tanam-tanamannya mengagumkan para petani. Kemudian tanaman itu menjadi kering dan kamu lihat warnanya kuning kemudian menjadi hancur, dan di akhirat (nanti) ada azab yang keras dan ampunan dari Allah serta keridhaan-Nya, dan kehidupan dunia ini tidak lain hanyalah kesenangan yang menipu” (QS. al-Hadid/57:20).

Ayat tersebut diumpamakan bahwa manusia yang berbangga-bangga dengan bermain-main, bersenda gurau, berhias, berbangga-bangga karena pangkat dan kedudukan, serta banyak anak maupun harta benda. Kebanggaan dengan harta dunia dan ketakjuban petani melihat hujan turun, maka hal seperti itu tidak patut untuk lebih dibangga-banggakan, karena pada hakikatnya manusia tidak berkuasa. Sudah sering terjadi bahwa kejadian sawah yang telah kuning padinya, tiba-tiba hancur karena diterpa angin ribut. Sawah yang telah hijau padinya dan kelihatan subur karena telah diberi pupuk, tiba-tiba habis dalam sekejap karena dilanda banjir air hujan. Toko dan kedai besar yang didirikan dengan bersusah payah memakan waktu bertahun-tahun, tiba-tiba habis dimakan api dalam waktu semalam. Bahkan seseorang yang terlihat sehat, lalu besok paginya jatuh sakit dan

dikabarkan telah meninggal dunia. Ujung dari ayat ini menjelaskan bahwa barang siapa yang telah dapat menjadikan hidup di dunia untuk menanam dan akhirat untuk memetik. Hidup dunia untuk beriman dan beramal yang shalih maka di akhirat untuk menerima ganjarannya (Amrullah, 1977).

Adanya kehidupan akhirat dengan berbagai permasalahannya, merupakan masalah yang hanya dapat diimani, yaitu mengimani berdasarkan informasi yang diberikan oleh Allah Swt. dan atas dasar keyakinan ini, maka untuk mendapatkan informasi yang lengkap tentang kehidupan akhirat harus merujuk kepada informasi yang diberikan Allah di dalam al-Quran. Dalam surat al-Baqarah/2:286 Allah Swt. berfirman:

لَا يُكَلِّفُ اللَّهُ نَفْسًا إِلَّا وُسْعَهَا لَهَا مَا كَسَبَتْ وَعَلَيْهَا مَا اكْتَسَبَتْ رَبَّنَا لَا تُؤَاخِذْنَا إِنْ نَسِينَا أَوْ
أَخْطَأْنَا رَبَّنَا وَلَا تَحْمِلْ عَلَيْنَا إَصْرًا كَمَا حَمَلْتَهُ عَلَى الَّذِينَ مِنْ قَبْلِنَا رَبَّنَا وَلَا تُحَمِّلْنَا مَا
لَا طَاقَةَ لَنَا بِهِ ۗ وَاعْفُ عَنَّا وَارْحَمْنَا ۗ أَنْتَ مَوْلَانَا فَانصُرْنَا عَلَى الْقَوْمِ
الْكَافِرِينَ ﴿٢٨٦﴾

"Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya. ia mendapat pahala (dari kebajikan) yang diusahakannya dan ia mendapat siksa (dari kejahatan) yang dikerjakannya. (mereka berdoa): "Ya Tuhan kami, janganlah Engkau hukum kami jika kami lupa atau kami bersalah. Ya Tuhan kami, janganlah Engkau bebaskan kepada kami beban yang berat sebagaimana Engkau bebaskan kepada orang-orang sebelum kami. Ya Tuhan kami, janganlah Engkau pikulkan kepada kami apa yang tak sanggup kami memikulnya. Beri ma'afilah kami, ampunilah kami, dan rahmatilah kami. Engkaulah penolong kami, Maka tolonglah kami terhadap kaum yang kafir"(QS. al-Baqarah/2:286).

Ayat tersebut menjelaskan bahwa Allah Swt. tidak akan memberikan cobaan atau beban kepada hamba-Nya di luar batas kesanggupannya melainkan sesuai dengan kemampuan mereka. Setiap jiwa akan mendapat pahala kebaikan yang dilakukannya dan dosa atas kejahatan yang dilakukannya, Allah Swt. mengampuni atas segala yang dilakukan oleh hamba-Nya, baik itu yang

dihalalkan ataupun yang diharamkan oleh Allah Swt., karena Allah Swt. sangat memudahkan syari'at-Nya dan tidak membebani mereka hal-hal yang berat dan sulit sebagaimana yang dibebankan kepada orang-orang dahulu sebelum mereka, serta tidak membebankan mereka sesuatu yang di luar batas kemampuan mereka.

Sebagaimana dawai McKenna (1999) yang menggantung pada sebuah balok dengan diberi beban, di mana beban tersebut mengakibatkan gerakan naik turun atau lendutan $y(t)$. Dengan adanya beban pada balok, maka yang terjadi adalah lendutan ke bawah atau gerakan $y(t)$ menjadi turun ke bawah. Apabila Allah Swt. menghendaki tidak adanya beban pada balok, maka tidak ada pula lendutan atau gerakan turun ke bawah. Dengan demikian dawai menjadi stabil dalam posisi seimbang. Apabila Allah Swt. menghendaki adanya beban bahkan beban yang berat sekalipun maka yang terjadi lendutan atau gerakan $y(t)$ yang turun ke bawah dan begitu seterusnya. Sehingga terjadilah gerakan naik turun secara berulang-ulang pada dawai. Dengan demikian dari penjelasan tersebut, semua kejadian di alam semesta ini hanya Allah Swt. yang berkuasa dan Dia Maha Menentukan segala sesuatu sesuai dengan kehendak-Nya.

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Model Matematika pada Gerak Vertikal Dawai

Dalam pembahasan ini, penulis mengkhususkan kemungkinan yang terjadi pada perilaku gerak vertikal pada dawai. Kemudian variabel-variabel yang digunakan pada model gerak vertikal dawai ini diambil dari jurnal yang dirumuskan oleh McKenna (1999). Model matematika gerak vertikal dawai yang dirumuskan oleh McKenna (1999) adalah:

$$\ddot{y} = -\frac{K}{ml} [(y - l \sin \theta)^+ + (y + l \sin \theta)^+] - \delta \dot{y} + g \quad (3.1)$$

di mana:

$y(t)$ adalah lendutan (*downward distance*) yang menyatakan besarnya jarak perpindahan batang ke bawah dari titik keseimbangan

δ adalah nilai parameter konstan

K adalah konstanta pegas pada dawai

g adalah gaya gravitasi

Dengan asumsi bahwa kawat (dawai) tidak pernah kehilangan tegangan, maka dipunyai $y \pm l \sin \theta \geq 0$. Oleh karena itu, McKenna (1999) mengasumsikan $(y \pm l \sin \theta)^+ = y \pm l \sin \theta$. Sehingga persamaan untuk gerak vertikal dawai adalah sebagai berikut:

$$\ddot{y} = -\frac{K}{m} [(y - l \sin \theta)^+ + (y + l \sin \theta)^+] - \delta \dot{y} + g$$

$$\ddot{y} = -\frac{K}{m} [(y - l \sin \theta) + (y + l \sin \theta)] - \delta \dot{y} + g$$

$$\ddot{y} = -\frac{K}{m} [y - l \sin \theta + y + l \sin \theta] - \delta \dot{y} + g$$

$$\ddot{y} = -\frac{K}{m} [y + y - l \sin \theta + l \sin \theta] - \delta \dot{y} + g$$

$$\ddot{y} = -\frac{K}{m}[2y] - \delta\dot{y} + g$$

sehingga model gerak vertikal dawai yang terbentuk adalah:

$$\ddot{y} = -\frac{2K}{m}y - \delta\dot{y} + g \quad (3.2)$$

karena gaya gravitasi g pada penelitian ini diabaikan, maka nilai g adalah nol sehingga model matematika gerak vertikal dawai menjadi:

$$\ddot{y} = -\frac{2K}{m}y - \delta\dot{y}$$

atau dapat ditulis menjadi,

$$\ddot{y} + \delta\dot{y} + \frac{2K}{m}y = 0 \quad (3.3)$$

3.2 Analisis Perilaku Model Gerak Dawai

Persamaan (3.3) merupakan persamaan diferensial biasa homogen orde dua yang akan direduksi ke dalam bentuk persamaan diferensial linier orde satu. Cara mereduksi persamaan diferensial biasa orde dua menjadi sistem linier yaitu dengan memperkenalkan variabel baru untuk menggantikan derivatif pertama. Dengan mendefinisikan variabel baru yang mana pemisalannya adalah:

$$y_1 = y \text{ dan,}$$

$$y_2 = \dot{y}. \quad (3.4)$$

dari pemisalan (3.4) sehingga didapatkan turunan dari (3.4) yaitu y_1 dan y_2 terhadap t maka akan diperoleh:

$$\dot{y}_1 = \dot{y} \text{ dan}$$

$$\dot{y}_2 = \ddot{y} \quad (3.5)$$

Selanjutnya disubstitusikan variabel baru ke persamaan (3.3) untuk memperoleh sistem persamaan diferensial. Sehingga didapatkan:

$$\dot{y}_1 = \dot{y} = y_2$$

$$\dot{y}_2 = \ddot{y} = -\frac{2K}{m}y_1 - \delta y_2$$

maka dapat ditulis secara singkat:

$$\dot{y}_1 = y_2$$

$$\dot{y}_2 = -\frac{2K}{m}y_1 - \delta y_2 \quad (3.6)$$

di mana y_1 dan y_2 adalah lendutan (*downward distance*) yang menyatakan besarnya jarak perpindahan batang ke bawah dari titik kesetimbangan. Konstanta $\frac{2K}{m}$ dan δ didasarkan pada observasi empirik.

Apabila persamaan (3.6) dinotasikan ke dalam matriks maka dapat ditulis:

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2K}{m} & -\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

atau persamaan (3.7) dapat ditulis:

$$\dot{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2K}{m} & -\delta \end{pmatrix} \mathbf{y} \quad (3.8)$$

didefinisikan untuk \mathbf{A} adalah matriks $n \times n$ dengan diberikan konstanta riil yang entrinya a_{ij} maka dapat ditulis:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2K}{m} & -\delta \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

sehingga nilai eigennya dapat diperoleh dari persamaan karakteristik dari \mathbf{A} sebagai berikut:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$$

$$\det \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2K}{m} & -\delta \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$\det \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2K}{m} & -\delta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{2K}{m} & -\delta - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

sehingga persamaan karakteristiknya adalah:

$$(-\lambda(-\delta - \lambda)) - \left(-\frac{2K}{m}\right)(1) = 0$$

$$(\delta\lambda + \lambda^2) - \left(-\frac{2K}{m}\right) = 0$$

$$(\delta\lambda + \lambda^2) + \left(\frac{2K}{m}\right) = 0$$

$$\lambda^2 + \delta\lambda + \frac{2K}{m} = 0$$

maka akar-akar yang diperoleh adalah:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{-\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{2K}{m}}}{2} \\ &= \frac{-\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2} \end{aligned} \quad (3.10)$$

maka dapat disimpulkan bahwa nilai eigen dari \mathbf{A} adalah:

$$\lambda_1 = \frac{-\delta + \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2} \text{ dan } \lambda_2 = \frac{-\delta - \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2}.$$

Setelah diperoleh nilai-nilai eigennya untuk selanjutnya yaitu mencari vektor eigen dari \mathbf{A} adalah sebagai berikut:

$$\text{Untuk } \lambda_1 = \frac{-\delta + \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2}$$

maka diperoleh:

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{v} - \lambda_1 \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{v}$$

kemudian dapat ditulis:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2K}{m} & -\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} v_2 \\ -\frac{2K}{m}v_1 - \delta v_2 \end{pmatrix} = \frac{-\delta + \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

kemudian nilai pada ruas kanan dikalikan dengan vektornya sehingga diperoleh:

$$\begin{pmatrix} v_2 \\ -\frac{2K}{m}v_1 - \delta v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{-\delta + \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2} \right) v_1 \\ \left(\frac{-\delta + \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2} \right) v_2 \end{pmatrix}$$

dapat ditulis dalam bentuk lain, yaitu:

$$\begin{pmatrix} v_2 \\ -\frac{2K}{m}v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{-\delta + \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2} \right) v_1 \\ \left(\frac{-\delta + \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2} \right) v_2 + \delta v_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} v_2 \\ -\frac{2K}{m}v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{-\delta + \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2} \right) v_1 \\ \left(\frac{\delta + \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2} \right) v_2 \end{pmatrix}$$

pada kesamaan letak elemen matriks di atas sehingga diperoleh dua persamaan

yakni:

$$v_2 = \left(\frac{-\delta + \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2} \right) v_1$$

sehingg untuk v_1 diperoleh:

$$v_1 = -\frac{m}{4K} \left(\delta + \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}} \right) v_2$$

dimisalkan untuk $v_1 = -\frac{m}{4K} \left(\delta + \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}} \right) v_2 = s$

sehingga $v_2 = \left(\frac{-\delta + \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2} \right) s$

maka diperoleh:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} s \\ \left(\frac{-\delta + \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2} \right) s \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ \left(\frac{-\delta + \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2} \right) \end{pmatrix} s \end{aligned}$$

Dapat disimpulkan vektor eigennya adalah:

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ \left(\frac{-\delta + \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2} \right) \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

Selanjutnya untuk $\lambda_2 = \frac{-\delta - \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2}$

Maka,

$$(A - \lambda I)u = 0$$

$$Au - \lambda_2 u = 0$$

$$Au = \lambda_2 v$$

kemudian dapat ditulis dalam bentuk:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2K}{m} & -\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_2 \\ -\frac{2K}{m}u_1 - \delta u_2 \end{pmatrix} = \frac{-\delta - \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

kemudian nilai pada ruas kanan dikalikan dengan vektornya sehingga diperoleh:

$$\begin{pmatrix} u_2 \\ -\frac{2K}{m}u_1 - \delta u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{-\delta - \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2} \right) u_1 \\ \left(\frac{-\delta - \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2} \right) u_2 \end{pmatrix}$$

kemudian dapat ditulis dalam bentuk lain sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} u_2 \\ -\frac{2K}{m}u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{-\delta - \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2} \right) u_1 \\ \left(\frac{-\delta - \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2} \right) u_2 + \delta u_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_2 \\ -\frac{2K}{m}u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{-\delta - \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2} \right) u_1 \\ \left(\frac{\delta - \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2} \right) u_2 \end{pmatrix}$$

pada kesamaan letak elemen matriks di atas sehingga diperoleh dua persamaan yakni:

$$u_2 = \left(\frac{-\delta - \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2} \right) u_1$$

sehingga untuk u_1 adalah:

$$u_1 = -\frac{m}{4K} \left(\delta - \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}} \right) u_2$$

$$\text{dimisalkan untuk } u_1 = -\frac{m}{4K} \left(\delta - \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}} \right) u_2 = s$$

sehingga untuk u_2 adalah:

$$u_2 = \left(\frac{-\delta - \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2} \right) s$$

maka diperoleh:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} s \\ \left(\frac{-\delta - \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2} \right) s \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ \left(\frac{-\delta - \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2} \right) \end{pmatrix} s \end{aligned}$$

Jadi dapat disimpulkan vektor eigennya adalah:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ \left(\frac{-\delta - \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2} \right) \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

Dari proses perhitungan nilai eigen dan vektor eigen secara umum di atas, selanjutnya apabila pada model gerak vertikal dawai diberikan dengan berbagai variasi perubahan parameter, maka terdapat kemungkinan dalam beberapa kasus untuk perilaku $y(t)$ dari model gerak vertikal dawai ini, yaitu:

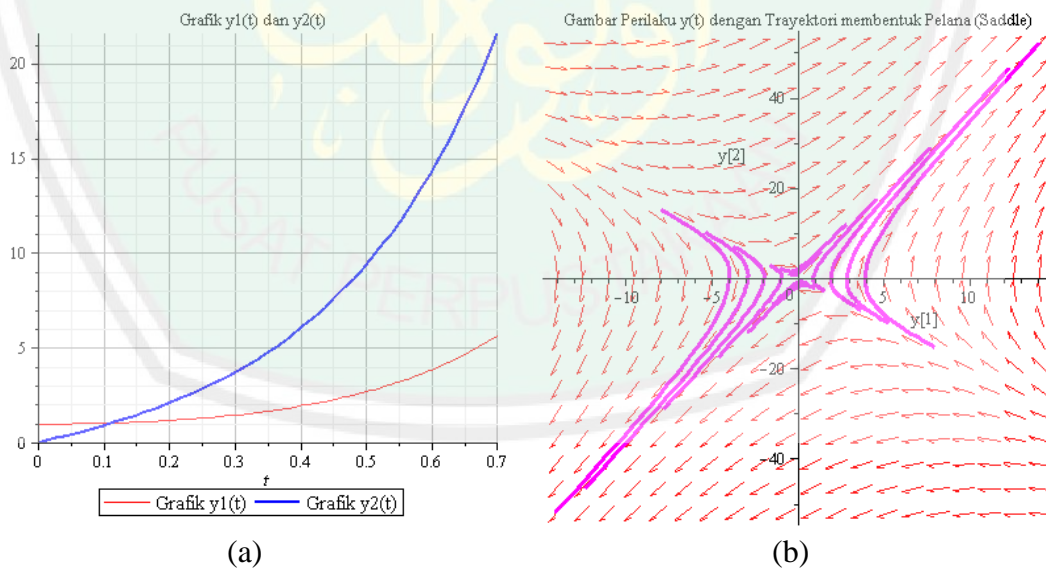
Kasus 1: Apabila parameter yang di substitusikan $K = -8, m = 2, \delta = -2$.

Pada kasus ini, apabila parameter yang disubstitusikan ke persamaan (3.8) yaitu dimisalkan nilai $K = -8, m = 2, \delta = -2$, mempunyai solusi umum sebagai berikut:

$$y_1(t) = \frac{1}{4}c_1e^{4t} - \frac{1}{2}c_2e^{-2t}, \text{ dan}$$

$$y_2(t) = c_1e^{4t} + c_2e^{-2t}$$

di mana memiliki nilai eigen $\lambda_1 = 4$ dan $\lambda_2 = -2$. Pada $\lambda_1 = 4$ mempunyai vektor eigen $v^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ dan pada $\lambda_2 = -2$ mempunyai vektor eigen $v^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Pada kasus ini vektor-vektor eigen v^1 dan v^2 membentuk sebuah himpunan dari solusi-solusinya. Perilaku dari solusi tersebut dapat dianalisis dari potret fase pada Gambar 3.1 dari y_1 terhadap y_2 yang merupakan fungsi dari waktu. Pada Gambar 3.1 menunjukkan perilaku dari solusi dan karakteristik perilaku solusi sepanjang vektor eigen. Sehingga sepanjang vektor eigen v^1 solusi tumbuh seperti e^{4t} , sementara itu pada v^2 solusi menurun seperti e^{-2t} . Sehingga perilaku seperti ini mempunyai dua nilai eigen riil dan berbeda tanda yaitu $\lambda_1 = 4$ dan $\lambda_2 = -2$ akan menghasilkan perilaku membentuk *saddle*. Hal ini menyebabkan perilaku $y(t)$ akan selalu tidak stabil. Berikut adalah asal mula terbentuknya *saddle point* dapat dilihat pada gambar berikut:



Gambar 3.1 (a) Grafik $y(t)$ terhadap t (b) Perilaku $y(t)$ Membentuk *Saddle* dengan $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$

Secara umum, pada gambar 3.1 menunjukkan bahwa semua trayektori atau arah panah mula-mula mendekati titik tetap dan kemudian menjauhi titik tetap ke tak

hingga sepanjang vektor eigen. Sehingga dapat membentuk *saddle* atau pelana. Hal ini menyebabkan perilaku $y(t)$ yang membentuk *saddle* akan selalu tidak stabil. Akan tetapi pada kasus ini tidak cocok untuk kasus pada model gerak vertikal dawai. Hal ini disebabkan parameter K dan δ bernilai negatif, karena untuk parameter K dan δ selalu bernilai positif. Sehingga tidaklah mungkin pada kasus gerak vertikal dawai ini membentuk *saddle point* atau titik pelana.

Kasus 2: Apabila parameter yang disubstitusikan $K = 4$, $m = 2$, $\delta = 4$.

Pada kasus ini apabila parameter yang disubstitusikan ke persamaan (3.8) adalah:

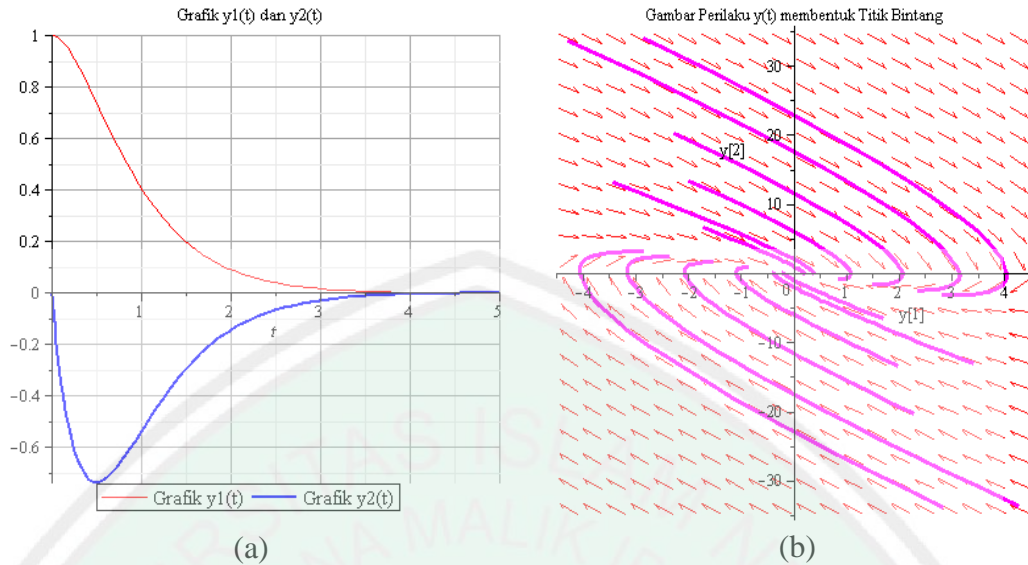
dimisalkan nilai $K = 4$, $m = 2$, $\delta = 4$, maka mempunyai nilai eigen $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -2$. Sehingga untuk nilai eigen $\lambda_1 = -2$ mempunyai vektor eigennya adalah $v^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ dan untuk $\lambda_2 = -2$ mempunyai vektor eigen $v^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Sehingga mempunyai solusi umum sebagai berikut:

$$y_1(t) = -\frac{1}{4}e^{-2t}(2c_1 + 2c_2t + c_2), \text{ dan}$$

$$y_2(t) = e^{-2t}(c_1 + c_2t).$$

Pada kasus ini, konstanta c_1 dan c_2 ditentukan dari kondisi awalnya. Sehingga dalam hal ini, kedua nilai eigennya riil dan negatif. Sehingga akan menghasilkan ekuilibrium atau titik *node* pada titik asal. Nilai eigen dan vektor eigen sangat berpengaruh dalam menentukan perilaku potret fase. Sepanjang vektor eigen v^1 solusi turun seperti e^{-2t} , sementara itu pada v^2 solusi juga menurun seperti e^{-2t} . Sehingga perilaku dari solusi ini dapat dilihat pada Gambar 3.2. Hal ini menyebabkan perilaku $y(t)$ akan selalu stabil. Grafik dan potret fase yang dihasilkan dengan menggunakan *Maple* adalah sebagai berikut:



Gambar 3.2 (a) Grafik $y(t)$ terhadap t (b) Perilaku $y(t)$ Membentuk *Star Point* dengan $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$

Pada umumnya dalam kasus ini didapatkan gambar potret fase yang dinamakan dengan *star point* atau titik bintang yang gambarnya terlihat pada gambar 3.2 dengan $\lambda_1 = -2$, dan $\lambda_2 = -2$. Pada kedua nilai eigen ini sama-sama $\lambda < 0$, maka arah panah atau trayektori dalam gambar 3.2 akan menuju titik tetap, sehingga titik kritis dari potret fase tersebut akan menjadi stabil. Disamping itu gerakan $y(t)$ bergerak bebas yang akhirnya meredam menuju titik tetap. Hal ini dalam kasus osilasi biasa disebut dengan gerak osilasi teredam kritis.

Kasus 3: Apabila parameter yang disubstitusikan $K = 16, m = 2, \delta = -8$.

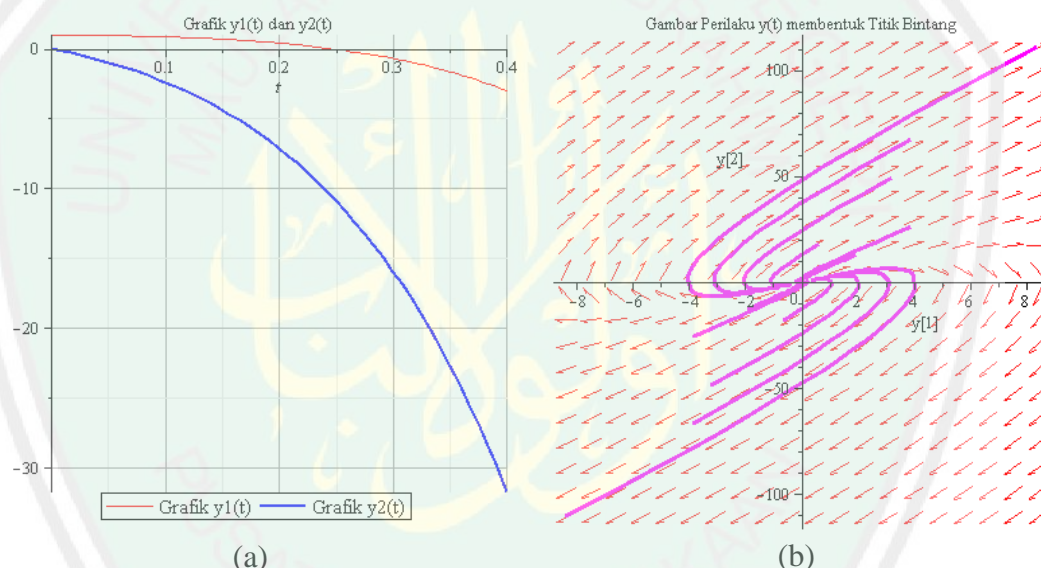
Dimisalkan pada kasus ini, parameter $K = 16, m = 2, \delta = -8$, sehingga mempunyai nilai eigen $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 4$. Pada nilai eigen $\lambda_1 = 4$ mempunyai vektor eigen $v^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, begitu pula dengan $\lambda_2 = 4$ juga mempunyai vektor eigen

$v^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Sehingga solusi umumnya adalah:

$$y_1(t) = \frac{1}{16} e^{4t} (4c_1 + 4c_2 t - c_2) \text{ dan}$$

$$y_2(t) = e^{4t} (c_1 + c_2 t)$$

Pada kasus ini hampir sama dengan kasus 2, yaitu konstanta c_1 dan c_2 ditentukan dari kondisi awalnya. Sehingga dalam hal ini, kedua nilai eigennya riil dan positif. Sehingga akan menghasilkan ekuilibrium atau titik *node* pada titik asal. Seperti penjelasan pada kasus 2 nilai eigen dan vektor eigen sangat berpengaruh dalam menentukan perilaku potret fase. Sepanjang vektor eigen v^1 solusi tumbuh seperti e^{4t} , sementara itu pada v^2 solusi juga tumbuh seperti seperti e^{4t} . Sehingga perilaku dari solusi ini dapat dilihat pada Gambar 3.3. Hal ini menyebabkan perilaku $y(t)$ akan selalu tidak stabil. Sehingga grafik dan potret fasenya adalah:



Gambar 3.3 (a) Grafik $y(t)$ terhadap t (b) Perilaku $y(t)$ Membentuk *Star Point* dengan $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$

Pada kasus 3, memperlihatkan perilaku $y(t)$ membentuk *star point* yang kasusnya sama dengan kasus 2. Tetapi perbedaan dari kasus 2 dan kasus 3 ini bahwa kedua nilai eigennya tidak sama. Pada kasus 3 nilai eigennya adalah kembar positif yaitu $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 4$. Sedangkan pada kasus 2 nilai eigennya adalah kembar negatif. Dengan kedua nilai eigen $\lambda > 0$, maka semua arah panah atau trayektori dalam Gambar 3.3 menjauhi titik tetap, sehingga titik kritis dari potret fase

tersebut akan menjadi tidak stabil. Akan tetapi pada kasus ini juga tidaklah mungkin pada model gerak vertikal dawai, karena parameter δ bernilai negatif.

Kasus 4: Apabila Nilai Eigen Kompleks Konjugat

1. Nilai Eigen dengan Bagian Riil $\alpha > 0$

Dimisalkan parameter yang disubstitusikan ke persamaan (3.8) sebagai berikut:

parameter $K = 4, m = 2, \delta = -2$. Dimana c_1 dan c_2 adalah sebarang konstanta.

Untuk menuliskan $e^{\alpha \pm i\beta}$ dapat ditulis dalam bentuk sinus dan kosinus. Sehingga pada kasus ini mempunyai solusi umum adalah sebagai berikut:

$$y_1(t) = \frac{1}{4} e^t (c_1 \sin(\sqrt{3}t) - c_1 \cos(\sqrt{3}t)\sqrt{3} + c_2 \cos(\sqrt{3}t) + c_2 \sin(\sqrt{3}t)\sqrt{3}),$$

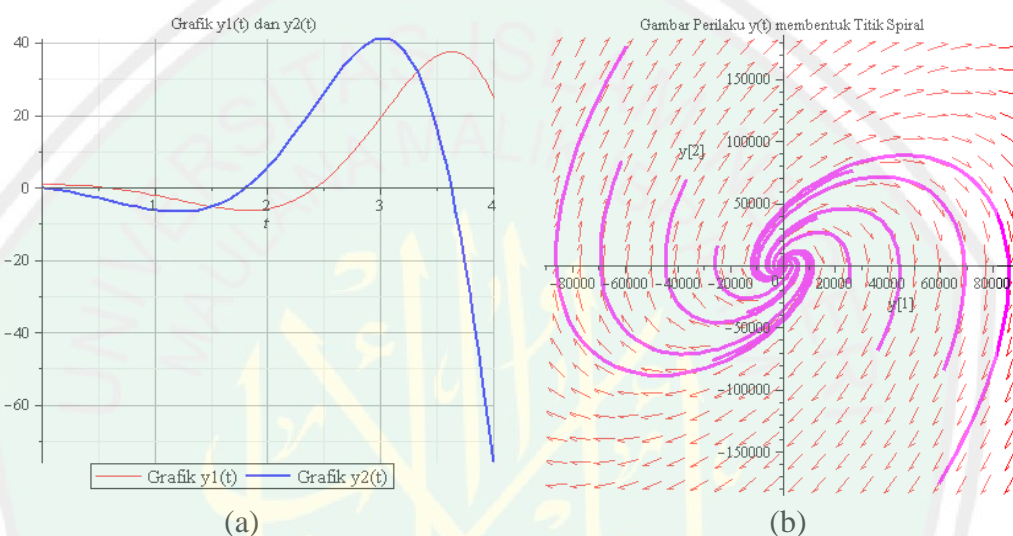
dan

$$y_2(t) = e^t (c_1 \sin(\sqrt{3}t) + c_2 \cos(\sqrt{3}t)).$$

Pada solusi umum tersebut mempunyai nilai eigen yang riil dan imajiner, yaitu $\lambda_1 = 1 + I\sqrt{3}$, $\lambda_2 = 1 - I\sqrt{3}$. Pada nilai eigen $\lambda_1 = 1 + I\sqrt{3}$ mempunyai vektor eigen $v^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + I\sqrt{3} \end{pmatrix}$ dan untuk $\lambda_2 = 1 - I\sqrt{3}$, maka vektor eigennya adalah $v^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - I\sqrt{3} \end{pmatrix}$. Diketahui bahwa vektor eigen yang kedua merupakan kompleks konjugat. Sehingga perilaku dari solusi ini akan berupa spiral. Karena bagian riil dari nilai eigennya adalah positif, maka hal ini yang menyebabkan perilaku $y(t)$ menjadi tidak stabil. Akan tetapi pada kasus ini tidak cocok untuk kasus pada penelitian ini. Hal ini disebabkan parameter δ bernilai negative. Sehingga tidaklah mungkin pada kasus gerak vertikal dawai mempunyai δ bernilai negatif yang arah geraknya atau amplitudo semakin lama membesar seiring waktu tak hingga.

Secara umum untuk menunjukkan bahwa untuk setiap sistem dengan nilai eigen kompleks $\alpha \pm i\beta$, di mana $\alpha \neq 0$, maka lintasan selalu spiral. Lintasan

diarahkan ke dalam atau ke luar dan masing-masing tergantung pada apakah nilai eigen λ negatif atau positif. Lintasan akan memanjang dan miring sehubungan dengan sumbu-sumbu koordinat, dan arah gerak mengarah searah jarum jam atau berlawanan arah jarum jam. Maka dapat dilihat hasil grafik dan potret fase dari kasus ini sebagai berikut:



Gambar 3.4 (a) Grafik $y(t)$ terhadap t (b) Perilaku $y(t)$ Membentuk Titik Spiral dengan $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, $\alpha > 0$

Dalam kasus 4 menghasilkan perilaku $y(t)$ yang berbentuk spiral di mana kestabilannya ditentukan oleh tanda dari bagian riil α . Pada kasus ini bagian real $\alpha > 0$, sehingga semua trayektori atau arah panah menjauhi titik tetap. Maka titik kritis dari perilaku $y(t)$ menjadi tidak stabil. Pada grafiknya, gerakan $y(t)$ mula-mula stabil akan tetapi dalam waktu ke 4 gerakan $y(t)$ menjadi semakin besar atau amplitudo dari gerakan $y(t)$ ini menjadi semakin besar. Sehingga menyebabkan perilaku $y(t)$ menjadi tidak stabil. Dalam kasus osilasi, hal ini dapat dikatakan dengan osilasi dipaksa teredam. Akan tetapi pada kasus ini tidak mungkin terjadi pada kasus model gerak vertikal dawai. Hal ini disebabkan parameter δ bernilai negatif.

2. Nilai Eigen dengan Bagian Riil $\alpha < 0$

Pada kasus ini dimisalkan untuk nilai $K = 2$, $m = 2$, dan $\delta = 1$. Dimana c_1 dan c_2 adalah sebarang konstanta. Untuk menuliskan $e^{\alpha \pm i\beta}$ dapat ditulis dalam bentuk sinus dan kosinus. Maka solusi umum pada kasus ini adalah

$$y_1(t) = \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{2}t} \left(-c_1 \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}t\right) - c_1 \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}t\right) \sqrt{7} - c_2 \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}t\right) + c_2 \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}t\right) \sqrt{7} \right)$$

Dan,

$$y_2(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \left(c_1 \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}t\right) + c_2 \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}t\right) \right)$$

Pada solusi umum tersebut juga mempunyai nilai eigen yang riil dan imajiner,

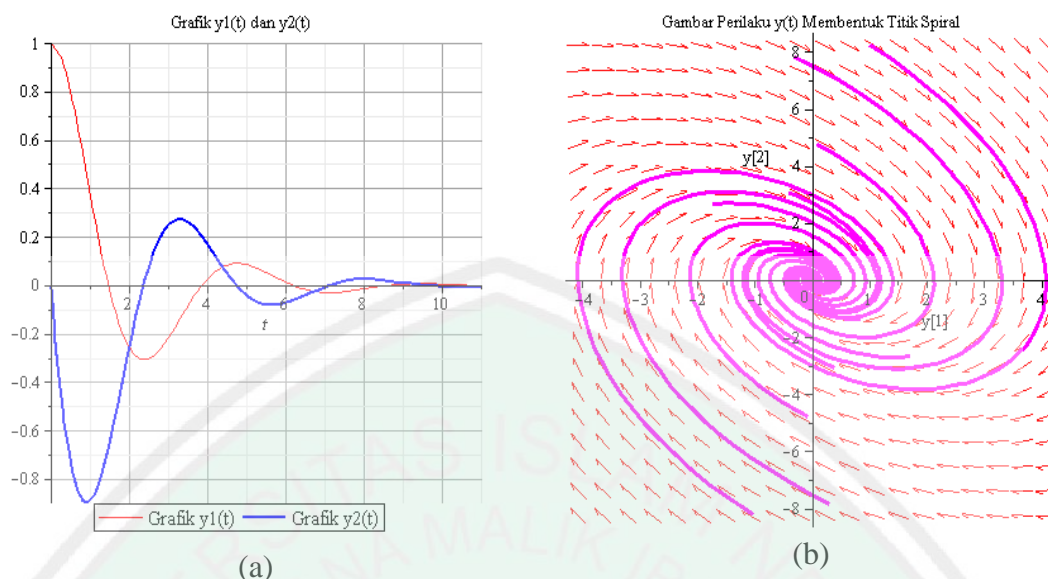
yaitu $\lambda_1 = -\frac{1}{2} + I\sqrt{7}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2} - I\sqrt{7}$. Sehingga vektor untuk $\lambda_1 = -\frac{1}{2} + I\sqrt{7}$

adalah $v^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}I\sqrt{7} \end{pmatrix}$ dan vektor eigen untuk $\lambda_2 = -\frac{1}{2} - I\sqrt{7}$ adalah

$$v^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}I\sqrt{7} \end{pmatrix}.$$

Diketahui bahwa vektor eigen yang kedua merupakan kompleks konjugat.

Sehingga perilaku dari solusi ini akan berupa spiral. Karena bagian riil dari nilai eigennya adalah negatif, maka hal ini yang menyebabkan perilaku $y(t)$ menjadi stabil, dan juga dikarenakan nilai eigennya imajiner, maka hal ini menyebabkan stabil asimtotik. Pada kasus ini sesuai pada model gerak vertikal dawai, yang mana menghasilkan perilaku dawai yang stabil asimtotik. Hal ini dalam osilasi biasa disebut dengan osilasi teredam. Gambar perilaku $y(t)$ pada potret fase ini ditunjukkan pada gambar berikut:



(a) (b)
 Gambar 3.5 (a) Grafik $y(t)$ terhadap t (b) Perilaku $y(t)$ Membentuk Titik Spiral dengan $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, $\alpha < 0$

Gambar 3.5 menunjukkan potret fase yang sama dengan kasus $\alpha > 0$ yaitu menghasilkan perilaku yang berbentuk spiral di mana kestabilannya ditentukan oleh tanda dari bagian riil α . Pada kasus ini bagian riil $\alpha < 0$, sehingga semua trayektori atau arah panah mendekati titik tetap. Maka titik kritis dari perilaku $y(t)$ menjadi stabil asimtotik. Dalam solusi osilasi ini merupakan bentuk khusus dari getaran teredam. Peredam mengambil energi dari sistem sehingga amplitudo atau gerakan $y(t)$ menurun menuju titik tetap. Hal ini dalam osilasi biasa disebut dengan osilasi teredam.

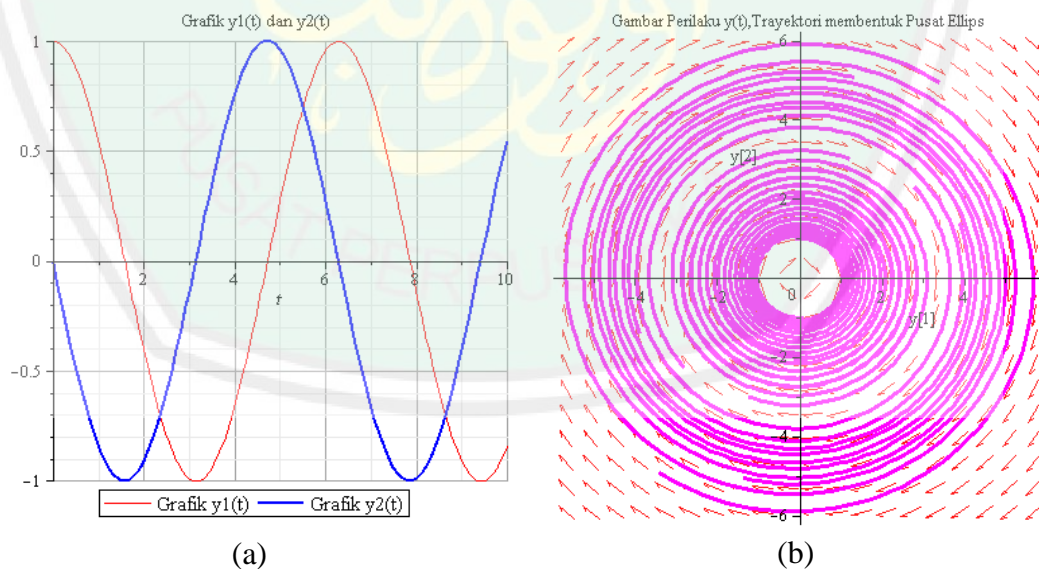
Kasus 5: Apabila parameter yang disubstitusikan $K = 1, m = 2, \delta = 0$

Pada kasus 5 ini, dimisalkan untuk $K = 1, m = 2, \delta = 0$, maka mempunyai nilai eigen $\lambda_1 = I$, $\lambda_2 = -I$. Pada $\lambda_1 = I$ mempunyai vektor eigen $v^1 = \begin{pmatrix} -I \\ 1 \end{pmatrix}$ dan untuk $\lambda_2 = -I$, maka vektor eigennya adalah $v^2 = \begin{pmatrix} I \\ 1 \end{pmatrix}$. Sehingga solusi umum adalah:

$$y_1(t) = -c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t), \text{ dan}$$

$$y_2(t) = c_1 \sin(t) + c_2 \cos(t)$$

Dimana c_1 dan c_2 adalah sebarang konstanta. Untuk menuliskan $e^{\pm i\beta}$ dapat ditulis dalam bentuk sinus dan kosinus. Pada kasus ini mempunyai nilai-nilai eigennya adalah imajiner murni, di mana dapat dinyatakan dengan $\lambda_{1,2} = \pm i\beta$. Titik kritis pada potret fase ini membentuk *center point* atau titik pusat. Semua trayektori atau arah panahnya berupa ellips yang mengelilingi pusat ellips, sehingga dalam kasus ini dapat dikatakan perilaku $y(t)$ stabil. Akan tetapi, pada kasus ini jarang terjadi pada kasus gerak vertikal dawai. Hal ini disebabkan gerakan $y(t)$ dalam waktu tak hingga menunjukkan stabil akan tetapi tidak asimtotik. Potret fase yang ditunjukkan berbentuk titik pusat atau *center point*. Secara fisis, hal ini terjadi karena kurang adanya redaman. Sehingga grafik dan potret fasenya adalah:



Gambar 3.6 (a) Grafik $y(t)$ terhadap t (b) Perilaku $y(t)$ Membentuk *Center Point* dengan $\lambda_{1,2} = \pm i\beta$

Pada kasus 5 ini dapat dikatakan perilaku $y(t)$ stabil. Akan tetapi gerakan $y(t)$ dalam waktu tak terhingga yaitu konstan, tidak menunjukkan gerakan yang

menurun menuju titik tetap, dengan kata lain tidak ada perubahan yang terjadi pada amplitudonya, yaitu semakin kecil. Maka dalam hal ini, gerakan $y(t)$ biasa disebut dengan gerak osilasi yang kurang teredam.

Secara umum, untuk mencari solusi umum maupun solusi khusus dari model gerak vertikal dawai, yaitu setelah didapat nilai eigen dan vektor eigennya. Maka dapat ditentukan solusi umum dan solusi khusus dari persamaan tersebut. Solusi umum dari persamaan tersebut dapat dinyatakan sebagai:

$y(t) = \mathbf{v}C_1e^{\lambda_1 t} + \mathbf{u}C_2e^{\lambda_2 t}$. Dengan mensubstitusi \mathbf{v} dan \mathbf{u} ke persamaan $y(t)$ maka diperoleh:

$$y(t) = \left(\frac{1}{2} \left(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}} \right) \right) C_1 e^{\frac{-\delta + \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2} t} + \left(\frac{1}{2} \left(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}} \right) \right) C_2 e^{\frac{-\delta - \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2} t}$$

Setelah mendapatkan solusi umum maka selanjutnya mencari solusi khusus dari persamaan tersebut. Sehingga diperoleh:

$$y_1(t) = 1C_1 e^{\frac{-\delta + \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2} t} + 1C_2 e^{\frac{-\delta - \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2} t}$$

$$y_1(t) = C_1 e^{\frac{-\delta + \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2} t} + C_2 e^{\frac{-\delta - \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2} t} \quad (3.13)$$

$$\text{dan } y_2(t) = \frac{1}{2} \left(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}} \right) C_1 e^{\frac{-\delta + \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2} t} + \frac{-\delta - \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2} C_2 e^{\frac{-\delta - \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2} t}$$

$$y_2(t) = \frac{-\delta + \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2} C_1 e^{\frac{-\delta + \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2} t} + \frac{-\delta - \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2} C_2 e^{\frac{-\delta - \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2} t} \quad (3.14)$$

Kemudian dari solusi umum tersebut untuk mengetahui solusi khusus dari model gerak vertikal dawai maka dapat ditentukan nilai awal pada $y_1(t)$ dan $y_2(t)$, yakni:

1. Solusi khusus untuk $y_1(t)$

Dengan mengasumsikan sebarang nilai awal, misal untuk nilai awal pada $y_1(0) = 1$. Kemudian akan dihitung untuk memperoleh C_1 . Perhitungannya adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 y_1(t) &= C_1 e^{\frac{-\delta + \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2}t} + C_2 e^{\frac{-\delta - \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2}t} \\
 y_1(0) &= C_1 e^{\frac{-\delta + \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2}0} + C_2 e^{\frac{-\delta - \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2}0} \\
 1 &= C_1 e^0 + C_2 e^0 \\
 1 &= C_1 + C_2 \\
 C_1 &= -C_2
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Sehingga didapat solusi khusus untuk $y_1(t)$ dengan asumsi nilai awal $y_1(0) = 1$ adalah:

$$y_1(t) = -C_2 e^{\frac{-\delta + \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2}t} + C_2 e^{\frac{-\delta - \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2}t}$$

2. Solusi khusus untuk $y_2(t)$

Dengan mengasumsikan sebarang nilai awal, misal nilai awal untuk $y_2(0) = 0$. Sehingga untuk memperoleh C_1 dan C_2 perhitungannya adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 y_2(t) &= \frac{-\delta + \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2} C_1 e^{\frac{-\delta + \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2}t} + \frac{-\delta - \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2} C_2 e^{\frac{-\delta - \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2}t} \\
 y_2(0) &= \frac{-\delta + \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2} C_1 e^{\frac{-\delta + \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2}0} + \frac{-\delta - \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2} C_2 e^{\frac{-\delta - \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2}0} \\
 0 &= \frac{-\delta + \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2} C_1 e^0 + \frac{-\delta - \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2} C_2 e^0
 \end{aligned}$$

$$0 = \frac{-\delta + \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2} C_1 + \frac{-\delta - \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2} C_2$$

$$0 = -\left(\frac{\delta - \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2}\right) C_1 + \frac{-\delta - \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2} C_2$$

$$\left(\frac{\delta - \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2}\right) C_1 = \frac{-\delta - \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2} C_2$$

$$C_2 = \frac{\left(\frac{\delta - \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2}\right) C_1}{\frac{-\delta - \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2}}$$

$$C_2 = \frac{\delta - \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{-\delta - \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}} C_1 \quad (3.16)$$

Sehingga didapat solusi khusus untuk $y_2(t)$ dengan asumsi $y_2(0) = 0$ adalah:

$$y_2(t) = \frac{-\delta + \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2} C_1 e^{\frac{-\delta + \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2} t} + \frac{-\delta - \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2} C_2 e^{\frac{-\delta - \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2} t}$$

$$y_2(t) = \frac{-\delta + \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2} C_1 e^{\frac{-\delta + \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2} t} + \frac{-\delta - \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2} \frac{\delta - \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{-\delta - \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}} C_1 e^{\frac{-\delta - \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2} t}$$

kemudian substitusi persamaan (3.16) ke persamaan (3.15), maka akan diperoleh:

$$1 = C_1 + C_2$$

$$1 = C_1 + \left(\frac{\delta - \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{-\delta - \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}} C_1\right)$$

kemudian disamakan penyebutnya sehingga diperoleh:

$$1 = \left(\frac{-\delta - \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{-\delta - \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}} C_1 + \frac{\delta - \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{-\delta - \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}} C_1\right)$$

$$1 = \frac{-\delta - \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}} C_1 + \delta - \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}} C_1}{-\delta - \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}$$

$$1 = \frac{-\delta + \delta - \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}} C_1 - \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}} C_1}{-\delta - \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}$$

$$1 = \frac{-2\sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}} C_1}{-\delta - \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}$$

$$1 = \frac{2\sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}} C_1}{\delta + \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}$$

$$2\sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}} C_1 = \delta + \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}$$

$$C_1 = \frac{\delta + \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2\sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}} \quad (3.17)$$

kemudian disubstitusikan ke persamaan (3.16) sehingga hasilnya adalah:

$$C_2 = \frac{\delta - \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{-\delta - \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}} C_1$$

$$C_2 = \frac{\delta - \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{-\left(\delta + \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}\right)} \frac{\delta + \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2\sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}$$

$$C_2 = \frac{\delta - \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{-2\sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}$$

$$C_2 = -\frac{\left(\delta - \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}\right)}{2\sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}} \quad (3.18)$$

Dengan melakukan substitusi kembali persamaan (3.17) dan (3.18) ke solusi umum, maka:

$$y(t) = \left(\frac{1}{2} \left(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}} \right) \right) C_1 e^{-\frac{\delta + \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2} t} + \left(\frac{1}{-2} \frac{\sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{\delta - \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}} \right) C_2 e^{-\frac{\delta - \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2} t}$$

adalah

$$y(t) = \left(\frac{1}{2} \left(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}} \right) \right) \frac{\delta + \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2\sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}} e^{-\frac{\delta + \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2} t} + \left(\frac{1}{-2} \frac{\sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{\delta - \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}} \right) - \frac{\left(\delta - \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}} \right)}{2\sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}} e^{-\frac{\delta - \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2} t}$$

Maka solusi khusus untuk $y_1(t)$ adalah:

$$y_1(t) = C_1 e^{-\frac{\delta + \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2} t} + C_2 e^{-\frac{\delta - \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2} t}$$

$$y_1(t) = \frac{\delta + \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2\sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}} e^{-\frac{\delta + \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2} t} + \left(-\frac{\left(\delta - \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}} \right)}{2\sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}} \right) e^{-\frac{\delta - \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2} t}$$

dan solusi khusus untuk $y_2(t)$ adalah:

$$y_2(t) = \frac{-\delta + \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2} C_1 e^{-\frac{\delta + \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2} t} + \frac{-\delta - \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2} C_2 e^{-\frac{\delta - \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2} t}$$

$$y_2(t) = \frac{-\delta + \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2} \frac{\delta + \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2\sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}} e^{-\frac{\delta + \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2} t} + \frac{-\delta - \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2} \left(\frac{\delta - \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{-2\sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}} \right) e^{-\frac{\delta - \sqrt{\delta^2 - \frac{8K}{m}}}{2} t}$$

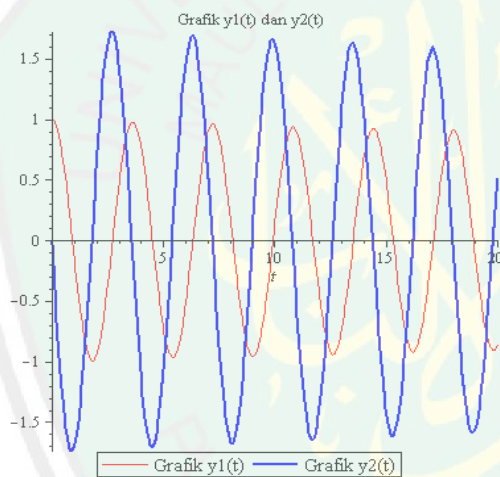
3.3 Hasil Simulasi dan Interpretasi Model Gerak Vertikal Dawai

Selanjutnya pada penelitian ini akan dilakukan simulasi model gerak vertikal dawai. Dalam hal ini peneliti memodifikasi perubahan parameter yang

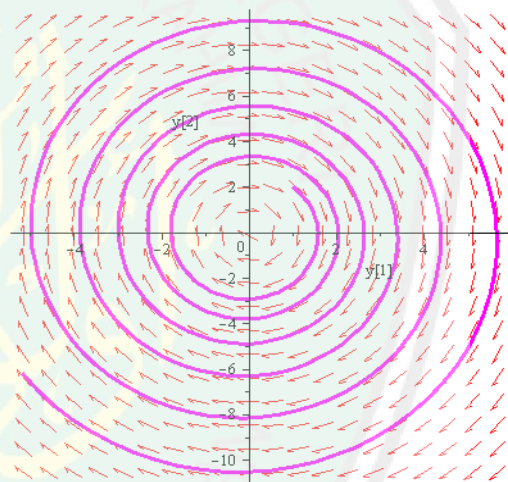
ada untuk melihat perubahan perilaku $y(t)$ pada potret fase. Dengan menggunakan variasi perubahan massa m dan nilai awal, sebagai berikut:

1. Massa $m = 657,3$, $K = 1000$ $\delta = 0,01$ dan nilai awal $y_1(0) = 1, y_2(0) = 0$
2. Massa $m = 657,3$, $K = 1000$ $\delta = 0,01$ dan nilai awal $y_1(0) = 1, y_2(0) = 1$
3. Massa $m = 260,2$, $K = 1000$ $\delta = 0,01$ dan nilai awal $y_1(0) = 1, y_2(0) = 0$

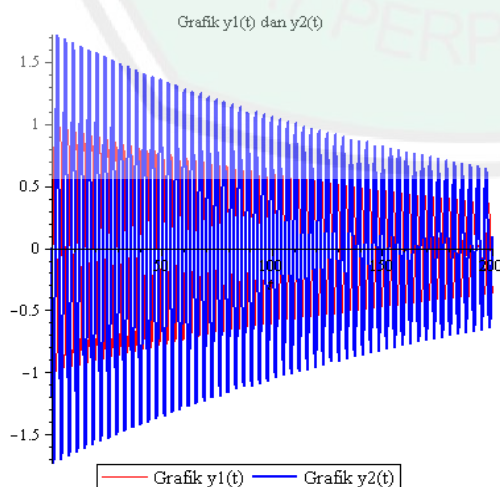
Pada simulasi pertama dengan parameter massa = 657,3 , $K = 1000$ $\delta = 0,01$ dan nilai awal $y_1(0) = 1, y_2(0) = 0$, maka grafik dan potret fasenya adalah sebagai berikut:



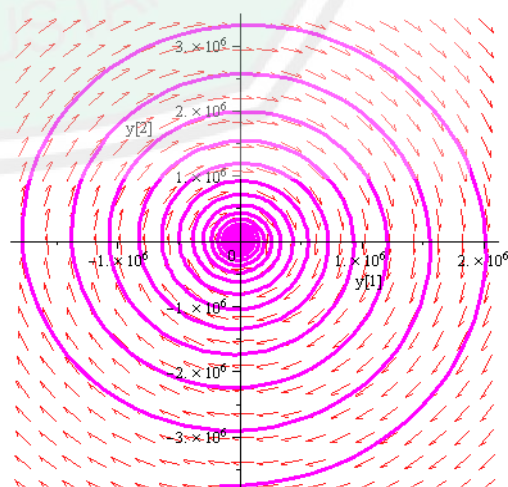
Gambar 3.7 Gambar Grafik $y(t)$ pada Waktu $t = 0 - 20$



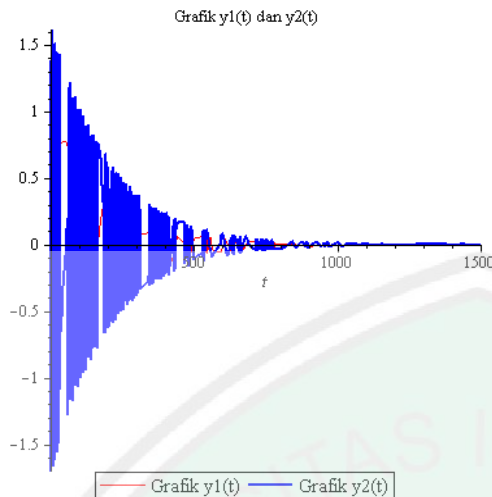
Gambar 3.8 Gambar Potret Fase $y(t)$ pada Waktu $t = 0 - 20$



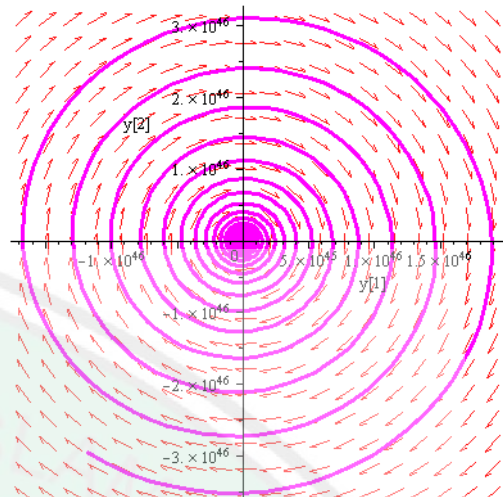
Gambar 3.9 Gambar Grafik $y(t)$ pada Waktu $t = 0 - 200$



Gambar 3.10 Gambar Potret Fase $y(t)$ pada Waktu $t = 0 - 200$



Gambar 3.11 Gambar Grafik $y(t)$ pada Waktu $t = 0 - 1500$



Gambar 3.12 Gambar Potret Fase $y(t)$ pada Waktu $t = 0 - 1500$

Dengan simulasi Massa = 657,3 , $K = 1000$ $\delta = 0,01$ dan nilai awal $y_1(0) = 1, y_2(0) = 0$ dengan waktu $t = 0 - 20, t = 0 - 200$ dan $t = 0 - 1500$ di atas, maka diperoleh nilai-nilai eigen yang riil dan kompleks, yaitu nilai eigen $\lambda_1 = -0,005 + 1,744341 I$ dan $\lambda_2 = -0,005 - 1,744341 I$. Sehingga vektor eigen dari $\lambda_1 = -0,005 + 1,744 I$ adalah $v^1 = \begin{pmatrix} 0,573277 - 0,0016432 I \\ I \end{pmatrix}$ dan untuk $\lambda_2 = -0,005 - 1,744341 I$ mempunyai vektor eigen $v^2 = \begin{pmatrix} 0,573277 + 0,0016432 I \\ -I \end{pmatrix}$. Sehingga solusi umum $y_1(t)$ dari simulasi ini adalah:

$$y_1(t) =$$

$$-\frac{10000}{1521375323} e^{-\frac{1}{200}t} \left(250 c_1 \sin\left(\frac{1}{500}\sqrt{7606814115}t\right) +$$

$$c_2 \cos\left(\frac{1}{500}\sqrt{7606814115}t\right) \sqrt{7606814115} +$$

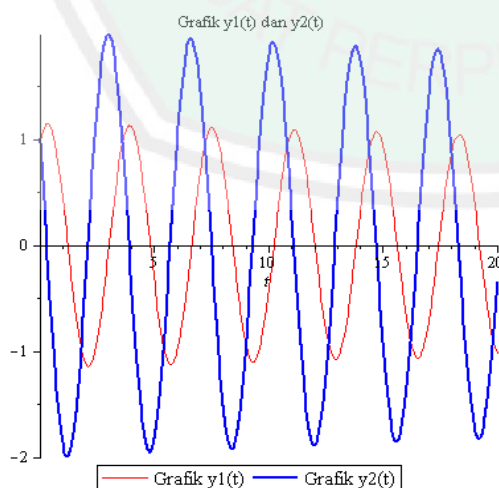
$$250 c_2 \cos\left(\frac{1}{500}\sqrt{7606814115}t\right) - c_2 \sin\left(\frac{1}{500}\sqrt{7606814115}t\right) \sqrt{7606814115} \right)$$

Kemudian untuk solusi umum $y_2(t)$ adalah:

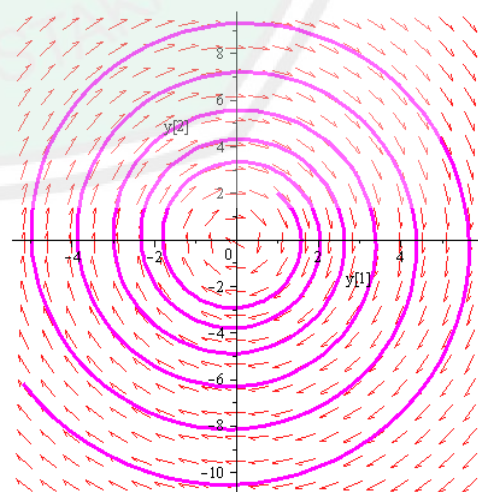
$$y_2(t) = e^{-\frac{1}{200}t} \left(c_1 \sin \left(\frac{1}{50000} \sqrt{7606814115}t \right) + c_2 \cos \left(\frac{1}{50000} \sqrt{7606814115}t \right) \right).$$

Diketahui bahwa vektor eigen yang kedua adalah kompleks konjugat. Sehingga perilaku dari solusi ini berupa spiral. Karena bagian riilnya adalah negatif, maka menyebabkan perilaku dari gerak vertikal dawai ini menjadi stabil, dan juga dikarenakan nilai eigennya adalah imajiner maka hal ini menyebabkan stabil asimtotik. Secara umum, dengan variasi waktu t dapat dilihat bahwa grafik $y(t)$ dalam waktu tak hingga menunjukkan pergerakan $y(t)$ semakin menuju ke titik tetap. Hal ini seperti pada kasus 4 di mana bagian riil α bernilai negatif, yaitu perilaku $y(t)$ berbentuk spiral di mana menunjukkan semua trayektori atau arah panah menuju ke titik pusat. Nilai eigen pada bagian riilnya adalah negatif dan imajiner, maka perilaku gerak vertikal dawai menjadi stabil asimtotik.

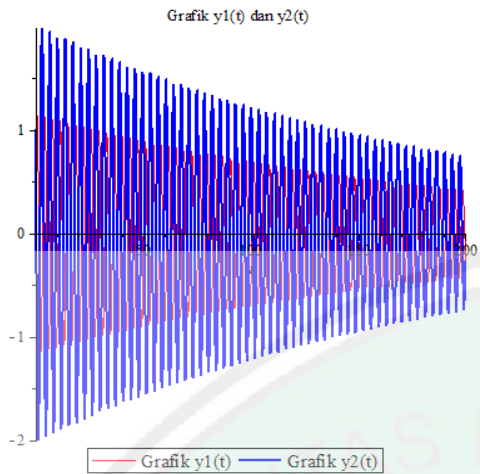
Selanjutnya, pada simulasi kedua dengan cara yang sama parameter yang disubstitusi adalah massa = 657,3 , $K = 1000$ $\delta = 0,01$ dan nilai awal $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 1$, maka grafik dan potret fasenya adalah sebagai berikut:



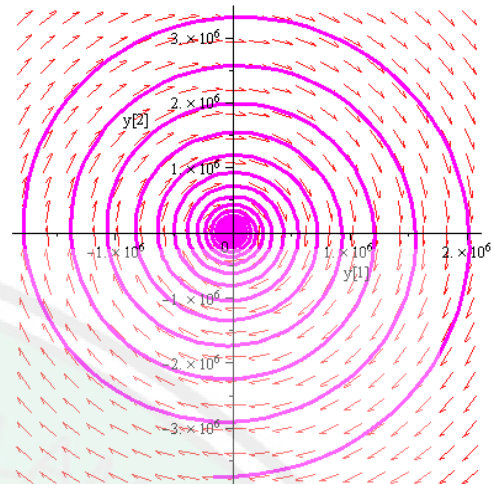
Gambar 3.13 Gambar Grafik $y(t)$ pada Waktu $t = 0 - 20$



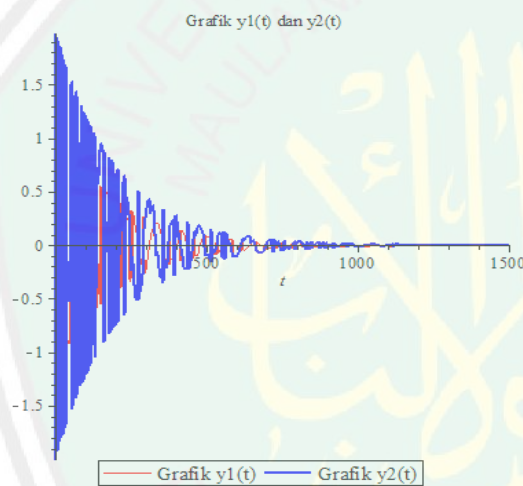
Gambar 3.14 Gambar Potret Fase $y(t)$ pada Waktu $t = 0 - 20$



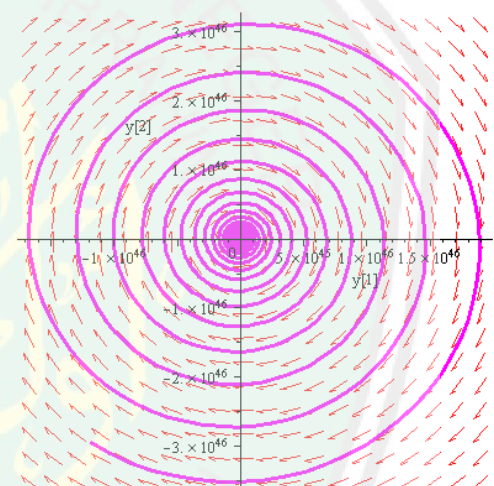
Gambar 3.15 Gambar Grafik $y(t)$ pada Waktu $t = 0 - 200$



Gambar 3.16 Gambar Potret Fase $y(t)$ pada Waktu $t = 0 - 200$



Gambar 3.17 Gambar Grafik $y(t)$ pada Waktu $t = 0 - 1500$



Gambar 3.18 Gambar Potret Fase $y(t)$ pada Waktu $t = 0 - 1500$

Dengan simulasi massa = 657,3 , $K = 1000$ $\delta = 0,01$ dan nilai awal $y_1(0) = 1, y_2(0) = 1$ dengan waktu $t = 0 - 20, t = 0 - 200$ dan $t = 0 - 1500$ di atas, maka diperoleh nilai-nilai eigen yang riil dan kompleks, yaitu nilai eigen $\lambda_1 = -0,005 + 1,744341 I$ dan $\lambda_2 = -0,005 - 1,744341 I$. Sehingga vektor eigen dari $\lambda_1 = -0,005 + 1,744 I$ adalah $v^1 = \begin{pmatrix} 0,573277 - 0,0016432 I \\ I \end{pmatrix}$, dan untuk $\lambda_2 = -0,005 - 1,744341 I$ mempunyai vektor eigen

$v^2 = \begin{pmatrix} 0,573277 + 0.0016432 I \\ -I \end{pmatrix}$). Sehingga solusi umum $y_1(t)$ dari simulasi ini

adalah:

$$y_1(t) =$$

$$-\frac{10000}{1521375323} e^{-\frac{1}{200}t} \left(250 c_1 \sin\left(\frac{1}{500}\sqrt{7606814115}t\right) + \right.$$

$$c_2 \cos\left(\frac{1}{500}\sqrt{7606814115}t\right) \sqrt{7606814115} +$$

$$\left. 250 c_2 \cos\left(\frac{1}{500}\sqrt{7606814115}t\right) - c_2 \sin\left(\frac{1}{500}\sqrt{7606814115}t\right) \sqrt{7606814115} \right)$$

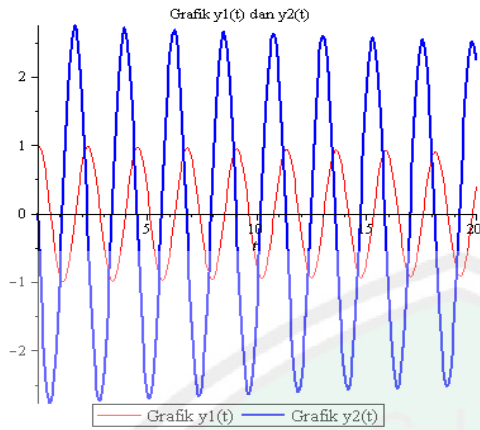
Kemudian untuk solusi umum $y_2(t)$ adalah:

$$y_2(t) =$$

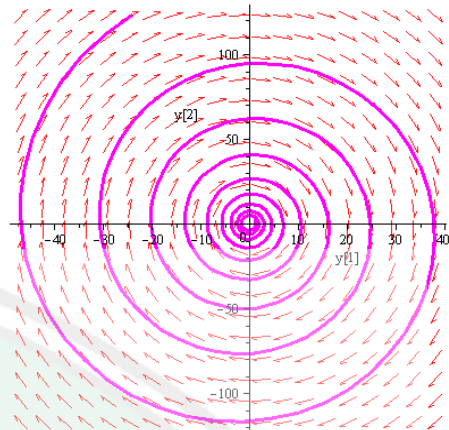
$$e^{-\frac{1}{200}t} \left(c_1 \sin\left(\frac{1}{50000}\sqrt{7606814115}t\right) + c_2 \cos\left(\left(\frac{1}{50000}\sqrt{7606814115}t\right)\right) \right).$$

Solusi umum maupun nilai eigen dan vektor eigen pada simulasi kedua ini sama dengan simulasi pertama. Diketahui bahwa vektor eigen yang kedua adalah kompleks konjugat. Sehingga perilaku dari solusi ini berupa spiral. Karena bagian riilnya juga negatif, maka menyebabkan perilaku dari gerak vertikal dawai ini menjadi stabil, dan juga dikarenakan nilai eigennya adalah imajiner maka hal ini menyebabkan stabil asimtotik. Secara umum, dengan variasi waktu t dapat dilihat bahwa grafik $y(t)$ dalam waktu tak hingga menunjukkan pergerakan $y(t)$ semakin menuju ke titik tetap. Oleh karena itu, perilaku $y(t)$ berbentuk spiral dan stabil asimtotik.

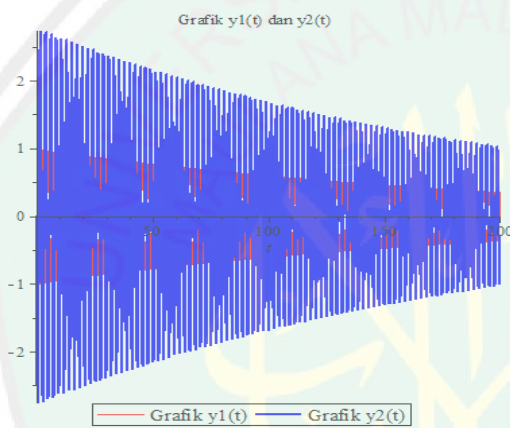
Kemudian, pada simulasi ketiga dengan parameter massa = 260,2 , $K = 1000$ $\delta = 0,01$ dan nilai awal $y_1(0) = 1, y_2(0) = 0$, maka grafik dan potret fasenya adalah:



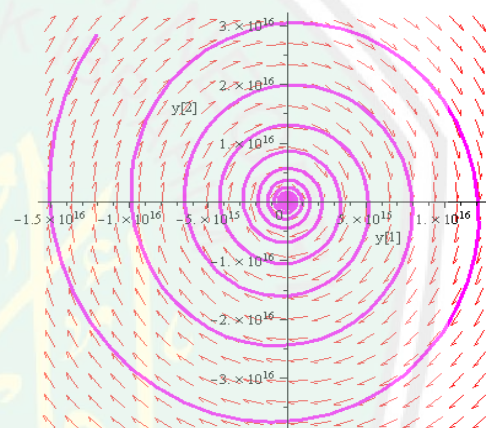
Gambar 3.19 Gambar Grafik $y(t)$ pada Waktu $t = 0 - 20$



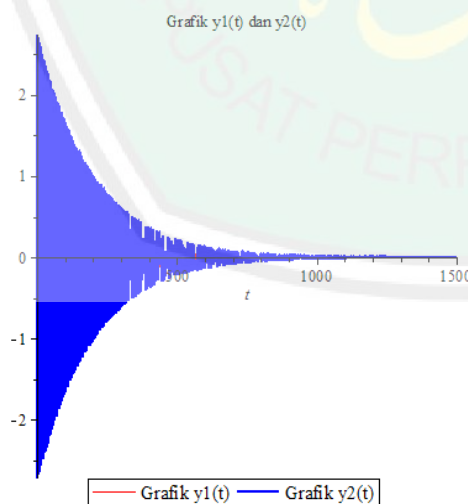
Gambar 3.20 Gambar Potret Fase $y(t)$ pada Waktu $t = 0 - 20$



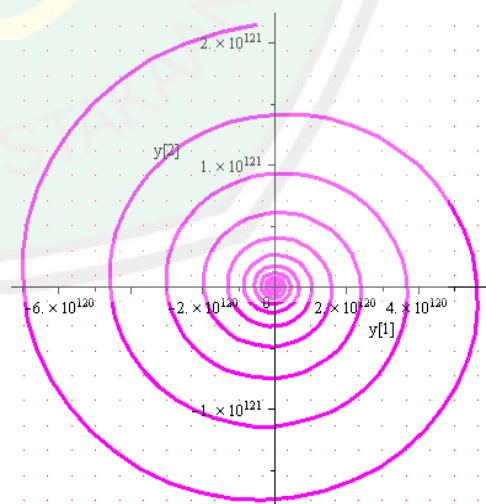
Gambar 3.21 Gambar Grafik $y(t)$ pada Waktu $t = 0 - 200$



Gambar 3.22 Gambar Potret Fase $y(t)$ pada Waktu $t = 0 - 200$



Gambar 3.23 Gambar Grafik $y(t)$ pada Waktu $t = 0 - 1500$



Gambar 3.24 Gambar Potret Fase $y(t)$ pada Waktu $t = 0 - 1500$

Dengan simulasi massa = 260,2, $K = 1000$ $\delta = 0,01$ dan nilai awal $y_1(0) = 1, y_2(0) = 0$, dengan waktu $t = 0 - 20, t = 0 - 200$ dan $t = 0 - 1500$ di atas, maka diperoleh nilai-nilai eigen yang riil dan kompleks, yaitu nilai eigen $\lambda_1 = -0,005 + 2,772430 I$ dan $\lambda_2 = -0,005 - 2,772430 I$. Sehingga vektor eigen dari $\lambda_1 = -0,005 + 2,772430 I$ adalah $v^1 = \begin{pmatrix} 0,360693 - 0,000650 I \\ I \end{pmatrix}$ dan untuk $\lambda_2 = -0,005 - 2,772430 I$ mempunyai vektor eigen $v^2 = \begin{pmatrix} 0,360693 + 0,000650 I \\ -I \end{pmatrix}$. Sehingga solusi umum $y_1(t)$ dari simulasi ini adalah:

$y_1(t) = -\frac{5000}{192159877} e^{-\frac{1}{200}t} \left(25 c_1 \sin\left(\frac{3}{2500} \sqrt{5337757}t\right) + 6 c_1 \cos\left(\frac{3}{2500} \sqrt{5337757}t\right) \sqrt{5337757} + 25 c_2 \cos\left(\frac{3}{2500} \sqrt{5337757}t\right) - 6 c_2 \sin\left(\frac{3}{2500} \sqrt{5337757}t\right) \sqrt{5337757} \right)$. Kemudian untuk solusi umum $y_2(t)$ adalah:

$$y_2(t) = e^{-\frac{1}{200}t} \left(c_1 \sin\left(\frac{3}{2500} \sqrt{5337757}t\right) + c_2 \cos\left(\frac{3}{2500} \sqrt{5337757}t\right) \right).$$

Diketahui bahwa vektor eigen yang kedua adalah kompleks konjugat. Sehingga perilaku dari solusi ini juga berupa spiral. Karena bagian riilnya adalah negatif, maka menyebabkan perilaku dari gerak vertikal dawai ini menjadi stabil, dan juga dikarenakan nilai eigennya adalah imajiner maka hal ini menyebabkan stabil asimtotik. Secara umum, dengan variasi waktu t dapat dilihat bahwa grafik $y(t)$ dalam waktu tak hingga menunjukkan pergerakan $y(t)$ semakin menuju ke titik tetap. Dengan variasi waktu t dapat dilihat bahwa grafik $y(t)$ dalam waktu tak hingga menunjukkan pergerakan $y(t)$ di mana kasusnya sama dengan simulasi

pertama dan kedua, yaitu semua trayektori menuju titik tetap. Sehingga pada simulasi yang ketiga ini juga dikatakan stabil asimtotik.

Pada hasil simulasi yang sudah dilakukan di atas dari sistem, potret fase menunjukkan bahwa, semua trayektori dari sistem ini berbentuk spiral menuju titik tetap apabila t menuju ke tak hingga. Potret fase dari sistem (3.6) mempunyai bentuk yang digambarkan dalam simulasi di atas. Arah panah atau semua trayektori pada potret fase bergerak menuju titik tetap $(0,0)$. Sehingga titik kritis dari perilaku $y(t)$ menjadi stabil. Pada simulasi tersebut menghasilkan nilai eigen yang kompleks dan bagian riil $\alpha < 0$, sehingga mengakibatkan semua trayektori mendekati titik tetap. Namun apabila bagian riil $\alpha > 0$, maka yang akan terjadi adalah semua trayektori menjauhi titik tetap dan mengakibatkan perilaku $y(t)$ tidak stabil. Karena pada penelitian ini menghasilkan nilai eigen yang kompleks dengan bagian riil adalah negatif maka dapat dikatakan perilaku dari model gerak vertikal dawai ini adalah stabil asimtotik.

Dalam hal osilasi ini merupakan bentuk khusus dari getaran teredam di mana amplitudo semakin kecil dalam waktu tak hingga. Sehingga dapat disimpulkan, osilasi atau gerak naik turunnya perilaku $y(t)$ ini dipengaruhi oleh gaya redaman (perlambatan).

3.4 Gerak Vertikal Dawai dalam Pandangan Islam

Dari uraian pembahasan di atas, bahwa dawai semakin lama menjadi stabil menuju ke titik tetap $(0,0)$ dalam waktu tak hingga. Dengan kembalinya dawai pada titik tetap, maka amplitudo dari gerakan $y(t)$ juga akan semakin mengecil.

Dengan begitu gerakan dawai menjadi stabil. Hal ini sebagaimana firman Allah Swt. dalam surat al-Ankabut/29:5, yakni

مَنْ كَانَ يَرْجُوا لِقَاءَ اللَّهِ فَإِنَّ أَجَلَ اللَّهِ لَآتٍ وَهُوَ السَّمِيعُ الْعَلِيمُ ﴿٥﴾

“Barangsiapa yang mengharap pertemuan dengan Allah, maka sesungguhnya waktu (yang dijanjikan) Allah itu pasti datang. dan Dialah yang Maha mendengar lagi Maha mengetahui” (QS. Al-Ankabut/29:5).

Ayat tersebut menjelaskan bahwasanya semua pasti ada waktunya untuk kembali kepada Allah. Tidak ada satupun yang terjadi di dunia ini yang tidak disaksikan Allah, yang tidak didengar Allah, yang lepas dari kekuasaan Allah ataupun yang dapat terjadi tanpa izin Allah. Oleh karena itu, barang siapa yang mempunyai keinginan, mempunyai harapan, mempunyai ketakutan tetapi tidak kembali kepada Allah, maka itu termasuk golongan orang yang merugi. Apapun yang diinginkan dan yang dicemaskan pasti dalam kekuasaan Allah dan genggamannya Allah. Maka hanya kepada Allah kembalinya segala urusan, baik harapan maupun ketakutan. Dalam surat al-Baqarah/2:156 Allah Swt. berfirman:

الَّذِينَ إِذَا أَصَابَتْهُمُ مُصِيبَةٌ قَالُوا إِنَّا لِلَّهِ وَإِنَّا إِلَيْهِ رَاجِعُونَ ﴿١٥٦﴾

“(yaitu) orang-orang yang apabila ditimpa musibah, mereka mengucapkan, *inna lillaahi wa innaa ilaihi raaji'uun*” (QS. al-Baqarah/2:156).

Ayat tersebut menjelaskan bahwa sesungguhnya semua makhluk di dunia ini adalah milik Allah dan hanya kepada-Nya-lah semua akan kembali. Ayat tersebut merupakan kalimat *istirjaa'* (pernyataan kembali kepada Allah), yang mana untuk setiap kaum muslim disunatkan menyebutnya waktu ditimpa musibah besar maupun kecil. *Istirjaa'* merupakan kalimat umat Islam apabila seseorang tertimpa musibah. Kadang kala kalimat *istirjaa'* diucapkan apabila menerima kabar duka cita seseorang. Umat Islam meyakini bahwa Allah adalah Esa yang

memberikan kehidupan setiap jiwa seseorang dan Dia juga yang mengambil setiap jiwa seseorang itu, serta menguji ataupun memberi cobaan kepada setiap hamba-Nya, baik ujian yang baik ataupun yang buruk. Oleh karenanya, umat Islam menyerahkan diri kepada Allah dan bersyukur kepada Allah atas segala nikmat atau musibah yang mereka terima. Pada masa yang sama, mereka akan bersabar dan menyebut ungkapan *istirjaa'* saat menerima cobaan atau musibah. Kemudian dalam syariat Islam, jika seorang Muslim ditimpa musibah, kemudian ia bersabar dan mengucapkan kalimat *istirja'* maka Allah akan memberikan pahala.



BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Kesimpulan dari penelitian ini untuk beberapa simulasi dengan berbagai perubahan parameter pada massa m dan nilai awal maka didapatkan bahwa:

1. Untuk beberapa kasus dengan menghasilkan nilai-nilai eigen yang bervariasi adalah sebagai berikut:
 - a) Nilai-nilai eigennya riil dan berbeda tanda $\lambda_1 > 0$ dan $\lambda_2 < 0$, maka perilaku $y(t)$ pada dawai akan membentuk *saddle point* atau titik pelana. Akan tetapi untuk kasus ini tidak mungkin terjadi pada gerak vertikal dawai, karena parameter K dan δ bernilai negatif.
 - b) Nilai eigennya riil negatif dan kembar $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, maka perilaku $y(t)$ pada dawai membentuk *star point* atau titik bintang dengan vektor eigen mendekati titik tetap.
 - c) Nilai eigennya riil positif dan kembar $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, maka perilaku $y(t)$ pada dawai juga membentuk *star point* atau titik bintang. Pada kasus ini juga tidak mungkin terjadi pada model gerak vertikal dawai, karena parameter δ bernilai negatif.
 - d) Nilai eigen kompleks konjugat $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, maka apabila bagian riil positif maka vektor eigen akan menjauhi titik tetap dan perilaku $y(t)$ membentuk titik spiral. Sedangkan apabila bagian riil negatif maka vektor eigen akan mendekati titik tetap dan perilaku $y(t)$ membentuk titik spiral pula. Pada kasus ini, di mana untuk $\alpha > 0$ juga tidak mungkin terjadi pada model gerak vertikal dawai, karena parameter δ bernilai negatif. Akan

tetapi, untuk $\alpha < 0$ sering terjadi pada gerak vertikal dawai, di mana dalam waktu tak hingga akan stabil menuju titik tetap.

e) Kedua nilai eigen imajiner murni $\lambda_{1,2} = \pm i\beta$, maka perilaku $y(t)$ membentuk *center point* atau titik pusat.

2. Pada simulasi terakhir dengan memperbesar parameter-parameternya mengikuti data sekunder, maka terlihat bahwa model gerak vertikal dawai ini menghasilkan nilai eigen yang kompleks dengan bagian riilnya adalah negatif. Sehingga dalam waktu tak hingga perilaku dawai menjadi stabil asimtotik. Dari hasil simulasi tersebut juga menghasilkan profil grafik perilaku gerak vertikal dawai yang relatif sama dengan profil grafik Ohene (2012), yaitu menunjukkan gerak $y(t)$ menjadi stabil dalam waktu tak hingga, dengan kata lain amplitudo dari gerak vertikal dawai semakin mengecil apabila waktu berjalan terus menerus.

4.2 Saran

Pada skripsi ini, penelitian difokuskan pada simulasi perubahan perilaku model gerak vertikal dawai dengan gaya gravitasi diabaikan. Maka untuk penelitian selanjutnya disarankan untuk melanjutkan penelitian tersebut mengenai perubahan perilaku model gerak vertikal dawai yang dipengaruhi oleh gaya gravitasi.

DAFTAR PUSTAKA

- Abdussakir. 2007. *Ketika Kiai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press.
- Amrullah, A.A. 1977. *Tafsir Al-Azhar*. Surabaya: Yayasan Latimojong.
- Anton, H. dan Rorres, C. 2004. *Aljabar Linear Elementer Versi Aplikasi Jilid 1*. Jakarta: Erlangga.
- Baiduri. 2002. *Persamaan Diferensial dan Matematika Model*. Malang: UMM Press.
- Boyce, W. & DiPrima, R.C. 2001. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Darmawijoyo. 2011. *Persamaan Diferensial Biasa*. Palembang: Erlangga.
- Fauzi, A. 2010. *Analisis Ayunan Sederhana dengan Simulasi Spreadsheet*. *Jurnal Pendidikan*, (Online), 6 (2): 268-275, (<http://eprints.uns.ac.id/1709.html>), diakses 28 Mei 2014.
- Finizio, N. dan Ladas, G. 1988. *Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern*. Jakarta: Erlangga.
- Hariyanto. 1992. *Persamaan Diferensial Biasa*. Jakarta: Universitas Terbuka.
- Kartono. 2005. *Maple Untuk Persamaan Diferensial*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- McKenna. 1999. *Travelling Waves in a Nonlinearly Suspended Beam: Some Computational Results and Four Open Questions*. *Locations and Solitary Waves in Solid Mechanics*, 2 (12): 379-388, (Online), (<http://rsta.royalsocietypublishing.org/content.html>), diakses 28 Mei 2014.
- Ohene, K.R.. 2012. *A Mathematical Model of a Suspension Bridge-Case Study: Adomi Bridge, Atimpoku, Ghana*, 1 (3): 47-62, (Online), (<http://ir.knust.edu.gh/bitstream/123456789/1428/1/Amathematicalmodelof suspensionbridge.pdf>), diakses 28 Mei 2014.
- Purcell, E. 1987. *Kalkulus dan Geometri Analitis Jilid 2*. Jakarta: Erlangga
- Robinson, R.C. 2004. *An Introduction to Dynamical Systems Continuous and Discrete*. New Jersey: Pearson Education, Inc.
- Waluya. 2006. *Persamaan Diferensial*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

LAMPIRAN

Lampiran 1

1. Kasus 1: Perilaku Dawai Membentuk Titik Pelana

>restart;

>with(linalg) : with(plots) : with(DEtools) :
 $k := -8 : m := 2 : \delta := -2 :$

> $dy_1 := y_2;$

$$dy_1 := y_2$$

> $dy_2 := -\frac{2 \cdot k}{m} \cdot y_1 - \delta \cdot y_2;$

$$dy_2 := 8y_1 + 2y_2$$

>fixed := solve({ dy_1, dy_2 }, { y_1, y_2 });

$$fixed := \{y_1 = 0, y_2 = 0\}$$

>titik1 := fixed[1];

$$titik1 := y_1 = 0$$

>jac := jacobian([dy_1, dy_2], [y_1, y_2]);

$$jac := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$$

>eigenvals(jac);

$$4, -2$$

>eigenvectors(jac);

$$[4, 1, \{[1 \ 4]\}], [-2, 1, \{[1 \ -2]\}]$$

>persam := {diff($y_1(t), t$) = $y_2(t)$, diff($y_2(t), t$) = $-\frac{2 \cdot k}{m} \cdot y_1(t) - \delta \cdot y_2(t)$ };

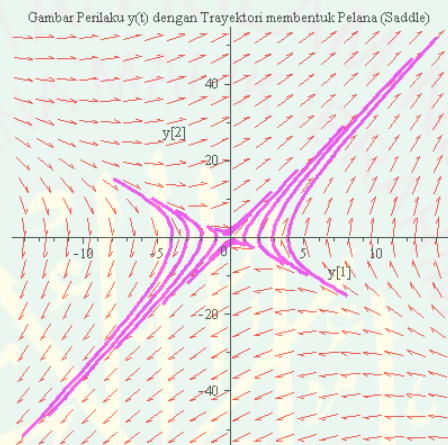
$$persam := \left\{ \frac{d}{dt} y_1(t) = y_2(t), \frac{d}{dt} y_2(t) = 8y_1(t) + 2y_2(t) \right\}$$

>solpersam := dsolve(persam, [$y_1(t), y_2(t)$]);

$$solpersam := \left\{ y_1(t) = -\frac{1}{2} _C1 e^{-2t} + \frac{1}{4} _C2 e^{4t}, y_2(t) = _C1 e^{-2t} + _C2 e^{4t} \right\}$$

> *nilaiawal* := $[y_1(0) = 1, y_2(0) = 1], [y_1(0) = -1, y_2(0) = -1], [y_1(0) = 4, y_2(0) = 1], [y_1(0) = -4, y_2(0) = -1], [y_1(0) = 0, y_2(0) = 1], [y_1(0) = 0, y_2(0) = -1], [y_1(0) = 0, y_2(0) = 2], [y_1(0) = 0, y_2(0) = -2], [y_1(0) = 2, y_2(0) = 1], [y_1(0) = -2, y_2(0) = -1], [y_1(0) = 3, y_2(0) = 2], [y_1(0) = -3, y_2(0) = -2]$;

> *phaseportrait*(*persam*, $[y_1(t), y_2(t)]$, $t = -0.6 .. 0.6$, {*nilaiawal*}, *stepsize* = $0.5e-1$, *method* = *classical*[*foreuler*], *linecolor* = *magenta*, *title* = "Gambar Perilaku $y(t)$ dengan Trayektori membentuk Pelana (Saddle)");



2. Kasus 2: Perilaku Dawai Membentuk *Star Point* dengan Nilai Eigen Kembar Negatif

> *restart*;

> *with*(*linalg*) : *with*(*plots*) : *with*(*DEtools*) :
 $k := 4 : m := 2 : \delta := 4 :$

> $dy_1 := y_2;$

$$dy_1 := y_2$$

> $dy_2 := -\frac{2 \cdot k}{m} \cdot y_1 - \delta \cdot y_2;$

$$dy_2 := -4y_1 - 4y_2$$

> *fixed* := *solve*($\{dy_1, dy_2\}, \{y_1, y_2\}$);

$$fixed := \{y_1 = 0, y_2 = 0\}$$

> *titik1* := *fixed*[1];

$$titik1 := y_1 = 0$$

> *jac* := *jacobian*($[dy_1, dy_2], [y_1, y_2]$);

$$jac := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$$

> `eigenvals(jac);`

-2, -2

> `eigenvectors(jac);`

$$[-2, 2, \{[1 \ -2]\}]$$

> `persam := {diff(y1(t), t) = y2(t), diff(y2(t), t) = -\frac{2 \cdot k}{m} \cdot y1(t) - \delta \cdot y2(t)}`;

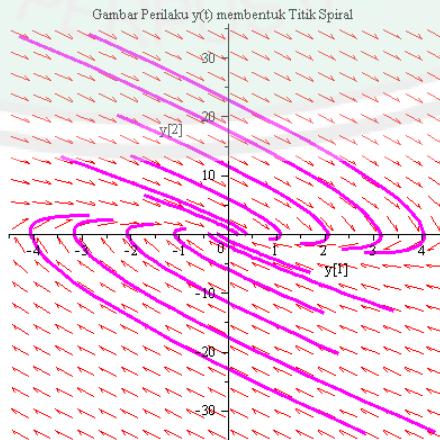
$$persam := \left\{ \frac{d}{dt} y_1(t) = y_2(t), \frac{d}{dt} y_2(t) = -4y_1(t) - 4y_2(t) \right\}$$

> `solpersam := dsolve(persam, [y1(t), y2(t)]);`

$$solpersam := \left\{ y_1(t) = -\frac{1}{4} e^{-2t} (2_C1 + 2_C2 t +_C2), y_2(t) = e^{-2t} (_C1 +_C2 t) \right\}$$

> `nilaiawal := [y1(0) = 1, y2(0) = 1], [y1(0) = -1, y2(0) = -1], [y1(0) = 4, y2(0) = 1], [y1(0) = -4, y2(0) = -1], [y1(0) = 0, y2(0) = 1], [y1(0) = 0, y2(0) = -1], [y1(0) = 0, y2(0) = 2], [y1(0) = 0, y2(0) = -2], [y1(0) = 2, y2(0) = 1], [y1(0) = -2, y2(0) = -1], [y1(0) = 3, y2(0) = 2], [y1(0) = -3, y2(0) = -2];`

> `phaseportrait(persam, [y1(t), y2(t)], t = -0.6 .. 0.6, {nilaiawal}, stepsize = 0.5e-1, method = classical[foreuler], linecolor = magenta, title = "Gambar Perilaku y(t) membentuk Titik Spiral");`



3. Kasus 3: Perilaku Dawai Membentuk *Star Point* dengan Nilai Eigen Kembar Positif

>restart;

>with(linalg) : with(plots) : with(DEtools) :

$k := 16 : m := 2 : \delta := -8 :$

> $dy_1 := y_2;$

$$dy_1 := y_2$$

> $dy_2 := -\frac{2 \cdot k}{m} \cdot y_1 - \delta \cdot y_2;$

$$dy_2 := -16y_1 + 8y_2$$

>fixed := solve({ dy_1, dy_2 }, { y_1, y_2 });

$$fixed := \{y_1 = 0, y_2 = 0\}$$

>titik1 := fixed[1];

$$titik1 := y_1 = 0$$

>jac := jacobian([dy_1, dy_2], [y_1, y_2]);

$$jac := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -16 & 8 \end{bmatrix}$$

>eigenvals(jac);

4, 4

>eigenvectors(jac);

$$[4, 2, \{\{1 \ 4\}\}]$$

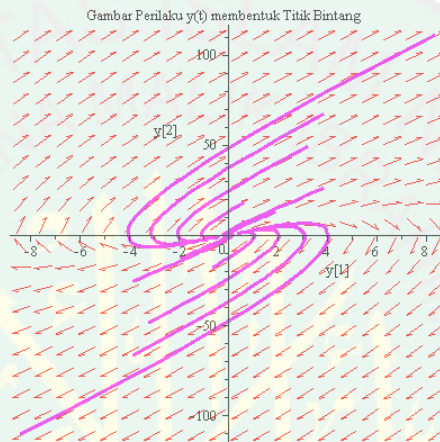
>persam := {diff($y_1(t), t$) = $y_2(t)$, diff($y_2(t), t$) = $-\frac{2 \cdot k}{m} \cdot y_1(t) - \delta \cdot y_2(t)$ };

$$persam := \left\{ \frac{d}{dt} y_1(t) = y_2(t), \frac{d}{dt} y_2(t) = -16y_1(t) + 8y_2(t) \right\}$$

>solpersam := dsolve(persam, [$y_1(t), y_2(t)$]);

$$\begin{aligned} solpersam := & \left\{ y_1(t) = \frac{1}{16} e^{4t} (4_C1 + 4_C2t - _C2), y_2(t) \right. \\ & \left. = e^{4t} (_C1 + _C2t) \right\} \end{aligned}$$

- > *nilaiawal* := [$y_1(0) = 1, y_2(0) = 1$], [$y_1(0) = -1, y_2(0) = -1$], [$y_1(0) = 4, y_2(0) = 1$], [$y_1(0) = -4, y_2(0) = -1$], [$y_1(0) = 0, y_2(0) = 1$], [$y_1(0) = 0, y_2(0) = -1$], [$y_1(0) = 0, y_2(0) = 2$], [$y_1(0) = 0, y_2(0) = -2$], [$y_1(0) = 2, y_2(0) = 1$], [$y_1(0) = -2, y_2(0) = -1$], [$y_1(0) = 3, y_2(0) = 2$], [$y_1(0) = -3, y_2(0) = -2$];
- > *phaseportrait*(*persam*, [$y_1(t), y_2(t)$], $t = -0.45 .. 0.45$, {*nilaiawal*}, *stepsize* = $0.5e-1$, *method* = *classical*[*foreuler*], *linecolor* = *magenta*, *title* = "Gambar Perilaku $y(t)$ membentuk Titik Bintang");



4. Kasus 4: Perilaku Dawai Membentuk Titik Spiral

- > *restart*;
- > *with*(*linalg*) : *with*(*plots*) : *with*(*DEtools*) :
 $k := 4 : m := 2 : \delta := -2 :$
- > $dy_1 := y_2;$ $dy_1 := y_2$
- > $dy_2 := -\frac{2 \cdot k}{m} \cdot y_1 - \delta \cdot y_2;$ $dy_2 := -4y_1 + 2y_2$
- > *fixed* := *solve*({ dy_1, dy_2 }, { y_1, y_2 });
 $fixed := \{y_1 = 0, y_2 = 0\}$
- > *titik1* := *fixed*[1];
 $titik1 := y_1 = 0$
- > *jac* := *jacobian*([dy_1, dy_2], [y_1, y_2]);

$$jac := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

> `eigenvals(jac);`

$$1 + i\sqrt{3}, 1 - i\sqrt{3}$$

> `eigenvectors(jac);`

$$\left[1 + i\sqrt{3}, 1, \left[\begin{matrix} 1 \\ 1 + i\sqrt{3} \end{matrix} \right] \right], \left[1 - i\sqrt{3}, 1, \left[\begin{matrix} 1 \\ 1 - i\sqrt{3} \end{matrix} \right] \right]$$

> `persam := {diff(y1(t), t) = y2(t), diff(y2(t), t) = -\frac{2 \cdot k}{m} \cdot y1(t) - \delta \cdot y2(t)}`;

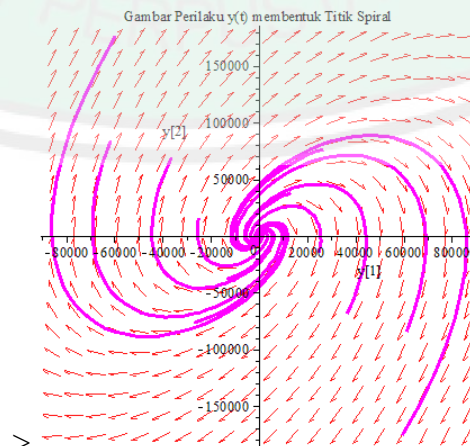
$$persam := \left\{ \frac{d}{dt} y_1(t) = y_2(t), \frac{d}{dt} y_2(t) = -4y_1(t) + 2y_2(t) \right\}$$

> `solpersam := dsolve(persam, [y1(t), y2(t)]);`

$$solpersam := \left\{ y_1(t) = \frac{1}{4} e^t (-C1 \sin(\sqrt{3} t) - C2 \cos(\sqrt{3} t)) \sqrt{3} + C2 \cos(\sqrt{3} t) + C1 \sin(\sqrt{3} t) \sqrt{3}, y_2(t) = e^t (-C1 \sin(\sqrt{3} t) + C2 \cos(\sqrt{3} t)) \right\}$$

> `nilaiawal := [y1(0) = 1, y2(0) = 1], [y1(0) = -1, y2(0) = -1], [y1(0) = 4, y2(0) = 1], [y1(0) = -4, y2(0) = -1], [y1(0) = 0, y2(0) = 1], [y1(0) = 0, y2(0) = -1], [y1(0) = 0, y2(0) = 2], [y1(0) = 0, y2(0) = -2], [y1(0) = 2, y2(0) = 1], [y1(0) = -2, y2(0) = -1], [y1(0) = 3, y2(0) = 2], [y1(0) = -3, y2(0) = -2];`

> `phaseportrait(persam, [y[1](t), y[2](t)], t = -.7 .. 10, {nilaiawal}, stepsize = 0.5e-1, method = classical[foreuler], linecolor = magenta, title = "Gambar Perilaku y(t) membentuk Titik Spiral ");`



5. Kasus 5: Perilaku Dawai Membentuk Titik Spiral

```

>restart;
>with(linalg) : with(plots) : with(DEtools) :
  k := 2 : m := 2 : δ := 1 :

>dy1 := y2;
                                     dy1 := y2

>dy2 := - $\frac{2 \cdot k}{m} \cdot y_1 - \delta \cdot y_2$ ;
                                     dy2 := -2y1 - y2

>fixed := solve({dy1, dy2}, {y1, y2});
                                     fixed := {y1 = 0, y2 = 0}

>titik1 := fixed[1];
                                     titik1 := y1 = 0

>jac := jacobian([dy1, dy2], [y1, y2]);
                                     jac :=  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ 

>eigenvals(jac);
                                      $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}I\sqrt{7}, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}I\sqrt{7}$ 

>eigenvectors(jac);
                                      $\left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}I\sqrt{7}, 1, \left[\left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}I\sqrt{7}\right]\right]\right], \left[-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}I\sqrt{7}, 1, \left[\left[1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}I\sqrt{7}\right]\right]\right]$ 

>persam := {diff(y1(t), t) = y2(t), diff(y2(t), t) = - $\frac{2 \cdot k}{m} \cdot y_1(t) - \delta \cdot y_2(t)$ };
                                     persam :=  $\left\{\frac{d}{dt} y_1(t) = y_2(t), \frac{d}{dt} y_2(t) = -2y_1(t) - y_2(t)\right\}$ 

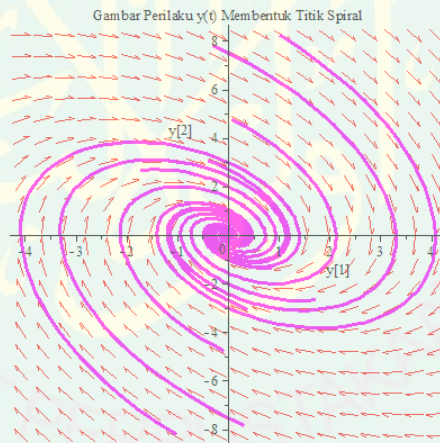
>solpersam := dsolve(persam, [y1(t), y2(t)]);

```

$$\text{solpersam} := \left\{ \begin{aligned} y_1(t) &= \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{2}t} \left(-_C1 \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}t\right) \right. \\ &\quad \left. -_C1 \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}t\right) \sqrt{7} -_C2 \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}t\right) \right. \\ &\quad \left. +_C2 \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}t\right) \sqrt{7} \right), y_2(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \left(-_C1 \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}t\right) \right. \\ &\quad \left. +_C2 \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}t\right) \right) \end{aligned} \right\}$$

> *nilaiawal* := [y₁(0) = 1, y₂(0) = 1], [y₁(0) = -1, y₂(0) = -1], [y₁(0) = 4, y₂(0) = 1], [y₁(0) = -4, y₂(0) = -1], [y₁(0) = 0, y₂(0) = 1], [y₁(0) = 0, y₂(0) = -1], [y₁(0) = 0, y₂(0) = 2], [y₁(0) = 0, y₂(0) = -2], [y₁(0) = 2, y₂(0) = 1], [y₁(0) = -2, y₂(0) = -1], [y₁(0) = 3, y₂(0) = 2], [y₁(0) = -3, y₂(0) = -2] :

> *phaseportrait*(*persam*, [y₁(t), y₂(t)], t = -0.7 .. 7, {*nilaiawal*}, *stepsize* = 0.5e-1, *method* = *classical*[*foreuler*], *linecolor* = *magenta*, *title* = "Gambar Perilaku y(t) Membentuk Titik Spiral ")



6. Kasus 6: Perilaku Dawai Membentuk Titik Pusat

> *restart*;

> *with(linalg)* : *with(plots)* : *with(DEtools)* :
k := 1 : *m* := 2 : *δ* := 0 :

> *dy*₁ := *y*₂;

*dy*₁ := *y*₂

$$> dy_2 := -\frac{2 \cdot k}{m} \cdot y_1 - \delta \cdot y_2;$$

$$dy_2 := -y_1$$

$$> fixed := solve(\{dy_1, dy_2\}, \{y_1, y_2\});$$

$$fixed := \{y_1 = 0, y_2 = 0\}$$

$$> titik1 := fixed[1];$$

$$titik1 := y_1 = 0$$

$$> jac := jacobian([dy_1, dy_2], [y_1, y_2]);$$

$$jac := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$> eigenvals(jac);$$

$$1, -1$$

$$> eigenvectors(jac);$$

$$[1, 1, \{[-1, 1]\}], [-1, 1, \{[1, 1]\}]$$

$$> persam := \left\{ \begin{array}{l} diff(y_1(t), t) = y_2(t), diff(y_2(t), t) = -\frac{2 \cdot k}{m} \cdot y_1(t) - \delta \\ \cdot y_2(t) \end{array} \right\};$$

$$persam := \left\{ \frac{d}{dt} y_1(t) = y_2(t), \frac{d}{dt} y_2(t) = -y_1(t) \right\}$$

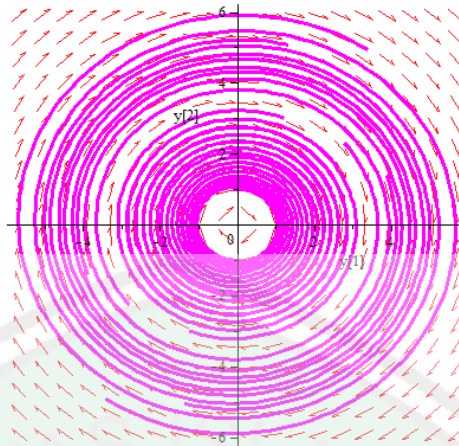
$$> solpersam := dsolve(persam, [y_1(t), y_2(t)]);$$

$$solpersam := \{y_1(t) = -_C1 \cos(t) + _C2 \sin(t), y_2(t) = _C1 \sin(t) + _C2 \cos(t)\}$$

$$> nilaiawal := [y_1(0) = 1, y_2(0) = 1], [y_1(0) = -1, y_2(0) = -1], [y_1(0) = 4, y_2(0) = 1], [y_1(0) = -4, y_2(0) = -1], [y_1(0) = 0, y_2(0) = 1], [y_1(0) = 0, y_2(0) = -1], [y_1(0) = 0, y_2(0) = 2], [y_1(0) = 0, y_2(0) = -2], [y_1(0) = 2, y_2(0) = 1], [y_1(0) = -2, y_2(0) = -1], [y_1(0) = 3, y_2(0) = 2], [y_1(0) = -3, y_2(0) = -2];$$

$$phaseportrait(persam, [y_1(t), y_2(t)], t = -0.1 .. 15, \{nilaiawal\}, stepsize = 0.5e-1, method = classical[foreuler], linecolor = magenta, title$$

= "Gambar Perilaku y(t) dengan Trayektori membentuk Pelana (Saddle)")



Lampiran 2

```

>restart;
>with(linalg) : with(plots) : with(DEtools) : k := 1000 : m := 657.3 : δ := 0.01 :
>dy1 := y2;
                                dy1 := y2
>dy2 := - $\frac{2 \cdot k}{m} \cdot y_1 - \delta \cdot y_2$ ;
                                dy2 := -3.042750646y1 - 0.01y2
>fixed := solve({dy1, dy2}, {y1, y2});
                                fixed := {y1 = 0., y2 = 0.}
>titik1 := fixed[1];
                                titik1 := y1 = 0.
>jac := jacobian([dy1, dy2], [y1, y2]);
                                jac :=  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3.042750646 & -0.01 \end{bmatrix}$ 
>eigenvals(jac);
                                -0.005000000000000000 + 1.74434103488968 I, -0.005000000000000000
                                - 1.74434103488968 I
>eigenvectors(jac);
                                [-0.00500000000000 - 1.744341035 I, 1, {[ 0.5732776813 + 0.001643250000 I 0. - 1. I ]}], [
                                -0.00500000000000 + 1.744341035 I, 1, {[ 0.5732776813 - 0.001643250000 I 0. + 1. I ]}]
>persam := {diff(y1(t), t) = y2(t), diff(y2(t), t) = - $\frac{2 \cdot k}{m} \cdot y_1(t) - \delta \cdot y_2(t)$ };
                                persam :=  $\left\{ \frac{d}{dt} y_1(t) = y_2(t), \frac{d}{dt} y_2(t) = -3.042750646 y_1(t) - 0.01 y_2(t) \right\}$ 

```

> *solpersam* := *dsolve*(*persam*, [*y*₁(*t*), *y*₂(*t*)]);

$$\begin{aligned}
 \text{solpersam} := & \left\{ y_1(t) = \right. \\
 & -\frac{10000}{1521375323} e^{-\frac{1}{200}t} \left(\cos\left(\frac{1}{50000} \sqrt{7606814115} t\right) \sqrt{7606814115} _C1 \right. \\
 & \left. - \sin\left(\frac{1}{50000} \sqrt{7606814115} t\right) \sqrt{7606814115} _C2 \right. \\
 & \left. + 250 \cos\left(\frac{1}{50000} \sqrt{7606814115} t\right) _C2 + 250 \sin\left(\frac{1}{50000} \sqrt{7606814115} t\right) _C1 \right), \\
 y_2(t) = & e^{-\frac{1}{200}t} \left(\cos\left(\frac{1}{50000} \sqrt{7606814115} t\right) _C2 \right. \\
 & \left. + \sin\left(\frac{1}{50000} \sqrt{7606814115} t\right) _C1 \right) \left. \right\}
 \end{aligned}$$

> *nilaiawal* := {*y*₁(0) = 1, *y*₂(0) = 0};

$$\text{nilaiawal} := \{y_1(0) = 1, y_2(0) = 0\}$$

> *solusielsak1* := *dsolve*(*persam union nilaiawal*);

$$\begin{aligned}
 \text{solusielsak1} := & \left\{ y_1(t) = e^{-\frac{1}{200}t} \left(\cos\left(\frac{1}{50000} \sqrt{7606814115} t\right) \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{50}{1521362823} \sin\left(\frac{1}{50000} \sqrt{7606814115} t\right) \sqrt{7606814115} \right), y_2(t) = \right. \\
 & \left. -\frac{1521375323}{76068141150000} e^{-\frac{1}{200}t} \sin\left(\frac{1}{50000} \sqrt{7606814115} t\right) \sqrt{7606814115} \right\}
 \end{aligned}$$

> *soleksak1* := *eval*([*y*₁(*t*), *y*₂(*t*)], *solusielsak1*);

$$\begin{aligned}
 \text{soleksak1} := & \left[e^{-\frac{1}{200}t} \left(\cos\left(\frac{1}{50000} \sqrt{7606814115} t\right) \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{50}{1521362823} \sin\left(\frac{1}{50000} \sqrt{7606814115} t\right) \sqrt{7606814115} \right), \right. \\
 & \left. -\frac{1521375323}{76068141150000} e^{-\frac{1}{200}t} \sin\left(\frac{1}{50000} \sqrt{7606814115} t\right) \sqrt{7606814115} \right]
 \end{aligned}$$

Lampiran 3

```

>restart;
>with(linalg) : with(plots) : with(DEtools) :
  k := 1000 : m := 260.2 : δ := 0.01 :

>dy1 := y2;
  dy1 := y2

>dy2 := - $\frac{2 \cdot k}{m} \cdot y_1 - \delta \cdot y_2$ ;
  dy2 := -7.686395080 y1 - 0.01 y2

>fixed := solve({dy1, dy2}, {y1, y2});
  fixed := {y1 = 0., y2 = 0.}

>titik1 := fixed[1];
  titik1 := y1 = 0.

>jac := jacobian([dy1, dy2], [y1, y2]);
  jac :=  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -7.686395080 & -0.01 \end{bmatrix}$ 

>eigenvals(jac);
  -0.005000000000 + 2.772430356 I, -0.005000000000
  - 2.772430356 I

>eigenvectors(jac);
  [-0.005000000000 + 2.772430356 I, 1,
  {[ 0.3606931893 - 0.0006505000001 I 0. + 1. I ]}], [
  -0.005000000000 - 2.772430356 I, 1,
  {[ 0.3606931893 + 0.0006505000001 I 0. - 1. I ]}]

>persam := {diff(y1(t), t) = y2(t), diff(y2(t), t) = - $\frac{2 \cdot k}{m} \cdot y_1(t) - \delta$ 
  ·y2(t)};
  persam :=  $\left\{ \frac{d}{dt} y_1(t) = y_2(t), \frac{d}{dt} y_2(t) = -7.686395080 y_1(t) - 0.01 y_2(t) \right\}$ 

>solpersam := dsolve(persam, [y1(t), y2(t)]);

```

$$\begin{aligned} \text{solpersam} := & \left\{ y_1(t) = \frac{5000}{192159877} e^{-\frac{1}{200}t} \left(\right. \right. \\ & -25_C1 \sin\left(\frac{3}{2500} \sqrt{5337757} t\right) \\ & - 6_C1 \cos\left(\frac{3}{2500} \sqrt{5337757} t\right) \sqrt{5337757} \\ & - 25_C2 \cos\left(\frac{3}{2500} \sqrt{5337757} t\right) \\ & \left. \left. + 6_C2 \sin\left(\frac{3}{2500} \sqrt{5337757} t\right) \sqrt{5337757} \right), y_2(t) \right. \\ & = e^{-\frac{1}{200}t} \left(-C1 \sin\left(\frac{3}{2500} \sqrt{5337757} t\right) \right. \\ & \left. \left. + C2 \cos\left(\frac{3}{2500} \sqrt{5337757} t\right) \right) \right\} \end{aligned}$$

> nilaiawal := {y₁(0) = 1, y₂(0) = 0};

nilaiawal := {y₁(0) = 1, y₂(0) = 0}

> solusielsak1 := dsolve(persam union nilaiawal);

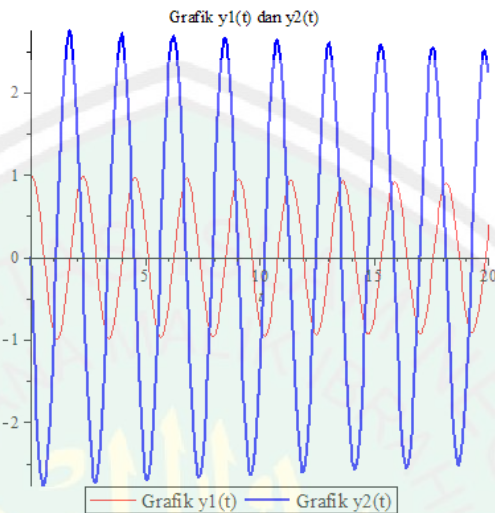
$$\begin{aligned} \text{solusielsak1} := & \left\{ y_1(t) \right. \\ & = e^{-\frac{1}{200}t} \left(\frac{25}{32026542} \sin\left(\frac{3}{2500} \sqrt{5337757} t\right) \sqrt{5337757} \right. \\ & \left. + \cos\left(\frac{3}{2500} \sqrt{5337757} t\right) \right), y_2(t) = \\ & \left. - \frac{192159877}{160132710000} e^{-\frac{1}{200}t} \sin\left(\frac{3}{2500} \sqrt{5337757} t\right) \sqrt{5337757} \right\} \end{aligned}$$

> soleksak1 := eval([y₁(t), y₂(t)], solusielsak1);

$$\begin{aligned} \text{soleksak1} := & \left[e^{-\frac{1}{200}t} \left(\frac{25}{32026542} \sin\left(\frac{3}{2500} \sqrt{5337757} t\right) \sqrt{5337757} \right. \right. \\ & \left. \left. + \cos\left(\frac{3}{2500} \sqrt{5337757} t\right) \right), \right. \\ & \left. - \frac{192159877}{160132710000} e^{-\frac{1}{200}t} \sin\left(\frac{3}{2500} \sqrt{5337757} t\right) \sqrt{5337757} \right] \end{aligned}$$

```
> p := plot(soleksak1, t = 0..20, title = "Grafik y1(t) dan y2(t)", legend
= ["Grafik y1(t)", "Grafik y2(t)"], color = [RED, BLUE], thickness
= [1, 2]) :
```

```
> display(p);
```



```
phaseportrait(persam, [y1(t), y2(t)], t = 0..1500, [[y1(0) = 1, y2(0)
= 2]], stepsize = 0.5e-1, method = classical[foreuler], linecolor
= magenta)
```

Lampiran 4

```
> restart;
```

```
> with(linalg) : with(plots) : with(DEtools) :
k := 1000 : m := 657.3 : delta := 0.01 :
```

```
> dy1 := y2;
```

$$dy_1 := y_2$$

```
> dy2 := -\frac{2 \cdot k}{m} \cdot y_1 - \delta \cdot y_2;
```

$$dy_2 := -3.042750646 y_1 - 0.01 y_2$$

```
> fixed := solve({dy1, dy2}, {y1, y2});
```

$$fixed := \{y_1 = 0., y_2 = 0.\}$$

```
> titik1 := fixed[1];
```

$$titik1 := y_1 = 0.$$

```
> jac := jacobian([dy1, dy2], [y1, y2]);
```

$$jac := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3.042750646 & -0.01 \end{bmatrix}$$

> *eigenvals(jac);*

$$-0.005000000000 + 1.744341035I, -0.005000000000 \\ - 1.744341035I$$

> *eigenvectors(jac);*

$$\begin{bmatrix} -0.005000000000 + 1.744341035I, 1, \\ \{ [0.5732776813 - 0.001643250000I \ 0. + 1.I] \}, [\\ -0.005000000000 - 1.744341035I, 1, \\ \{ [0.5732776813 + 0.001643250000I \ 0. - 1.I] \} \end{bmatrix}$$

> *persam := {diff(y₁(t), t) = y₂(t), diff(y₂(t), t) = - $\frac{2 \cdot k}{m} \cdot y_1(t) - \delta \cdot y_2(t)$ };*

$$persam := \left\{ \frac{d}{dt} y_1(t) = y_2(t), \frac{d}{dt} y_2(t) = -3.042750646 y_1(t) \right. \\ \left. - 0.01 y_2(t) \right\}$$

> *solpersam := dsolve(persam, [y₁(t), y₂(t)]);*

$$solpersam := \left\{ y_1(t) = \frac{10000}{1521375323} e^{-\frac{1}{200} t} \left(\right. \right. \\ \left. \left. -250_C1 \sin\left(\frac{1}{50000} \sqrt{7606814115} t\right) \right. \right. \\ \left. \left. -_C1 \cos\left(\frac{1}{50000} \sqrt{7606814115} t\right) \sqrt{7606814115} \right. \right. \\ \left. \left. -250_C2 \cos\left(\frac{1}{50000} \sqrt{7606814115} t\right) \right. \right. \\ \left. \left. +_C2 \sin\left(\frac{1}{50000} \sqrt{7606814115} t\right) \sqrt{7606814115} \right), y_2(t) \right. \\ \left. = e^{-\frac{1}{200} t} \left(\right. \right. \\ \left. \left. -_C1 \sin\left(\frac{1}{50000} \sqrt{7606814115} t\right) \right. \right. \\ \left. \left. +_C2 \cos\left(\frac{1}{50000} \sqrt{7606814115} t\right) \right) \right\}$$

- > $nilaiawal := [y_1(0) = 1, y_2(0) = 1], [y_1(0) = -1, y_2(0) = -1], [y_1(0) = 4, y_2(0) = 1], [y_1(0) = -4, y_2(0) = -1], [y_1(0) = 0, y_2(0) = 1], [y_1(0) = 0, y_2(0) = -1], [y_1(0) = 0, y_2(0) = 2], [y_1(0) = 0, y_2(0) = -2], [y_1(0) = 2, y_2(0) = 1], [y_1(0) = -2, y_2(0) = -1], [y_1(0) = 3, y_2(0) = 2], [y_1(0) = -3, y_2(0) = -2];$
- > $phaseportrait(persam, [y_1(t), y_2(t)], t = 0 .. 1500, \{nilaiawal\}, stepsize = 0.5e-1, method = classical[foreuler], linecolor = magenta);$

