KAJIAN GRAF LATIS FAKTOR
BILANGAN PRIMA BERPANGKAT *n*
DAN BILANGAN $2^n \times 10$

SKRIPSI

Oleh:
ZAINAL ABIDIN
NIM: 04510016

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
MALANG
2009

KAJIAN GRAF LATIS FAKTOR
BILANGAN PRIMA BERPANGKAT *n*
DAN BILANGAN $2^n \times 10$

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan
Dalam Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
ZAINAL ABIDIN
NIM: 04510016

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
MALANG
2009

KAJIAN GRAF LATIS FAKTOR
BILANGAN PRIMA BERPANGKAT *n*
DAN BILANGAN $2^n \times 10$

SKRIPSI

Oleh:
ZAINAL ABIDIN
NIM: 04510016

Telah Disetujui untuk Diuji
Malang, 20 Juli 2009

Dosen Pembimbing I,	Dosen Pembimbing II,
Evawati Alisah, M.Pd	**Ahmad Barizi, M.A**
NIP. 150 291 271	**NIP. 150 283 991**

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M.Si
NIP. 150 318 321

KAJIAN GRAF LATIS FAKTOR
BILANGAN PRIMA BERPANGKAT *n*
DAN BILANGAN $2^n \times 10$

SKRIPSI

Oleh:
ZAINAL ABIDIN
NIM. 04510016

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal:
28 Juli 2009

Susunan Dewan Penguji:			**Tanda Tangan**
1. **Penguji Utama**	:	**Abdussakir, M. Pd** **NIP. 150 327 247**	( )
2. **Ketua Penguji**	:	**Usman Pagalay, M.Si** **NIP. 150 327 240**	( )
3. **Sekretaris Penguji**	:	**Evawati Alisah, M. Pd** **NIP. 150 291 271**	( )
4. **Anggota Penguji**	:	**Ahmad Barizi, M. A** **NIP. 150 283 991**	( )

Mengetahui dan Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M.Si
NIP. 150 318 321

SURAT PERNYATAAN

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Zainal Abidin
NIM : 04510016
Fakultas : Sains dan Teknologi
Jurusan : Matematika
Judul Skripsi : Kajian Graf Latis Faktor Bilangan Prima Berpangkat n dan Bilangan $2^n \times 10$

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri.

Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 28 Juli 2009
Yang menyatakan,

Zainal Abidin
NIM. 04510016

MOTTO:

Dzikir, Fikir, dan Amal Sholeh
Taqwa, Intelektualitas, dan Profesionalitas
Kebenaran, Kejujuran, dan Keadilan

PERSEMBAHAN:

Penulis persembahkan
Karya ini untuk orang-orang yang sangat berarti:
Kedua orangtua tercinta (Alm. Syd. Abdullah & Srf. Zainiyah)
yang tanpa lelah memberikan dorongan moral,
spiritual, finansial dan tak henti-hentinya
mencurahkan kasih sayangnya.

Kakak-kakak tersayang (Srf. Halimatus Sa'diyah,
Srf. Aminah, Srf. Fatimah Al-Batul)
yang selalu menjadi teman dalam mencapai cita.

Kakak-kakak ipar (Syd. Muhsin & Syd. Idrus)
terima kasih atas saran-saran
dan bantuan yang telah diberikan.

Seluruh keluarga besar bani Abdullah, bani Thoha & bani
Muhammad,
Keluarga ini akan selalu menjadi keluarga impian.

Seluruh sahabat-sahabat Pergerakan Mahasiswa Islam Indonesia,
perjuangan masih panjang.
PMII ada untuk mustad'afin, ingatlah selalu mereka.

Sahabat Alif, Roisun, Hadir, Afif, Makmun, Mahdi, Bambang,
Wahid, Ahmad, Lutfi, Ghozali, Asoy, Franky, Rosid.
Terimakasih atas semua wawasan yang telah diberikan.

KATA PENGANTAR

Syukur alhamdulillah penulis panjatkan kehadirat Allah Swt yang telah memberikan curahan rahmat, taufiq dan hidayahNya sehingga skripsi yang berjudul "*Kajian Graf Latis Faktor Bilangan Prima Berpangkat n dan Graf Latis Faktor Bilangan* $2^n \times 10$" ini dapat terselesaikan. Sholawat serta salam semoga tetap terlimpahkan kepada junjungan nabi besar Muhammad SAW yang telah membawa umat manusia dari jalan yang gelap menuju jalan yang terang benderang.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini tidak akan mendapatkan suatu hasil yang baik tanpa adanya bimbingan, bantuan, saran serta doa dari berbagai pihak. Oleh karena itu penulis menyampaikan ungkapan terima kasih kepada

1. Prof. H. Imam Suprayogo, M.Si selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Dr. Sutiman Bambang Sumitro, SU., DSc. selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Sri Harini, M. Si selaku Ketua Jurusan Matematika Universitas Islam Negeri Malang.
4. Evawati Alisah, M.Pd selaku Dosen Pembimbing I, yang senantiasa dengan sabar memberikan bimbingan.
5. Ahmad Barizi, M.A selaku Dosen Pembimbing II, terima kasih atas bimbingan yang telah diberikan.

6. Abdussakir, M. Pd yang telah memberikan inspirasi dalam penyelesaian skripsi ini.
7. Segenap dosen Matematika yang telah berjasa memberikan ilmunya, membimbing dan memberikan motivasi dalam penyelesaian skripsi ini.
8. Kedua orangtua dan semua keluarga yang selalu mendoakan dan mendukung setiap langkah penulis.
9. Sahabat-sahabat Pergerakan Mahasiswa Islam Indonesia, yang selalu menjadi sumber inspirasi.
10. Teman-teman matematika khususnya angkatan 2004, terima kasih atas dukungan, motivasi, dan kebersamaannya selama ini.
11. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu, yang telah banyak membantu dalam penyelesaian skripsi ini.

Kiranya skripsi ini masih jauh dari sempurna, oleh karena itu penulis mengharapkan kritik dan saran yang sifatnya membangun. Akhirnya, penulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi penulis khususnya dan bagi pembaca pada umumnya.

Malang, 20 Juli 2009

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL
HALAMAN PENGAJUAN
HALAMAN PERSETUJUAN
HALAMAN PENGESAHAN
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN
HALAMAN MOTTO
HALAMAN PERSEMBAHAN
KATA PENGANTAR i
DAFTAR ISI iii
DAFTAR GAMBAR v
DAFTAR TABEL vii
ABSTRAK viii
BAB I PENDAHULUAN
1.1 Latar Belakang 1
1.2 Rumusan Masalah 8
1.3 Tujuan Masalah 8
1.4 Manfaat Penelitian 8
1.5 Metode Penelitian 9
1.6 Batasan Masalah 10
1.7 Sistematika Penulisan 10
BAB II KAJIAN PUSTAKA
2.1 Bilangan 12
2.1.1 Keterbagian 13
2.1.2 Bilangan Prima 14
2.1.3 Fungsi Multiplikatif 14
2.2 Teori Latis 17
2.2 Graf 23
2.3.1 Definisi Graf 23
2.3.2 *Adjacent* dan *Incident* 24

2.3.3 Operasi Pada Graf 25
2.3.4. Macam-macam Graf 27
2.3.4.1 Graf Lintasan.. 27
2.3.4.2 Graf Sikel 27
2.3.5.Graf Trivial dan Non Trivial.. 28
2.3.6 Jalan dan Lintasan 29
2.3.7 Graf Tangga 30
2.3.8 Derajat Suatu Titik 31
2.4 Graf Untuk Konsep Waris 33
2.5 Graf pada Konsep Pembagian Zakat.. 34
BAB III PEMBAHASAN
3.1 Graf Latis Faktor Bilangan p^n 36
3.1.1 Pembahasan Himpunan P^1 36
3.1.2 Pembahasan Himpunan P^2 42
3.1.3 Pembahasan Himpunan P^3 46
3.1.4 Mencari Ciri Umum Graf Latis Faktor Untuk P^n 51
3.2 Graf Latis Faktor Bilangan $2^n \times 10$ 55
3.2.1 Mencari Faktor Pembagi Positif.. 55
3.2.2 Membuat Graf Latis Faktor 57
3.2.3 Mencari Ciri Umum Graf Latis Faktor Untuk $2^n \times 10$ 60
3.3 Relevensi Graf Latis Faktor dengan Konsep Tingkatan
orang berpuasa 63
BAB IV KESIMPULAN
4.1. Kesimpulan 67
4.2. Saran 68

DAFTAR PUSTAKA

LAMPIRAN

DAFTAR GAMBAR

Gambar 1.1 Jembatan Konigsberg 5
Gambar 1.2 Graf yang Merepresentasikan Masalah Jembatan Konigsberg......6
Gambar 1.3 Graf yang Merepresentasikan Tingkatan Seorang dalam *fiqh*.......7
Gambar 2.1 Diagram Latis Faktor..19
Gambar 2.2 Graf G...24
Gambar 2.3 Graf H...24
Gambar 2.4 Gabungan Graf..25
Gambar 2.5 Penjumlahan Dua Graf 26
Gambar 2.6 Graf Hasil Kali Kartesius 26
Gambar 2.7 Graf lintasan...27
Gambar 2.8 Graf Sikel..28
Gambar 2.9 Graf Trivial dan non Trivial 28
Gambar 2.10 Graf G...29
Gambar 2.11 Graf Tangga $M_1 \cdots M_5$ 31
Gambar 2.12 Graf G...32
Gambar 2.13 Graf yang Merepresenrasikan Pembagian Waris..........................34
Gambar 2.14 Graf yang Merepresenrasikan Pembagian Zakat 35
Gambar 3.1.a Diagram Latis Faktor L_1 39
Gambar 3.1.b Graf Latis Faktor L_1 39
Gambar 3.2.a Diagram Latis Faktor L_2 40
Gambar 3.2.b Graf Diagram Latis Faktor L_2 40
Gambar 3.3.a Diagram Latis Faktor L_3 41
Gambar 3.3.b Graf Diagram Latis Faktor L_3 41
Gambar 3.4.a Diagram Latis Faktor L_1 44
Gambar 3.4.b Graf Latis Faktor L_1 44
Gambar 3.5.a Diagram Latis Faktor L_2 44
Gambar 3.5.b Graf Diagram Latis Faktor L_2 44

Gambar 3.6.a Diagram Latis Faktor L_3 45
Gambar 3.6.b Graf Diagram Latis Faktor L_3 45
Gambar 3.7.a Diagram Latis Faktor L_1 48
Gambar 3.7.b Graf Latis Faktor L_1 48
Gambar 3.8.a Diagram Latis Faktor L_2 49
Gambar 3.8.b Graf Diagram Latis Faktor L_2 49
Gambar 3.9.a Diagram Latis Faktor L_3 50
Gambar 3.9.b Graf Diagram Latis Faktor L_3 50
Gambar 3.10 Diagram Latis Faktor L_n 52
Gambar 3.11 Graf Latis Faktor G_n 53
Gambar 3.12.a Diagram Latis Faktor L_1 57
Gambar 3.12.b Graf Latis Faktor L_1 57
Gambar 3.13.a Diagram Latis Faktor L_2 58
Gambar 3.13.b Graf Diagram Latis Faktor L_2 58
Gambar 3.14.a Diagram Latis Faktor L_3 59
Gambar 3.14.b Graf Diagram Latis Faktor L_3 59
Gambar 3.15 Graf Latis Faktor Bilangan $2^n \times 10$ 61
Gambar 3.16 Graf Latis Faktor G_n 64
Gambar 3.17 Graf Tingkatan orang berpuasa..66

DAFTAR TABEL

Tabel 3.1 Pola Graf Latis Faktor Untuk Bilangan p^1 41
Tabel 3.2 Pola Graf Latis Faktor Untuk Bilangan p^2 46
Tabel 3.3 Pola Graf Latis Faktor Untuk Bilangan p^3 51
Tabel 3.4 Pola Graf Latis Faktor Untuk Bilangan p^n 52
Tabel 3.5 Pola Graf Latis Faktor Untuk Bilangan $2^n \times 10$ 60

ABSTRAK

Abidin, Zainal. 2009. **Kajian Graf Latis Faktor Bilangan Prima Berpangkat *n* dan Graf Latis Faktor Bilangan $2^n \times 10$.** Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing : Evawati Alisah, M.Pd
Ahmad Barizi, M.A

Kata kunci: Faktor, Graf, Latis, Himpunan.

Aljabar adalah salah satu yang paling tua dari semua cabang matematika. Sejarahnya adalah sepanjang sejarah dari peradaban. Sebagai cabang matematika seperti halnya teori bilangan, geometri, maupun matematika terapan lainnya, aljabar merupakan salah satu bidang matematika yang mempunyai banyak sekali materi yang dapat dibahas, di antaranya adalah himpunan, operasi himpunan, grup, latis, dan sebagainya.

Penelitian ini membahas tentang graf yang terbentuk dari latis faktor suatu bilangan. Pada penelitian ini diambil dua rumusan masalah yakni: 1) Bagaimana graf yang terbentuk dari latis faktor bilangan prima berpangkat n ? dan 2) Bagaimana graf yang terbentuk dari latis faktor bilangan $2^n \times 10$?.

Pada proses pengerjaan, tahapannya adalah sebagai berikut: a) Menentukan himpunan bilangan yang akan diteliti. b) Mencari faktor pembagi dari setiap unsur dalam himpunan tersebut. c) Memeriksa apakah faktor-faktor yang ditemukan memenuhi aturan latis. d) Membuat graf latis faktor dari masing-masing bilangan anggota himpunan. e) Mendeskripsikan ciri-ciri yang dimiliki oleh graf latis faktor yang terbentuk. f) Mencari karakteristik umum graf latis faktor yang terbentuk dengan menganalisis ciri-ciri yang dimilikinya.

Setelah proses terlaksana, maka dihasilkan kesimpulan sebagai berikut:

Untuk G_n graf latis faktor bilangan prima berpangkat n maka $V(G_n) = n+1$, $E(G_n) = n$, panjang lintasan dari G_n adalah n dan derajat maksimum dari titik-titik pada G_n adalah 2. Untuk G_n graf latis faktor bilangan $2^n \times 10$ dengan $n > 0$ maka $V(G_n) = 2n+4$, $E(G_n) = 3n+4$, sikel terpanjang pada G_n adalah $2n+4$ dan cycle terpendek pada G_n adalah 4.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Matematika sebagai suatu ungkapan dari pikiran manusia mencerminkan kehendak yang aktif, alasan perenungan, dan keinginan untuk kesempurnaan yang *aesthetic*. Unsur-unsur dasarnya adalah intuisi dan logika, konstruksi dan analisis, ciri khas dan kaidah umum (Richard&Herbert,1969).

Dalam mengartikan matematika, pada satu sisi matematika adalah gaya di mana seseorang menyatakan suatu variasi himpunan dari simbol seolah-olah tanpa manusia dan, di sisi yang lain menyatakan matematika sebagai kedalaman penafsiran dari suatu gaya tertentu berkaitan dengan aktivitas manusia. (Brown,1996:81)

Dunia matematika lahir dari rahim kesadaran bahwa alam semesta itu diatur oleh hukum-hukum yang teratur. Hal ini menyiratkan arti bahwa untuk memasuki rahasia pemahaman dari dunia matematika maka pertama-tama harus melakukan lompatan kualitatif dalam alam kesadaran. Alam harus dipandang sebaga sesuatu yang tunduk pada hukum-hukum keteraturan (Alisah & Dharmawan,2007:17).

Alam semesta memuat bentuk-bentuk dan konsep matematika, meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Alam semesta serta segala isinya diciptakan Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan, dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi (Abdusysyakir,2007:79). Maka sebagai muslim harus mempunyai keyakinan bahwa hukum-hukum keteraturan tersebut datangnya dari Allah. Allah menetapkan hukum sesuai dengan apa yang dikehendakiNYA, sebagaimana firmanNYA dalam Al Qur'an surat Al Qamar ayat 49 disebutkan:

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَٰهُ بِقَدَرٍ ﴿٤٩﴾

Artinya*: Sesungguhnya kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran"*

Dari segi bahasa kata *qadar* dapat berarti *kadar tertentu* yang tidak bertambah atau berkurang, atau berarti "kuasa". Tetapi karena ayat tersebut berbicara tentang segala sesuatu yang berada dalam kuasa Allah, maka adalah lebih tepat memahaminya dalam arti *ketentuan* dan *sistem yang telah ditetapkan terhadap segala sesuatu*. Tidak hanya terbatas pada salah satu aspeknya saja. (Shihab,2003:482)

Aljabar adalah salah satu yang paling tua dari semua cabang matematika. Sejarahnya adalah sepanjang sejarah dari peradaban, barangkali lebih panjang. Sejarawan yang terkenal tentang matematika B. L. Van der Waerden percaya bahwa ada suatu peradaban yang mendahului peradaban dari Mesopotamia, Mesir, Negeri China, dan India dan bahwa peradaban itu adalah sumber akar dari konsep matematika yang paling awal (Tabak,2004:xi). Sebagai cabang matematika seperti halnya teori bilangan, geometri, maupun matematika terapan lainnya, aljabar merupakan salah satu bidang matematika yang mempunyai banyak sekali materi yang dapat dibahas, di antaranya adalah bilangan, himpunan, operasi himpunan, grup, latis, dan sebagainya.

Pada aspek yang lain, diskursus tentang bilangan dalam khazanah keilmuan matematika dapat dikatakan adalah salah satu topik yang sangat menyita perhatian para matematikawan dunia. Ilmu bilangan sangat terkait dengan perhitungan.

Dalam Surat al-Jinn ayat 28, diterangkan bahwa Tuhan menciptakan segala sesuatu (kejadian dan semua objek di alam semesta) dengan "hitungan yang teliti satu persatu", yaitu dari kata Arab, *'adad*.

لِّيَعْلَمَ أَن قَدْ أَبْلَغُوا۟ رِسَٰلَٰتِ رَبِّهِمْ وَأَحَاطَ بِمَا لَدَيْهِمْ وَأَحْصَىٰ كُلَّ شَىْءٍ عَدَدًۢا ﴿٢٨﴾

Artinya: *Supaya Dia mengetahui, bahwa Sesungguhnya Rasul-rasul itu telah menyampaikan risalah-risalah Tuhannya, sedang (sebenarnya) ilmu-Nya meliputi apa yang ada pada mereka, dan Dia menghitung segala sesuatu satu persatu.*

Esensi ayat ini adalah bahwa ilmu Tuhan meliputi segala sesuatu, tidak ada yang tertinggal. Semua kejadian, objek alam, penciptaan di bumi dan langit, dan struktur al-Qur'an, tidak ada yang kebetulan. Semuanya ditetapkan dengan hitungan yang sangat teliti. Sebenarnya bila diketahui, (sebagian) ilmu tersebut meliputi risalah-risalah yang disampaikan dan ilmu yang ada pada para Rasul. Dalam kehidupan modern sekarang pun, kita akan menjumpai "hitungan tersebut", mulai dari yang sederhana sampai yang paling rumit. (Muftie:2004:04)

Bilangan prima adalah salah satu subtopik dalam ilmu bilangan. Bilangan prima selalu mempesona para ahli matematika. Secara acak mereka nampak di antara bilangan bulat, namun tidak semua bilangan bulat adalah bilangan prima. Bilangan prima secara definitif dengan bahasa yang lebih umum adalah bilangan yang hanya bisa dibagi bilangan itu sendiri dan satu (Khao Yao Tung. 2008:23). Berarti ia hanya mempunyai dua faktor, yakni bilangan itu sendiri dan 1.

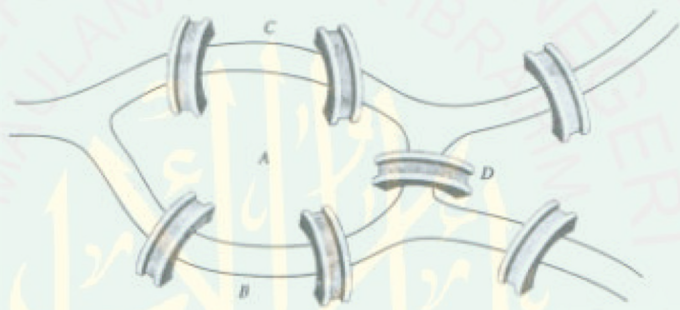
Pembahasan tentang bilangan prima tidak dapat terlepas dari teori tentang bilangan itu sendiri. Pencarian bilangan prima dengan formula seperti yang dilakukan oleh matematikawan Erastosthenes dianggap sebagai cikal bakal dari teori bilangan (Khao Yao Tung. 2008:23).

Jika *p* adalah bilangan prima, maka himpunan P_i^n adalah himpunan bilangan prima berpangkat, dinotasikan $A = \left\{ p_i^n \mid i = 1, 2, 3, \cdots \right\}$ dan n = 1,2,3,.... Berbeda dengan bilangan prima, setiap unsur dari himpunan tersebut tidak hanya memiliki dua faktor. Selain bilangan prima ada sebuah bilangan yang tidak kalah menarik yaitu bilangan $2^n \times 10$. Bilangan ini mempunyai faktor yang teratur untuk $n = 0, 1, 2, \cdots$.

Teori latis adalah salah satu cabang dari matematika modern yang pembahasannya sangat terkait dengan himpunan dan relasi. Ada beberapa macam contoh latis, di antaranya latis fnite kecil, latis boole, latis, faktor, latis partisi dan sebagainya.

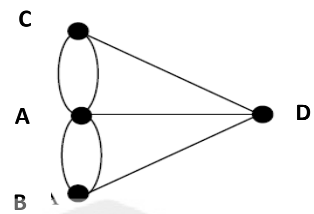
Matematikawan Jerman kenamaan Richard Dedekin adalah orang yang pertama kali menerbitkan kertas kerjanya pada teori latis. Ia memulai dengan mempelajari faktor persekutuan dari bilangan-bilangan asli. Bilangan-bilangan ini dengan sifat-sifat keterbagiannya memberikan banyak contoh-contoh latis. (Sukardjono:2002:50)

Teori Graf adalah salah satu cabang matematika yang memahas masalah yang memuat susunan objek tertentu dan keterhubungan antara objek-objek tersebut. Euler (1707-1782) disebut sebagai bapak dari teori graph. (Hararay:1969:1). Euler berusaha untuk merepresentasikan Jembatan Konigsberg, dan menyelesaikan permasalahan jembatan tersebut. Konigsberg adalah sebuah kota di sebelah timur Prussia (Jerman sekarang) dimana terdapat sungai Pregel dan merupakan tempat tinggal Duke of Prussia pada abad ke-16 (tahun 1736). Kota tersebut saat ini bernama Kaliningrad, dan merupakan pusat ekonomi dan industri utama di Russia Barat. Sungai Pregel membagi kota menjadi 4 daratan dengan mengalir mengitari pulau Kneiphof lalu bercabang menjadi dua buah anak sungai seperti tampak pada gambar 1.1:



Gambar 1.1 Jembatan Konigsberg.

Pada abad ke-18 dibangunlah tujuh jembatan yang menghubungkan ke-empat daratan tersebut. Pada hari Minggu, masyarakat Konigsberg biasanya berjalan-jalan dari daratan satu ke daratan lainnya melalui jembatan tersebut. Mereka berpikir apakah mungkin untuk berjalan menyeberangi ke-tujuh jembatan tanpa melalui jembatan yang sama dari suatu daratan dan kembali ke tempat semula. Masalah ini pertama kali dipecahkan oleh Leonhard Euler. Solusi Euler merepresentasikan masalah ini ke dalam sebuah graf dengan ke-empat daratan sebagai titik (*vertex*) dan ketujuh jembatan sebagai sisi (*edge*). Graf yang dibuat Euler diperlihatkan pada gambar 1.2 (Wirawan, 2008:1).



Gambar 1.2 Graf yang Merepresentasikan Masalah Jembatan Konigsberg.

Dengan graf tersebut, Euler berhasil menemukan jawaban kenapa orang-orang tidak dapat melalui ketujuh jembatan tersebut masing-msing sekali dan kembali ke tempat semula. Jawaban yang ditemukan Euler adalah karena tidak semua titik pada graf tersebut berderajat genap. Simpul B, C, dan D berderajat 3, sedangkan simpul A berderajat 5 (Wirawan, 2008:2).

Beberapa permasalahan praktis yang penting dalam kehidupan dapat diselesaikan dengan teori graf, misalnya masalah industry dan pemetaan suatu daerah. Selain itu, beberapa permasalahan dalam matematika sendri juga dapat diselesikan dengan terori graf, seperti latis dari grup dan subgrup dan pohon faktor dari suatu bilangan.

Misalkan himpunan $A=\left\{p_i^n \mid i=1,2,3,\cdots\right\}$ adalah himpunan bilangan prima berpangkat yang memenuhi definisi latis. Dan misalkan $K=\left\{20,40,\cdots,2^n\times 10\right\}$ adalah himpunan bilangan dengan $n=1,2,\cdots$. Setiap unsur dari dua himpunan ini mempunyai faktor pembagi positif. Jika dibuat pohon faktor dari setiap unsur dari himpunan tersebut menggunakan kaidah pembuatan diagram latis, pohon seperti apakah yang akan terbentuk? Jika diagram tersebut diibaratkan sebuah graf, maka ciri apa saja yang dimiliki oleh graf tersebut?.

Abdul Hamid Hakim dalam *Al Bayan* memberikan tiga tingkatan seorang dalam memakai *fiqh* yakni *Al Muqallid* (المقلّد), *Al Muttabi'* (المتّبع), dan *Al Mujtahid* (المجتهد). *Al Muqallid* adalah tingkatan di mana seseorang menerima *qaul* ahli fiqh tanpa mengetahui dasar yang diikuti. *Al Muttabi'* adalah tingkatan di mana seseorang menerima *qaul* ahli fiqh dengan mengetahui dasar dari *qaul* tersebut. Tingkatan ketiga adalah *Al Mujtahid* di mana seseorang telah mampu menghasilkan *qaul* sendiri dengan jalan istinbath dari Al Qur'an dan As Sunnah.

Konsep *fiqh* tersebut jika digambarkan dengan pasangan titik dan garis pada teori graf adalah sebagai berikut:

Gambar 1.3 Graf yang Merepresentasikan Tingkatan seorang dalam *fiqh*

Setiap titik dalam graf tersebut merepresentasikan seorang *mufaqqih* (orang yang menggunakan *fiqh*). Sisi pada graf mewakili proses yang dilalui seseorang untuk mencapai tingkatan tertentu. Setiap proses untuk mencapai tingkat selanjutnya memiliki syarat-syarat tertentu (sejenis konsensus) yang harus dimiliki seseorang. Maka setiap dua titik pada graf di atas akan terhubung jika syarat-syarat dalam proses telah terpenuhi. Kaitan konsepsi tersebut dengan graf latis faktor ialah bahwa setiap dua titik pada graf latis faktor dapat terhubung jika telah memenuhi syarat-syarat tertentu.

1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka dibuat rumusan masalah sebagai berikut:

1. Bagaimana graf yang terbentuk dari latis faktor bilangan prima berpangkat n ?
2. Bagaimana graf yang terbentuk dari latis faktor bilangan $2^n \times 10$?

1.3. Tujuan

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan penelitian ini adalah:

1. Mendeskripsikan dan menganalisis graf yang terbentuk dari latis faktor bilangan prima berpangkat n.
2. Mendeskripsikan dan menganalisis graf yang terbentuk dari latis faktor bilangan $2^n \times 10$.

1.4. Manfaat Penelitian

Dari penulisan skripsi ini diharapkan dapat bermanfaat bagi:

1. Penulis
   a. Untuk menambah pemahaman tentang konsepsi yang yang ada dalam matematika, khususnya teori bilangan, struktur aljabar, dan teori graf.
   b. Sebagai sarana dan latihan untuk menambah pemahaman penguasaan penulis tentang grafik dari latis faktor perpangkatan bilangan prima
2. Pembaca

   Sebagai tambahan literatur bagi mahasiswa khususnya yang sedang menempuh mata kuliah teori bilangan, struktur aljabar, dan teori graf.

1.5. Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah *library research* atau kajian literature, yakni melakukan penelitian untuk memperoleh data-data dan informasi-informasi serta objek-objek yang digunakan dalam permasalahan trersebut. Studi kepustakaan merupakan penampilan argumentasi penalaran keilmuan untuk memaparkan hasil olah pikir mengenai suatu permasalahan atau topik kajian kepustakaan yang dibahas dalam pemelitian.

Literatur utama dari penelitian ini adalah karya Sukardjono dengan judul *Teori Latis* dan karya Robin J Wilson, dan John J Watkins dengan judul *Graphs: An Introductory approach: A First Course in Discrete Mathematics*. Dan disertai literature pendukung seperti karya Frank Harary berjudul *Graph Theory*, karya Drs. Gatot Muhsetyo, M. Sc berjudul *Dasar-dasar Teori Bilangan* dan lain sebagainya.

Adapun langkah-langkah yang akan diterapkan oleh penulis dalam membahas penelitian ini adalah menerapkan konsep teori latis pada bilangan prima, selanjutnya menghubungkannya dengan teori graf dengan tahapan-tahapan adalah sebagai berikut:

a. Menentukan himpunan bilangan yang akan diteliti.
b. Mencari faktor pembagi dari setiap unsur dalam himpunan tersebut.
c. Memeriksa apakah faktor-faktor yang ditemukan memenuhi aturan latis.
d. Membuat graf latis faktor dari masing-masing bilangan anggota himpunan.
e. Mendeskripsikan ciri-ciri yang dimiliki oleh graf latis faktor yang terbentuk.

f. Mencari ciri umum graf latis faktor yang terbentuk dengan menganalisis ciri-ciri yang dimilikinya.

1.6. Batasan Masalah

Dalam pembahasan teori latis, ada beberapa contoh latis. Agar pembahasan dalam skripsi ini tidak meluas pada bermacam-macam contoh latis, maka penulis hanya membatasi pada masalah Latis Faktor.

Untuk menghindari terjadinya persepsi yang berbeda terhadap fokus kajian dalam penelitian ini, perlu ada penegasan istilah yang dipergunakan, sehingga secara operasional tidak ada kendala terjadinya perbedaan pemahaman menyangkut hal-hal yang dibahas berkaitan dengan penggunaan istilah-istilah berikut:

1. Latis faktor, adalah latis yang terdiri dari faktor-faktor positif dari sebuah bilangan.
2. Latis subgrup adalah latis yang terdiri dari subgrup-subgrup dari sebuah grup.

Dalam penelitian ini istilah latis yang dipakai adalah latis faktor.

1.7. Sistematika Penulisan

Agar penulisan skripsi ini lebih terarah, mudah ditelaah dan dipahami, maka digunakan sistematika pembahasan yeng terdiri dari empat bab. Masing-masing bab dibagi ke dalam beberapa subbab dengan rumusan sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN

Pendahuluan meliputi: latar belakang masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II KAJIAN PUSTAKA

Bagian ini terdiri atas konsep-konsep (teori-teori) yang mendukung bagian pembahasan. Konsep-konsep tersebut antara lain membahas tentang graf, teori latis, dan teori bilangan.

BAB III PEMBAHASAN

Merupakan pembahasan utama tentang karakteristik graf latis faktor bilangan prima berpangkat n dan graf latis faktor bilangan $2^n \times 10$.

BAB IV PENUTUP

Pada bab ini akan dibahas tentang kesimpulan dan saran.

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Bilangan

Pada dasarnya semua cabang ilmu bersumber dari Al-Qur'an baik itu ilmu agama maupun ilmu umum, dan salah satu dari cabang ilmu tersebut adalah disiplin ilmu matematika. Sedangkan salah satu cabang dari ilmu matematika tersebut adalah bilangan.

Dalam Al-Qur'an ada beberapa ayat yang membahas tentang bilangan. Salah satunya dalam al-Quran surat al-Israa' ayat 12 disebutkan.

وَجَعَلۡنَا ٱلَّيۡلَ وَٱلنَّهَارَ ءَايَتَيۡنِۖ فَمَحَوۡنَآ ءَايَةَ ٱلَّيۡلِ وَجَعَلۡنَآ ءَايَةَ ٱلنَّهَارِ مُبۡصِرَةٗ لِّتَبۡتَغُواْ
فَضۡلٗا مِّن رَّبِّكُمۡ وَلِتَعۡلَمُواْ عَدَدَ ٱلسِّنِينَ وَٱلۡحِسَابَۚ وَكُلَّ شَيۡءٖ فَصَّلۡنَٰهُ تَفۡصِيلٗا
١٢

Artinya: *Dan kami jadikan malam dan siang sebagai dua tanda, lalu kami hapuskan tanda malam dan kami jadikan tanda siang itu terang, agar kamu mencari karunia dari Tuhanmu, dan supaya kamu mengetahui bilangan tahun-tahun dan perhitungan. dan segala sesuatu Telah kami terangkan dengan jelas.*

Dalam ayat ini terdapat kata(عدد) yang berarti bilangan. Ini berarti bahwa bilangan terbahas dalam Al-Qur'an. Ayat ini menjelaskan tentang bilangan-bilangan tahun. Dengan ini manusia diharapkan mengetahui bilangan tahun-tahun dan perhitungan waktu (hari, bulan, dan sebagainya).

2.1.1 Keterbagian

Masalah pembagian secara substansial termaktub dalam Al-Qu'an, diantaranya di dalam surat an-Nisaa' ayat 11 berikut:

يُوصِيكُمُ ٱللَّهُ فِيٓ أَوۡلَٰدِكُمۡۖ لِلذَّكَرِ مِثۡلُ حَظِّ ٱلۡأُنثَيَيۡنِۚ فَإِن كُنَّ نِسَآءٗ فَوۡقَ ٱثۡنَتَيۡنِ فَلَهُنَّ ثُلُثَا مَا تَرَكَۖ وَإِن كَانَتۡ وَٰحِدَةٗ فَلَهَا ٱلنِّصۡفُۚ وَلِأَبَوَيۡهِ لِكُلِّ وَٰحِدٖ مِّنۡهُمَا ٱلسُّدُسُ مِمَّا تَرَكَ إِن كَانَ لَهُۥ وَلَدٞۚ فَإِن لَّمۡ يَكُن لَّهُۥ وَلَدٞ وَوَرِثَهُۥٓ أَبَوَاهُ فَلِأُمِّهِ ٱلثُّلُثُۚ فَإِن كَانَ لَهُۥٓ إِخۡوَةٞ فَلِأُمِّهِ ٱلسُّدُسُۚ مِنۢ بَعۡدِ وَصِيَّةٖ يُوصِي بِهَآ أَوۡ دَيۡنٍۗ ءَابَآؤُكُمۡ وَأَبۡنَآؤُكُمۡ لَا تَدۡرُونَ أَيُّهُمۡ أَقۡرَبُ لَكُمۡ نَفۡعٗاۚ فَرِيضَةٗ مِّنَ ٱللَّهِۗ إِنَّ ٱللَّهَ كَانَ عَلِيمًا حَكِيمٗا ١١

Artinya: *Allah mensyari'atkan bagimu tentang (pembagian pusaka untuk) anak-anakmu. yaitu:bagian seorang anak lelaki sama dengan bagian dua orang anak perempuan; dan jika anak itu semuanya perempuan lebih dari dua, Maka bagi mereka dua pertiga dari harta yang ditinggalkan; jika anak perempuan itu seorang saja, Maka ia memperoleh separuh harta. dan untuk dua orang ibu-bapak, bagi masing-masingnya seperenam dari harta yang ditinggalkan, jika yang meninggal itu mempunyai anak; jika orang yang meninggal tidak mempunyai anak dan ia diwarisi oleh ibu-bapaknya (saja), maka ibunya mendapat sepertiga; jika yang meninggal itu mempunyai beberapa saudara, Maka ibunya mendapat seperenam. (Pembagian-pembagian tersebut di atas) sesudah dipenuhi wasiat yang ia buat atau (dan) sesudah dibayar hutangnya. (Tentang) orang tuamu dan anak-anakmu, kamu tidak mengetahui siapa di antara mereka yang lebih dekat (banyak) manfaatnya bagimu. Ini adalah ketetapan dari Allah. Sesungguhnya Allah Maha mengetahui lagi Maha Bijaksana.*

Ayat ini menerangkan bahwa sebenarnya pembagian (harta) merupakan syari'at Allah SWT. Pada ayat ini dijelaskan siapa saja yang berhak untuk mendapatkan harta warisan berikut ukuran pembagiannya agar tidak ada kesenjangan dari masing-masing penerima harta.

Definisi 2.1

Suatu bilangan bulat n adalah habis dibagi oleh suatu bilangan bulat $m \neq 0$ jika ada suatu bilangan bulat x sehingga $n = mx$. (Muhsetyo, 1997:43)

Notasi: $m|n$ dibaca m membagi n, n habis dibagi m, m faktor n, atau n kelipatan dari m.

Contoh:

a. 5|10 sebab ada bilangan bulat 2 sehingga 10 = 5.2

b. 3|18 sebab ada bilangan bulat 6 sehingga 18 = 3.6

2.1.2 Bilangan Prima

Definisi 2.2

Jika p adalah suatu bilangan bulat positif lebih dari 1 ($p > 1$) yang hanya mempunyai pembagi positif 1 dan p, maka p disebut bilangan prima.

Contoh:

Bilangan-bilangan 2 dan 3 adalah bilangan-bilangan prima sebab:

a. 2 adalah bilangan bulat positif yang hanya mempunyai pembagi positif 1 dan 2.

b. 3 adalah bilangan bulat positif yang hanya mempunyai pembagi positif 1 dan 3.

2.1.3 Fungsi Multiplikatif

Definisi 2.3

a. Suatu fungsi yang didefinisikan pada himpunan bilangan bulat positif disebut dengan fungsi aritmetika

b. Jika m dan n adalah bilangan-bilangan positif dan FPB(a,b)=1, maka suatu fungsi f yang memenuhi hubungan $f(mn) = f(m)f(n)$ disebut dengan fungsi multiplikatif

Contoh:

Suatu fungsi g didefinisikan sebagai:

$g(n) = n$ untuk semua bilangan bulat positif n.

Karena n hanya didefinisikan pada himpunan bilangan bulat positif, maka g adalah fungsi aritmetika.

Karena $g(m) = m$,

$g(n) = n$

$g(mn) = mn = (m)(n) = g(m)g(n)$

Maka g merupakan fungsi multiplikatif.

Definisi 2.4

Cacah (banyak) semua pembagi yang positif dari n disebut dengan fungsi cacah pembagi dan ditulis dengan:

$$\tau(n) = \sum_{d|n} d$$

Contoh:

a. Pembagi-pembagi yang positif dari 4 adalah 1, 2, dan 4 sehingga cacah pembagi dari 4 adalah 3. jadi $\tau(4)=3$.

b. Pembagi-pembagi yang positif dari 36 adalah 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, dan 36 sehingga jumlah cacah pembagi dari 36 adalah 9. jadi $\tau(36)=9$.

Teorema 2.1

Jika p adalah suatu bilangan prima dan $n \in N$, maka: $\tau\left(p^n\right)=n+1$

Bukti:

Faktor-faktor dari p^n adalah $1, p, p^2, \cdots, p^{n-1}, p^n$, berarti banyaknya factor atau pembagi dari p^n adalah tepat sama dengan (n+1), sehingga $\tau\left(p^n\right)=n+1$.

Contoh:

Diketahui n = 125, carilah nilai $\tau(125)$

Penyelesaian:

$n=125=5^3$, sehingga

$\tau(n)=\tau(125)=\tau\left(5^3\right)=3+1=4$

Teorema 2.2

Jika n adalah suatu bilangan asli dengan pemfaktoran prima:

$$n=p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3} \cdots p_k^{a_k}$$

Maka:

$$\tau(n)=(a_1+1)(a_2+1)(a_3+1)\cdots(a_k+1)$$

Bukti:

Karena τ adalah fungsi multiplikatif, maka:

$$\tau(n)=\tau(p_1^{a_1}p_2^{a_2}p_3^{a_3}\cdots p_k^{a_k})$$

$$=\tau(p_1^{a_1})\tau(p_2^{a_2})\tau(p_3^{a_3})\cdots\tau(p_k^{a_k})$$

$$=(a_1+1)(a_2+1)(a_3+1)\cdots(a_k+1)$$

Contoh:

Diketahui $n=200$. Carilah nilai $\tau(200)$

Penyelesaian:

$n=200=2^3.5^2$, sehingga

$$\tau(200)=\tau(2^3 5^2)$$

$$=\tau(2^3)\tau(5^2)$$

$$=(3+1)(2+1)$$

$$=12$$

2.2 Teori Latis

Dalam Al-Qur'an kajian mengenai latis yang diartikan sebagai himpunan atau kelompok sudah ada seperti kehidupan manusia yang terdiri dari berbagai macam golongan, dimana golongan merupakan bagian dari himpunan karena himpunan sendiri merupakan kumpulan objek-objek yang terdefinisi. Dalam al-Quran surat al-Fatihah ayat 7 disebutkan.

صِرَٰطَ ٱلَّذِينَ أَنۡعَمۡتَ عَلَيۡهِمۡ غَيۡرِ ٱلۡمَغۡضُوبِ عَلَيۡهِمۡ وَلَا ٱلضَّآلِّينَ ٧

*Artinya: "(*yaitu*) Jalan orang-orang yang telah Engkau beri nikmat kepada mereka; bukan (jalan) mereka yang dimurkai dan bukan (pula jalan) mereka yang sesat"* (Q. S. Al-Fatihah: 7).

Ayat ini menjelaskan bahwa manusia terbagi menjadi tiga kelompok, yaitu (1) kelompok yang mendapat nikmat dari Allah SWT (Mu'min), (2) kelompok yang dimurkai Allah SWT, dan (3) kelompok yang sesat (Abdussakir, 2006:47).

Definisi 2.5

Suatu latis L adalah suatu aljabar dengan dua operasi biner (dilambangkan dengan $\circ$ dan $*$) yang memenuhi postulat-postulat berikut: untuk semua *a, b, c* di L,

i. $a * b \in L$ (L tertutup terhadap operasi $*$)

ii. $a \circ b \in L$ (L tertutup terhadap operasi $\circ$)

iii. $a * b = b * a$ (operasi $*$ komutatif)

iv. $a \circ b = b \circ a$ (operasi $\circ$ komutatif)

v. $a * (b * c) = (a * b) * c$ (operasi $*$ asosiatif)

vi. $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ (operasi $\circ$ asosiatif)

vii. $a * (a \circ b) = a$ (Absorpsi terhadap operasi $\circ$)

viii. $a \circ a * b = a$ (Absorpsi terhadap operasi $*$)

(Sukardjono, 2002:39)

Contoh:

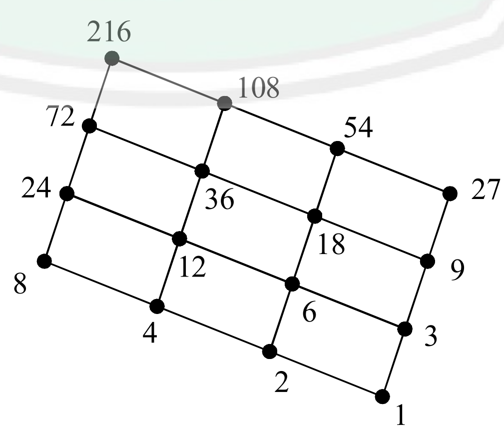
Misalkan unsur-unsur dari latis L adalah faktor-faktor positif dari bilangan asli 216, yaitu:

1, 2, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 27, 36, 54, 72, 108, 216 himpunan ini memuat faktor persekutuan terbesar (FPB) tunggal dan kelipatan persekutuan terkecil (KPK) tunggal dari setiap anggota dari himpunan itu; dengan demikian jika kita definisikan $\text{FPB}(a,b) = a*b$, dan $\text{KPK}(a,b) = a \circ b$, postulat *i* dan *ii* dipenuhi. Sifat komutatif (postulat *iii* dan *iv*) dipenuhi. Postulat *v, vi* (asosiatif dipenuhi) dan sifat absorpsi (postulat *vii, viii*) juga terpenuhi.

Untuk menggambar diagram latis perlu diperhatikan aturan-aturan sebagai berikut:

1. Faktor terkecil sampai faktor terbesar digambar terlebih dahulu.
2. dimulai dari faktor terkecil diletakkan paling bawah dan diakhiri faktor terbesar diletakkan paling atas.
3. Posisi faktor yang lebih kecil diletakkan agak ke bawah dibandingkan dengan faktor yang lebih besar.
4. Misal a , b, dan c adalah faktor dari p dan $a \neq b \neq c$, $a < b$. a akan terhubung pada b jika $a\,|b$ (a membagi b) dan tidak ada c sedemikian sehingga $c|b$ dan $a|c$.

Dengan mengikuti aturan tersebut akan didapat diagram latis seperti berikut:



Gambar 2.1 Diagram Latis Faktor

Teorema 2.3

$a * a = a$ (Sukardjono, 2002:39)

Bukti:

$a * a = a * (a \circ a * b)$

$= a$

Jadi $a * a = a$ (terbukti).

penjelasan : pembuktian ini diawali dengan merubah $a * a$. Dengan mengubah a yang kedua menjadi $a \circ a * b$ (mengikuti postulat viii) maka $a * a$ menjadi $a * (a \circ a * b)$. Kemudian dari $a * (a \circ a * b)$, $a * b$ disamadengankan b sehingga menjadi $a * (a \circ b)$. Dan menurut postulat vii $a * (a \circ b) = a$.

Contoh:

Misalkan unsur-unsur dari latis L adalah faktor-faktor positif dari bilangan asli 32, yaitu 1, 2, 4, 8, 16, 32. Jika definisikan FPB(a, b) $= a * b$, dan KPK(a, b) $= a \circ b$. Buktikan bahwa $8 * 8 = 8$!

Penyelesaian:

$8 * 8 = 8 * (8 + 8 * 8)$ menurut postulat viii

$= 8$ menurut postulat vii

Jadi $8 * 8 = 8$ (terbukti).

Teorema 2.4

$a \circ a = a$ (Sukardjono, 2002:39)

Bukti:

$a \circ a = a \circ a * a$

$= a$

Jadi $a \circ a = a$ (terbukti).

penjelasan : dengan berdasar teorema 1, bahwa $a * a = a$, maka a yang kedua dari bentuk $a \circ a$ diubah menjadi $a * a$, sehingga bentuk $a \circ a$ berubah menjadi $a \circ a * a$. Kemudian menurut postulat viii $a \circ a * a = a$. Maka $a \circ a = a$.

Contoh:

Misalkan unsur-unsur dari latis L adalah faktor-faktor positif dari bilangan asli 64, yaitu 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64. Jika definisikan FPB(a,b) $= a * b$, dan KPK(a,b) $= a \circ b$. Buktikan bahwa $32 \circ 32 = 32$!

Penyelesaian:

$32 \circ 32 = 32 \circ (32 * 32)$ menurut teorema 1

$= 32$ menurut postulat viii

Jadi $32 \circ 32 = 32$ (terbukti).

Teorema 2.5

Jika $a * b = a$, maka $a \circ b = b$ (Sukardjono, 2002:40)

Bukti:

$a \circ b = a * b \circ b$

$= b \circ a * b$

$= b \circ b * a$

$= b$

Jadi jika $a * b = a$, maka $a \circ b = b$ (terbukti).

penjelasan : diketahui bahwa $a * b = a$ maka bentuk $a \circ b$ berubah menjadi $a * b \circ b$. Bentuk $a * b \circ b$ dapat diubah menjadi $b \circ a * b$ (menurut postulat iv). Dan menurut postulat iii bentuk $a * b = b * a$, maka bentuk $b \circ a * b$ dapat diubah menjadi $b \circ b * a$. Dan dengan melihat postulat viii dapat dengan mudah dibuktikan bahwa $b \circ b * a = b$. Sehingga $a \circ b = b$.

Contoh:

Misalkan unsur-unsur dari latis L adalah faktor-faktor positif dari bilangan asli 128, yaitu 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128. Jika definisikan FPB(a,b) $= a * b$, dan KPK(a,b) $= a \circ b$. Jika $16 * 128$ =16, buktikan bahwa $16 \circ 128 = 128$!

Penyelesaian:

$16 \circ 128 = (16 * 128) \circ 128$	diketahui $16 * 128 = 16$
$= 128 \circ (16 * 128)$	komutatif $\circ$ (menurut postulat iv)
$= 128 \circ (128 * 16)$	komutatif $*$ (menurut postulat iii)
$= 128$	menurut postulat viii

Jadi jika $16 * 128 = 16$ maka $16 \circ 128 = 128$ (terbukti).

Teorema 2.6

Jika $a \circ b = b$, maka $a * b = a$ (Sukardjono, 2002:40)

Bukti:

$a * b = a * (a \circ b)$

$= a$

Jadi jika $a \circ b = b$, maka $a * b = a$ (terbukti).

penjelasan: diketahui $a \circ b = b$, maka bentuk $a * b$ dapat diubah menjadi $a(a + b)$. Dan dengan merujuk pada postulat vii didapat $a * (a \circ b) = a$.

Contoh:

Misalkan unsur-unsur dari latis L adalah faktor-faktor positif dari bilangan asli 128, yaitu 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128. Jika definisikan $\text{FPB}(a,b) = a * b$, dan $\text{KPK}(a,b) = a \circ b$. Jika $16 \circ 128 = 128$, buktikan bahwa $16 * 128 = 16$!

Penyelesaian:

$16 * 128 = 16 * (16 + 128)$ diketahui $16 \circ 128 = 128$

$= 16$ menurut postulat vii

Jadi jika $16 \circ 128 = 128$ maka $16 * 128 = 16$ (terbukti).

2.3 Graf

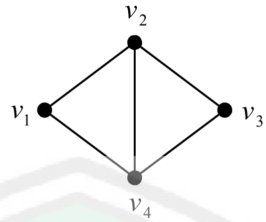
2.3.1 Definisi Graf

Definisi 2.6

Graf G adalah pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari obyek-obyek yang disebut sebagai titik dan E adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di V yang disebut sebagai sisi (Chartrand dan Lesniak, 1986: 4).

Himpunan titik di G dinotasikan dengan $V(G)$ dan himpunan sisi dinotasikan dengan E(G). Sedangkan banyaknya unsur di V disebut *order* dari G dan dilambangkan dengan $p(G)$ dan banyaknya unsur di E disebut *size* dari G dan dilambangkan dengan $q(G)$. Jika graf yang dibicarakan hanya graf G, maka *order* dan *size* dari G tersebut cukup ditulis dengan p dan q (Chartrand dan Lesniak, 1986: 4).

Contoh:



Gambar 2. 2 Graf G

Graf G memuat himpunan titik $|V|$ dan sisi $|G|$ yaitu :

$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

$E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_3, v_4), (v_4, v_1)\}$

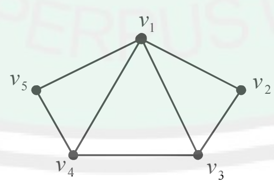
Graf G mempunyai *order* 4 atau $p = 4$ dan *size* 5 atau $q = 5$.

2.3.2 *Adjacent* dan *Incident*

Definisi 2.7

Sisi $e = (u,v)$ dikatakan menghubungkan titik u dan v. Jika $e = (u,v)$ adalah sisi di graf G, maka u dan v disebut terhubung langsung (*adjacent*), u dan e serta v dan e disebut terkait langsung (*incident*). Untuk selanjutnya, sisi $e = (u,v)$ akan ditulis $e = uv$ (Chartrand dan Lesniak,1986:4).

Contoh:



Gambar 2. 3 Graf H

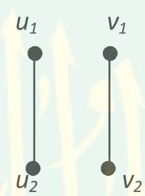
Dari Gambar 2.3 pada graf H, titik v_2 dan v_3 adalah *adjacent* atau terhubung langsung tetapi v_2 dan v_5 tidak. Titik v_1 dan sisi (v_1v_2) dan (v_1v_5) adalah terkait langsung (*incident*) dengan titik v_1.

2.3.3 Operasi pada Graf

Definisi 2.8

Gabungan dua graf G_1 dan G_2 yang dinotasikan dengan $G = G_1 \cup G_2$ mempunyai himpunan titik $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan himpunan sisi $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2)$. Jika graf G memuat sebanyak $n \geq 2$ graf H, maka dinotasikan dengan $G = nH$ (Chartrand dan Lesniak, 1986: 11).

Contoh:



Gambar 2.4. Gabungan Graf

Gambar di atas merupakan contoh gabungan graf G_1 dan G_2. $V(G_1) = \{u_1,u_2\}$, $V(G_2) = \{v_1,v_2\}$, $E(G) = \{u_1u_2\}$ dan $E(G) = \{v_1v_2\}$. Jika $G = G_1 \cup G_2$, maka $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2) = \{u_1,u_2\} \cup \{v_1,v_2\} = \{u_1,u_2,v_1,v_2\}$

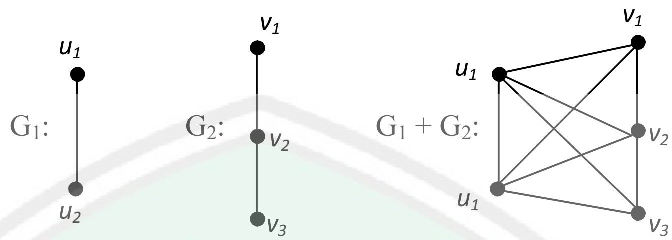
dan $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) = \{u_1u_2\} \cup \{v_1v_2\} = \{u_1u_2, v_1v_2\}$

Karena graf G memuat 2 graf K_2, maka graf tersebut dapat dinotasikan $2K_2$.

Definisi 2.9

Penjumlahan dua graf G_1 dan G_2 yang dinotasikan $G = G_1 + G_2$ mempunyai himpunan titik $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan himpunan sisi $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv | u \in V(G_1) \text{ dan } v \in V(G_2)\}$ (Chatrand dan Lesniak, 1986: 11).

Contoh:



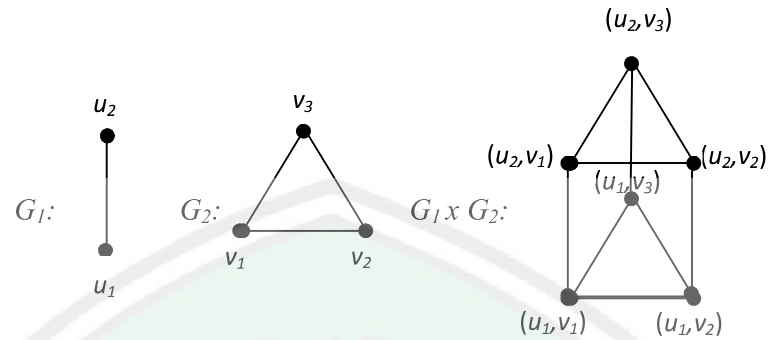
Gambar 2.5. Penjumlahan Dua Graf

Pada contoh di atas, $V(G_1) = \{u_1,u_2\}$, $V(G_2) = \{v_1,v_2,v_3\}$, maka $G=G_1+G_2$ mempunyai himpunan titik $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2) = \{u_1,u_2\} \cup \{v_1,v_2,v_3\}=\{u_1,u_2, v_1,v_2,v_3\}$ dan himpunan sisi $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{u_1v_1, u_1v_2, u_1v_3, u_2v_1, u_2v_2, u_2v_3\}= \{u_1u_2, v_1v_2, v_2v_3, u_1v_1, u_1v_2, u_1v_3, u_2v_1, u_2v_2, u_2v_3\}$.

Definisi 2.10

Hasil kali kartesius dari graf G_1 dan G_2 adalah graf yang dinotasikan $G = G_1 \; x \; G_2$ dan mempunyai himpunan titik $V(G) = V(G_1) \; x \; V(G_2)$, dan dua titik (u_1, u_2) dan (v_1, v_2) dari graf G terhubung langsung jika dan hanya jika $u_1 = v_1$ dan $u_2v_2 \in E(G_2)$ atau $u_2 = v_2$ dan $u_1v_1 \in E(G_1)$ (Chartrand dan Lesniak, 1986: 11).

Contoh:



Gambar 2.6. Graf Hasil Kali Kartesius

Pada contoh di atas, $V(G_1) = \{u_1,u_2\}$, $V(G_2) = \{v_1,v_2,v_3\}$, maka $G=G_1 \mathrm{x} G_2$ mempunyai himpunan titik $=V(G)=\{(u_1,v_1),(u_1,v_2),(u_1,v_3),(u_2,v_1), (u_2,v_2), (u_2,v_3)\}$. (u_1,v_1) dan (u_1,v_2) terhubung langsung jika dan hanya jika $u_1 = u_1$ dan $v_1v_2 \in E(G_2)$.

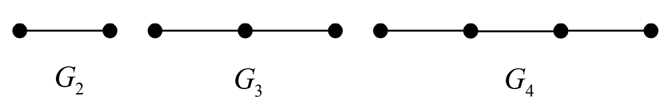
2.3.4 Macam-macam Graf

2.3.4.1 Graf Lintasan

Definisi 2.11

Graf path adalah graf yang terdiri dari satu lintasan (path tunggal). Graf path (lintasan) dengan n titik dinotasikan dengan G_n (Wilson dan Watkins, 1990:37).

Contoh:



Gambar 2.7 Graf lintasan

2.3.4.2 Graf Sikel

Sikel adalah jalan tertutup dengan barisan titik yang berbeda. Dengan kata lain, sikel adalah lintasan tertutup, sikel dengan panjang *n* dapat juga ditulis dengan *n-sikel.*

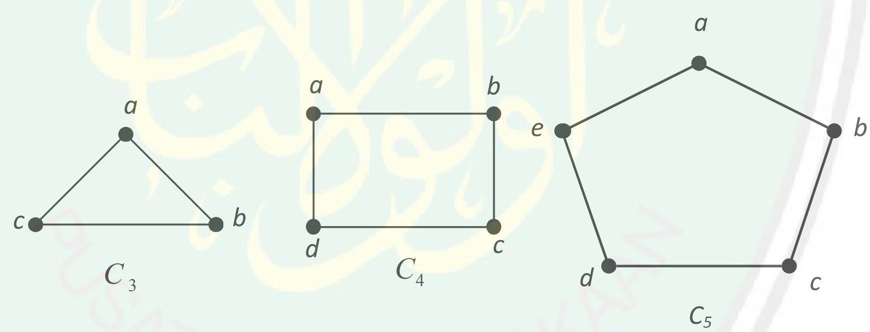
Definisi 2.12

Graf sikel adalah graf yang terdiri dari satu sikel (sikel tunggal). Graf sikel dengan *n* titik dinotasikan dengan C_n (Wilson dan Watkins, 1990:37).

Definisi 2.13

Graf Sikel (*Cycle Graf*) C_n ialah graf terhubung beraturan 2 yang mempunyai n titik ($n \geq 3$) dan n sisi (Chartrand dan Lesniak, 1986:28).

Contoh:



Gambar 2. 8 Graf Sikel

2.3.5 Graf Trivial dan non Trivial

Definisi 2.14

Graf *G* disebut *finite* atau berhingga jika himpunan titik adalah berhingga, atau graf yang jumlah titiknya adalah *n* berhingga. Graf *infinite* atau tak berhingga adalah graf yang jumlah titiknya tidak berhingga. *Graf trivial* adalah graf berorder satu dengan himpunan sisinya merupakan himpunan kosong. Graf *non trivial* adalah graf yang berorder lebih dari satu (Bondy and Murthy, 1976:3).

Contoh:

Gambar 2.9 Graf Trivial dan non Trivial

Pada Gambar 2.6 G_1 merupakan graf trivial karena G_1 hanya memuat satu titik atau berorder satu dan himpunan sisinya merupakan himpunan kosong. Sedangkan G_2 merupakan graf non trivial karena berorder lebih dari satu.

2.3.6 Jalan dan Lintasan

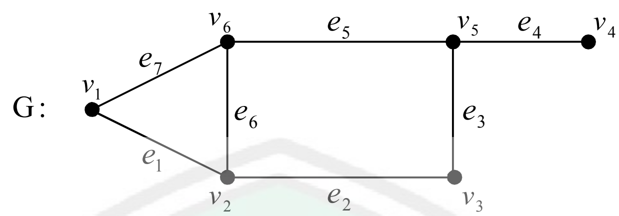
Definisi 2.15

Sebuah jalan (*walk*) $u - v$ di graf G adalah barisan berhingga (tak kosong)

$$W : u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, ..., e_n, v_n = v$$

yang berselang seling antara titik dan sisi, yang dimulai dari titik u dan diakhiri dengan titik v sedemikian hingga untuk $0 < i \le n$, maka $e_i = v_{i-1}v_i$ adalah sisi di G. v_0 disebut titik awal, v_n disebut titik akhir, $v_1, v_2, ..., v_{n-1}$ disebut titik internal, dan n menyatakan panjang dari W (Chartrand dan Lesniak, 1986:26).

Contoh:



Gambar 2. 10 Graf G

Contoh jalan pada graf G dalam gambar 2.10 adalah

$$v_4, e_4, v_5, e_3, v_3, e_2, v_2, e_6, v_6, e_7, v_1, e_1, v_2 .$$

Definisi 2.16

Trail $u - v$ adalah jalan $u - v$ yang semua sisinya berbeda dan boleh mengulang titik (Chartrand dan Lesniak, 1986: 26).

Contoh:

Contoh *trail* pada graf G dalam gambar 2.10 adalah :

$$v_5, e_3, v_3, e_2, v_2, e_6, v_6, e_5, v_5, e_4, v_4 .$$

Definisi 2.17

Jalan *terbuka* yang semua sisi dan titiknya berbeda disebut *lintasan*. Dengan demikian dapat dikatakan bahwa setiap lintasan pasti trail, tetapi tidak semua trail merupakan lintasan (Wilson and Watkins, 1989: 35).

Contoh:

Contoh lintasan pada graf G dalam gambar 2.10 adalah :

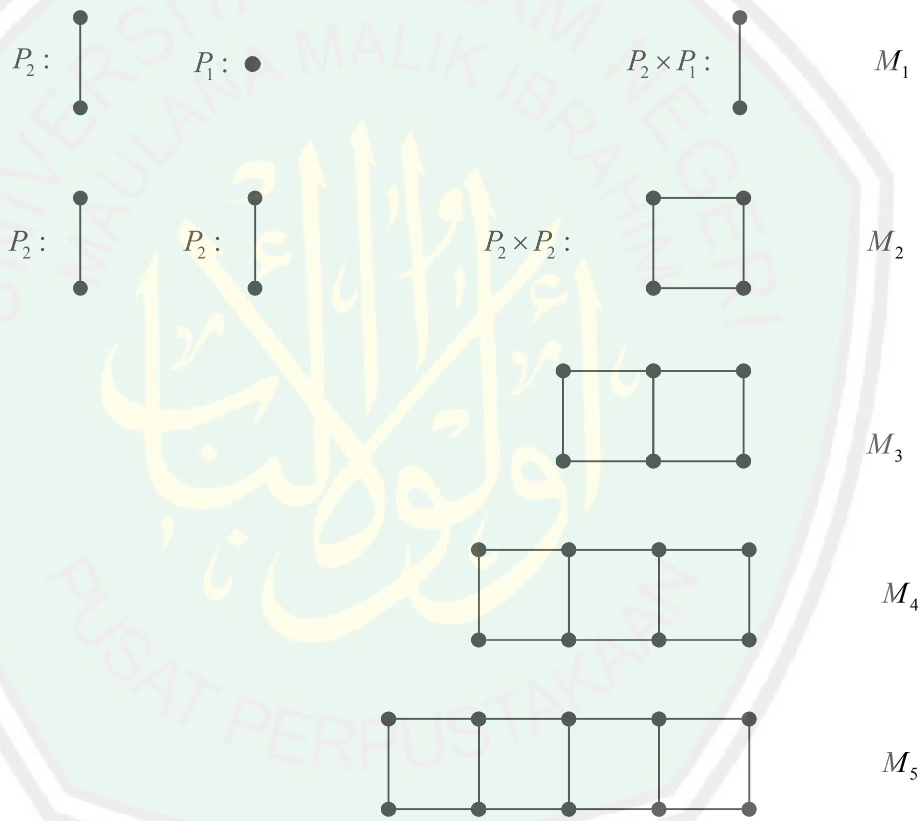
$$v_3, e_2, v_2, e_1, v_1, e_7, v_6, e_5, v_5, e_4, v_4 .$$

2.3.7 Graf Tangga

Definisi 2.18

Graf Tangga yang dinotasikan sebagai M_n adalah suatu graf yang dibentuk dari operasi hasil kali kartesius antara graf lintasan dengan dua titik dan graf lintasan dengan n titik yaitu $M_n = P_2 \times P_n$ (Gallian.2007:12)

Contoh:



Gambar 2. 11 Graf Tangga $M_1 \cdots M_5$

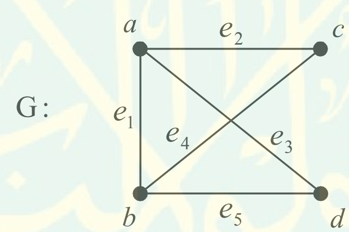
2.3.8 Derajat Suatu Titik

Definisi 2.19

Derajat titik v pada graf G, ditulis dengan $deg(v)$, adalah banyaknya sisi yang terkait langsung pada v. Dengan kata lain, banyaknya sisi yang memuat v sebagai titik ujung. Titik v dikatakan genap atau ganjil tergantung dari $deg(v)$ genap atau ganjil (Chartrand dan Lesniak 1986: 7, Sutarno,2005: 69).

Contoh:

Perhatikan graf G berikut yang mempunyai himpunan titik $V = \{a, b, c, d\}$ dan himpunan sisi $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$.



Gambar 2. 12 Graf G

Berdasarkan gambar 2.8, diperolah bahwa:

deg(a) = 3

deg(b) = 3

deg(c) = 2

deg(d) = 2

Titik a dan b adalah titik ganjil, titik c dan d adalah titik genap. Karena tidak ada yang berderajat 1, maka graf G tidak mempunyai titik ujung. Hubungan antara jumlah derajat semua titik dalam suatu graf G dengan banyak sisi, yaitu q, adalah $\sum_{v \in G} \deg(v) = 2q$. Hal ini dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 2.7

Jika graf G dengan $V(G) = \{ v_1, v_2, ..., v_n\}$ maka $\sum_{i=1}^{n} \deg_G(v_i) = 2q$ (Chartrand dan Lesniak, 1986: 7)

Bukti:

Setiap sisi terkait langsung dengan 2 titik. Bila derajat tiap titik tersebut dijumlahkan maka sisi tersebut dihitung 2 kali.

Akibat Teorema 2.7

Pada sebarang graf, banyaknya titik yang berderajat ganjil adalah genap (Chartrand dan Lesniak, 1986: 7).

Bukti:

Misalkan graf G dengan titik sebanyak q, maka ambil W yang memuat himpunan titik ganjil di G serta U yang memuat himpunan titik genap di G. Dari teorema 1 maka diperoleh:

$$\sum_{v \in V(G)} \deg_G v = \sum_{v \in W} \deg_G v + \sum_{v \in U} \deg_G v = 2q$$

dengan demikian karena $\sum_{v \in U} \deg_G v$ genap, maka $\sum_{v \in W} \deg_G v$ juga genap. Sehingga $|G|$ adalah genap.

2.4 Graf untuk Konsep Waris

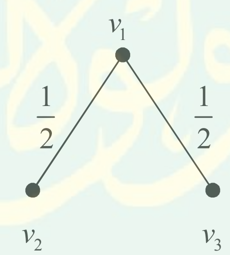
Dalam Islam, konsep waris didasarkan pada al-Qur’an surat an-Nisaa’ ayat 12 seperti berikut:

۞ وَلَكُمْ نِصْفُ مَا تَرَكَ أَزْوَٰجُكُمْ إِن لَّمْ يَكُن لَّهُنَّ وَلَدٌ ۚ فَإِن كَانَ لَهُنَّ وَلَدٌ

فَلَكُمُ ٱلرُّبُعُ مِمَّا تَرَكْنَ ۚ مِنۢ بَعْدِ وَصِيَّةٍ يُوصِينَ بِهَآ أَوْ دَيْنٍ ...

Artinya: *Dan bagimu (suami-suami) seperdua dari harta yang ditinggalkan oleh isteri-isterimu, jika mereka tidak mempunyai anak. jika Isteri-isterimu itu mempunyai anak, Maka kamu mendapat seperempat dari harta yang ditinggalkannya sesudah dipenuhi wasiat yang mereka buat atau (dan) sesudah dibayar hutangnya . . .*

Jika digambarkan dalam bentuk graf, warisan untuk suami yang ditinggalkan istri yang tak punya anak adalah sebagai berikut:



Gambar 2. 13 Graf yang merepresenrasikan pembagian waris

Graf di atas menggambarkan pembagian harta. Titik v_1 adalah harta yang ditinggalkan. Titik v_2 dan v_3 adalah sasaran pembagian harta tersebut. Titik v_2 mewakili pembagian harta untuk suami dan v_3 menggambarkan pembagian harta untuk selain suami. Sedangkan sisi pada graf menggambarkan besarnya pembagian harta pada masing-masing sasaran. Besar bagian untuk suami yaitu ½ dan bagian untuk selain suami adalah ½.

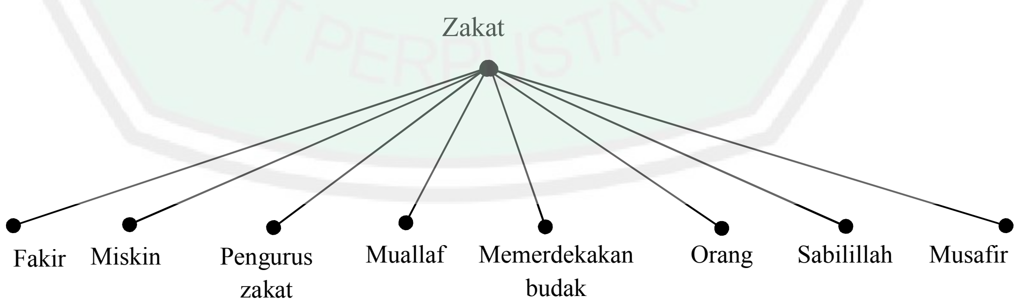
2.5 Graf pada Konsep Pembagian Zakat

Zakat merupakan salah satu rukun Islam.dalam distribusinya zakat hanya dikhususkan pada beberapa orang saja. Jadi tidak semua orang dapat menerima zakat. Di dala al-Qur'an surat at-Taubah ayat 60 disebutkan:

۞ إِنَّمَا ٱلصَّدَقَٰتُ لِلۡفُقَرَآءِ وَٱلۡمَسَٰكِينِ وَٱلۡعَٰمِلِينَ عَلَيۡهَا وَٱلۡمُؤَلَّفَةِ قُلُوبُهُمۡ وَفِي ٱلرِّقَابِ وَٱلۡغَٰرِمِينَ وَفِي سَبِيلِ ٱللَّهِ وَٱبۡنِ ٱلسَّبِيلِۖ فَرِيضَةٗ مِّنَ ٱللَّهِۗ وَٱللَّهُ عَلِيمٌ حَكِيمٞ ٦٠

Artinya: *Sesungguhnya zakat-zakat itu, hanyalah untuk orang-orang fakir, orang-orang miskin, pengurus-pengurus zakat, para mu'allaf yang dibujuk hatinya, untuk (memerdekakan) budak, orang-orang yang berhutang, untuk jalan Allah dan untuk mereka yuang sedang dalam perjalanan, sebagai suatu ketetapan yang diwajibkan Allah, dan Allah Maha mengetahui lagi Maha Bijaksana.*

Jika digambarkan dalam graf, maka distribusi zakat seperti berikut:



Gambar 2. 14 Graf yang merepresenrasikan pembagian Zakat

Titik pada graf mewakili pemberi dan penerima zakat. Sedangkan sisi pada graf mewakili proses distribusi zakat dari pemberi pada penerima zakat.

BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas graf latis faktor dari dua bilangan yaitu graf latis faktor bilangan prima berpangkat n (dinotasikan dengan p^n) dan graf latis faktor bilangan $2^n \times 10$.

Untuk pembahasan graf latis faktor bilangan prima berpangkat n diambil sampel tiga himpunan. Adapun tiga himpunan tersebut adalah himpunan $P^1 = \{2,3,5,7,11,\cdots\}$, $P^2 = \{2^2,3^2,5^2,7^2,11^2,\cdots\}$, dan $P^3 = \{2^3,3^3,5^3,7^3,11^3,\cdots\}$. Tiga himpunan ini adalah himpunan bilangan prima berpangkat 1, himpunan bilangan prima berpangkat 2, himpunan bilangan prima berpangkat 3.

3.1. Graf Latis Faktor Bilangan p^n

Pada subbab ini sebagai contoh hanya diambil tiga himpunan. Adapun tiga himpunan tersebut adalah himpunan $P^1 = \{2,3,5,7,11,\cdots\}$, $P^2 = \{2^2,3^2,5^2,7^2,11^2,\cdots\}$, dan $P^3 = \{2^3,3^3,5^3,7^3,11^3,\cdots\}$. Tiga himpunan ini adalah himpunan bilangan prima berpangkat 1, himpunan bilangan prima berpangkat 2, himpunan bilangan prima berpangkat 3.

3.1.1. Pembahasan Himpunan P^1

3.1.1.i. Mencari Faktor Pembagi Positif

Untuk mencari faktor pembagi positif (selanjutnya hanya disebut faktor) dari suatu bilangan maka perlu diperhatikan definisi keterbagian pada bab 2. Di sini hanya dicontohkan dalam mencari faktor dari bilangan 2, selanjutnya dapat dicari dengan cara serupa.

1.2.i. Untuk mencari faktor dari bilangan 2, maka harus dicari suatu bilangan bulat $m > 0$, $m \neq 0$ yang membagi 2 (m|2). Ditemukan 1|2 dan 2|2, maka 1 dan 2 adalah faktor dari 2. Selanjutnya faktor-faktor tersebut dinotasikan sebagai barisan $L_1 = 1,2$. Menurut definisi 5 di dalam bab 2, $\tau(2) = 2$.

1.2.ii. Faktor dari 3 adalah 1 dan 3, dinotasikan $L_2 = 1,3$ dan $\tau(3) = 2$.

1.2.iii. Faktor dari 5 adalah 1 dan 5 dinotasikan $L_3 = 1,5$ dan $\tau(5) = 2$.

Untuk $L_1 = 1,2$, barisan ini memuat faktor persekutuan terbesar (FPB) tunggal dan kelipatan persekutuan terkecil (KPK) tunggal dari setiap anggota dari himpunan L_1; dengan demikian jika kita definisikan FPB$(a,b) = a * b$, dan KPK$(a,b) = a \circ b$, maka jika diambil *a, b, c* di L_1 maka:

ix. $a * b \in L_1$ (L_1 tertutup terhadap operasi $*$)

x. $a \circ b \in L_1$ (L_1 tertutup terhadap operasi $\circ$)

xi. $a * b = b * a$ (operasi $*$ komutatif)

xii. $a \circ b = b \circ a$ (operasi $\circ$ komutatif)

xiii. $a * (b * c) = (a * b) * c$ (operasi $*$ asosiatif)

xiv. $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ (operasi $\circ$ asosiatif)

xv. $a * (a \circ b) = a$ (Absorpsi terhadap operasi $\circ$)

xvi. $a \circ a * b = a$ (Absorpsi terhadap operasi $*$)

Karena L_1 memenuhi kedelapan postulat di atas, maka L_1 adalah sebuah Latis.

Untuk $L_2 = 1,3$, barisan ini memuat faktor persekutuan terbesar (FPB) tunggal dan kelipatan persekutuan terkecil (KPK) tunggal dari setiap anggota dari himpunan L_2; dengan demikian jika kita definisikan $\text{FPB}(a,b) = a * b$, dan $\text{KPK}(a,b) = a \circ b$, maka jika diambil *a, b, c* di L_2 maka postulat *i* sampai *viii* terpenuhi. Karena L_2 memenuhi kedelapan postulat latis, maka L_2 adalah sebuah Latis.

Untuk $L_3 = 1,5$, barisan ini memuat faktor persekutuan terbesar (FPB) tunggal dan kelipatan persekutuan terkecil (KPK) tunggal dari setiap anggota dari himpunan L_3; dengan demikian jika kita definisikan $\text{FPB}(a,b) = a * b$, dan $\text{KPK}(a,b) = a \circ b$, maka jika diambil *a, b, c* di L_3 maka postulat *i* sampai *viii* terpenuhi. Karena L_3 memenuhi kedelapan postulat latis, maka L_3 adalah sebuah Latis.

Langkah selanjutnya adalah membuat diagram Latis Faktor dari $L_1, L_{2,} L_3$. Diagram latis faktor ini, di dalam tulisan ini penulis sebut dengan *Graf Latis Faktor*. Setiap titik pada graf mewakili faktor dalam diagram latis yang berarti bahwa banyknya titik pada graf sama dengan banyaknya faktor pada diagram latis. Dan setiap sisi dalam graf mewakili garis dalam diagram latis. Setelah terbentuk graf dari $L_1, L_{2,} L_3$, selanjutnya adalah mendeskripsikan ciri yang dimiliki oleh graf latis faktor yang terbentuk.

3.1.1.ii. Membuat Graf Latis Faktor

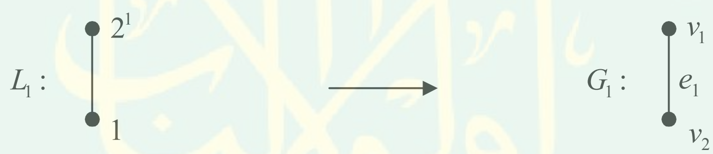
Untuk menyusun atau menggambar graf latis faktor dari $L_1, L_{2,} L_3$ harus memperhatikan langkah-langkah berikut:

5. Faktor terkecil sampai faktor terbesar digambar terlebih dahulu.
6. Faktor yang lebih kecil diletakkan di bawah sedangkan yang lebih besar di atas.
7. Misal a , b, dan c adalah faktor dari p dan $a \neq b \neq c$. a akan terhubung pada b jika $a\,|b$ (a membagi b) dan tidak ada c sedemikian sehingga $c|b$ dan $a|c$.

Pembahasan dimulai dari

1. Graf Latis Faktor untuk L_1

$L_1 = 1, 2$ adalah latis yang memuat dua faktor. Setiap faktor tersebut diwakili oleh titik v_1 dan v_2. Garis pada diagram latis faktor diwakili oleh sisi e_1. Dengan mengikuti prosedur yang telah ditentukan akan terbentuk graf G_1 sebagai berikut:



Gambar 3.1.a Diagram Latis Faktor L_1 **Gambar 3.1.b** Graf Latis Faktor G_1

Graf ini adalah graf path yakni graf yang hanya memiliki satu lintasan. graf ini mempunyai ciri diantaranya:

a. Memiliki 2 titik , $V(G_1) = \{v_1, v_2\}$ maka *order* dari G_1 adalah 2 atau $p = 2$.

b. Memiliki 1 sisi, $E(G_1) = \{e_1\}$, dengan demikian graf ini mempunyai *size* 1 atau $q = 1$.

c. Derajat setiap titik pada graf ini adalah $\deg(v_1) = 1$, $\deg(v_2) = 1$. Maka derajat maksimum dari titik-titik pada graf ini adalah 1.

d. Panjang lintasannya adalah 1, yaitu $W_1 = v_2, e_1, v_1$

2. Graf Latis Faktor untuk L_2

$L_2 = 1,3$ adalah latis yang memuat dua faktor. Setiap faktor tersebut diwakili oleh titik v_1 dan v_2. Garis pada diagram latis faktor diwakili oleh sisi e_1. Adapun gambarnya seperti di bawah ini:

Gambar 3.2.a Diagram Latis Faktor L_2 **Gambar 3.2.b** Graf Latis Faktor G_2

Graf ini mempunyai ciri:

a. Memiliki 2 titik , $V(G_2) = \{v_1, v_2\}$ maka *order* dari G_2 adalah 2 atau $p = 2$.

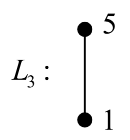
b. Memiliki 1 sisi, $E(G_2) = \{e_1\}$ dengan demikian graf ini mempunyai *size* 1 atau $q = 1$.

e. Derajat setiap titik pada graf ini adalah $\deg(v_1) = 1$, $\deg(v_2) = 1$. Maka derajat maksimum dari titik-titik pada graf ini adalah 1.

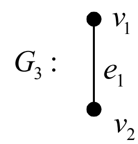
c. Panjang lintasannya adalah 1, yaitu $W_2 = v_2, e_1, v_1$

3. Graf Latis Faktor untuk L_3

$L_3 = 1,5$ adalah latis yang memuat dua faktor. Setiap faktor tersebut diwakili oleh titik v_1 dan v_2. Dan garis pada diagram latis faktor diwakili oleh sisi e_1. Adapun gambarnya seperti di bawah ini:



Gambar 3.3.a Diagram Latis Faktor L_3



Gambar 3.3.b Graf Latis Faktor G_3

Graf ini mempunyai ciri:

a. Memiliki 2 titik , $V(G_3) = \{v_1, v_2\}$ maka *order* dari G_3 adalah 2 atau $p = 2$.

b. Memiliki 1 sisi, $E(G_3) = \{e_1\}$ dengan demikian graf ini mempunyai *size* 1 atau $q = 1$.

c. Derajat setiap titik pada graf ini adalah $\deg(v_1) = 1$, $\deg(v_2) = 1$. Maka derajat maksimum dari titik-titik pada graf ini adalah 1.

d. Panjang lintasannya adalah 1, yaitu $W_3 = v_2, e_1, v_1$

3.1.1.iii. Mencari Ciri Umum Graf Latis Faktor untuk P^1

Dari proses pembuatan graf latis faktor dari unsur-unsur dalam himpunan $P^1 = \{2,3,5\}$ yakni latis faktor L_1, L_2, L_3 diperoleh graf yang memiliki pola sebagai berikut:

Tabel 3.1 Pola Graf Latis Faktor untuk Bilangan p^1

G_n	*Order*	*Size*	Derajat maksimum titik	Lintasan terpanjang
G_1 untuk 2	2	1	1	1
G_2 untuk 3	2	1	1	1
G_3 untuk 5	2	1	1	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
G_n untuk p^1	2	1	1	1

3.1.2. Pembahasan Himpunan P^2

3.1.2.i. Mencari Faktor Pembagi Positif

Untuk mencari faktor pembagi positif (selanjutnya hanya disebut faktor) dari suatu bilangan maka perlu diperhatikan definisi keterbagian.

1.2.i. Faktor dari 2^2 adalah 1 , 2 , dan 2^2 . Selanjutnya faktor-faktor tersebut dinotasikan sebagai barisan $L_1 = 1, 2, 2^2$. Menurut definisi 5 di dalam bab 2, $\tau(2^2) = 3$.

1.2.ii. Faktor dari 3^2 adalah 1, 2 dan 3^2, dinotasikan $L_2 = 1, 3, 3^2$ dan $\tau(3^2) = 3$.

1.2.iii. Faktor dari 5^2 adalah 1, 5 dan 5^2 dinotasikan $L_3 = 1, 5, 5^2$ dan $\tau(5^2) = 3$.

Selanjutnya diperiksa apakah $L_1, L_{2,} L_3$ memenuhi postulat-postulat latis.

Untuk $L_1 = 1, 2, 2^2$, barisan ini memuat faktor persekutuan terbesar (FPB) tunggal dan kelipatan persekutuan terkecil (KPK) tunggal dari setiap anggota dari himpunan L_1; dengan demikian jika kita definisikan $\text{FPB}(a,b) = a * b$, dan $\text{KPK}(a,b) = a \circ b$, maka jika diambil *a, b, c* di L_1 maka postulat *i* sampai *viii* terpenuhi. Karena L_1 memenuhi kedelapan postulat latis, maka L_1 adalah sebuah Latis.

Untuk $L_2 = 1, 3, 3^2$, barisan ini memuat faktor persekutuan terbesar (FPB) tunggal dan kelipatan persekutuan terkecil (KPK) tunggal dari setiap anggota dari himpunan L_2; dengan demikian jika kita definisikan $\text{FPB}(a,b) = a * b$, dan $\text{KPK}(a,b) = a \circ b$, maka jika diambil *a, b, c* di L_2 maka postulat *i* sampai *viii* terpenuhi. Karena L_2 memenuhi kedelapan postulat latis, maka L_2 adalah sebuah Latis.

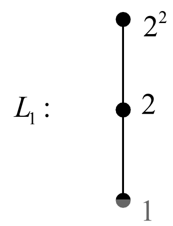
Untuk $L_3 = 1, 5, 5^2$, barisan ini memuat faktor persekutuan terbesar (FPB) tunggal dan kelipatan persekutuan terkecil (KPK) tunggal dari setiap anggota dari himpunan L_3; dengan demikian jika kita definisikan FPB(a,b) $= a * b$, dan KPK(a,b) $= a \circ b$, maka jika diambil *a, b, c* di L_3 maka postulat *i* sampai *viii* terpenuhi. Karena L_3 memenuhi kedelapan postulat latis, maka L_3 adalah sebuah Latis.

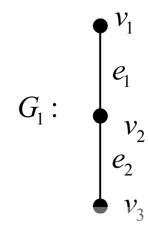
Langkah selanjutnya adalah membuat diagram Latis Faktor dari $L_1, L_{2,} L_3$. Setiap titik pada graf mewakili faktor dalam diagram latis yang berarti bahwa banyknya titik pada graf sama dengan banyaknya faktor pada diagram latis. Setiap sisi pada graf mewakili garis pada diagram latis. Setelah terbentuk graf dari $L_1, L_{2,} L_3$, selanjutnya adalah mendeskripsikan ciri yang dimiliki oleh graf latis faktor yang terbentuk.

3.1.2.ii. Membuat Graf Latis Faktor

1. Graf Latis Faktor untuk L_1

$L_1 = 1, 2, 2^2$ adalah latis yang memuat tiga faktor. Setiap faktor tersebut diwakili oleh titik v_1, v_2 dan v_3. Garis pada diagram latis faktor diwakili oleh sisi e_1 dan e_2 pada graf. Dengan mengikuti prosedur yang telah ditentukan akan terbentuk graf sebagai berikut:





Gambar 3.4.a Diagram Latis Faktor L_1

Gambar 3.4.b Graf Latis Faktor G_1

Graf ini adalah graf path yakni graf yang hanya memiliki satu lintasan. graf ini mempunyai ciri di antaranya:

a. Memiliki 3 titik , $V(G_1) = \{v_1, v_2, v_3\}$ maka *order* dari G_1 adalah 3 atau $p = 3$.

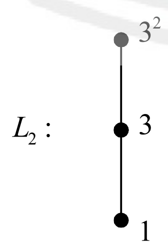
b. Memiliki 2 sisi, $E(G_1) = \{e_1, e_2\}$, dengan demikian graf ini mempunyai *size* 2 atau $q = 2$.

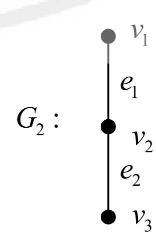
c. Derajat setiap titik pada graf ini adalah $\deg(v_1) = 1$, $\deg(v_2) = 2$, $\deg(v_3) = 1$. Maka derajat maksimum dari titik-titik pada graf ini adalah 2.

d. Panjang lintasannya adalah 2, yaitu $W_1 = v_3, e_2, v_2, e_1, v_1$

2. Graf Latis Faktor untuk L_2

$L_2 = 1, 3, 3^2$ adalah latis yang memuat dua faktor. Setiap faktor tersebut diwakili oleh titik v_1, v_2 dan v_3. Dan garis pada diagram latis faktor diwakili oleh sisi e_1 dan e_2. Adapun gambarnya seperti di bawah ini:





Gambar 3.5.a Diagram Latis Faktor L_2

Gambar 3.5.b Graf Latis Faktor G_2

Graf ini mempunyai ciri:

a. Memiliki 3 titik , $V(G_2) = \{v_1, v_2, v_3\}$ maka *order* dari G_2 adalah 2 atau $p = 2$.

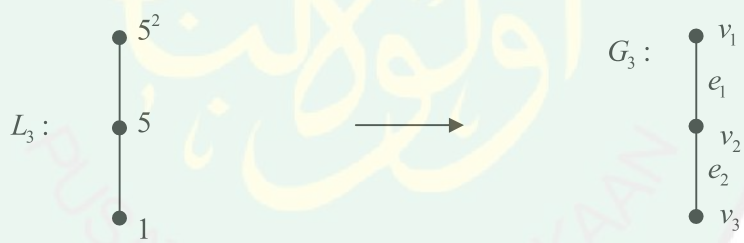
b. Memiliki 2 sisi, $E(G_2) = \{e_1, e_2\}$ dengan demikian graf ini mempunyai *size* 2 atau $q = 2$.

c. Derajat setiap titik pada graf ini adalah $\deg(v_1) = 1$, $\deg(v_2) = 2$, $\deg(v_3) = 1$. Maka derajat maksimum dari titik-titik pada graf ini adalah 2.

d. Panjang lintasannya adalah 2, yaitu $W_2 = v_3, e_2, v_2, e_1, v_1$.

3. Graf Latis Faktor untuk L_3

$L_3 = 1, 5, 5^2$ adalah latis yang memuat dua faktor. Setiap faktor tersebut diwakili oleh titik v_1, v_2 dan v_3. Dan garis pada diagram latis faktor diwakili oleh sisi e_1 dan e_2. Adapun gambarnya seperti di bawah ini:



Gambar 3.6.a Diagram Latis Faktor L_3 **Gambar 3.6.b** Graf Latis Faktor G_3

Graf ini mempunyai ciri:

a. Memiliki 3 titik , $V(G_3) = \{v_1, v_2, v_3\}$ maka *order* dari G_3 adalah 2 atau $p = 2$.

b. Memiliki 2 sisi, $E(G_3) = \{e_1, e_2\}$ dengan demikian graf ini mempunyai *size* 2 atau $q = 1$.

c. Derajat setiap titik pada graf ini adalah $\deg(v_1)=1$, $\deg(v_2)=2$, $\deg(v_3)=1$. Maka derajat maksimum dari titik-titik pada graf ini adalah 2.

d. Panjang lintasannya adalah 2, yaitu $W_3 = v_3, e_2, v_2, e_1, v_1$.

3.1.2.iii. Mencari Ciri umum Graf Latis Faktor untuk P^2

Dari proses pembuatan graf latis faktor dari unsur-unsur dalam himpunan $P^2 = \{2^2, 3^2, 5^2\}$ menggunakan latis faktor yakni graf latis faktor $L_1, L_{2,} L_3$ diperoleh suatu pola sebagai berikut:

Tabel 3.2 Pola Graf Latis Faktor untuk Bilangan p^2

G_n	*Order*	*Size*	Derajat Maksimum titik	Lintasan terpanjang	Lintasan terpendek
G_1 untuk 2^2	3	2	2	2	2
G_2 untuk 3^2	3	2	2	2	2
G_3 untuk 5^2	3	2	2	2	2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
G_n untuk p^2	3	2	2	2	2

3.1.3. Pembahasan Himpunan P^3

3.1.3.i. Mencari Faktor Pembagi Positif

Untuk mencari faktor pembagi positif (selanjutnya hanya disebut faktor) dari suatu bilangan maka perlu diperhatikan definisi keterbagian.

1.2.i. Faktor dari 2^3 adalah 1 , 2 , 2^2 dan 2^3 . Selanjutnya faktor-faktor tersebut dinotasikan sebagai barisan $L_1 = 1, 2, 2^2, 2^3$. Menurut definisi 5 di dalam bab 2, $\tau\left(2^3\right) = 4$.

1.2.ii. Faktor dari 3^3 adalah 1, 2, 3^2 dan 3^3, dinotasikan $L_2 = 1, 3, 3^2, 3^3$ dan $\tau\left(3^3\right) = 4$.

1.2.iii. Faktor dari 5^3 adalah 1, 5, 5^2 dan 5^3 dinotasikan $L_3 = 1, 5, 5^2, 5^3$ dan $\tau\left(5^3\right) = 4$.

Selanjutnya diperiksa apakah $L_1, L_{2,} L_3$ memenuhi postulat-postulat latis.

Untuk $L_1 = 1, 2, 2^2, 2^3$, barisan ini memuat faktor persekutuan terbesar (FPB) tunggal dan kelipatan persekutuan terkecil (KPK) tunggal dari setiap anggota dari himpunan L_1; dengan demikian jika kita definisikan $\text{FPB}(a,b) = a * b$, dan $\text{KPK}(a,b) = a \circ b$, maka jika diambil *a, b, c* di L_1 maka postulat *i* sampai *viii* terpenuhi. Karena L_1 memenuhi kedelapan postulat latis, maka L_1 adalah sebuah Latis.

Untuk $L_2 = 1, 3, 3^2, 3^3$, barisan ini memuat faktor persekutuan terbesar (FPB) tunggal dan kelipatan persekutuan terkecil (KPK) tunggal dari setiap anggota dari himpunan L_2; dengan demikian jika kita definisikan $\text{FPB}(a,b) = a * b$, dan $\text{KPK}(a,b) = a \circ b$, maka jika diambil *a, b, c* di L_2 maka postulat *i* sampai *viii* terpenuhi. Karena L_2 memenuhi kedelapan postulat latis, maka L_2 adalah sebuah Latis.

Untuk $L_3 = 1, 5, 5^2, 5^3$, barisan ini memuat faktor persekutuan terbesar (FPB) tunggal dan kelipatan persekutuan terkecil (KPK) tunggal dari setiap anggota dari himpunan L_3; dengan demikian jika kita definisikan

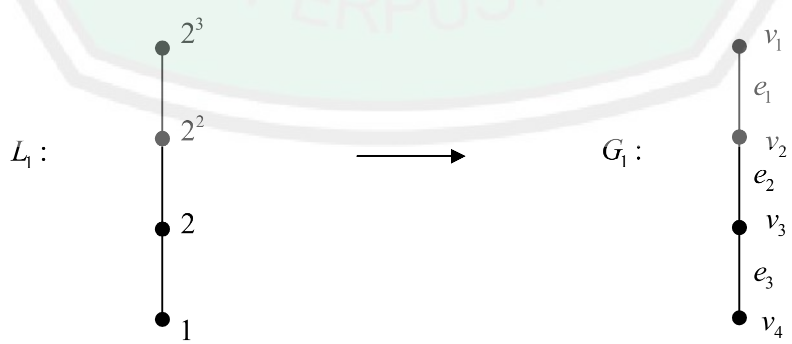
$\text{FPB}(a,b) = a * b$, dan $\text{KPK}(a,b) = a \circ b$, maka jika diambil *a, b, c* di L_3 maka postulat *i* sampai *viii* terpenuhi. Karena L_3 memenuhi kedelapan postulat latis, maka L_3 adalah sebuah Latis.

Langkah selanjutnya adalah membuat diagram Latis Faktor dari L_1, L_2, L_3. Setiap titik pada graf mewakili faktor dalam diagram latis yang berarti bahwa banyknya titik pada graf sama dengan banyaknya faktor pada diagram latis. Setiap sisi pada graf mewakili garis pada diagram latis. Setelah terbentuk graf dari L_1, L_2, L_3, selanjutnya adalah mendeskripsikan ciri yang dimiliki oleh graf latis faktor yang terbentuk.

3.1.3.ii. Membuat Graf Latis Faktor

1. Graf Latis Faktor untuk L_1

$L_1 = 1, 2, 2^2, 2^3$ adalah latis yang memuat empat faktor. Setiap faktor tersebut diwakili oleh titik v_1, v_2, v_3 dan v_4. Garis pada diagram latis faktor diwakili oleh sisi e_1, e_2 dan e_3 pada graf. Dengan mengikuti prosedur yang telah ditentukan akan terbentuk graf sebagai berikut:



Gambar 3.7.a Diagram Latis Faktor L_1 **Gambar 3.7.b** Graf Latis Faktor G_1

Graf ini adalah graf path yakni graf yang hanya memiliki satu lintasan. graf ini mempunyai ciri di antaranya:

a. Memiliki 4 titik , $V(G_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ maka *order* dari G_1 adalah 4 atau p = 4.

b. Memiliki 3 sisi, $E(G_1) = \{e_1, e_2, e_3\}$, dengan demikian graf ini mempunyai *size* 2 atau q = 2.

c. Derajat setiap titik pada graf ini adalah $\deg(v_1) = 1$, $\deg(v_2) = 2$, $\deg(v_3) = 2$, $\deg(v_4) = 1$. Maka derajat maksimum dari titik-titik pada graf ini adalah 2.

d. Panjang lintasannya adalah 3, yaitu $W_1 = v_4, e_3, v_3, e_2, v_2, e_1, v_1$

2. Graf Latis Faktor untuk L_2

$L_2 = 1, 3, 3^2, 3^3$ adalah latis yang memuat empat faktor. Setiap faktor tersebut diwakili oleh titik v_1, v_2, v_3 dan v_4. Garis pada diagram latis faktor diwakili oleh sisi e_1, e_2 dan e_3 pada graf. Adapun gambarnya seperti di bawah ini:

Gambar 3.8.a Diagram Latis Faktor L_2 **Gambar 3.8.b** Graf Latis Faktor G_2

Graf ini mempunyai ciri:

a. Memiliki 4 titik , $V(G_2) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ maka *order* dari G_2 adalah 4 atau p = 4.

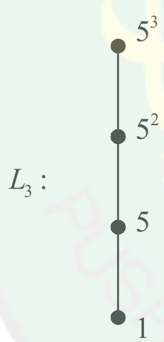
b. Memiliki 3 sisi, $E(G_2) = \{e_1, e_2, e_3\}$, dengan demikian graf ini mempunyai *size* 2 atau q = 2.

c. Derajat setiap titik pada graf ini adalah adalah $\deg(v_1) = 1$, $\deg(v_2) = 2$, $\deg(v_3) = 2$, $\deg(v_4) = 1$. Maka derajat maksimum dari titik-titik pada graf ini adalah 2.

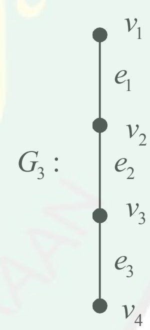
d. Panjang lintasannya adalah 3, yaitu $W_2 = v_4, e_3, v_3, e_2, v_2, e_1, v_1$

3. Graf Latis Faktor untuk L_3

$L_3 = 1, 5, 5^2, 5^3$ adalah latis yang memuat empat faktor. Setiap faktor tersebut diwakili oleh titik v_1, v_2, v_3 dan v_4. Garis pada diagram latis faktor diwakili oleh sisi e_1, e_2 dan e_3 pada graf. Adapun gambarnya seperti di bawah ini:



Gambar 3.9.a Diagram Latis Faktor L_3



Gambar 3.9.b Graf Latis Faktor G_3

Graf ini mempunyai ciri:

a. Memiliki 4 titik , $V(G_3) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ maka *order* dari G_3 adalah 4 atau *p* = 4.

b. Memiliki 3 sisi, $E(G_3) = \{e_1, e_2, e_3\}$, dengan demikian graf ini mempunyai *size* 2 atau *q* = 2.

c. Derajat setiap titik pada graf ini adalah adalah $\deg(v_1)=1$, $\deg(v_2)=2$, $\deg(v_3)=2$, $\deg(v_4)=1$. Maka derajat maksimum dari titik-titik pada graf ini adalah 2.

d. Panjang lintasannya adalah 3, yaitu $W_3 = v_4, e_3, v_3, e_2, v_2, e_1, v_1$

3.1.3.iii. Mencari Ciri Umum Graf Latis Faktor untuk P^3

Dari proses pembuatan graf latis faktor dari unsur-unsur dalam himpunan $P^2=\{2^2,3^2,5^2\}$ menggunakan latis faktor yakni graf latis faktor $L_1, L_{2,} L_3$ diperoleh suatu pola sebagai berikut:

Tabel 3.3 Pola Graf Latis Faktor untuk Bilangan p^3

G_n	*Order*	*Size*	Derajat Maksimum titik	Panjang Lintasan
G_1 untuk 2^3	4	3	2	3
G_2 untuk 3^3	4	3	2	3
G_3 untuk 5^3	4	3	2	3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
G_n untuk p^3	4	2	2	3

3.1.4. Mencari Ciri Umum Graf Latis Faktor untuk P^n

Dari proses pembuatan graf latis faktor dari unsur dalam himpunan $P^1=\{2,3,5,7,11,\cdots\}$, $P^2=\{2^2,3^2,5^2,7^2,11^2,\cdots\}$, dan $P^3=\{2^3,3^3,5^3,7^3,11^3,\cdots\}$ diperoleh suatu pola sebagai berikut:

Tabel 3.4 Pola Graf Latis Faktor untuk Bilangan p^n

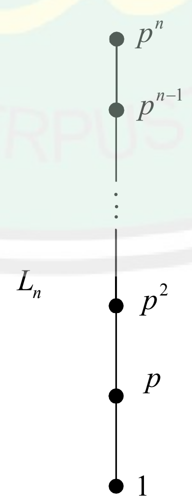
G_n	***Order***	***Size***	**Derajat Maksimum titik**	**Panjang Lintasan**
G_1 untuk p	2	1	1	1
G_2 untuk p^2	3	2	2	2
G_3 untuk p^3	4	3	2	3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
G_n untuk p^n	n+1	n	2	n

Teorema 3.1

Jika G_n adalah graf latis faktor dari bilangan prima berpangkat n, dengan n bilangan asli, maka $V(G_n) = n+1$ dan $E(G_n) = n$

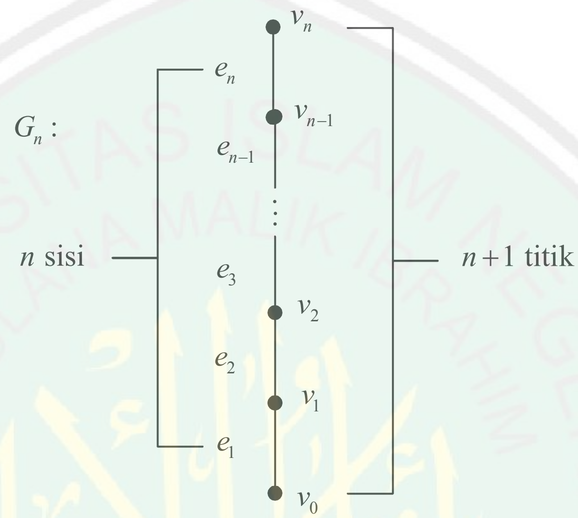
Bukti:

Faktor pembagi positif dari p^n adalah $1, p, p^2, p^3, \cdots, p^n$, maka menurut teorema 2.1, $\tau\left(p^n\right) = n+1$. Diagram latis faktor dari p^n adalah seperti di bawah ini:



Gambar 3.10 Diagram Latis Faktor L_n

Jika diagram latis faktor L_n dibuat graf G_n, maka setiap faktor pada graf latis faktor L_n (yakni $1, p, p^2, p^3, \cdots, p^n$) diwakili oleh titik pada graf G_n (misal $v_0, v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n$) seperti gambar di bawah ini:



Gambar 3.11 Graf Latis Faktor G_n

Jadi banyaknya faktor pada L_n sama dengan banyaknya titik pada G_n yaitu $n+1$.

Untuk membuktikan sisi, perhatikan graf latis faktor G_n yang mempunyai titik $v_0, v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n$. Karena G_n merupakan graf path, maka setiap sisi pada G_n menghubungkan dua titik. Maka ada n sisi yang menghubungkan setiap dua titik pada G_n yaitu:

$e_1 = (v_0, v_1)$, $e_2 = (v_1, v_2)$, $e_3 = (v_2, v_3)$, $\cdots$, $e_{n-1} = (v_{n-2}, v_{n-1})$, $e_n = (v_{n-1}, v_n)$ .Jika G_n adalah graf latis faktor dari bilangan p^n, maka untuk

n = 1 derajat maksimum dari titik-titik pada G_n adalah 1 dan untuk n > 1 derajat maksimum dari titik-titik pada G_n adalah 2.

Bukti:

Graf latis faktor dari bilangan p^n menurut teorema 3.1 mempunyai n+1 titik yakni $v_0, v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n$. Dengan melihat gambar 3.11, maka dapat diketahui bahwa:

$\deg(v_0) = 1$

$\deg(v_1) = 2$

$\deg(v_3) = 2$

.
.
.

$\deg(v_{n-1}) = 2$

$\deg(v_n) = 1$

Jadi $\deg(v_i) = 2$ untuk untuk n = 1 derajat maksimum dari titik-titik pada G_n adalah 1 dan untuk n > 1 derajat maksimum dari titik-titik pada G_n adalah 2..

Teorema 3.2

Jika G_n adalah graf latis faktor dari bilangan p^n dengan n bilangan asli, maka panjang lintasan dari G_n adalah n.

Bukti:

Panjang lintasan pada graf G adalah sama dengan banyaknya sisi pada graf tersebut. Menurut teorema 3.1 banyaknya sisi pada graf latis faktor G_n adalah n, maka panjang lintasannya adalah n.

3.2. Graf Latis Faktor Bilangan $2^n \times 10$

Pada subbab ini dibahas graf latis faktor dari bilangan $2^n \times 10$. Bilangan ini dalam tulisan ini adalah anggota dari himpunan $K = \{20, 40, \cdots, 2^n \times 10\}$ dengan n anggota himpunan bilangan asli. Agar pembahasan lebih sistematis, maka diikuti prosedur yang telah ditentukan.

3.2.1. Mencari Faktor Pembagi Positif

1.2.i. Faktor dari 20 adalah 1, 2, 4, 5, 10 dan 20, dinotasikan $L_1 = 1, 2, 4, 5, 10, 20$ dan $\tau(20) = 6$.

1.2.ii. Faktor dari 40 adalah 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20 dan 40, dinotasikan $L_2 = 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40$ dan $\tau(40) = 8$.

1.2.iii. Faktor dari 80 adalah 1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 40 dan 80, dinotasikan $L_3 = 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40, 80$ dan $\tau(80) = 10$.

Selanjutnya diperiksa apakah $L_1, L_{2,} L_3$ memenuhi postulat-postulat dalam definisi 2.6.

Untuk $L_1 = 1, 2, 4, 5, 10, 20$, barisan ini memuat faktor persekutuan terbesar (FPB) tunggal dan kelipatan persekutuan terkecil (KPK) tunggal dari setiap anggota dari himpunan L_1; dengan demikian jika kita definisikan $\text{FPB}(a,b) = a * b$, dan $\text{KPK}(a,b) = a \circ b$, maka jika diambil *a, b, c* di L_1 maka postulat *i* sampai *viii* terpenuhi. Karena L_1 memenuhi kedelapan postulat latis, maka L_1 adalah sebuah Latis.

Untuk $L_2 = 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40$, barisan ini memuat faktor persekutuan terbesar (FPB) tunggal dan kelipatan persekutuan terkecil (KPK) tunggal dari setiap anggota dari himpunan L_2; dengan demikian jika kita definisikan $\text{FPB}(a,b) = a * b$, dan $\text{KPK}(a,b) = a \circ b$, maka jika diambil *a, b, c* di L_2 maka postulat *i* sampai *viii* terpenuhi. Karena L_2 memenuhi kedelapan postulat latis, maka L_2 adalah sebuah Latis.

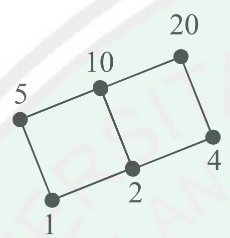
Untuk $L_3 = 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40, 80$, barisan ini memuat faktor persekutuan terbesar (FPB) tunggal dan kelipatan persekutuan terkecil (KPK) tunggal dari setiap anggota dari himpunan L_3; dengan demikian jika kita definisikan $\text{FPB}(a,b) = a * b$, dan $\text{KPK}(a,b) = a \circ b$, maka jika diambil *a, b, c* di L_3 maka postulat *i* sampai *viii* terpenuhi. Karena L_3 memenuhi kedelapan postulat latis, maka L_3 adalah sebuah Latis.

Langkah selanjutnya adalah membuat diagram Latis Faktor dari L_1, L_2, L_3. Setiap titik pada graf mewakili faktor dalam diagram latis. Hal ini berarti bahwa banyaknya titik pada graf sama dengan banyaknya faktor pada diagram latis. Dan setiap sisi pada graf mewakili garis pada diagram latis. Setelah terbentuk graf dari L_1, L_2, L_3, selanjutnya adalah mendeskripsikan ciri yang dimiliki oleh graf latis faktor yang terbentuk.

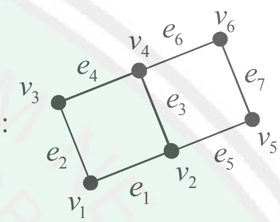
3.2.2. Membuat Graf Latis Faktor

1. Graf Latis Faktor untuk L_1

$L_1 = 1, 2, 4, 5, 10, 20$ adalah latis yang memuat 6 faktor. Setiap faktor tersebut diwakili oleh titik v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 dan v_6. Garis pada diagram latis faktor diwakili oleh sisi e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6 dan e_7. Adapun gambarnya seperti di bawah ini:



Gambar 3.12.a Diagram Latis Faktor L_1



Gambar 3.12.b Graf Latis Faktor G_1

Graf ini adalah graf tangga yang mempunyai ciri:

a. Memiliki 6 titik , $V(G_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ maka *order* dari G_1 adalah 6 atau $p = 6$.

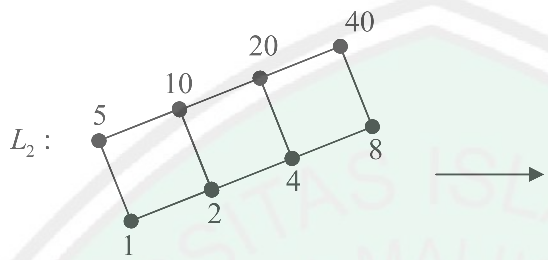
b. Memiliki 7 sisi, $E(G_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ dengan demikian graf ini mempunyai *size* 7 atau $q = 7$.

c. Sikel terpanjangnya adalah 6, yaitu $C_1^+ = v_1, e_1, v_2, e_5, v_5, e_7, v_6, e_6, v_4, e_4, v_3, e_2$

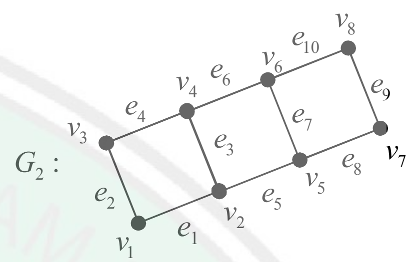
d. Sikel terpendek adalah 4, yaitu $C_1^- = v_1, e_1, v_2, e_3, v_4, e_4, v_3, e_2$

2. Graf Latis Faktor untuk L_2

$L_2 = 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40$ adalah latis yang memuat 8 faktor. Setiap faktor tersebut diwakili oleh titik v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6 , v_7 dan v_8. Garis pada diagram latis faktor diwakili oleh sisi e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9 dan e_{10}. Adapun gambarnya seperti di bawah ini:



Gambar 3.13.a Diagram Latis Faktor L_2



Gambar 3.13.b Graf Latis Faktor G_2

Graf ini mempunyai ciri:

a. Memiliki 8 titik , $V(G_2) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ maka *order* dari G_2 adalah 8 atau $p = 8$.

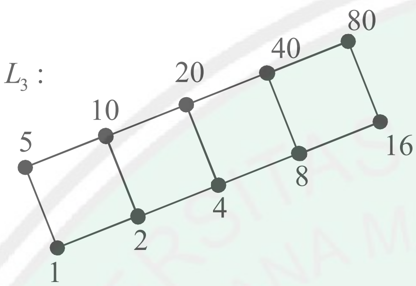
b. Memiliki 10 sisi, $E(G_2) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\}$ dengan demikian graf ini mempunyai *size* 10 atau $q = 10$.

c. Sikel terpanjangnya adalah 8, yaitu $C_1^+ = v_1, e_1, v_2, e_5, v_5, e_8, v_7, e_9, v_8, e_{10}, v_6, e_6, v_4, e_4, v_3, e_2$.

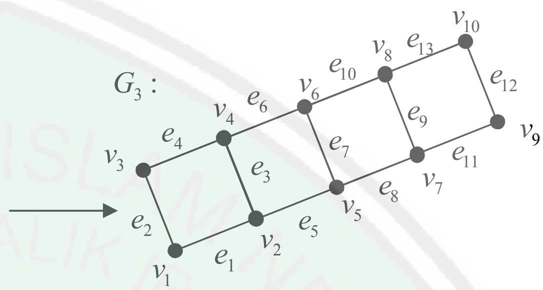
d. Sikel terpendek adalah 4, yaitu $C_1^- = v_1, e_1, v_2, e_3, v_4, e_4, v_3, e_2$.

3. Graf Latis Faktor untuk L_3

$L_3 = 1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 40, 80$ adalah latis yang memuat 10 faktor. Setiap faktor tersebut diwakili oleh titik $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9$ dan v_{10}. Garis pada diagram latis faktor diwakili oleh sisi e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12} dan e_{13}. Adapun gambarnya seperti di bawah ini:



Gambar 3.14.a Diagram Latis Faktor L_3



Gambar 3.14.b Graf Latis Faktor G_3

Graf ini mempunyai ciri:

a. Memiliki 10 titik , $V(G_3) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}\}$ maka *order* dari G_3 adalah 10 atau $p = 10$.

b. Memiliki 13 sisi, $E(G_3) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_{13}\}$ dengan demikian graf ini mempunyai size 13 atau q = 13.

c. Sikel terpanjangnya adalah 10, yaitu $C_1^+ = v_1, e_1, v_2, e_5, v_5, e_8, v_7, e_{11}, v_9, e_{12}, v_{10}, e_{13}, v_8, e_{10}, v_6, e_6, v_4, e_4, v_3, e_2$.

d. Sikel terpendek adalah 4, yaitu $C_1^- = v_1, e_1, v_2, e_3, v_4, e_4, v_3, e_2$.

3.2.3. Mencari Ciri Umum Graf Latis Faktor Untuk $2^n \times 10$

Dari proses pembuatan graf latis faktor dari unsur-unsur dalam himpunan $K = \{20, 40, \cdots, 2^n \times 10\}$ yakni latis faktor L_1, L_2, L_3 diperoleh graf yang memiliki pola sebagai berikut:

Tabel 3.5 Pola Graf Latis Faktor untuk Bilangan $2^n \times 10$

L_n	*Order*	*Size*	*Sikel terpanjang*	*Sikel terpendek*
G_1 untuk 20	6	7	6	4
G_2 untuk 40	8	10	8	4
G_3 untuk 80	10	13	10	4
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
G_n untuk $2^n \times 10$	$2n+4$	$3n+4$	$2n+4$	4

Teorema 3.4

Jika G_n adalah graf latis faktor dari bilangan $2^n \times 10$ dengan n bilangan asli, maka $V(G_n) = 2n+4$ dan $E(G_n) = 3n+4$.

Bukti:

Faktor pembagi positif dari $2^n \times 10$ adalah sebagai berikut: 1, 2, 2^2, 2^3, . . ., 2^n, 2^{n+1}, 5, 10, 2×10, $2^2 \times 10$, $2^3 \times 10$, . . ., $2^n \times 10$.

Untuk mencari banyak Faktor pembagi positif dari $2^n \times 10$ dimulai dengan menyederhanakan bilangan $2^n \times 10$

$$2^n \times 10 = 2^n \times 2.5$$

$$= 2^{n+1} \times 5$$

$2^{n+1} \times 5$ suatu bilangan asli dengan pemfaktoran prima sehingga banyak Faktor pembagi positif dari $2^{n+1} \times 5$ dapat dicari dengan cara berikut:

$$\tau\left(2^n \times 10\right) = \tau\left(2^{n+1} \times 5\right)$$

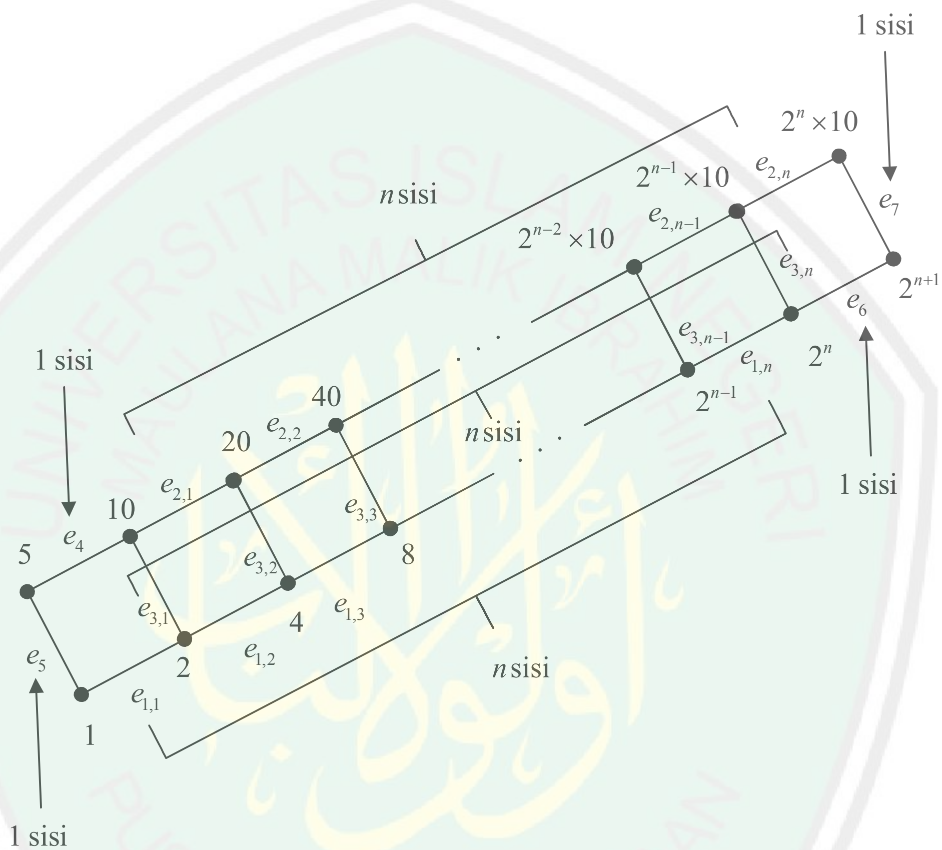
$$= \tau\left(2^{n+1}\right)\tau(5)$$

$$= \left((n+1)+1\right)\left(1+1\right)$$

$$= (n+2)(2)$$

$$= 2n+4$$

Adapun graf G_n adalah sebagai berikut:



Gambar 3.15 Graf Latis Faktor Bilangan $2^n \times 10$

Setiap titik pada graf mewakili faktor positif dari bilangan $2^n \times 10$. Maka banyaknya titik pada graf G_n adalah $2n+4$.

Untuk membuktikan banyaknya sisi dapat diketahui dengan melihat gambar 3.15. Graf di atas memiliki jumlah titik $3n + 4$ dengan sebagai berikut:

a. $e_{1,1} = (1,2)$, $e_{1,2} = (2,4)$, $e_{1,3} = (4,8)$, $\cdots$, $e_{1,n} = (2^{n-1}, 2^n)$ sebanyak n sisi.

b. $e_{2,1} = (10,20)$, $e_{2,2} = (20,40)$, $e_{2,3} = (40,80)$, $\cdots$,

$e_{2,n-1} = (2^{n-2} \times 10, 2^{n-1} \times 10)$, $e_{2,n} = (2^{n-1} \times 10, 2^n \times 10)$ sebanyak n sisi.

c. $e_{3,1} = (2,10)$, $e_{3,2} = (4,20)$, $e_{3,3} = (8,40)$, $\cdots$, $e_{3,n-1} = (2^{n-1}, 2^{n-2} \times 10)$,

$e_{3,n} = (2^n, 2^{n-1} \times 10,)$ sebanyak n sisi.

d. $e_4 = (5,10)$, $e_5 = (1,5)$, $e_6 = (2^n, 2^{n+1})$, $e_7 = (2^{n+1}, 2^n \times 10)$ sebanyak 4 sisi.

Banyak semua sisi adalah $n + n + n + 4 = 3n + 4$.

Teorema 3.5

Jika G_n adalah graf latis faktor dari bilangan $2^n \times 10$, n bilangan asli. Maka sikel terpanjang pada G_n adalah $2n + 4$ dan sikel terpendek pada G_n adalah 4.

Bukti:

Dengan melihat gambar 3.15 dapat diketahui bahwa sikel terpanjangnya adalah :

1, $e_{1,1}$, 2, $e_{1,2}$, 4, $e_{1,3}$, 8, $\cdots$, 2^{n-1}, $e_{1,n}$, 2^n, e_6, 2^{n+1}, e_7, $2^n \times 10$, $e_{2,n}$, $2^{n-1} \times 10$, $e_{2,n-1}$, $2^{n-2} \times 10$, $\cdots$, 40, $e_{2,2}$, 20, $e_{2,1}$, 10, e_4, 5, e_5.

Panjang dari sikel ini dapat dilihat dari banyaknya sisi yang dilalui. Sisi yang dilalui adalah:

$$\underbrace{e_{1,1},\ e_{1,2},\ e_{1,3},\ \cdots,\ e_{1,n}}_{n \text{ sisi}},\ \underbrace{e_6, e_7}_{2 \text{ sisi}},\ \underbrace{e_{2,n},\ e_{2,n-1}, \cdots, e_{2,3}, e_{2,2}, e_{2,1}}_{n \text{ sisi}}, \underbrace{e_4, e_5}_{2 \text{ sisi}}$$

Banyak semua sisi yang dilalui adalah $n + n + 2 + 2 = 2n+4$. Maka sikel terpanjangnya adalah $2n+4$.

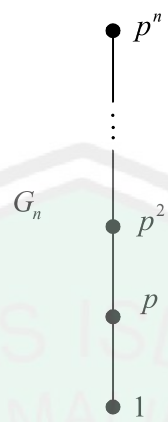
Bahwa sikel terpendek pada gambar 3.15 adalah 1, $e_{1,1}$, 2, $e_{3,1}$, 10, e_4, 5, e_5. Banyaknya sisi yang dilalui adalah 4 yaitu $e_{1,1}$, $e_{3,1}$, e_4, e_5. Maka sikel terpendeknya adalah 4.

3.3. Relevensi Graf Latis Faktor dengan Konsep Tingkatan orang berpuasa

Untuk menyusun atau menggambar graf latis faktor dari $L_1, L_{2,} L_3$ harus memperhatikan langkah-langkah berikut:

1. Faktor terkecil sampai faktor terbesar digambar terlebih dahulu.
2. Faktor yang lebih kecil diletakkan di bawah sedangkan yang lebih besar di atas.
3. Misal a , b, dan c adalah faktor dari p dan $a \neq b \neq c$. a akan terhubung pada b jika $a\,|b$ (a membagi b) dan tidak ada c sedemikian sehingga $c|b$ dan $a|c$.

Perhatikan sebuah graf latis faktor dari bilangan prima berpangkat n $\left(p^n\right)$ berikut:



Gambar 3.16 Graf Latis Faktor G_n

Dari gambar tersebut dapat dilihat bahwa setiap sisi yang menghubungkan dua titik harus mengikuti aturan latis.

Dalam kitab Durratu an-Naasihiin dalam bab Fii Fadhilati as-Shoum ada tiga tingkatan orang dalam berpuasa :

1. *Shaumul & lsquo; Awwam* (صوم العوام)

Ibadah puasa pada tingkatan ini adalah mungkin bisa dikatakan sebagai tingkatan yang paling rendah, karena orang yang berpuasa pada tingkatan ini hanyalah puasa yang sekedar menjaga makan dan minum serta tidak melakukan berhubungan sex dengan isteri.

2. *Shaumul Khawash* (صوم الخواص)

Ibadah puasa pada tingkatan yang kedua ini adalah sebuah tingkatan ibadah puasa yang mungkin bisa dikatakan tingkatan yang lebih tinggi dari yang pertama tadi. Ibadah puasa pada tingkatan kedua ini mereka tidak hanya menahan diri dari makan dan minum serta hubungan sex tetapi juga menjaga anggota badannya dari berbuat maksiat. Seperti, menjaga matanya dari melihat yang dilarang agama, menjaga mulutnya dari ghibah (membicarakan kejelekan orang lain), berbohong, mengadu domba, bersumpah palsu. Kemudian menjaga kedua tangannya dari perbuatan yang kotor serta menjaga kedua kakinya berjalan ketempat-tempat maksiat, bahkan menjaga hatinya dari lupa kepada Allah SWT. Ibadah puasa pada tingkatan ini biasanya dilakukan oleh paraorang-orang yang sholih.

3. *Shaumul Khawaash al-Khawash* (صوم الخواص الخواص)

Ibadah puasa pada tingkatan yang ketiga ini adalah sebuah tingkatan puasa yang mungkin bisa dikatakan sebagai tingkatan ibadah puasa yang paling tinggi dari yang kedua di atas. Karena, ibadah puasa pada tingkatan ini bukan hanya sekedar menahan makan dan minum serta tidak melakukan berhubungan sex dengan isteri atau sekedar menjaga anggota badannya dari berbuat maksiat lebih dari itu mereka mampu menjaga hatinya dari lupa kepada Allah, keinginan yang bersifat duniawiyah atau berfikir tentang keduniaan. Ibadah puasa pada tingkatan ini biasa dilakukan oleh para nabi.

Pembagian tingkatan ini disesuaikan dengan kualitas seseorang dalam menjalankan puasa. Jadi tingkatan awwam adalam tingkatan terendah yakni puasa yang sekedar menjaga makan dan minum serta tidak melakukan berhubungan sex dengan isteri, tingkat selanjutnya adalah khawash yakni tidak hanya menjaga makan dan minum serta tidak melakukan berhubungan sex dengan isteri akan tetapi juga menjaga anggota badannya dari berbuat maksiat. Dan selanjutnya Khawaash al-Khawash yakni tidak hanya sekedar menahan makan dan minum serta tidak melakukan berhubungan sex dengan isteri atau sekedar menjaga anggota badannya dari berbuat maksiat lebih dari itu yaitu mampu menjaga hatinya dari lupa kepada Allah, keinginan yang bersifat duniawiyah atau berfikir tentang keduniaan.

Jika ketiga tingkatan ini digambarkan dengan graf adalah sebagai berikut:

Gambar 3.17 Graf Tingkatan orang berpuasa

Titik pada graf tersebut adalah tingkatan orang berpuasa dan garis menggambarkan proses yang harus ditempuh oleh manusia untuk menuju tingkatan selanjutnya.

Untuk garis yang menghubungkan titik صوم العوام dengan صوم الخواص berarti proses seseorang untuk memenuhi syarat bahwa puasanya tidak hanya sekedar menahan makan dan minum serta tidak berhubungan sex dengan istri. Lebih dari itu harus menjaga anggota badannya dari berbuat maksiat.

Untuk garis yang menghubungkan titik صوم الخواص dengan صوم الخواص الخواص berarti proses seseorang untuk memenuhi syarat bahwa puasanya tidak hanya sekedar menahan makan dan minum, tidak berhubungan sex dengan istri dan menjaga anggota badannya dari berbuat maksiat. Akan tetapi juga mampu menjaga hatinya dari lupa kepada Allah, keinginan yang bersifat duniawiyah atau berfikir tentang keduniaan.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan pada Bab III, maka dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. Untuk graf latis faktor bilangan prima berpangkat *n:*
   a. Jika G_n adalah graf latis faktor dari bilangan prima berpangkat *n*, dengan *n* bilangan asli, maka $V(G_n) = n+1$ dan $E(G_n) = n$
   b. Jika G_n adalah graf latis faktor dari bilangan p^n, maka untuk $n = 1$ derajat maksimum dari titik-titik pada G_n adalah 1 dan untuk $n > 1$ derajat maksimum dari titik-titik pada G_n adalah 2.
   c. Jika G_n adalah graf latis faktor dari bilangan p^n dengan *n* bilangan asli, maka panjang lintasan dari G_n adalah *n*.
2. Untuk graf latis faktor bilangan $2^n \times 10$:
   a. Jika G_n adalah graf latis faktor dari bilangan $2^n \times 10$ dengan *n* bilangan asli, maka $V(G_n) = 2n+4$ dan $E(G_n) = 3n+4$.
   b. Jika G_n adalah graf latis faktor dari bilangan $2^n \times 10$, *n* bilangan asli. Maka sikel terpanjang pada G_n adalah $2n+4$ dan sikel terpendek pada G_n adalah 4.

4.2 Saran

Pada skripsi ini, penulis hanya memfokuskan pada dua bilangan yakni bilangan prima berpangkat *n* dan bilangan $2^n \times 10$. Pembahasan mengenai graf latis faktor masih terbuka bagi peneliti lain yakni dengan memilih bilangan yang lain khususnya pada bilangan komposit atau dengan menyempurnakan tampilan dan proses perhitungan menggunakan program komputer.

DAFTAR PUSTAKA

Abdusysyakir. 2006. *Ada Matematika Dalam Al-Qur'an*. Malang: UIN Malang Press.

Abdusysyakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press.

Alisah, Evawati dan Dharmawan, Eko Prasetyo. *Filsafat Dunia Matematika*. Jakarta: Prestasi Pustaka Publisher.

Brown, Tony. 1997. *Mathematics Education and Language: Interpreting Hermeneutics and Post-Structuralism*. Manchester: Kluwer Academic Publisher.

Chartrand, G. dan Lesniak, L. 1986. *Graph and Digraph 2nd Edition.* California: Wadsworth. Inc.

Hakim, Abdul Hamid. *Mabadi' al-awwaliyah*. Jakarta: Sa'adiyah Putra.

Muftie, Arifin. 2004. *Matematika Alam Semesta: Kodetifikasi Bilangan Prima dalam Al-Qur'an*. Bandung: PT Kiblat Buku Utama..

Muhsetyo, Gatot. 1997. *Dasar-dasar Teori Bilangan*. Jakarta: Departemen Pendidikan dan Kebudayaan. Direktorat Jenderal Pendidikan Tinggi. Proyek Pengembangan Guru Sekolah Menengah.

Shihab, M. Quraish. 2002. *Tafsir Al- Misbah: Pesan, Kesan dan Keserasian Al-Qur'an*. Jakarta: Lentera Hati.

Shihab, M. Quraish. 2007. *Wawasan Al-Qur'an: Tafsir Tematik Atas Pelbagai Persoalan Umat*. Bandung: PT. Mizan Pustaka.

Sukardjono. 2002. *Teori Latis*. Yogyakarta: Penerbit Andi Yogyakarta.

Tabak, John.. 2004. *The History of Mathematics: Algebra (Set, Symbols, and The Language of Thought)*. New York: Facts On File, Inc.

Tung, Khoe Yoe. 2008. *Memahami Teori Bilangan dengan Mudah dan Menarik*. Jakarta: Grasindo.

Wilson. Robin J dan Walkins, John J. 1990. *Graphs An Introductory Approach: A first Course in Discrete Mathematic.* New York: John Wiley & Sons, Inc.