PENGGUNAAN METODE STRASSEN UNTUK MENENTUKAN HASIL PERKALIAN MATRIKS PERSEGI ORDO n

SKRIPSI

Oleh:

SITI AINUN

NIM : 04510015

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN)
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
MALANG
2009

PENGGUNAAN METODE STRASSEN UNTUK MENENTUKAN HASIL PERKALIAN MATRIKS PERSEGI ORDO n

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan Dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si.)

Oleh:

SITI AINUN

NIM: 04510015

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN)
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
MALANG
2009

PENGGUNAAN METODE STRASSEN UNTUK MENENTUKAN HASIL PERKALIAN MATRIKS PERSEGI ORDO n

SKRIPSI

Oleh:
SITI AINUN
NIM: 04510015

Telah Disetujui Untuk Diuji:

Tanggal, 16 September 2009

Dosen Pembimbing I,	**Dosen Pembimbing II,**
Sri Harini, M.Si	**Abdul Aziz, M.Si**
NIP. 19731014 200112 2 002	**NIP. 19760318 200604 1 002**

Mengetahui
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

HALAMAN PENGESAHAN

PENGGUNAAN METODE STRASSEN UNTUK MENENTUKAN HASIL PERKALIAN MATRIKS PERSEGI ORDO n

SKRIPSI

Oleh:
SITI AINUN
NIM: 04510015

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal:
30 September 2009

Susunan Dewan Penguji:		**Tanda Tangan**
1. Penguji Utama	: Abdussakir, M.Pd NIP. 19751006 200312 1 001	( )
2. Ketua	: Wahyu Henky Irawan, M.Pd NIP. 19710420 200003 1 003	( )
3. Sekretaris	: Sri Harini, M.Si NIP. 19731014 200112 2 002	( )
4. Anggota	: Abdul Aziz, M.Si NIP. 19760318 200604 1 002	( )

Mengetahui dan Mengesahkan
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERSEMBAHAN

Teriring rasa syukur ke hadirat Allah SWT, atas segala limpahan rahmat, hidayah dan pertolonganNya, penulis persembahkan skripsi ini teruntuk:

Pertama ayahanda Abdul Manaf dan ibunda Muzayyanah tercinta atas segala do'a dan segenap kasih sayangnya, semoga rahmat dan hidayah Allah SWT selalu menyertai di setiap langkah beliau.

Kedua untuk semua kakak penulis (M. Zaini Mahfud, Siti Murdliah, Ahmad Ali Basuni, Khoirul Anwar, Ahmad Syahri) dan adik tersayang Hadi Jamali, yang selalu memberikan semangat kepada penulis, dan mendo'akan kelancaran penulis di setiap langkah kehidupan.

Tuk seseorang yang selalu menemani, memberikan semangat, senantiasa mendoakan dan menghibur penulis, semoga apa yang kita inginkan dikabulkan oleh Allah SWT. Amiin...

MOTTO

ٱقۡرَأۡ بِٱسۡمِ رَبِّكَ ٱلَّذِي خَلَقَ

"Bacalah dengan (menyebut) nama Tuhanmu yang Menciptakan"

(QS. AL-Alaq: [96] 1)

SURAT PERNYATAAN

Yang bertandatangan di bawah ini:

Nama : Siti Ainun

NIM : 04510015

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Penggunaan Metode Strassen untuk Menentukan Hasil Perkalian Matriks Persegi Ordo n

Menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil karya saya sendiri dan bukan karya orang lain, baik sebagian maupun keseluruhan, kecuali dalam bentuk kutipan yang telah disebutkan sumbernya.

Demikian surat pernyataan ini saya buat dengan sebenar-benarnya dan apabila pernyataan ini tidak benar, saya bersedia mendapatkan sanksi akademis.

Malang, 16 September 2009

Yang Menyatakan,

Siti Ainun

04510015

KATA PENGANTAR

Bismillahirrohmanirrohim

Alhamdulillah segala puji bagi Allah SWT karena atas rahmat, taufiq dan hidayah-Nya, penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains dalam bidang Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Sholawat dan salam semoga senantiasa mengalun indah dan tulus terucap kepada Nabi Muhammad SAW, yang telah membimbing dan menuntun manusia dari jalan yang penuh dengan kegelapan menuju jalan yang lurus dan penuh cahaya keindahan yang diridhoi Allah SWT yaitu jalan menuju surga-Nya yang penuh dengn rahmat dan barokah

Penulis menyadari bahwa banyak pihak yang telah berpartisipasi dan membantu dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Untuk itu, iringan do'a dan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya penulis sampaikan, utamanya kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU., DSc selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika.

4. Sri Harini, M,Si, selaku Dosen Pembimbing I yang telah memberikan bimbingan, arahan dan motivasi, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
5. Abdul Aziz, M.Si, selaku Dosen Pembimbing II yang telah banyak member petunjuk, saran-saran dan arahan serta bersedia meluangkan waktu dalam penyusunan skripsi ini.
6. Segenap Keluarga Besar Dosen Matematika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang dan semua staf yang tidak bisa penulis sebutkan satu persatu.
7. Kedua orang tua penulis tercinta, Bapak dan Ibu, dan kakak-kakak serta adik juga seluruh keluarga besar penulis yang telah mendo'akan, memberikan semangat dan kasih sayangnya.
8. Abah Yahya Dja'far, MA dan Ibu Syafiah, MA yang telah memberikan kesempatan kepada penulis untuk menimba ilmu dan pengalaman di PPP. Al-Hikmah Al-Fathimiyyah (AHAF).
9. Teman-teman jurusan Matematika angkatan 2004 yang telah banyak memberi semangat dan memotivasi penulis untuk segera menyelesaikan penulisan skripsi ini.
10. Teman-teman AHAF semua, terkhusus untuk Ainur, Didik, Isnul, Lina, Nita dan Irma trimakasih banyak atas bantuannya, tidak lupa juga Mbak Inay untuk semangat dan motivasinya.
11. Semua pihak dan para sahabat yang tak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Tiada kata yang patut diucapkan selain ucapan terimakasih yang sebesar-besarnya dan do'a semoga amal baik mereka mendapat ridho dari Allah SWT. Penulis menyadari akan banyaknya kekurangan dalam penulisan skripsi ini dan semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi diri penulis dan semua pembaca. Amin.

Malang, 16 September 2009

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

\

ABSTRAK

Ainun, Siti. 2009. **Penggunaan Metode Strassen Untuk Menentukan Hasil Perkalian Matriks Persegi Ordo n.** Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: (I) Sri Harini, M.Si., (II) Abdul Aziz, M.Si.

Kata kunci: Matriks, Perkalian Matriks, Metode Strassen, *Divide and conquer*.

Perkalian matriks merupakan salah satu masalah utama dan merupakan operasi yang penting dalam perhitungan matriks. Operasi perkalian pada matriks sering digunakan untuk mencari solusi sistem persamaan linear dan mengatasi permasalahan *linear programming*. Dalam skripsi ini akan dibahas langkah-langkah penyelesaian perkalian matriks dengan menggunakan metode Strassen. Metode Strassen berguna untuk mengurangi kompleksitas suatu perkalian matriks. Kompleksitas menggambarkan unjuk kerja dari suatu metode dan disimbolkan dengan O(n).

Untuk matriks persegi yang berukuran 2 x 2, perkalian matriks lebih mudah diselesaikan karena melibatkan perhitungan sederhana. Jika matriks persegi yang berukuran n x n dengan n > 2, maka perkalian matriks akan melibatkan perhitungan yang rumit. Oleh karena itu, dibutuhkan suatu metode yang tepat untuk mengatasi permasalahan tersebut. Metode Strassen merupakan suatu metode yang dapat dipergunakan untuk mengatasi masalah perkalian matriks persegi berukuran lebih dari 2 x 2. Metode Strassen ini menggunakan prinsip divide and conquer, yaitu suatu matriks dibagi menjadi beberapa matriks, diselesaikan kemudian digabungkan dan menggunakan landasan dasar matriks sebagai kombinasi linear, yang menghasilkan 7 perkalian skalar dan 18 penjumlahan skalar sebagai pemecahan masalah.

Adapun langkah-langkah yang dilakukan dalam menyelesaikan perkalian matriks dengan metode Strassen adalah sebagai berikut; (1) Mempartisi matriks A dan B menjadi 4 sub matriks yang sama, (2) Dengan menggunakan penjumlahan dan pengurangan matriks, dilakukan penghitungan 14 matriks, yaitu A_i dan B_i , untuk i = 1, 2, 3, …, 7, (3) Menghitung tujuh matriks $P = A_iB_i$, untuk i = 1, 2, 3, …, 7. Jika hasil dari $P=A_iB_i$, untuk i = 1, 2, 3, …, 7 masih berupa perkalian matriks maka langkah 1 sampai dengan 3 diulangi lagi, dan (4) Dengan menggunakan hasil submatriks P_1, P_2, P_3, …, P_i dapat dihitung hasil dari matriks C = AB.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Matriks adalah suatu kumpulan angka-angka (sering disebut elemen-elemen) yang disusun menurut baris dan kolom sehingga berbentuk empat persegi panjng, dimana panjangnya dan lebarnya ditunjukkan oleh banyaknya kolom-kolom dan baris-baris (Supranto, 2003:3). Matriks banyak sekali kegunaannya dalam memecahkan banyak persoalan dan memudahkan di dalam pembuatan analisis-analisis yang mencakup hubungan antara variabel-variabel, salah satunya untuk menyelesaikan sistem persamaan linear. Dengan menggunakan persamaan matriks, suatu bentuk sistem persamaan linear akan lebih sederhana dalam penyelesaiannya dan lebih mudah dalam mencari pemecahannya.

Sebagaimana halnya operasi matematis pada bilangan nyata, pada matriks juga berlaku operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian. Perkalian matriks merupakan salah satu masalah utama dan merupakan operasi yang penting dalam perhitungan matriks. Operasi perkalian pada matriks sering digunakan untuk memecahkan masalah yang berkaitan dengan dunia nyata, terutama untuk kepentingan sains dan rekayasa perangkat lunak, misalnya digunakan sebagai komposisi transformasi dalam proses pemrograman, untuk operasional transformasi pada objek gambar 2 dimensi dan gambar 3 dimensi dalam pembuatan grafik komputer, juga digunakan untuk mencari *market share* setiap label produk di periode yang akan datang pada masalah manajemen marketing dan masih banyak lagi manfaat dari perkalian matriks ini. Contoh lain misalnya pada sistem persamaan linear juga dapat dicari solusinya dengan menggunakan perkalian matriks ini. Selain itu, untuk mengatasi permasalahan linear programing juga dapat menggunakan perkalian matriks.

Jika A = (a_{ij}) adalah sebuah matriks m x n dan B = (b_{ij}) adalah matriks n x r, maka hasil kali AB = C = (c_{ij}) adalah matriks m x n yang entri-entrinya didefinisikan oleh:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{in} b_{nj}, i = 1,2, \dots, m; j = 1,2, \dots, p$$

Untuk matriks persegi yang berukuran 2 x 2, perkalian matriks lebih mudah diselesaikan karena melibatkan perhitungan sederhana. Jika matriks persegi yang berukuran n x n dengan n > 2, maka perkalian matriks akan melibatkan perhitungan yang rumit. Oleh karena itu, dibutuhkan suatu metode yang tepat untuk mengatasi permasalahan tersebut.

Metode Strassen merupakan suatu metode yang dapat dipergunakan untuk mengatasi masalah perkalian matriks persegi berukuran lebih dari 2 x 2. Metode Strassen ini menggunakan prinsip divide and conquer, yaitu suatu matriks dibagi menjadi beberapa matriks, diselesaikan kemudian digabungkan. Perkalian ini didasarkan pada perkalian matriks berukuran 2 x 2 yang terdiri dari 7 perkalian skalar dan 18 penjumlahan skalar.

Metode Strassen (Divide and Conquer) memberikan dua keuntungan. Pertama, metode ini menyediakan pendekatan yang sederhana untuk menyelesaikan masalah yang secara konseptual sulit. Kedua, dapat secara substansial mengurangi biaya komputasi. Perkalian matriks dengan metode Strassen mempunyai kompleksitas yang lebih bagus daripada kompleksitas perkalian matriks dengan metode konvensional.

Penggunaan metode Strassen dalam penyelesaian masalah perkalian matriks menunjukkan tentang bagaimana penerapan suatu bagian digunakan untuk menyelesaikan atau memecahkan suatu permasalahan bagian yang lain. Mengenai hal ini tergambarkan dalam Al-qur'an sebagaimana dijelaskan oleh Allah dalam firmanNya surat al-Furqan ayat 2, berikut:

....وَخَلَقَ كُلَّ شَىْءٍ فَقَدَّرَهُۥ تَقْدِيرًا ﴿٢﴾

Artinya: "…………*dan Dia telah menciptakan segala sesuatu, dan Dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya".[QS. Al-Furqan:2]*

Ayat tersebut diatas mengandung maksud bahwa, segala sesuatu yang dijadikan Tuhan diberi-Nya perlengkapan-perlengkapan dan persiapan-persiapan, sesuai dengan naluri, sifat-sifat dan fungsinya masing-masing dalam hidup. Demikian juga dalam ilmu matematika dalam penulisan ini pada materi metode Strassen yang diaplikasikan pada penyelesaian masalah perkalian matriks.

Konsep penggunaan metode Strassen dalam penyelesaian masalah perkalian matriks, menunjukkan juga tentang bagaimana suatu ilmu pengetahuan yang digunakan untuk membantu mempermudah dalam menyelesaikan atau memecahkan permasalahan yang ada dalam kehidupan manusia.

Allah berfirman dalam surat Al-Baqarah ayat 185:

يُرِيدُ ٱللَّهُ بِكُمُ ٱلۡيُسۡرَ وَلَا يُرِيدُ بِكُمُ ٱلۡعُسۡرَ...........

Artinya: "*Allah menghendaki kemudahan bagimu, dan tidak menghendaki kesukaran bagimu*"

Ayat diatas menunjukkan bahwa Allah menghendaki kemudahan bagi manusia. Dengan demikian, jika manusia menemui suatu kesulitan, maka akan ada solusi untuk menyelesaikan kesulitan tersebut.

Berdasarkan latar belakang tersebut maka dalam pembahasan skripsi ini maka penulis tertarik untuk mengkaji dan menelaah tentang masalah tersebut dengan judul "***Penggunaan Metode Strassen untuk Menentukan Hasil Perkalian Matriks Persegi Ordo n***"

1.2 Rumusan Masalah

Bagaimana penyelesaian perkalian matriks persegi ordo n dengan menggunakan metode Strassen ?

1.3 Tujuan penulisan

Sesuai dengan rumusan masalah, maka tujuan penulisan skripsi ini yaitu menjelaskan langkah-langkah penggunaan metode Strassen dalam penyelesaian perkalian matriks persegi ordo n.

1.4 Batasan Masalah

Dalam penelitian ini, permasalahan dibatasi pada matriks persegi ordo n dengan $n = 2^m$, dan $m \in \mathbb{N}$ dengan $\mathbb{N}$ adalah bilangan asli.

1.5 Manfaat penulisan

Adapun manfaat yang dapat di peroleh dari teknik perkalian matriks dengan menggunakan metode Strassen yaitu:

1. Memperluas wawasan tentang penyelesaian perkalian matriks baik bagi penulis maupun para pembaca.
2. Memberikan informasi kepada pembaca, bahwa ada metode lain yang dapat digunakan dalam mencari hasil perkalian matriks, khususnya matriks persegi ordo n dengan $n=2^m$, $m \in \mathbb{N}$).
3. Meningkatkan pengetahuan pembaca mengenai teknik-teknik perkalian matriks.
4. Sebagai literatur penunjang khususnya bagi mahasiswa matematika.

1.6 Metode Pembahasan

Dalam penulisan tugas akhir ini penulis menggunakan metode kajian pustaka (studi literatur), yaitu penelitian yang bertujuan untuk mengumpulkan data dan informasi dengan bantuan bermacam-macam material yang terdapat di ruang perpustakaan, seperti: buku-buku, jurnal, dokumentasi, catatan, dan juga internet.

Dalam penulisan ini, langkah-langkah umum yang dilakukan penulis adalah sebagai berikut:

1. Merumuskan masalah. Membuat rancangan terlebih dahulu mengenai permasalahan yang akan dibahas.

2. Mengumpulkan berbagai literatur yang berhubungan dengan permasalahan yang akan dibahas dengan cara membaca dan memahami literatur-literatur yang berkaitan. Dalam hal ini, literatur yang digunakan berupa buku-buku dan jurnal-jurnal yang berkaitan dengan masalah perkalian matriks dan metode Strassen.
3. Menyelesaikan dan menganalisis permasalahan yang telah diperoleh dengan langkah-langkah sebagai berikut: melakukan partisi matriks menjadi sub-sub matriks yang sama, selanjutnya melakukan operasi penjumlahan dan pengurangan matriks dan dilanjutkan dengan menghitung tujuh matriks $P_i = A_i B_i$ untuk $i = 1, 2, 3, \ldots, 7$. Melakukan pengulangan langkah-langkah tersebut, bila hasil yang didapat masih berupa perkalian matriks. Langkah selanjutnya, hasil dari matriks $C = AB$ barulah dapat dihitung dengan menggunakan sub-sub matriks $P_1, P_2, \ldots, P_7$ yang telah didapat, dan yang terakhir menyertakan/ memilih contoh yang relevan dan berkaitan dengan permasalahan yang dibahas.
4. Merumuskan kesimpulan dari hasil analisis contoh yang telah dilakukan, dimana kesimpulan ini merupakan jawaban singkat dari permasalahan yang telah dikemukakan dalam pembahasan.

1.7 Sistematika Penulisan

Dalam skripsi ini, penulis menggunakan sistematika penulisan sebagai berikut:

BAB I. PENDAHULUAN: Pada bab ini mencakup mengenai latar belakang masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, asumsi dan batasan masalah, manfaat penelitian, metode pembahasan dan sistematika penulisan.

BAB II. KAJIAN TEORI: Pada bab ini dibahas mengenai konsep-konsep (teori-teori) yang mendukung bagian pembahasan masalah. Konsep-konsep tersebut antara lain meliputi Pengertian Matriks, Operasi Aljabar dan Sifat-sifat Operasi Matriks, Macam-macam Matriks, Matriks Bagian (Sub Matriks), Partisi Matriks, Perkalian Matriks Partisi (Blok), Perkalian Matriks dengan Kolom dan dengan Baris, Matriks sebagai Kombinasi linear, Metode Strassen dan Kajian Al-Qur'an tentang Kemudahan pada Penggunaan Metode Strassen untuk Menentukan Hasil Perkalian Matriks Persegi.

BAB III. PEMBAHASAN: Pada bab ini berisi tentang pembahasan penelitian yang didukung dengan berbagai literatur yang ada.

BAB IV. PENUTUP: Pada bab ini berisi tentang kesimpulan dari bab-bab sebelumnya serta saran yang berkaitan dengan kajian ini.

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Pengertian Matriks

Matriks ialah suatu kumpulan angka-angka (sering disebut elemen-elemen) yang disusun menurut baris dan kolom sehingga berbentuk empat persegi panjang, dimana panjangnya dan lebarnya ditunjukkan oleh banyaknya kolom-kolom dan baris-baris.

Apabila suatu matriks A terdiri dari m baris dan n kolom, maka matriks A bisa ditulis sebagai berikut:

$$A_{\square\, x\, n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & a_{\;n} \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & a_{mn} \end{bmatrix} = (a_{\mathrm{ij}}),\ i = 1, 2, ..., m \text{ dan } j = 1, 2, \ldots, n$$

a_{ij} merupakan elemen matriks A dari baris i dan kolom j, i dan j dinamakan indeks (subscript), yaitu petunjuk letak (posisi) bagi setiap elemen. Indeks i dan j menunjukkan bahwa elemen a berasal dari baris i dan kolom j.

Contoh: a_{11} merupakan elemen matriks A dari baris 1 dan kolom 1.

(Supranto, 2003:3)

2.2 Operasi Aljabar Matriks

a. Perkalian Skalar dengan suatu Matriks

Jika A suatu matriks dan α suatu skalar, maka αA adalah matriks yang terbentuk oleh perkalian masing-masing entri dari A dengan α. Jika A suatu matriks m x n dan α suatu skalar, maka αA adalah matriks m x n yang entri ke-i j nya adalah αa_{ij}.

(Leon, 2001:30)

Contoh:

$$\text{Jika } A = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}, \text{ maka } \frac{1}{2}A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

b. Penjumlahan dan Pengurangan Dua Matriks

Penjumlahan dua matriks A dan B dapat berlangsung jika kedua matriks itu berordo sama. Matriks-matriks yang demikian disebut matriks-matriks yang sesuai untuk penjumlahan. Jumlah dua matriks adalah matriks lain yang berordo sama yang elemen-elemennya merupakan jumlah dari elemen-elemen yang bersesuaian dari kedua matriks asal.

(Gere, 1987:14)

Jika $A = [a_{ij}]$ dan $B = [b_{ij}]$ dua matriks m x n, maka jumlah (selisih)-nya, $A \pm B$, didefinisikan sebagai matriks $C = [c_{ij}]$, m x n, dengan tiap elemen C adalah jumlah (selisih) elemen A dan B yang seletak. Jadi, $A \pm B = C = [c_{ij}] = [a_{ij\pm} b_{ij}]$.

(Ayres, 1984:2)

Contoh:

Jika $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ maka

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+2 & 2+2 & 0+2 \\ 2+0 & 3+3 & 4+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 5 \end{bmatrix} \text{ dan}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 1-2 & 2-2 & 0-2 \\ 2-0 & 3-3 & 4-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

c. Perkalian Dua Matriks

Jika A adalah sebuah matriks m x r dan B adalah sebuah matriks r x n, maka hasil kali AB adalah matriks m x n yang anggota-anggotanya didefinisikan sebagai berikut. Untuk mencari anggota dalam baris i dan kolom j dari AB, pilih baris i dari matriks A dan kolom j dari matriks B. Kalikan anggota-anggota yang berpadanan dari baris dan kolom secara bersama-sama dan kemudian jumlahkan hasil kalinya.

Definisi perkalian matriks mensyaratkan bahwa jumlah kolom faktor pertama A sama dengan jumlah baris faktor kedua B untuk membentuk hasil kali AB.

(Anton, 2000:49)

Contoh:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 10 \end{bmatrix}$$

1 x 3 3 x 2 = 1 x 2 $\longrightarrow$ m x r r x n = m x n

Anggota hasil kali dari AB dihitung sebagai berikut.

(1.2) + (2.1) + (3.3) = 13

(1.3) + (2.2) + (3.1) = 10

2.3 Sifat-Sifat Operasi Matriks

Dengan asumsi bahwa ukuran matriks-matriks dibawah ini adalah sedemikian sehingga operasi yang ditunjukkan bisa dilakukan, maka sifat-sifat berikut ini adalah sahih:

(a) A + B = B + A (hukum komutatif untuk penjumlahan)

(b) A + (B + C) = (A + B) + C (hukum assosiatif untuk penjumlahan)

(c) A(BC) = (AB)C (hukum assosiatif untuk perkalian)

(d) A(B + C) = AB + AC (hukum distributif kiri)

(e) (B + C)A = BA + CA (hukum distributif kanan)

(f) A(B - C) = AB - AC

(g) (B - C)A = BA – CA

(h) a(B + C) = aB + aC

(i) a(B - C) = aB – aC

(j) (a + b)C = aC + bC

(k) (a - b)C = aC – bC

(l) a(bC) = (ab)C

(m) a(BC) = (aB)C

(n) $A + 0 = 0 + A = A$

(o) $A - A = 0$

(p) 0 – A = -A

(q) A0 = 0; 0A = 0

(Anton, 2000:60)

2.4 Macam-macam Matriks

a. Matriks Persegi, ialah suatu matriks dimana banyaknya baris sama dengan banyaknya kolom (m = n). Apabila m = n, maka matriks A disebut matriks persegi order n.

Contoh: m = n = 2 $\quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$

b. Matriks Identitas, ialah suatu matriks dimana elemen-elemennya mempunyai nilai 1 pada diagonal pokok dan 0 pada tempat-tempat lain di luar diagonal pokok (diagonal dari kiri atas ke kanan - bawah).

Jadi kalau matriks A = (a_{ij}) dengan i = j = 1,2, …., n

apabila $a_{ij} = 1$ untuk i = j

$a_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$

maka matriks A disebut matriks identitas dan biasanya diberi simbol I_n.

Contoh: $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

c. Matriks Diagonal, ialah suatu matriks dimana semua elemen di luar diagonal pokok mempunyai nilai 0 dan paling tidak satu elemen pada diagonal pokok ≠ 0, biasanya diberi symbol D.

Contoh: $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

d. Matriks Skalar. Skalar ialah suatu bilangan konstan. Kalau k suatu bilangan konstan, maka hasil kali kI dinamakan Matriks Skalar.

Contoh: k = 4 $4I_3 = 4\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$

e. Matriks Simetris. Apabila matriks A = (a_{ij}); dengan i,j = 1,2, …., n dan $a_{ij} = a_{ji}$, maka A disebut matriks simetris.

Contoh: $A = \begin{bmatrix}2 & 4 & 6\\ 4 & 5 & 2\\ 6 & 2 & 3\end{bmatrix}, a_{12} = a_{21},\ a_{13} = a_{31},\ a_{23} = a_{32}$

f. Matriks Null, ialah suatu matriks dimana semua elemennya mempunyai nilai 0 (null). Biasanya diberi simbol $\underline{0}$, dibaca matriks nol.

Contoh: $\underline{0} = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

(Supranto, 2003:8)

2.5 Matriks Bagian (Sub Matriks)

Yang dimaksud dengan sub matriks dari matriks A ialah sebarang matriks yang diperoleh dari A melalui pembuangan sebagian baris atau kolom matriks A. Misalnya, matriks 5 x 5

$$A = \begin{bmatrix}1 & 3 & 7 & 4 & 2\\ 3 & 4 & 6 & 5 & 0\\ 8 & 0 & 2 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 2 & 4 & 1\\ 4 & 6 & 7 & 2 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}$$

dengan

$$A_{11} = \begin{bmatrix}1 & 3 & 7\\ 3 & 4 & 6\\ 8 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

adalah suatu sub matriks dari matriks A yang berukuran 3 x 3, dan

$$A_{22} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

adalah suatu sub matriks dari matriks A yang berukuran 2 x 2.

(Cullen, 1992:50)

2.6 Partisi Matriks

Sebuah matriks dapat dibagi atau *dipartisi* menjadi matriks-matriks yang lebih kecil dengan menyelipkan garis horisontal dan vertikal di antara baris dan kolom yang ditentukan.

Contoh;

1. Sebuah partisi A menjadi empat *sub-matriks* A_{11}, A_{12}, A_{21} dan A_{22}

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ \hline c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

2. Sebuah partisi A menjadi matriks-matriks baris r_1, r_2, dan r_3

$$A = \left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \hline b_{21} & a_{22} & b_{23} & b_{24} \\ \hline c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}$$

3. Sebuah partisi A menjadi matriks-matriks kolom c_1, c_2, c_3, dan c_4;

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{bmatrix}$$

(Anton, 2000:51)

Pembagian elemen-elemen matriks yang besar menjadi berbagai kelompok atau submatriks, hal ini dilakukan supaya lebih mudah penanganan matriks-matriks yang berukuran terlalu besar, yang hanya diperlukan sebagian dari matriks itu. Atau dalam keadaan di mana satu bagian dari matriks itu mempunyai arti fisis yang berbeda dengan bagian yang lain, dan diinginkan untuk memisahkan bagian itu serta menandaianya dengan simbol khusus.

(Gere, 1987:31)

2.7 Perkalian Matriks Partisi (Blok)

Syarat agar perkalian antar matriks-matriks yang disekat dapat berlangsung berbeda dengan syarat untuk penjumlahan dan pengurangan; untuk menentukan syarat ini, perhatikan matriks A yang telah dipartisi berikut:

$$A = \left[\begin{array}{ccc|cc} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} \\ \hline A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} \end{array}\right]$$

dengan submatriks $A_{11} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$ $A_{12} = \begin{pmatrix} A_{14} & A_{15} \\ A_{24} & A_{25} \\ A_{34} & A_{35} \end{pmatrix}$

$A_{21} = (A_{41} \quad A_{42} \quad A_{43})$ $A_{22} = (A_{44} \quad A_{45})$

dan bentuk matriks partisi

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & {}_{-22} \end{pmatrix}$$

anggap matriks A dikalikan dengan matriks D, yang mempunyai lima baris tetapi banyak kolomnya sembarang. Misalkan bahwa matriks D dibagi menjadi empat submatriks sebagai berikut:

$$D = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix}$$

Sesuai dengan aturan untuk perkalian matriks maka hasil kali AD adalah sebagai berikut:

$$R = AD = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_{11}D_{11} + A_{12}D_{21} & A_{11}D_{12} + A_{12}D_{22} \\ A_{21}D + A_{22}D_{21} & A_{21}D_{12} + A_{22}D_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix}$$

Untuk menentukan submatriks-submatriks R_{11}, $R_{12,}$ R_{21} dan R_{22} pada matriks R, perlu diatur agar jumlah dari hasil kali matriks; misalkan R_{11} yang sama dengan $A_{11}D_{11}$ + $A_{12}D_{21}$, dapat berlangsung. Perkalian matriks ini memerlukan syarat tertentu. Misalnya, perkalian $A_{11}D_{11}$ dapat berlangsung bila banyak kolom pada A_{11} sama dengan banyak baris pada D_{11}; perkalian $A_{12}D_{21}$ dapat berlangsung bila banyak kolom pada A_{12} sama dengan banyak baris pada D_{21}, dan demikian seterusnya untuk perkalian-perkalain yang lain. Semua syarat ini terpenuhi jika kolom matriks A disekat dengan cara yang benar-benar sama dengan baris pada matriks D. Sedangkan untuk baris matriks A dan kolom matriks D dapat disekat tanpa syarat.

Lebih jelasnya, misalnya diberikan matriks D berordo 5 x 3 berikut:

$$D = \left[\begin{array}{c|cc} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \\ \hline D_{41} & D_{42} & D_{43} \\ D_{51} & D_{52} & D_{53} \end{array}\right]$$

Supaya perkalian-kiri dengan matriks A (dengan penyekatan seperti diatas, yang disekat antara kolom ketiga dan keempat), dapat berlangsung maka matriks D harus disekat antara baris ketiga dan keempat juga. Sedangkan penyekatan kolom matriks D tidaklah penting dan boleh antara kolom pertama dan kedua (seperti diatas), atau antara kolom kedua dan ketiga, atau tidak disekat sama sekali. Cara penyekatan hasil kali matriks AD akan sama seperti baris matriks A dan kolom matriks D.

Jadi, perkalian antara dua matriks yang disekat dan telah memenuhi persyaratan untuk perkalian dapat diselesaikan dengan mengenakan peraturan perkalian matriks pada submatriks. Dengan cara ini submatriks dari hasil kali matriks dapat dihitung. Sehingga, hasil akhirnya akan sama dengan jika matriks-matriks mula-mula dikalikan langsung tanpa disekat lebih dahulu.

(Gere, 1987:33)

2.8 Perkalian Matriks dengan Kolom dan dengan Baris

Mendapatkan baris atau kolom tertentu dari suatu hasil kali matriks AB tanpa menghitung keseluruhan hasil kalinya dapat diperoleh dengan menggunakan hasil-hasil berikut:

matriks kolom ke-j dari AB = A[matriks kolom ke-j dari B] …………(i)

matriks baris ke-i dari AB = [matriks baris ke-i dari A]B ……………(ii)

Contoh:

Misalnya terdapat matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}$,

maka matriks kolom kedua dari AB dapat diperoleh dari (i) dengan perhitungan

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix}}_{\text{Kolom kedua B}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 27 \\ -4 \end{bmatrix}}_{\text{Kolom kedua AB}}$$

dan dari (ii) matriks baris pertama dari AB bisa diperoleh dengan perhitungan

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \end{bmatrix}$$

Baris pertama A   Baris kedua AB

Jika $a_1, a_2, \ldots, a_m$ menyatakan matriks-matriks baris dari A dan $b_1, b_2, \ldots, b_n$ menyatakan matriks-matriks kolom dari B, maka dari rumus (i) dan (ii) bisa didapatkan

$$AB = A[b_1 \vdots b_2 \vdots \cdots \vdots b_e] = [Ab_1 \vdots Ab_2 \vdots \cdots \vdots Ab_n] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(iii)}$$

(*AB dihitung kolom per kolom*)

$$AB = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} a_1B \\ a_2B \\ \vdots \\ a_mB \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(iv)}$$

(AB dihitung baris perbaris)

2.9 Matriks sebagai Kombinasi linear

Jika $A_1, A_2, \ldots, A_n$ adalah matriks-matriks berukuran sama dan $c_1, c_2, \ldots, c_n$ adalah skalar, maka bentuk

$$c_1A_1 + c_2A_2 + \ldots + c_nA_n$$

disebut suatu kombinasi linear dari $A_1, A_2, \ldots, A_n$ dengan koefisien-koefisien $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Jika A, B, dan C adalah matriks- matriks berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 \\ -1 & 3 & -5 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 9 & -6 & 3 \\ 3 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

maka $2A - B + \frac{1}{3}C = 2A + (-1)B + \frac{1}{3}C$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 & -7 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 11 \end{bmatrix}$$

adalah kombinasi linear dari A, B, C dengan koefisien skalar 2, -1, dan ⅓.

(Anton, 2000:48)

Hasil kali Ax dari sebuah matriks A dengan sebuah matriks kolom x adalah juga sebuah kombinasi linear dari matriks-matriks kolom dari A dengan koefisien-koefisien yang berasal dari matriks x.

Contoh:

Hasil kali matriks
$$\underset{A}{\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}} \underset{x}{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

bisa ditulis sebagai kombinasi linear
$$2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

dan hasil kali matriks
$$\begin{bmatrix} 1 & -9 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -9 & -3 \end{bmatrix}$$

bisa ditulis sebagai kombinasi linear

$$1\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} - 9\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 & -18 & 35 \end{bmatrix}$$

Dari contoh-contoh diatas menunjukkan bahwa matriks kolom ke-j dari hasil kali AB adalah sebuah kombinasi linear dari matriks-matriks kolom A dengan koefisien-koefisien yang berasal dari kolom ke-j dari B.

(Anton, 2000:52)

Suatu matriks n x n dapat dituliskan kombinasi linear yang unik. Sebagai contoh matriks A_{2x2} dapat dituliskan kombinasi linear dari:

$$E_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Maka untuk matriks $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ juga dapat ditulis dalam bentuk kombinasi linear sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{12} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{21} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + a_{22} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan hal itu, sehingga perkalian matriks A dan B yang berukuran 2 x 2 dapat dipahami dengan cara berikut:

$$AB = (a_{11}E_0 + a_{12}E_1 + a_{21}E_2 + a_{22}E_3)(b_{11}E_0 + b_{12}E_1 + b_{21}E_2 + b_{22}E_3)$$

$$= (a_{11}b_{11})E_0E_0 + (a_{11}b_{12})E_0E_1 + (a_{11}b_{21})E_0E_2 + (a_{11}b_{22})E_0E_3 +$$
$$(a_{12}b_{11})E_1E_0 + (a_{12}b_{12})E_1E_1 + (a_{12}b_{21})E_1E_2 + (a_{12}E_{22})E_1E_3 +$$
$$(a_{21}b_{11})E_2E_0 + (a_{21}b_{12})E_2E_1 + (a_{21}b_{21})E_2E_2 + (a_{21}b_{22})E_2E_3 +$$
$$(a_{22}b_{11})E_3E_0 + (a_{22}b_{12})E_3E_1 + (a_{22}b_{21})E_3E_2 + (a_{22}b_{22})E_3E_3$$

Untuk lebih memudahkan dalam mengevaluasi pernyataan diatas, maka dapat menggunakan tabel hasil perkalian $E_iE_j, i, j = 0,1,2,3$ berikut:

Tabel 2.1 : Hasil Kali E_i E_j

	E_0	E_1	E_2	E_3
E_0	E_0	E_1	0	0
E_1	0	0	E_0	E_1
E_2	E_2	E_3	0	0
E_3	0	0	E_2	E_3

Dengan menggunakan tabel tersebut, maka hasil perkalian AB adalah:

$$AB = (a_{11}b_{11})E_0 + (a_{11}b_{12})E_1 + (a_{12}b_{21})E_0 + (a_{12}b_{22})E_1 + (a_{21}b_{11})E_2 + (a_{21}b_{12})E_3 + (a_{22}b_{21})E_2 + (a_{22}b_{22})E_3$$

$$= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})E_0 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})E_1 + (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})E_2 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})E_3$$

Sehingga matriks C yang merupakan hasil dari perkalian matriks A dan B tersebut diatas dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$C = (c_{11}E_0 + c_{12}E_1 + c_{21}E_2 + c_{22}E_3)$$

(Klappenecker)

2.10 Metode Strassen

Metode Strassen merupakan suatu metode yang menggunakan prinsip dasar *divide and conquer*, yaitu dalam menyelesaikan masalah-masalah yang besar, dilakukan dengan membagi (memecah) menjadi bagian yang lebih kecil dan menggunakan sebuah solusi untuk menyelesaikan problem awal. Dengan fase sebagai berikut:

Divide: membagi masalah menjadi beberapa sub-masalah yang memiliki kemiripan dengan masalah semula namun berukuran lebih kecil (idealnya berukuran hampir sama),

Conquer: memecahkan (menyelesaikan) masing-masing sub-masalah (secara rekursif), dan

Combine: menggabungkan solusi masing-masing sub-masalah sehingga membentuk solusi masalah semula.

Obyek permasalahan yang dibagi adalah masukan berukuran *n*, bisa berupa tabel (larik), matriks, eksponen, dan sebagainya, bergantung pada masalahnya. Tiap-tiap sub-masalah mempunyai karakteristik yang sama (*the same type*) dengan karakteristik masalah asal.

Sebagai contoh gambaran penggunaan metode ini misalnya pada persoalan minimum dan maksimum (MinMaks). Misalnya diketahui tabel *A* yang berukuran *n* berisi elemen-elemen nilai *integer* berikut.

3 10 19 5 17 1 31 2 20

Ide dasar algoritma secara *Divide and Conquer* :

3 10 19 5 17 1 31 2 20

DIVIDE

3 10 19 5 | 17 1 31 2 20

SOLVE:Tentukan min &

maks pada tiap bagian

3 10 19 5 | 17 1 31 2 20

min = 3 | min =1

maks =19 | maks =20

COMBINE

3 10 19 5 17 1 31 2 20

min =1

mak =20

(Munir, 2004)

Metode Strassen merupakan sebuah metode yang sangat berguna dalam penggunaannya untuk matriks yang berukuran besar. Metode ini menggunakan pendekatan yang sama sekali berbeda dengan permasalahan perkalian matriks dengan matriks biasa. Perkalian dengan metode ini didasarkan pada perkalian blok matriks berukuran 2 x 2 yang terdiri dari 7 perkalian skalar dan 18 penjumlahan skalar

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

dimana tiap blok matriksnya merupakan persegi. Dalam perkalian matriks biasa, $C_{ij} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j}$, ada 8 perkalian dan 4 penjumlahan.

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

Strassen (1969) telah menunjukkan bagaimana caranya untuk mengkomputasi C dengan hanya 7 perkalian dan 18 penjumlahan:

$P_1 = (a_{11} + a_{22})(b_{11} + b_{22})$

$P_2 = (a_{21} + a_{22})\, b_{11}$

$P_3 = a_{11}(b_{12} - b_{22})$

$P_4 = a_{22}(b_{21} - b_{11})$

$P_5 = (a_{11} + a_{12})\, b_{22}$

$P_6 = (a_{21} - a_{11})(b_{11} + b_{12})$

$P_7 = (a_{12} - a_{22})(b_{21} + b_{22})$

dengan,

$C_{11} = P_1+P_4–P_5+P_7$

$C_{12} = P_3+P_5$

$C_{21} = P_2+P_4$

$C_{22} = P_1+P_3-P_2+P_6$

(Strassen, 1969: 354)

2.11 Kajian Al-Qur'an tentang Kemudahan pada Penggunaan Metode Strassen dalam Penyelesaian Perkalian Matriks Persegi.

Penggunaan metode Strassen dalam penyelesaian masalah perkalian matriks selain menunjukkan tentang bagaimana penerapan suatu bagian digunakan untuk menyelesaikan/ memecahkan suatu permasalahan dari bagian lain, juga menunjukkan tentang bagaimana suatu ilmu pengetahuan yang digunakan untuk membantu mempermudah dalam menyelesaikan permasalahan yang ada dalam kehidupan manusia.

Allah menghendaki kemudahan bagi manusia, sehingga Allah akan memberikan kemudahan atas kesulitan yang dihadapi manusia. Oleh karena itu, setiap masalah/ kesulitan dalam kehidupan, pasti akan ada pemecahannya/ solusinya. Hanya saja, manusia sebagai makhluk yang serba terbatas terkadang belum mampu menemukan solusi dari permasalahan yang ada. Berkenaan dengan gambaran tersebut diatas, Allah telah banyak berfirman dalam beberapa surat dalam Kalam-Nya, yakni di antaranya dalam Al-Qur'an surat Al-Baqarah ayat 185, Al-Insyira ayat 6 dan At-Thalaq ayat 4 berikut:

يُرِيدُ ٱللَّهُ بِكُمُ ٱلۡيُسۡرَ وَلَا يُرِيدُ بِكُمُ ٱلۡعُسۡرَ...........

Artinya: "*Allah menghendaki kemudahan bagimu, dan tidak menghendaki kesukaran bagimu*"

إِنَّ مَعَ ٱلۡعُسۡرِ يُسۡرٗا ٦

Artinya: "*Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan*"

..........وَمَن يَتَّقِ ٱللَّهَ يَجۡعَل لَّهُۥ مِنۡ أَمۡرِهِۦ يُسۡرٗا ٤

Artinya: "*….dan barang -siapa yang bertakwa kepada Allah, niscaya Allah menjadikan baginya kemudahan dalam urusannya*"

Kemudahan yang diperoleh seseorang, tentunya tidak terlepas karena adanya suatu perantara. Perantara yang dimaksud dapat berupa sesuatu yang berwujud nyata (misalnya benda-benda) maupun sesuatu yang tidak berwujud (misalnya ilmu pengetahuan).

Akal merupakan pemberian Allah yang hanya dimiliki oleh manusia dan tidak bagi makhluk yang lain. Akal adalah suatu daya pikir untuk berusaha menempatkan sesuatu pada tempatnya, supaya terhindar dari malapetaka atau suatu nilai kehinaan. Yaitu dengan keterangan, bahwa makhluk yang berakal harus bisa berfikir, bersikap dan berbuat atau berkata kearah yang benar dan tepat. Perangkat hidup ini pada dasarnya harus dilengkapi dengan sarana penunjang lainnya guna mencapai kesuksesan di dalam menjalankan tugasnya, yaitu dengan adanya bimbingan hidayah dari sang penciptanya yakni Allah SWT. Meski tanpa bimbingan hidayah sebenarnya akal tetap berfungsi, namun dalam jalan yang sesat dan menyesatkan.

Manusia diberi akal oleh Allah, sehinga mereka harus menggunakan nikmat Allah tersebut untuk hal-hal yang bermanfaat. Dengan nikmat yang telah diberikan allah tersebut, harus berusaha dengan sungguh dan yakin setiap permasalahan pasti ada selesainnya. Sebagaimana yang telah difirmankan dalam surat Al-Baqarah ayat 185, Al-Insyira ayat 6 dan At-Thalaq ayat 4 diatas.

Dari beberapa ayat tersebut di atas, telah jelas bahwa Allah akan memberi kemudahan setelah kesulitan, asalkan manusia tetap berusaha. Kaitannya dengan permasalahan ini, bahwa dalam persoalan matematika, permasalahan yang harus dikerjakan dengan sungguh-sungguh dan memilih metode yang tepat untuk digunakan, sehingga akan didapatkan selesaian dengan mudah.

Dengan sarana akal yang diberikan Allah, sudah seharusnya manusia menggunakan untuk mempelajari pengetahuan, yang pada akhirnya dengan ilmu pengetahuan yang dimiliki diharapkan dapat digunakan untuk membantu dalam memecahkan permasalahan yang ada dalam kehidupannya. Agama islam banyak memberikan penegasan mengenai ilmu pengetahuan baik secara nyata maupun secara tersamar, seperti yang tersebut dalam surat al-Mujadalah ayat 11 sebagai berikut:

.......يَرۡفَعِ ٱللَّهُ ٱلَّذِينَ ءَامَنُواْ مِنكُمۡ وَٱلَّذِينَ أُوتُواْ ٱلۡعِلۡمَ دَرَجَٰتٖ

Artinya: "*Allah akan meninggikan orang-orang yang beriman di antaramu dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat*"

Ayat ini membagi kaum beriman kepada dua kelompok besar, yang pertama sekedar beriman dan beramal saleh, dan yang kedua yang beriman dan beramal saleh serta memiliki pengetahuan. Derajat kelompok kedua ini menjadi lebih tinggi bukan saja karena nilai ilmu yang disandangnya, tetapi juga amal dan pengajarannya kepada pihak lain baik secara lisan atau tulisan maupun keteladanan. Ilmu yang dimaksud oleh ayat ini bukan saja ilmu agama, tetapi ilmu apapun yang bermanfaat.

(Shihab, 2002:79-80)

Orang berilmu pengetahuan berarti menguasai ilmu dan memiliki kemampuan untuk mendapatkan dan menjelaskannya. Untuk mendapatkan ilmu pengetahuan, diperlukan antara lain adanya sarana tertentu, dan dalam hal ini manusia telah dikaruniai Allah akal sebagai sarana untuk "berfikir". Dengan akal itu manusia hendaknya melakukan penalaran, berfikir, dan mempelajari tentang ilmu pengetahuan dan fenomena-fenomena alam dan memanfaatkannya sebagai sarana ibadah dan sebagai pemenuhan bagi keperluan dan kesejahteraan hidupnya. Mengenai hal ini, Allah telah berfirman dalam al-Qur'an yakni dalam surat Yunus ayat 101, berikut;

قُلِ ٱنظُرُواْ مَاذَا فِى ٱلسَّمَـٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضِ

Artinya: *Katakanlah: "Perhatikanlah apa yaag ada di langit dan di bumi*

Allah menghendaki kemudahan bagi manusia, oleh karena itu, Allah menganjurkan kepada manusia untuk menuntut ilmu. Anjuran tersebut adalah untuk kebaikan manusia sendiri, karena antara lain dengan perantara ilmu pengetahuan ini suatu kesulitan dapat diatasi. Alam semesta merupakan salah satu wujud kemudahan yang diberikan oleh Allah. Karena allah menciptakan alam semesta memang tidak dengan sia-sia, melainkan untuk kemudahan manusia juga dalam mencari ilmu. Ayat-ayat diatas menunjukkan betapa Allah sangat menekankan perintah mencari ilmu, karena dengan ilmu manusia dapat menyelesaikan berbagai kesulitan yang ditemui. Dengan ilmu pula, manusia dapat meningkatkan kualitas hidupnya.

BAB III
PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dikaji langkah-langkah dalam menyelesaikan perkalian matriks dengan metode Strassen sampai didapatkan hasil akhir dengan disertai contoh yang relevan yang mendukung penjelasan yang diberikan.

3.1 Penyelesaian Perkalian Matriks Persegi dengan Metode Strassen

Metode Strassen merupakan teknik yang menggunakan prinsip *devide and conquer*, yaitu prinsip perkalian matriks dengan membagi matriks menjadi beberapa sub matriks yang memiliki kemiripan dengan matriks semula namun berukuran lebih kecil, kemudian menyelesaikan masing-masing sub matriks dan menggabungkan solusi masing-masing sub matriks sehingga membentuk solusi masalah semula.

Perkalian matriks dengan metode Strassen didasarkan pada perkalian matriks 2 x 2, misalkan matriks;

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ dan } B\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix},$$

untuk menghitung perkalian matriks secara konvensional

$$C = AB$$

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

diperlukan 8 kali operasi perkalian dan 4 operasi penjumlahan. Dengan menggunakan metode Strassen, jumlah proses perkalian yang dibutuhkan bisa dikurangi dari 8 proses menjadi 7 proses perkalian dan menambahkan dari 4 proses penjumlahan menjadi 18 operasi penjumlahan dengan proses sebagai berikut:

$P_1 = (-a_{12} + a_{21} + a_{22})(b_{11} + b_{12} - b_{21})$

$P_2 = (a_{11} + a_{12} - a_{21} - a_{22})(b_{11} + b_{12})$

$P_3 = (-a_{21})(b_{11} - b_{21})$

$P_4 = (a_{12})(b_{22})$

$P_5 = (-a_{12} + a_{22})(-b_{11} - b_{12} + b_{21} + b_{22})$

$P_6 = (a_{11})(-b_{12})$

$P_7 = (a_{21} + a_{22})(b_{21})$

dengan

$$AB = \begin{bmatrix} P_1 + P_2 + P_6 + P_7 & P_4 - P_6 \\ -P_3 + P_7 & P_1 + P_3 + P_4 + P_5 \end{bmatrix}$$

Dimana persamaan tersebut didapat dari mensubtitusikan 7 persamaan P_i diatas kedalam c_{11}, c_{12}, c_{21}, dan c_{22}, sehingga diperoleh hasil yang sama dengan metode standar. Sebagaimana yang ditunjukkan berikut ini:

Metode ini menggunakan ide matriks kombinasi linear sebagai landasan dasar untuk pemecahan, misalkan pada penurunan 7 perkalian skalar. Pada pemecahan untuk 7 perkalian tersebut, digunakan matriks basis Ei. Dalam hal ini digunakan dua himpunan matriks basis berbeda Ai dan Bi sebagai berikut:

$$A_0 = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix},\ \ A_1 = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix}0 & 0\\-1 & 1\end{bmatrix},\ A_3 = \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\ \text{dan}$$

$$B_0 = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix},\ \ B_1 = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix},\ B_2 = \begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 0\end{bmatrix},\ B_3 = \begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}\ \ldots\ldots (3.1)$$

dari pernyataan di atas akan dibuktikan bahwa $A_0,\ldots\ldots, A_3$ adalah suatu basis, penghitungan dapat ditunjukkan bahwa:

$E_0 = A_1$

$E_1 = A_3 - A_0 + A_1$

$E_2 = -A_2 + A_0 - A_1$

$E_3 = A_0 - A_1$

Oleh karena itu matriks 2 x 2 dapat dituliskan sebagai kombinasi linier dari A_i, i = 0, ….3, dalam hal ini dengan mensubstitusikan pernyataan di atas untuk Ei merupakan suatu kombinasi linier $\sum_{i=0}^{3} \propto E_i$. Begitu juga untuk B_i, i = 0, …, 3.

Akan ditunjukkan juga bahwa matriks-matriks A_i dan B_i diatas merentang dan bebas linear, sebagai berikut:

a. Matriks A_i

$$A_0 = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix},\ \ A_1 = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix}0 & 0\\-1 & 1\end{bmatrix},\ A_3 = \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$$

Misalkan, matriks-matriks A_i tersebut adalah anggota himpunan dari S. Untuk melihat bahwa S merentang linear, maka dapat diambil matriks sebarang berikut

$$\begin{bmatrix}\propto_0 & \propto_1\\\propto_2 & \propto_2\end{bmatrix}$$

Sehingga dapat ditulis dalam bentuk;

$$\begin{bmatrix} \propto_0 & \propto_1 \\ \propto_2 & \propto_2 \end{bmatrix} = \propto_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \propto_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \propto_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \propto_3 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \propto_0 A_0 + \propto_1 A_1 + \propto_2 A_2 + \propto_3 A_3$$

Untuk melihat bahwa S bebas linear, anggap bahwa

$$\propto_0 A_0 + \propto_1 A_1 + \propto_2 A_2 + \propto_3 A_3 = 0,$$

Yaitu,

$$\propto_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \propto_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \propto_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \propto_3 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari sini didapatkan bahwa

$$\begin{bmatrix} \propto_0 + \propto_1 & \propto_3 \\ -\propto_2 & \propto_0 + \propto_2 + \propto_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ sehinggga}$$

$$\begin{bmatrix} \propto_0 & \propto_1 \\ \propto_2 & \propto_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b. Matriks B_i

$$B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Misalkan, matriks-matriks B_i tersebut adalah anggota himpunan dari S. Untuk melihat bahwa S merentang linear, maka dapat diambil matriks sebarang berikut

$$\begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{bmatrix}$$

Sehingga dapat ditulis dalam bentuk;

$$\begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{bmatrix} = \beta_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \beta_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \beta_2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \beta_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \beta_0 B_0 + \beta_1 B_1 + \beta_2 B_2 + \beta_3 \; B_3$$

Untuk melihat bahwa S bebas linear, anggap bahwa

$$\beta_0 B_0 + \beta_1 B_1 + \beta_2 B_2 + \beta_3 \ B_3 = 0$$

Yaitu,

$$\beta_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \beta_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \beta_2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \beta_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari sini didapatkan bahwa

$$\begin{bmatrix} \beta_0 + \beta_2 + \beta_3 & -\beta_2 \\ \beta_3 & \beta_0 + \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ sehinggga}$$

$$\begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Jadi benar bahwa matriks-matriks A_i dan B_i merupakan basis, karena terbukti merentang linear yakni karena dapat ditampilkan dalam bentuk kombinasi linear, dan juga terbukti bebas linear, karena didapat nilai $\propto_0 = \propto_1 = \propto_2 = \propto_3 = 0$ dan $\beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$.

Dengan menggunakan matriks baris maka:

$$C = AB = \left(\sum_{i=0}^{3} \propto_i A_i\right)\left(\sum_{i=0}^{3} \beta_i B_i\right)$$

$$= (\propto_0 A_0 + \propto_1 A_1 + \propto_2 A_2 + \propto_3 A_3)(\beta_0 B_0 + \beta_1 B_1 + \beta_2 B_2 + \beta_3 B_3)$$

$$= (\propto_0 \beta_0) A_0 B_0 + (\propto_0 \beta_1) A_0 B_1 + (\propto_0 \beta_2) A_0 B_2 + (\propto_0 \beta_3) A_0 B_3 +$$
$$(\propto_1 \beta_0) A_1 B_0 + (\propto_1 \beta_1) A_1 B_1 + (\propto_1 \beta_2) A_1 B_2 + (\propto_1 \beta_3) A_1 B_3 +$$
$$(\propto_2 \beta_0) A_2 B_0 + (\propto_2 \beta_1) A_2 B_1 + (\propto_2 \beta_2) A_2 B_2 + (\propto_2 \beta_3) A_2 B_3 +$$
$$(\propto_3 \beta_0) A_3 B_0 + (\propto_3 \beta_1) A_3 B_1 + (\propto_3 \beta_2) A_3 B_2 + (\propto_3 \beta\hat{a}_3) A_3 B_3$$

$$= (\propto_0 \beta_0)A_0 + (\propto_0 \beta_1)B_1 + (\propto_0 \beta_2)B_2 + (\propto_0 \beta_3)B_3 + (\propto_1 \beta_0)A_1$$
$$+ (\propto_1 \beta_1)0 + (\propto_1 \beta_2)B_2 + (\propto_1 \beta_3)A_1 + (\propto_2 \beta_0)A_2 + (\propto_2 \beta_1)B_1$$
$$+ (\propto_2 \beta_2)A_2 + (\propto_2 \beta_3)0 + (\propto_3 \beta_0)A_3 + (\propto_3 \beta_1)A_3 + (\propto_3 \beta_2)0$$
$$+ (\propto_3 \beta_3)B_3$$
$$= (\propto_0 \beta_0)A_0 + (\propto_0 + \propto_2)\beta_1 B_1 + (\propto_0 + \propto_1)\beta_2 B_2$$
$$+ (\propto_0 + \propto_3)\beta_3 B_3 + \propto_1 (\beta_0 + \beta_3)A_1 + + \propto_2 (\beta_0 + \beta_2)A_2$$
$$+ \propto_3 (\beta_0 + \beta_1)A_3$$
$$= (\propto_0 \beta_0)A_0 + \propto_1 (\beta_0 + \beta_3)A_1 + \propto_2 (\beta_0 + \beta_2)A_2 + \propto_3 (\beta_0 + \beta_1)A_3$$
$$+ (\propto_0 + \propto_2)\beta_1 B_1 + (\propto_0 + \propto_1)\beta_2 B_2 + (\propto_0 + \propto_3)\beta_3 B_3$$

Untuk memudahkan dalam penghitungan maka dapat menggunakan tabel perkalian matriks A_i B_i, i = 0, ….3 berikut

Tabel 3.1 : Hasil Kali A_i B_i

	B_0	B_1	B_2	B_3
A_0	A_0	B_1	B_2	B_3
A_1	A_1	0	B_2	A_1
A_2	A_2	B_1	A_2	0
A_3	A_3	A_3	0	B_3

$$C = AB = (\propto_0 \beta_0)A_0 + (\propto_0 \beta_1)B_1 + (\propto_0 \beta_2)B_2 + (\propto_0 \beta_3)B_3 + (\propto_1 \beta_0)A_1 +$$
$$(\propto_1 \beta_1)0 + (\propto_1 \beta_2)B_2 + (\propto_1 \beta_3)A_1 + (\propto_2 \beta_0)A_2 + (\propto_2 \beta_1)B_1 +$$
$$(\propto_2 \beta_2)A_2 + (\propto_2 \beta_3)0 + (\propto_3 \beta_0)A_3 + (\propto_3 \beta_1)A_3 + (\propto_3 \beta_2)0 +$$
$$(\propto_3 \beta_3)B_3$$

$$= (\propto_0 \beta_0)A_0 + \propto_1 (\beta_0 + \beta_3)A_1 + \propto_2 (\beta_0 + \beta_2)A_2 + \propto_3 (\beta_0 + \beta_1)A_3$$
$$+ (\propto_0 + \propto_2)\beta_1 B_1 + (\propto_0 + \propto_1)\beta_2 B_2 + (\propto_0 + \propto_3)\beta_3 B_3$$

Misal

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= \propto_0 \beta_0 \\ P_2 &= \propto_1 (\beta_0 + \beta_3) \\ P_3 &= \propto_2 (\beta_0 + \beta_2) \\ P_4 &= \propto_3 (\beta_0 + \beta_1) \\ P_5 &= (\propto_0 + \propto_2)\beta_1 \\ P_6 &= (\propto_0 + \propto_1)\beta_2 \\ P_7 &= (\propto_0 + \propto_3)\beta_3 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (3.2)$$

Maka

$$C = AB = \underbrace{P_1 A_0 + P_2 A_1 + P_3 A_2 + P_4 A_3 + P_5 B_1 + P_6 B_2 + P_7 B_3}_{\text{7 perkalian skalar}} \ \ldots \ (3.3)$$

Ini berarti matriks C dapat dituliskan dibawah ini:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = P_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + P_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + P_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + P_4 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} +$$
$$P_5 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + P_6 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + P_7 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh persamaan berikut:

$$\left.\begin{aligned} C_{11} &= P_1 + P_2 + P_6 + P_7 \\ C_{12} &= P_4 - P_6 \\ C_{21} &= -P_3 + P_7 \\ C_{22} &= P_1 + P_3 + P_4 + P_5 \end{aligned}\right\} \text{8 penjumlahan skalar} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (3.3)$$

Selanjutnya koefisien $\propto_i$ ditentukan melalui persamaan (3.3) untuk matriks A sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \propto_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \propto_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \propto_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \propto_3 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh persamaan berikut:

$$\left.\begin{aligned} a_{11} &= \propto_0 + \propto_1 \\ a_{12} &= \propto_3 \\ a_{21} &= -\propto_2 \\ a_{22} &= \propto_0 + \propto_2 + \propto_3 \end{aligned}\right\} \text{5 penjumlahan skalar} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(3.5)}$$

Penyelesaian dari persamaan (3.5) menghasilkan:

$$\propto_0 = -a_{12} + a_{21} - a_{22}$$

$$\propto_1 = a_{11} + a_{12} - a_{21} - a_{22}$$

$$\propto_2 = -a_{21}$$

$$\propto_3 = a_{12}$$

Selanjutnya koefisien β_1 ditentukan melalui persamaan (3.3) untuk matriks B berikut ini:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \beta_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \beta_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \beta_2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \beta_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh persamaan berikut:

$$\left.\begin{aligned} b_{11} &= \beta_0 + \beta_2 + \beta_3 \\ b_{12} &= -\beta_2 \\ b_{21} &= \beta_3 \\ b_{22} &= \beta_0 + \beta_1 \end{aligned}\right\} \text{5 penjumlahan skalar} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(3.6)}$$

Penyelesaian dari persamaan (3.6) menghasilkan:

$\beta_0 = b_{11} + b_{12} - b_{21}$

$\beta_1 = b_{22} - b_{11} - b_{12} + b_{21}$

$\beta_2 = -b_{12}$

$\beta_3 = b_{21}$

Dengan demikian persamaan (3.2) dapat dituliskan ke dalam bentuk:

$P_1 = \propto_0 \beta_0$

$= (-a_{12} + a_{21} + a_{22})(b_{11} + b_{12} - b_{21})$

$P_2 = \propto_1 (\beta_0 + \beta_3)$

$= (a_{11} + a_{12} - a_{21} - a_{22})((b_{11} + b_{12} - b_{21}) + (b_{21})$

$= (a_{11} + a_{12} - a_{21} - a_{22})(b_{11} + b_{12})$

$P_3 = \propto_2 (\beta_0 + \beta_2)$

$= (-a_{21})((\mathrm{b}_{11} + \mathrm{b}_{12} - \mathrm{b}_{21}) + (-b_{12}))$

$= (-a_{21})(b_{11} - b_{21})$

$P_4 = \propto_3 (\beta_0 + \beta_1)$

$= (a_{12})((\,_{11} + b_{12} - b_{21}) + (-b_{11} - b_{12} + b_{21} + b_{22}))$

$= (a_{12})(b_{22})$

$P_5 = (\propto_0 + \propto_2)\beta_1$

$= ((-a_{12} + a_{21} + a_{22}) + (-a_{21}))\ (-\mathrm{b}_{11} - b_{12} + b_{21} + b_{22})$

$= (-a_{12} + a_{22})(-b_{11} - b_{12} + b_{21} + b_{22})$

$P_6 = (\propto_0 + \propto_1)\beta_2$

$= ((-a_{12} + a_{21} + a_{22}) + (a_{11} + a_{12} - a_{21} - a_{22}))\ (-b_{12})$

$= (a_{11})(-b_{12})$

$P_7 = (\propto_0 + \propto_3)\beta_3$

$= ((-a_{12} + a_{21} + a_{22}) + (a_{12}))\ (b_{21})$

$= (a_{21} + a_{22})\ (b_{12})$

Cara perkalian ini dapat dimanfaatkan untuk perkalian dua matriks persegi ordo n.

Misalkan $A = \begin{bmatrix} a_{11} & {}_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$

Selanjutnya, untuk memperoleh hasil kali C = AB dengan cara Strasssen yaitu dapat dilakukan dengan membagi matriks n x n kedalam beberapa sub matriks ukuran $\left(\frac{n}{2}\right) \times \left(\frac{n}{2}\right)$, yang memiliki kemiripan dengan matriks semula namun berukuran lebih kecil, kemudian menyelesaikan masing-masing sub matriks dengan menghitung tujuh macam matriks $\left(\frac{n}{2}\right) \times \left(\frac{n}{2}\right)$ dan menggabungkan solusi masing-masing sub matriks untuk menghasilkan solusi C.

Langkah-langkah yang dapat dilakukan untuk mendapatkan hasil kali C = AB dengan menggunakan metode Strassen adalah:

1.) Mempartisi matriks A dan B menjadi empat submatriks yang sama masing-masing $\left(\frac{n}{2}\right) \times \left(\frac{n}{2}\right)$.
2.) Dengan menggunakan penambahan dan pengurangan matriks, dilakukan penghitungan 14 matriks, yaitu A_i dan B_i , untuk i = 1, 2, 3, …, 7.
3.) Menghitung tujuh matriks $P_i = A_i B_i$, untuk i = 1, 2, 3, …, 7.
4.) Dengan menggunakan hasil submatriks P_1, P_2 , P_3 , …, P_7 dapat dihitung hasil dari matriks C = AB.

Langkah-langkah tersebut maka dapat dijelaskan sebagai berikut:

1.) Mempartisi matriks A dan B menjadi 4 submatriks yang sama masing-masing $\left(\frac{n}{2}\right) \times \left(\frac{n}{2}\right)$.

Cara melakukan perkalian secara bertahap, yaitu dengan membuat submatriks-submatriks (membuat partisinya).

$$A = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right] \qquad B = \left[\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right]$$

Dengan ukuran masing-masing sub matriks adalah $\frac{n}{2}$ dan mengganti a_{ij} dengan A_{ij} dan b_{ij} dengan B_{ij}.

2.) Dengan menggunakan penambahan dan pengurangan matriks, dilakukan penghitungan 14 matriks yaitu A_i dan B_i , untuk i = 1, 2, 3, …, 7.

$A_1 = -A_{12} + A_{21} + A_{22}$ $B_1 = B_{11} + B_{12} - B_{21}$

$A_2 = A_{11} + A_{12} - A_{21} - A_{22}$ $B_2 = B_{11} + B_{12}$

$A_3 = -A_{21}$ $B_3 = B_{11} - B_{21}$

$A_4 = A_{12}$ $B_4 = B_{22}$

$A_5 = -A_{12} + A_{22}$ $B_5 = -B_{11} - B_{12} + B_{21} + B_{22}$

$A_6 = A_{11}$ $B_6 = -B_{12}$

$A_7 = A_{21} + A_{22}$ $B_7 = B_{21}$

3.) Selanjutnya menghitung tujuh matriks $P_i = A_i B_i$, untuk i = 1, 2, 3, …, 7.

Setiap matriks P_i dapat dituliskan dalam bentuk konstruksi sebagai berikut:

$$P_i = A_i B_i$$
$$= (\propto_{i1} A_{11} + \propto_{i2} A_{12} + \propto_{i3} A_{21} + \propto_{i4} A_{22}) * (\beta_{i1} B_{11} + \beta_{i2} B_{12} + \beta_{i3} B_{21} + \beta_{i4} B_{22}).$$

Untuk setiap koefisien $\propto_{ij}$, β_{ij} didapat dari himpunan {-1, 0, 1}. Kemudian setiap hasil yang didapat dari perhitungan sub matriks A dan B dikalikan keduanya.

$$P_1 = A_1 B_1$$
$$= (-A_{12} + A_{21} + A_{22})(B_{11} + B_{12} - B_{21})$$
$$= -A_{12}B_{11} - A_{12}B_{12} + A_{12}B_{21} + A_{21}B_{11} + A_{21}B_{12} - A_{21}B_{21} + A_{22}B_{11} + A_{22}B_{12} - A_{22}B_{21}$$

$P_2 = A_2B_2$

$= (A_{11}+A_{12}-A_{21}-A_{22})(B_{11}+B_{12})$

$= A_{11}B_{11} + A_{11}B_{12} + A_{12}B_{11} + A_{12}B_{12} - A_{21}B_{11} - A_{21}B_{12} - A_{22}B_{11} - A_{22}B_{12}$

$P_3 = A_3\, B_3$

$= (-A_{21})(B_{11}-B_{21})$

$= -A_{21}B_{11} + A_{21}B_{21}$

$P_4 = A_4\, B_4$

$= A_{12}B_{22}$

$P_5 = A_5\, B_5$

$= (-A_{12} + A_{22})(-B_{11}-B_{12} + B_{21} + B_{22})$

$= (A_{12}B_{11} + A_{12}B_{12} - A_{12}B_{21} - A_{12}B_{22} - A_{22}B_{11} - A_{22}B_{12} + A_{22}B_{21} + A_{22}B_{22})$

$P_6 = A_6\, B_6$

$= A_{11}(-B_{12})$

$P_7 = A_7\, B_7$

$= (A_{21} + A_{22})\,(B_{21})$

$= (A_{21}B_{21} + A_{22}B_{21})$

Jika hasil dari $P_i = A_iB_i$, untuk i = 1, 2, 3, …, 7 masih berupa perkalian matriks maka langkah 1 sampai dengan 3 diulangi lagi. Jika pada langkah ketiga menghitung $P_i = A_iB_i$ yang hasilnya masih berupa perkalian maka dapat dituliskan simbol $\hat{P}_i$ untuk memudahkan dalam perhitungan.

4.) Dengan menggunakan hasil sub matriks $P_{1,}$ P_2, …, P_7 dapat dihitung hasil dari matriks C = AB.

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \text{ .... } (3.3)$$

Persamaan (3.3) berhubungan dengan empat persamaan lain, yaitu:

$C_{11} = A_{11}B_{11} + A_{12}B_{12}$

$C_{12} = A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22}$

$C_{21} = A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21}$

$C_{22} = A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22}$

Ketujuh hasil submatriks $P_{1,}$ P_2, …, P_7 dapat dipakai untuk menghitung hasil dari C = AB. Dengan demikian submatriks $C_{11}, C_{12}, C_{21}, C_{22}$ pada persamaan (3.2) dapat dihitung dengan:

$C_{11} = P_1 + P_2 + P_6 + P_7$

$= (-A_{12} + A_{21} + A_{22})(B_{11} + B_{12} - B_{21}) + (A_{11} + A_{12} - A_{21} - A_{22})(b_{11} + b_{12})$

$+ (A_{11})(-B_{12}) + (A_{21} + A_{22})(B_{21})$

$= (-_{12}B_{11} - A_{12}B_{12} + A_{12}B_{21} + A_{21}B_{11} + A_{21}B_{12} - A_{21}B_{21} + A_{22}B_{11} +$

$A_{22}B_{12} - A_{22}B_{21}) + (A_{11}B_{11} + A_{11}B_{12} + A_{12}B_{11} + A_{12}B_{12} - A_{21}B_{11} -$

$A_{21}B_{12} - A_{22}B_{11} - A_{22}B_{12}) - A_{11}B_{12} + (A_{21}B_{21} + A_{22}B_{21})$

$= A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21}$

$C_{12} = P_4 - P_6$

$= (A_{12})(B_{22}) - (A_{11})(-B_{12})$

$= A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22}$

$C_{21} = -P_3 + P_7$

$= -(-A_{21})(B_{11} - B_{21}) + (A_{21} + A_{22})(B_{21})$

$= (A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21})$

$C_{22} = P_1 + P_3 + P_4 + P_5$

$= (-A_{12} + A_{21} + A_{22})(B_{11} + B_{12} - B_{21}) + (-A_{21})(B_{11} - B_{21}) +$

$(A_{12})(B_{22}) + (-a_{12} + a_{22})(-b_{11} - b_{12} + b_{21} + b_{22})$

$= (-A_{12}B_{11} - A_{12}B_{12} + A_{12}B_{21} + A_{21}B_{11} + A_{21}B_{12} - A_{21}B_{21} + A_{22}B_{11} +$

$A_{22}B_{12} - A_{22}B_{21})(-A_{21}B_{11} + A_{21}B_{21}) + (A_{12}B_{22}) +$

$(A_{12}B_{11} + A_{12}B_{12} - A_{12}B_{21} - A_{12}B_{22} - A_{22}B_{11} - A_{22}B_{12} + A_{22}B_{21} +$

$A_{22}B_{22})$

$= A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22}$

Dari perhitungan tersebut maka, matriks hasil C dapat ditemukan dengan menggabungkan submatriks tersebut yang telah dihitung tersebut, yaitu:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 + P_2 + P_6 + P_7 & P_4 - P_6 \\ -P_3 + P_7 & P_1 + P_3 + P_4 + P_5 \end{bmatrix}$$

3.2 Contoh Penyelesaian Perkalian Matriks Persegi dengan Metode Strassen

Dari penjabaran rumus metode Strassen diatas, untuk lebih jelasnya, maka diberikan contoh berikut:

a. Matriks Persegi ordo 4

Misalkan terdapat matriks A_{4x4} dan matriks B_{4x4},

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 8 \\ 6 & 5 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \\ 3 & 1 & 6 & 2 \\ 5 & 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan metode Strassen AB dapat dihitung dengan langkah berikut:

Mempartisi matriks A dan B menjadi 4 buah submatriks yang sama, masing-masing $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 8 \\ \hline 6 & 5 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|cc} 5 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \\ \hline 3 & 1 & 6 & 2 \\ 5 & 4 & 4 & 3 \end{array}\right]$$

Menghitung A_i dan B_i.

$A_1 = -A_{12} + A_{21} + A_{22}$

$$= -\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

$B_1 = B_{11} + B_{12} - B_{21}$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Dengan cara yang sama, maka dapat diperoleh:

$A_2 = \begin{bmatrix} -7 & 2 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$ $\quad B_2 = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$

$A_3 = \begin{bmatrix} -6 & -5 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ $\quad B_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$

$A_4 = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$ $\quad B_4 = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

$A_5 = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$ $\quad B_5 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$

$A_6 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ $\quad B_6 = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -7 \end{bmatrix}$

$A_7 = \begin{bmatrix} 13 & 6 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$ $\quad B_7 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

Menghitung $P_i = A_iB_i$ untuk i = 1, 2, 3, …, 7 . Karena hasil dari $P_i = A_iB_i$ untuk i = 1, 2, 3, …, 7 di atas sudah berupa sub-problem yang cukup kecil dan solusinya merupakan solusi yang sederhana, maka untuk penyelesaiannya dapat dilakukan dengan metode secara langsung

$P_1 = A_1B_1$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8(4) + 0(-1) & 8(1) + 0(-5) \\ 4(4) + (-3)(-1) & 4(1) + (-3)5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 & 8 \\ 19 & -11 \end{bmatrix}$$

$P_2 = A_2B_2$

$$= \begin{bmatrix} -7 & 2 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -41 & 4 \\ 21 & 61 \end{bmatrix}$$

$P_3 = A_3B_3$

$$= \begin{bmatrix} -6 & -5 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$$

$P_4 = A_4B_4$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 54 & 28 \\ 38 & 26 \end{bmatrix}$$

$P_5 = A_5B_5$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -21 & 12 \\ -19 & 13 \end{bmatrix}$$

$P_6 = A_6B_6$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -15 \\ -18 & -31 \end{bmatrix}$$

$P_7 = A_7B_7$

$$= \begin{bmatrix} 13 & 6 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 69 & 37 \\ 40 & 25 \end{bmatrix}$$

Dari perhitungan tersebut maka, matriks hasil C dapat ditemukan dengan menggabungkan submatriks yang telah dihitung tersebut, yaitu:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 + P_2 + P_6 + P_7 & P_4 - P_6 \\ -P_3 + P_7 & P_1 + P_3 + P_4 + P_5 \end{bmatrix}$$

$C_{11} = P_1 + P_2 + P_6 + P_7$

$$= \begin{bmatrix} 32 & 8 \\ 19 & -11 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -41 & 4 \\ 21 & 61 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & -15 \\ -18 & -31 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 69 & 37 \\ 40 & 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 52 & 34 \\ 62 & 44 \end{bmatrix}$$

$C_{12} = P_4 - P_6$

$$= \begin{bmatrix} 54 & 28 \\ 38 & 26 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -8 & -15 \\ -18 & -31 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 62 & 43 \\ 56 & 57 \end{bmatrix}$$

$C_{21} = -P_3 + P_7$

$$= -\begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 69 & 37 \\ 34 & 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 61 & 27 \\ 34 & 21 \end{bmatrix}$$

$C_{22} = P_1 + P_3 + P_4 + P_5$

$$= \begin{bmatrix} 32 & 8 \\ 19 & -11 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 54 & 28 \\ 38 & 26 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -21 & 12 \\ -19 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 73 & 58 \\ 44 & 32 \end{bmatrix}$$

Jadi matriks hasil C adalah

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} 52 & 34 & 62 & 43 \\ 62 & 44 & 56 & 57 \\ \hline 61 & 27 & 73 & 58 \\ 34 & 21 & 44 & 32 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 52 & 34 & 62 & 43 \\ 62 & 44 & 56 & 57 \\ 61 & 27 & 73 & 58 \\ 34 & 21 & 44 & 32 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan perkalian konvensional:

AB = C

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 8 \\ 6 & 5 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \\ 3 & 1 & 6 & 2 \\ 5 & 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 5+2+15+30 & 1+4+5+24 & 2+6+30+24 & 1+14+10+18 \\ 15+4+3+40 & 3+8+1+32 & 6+12+6+32 & 3+28+2+24 \\ 30+5+21+5 & 6+10+7+4 & 12+15+42+4 & 6+35+14+3 \\ 5+2+12+15 & 1+4+4+12 & 2+6+24+12 & 1+14+8+9 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 52 & 34 & 62 & 43 \\ 62 & 44 & 56 & 57 \\ 61 & 27 & 73 & 58 \\ 34 & 21 & 44 & 32 \end{bmatrix}$$

Jadi, dari contoh yang diberikan diatas menunjukkan bahwa matriks ordo 4 dapat diselesaikan dengan menggunakan metode Strassen dan didapat hasil yang sama dengan metode konvensional.

b. Matriks Persegi ordo 6

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan metode Strassen AB dapat dihitung dengan langkah berikut:

Mempartisi matriks A dan B menjadi 4 buah submatriks yang sama, masing-masing $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right]\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ \hline 3 & 2 & 3 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right]$$

Menghitung A_i dan B_i.

$A_1 = -A_{12} + A_{21} + A_{22}$

$$= -\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$B_1 = B_{11} + B_{12} - B_{21}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Dengan cara yang sama, maka dapat diperoleh:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \qquad B_2 = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = -\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad B_3 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B_4 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B_6 = -\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_7 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad B_7 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Karena hasil dari $P_i = A_iB_i$ yang didapat tidak memenuhi $n = 2^m$ dengan $m \in \mathbb{N}$ atau dengan kata lain tidak terdapat m yang memenuhi $n = 2^m$, jadi, matriks ordo 6 tersebut tidak dapat diselesaikan dengan metode Strassen.

c. Matriks Persegi ordo 8

Misalkan terdapat matriks A_{8x8} dan matriks B_{8x8},

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1` & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1` & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan metode Strassen AB dapat dihitung dengan langkah berikut:

Mempartisi matriks A dan B menjadi 4 buah submatriks yang sama, masing-masing $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1` & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1` & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Menghitung A_i dan B_i.

$A_1 = -A_{12} + A_{21} + A_{22}$

$$= -\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$B_1 = B_{11} + B_{12} - B_{21}$

$$= -\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Dengan cara yang sama, maka dapat diperoleh:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = -\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_6 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B_6 = -\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_7 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad B_7 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Menghitung $P_i = A_iB_i$ untuk i = 1, 2, 3, …, 7 . Karena hasil dari $P_i = A_iB_i$ untuk i = 1, 2, 3, …, 7 yang diperoleh belum berupa sub-problem yang cukup kecil, untuk dapat dilakukan penyelesaian dengan metode secara langsung. Maka dilakukan prosedur yang sama sebagaimana langkah sebelumnya.

$$P_1 = A_1B_1$$

$$= \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$\widehat{P}_1 = (-a_{12} + a_{21} + a_{22})(b_{11} + b_{12} - b_{21})$

$$= \left(-\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2 & 2\\2 & 2\end{bmatrix}$$

Dengan cara yang sama, didapat:

$\widehat{P}_2 = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$, $\widehat{P}_3 = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$, $\widehat{P}_4 = \begin{bmatrix}2 & 2\\2 & 2\end{bmatrix}$, $\widehat{P}_5 = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$,

$\widehat{P}_6 = \begin{bmatrix}-2 & -2\\-2 & -2\end{bmatrix}$, $\widehat{P}_7 = \begin{bmatrix}4 & 4\\4 & 4\end{bmatrix}$

Jadi, $P_1 = \begin{bmatrix}\widehat{P}_1 + \widehat{P}_2 + \widehat{P}_6 + \widehat{P}_7 & \widehat{P}_4 - \widehat{P}_6\\ -\widehat{P}_3 + \widehat{P}_7 & \widehat{P}_1 + \widehat{P}_3 + \widehat{P}_4 + \widehat{P}_5\end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 4\\4 & 4\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}4 & 4\\4 & 4\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}4 & 4\\4 & 4\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}4 & 4\\4 & 4\end{bmatrix}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4 & 4 & 4 & 4\\4 & 4 & 4 & 4\\4 & 4 & 4 & 4\\4 & 4 & 4 & 4\end{bmatrix}$$

$P_2 = A_2B_2$

$$= \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 2 & 2 & 2\\2 & 2 & 2 & 2\\2 & 2 & 2 & 2\\2 & 2 & 2 & 2\end{bmatrix}$$

Jadi, $P_2 = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

$P_3 = A_3B_3$

$$= -\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Jadi, $P_3 = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

$P_4 = A_4B_4$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = P_1 = A_1B_1$$

Jadi, $P_4 = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$

$P_5 = A_5B_5$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Jadi, $P_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$P_6 = A_6B_6$

$$= \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ \hline -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

$\widehat{P}_1 = (-a_{12} + a_{21} + a_{22})(b_{11} + b_{12} - b_{21})$

$$= \left(-\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

Dengan cara yang sama, didapat:

$\widehat{P}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\widehat{P}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\widehat{P}_4 = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$, $\widehat{P}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,

$\widehat{P}_6 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, $\widehat{P}_7 = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$

Jadi, $P_6 = \begin{bmatrix} \hat{P}_1 + \hat{P}_2 + \hat{P}_6 + \hat{P}_7 & \hat{P}_4 - \hat{P}_6 \\ -\hat{P}_3 + \hat{P}_7 & \hat{P}_1 + \hat{P}_3 + \hat{P}_4 + \hat{P}_5 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -4 & -4 & -4 \\ -4 & -4 & -4 & -4 \\ -4 & -4 & -4 & -4 \\ -4 & -4 & -4 & -4 \end{bmatrix}$$

$P_7 = A_7 B_7$

$$= \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ \hline 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$\hat{P}_1 = (-a_{12} + a_{21} + a_{22})(b_{11} + b_{12} - b_{21})$

$$= \left(-\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Dengan cara yang sama, didapat:

$\hat{P}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\hat{P}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\hat{P}_4 = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$, $\hat{P}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,

$\hat{P}_6 = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$, $\hat{P}_7 = \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{bmatrix}$

Jadi, $P_7 = \begin{bmatrix} \hat{P}_1 + \hat{P}_2 + \hat{P}_6 + \hat{P}_7 & \hat{P}_4 - \hat{P}_6 \\ -\hat{P}_3 + \hat{P}_7 & \hat{P}_1 + \hat{P}_3 + \hat{P}_4 + \hat{P}_5 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 \end{bmatrix}$$

Dari perhitungan tersebut maka, matriks hasil C dapat ditemukan dengan menggabungkan submatriks yang telah dihitung tersebut, yaitu:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 + P_2 + P_6 + P_7 & P_4 - P_6 \\ -P_3 + P_7 & P_1 + P_3 + P_4 + P_5 \end{bmatrix}$$

$C_{11} = P_1 + P_2 + P_6 + P_7$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -4 & -4 & -4 \\ -4 & -4 & -4 & -4 \\ -4 & -4 & -4 & -4 \\ -4 & -4 & -4 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 \end{bmatrix}$$

$C_{12} = P_4 - P_6$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & -4 & -4 & -4 \\ -4 & -4 & -4 & -4 \\ -4 & -4 & -4 & -4 \\ -4 & -4 & -4 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 \end{bmatrix}$$

$C_{21} = -P_3 + P_7$

$$= -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 \end{bmatrix}$$

$C_{22} = P_1 + P_3 + P_4 + P_5$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 \end{bmatrix}$$

Jadi matriks hasil C adalah

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8` & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan perkalian konvensional:

AB = C

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1` & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1` & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1 & 1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1 \\ 1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1 & 1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1 \\ 1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1 & 1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1 \\ 1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1 & 1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1 \\ 1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1 & 1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1 \\ 1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1 & 1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1 \\ 1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1 & 1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1 \\ 1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1 & 1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} 1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1 & 1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1 \\ 1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1 & 1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1 \\ 1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1 & 1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1 \\ 1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1 & 1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1 \\ 1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1 & 1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1 \\ 1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1 & 1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1 \\ 1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1 & 1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1 \\ 1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1 & 1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1 & 1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1 \\ 1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1 & 1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1 \\ 1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1 & 1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1 \\ 1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1 & 1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1 \\ 1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1 & 1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1 \\ 1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1 & 1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1 \\ 1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1 & 1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1 \\ 1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1 & 1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1 \end{matrix}$$

$$\left. \begin{matrix} 1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1 & 1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1 \\ 1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1 & 1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1 \\ 1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1 & 1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1 \\ 1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1 & 1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1 \\ 1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1 & 1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1 \\ 1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1 & 1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1 \\ 1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1 & 1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1 \\ 1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1 & 1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1+1.1 \end{matrix} \right]$$

$$= \left[\begin{matrix} 1+1+1+1+1+1+1+1 & 1+1+1+1+1+1+1+1 \\ 1+1+1+1+1+1+1+1 & 1+1+1+1+1+1+1+1 \\ 1+1+1+1+1+1+1+1 & 1+1+1+1+1+1+1+1 \\ 1+1+1+1+1+1+1+1 & 1+1+1+1+1+1+1+1 \\ 1+1+1+1+1+1+1+1 & 1+1+1+1+1+1+1+1 \\ 1+1+1+1+1+1+1+1 & 1+1+1+1+1+1+1+1 \\ 1+1+1+1+1+1+1+1 & 1+1+1+1+1+1+1+1 \\ 1+1+1+1+1+1+1+1 & 1+1+1+1+1+1+1+1 \end{matrix} \right.$$

$$\begin{matrix} 1+1+1+1+1+1+1+1 & 1+1+1+1+1+1+1+1 \\ 1+1+1+1+1+1+1+1 & 1+1+1+1+1+1+1+1 \\ 1+1+1+1+1+1+1+1 & 1+1+1+1+1+1+1+1 \\ 1+1+1+1+1+1+1+1 & 1+1+1+1+1+1+1+1 \\ 1+1+1+1+1+1+1+1 & 1+1+1+1+1+1+1+1 \\ 1+1+1+1+1+1+1+1 & 1+1+1+1+1+1+1+1 \\ 1+1+1+1+1+1+1+1 & 1+1+1+1+1+1+1+1 \\ 1+1+1+1+1+1+1+1 & 1+1+1+1+1+1+1+1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1+1+1+1+1+1+1+1 & 1+1+1+1+1+1+1+1 \\ 1+1+1+1+1+1+1+1 & 1+1+1+1+1+1+1+1 \\ 1+1+1+1+1+1+1+1 & 1+1+1+1+1+1+1+1 \\ 1+1+1+1+1+1+1+1 & 1+1+1+1+1+1+1+1 \\ 1+1+1+1+1+1+1+1 & 1+1+1+1+1+1+1+1 \\ 1+1+1+1+1+1+1+1 & 1+1+1+1+1+1+1+1 \\ 1+1+1+1+1+1+1+1 & 1+1+1+1+1+1+1+1 \\ 1+1+1+1+1+1+1+1 & 1+1+1+1+1+1+1+1 \end{matrix}$$

$$
\left.\begin{matrix}
1+1+1+1+1+1+1+1 & 1+1+1+1+1+1+1+1 \\
1+1+1+1+1+1+1+1 & 1+1+1+1+1+1+1+1 \\
1+1+1+1+1+1+1+1 & 1+1+1+1+1+1+1+1 \\
1+1+1+1+1+1+1+1 & 1+1+1+1+1+1+1+1 \\
1+1+1+1+1+1+1+1 & 1+1+1+1+1+1+1+1 \\
1+1+1+1+1+1+1+1 & 1+1+1+1+1+1+1+1 \\
1+1+1+1+1+1+1+1 & 1+1+1+1+1+1+1+1 \\
1+1+1+1+1+1+1+1 & 1+1+1+1+1+1+1+1
\end{matrix}\right]
$$

$$
= \begin{bmatrix}
8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\
8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\
8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\
8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\
8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\
8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\
8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\
8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8
\end{bmatrix}
$$

Jadi, dari contoh yang diberikan diatas menunjukkan bahwa matriks ordo 8 dapat diselesaikan dengan menggunakan metode Strassen dan didapat hasil yang sama dengan metode konvensional.

Dengan metode Strassen perkalian matriks dilakukan dengan mengurangi banyaknya tahap perkalian dan diiringi dengan menambah tahapan penjumlahan. Yakni bila pada perkalian matriks secara konvensional dilakukan dengan 8 perkalian dan 4 penjumlahan, pada metode Strassen dilakukan dengan 7 perkalian dan 18 penjumlahan. Hal ini menyebabkan metode Strassen mempunyai kompleksitas yang lebih baik dibandingkan dengan metode konvensional.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Dari pembahasan, didapat bahwa: Langkah-langkah yang dapat dilakukan untuk mendapatkan hasil kali C = AB dengan menggunakan metode Strassen adalah:

1.) Mempartisi matriks A dan B menjadi 4 sub matriks yang sama.

2.) Dengan menggunakan penambahan dan pengurangan matriks, dilakukan penghitungan 14 matriks, yaitu A_i dan B_i , untuk i = 1, 2, 3, …, 7.

3.) Menghitung tujuh matriks $P_i = A_i B_i$, untuk i = 1, 2, 3, …, 7. Jika hasil dari $P_i = A_i B_i$, untuk i = 1, 2, 3, …, 7 masih berupa perkalian matriks maka langkah 1 sampai dengan 3 diulangi lagi.

4.) Dengan menggunakan hasil submatriks P_1, P_2 , P_3 , …, P_7 dapat dihitung hasil dari matriks C = AB.

4.2 Saran

Pembahasan yang dikaji dalam kajian ini adalah bagaimana menjelaskan langkah-langkah perkalian matriks dengan metode Strassen. Apabila dari pembaca yang ingin membahas lebih lanjut tentang topik yang serupa, maka disarankan untuk merancang sebuah bahasa pemrograman komputer guna mempercepat dalam perkalian matriks dengan metode Strassen. Karena disini hanya dibahas perkalian matriks metode Strassen secara manual.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, Howard. 2000. *Dasar-Dasar Aljabar Linier Edisi Tujuh Jilid Satu.* Batam Centre: Interaksara.

Ayres, Frank. *Matriks Versi SI/ Metrik Seri Buku Schaum Teori dan Soal-Soal.* Jakarta: Erlangga.

Cullen, Charles G. 1993. *Aljabar Linier dengan Penerapannya*. Jakarta: Gramedia.

Gere, James W & William weaver. 1987. *Aljabar Matriks untuk Para insinyur Edisi Kedua*. Jakarta: Erlangga.

Klappenecker, Andreas. *Strassen's Matrix Multiplication Algorithm*. http://faculty.cs.tamu.edu/klappi/629/Strassen1.pdf , diakses 25 Agustus 2009.

Leon, steven. 2001. *Aljabar Linier dan Aplikasinya Edisi Lima*. Jakarta: Erlangga.

Munir, Rinaldi. 2004. Algoritma *Divide and Conquer* http:// kur2003.if.itb.ac.id/file/Kompleksitas%20Algoritma.doc, diakses 14 Agustus 2009.

Shihab, Quraish. 2002. *Tafsir Al-Mishbah*. Jakarta : Lentera Hati

Strassen, Volker. 1969. *Gaussian Elimination is not Optimal*. http://www.pdf-search-engine.com/strassen-pdf-2.html---Fjn1m1871141117n.pdf, diakses 10 September 2009.

Supranto. 2003. *Pengantar Matrix edisi Revisi*. Jakarta: Rineka Cipta.