IDEAL DARI LATIS

SKRIPSI

OLEH
LAILATUL FITRIYAH
NIM. 09610109

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2015

IDEAL DARI LATIS

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh
Lailatul Fitriyah
NIM. 09610109

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2015

IDEAL DARI LATIS

SKRIPSI

Oleh
Lailatul Fitriyah
NIM. 09610109

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal: 15 Mei 2015

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Evawati Alisah, M.Pd	Abdul Aziz, M.Si
NIP. 19720604 199903 2 001	NIP. 19760318 200604 1 002

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

IDEAL DARI LATIS

SKRIPSI

Oleh
Lailatul Fitriyah
NIM. 09610109

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal 25 Juni 2015

Penguji Utama	:	H. Wahyu H. Irawan, M.Pd	....
Ketua Penguji	:	Dr. Abdussakir, M.Pd	....
Sekretaris Penguji	:	Evawati Alisah, M.Pd	....
Anggota Penguji	:	Abdul Aziz, M.Si	....

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Lailatul Fitriyah
Nim	: 09610109
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	: Ideal dari Latis

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 25 April 2015
Yang membuat pernyataan,

Lailatul Fitriyah
NIM. 09610109

MOTO

“Jangan selalu katakan "masih ada waktu" atau "nanti saja".

Lakukan segera, gunakan waktumu dengan bijak”

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan kepada:

Alm. Bapak Bashori A.R, Ibu Sularsih, Kakak Nur Diana Wati, M. Ainur Rohim, dan M. Isnaini Syahrudin, serta keluarga dan kerabat yang selalu memberikan do'a dan dukungan.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Alhamdulillah, puji syukur kepada Allah Swt. atas rahmat, nikmat, taufiq, dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik. Sholawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad Saw. yang telah membawa menuju agama yang benar yakni agama Islam.

Selanjutnya penulis ucapkan terima kasih karena do'a dan harapan kepada semua pihak yang telah membantu selesainya skripsi ini. Ucapan terima kasih ini penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Hj. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Evawati Alisah, M.Pd, selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, motivasi, dan berbagai pengalaman yang berharga kepada penulis.
5. Abdul Aziz, M.Si, selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan dan berbagi ilmunya kepada penulis.
6. Hairur Rahman, M.Si, selaku dosen wali yang telah memberikan arahan selama penulis menempuh kuliah.
7. Seluruh dosen dan staf administrasi Jurusan Matematika Fakultas Sains dan

Teknologi yang telah bersabar dalam memberikan ilmu dan bimbingannya.

8. Keluarga tercinta, Alm. Bashori A. R, Sularsih, selaku ayah dan ibu penulis, serta Nur Diana Wati, M. Ainur Rohim, dan M. Isnaini Syahrudin selaku kakak-kakak penulis, yang memberikan dukungan moral maupun spiritual sehingga penulisan skripsi ini dapat terselesaikan.
9. Seluruh teman-teman seperjuangan Jurusan Matematika angkatan 2009, dan adik-adik tingkat yang telah memberikan dukungan kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
10. *Dulur-dulur* di Unit Kegiatan Mahasiswa Seni Religius (UKM SR) Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
11. Semua pihak yang telah membantu penulis, yang tidak dapat disebutkan satu persatu.

Semoga skripsi ini bermanfaat dan dapat menambah wawasan keilmuan khususnya ilmu matematika bagi penulis sendiri dan pembaca, Amin.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, April 2015

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR SIMBOL

Simbol-simbol yang digunakan dalam skripsi ini mempunyai makna sebagai berikut:

$Id(a)$	: *principal ideal* terbentuk dari elemen a
$Id(H)$	: ideal yang terbentuk dari himpunan H
$Id\ L$	: ideal dari latis L
Id_0L	: setara dengan (*augmented)* ideal dari latis L gabungan dari $\emptyset$
$Inf(H)$	: batas bawah terbesar dari H
$\mathfrak{L}^{alg}$	: (order) latis L sebagai aljabar
$\mathfrak{L}^{ord}$	: (aljabar) latis L sebagai order
$sup(H)$	: batas atas terkecil dari H

ABSTRAK

Fitriyah, Lailatul. 2015. **Ideal dari Latis**. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Evawati Alisah, M.Pd. (II) Abdul Aziz, M.Si.

Kata Kunci: subhimpunan, latis, sublatis, ideal.

Suatu latis L adalah suatu aljabar dengan dua operasi *biner* (dimisalkan dengan perkalian $(\times)$ dan penjumlahan $(+)$) yang memenuhi postulat-postulat yaitu tertutup, komutatif, asosiatif dan absorpsi. Dalam aljabar pasti ada subaljabar begitu juga pada latis juga terdapat sublatis. Himpunan bagian tak kosong S dari unsur-unsur suatu latis L yang memuat irisan dan gabungan sebarang dua unsur dari L disebut sublatis dari L. Latis L adalah sublatis dari dirinya sendiri; jika S adalah himpunan bagian sejati dari L, S disebut sublatis sejati dari L. Himpunan bagian tak hampa S dari unsur-unsur suatu latis L yang memuat irisan dan gabungan sembarang dua unsur dari L disebut sublatis dari L. Jelas bahwa L adalah sublatis dari dirinya sendiri; jika S adalah himpunan bagian sejati dari L, S disebut sublatis sejati dari L.

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mendeskripsikan sifat-sifat ideal dari latis. Hasil dari penelitian ini adalah:

a. Suatu subset I dari latis L disebut ideal jika sublatis dari L dan $x \in I$ dan $a \in L$ menyebabkan $x \wedge a \in I$
b. Suatu ideal I dari L adalah *proper* jika $I \neq L$
c. Ideal I adalah ideal sejati L jika dan hanya jika ada irisan-homomorfisma φ pada L onto C_2 seperti $I = \varphi^{-1}(0)$, gambaran invers dari 0, yaitu $I = \{x|\varphi(x) = 0\}$
d. Ideal I adalah ideal utama L jika dan hanya jika ada homomorfisma φ pada L onto C_2 dengan $I = \varphi^{-1}(0)$

Bagi penelitian selanjutnya dapat dikembangkan dengan mengkaji bentuk aljabar lainnya seperti ring, modul sebagai aplikasi dari latis disertai dengan deskripsi gambar, teorema dan buktinya.

ABSTRACT

Fitriyah, Lailatul. 2015. **Ideal of Lattice**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Islamic State University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) Evawati Alisah, M.Pd. (II) Abdul Aziz, M.Si

Keywords: subset, lattice, sublattice, ideal.

A lattice L is an algebra with two binary operations (exemplified by multiplying (x) and the sum (+)) that satisfies postulates that closed, commutative, associative and absorption. In algebra must be sub-algebra as well as on lattice there is also sublattice. Non-empty subset S of elements of a lattice L which contains intersection and union any two elements of L are called sublattice of lattice L. L is sublattice of itself; if S is a proper subset of L, S is called proper sublattice of L. Non-empty subsets S of elements of a lattice L than contains intersection and union of any two elements of L are called sublattice of L. It is clear that L is sublattice of itself; if S is a proper subset of L, S called proper sublattice of L.

The aim of this study is to describe the ideal properties of lattice. The results of this study are:

a. A subset I of lattice L is called an ideal if it is a sublattice of L and $x \in I$ and $a \in L$ imply that $x \wedge a \in I$
b. An ideal I of L is proper if $I \neq L$
c. I is a proper ideal of L iff there is a join homomorphism φ of L onto C_2 such that $I = \varphi^{-1}(0)$, the inverse image of 0, that is $I = \{x|\varphi(x) = 0\}$
d. I is a prime ideal of L iff there is a homomorphism φ of L onto C_2 with $I = \varphi^{-1}(0)$

Further research can be developed to assess other forms such as ring algebra, modules as application of lattice accompanied by a description of the image, theorem and proof.

ملخص

الفطرى, ليلة. ٢٠١٥. **المثالية في الشعرية**. البحث جامعي . شعبة الرياضيات كلية العلوم والتكنولوجيا جامعة الإسلامية الحكومية مولانامالك إبراهيم مالانج. المشرف: (١) افوتيالسة، الماجستير. (٢) عبد العزيز، الماجستير

الكلمات الرئيسية: المجموعة الثانوية، الشعرية، المجموعة الشعرية، المثالية.

الشعرية L هو الجبر مع اثنين من العمليات الثنائية (مثال بضرب ($\times$) وزيادة ($+$)) الذي يرضي المسلمات فهي أغلقت، تبادلي، النقابي، و امتصاص . في الجبر يجب المجموعة الجبر فضلا عن الشعرية الواردة أيضا فارغة المجموعة الشعرية. المجموعة الثانوية جزء S من عناصر الشعرية L الذي يحتوي على شرائح والجمع بين أي اثنين من عناصر L تسمى المجموعة الشعرية من L. الشعرية L هو المجموعة الشعرية في حد ذاته. إذا S هي مجموعة فرعية الحقيقية للL، ودعا المجموعة الشعرية S صحيح من L.

وتسمى أي مجموعات فرعية الفارغة S من العناصر التي تحتوي على الشعرية L شرائح والجمع بين أي اثنين من عناصر المجموعة الشعرية من L. ومن الواضح أن L هو المجموعة الشعرية من نفسه؛ إذا S هي مجموعة فرعية الحقيقية من L ، ومن ثم دعا S المجموعة الشعرية صحيح من L من L يسمى محدبة إذا وفقط إذا كان لكل زوج من العناصر المماثلة أ، ب في S، و أ ≤ ب، والفاصل الزمني كامل[أ، ب]أن يكون وS.

وكان الغرض من هذه الدراسة لوصف خصائص مثالية من الشعرية . نتائج هذه الدراسة هي:

أ. ويسمى فرعية الأول من الشعرية L مثالية إذا المجموعة الشعرية من L و $x \in I$ و $a \in L$ سبب $x \wedge a \in I$

ب.وأنا المثل الأعلى لل Lمن المناسب لو $I \neq L$

ج. مثالية أنني كنت المثل الأعلى الحقيقي لل L إذا وفقط إذا كان هناك شريحة هومومورفسم φ على L على C_2 مثل $I = \varphi^{-1}(0)$ ، نظرة عامة عكسية من 0 ، هي $I = \{x|\varphi(x) = 0\}$

د. مثالية I هو القاعدة الرئيسية ل L إذا وفقط إذا كان هناك شريحة هومومورفسم φ على L على C_2 مع $I = \varphi^{-1}(0)$

ويمكن لمزيد من البحث وضعها لتقييم أشكال أخرى مثل حلقة الجبر، وحدات عن تطبيق الشعرية يرافقه وصفا للصورة، نظرية والبرهان.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pada era globalisasi terdapat berbagai permasalahan yang muncul, sehingga manusia dituntut selalu berupaya untuk mencari pemecahan dari permasalahan tersebut. Di sisi lain, ilmu pengetahuan dan teknologi semakin berkembang, sehingga dapat membantu memberikan solusi dari permasalahan yang terjadi. Salah satu disiplin ilmu tersebut adalah matematika. Matematika merupakan salah satu ilmu yang memiliki banyak manfaat dalam kehidupan sehari-hari. Matematika merupakan bahasa proses, teori dan aplikasi ilmu yang memberikan suatu bentuk dan kemanfaatan. Namun kebanyakan orang masih menganggap matematika sebagai salah satu pelajaran yang ditakuti, sehingga tidak banyak orang yang tertarik untuk berusaha mempelajari dan menerapkannya dalam kehidupann sehari-hari. Padahal, jika ditinjau lebih jauh matematika selalu dibutuhkan kapan saja dan dimanapun tempatnya. Matematika sebenarnya mengajak untuk berpikir secara sistematis dalam menghasilkan solusi pemecahan yang sesuai (Kasanah, 2009:1).

Dalam al-Quran surat ar-Ra’d/13 ayat 4 disebutkan bahwa :

وَفِى الْأَرْضِ قِطَعٌ مُتَجٰوِرَاتٌ وَ جَنّٰتٌ مِنْ اَعْنٰبٍ وَزَرْعٌ وَنَخِيْلٌ صِنْوَانٌ وَغَيْرُصِنْوَانٍ يُسْقٰىبِمَآءٍ وَاحِدٍ وَنُفَضِّلُ بَعْضُهَا عَلٰى بَعْضٍ فِي ٱلْأُكُلِۚ

إِنَّ فِي ذَالِكَ لَأَيٰتٍ لِقَوْمٍ يَعْقِلُونَ۝

“Dan di bumi ini terdapt bagian-bagian yang berdampingan, dan kebun-kebun anggur, tanaman-tanaman dan pohon kurma yang bercabang, dan yang tidak bercabang, disirami dengan air yang sama, kami melebihkan sebagian tanam-tanaman itu atas sebagian yang lain tentang rasanya. Sesungguhnya pada yang demikian itu terdapat tanda-tanda (kebesaran Allah) bagi kaum yang berfikir” (QS. ar-Ra’d/13:4).

Ayat di atas menjelaskan bahwa di bumi dan di langit terdapat bagian-bagian yang berdampingan, yang saling berhubungan antara satu pohon dengan pohon lain, antara satu tanaman dengan tanaman lain, dan antara satu ilmu dengan ilmu yang lain. Begitu pula matematika dengan ilmu-ilmu yang lain juga sangat berhubungan erat dan saling membutuhkan. Seperti dijelaskan dalam arti "*kami melebihkan sebagian tanaman-tanaman itu atas sebagian lain*". Oleh sebab itu matematika tidak terlepas dari ilmu-ilmu lain dan sebaliknya ilmu-ilmu lain juga membutuhkan matematika.

Aljabar adalah salah satu cabang yang paling tua dari semua cabang matematika. Aljabar merupakan salah satu bidang matematika yang mempunyai banyak sekali materi yang dapat dibahas, di antaranya adalah himpunan, grup, ring, ideal, teori latis, dsb. Struktur aljabar dengan satu operasi *biner* yang memenuhi sifat-sifat tertentu disebut dengan grup. Sedangkan struktur aljabar dengan dua operasi *biner* yang memenuhi sifat tertentu disebut ring. Dalam perkembangannya, dua operasi *biner* yang memenuhi sifat tertentu disebut juga latis. Latis atau teori latis dapat dipandang dengan beberapa cara yang berbeda, dalam struktur aljabar atau teori himpunan. Latis dapat dikembangkan menjadi beberapa subpembahasan diantaranya latis modular, semi modular, latis distributif dan lain-lain. Latis L didefinisikan sebagai himpunan terurut parsial yang setiap pasangan elemen (a, b) dalam L mempunyai batas bawah terbesar ab dan batas atas terkecil $a + b$ (Ifa, 2010:2-3).

Dalam penelitian ini penulis membahas tentang ideal dari latis. Ideal dari latis ini berawal pada subset dari latis dimana subset tersebut membentuk sublatis. Agar sublatis dapat membentuk suatu ideal, maka sublatis tersebut harus beberapa sifat yang dijelaskan pada penelitian ini. Dalam penelitian ini penulis belum pernah menjumpai penelitian yang membahas tentang ideal dari latis ini. Sehingga penulis ingin membahas lebih jauh tentang ideal dari latis.

Berdasarkan permasalahan di atas, penulis ingin mengetahui lebih jauh dan menganalisis tentang ideal dari latis. Merujuk pada jurnal-jurnal ilmiah dan penelitian yang ada belum dapat menjelaskan tentang kajian ideal dari latis secara lebih jelas. Oleh karena itu, penulis tertarik untuk membahasnya, sehingga skripsi ini oleh penulis diberi judul "Ideal dari Latis".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah yang diberikan dalam penelitian ini adalah bagaimana deskripsi sifat-sifat ideal dari latis?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan dari penelitian ini adalah mendeskripsikan sifat-sifat ideal dari latis.

1.4 Manfaat Penelitian

Dari penulisan skripsi ini penulis berharap agar penelitian ini bermanfaat bagi berbagi kalangan, antara lain:

1. Bagi penulis
   a. Untuk menambah pemahaman tentang konsep yang ada dalam matematika, khususnya teori latis.
   b. Sebagai sarana dan latihan untuk menambah penguasaan penulis dalam mengkaji ideal dari latis.

2. Bagi Mahasiswa Jurusan Matematika

   Sebagai tambahan literatur atau wawasan untuk kajian lebih lanjut bagi mahasiswa khususnya yang sedang menempuh mata kuliah teori latis.

3. Bagi Lembaga

   a. Sebagai bahan informasi tentang pembelajaran matakuliah teori latis yang masih terbatas referensinya.

   b. Sebagai tambahan bahan kepustakaan.

1.5 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode kajian pustaka (*library research*). Untuk menganalisis ideal dari latis, terlebih dahulu akan dikaji mengenai definisi dan sifat-sifat latis yang dapat membentuk ideal.

Adapun langkah-langkah yang akan diterapkan penulis dalam membahas penelitian ini adalah

1. Menerapkan konsep latis, sublatis atau latis-bagian untuk menjelaskan ideal dari latis dengan langkah-langkah sebagai berikut:
   a. Menjelaskan definisi dan teorema-teorema latis beserta bukti dan contohnya
   b. Menjelaskan definisi dan teorema-teorema sublatis beserta bukti dan contohnya
   c. Menjelaskan definisi dan teorema-teorema ideal dari latis beserta bukti dan contonya.

1.6 Sistematika Penulisan

Untuk mempermudah memahami penulisan ini secara keseluruhan, maka penulis menggambarkan sistematika penulisannya sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Pada bab ini membahas tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Pada bab ini menyajikan konsep-konsep (teori-teori) yang mendukung bagian pembahasan. Konsep-konsep tersebut antara lain membahas tentang himpunan, relasi, urutan parsial, latis, sublatis, dan kajian agama.

Bab III Pembahasan

Pada bab ini membahas tentang ideal yang terbentuk dari suatu latis dengan beberapa sifat.

Bab IV Penutup

Bab ini berisi kesimpulan dari penelitian serta saran-saran yang berkaitan dengan hasil penelitian.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Aljabar

Ambil A sebagai himpunan tak kosong. Operasi n-urutan f pada himpunan A adalah pemetaan dari A_n ke dalam A; dengan kata lain, jika $a_1, \ldots, a_n \in A$, kemudian $f(a_1, \ldots, a_n) \in A$. Jika $n = 1$, operasi f disebut *uner*; jika $n = 2$, operasi f disebut *biner*. Karena $A^0 \neq \{\emptyset\}$, operasi *nullary* $(n = 0)$ ditentukan oleh $f(\emptyset) \in A$, dan f biasanya diidentifikasi dengan $f(\emptyset)$. Aljabar universal atau hanya aljabar, terdiri dari himpunan tak kosong A dan himpunan F dari operasi; masing-masing $f \in F$ adalah operasi n-urutan untuk suatu n (bergantung kepada f). Aljabar ini dapat ditandakan oleh $\mathfrak{A}$ atau $(A\,; F)$ (di aljabar universal, karakter huruf besar jerman seperti $\mathfrak{A}$ adalah sering terpakai untuk menandakan aljabar; konvensi ini digunakan untuk latis dan order secara teratur untuk sepasang berikutnya dari halaman dan adakalanya setelah itu untuk menghindari kerancuan) (Grätzer, 2011:11-12).

Jenis $\mathcal{T}$ dari aljabar adalah urutan $(n_0, n_1, \ldots, n_\gamma)$ dari bilangan bulat tidak negatif, $\gamma < o(\mathcal{T})$, dimana o($\mathcal{T}$) adalah ordinal disebut dengan order dari $\mathcal{T}$. Aljabar $\mathfrak{A}$ dari jenis $\mathcal{T}$ adalah pasangan order $(A\,; F)$, dimana A adalah himpunan tak kosong dan F adalah urutan $(f_0, \ldots, f_\gamma, \ldots)$, dimana f_γ adalah operasi n_γ-urutan pada A untuk $\gamma < o(T)$. Jika $o(\mathcal{T})$ finit, $o(\mathcal{T}) = n$, maka dapat ditulis $(A;\ f_0, \ldots, f_{n-1})$ untuk $(A;\ F)$ (Grätzer, 2011:12).

2.2 Himpunan

2.2.1 Definisi Himpunan

Secara harfiah, himpunan mengandung pengertian sebagai suatu kumpulan atau koleksi/gabungan dari objek-objek. Objek-objek ini biasa disebut juga anggota atau unsur atau elemen dari himpunan tersebut. Jadi himpunan dapat didefinisikan sebagai kumpulan suatu objek dengan suatu sifat/ciri tertentu, dengan kata lain himpunan adalah kumpulan suatu objek yang mempunyai ciri dan karakteristik yang sama. Suatu himpunan biasa dinotasikan dengan menggunakan huruf besar/kapital, misalkan $A, B, C, \dots, X, Y, Z$. Sedangkan unsur-unsur atau anggota-anggota dinotasikan dengan huruf kecil, misalkan $a, b, c, \dots$ (Mas'oed, 2013:2).

Menurut Rasdihan Rasyad (2003:4), suatu himpunan dapat tanpa elemen yang disebut himpunan kosong atau *null set* atau *empty set*, yang dilambangkan $\emptyset$. Sedangkan suatu himpunan yang mempunyai elemen tunggal disebut dengan *singleto* atau suatu *unit*. *Empty set* atau *null set* berbeda dengan *singleton set* yang berisi elemen 0, karena $A = \emptyset$, artinya A adalah himpunan kosong, sedangkan $A = \{0\}$, artinya A adalah himpunan yang elemennya adalah nol. Ada beberapa cara menuliskan himpunan yaitu:

1. Himpunan dinyatakan dengan menulis atau mendaftar anggota-anggotanya dalam tanda kurung kurawal, misalnya $A = \{a, b, c, d\}$.

   Himpunan bilangan asli atau himpunan bilangan bulat positif

   $$\mathbb{N} = \mathbb{Z}^+ = \{1,2,3, \dots\}.$$

   Himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.

   Himpunan bilangan riil $\mathbb{R}$.

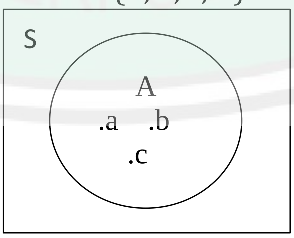
2. Menyebutkan atau mendefinisikan persyaratan keanggotaan himpunan. Kelas yang keberadaannya dipostulatkan oleh aksioma 2 dinotasikan oleh $\{x|P(x)\}$ atau $\{x: P(x)\}$. Kalimat terbuka $P(x)$ merupakan pernyataan yang menentukan syarat keanggotaan atau pembentuk himpunan. Ditegaskan disini bahwa $u \in \{x: P(x)\}$ adalah benar jika dan hanya jika u adalah himpunan, dan $P(u)$ benar.

Contoh 2.2.1.1:

- Himpunan bilangan rasional $Q = \{\frac{m}{n}|m, n \in Z, n \neq 0\} = \{\frac{m}{n}|m \in Z, n \in Z^+\}$
- Himpunan bilangan genap $\{2k|k \in \mathbb{N}\}$
- Himpunan bilangan ganjil $\{2k - 1|k \in \mathbb{N}\}$
- $I = \{x|0 \leq x \leq 1, x \in \mathbb{R}\}$
- B = $\{x \in \mathbb{N}|x^2 - 3x + 2 = 0\}$

3. Menggambar titik-titik sebagai anggota-anggota himpunan dalam diagram yang berbentuk kurva tertutup sederhana. Diagram tersebut dinamakan dengan diagram venn.

$A = \{a, b, c, d\}$



Gambar 2.1 Diagram Venn

Jika dalam himpunan terdapat anggota yang sama maka anggota yang demikian hanya menggambarkan satu anggota saja.

Contoh 2.2.1.2

Misal $A = \{a, b, c, d, e\}$. Himpunan A tersebut mempunyai lima anggota saja, yaitu $a, b, c, d,$ dan e. Banyaknya anggota suatu himpunan A dapat ditulis dengan simbol $n(A)$ atau $\#(A)$, $n(A) = 5$.

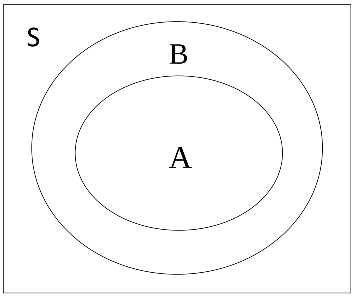
2.2.2 Himpunan Bagian

Himpunan A disebut himpunan bagian atau *subset* dari B jika dan hanya jika setiap anggota A juga merupakan anggota B. Himpunan bagian dilambangkan dengan notasi $\subseteq$, sehingga $A \subseteq B$ dibaca A himpunan bagian dari B atau dapat ditulis $B \supseteq A$ dibaca B memuat A atau dikatakan B *superset* A.

Contoh 2.2.2.1:

1. Diketahui $\mathbb{N} = \{1,2,3, \ldots \ldots\}$, $G = \{1,3,5, \ldots \ldots\}$, dan $P = \{2\,,3\,,5\,,7\,, \ldots .\}$, maka $G \subseteq \mathbb{N}$ dan $\mathbb{N} \supseteq P$.
2. Dapat ditunjukkan hubungan antara $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R},$ dan $\mathbb{C}$ berturut-turut himpunan bilangan asli, himpunan bilangan bulat, himpunan bilangan rasional, himpunan bilangan riil, dan himpunan bilangan kompleks, bahwa $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}, \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

Dalam diagram venn $A \subseteq B$ digambarkan bahwa A berada dalam B, sebagai berikut:



Gambar 2.2 DiagramVenn $A \subseteq B$

Pada gambar 2.2, $A \subseteq B$ dapat juga dinyatakan dalam diagram garis, sebagai berikut:

$$\begin{array}{c} B \\ | \\ A \end{array}$$

Gambar 2.3 Diagram Garis $A \subseteq B$

Jika $A \subseteq B$ dan ada paling sedikit satu anggota B, yaitu $x \in B$ tetapi $x \notin A$ maka dikatakan A himpunan bagian sejati atau *proper subset* B dan ditulis $A \subset B$ atau $B \supset A$.

Definisi 2.2.2.1

Suatu himpunan A dikatakan merupakan himpunan bagian B, jika setiap anggota dari himpunan A merupakan anggota dari himpunan B, yang dilambangkan dengan $A \subseteq B$.

(Mas'oed, 2013:3).

Definisi 2.2.2.2

Suatu himpunan A dikatakan merupakan himpunan bagian sejati (*proper subset*) dari himpunan B, jika $A \subseteq B$ dan terdapat sedikit satu unsur dari B yang bukan anggota dari A, yang dilambangkan dengan $A \subset B$.

(Mas'oed, 2013:3)

Dengan kata lain, $A \subset B$ artinya $A \subseteq B$ tetapi B bukan merupakan himpunan bagian dari A, dilambangkan dengan $B \nsubseteq A$. Dapat juga diartikan $A \subset B$ jika dan hanya jika $A \subseteq B$, dengan $A \neq B$ ($A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B$, dengan $A \neq B$).

Definisi 2.2.2.3

Misalkan A dan B himpunan. A dikatakan sama dengan B, ditulis $A = B$, jika A subset B dan B subset A.

Secara simbolik,

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

(Abdussakir, 2006:2)

Definisi 2.2.2.4

Himpunan kuasa (*power set*) dari A adalah himpunan yang terdiri dari himpunan bagian dari A. Banyaknya anggota himpunan kuasa dari himpunan yang mempunyai n anggota (n bilangan bulat) adalah 2^n.

(Mas'oed, 2013:8)

2.2.3 Operasi Himpunan

Operasi adalah aturan untuk mendapatkan unsur tunggal dari satu atau beberapa unsur tertentu. Misal operasi berlaku dalam suatu himpunan semesta S, maka operasi adalah aturan untuk mendapatkan unsur tunggal dalam S dari satu atau lebih unsur dalam S. Jika hasil dari suatu operasi termasuk dalam semesta S, maka operasi yang demikian disebut tertutup atau *closure*. Jika aturan dalam operasi berkenaan dengan satu unsur maka operasinya dinamakan operasi *uner*, dan jika berkenaan dengan dua unsur dinamakan operasi *biner*, tiga unsur *terner*, dan sebagainya. Beberapa contoh operasi *uner* misalnya operasi ingkaran atau negasi (dalam logika), tambah satu (dalam bilangan), transpose (dalam matriks), maupun komplemen (dalam himpunan yang akan dibahas dalam uraian berikutnya). Sedangkan operasi *biner* misalnya operasi tambah, pengurangan, perkalian, pembagian (dalam bilangan), "dan" atau konjungsi, "atau" atau disjungsi (dalam logika), tambah, pengurangan, perkalian (dalam matriks), gabungan, irisan (dalam himpunan yang akan dibahas dalam uraian berikutnya).

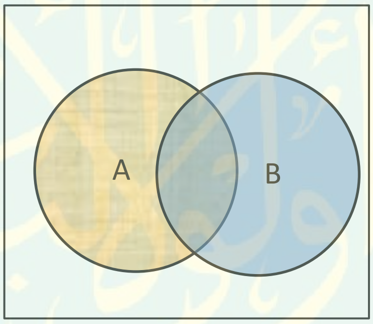
Operasi dalam himpunan berkenaan dengan satu atau lebih himpunan untuk mendapatkan himpunan tunggal dalam suatu kelas himpunan. Beberapa operasi yang berlaku dalam himpunan didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.2.3.1

A gabungan B ditulis dengan $A \cup B$ adalah himpunan yang semua anggotanya merupakan anggota A atau anggota B, digambarkan sebagai berikut:

$$A \cup B = \{x \in A \text{ atau } x \in B\}$$

(Mas'oed, 2013:4)



Gambar 2.4 Diagram Venn A∪B

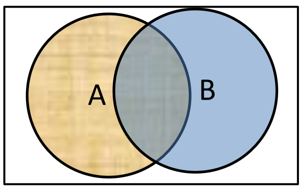
Pada gambar 2.4, $A \cup B$ adalah daerah yang diarsir, baik satu kali atau dua kali.

Definisi 2.2.3.2

A irisan B ditulis dengan $A \cap B$ adalah himpunan yang semua anggotanya merupakan anggota A sekaligus anggota B, digambarkan sebagai berikut,

$$A \cap B = \{x \in A \text{ dan } x \in B\}$$

(Mas'oed, 2013:5)



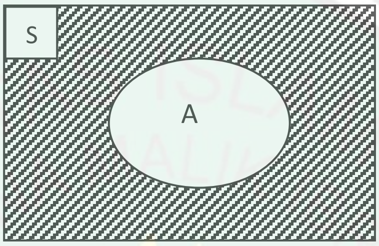
Gambar 2.5 Diagram Venn $A \cap B$

Pada gambar 2.5, $A \cap B$ adalah daerah yang diarsir dua kali.

Definisi 2.2.3.3

Komplemen pada himpunan semesta S dari suatu himpunan A dengan anggota himpunan x dengan $x \notin A$, yang dinyatakan dengan A^c.

(Mas'oed, 2013:5)



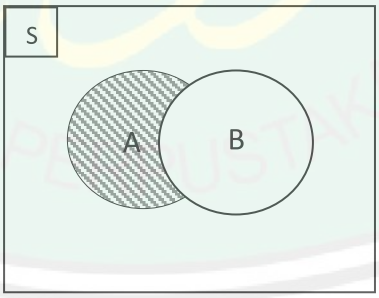
Gambar 2.6 Diagram Venn A^c , daerah yang diarsir

Pada gambar 2.6, A^c adalah daerah yang diarsir diluar A tetapi masih berada di dalam S.

Definisi 2.2.3.4

Selisih himpunan A dan B adalah $A - B = \{x | x \in A \text{ dan } x \in B^c\}$.

(Mas'oed, 2013:4)



Gambar 2.7 Diagram Venn $A - B$

Pada gambar 2.7, $A - B$ adalah daerah yang diarsir.

Dari definisi-definisi yang ada diperoleh sifat-sifat dari himpunan, sebagai berikut:

Teorema 2.2.3.1

Untuk sembarang tiga himpunan A, B dan C diperoleh

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

(Mas'oed, 2013:6)

Bukti.

Yang perlu dibuktikan dari $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ adalah:

a. $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$x \in A \cap (B \cup C)$

$x \in A\ dan\ x \in (B \cup C)$

$x \in A\ dan\ \{x \in B\ \ atau\ x \in C\}$

$\{x \in A\ dan\ x \in B\}\ atau\ \{x \in A\ dan\ x \in C\}$

$x \in (A \cap B)\ atau\ x \in (ZA \cap C)$

$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

sehingga $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$

b. $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$

$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$x \in (A \cap B)\ atau\ x \in (A \cap C)$

$\{x \in A\ dan\ x \in B\}\ atau\ \{x \in A\ dan\ x \in C\}$

$x \in A\ dan\ \{x \in B\ atau\ x \in C\}$

$x \in A\ dan\ x \in (B \cup C)$

$x \in A \cap (B \cup C)$

sehingga $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$

Dari persamaan a dan b, terbukti bahwa

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Teorema 2.1.3.2

Hukum-hukum aljabar himpunan.

Tabel 2.1 Hukum-Hukum Aljabar Himpunan

HUKUM ALJABAR HIMPUNAN	
Hukum Idempoten	
1a. $A \cup A = A$	1b. $A \cap A = A$
Hukum Assosiatif	
2a. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	2b. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Hukum Komutatif	
3a. $A \cup B = B \cup A$	3b. $A \cap B = B \cap A$
Hukum Distributif	
4a. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	4b. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Hukum Identitas	
5a. $A \cup \emptyset = A$ 6a. $A \cup S = S$	5b. $A \cap S = A$ 6b. $A \cap \emptyset = A$
Hukum De Morgan	
7a. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$	7b. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

(Raishinghania, 1980:5)

Bukti.

1a. Ambil x sebagai sembarang unsur dari $A \cup A = A$, kemudian

$x \in A \cup A$

$\Leftrightarrow x \in A \vee x \in A$

$\Leftrightarrow x \in A \cup x \in A$

Konsekuensi $A \cup A = A$

dan $A = A \cup A$

sehingga $A \cup A = A$

2a. Ambil x sebagai sembarang unsur dari A ∪ A = A, kemudian

$x \in A \cap A$

$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in A$

$\Leftrightarrow x \in A \cap x \in A$

Konsekuensi $A \cap A = A$

dan $A = A \cap A$

sehingga $A \cap A = A$

3a. Ambil x sebagai sembarang unsur dari $A \cup B = B \cup A$

$x \in A \cup B$

$\Leftrightarrow x \in A \cup x \in B$

$\Leftrightarrow x \in B \cup x \in A$

Konsekuensi $A \cup B = B \cup A$

dan $B \cup A = A \cup B$

sehingga $A \cup B = B \cup A$

4a. Ambil x sebagai sembarang unsur dari $A \cup (B \cap C)$, kemudian

$x \in A \cup (B \cap C)$

$\Leftrightarrow x \in A \vee x \in (B \cap C)$

$\Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B) \wedge (x \in C)$

$\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)$

$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Konsekuensi $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$

dan $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$

sehingga $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

5a. Ambil x sebagai sembarang unsur dari $A \cup \emptyset = A$, kemudian

$x \in \mathrm{A} \cup \varnothing$

$\Leftrightarrow x \in A \vee x \in \varnothing$

$\Leftrightarrow x \in A \vee \varnothing$

$\Leftrightarrow x \in A$

sehingga $A \cup \emptyset = A$

6a. Ambil x sebagai sembarang unsur dari $A \cup S = S$, kemudian

$x \in A \cup S$

$\Leftrightarrow x \in A \vee x \in S$

$\Leftrightarrow x \in A \cup x \in S$

sehingga $A \cup S = S$

7a. Jika x adalah sembarang unsur dari $(A \cup B)^c$

$x \in (A \cup B)^c \Leftrightarrow x \notin A \cup B$

$\Leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B$

$\Leftrightarrow x \in A^c \wedge x \in B^c$

$\Leftrightarrow x \in A^c \cap B^c$

Jadi $(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c$

dan $A^c \cap B^c \subseteq (A \cup B)^c$

sehingga $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Penomoran dengan menggunakan indeks huruf a dan b di belakang angka dimaksudkan untuk menunjukkan bahwa kedua pernyataan dalam hukum aljabar di atas saling *dual*, yaitu pernyataan yang diperoleh dengan mempertukarkan $\cup$ dengan $\cap, \emptyset$ dengan S.

Sebagai contoh bahwa dual dari 5a. $A \cup \emptyset = A$ adalah 5b. $A \cap S = A$.

Dalam hal dual, untuk membuktikan kebenaran kedua pernyataan yang saling dual tidak perlu membuktikan keduanya, cukup salah satu diantaranya. Dengan menggunakan prinsip dual yaitu suatu prinsip jika suatu pernyataan sudah terbukti kebenarannya maka kebenaran pernyataan dualnya terpenuhi.

Contoh 2.1.3.1

Buktikan : $(A \cup B) \cap (A \cup B^c) = A$

Bukti :

1. $(A \cup B) \cap (A \cup B^c) = A \cup (B \cap B^c)$……………........hukum distributif
2. $B \cap B^c = \emptyset$ ………………………………............ hukum komplemen
3. Jadi $(A \cup B) \cap (A \cup B^c) = A \cup \emptyset$……................................ substitusi
4. $A \cup \emptyset = A$ .. .. hukum identitas
5. Jadi $(A \cup B) \cap (A \cup B^c) = A$ .... substitusi

2.3 Relasi

2.3.1 Relasi pada Himpunan

Definisi 2.3.1.1

Misalkan A dan B merupakan dua himpunan tak kosong, maka suatu relasi T *biner* dari A ke B adalah suatu himpunan dari $A \times B$. Jika $A = B$, maka T disebut relasi *biner* pada A.

(Mas'oed, 2013:9)

Definisi 2.3.1.2

Suatu barisan finit adalah suatu himpunan terdiri atas n unsur dan ditempatkan berkorespondensi satu-satu dengan himpunan bilangan asli $\{1\,,2\,,3\,,\ldots,n\}$ yang disusun menurut urutan baku. Suatu pasangan terurut adalah barisan dengan dua unsur.

(Sukardjono, 2002:8)

Definisi 2.3.1.3

Diketahui suatu himpunan S dengan unsur-unsur $a, b, \ldots,$ misalkan telah ditentukan dengan cara yang persis suatu himpunan R terdiri atas pasangan $(x\,, y)$ dengan $x\,, y \in S$; himpunan R terdiri atas pasangan terurut seperti ini disebut relasi dalam S. Jika kita mempunyai pasangan terurut $(a\,,b)$ anggota R maka akan ditulis dengan aRb dan dibaca "a berelasi dengan b" atau "relasi R berlaku antara a dan b". Dalam relasi ini a disebut anteseden untuk b, b konsekuen untuk a. Jika setiap unsur dari S muncul sebagai anteseden, R disebut atas S. Misalnya, pasangan terurut dari bilangan asli $(1,2), (2,3), \dots, (n, n+1), \dots$ menentukan suatu relasi R atas himpunan bilangan asli.

(Sukardjono, 2002:8-9)

2.3.2 Operasi pada Relasi

Definisi 2.3.2.1

Diberikan suatu himpunan S. Misalkan telah dibentuk barisan $s_n = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ terdiri atas n unsur dari S, untuk n tetap, dan untuk masing-masing barisan ini telah dialokasikan tepat satu unsur y dari S, maka himpunan P terdiri atas pasangan terurut $(s_n\,, y)$ disebut operasi finiter dalam S. Untuk $n = 1, 2, 3, P$ disebut *uner*, *biner*, *terner*, dan untuk nilai umum n, disebut n-ner. Jelas bahwa P adalah relasi di mana $s_n P_y$ berlaku, sebagai anteseden adalah barisan terdiri dengan n unsur dan konsekuennya adalah unsur tunggal y. Jika $n = 2$ (suatu kasus yang banyak terjadi), operasi *biner* P adalah relasi antara pasangan-pasangan terurut sebagai anteseden dan unsur tunggal sebagai konsekuen. Jika operasi n-ner diketahui sedemikian sehinga $s_n P_y$, dapat digunakan notasi $P(x_1, x_2, \dots, x_n) = y$; ini seringkali dipergunakan sebagai lambang khusus.

(Sukardjono, 2002:9)

Definisi 2.3.2.2

Misalkan S adalah himpunan unsur $a, b, c, \ldots$, dan operasi *biner* P dan Q didefinisikan pada S.

(i) Jika $P[a, P(b, c)] = P[P(a, b), c]$ untuk semua a, b, c, maka P disebut asosiatif. Sehingga

$9 + (5 + 3) = (9 + 5) + 3$ tetapi $9 - (5 - 3) \neq (9 - 5) - 3$.

(ii) Jika $P(a, b) = P(b, a)$ untuk semua a, b, maka P disebut komutatif. Sehingga

$$2 \times 3 = 3 \times 2 \text{ tetapi } 2^3 \neq 3^2$$

(iii) Jika P komutatif dan $P\,[a, Q(b, c)] = Q[P(a, b), P(a, c)]$ untuk semua a, b, c, maka P disebut distributif terhadap Q. Sehingga

$3 \times (5 + 4) = (3 \times 5) + (3 \times 4)$ tetapi $3 + (5 \times 4) \neq (3 + 5) \times (3 + 4)$

(Sukardjono, 2002:9-10)

Definisi 2.3.2.3

Jika P adalah operasi n-ner yang didefinisikan dalam himpunan A untuk setiap barisan s_n terdiri atas n unsur dari A, himpunan A disebut tertutup terhadap operasi P. Suatu himpunan yang tertutup terhadap satu atau lebih operasi finiter tertentu disebut suatu aljabar. Himpunan bilangan asli dengan operasi $(biner)$ tambah $(+)$ dan kali $(\times)$ merupakan suatu aljabar. Suatu subaljabar adalah himpunan bagian dari aljabar A yang memuat operasi-operasi dalam A sendiri. Jadi bilangan-bilangan genap merupakan subaljabar dari aljabar bilangan asli; tetapi bilangan ganjil tidak, sebab jumlah dua bilangan ganjil adalah bilangan genap.

(Sukardjono, 2002:10)

2.3.3 Relasi Ekuivalensi

Definisi 2.3.3.1

Diberikan himpunan S dengan unsur-unsur $a, b, c, \ldots$. Didefinisikan relasi ekuivalensi E atas himpunan S sebagai sembarang relasi atas S yang memenuhi:

(i) Refleksif: aEa untuk setiap $a \in S$.

(ii) Simetris: jika aEb, maka bEa.

(iii) Transitif: jika aEb dan bEc, maka aEc.

(Sukardjono, 2002:12)

Contoh 2.3.3.1

Misalkan S himpunan bilangan asli, dengan aEb jika dan hanya jika $a + b$ genap. Syarat (i) dan (ii) jelas terpenuhi; sedangkan (iii), jika $a + b$ genap dan $b + c$ genap, maka $a + (b + b) + c$ dan $a + c$ adalah genap. Dalam ekuivalensi ini himpuna bilangan ganjil adalah ekuivalensi, dan demikian pula himpunan semua bilangan genap.

2.4 Order

Definisi 2.4.1

Misalkan S adalah himpunan dengan unsur-unsur $a, b, c, \ldots$ dengan relasi kesamaan $x = y$ telah didefinisikan. Maka relasi terurut parsial O atas S adalah sembarang relasi atas S yang memenuhi sifat-sifat:

(i) Refleksi: untuk setiap a di dalam S aOa;

(ii) Anti simetrik: jika aOb dan bOa, maka $a = b$;

(iii) Transitif: jika aOb dan bOc, maka aOc.

Lambang O dalam aOb secara umum akan ditukar dengan $\leq$. Jika $a \leq b$, dikatakan a lebih kecil atau sama dengan b, a termuat dalam b, b memuat a, dsb. Jika $a \leq b$ dan $a \neq b$, ditulis $a < b$. $b \geq a$ berarti $\leq b$; $b > a$ berarti $a < b$. Jika $a \leq b$ atau $b \leq a$, dikatakan bahwa a, b komparabel (dapat dibandingkan).

(Sukardjono, 2002:24)

Definisi 2.4.2

Suatu himpunan S yang dilengkapi dengan relasi terurut parsial O yang telah didefinisikan padanya disebut suatu **himpunan terurut parsial** atau **poset** (poset singkatan dari kata *partially ordered set*).

(Sukardjono, 2002:28)

Unsur-unsur dari suatu poset tidak harus komparabel satu sama lain, meskipun setiap unsur adalah komparabel dengan dirinya sendiri. Berikut adalah contoh-contoh poset.

Contoh 2.4.1

S adalah himpunan semua bilangan asli $a, b, \ldots$ dan $a \leq b$ didefinisikan dengan $a = b$ atau terdapat c sehingga $a + c = b$

Contoh 2.4.2

S adalah himpunan semua bilangan rasional $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \ldots$, dan $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ dimaksudkan bahwa $[(a \times d) - (b \times c)] \times b \times c$ adalah bilangan bulat negatif atau nol.

Contoh 2.4.3

S adalah himpunan semua bilangan bulat $a, b, \ldots$, dan $a \leq b$ dimaksudkan dengan $a - b$ adalah bulat negatif atau nol; khususnya $a < 0$ dimaksudkan bahwa a adalah bilangan bulat negatif.

Definisi 2.4.3

Misalkan S adalah poset dengan unsur-unsur $a, b, \dots$. Jika $a < b$ dan jika tidak terdapat unsur $x \in S$ dengan sifat $a < x < b$ dikatakan bahwa b menutup a.

(Sukardjono, 2002:29)

Mengingat sifat ilmu hitung dari himpunan riil R dapat dinyatakan dalam hal penjumlahan dan perkalian, order yang teoritis, dan dengan demikian topologi, sifat yang dinyatakan dalam pengurutan $\leq$. Dasar sifat hubungan ini adalah sebagai berikut.

Untuk semua $a, b, c \in R$, aturan berikut berlaku untuk pengurutan sebagai berikut:

(Refl) Refleksif : $a \leq a$.

(ASim) Antisimetri : $a \leq b$ dan $b \leq a$ menyatakan bahwa $a = b$.

(Trans) Transitif : $a \leq b$ dan $b \leq c$ menyatakan bahwa $a \leq c$.

(Lin) Linear : $a \leq b$ atau $b \leq a$

Ada banyak contoh relasi *biner* berbagi sifat ini dengan pengurutan dari riil, dan ada lebih banyak menikmati pertama tiga sifat. Fakta ini, dengan sendirinya, tidak akan membenarkan pengenalan konsep baru. Namun, telah diamati bahwa banyak konsep-konsep dasar dan hasil tentang riil tergantung hanya pada tiga sifat, dan ini dapat digunakan setiap kali memiliki relasi yang memenuhi tiga sifat tersebut. Suatu relasi memenuhi sifat: refleksif, antisimetri, dan transitif (kondisi: (Refl), (ASim), dan (Trans)) disebut pengurutan. Himpunan tidak kosong yang memenuhi sifat-sifat relasi disebut himpunan order atau order (*partially ordered set* atau poset) (Grätzer, 2011:1).

Untuk membuat definisi formal, ambil mulai dengan dua himpunan A dan B dan bentuk himpunan $A \times B$ dari semua pasangan terurut (a, b) dengan $a \in A$ dan $b \in B$. Jika $A = B$, ditulis A^2 untuk $A \times A$. Kemudian relasi *biner* ϱ pada A adalah subset dari A^2. Unsur $a, b \in A$ pada relasi dengan hal untuk ϱ jika $(a, b) \in \varrho$, untuk kasus ini juga harus mempergunakan notasi $a \varrho b$. Relasi *biner* akan dituliskan dengan *small greek letters* atau dengan lambang istimewa (Grätzer, 2011:1-2).

Bandingkan definisi formal ini dengan sesuatu intuitif: hubungan *biner* ϱ pada A adalah "ketentuan" yang memutuskan ya atau tidaknya $a \varrho b$ untuk sembarang pasangan tertentu a, b dari unsur. Tentu, sembarang ketentuan demikian akan menentukan himpunan $\{(a, b) \in A^2 | a \varrho b\}$, dan himpunan ini menentukan ϱ, sehingga mungkin juga mengenai ϱ seperti menjadi sama halnya himpunan ini.

Untuk relasi *biner* ϱ dan σ pada A, terdapat $\varrho \circ \sigma$, relasi *biner* pada A didefinisikan $(a, b) \in \varrho \circ \sigma$ jika terdapat elemen $c \in A$ memenuhi $(a, c) \in \varrho$ dan $(c, b) \in \sigma$. Sehingga relasi *biner* ϱ adalah transitif jika $\varrho \circ \varrho \subseteq \varrho$. Order (A, ϱ) terdiri dari himpunan tak kosong A dan relasi *biner* ϱ pada A seperti ϱ memenuhi sifat refleksif, antisimetri, dan transitif. Catatan bahwa ini dapat dinyatakan kembali sebagai berikut: untuk semua $a, b, c \in A$, berlaku:

$(a, a) \in \varrho$;

$(a, b), (b, a) \in \varrho$ mengakibatkan bahwa $a = b$;

$(a, b), (b, c) \in \varrho$ mengakibatkan bahwa $(a, c) \in \varrho$

Jika ϱ memenuhi sifat refleksif, antisimetri, dan transitif, kemudian ϱ adalah terurut (relasi terurut parsial), dan pada umumnya dituliskan oleh $\leq$. Jika $a \leq b$, kadang kala dikatakan bahwa a adalah *majorized* oleh b atau b *majorized* a. Juga,

$a \geq b$ dimaksudkan $b \leq a$;

$a < b$ dimaksudkan $a \leq b$ dan $a \neq b$;

$a > b$ dimaksudkan $b < a$.

2.5 Rantai

Definisi 2.5.1

Jika setiap pasang unsur a, b dari suatu poset K memenuhi $a \leq b$ atau $b \leq a$ atau keduanya, himpunan K dikatakan terurut sederhana atau terurut total, dan disebut suatu rantai. Menurut definisi 2.4.1 (ii) $a \geq b$ dan $b \leq a$ berimplikasi $a = b$. Dengan demikian didefinisikan suatu rantai sebagai poset dengan sifat bahwa setiap pasang unsur yang berlainan a, b berlaku $a < b$ atau $b < a$. Dilihat bahwa sembarang himpunan bagian dari rantai adalah juga rantai.

(Sukardjono, 2002:35)

Contoh 2.5.1

Perhatikan bilangan-bilangan:

$$4, 32, 8, 64, 16, 128, 2$$

yang diurutkan dengan $a \leq b$ yang didefinisikan dengan a adalah kelipatan b. Karena bilangan-bilangan itu adalah pangkat-pangkat yang berlainan dari 2, setiap pasang unsur yang satu adalah kelipatan yang lain, dan bilangan-bilangan itu merupakan rantai dengan unsur sebanyak 7.

$y_0 = 4, y_1 = min(4,4) = 4, y_2 = min(4,32) = 32, y_3 = min(32,8) = 32, y_4 = min(32,64) = 64, y_5 = min\ (64,16) = 64, y_6 = min(64,128) = 128, y_7 = min(128,2) = 128 = z_1$. Dengan membuang z_1 dari barisan diperoleh $z_2 = 64$. Kemudian membuang 128 dan 64 diperoleh $z_3 = 32$. Dengan melanjutkan proses ini disusun unsur-unsur rantai dalam urutan menaik (menaik terhadap urutan relasi yang didefinisikan):

128, 64, 32, 16, 8, 4, 2

Isomorphik dengan

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

Unsur 128 adalah unsur terkecil atau unsur nol, 2 adalah unsur terbesar atau unsur satuan.

2.6 Latis

Suatu latis dapat dipandang dengan beberapa cara yang berbeda, dari sudut pandang aljabar atau sebagai teori himpunan. Oleh karena penerapan teori latis sangat luas dan penting dalam cabang-cabang lain matematika maupun sains yang sejenis. Pertama-tama latis dipandang dari sudut aljabar dulu.

Definisi 2.6.1.

Suatu latis L adalah suatu aljabar dengan dua operasi *biner* (disimbolkan dengan perkalian $(\times)$ dan penjumlahan $(+)$) yang memenuhi postulat-postulat berikut : untuk semua a, b, c di L

1.a) $ab \in L$ *L tertutup terhadap operasi x*

1.b) $a + b \in L$ *L tertutup terhadap operasi +*

2.a) $ab = ba$ *Operasi x komutatif*

2.b) $a + b = b + a$ *Operasi + komutatif*

3.a) $a(bc) = (ab)c$ *Operasi x asosiatif*

3.b) $a+(b+c) = (a+b)+c$ *Operasi + asosiatif*

4.a) $a(a+b) = a$ *Absorpsi terhadap operasi +*

4.b) $a+ab = a$ *Absorpsi terhadap operasi x*

(Sukardjono, 2002:39)

Postulat 1.a) dan 1.b) dituliskan demi lengkapnya, meskipun kedua pernyataan itu telah terkandung dari kata "aljabar dengan dua operasi *biner*"; postulat 2.a) dan 2. b) mensyaratkan bahwa kedua operasi itu komutatif; postulat 3.a) dan 3.b) menghendaki bahwa kedua operasi asosiatif; postulat 4.a) dan 3.b) menghendaki sifat absorpsi dan jelas tidak sejalan dengan operasi perkalian dan penjumlahan biasa.

Sekarang dibuktikan sejumlah teorema tentang latis, bukti diberikan secara deduktif dari postulat-postulat

Teorema 2.6.1.

$aa = a$

(Sukardjono, 2002:39)

Bukti.

$aa = a(a + ab)$ menurut 4.b)

$= a$ menurut 4.a)

Teorema 2.6.2.

$a+a = a$

(Sukardjono, 2002:39)

Bukti.

$a + a = a + aa$ menurut teorema 2.6.1

$= a$ menurut 4.b)

Teorema-teorema ini mengatakan bahwa perkalian dan penjumlahan adalah *idempoten*, penulis tidak memerlukan eksponen atau koefisien numerik dalam teori latis.

Teorema 2.6.3.

Jika $ab = a$, maka $a + b = b$

(Sukardjono, 2002:40)

Bukti.

$a + b = ab + b$ menurut ketentuan a pada teorema 2.6.3

$= b + ab$ menurut 2.b)

$= b + ba$ menurut 2.a)

$= b$ menurut 4.b)

Teorema 2.6.4.

Jika $a + b = b$, maka $ab = a$

(Sukardjono, 2002:40)

Bukti.

$ab = a(a + b)$ menurut ketentuan b pada teorema 2.6.4

$= a$ menurut 4.a)

Definisi 2.6.2.

Didefinisikan suatu relasi R di antara dua unsur dalam suatu latis dengan

(i) aRb jika dan hanya jika $ab = a$

dipandang dari teorema 2.6.3 dan 2.6.4 hal ini ekuivalensi dengan

(ii) aRb jika dan hanya jika $a + b = b$

(Sukardjono, 2002:40)

Teorema 2.6.5.

aRa

(Sukardjono, 2002:40)

Bukti.

$aa = a$ menurut teorema 2.6.1, dengan demikian aRa menurut definisi 2.6.2 (i)

Teorema 2.6.6.

Jika aRa dan bRa, maka $a = b$

(Sukardjono, 2002:40)

Bukti.

$a = ab$	menurut ketentuan dan definisi 2.6.2 (i)
$= ba$	menurut 2.a)
$= b$	menurut ketentuan kedua dan definisi 2.6.2 (i)

Teorema 2.6.7.

Jika aRb dan bRc, maka aRc

(Sukardjono, 2002:40)

Bukti.

$ac = (ab)c$	menurut ketentuan pertama dan definisi 2.6.2 (i)
$= a(bc)$	menurut 2.a)
$= ab$	menurut ketentuan kedua dari Definisi 2.6.2 (i)
$= a$	menurut ketentuan pertama dan Definisi 2.6.2 (i)

Dengan demikian aRc menurut Definisi 2.6.2 (i).

Relasi R yang refleksif (Teorma 2.6.5), anti simetrik (Teorema 2.6.6), dan transitif (Teorema 2.6.7), sehingga merupakan relasi terurut parsial; dapat menuliskan $a \leq b$ untuk $a\ R\ b$. Tidak diperlukan bukti lebih lanjut untuk teorema berikut ini.

Teorema 2.6.8.

$ab \leq a$

(Sukardjono, 2002:42)

Bukti.

	$ab + a = a + ab$	menurut 2.b)
	$= a$	menurut 4.b)
Maka	$ab \leq a$	menurut definisi 2.6.2 (ii)

Teorema 2.6.9.

$a \leq a + b$

(Sukardjono, 2002:42)

Bukti.

	$a(a + b) = a$	menurut 4.a)
Jadi,	$a \leq a + b$	menurut definisi 2.6.2 (ii)

Teorema 2.6.10.

$ab < b$

(Sukardjono, 2002:42)

Bukti.

	$ba < b$	menurut teorema 2.6.9
Tetapi	$ba = ab$	menurut 2.a)
Jadi,	$ab \leq b$	

Akibatnya ialah bahwa ab adalah suatu batas bawah dari pasangan a, b.

Teorema 2.6.12.

$b \leq a + b$

(Sukardjono, 2002:42)

Bukti.

$b \leq b + a$ menurut teorema 2.6.10

Tetapi $b + a = a + b$ menurut 2.b)

Akibatnya ialah bahwa $a + b$ adalah batas bawah dari pasangan a, b.

Teorema 2.6.13.

Jika $c \leq a$ dan $c \leq b$, maka $c \leq ab$

(Sukardjono, 2002:42)

Bukti

$c = ca$ menurut ketentuan pertama dan definisi 2.6.2 (i)

$= (cb)\ a$ menurut ketentuan kedua dan definisi 2.6.2 (ii)

$= c\ (ba)$ menurut 3.a)

$= c\ (ab)$ menurut 2.a)

Dengan demikian $c \leq ab$ menurut definisi 2.6.2 (i);

Jadi ab adalah batas terbesar dari pasangan a, b.

Definisi 2.6.2.

Suatu latis adalah poset di mana setiap pasang unsur a, b mempunyai suatu batas bawah terbesar (disajikan oleh $a \cap b$) yang berada di dalam himpunan itu.

(Sukardjono, 2002:43).

2.7 Irisan dan Gabungan

Teorema 2.7.1

Jika dalam suatu latis $a \leq b$ dan $c \leq d$, maka $ac \leq bd$.

(Sukardjono, 2002:67)

Bukti.

Dari ketentuan $ab = a, cd = c$ (definisi 2.6.2-(i)), selanjutnya

$(ac)(bd)$	$=$	$[(ac)b]d$	menurut definisi 2.6.1-3.a)
	$=$	$[a(cb)]d$	menurut definisi 2.6.1-3.a)
	$=$	$[a(bc)]d$	menurut definisi 2.6.1-2.a)
	$=$	$[(ab)c]d$	menurut definisi 2.6.1-3.a)
	$=$	$(ab)(cd)$	menurut definisi 2.6.1-3.a)
	$=$	ac	menurut ketentuan

Dengan demikian $ac \leq bd$ menurut definisi 2.6.2-(i)

Dengan dualitas diperoleh:

Teorema 2.7.2

Jika dalam suatu latis $a \geq b$ dan $c \geq d$, maka $a + c \geq b + d$.

(Sukardjono, 2002:67)

Untuk dapat menyingkap bukti-bukti seperti yang baru saja diberikan, diperlukan untuk mengungkap sifat asosiatif dan komutatif yang diperlukan untuk irisan dan gabungan menurut postulat bagian 2.6.1-2.a) dan 2.6.1-3.b). Pertama-tama dibicarakan suatu definisi dan teorema-teorema untuk irisan dalam latis yang dapat dipakai untuk sembarang operasi *biner* asosiatif dalam aljabar.

Definisi 2.7.1

Misalkan $a_1, \dots, a_n$ adalah barisan n unsur dari suatu latis; unsur-unsur itu tidak perlu semuanya berlainan. Irisan a_1a_2 dari dua unsur didefinisikan dalam definisi 2.6.1. Sekarang didefinisikan secara rekurensi irisan n-unsur, untuk $n \geq 3$, sebagai berikut:

$a_1a_2a_3 = (a_1a_2)a_3, a_1a_2a_3a_4, \ldots.$

$a_1a_2 \ldots a_{n-1}a_n = (a_1a_2 \ldots a_{n-1})a_n$

dualnya

$a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}) + a_n$

keberadaan unsur ini dijamin oleh postulat 2.6-1.a) dan postulat 2.6- 1.b).

(Sukardjono, 2002:67)

2.8 Sublatis

Definisi 2.8.1

Himpunan bagian tak hampa S dari unsur-unsur suatu latis L yang memuat irisan dan gabungan sembarang dua unsur dari L disebut sublatis dari L. Jelas bahwa L adalah sublatis dari dirinya sendiri; jika S adalah himpunan bagian sejati dari L, S disebut sublatis sejati dari L.

(Sukardjono, 2002:92)

Teorema 2.8.1

Setiap interval $[a, b]$ dari suatu latis L adalah sublatis dari L.

(Sukardjono, 2002:92).

Bukti.

Misalkan $a \leq x \leq b, a \leq y \leq c$. Menurut teorema gabungan dan irisan

$$a \leq xy \leq x + y \leq b$$

sehingga xy dan $x + y$ anggota $[a , b]$. Khususnya interval $[a , a]$, yaitu setiap unsur yang berlainan a di L adalah sublatis dari L.

2.9 Homomorfisma

Pemetaan $\varphi : P_0 \to P_1$ adalah pemetaan isoton (juga disebut pemetaan monoton atau pemetaan *order-preserving*) dari order yang P_0 pada urutan P_1 jika $a \leq b$ di P_0 dinyatakan bahwa $\varphi(a) \leq \varphi(b)$ di P_1. Suatu isoton bijeksi dengan kebalikan isoton adalah isomorfisma. Dual dari Isoton adalah antiton. Pemetaan $\varphi : P_0 \to P_1$ adalah suatu pemetaan antiton dari urutan P_0 urutan P_1 jika $a \leq b$ di P_0 dinyatakan bahwa $\varphi(a) \geq \varphi(b)$ di P_1 (Grätzer, 2011:30).

Didefinisikan homomorfisma pada yang semilatis $(S_0\,; \circ)$ ke semilatis $(S_1; \circ)$ seperti pemetaan $\varphi : S_0 \to S_1$ mengakibatkan $\varphi(a \circ b) = \varphi(a) \circ \varphi(b)$. Karena latis $\mathfrak{L} = (L\,, \vee\,, \wedge)$ adalah suatu semilatis dengan operasi $\vee$ dan $\wedge$, terdapat dua konsep homomorfisma, gabungan-homomorfisma ($\vee$-homomorfisma) dan irisan-homomorfisma ($\wedge$-homomorfisma). Homomorfisma adalah pemetaan yang baik gabungan-homomorfisma dan irisan-homomorfisma. Jadi homomorfisma φ dari latis L_0 ke latis L_1 adalah pemetaan L_0 ke L_1 menghasilkan keduanya

$$\varphi(a \vee b) = \varphi(a) \vee \varphi(b);$$

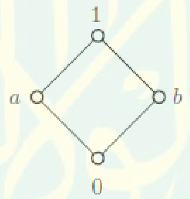
$$\varphi(a \wedge b) = \varphi(a) \wedge \varphi(b);$$

Suatu homomorfisma dari latis ke dalam latis itu sendiri disebut endomorphism. Homomorfisma satu-ke-satu juga akan disebut *embedding* (Grätzer, 2011:30).

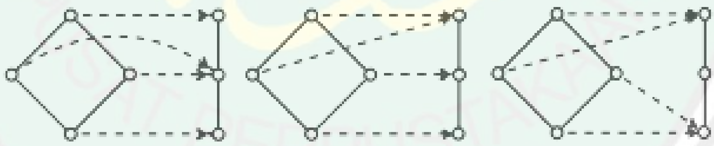
Perhatikan bahwa gabungan-homomorfisma, irisan-homomorfisma, dan (latis) homomorfisma adalah semua Isoton. Penulis membuktikan pernyataan ini untuk gabungan-homomorfisma. Jika $\varphi : L_0 \to L_1$ dan $\varphi(a \vee b) = \varphi(a) \vee$

$\varphi(b)$ untuk setiap $a, b \in L_0$, dan jika $x, y \in L_0$ dengan $x \leq y$, maka $y = x \vee y$; dengan demikian $\varphi(y) = \varphi(x \vee y) = \varphi(x) \vee \varphi(y)$ dan $\varphi(x) \leq \varphi(y)$ ikuti di L_1. Perhatikan bahwa sebaliknya gagal, dan tidak ada hubungan antara irisan dan gabungan-homomorfisma.

Gambar 2.9 menunjukkan tiga pemetaan $C_2 \, x \, C_2 = C_2^2$ pada gambar 2.8 di rantai tiga-elemen C_3. Pertama pemetaan Gambar 2.9 adalah Isoton tetapi tidak irisan ataupun gabungan-homomorfisma. Pemetaan kedua adalah gabungan-homomorfisma tetapi tidak irisan-homomorfisma, sehingga tidak homomorfisma. Pemetaan ketiga pada gambar 2.9 adalah homomorfisma. Jika (semi) latis L_0 dan L_1 nol, dan mereka diawetkan di bawah homomorfisma φ, disebut $\varphi \, a \, \{0\}$ - homomorfisma(Grätzer, 2011:30).



Gambar 2.8 Diagram Latis Kecil



Gambar 2.9 Contoh Homomorfisma

2.10 Kajian Latis dalam Perspektif Islam

Dalam struktur aljabar terdapat suatu latis, dimana definisi dari latis sendiri adalah suatu aljabar dengan satu himpunan tak kosong dengan satu himpunan tak kosong dengan dua operasi *biner* $+$ dan $\times$ yang memenuhi sifat tertutup, asosiatif, komutatif dan absorpsi. Sifat tertutup dalam matematika adalah suatu himpunan bila dioperasikan maka hasilnya tetap dalam himpunan tersebut.

Dalam Islam tertutup dapat dicontohkan dalam perintah untuk menjaga suatu rahasia atau menutupi suatu rahasia. Perhatikan firman Allah Swt dalam al-Quran surat al-Qashash/28 ayat 10 :

وَأَصْبَحَ فُؤَادُ أُمِّ مُوسَىٰ فَارِغًا ۖ إِن كَادَتْ لَتُبْدِي بِهِ لَوْلَا أَن رَّبَطْنَا عَلَىٰ قَلْبِهَا لِتَكُونَ مِنَ الْمُؤْمِنِينَ ﴿١٠﴾

"Dan menjadi kosonglah hati ibu Musa. Sesungguhnya hamper saja ia menyatakan rahasia tentang Musa, seandainya tidak kami teguhkan hati-nya, supaya ia termasuk orang-orang yang percaya (kepada janji Allah)" (QS. al-Qashash/28:10).

Pada ayat di atas terdapat kalimat لَتُبْدِى yang artinya "*menyatakan rahasia*". Rahasia yang dimaksud di sini adalah sesuatu yang harus ditutupi. Perintah untuk menjaga rahasia dicontohkan pada cerita Ibu Musa berusaha menutupi rahasianya demi menyelamatkan Musa. Dalam Islam seorang muslim yang mempunyai rahasia ataupun diamanahi suatu rahasia diwajibkan untuk menutup atau menjaga rahasia tersebut. Karena menyangkut kehormatan muslim yang lain atau dirinya. Orang yang menjaga rahasia telah dijanjikan oleh Allah suatu balasan yang sempurna (Hasbi, 2002:874-875).

Dalam surat yang lain juga diceritakan bagaimana suatu rahasia itu harus ditutupi dan dijaga, di dalam al-Quran surat at-Tahrim/66 ayat 3 Allah berfirman (Hasbi, 2002:1365):

وَإِذْ أَسَرَّ النَّبِيُّ إِلَىٰ بَعْضِ أَزْوَاجِهِ حَدِيثًا فَلَمَّا نَبَّأَتْ بِهِ وَأَظْهَرَهُ اللَّهُ عَلَيْهِ عَرَّفَ بَعْضَهُ وَأَعْرَضَ عَن بَعْضٍ ۖ فَلَمَّا نَبَّأَهَا بِهِ قَالَتْ مَنْ أَنبَأَكَ هَٰذَا ۖ قَالَ نَبَّأَنِيَ الْعَلِيمُ الْخَبِيرُ ﴿٣﴾

"Dan ingatlah ketika nabi membicarakan secaa rahasia kepada salah seorang istrinya (Hafsah) suatu peristiwa. Maka tatkala (Hafsah) menceritakan pristiwa itu (kepada Aisyah) dan Allah memberitahukan hal itu (pembicaraan Hafsah dan Aisyah) kepada Muhammad lalu Muhammd memberitahukan sebagian (yang diberitakan Allah kepadanya) dan menyembunyikan sbagian yang lain (kepada Hafsah). Maka tatkala (Muhammad) memberitahukan pembicaraan (antara Hafsah dan Aisyah) lalu (Hafsah) bertanya : "Siapakah yang Telah

memberitahukan hal ini kepadamu?" nabi menjawab : "Telah diberitahukan kepadaku oleh Allah yang Maha Mengetahui lagi Maha Mengenal"" (QS. at-Tahrim/66:3).

Suatu latis tidak hanya tertutup, akan tetapi juga komutatif. Komutatif adalah suatu timbah balik. Dalam Islam komutatif dapat dicontohkan dalam perintah untuk saling tolong menolong. Perhatikan firman Allah dalam surat al-Ma'idah/5 ayat 2:

وَتَعَاوَنُواْ عَلَى ٱلۡبِرِّ وَٱلتَّقۡوَىٰۖ وَلَا تَعَاوَنُواْ عَلَى ٱلۡإِثۡمِ وَٱلۡعُدۡوَٰنِۚ وَٱتَّقُواْ ٱللَّهَۖ إِنَّ ٱللَّهَ شَدِيدُ ٱلۡعِقَابِ ٢

"Dan tolong-menolonglah kamu dalam (mengerjakan) kebajikan dan takwa, dan jangan tolong-menolong dalam berbuat dosa dan pelanggaran. Dan bertakwalah kamu kepada Allah, sesungguhnya Allah amat berat siksa-Nya" (QS. al-Ma'idah/5:2).

Dari ayat di atas terdapat kalimat تَعَاوَنُوا yang artinya "*tolong-menolong*". Ayat di atas menjelaskan perintah untuk saling tolong-menolong dalam hal kebajikan dan ketakwaan, yakni segala upaya yang dapat menghindarkan bencana duniawi dan atau ukhrawi. Selain itu ayat di atas juga menegaskan larangan tolong-menolong dalam hal dosa dan pelanggaran, karena sesungguhnya siksaan Allah amat pedih. Sebagai makhluk sosial manusia berkewajiban bermasyarakat dan saling tolong-menolong antara satu dengan yang lainnya (Hasbi, 2002 : 246).

Dari keterangan di atas dapat dicontohkan dengan ketika mengucapkan salam. Ketika seorang mengucapkan salam pasti orang yang diajak bicara akan menjawab salam tersebut dan sebaliknya terjadi, ketika ada orang yang mengucapkan salam pasti akan menjawab salam terebut.

Sifat latis tidak hanya tertutup dan komutatif, akan tetapi juga asosiatif. Asosiatif adalah suatu kerjasama. Dalam Islam asosiatif dapat dicontohkan dalam perintah untuk saling bekerjasama. Dalam surat al-Baqarah/2 ayat 282 disebutkan

يَٰٓأَيُّهَا ٱلَّذِينَ ءَامَنُوٓاْ إِذَا تَدَايَنتُم بِدَيۡنٍ إِلَىٰٓ أَجَلٖ مُّسَمّٗى فَٱكۡتُبُوهُۚ

"Hai orang-orang yang beriman, apabila kamu bermu'amalah tidak secara tunai untuk waktu yang ditentukan, hendaklah kamu menuliskannya" (QS. al-Baqarah/2:282).

Pada ayat di atas terdapat kalimat تَدَينْتُمْ yang mempunyai arti "*bermuamalah ialah seperti berjual beli, hutang piutang, atau sewa menyewa dan sebagainya*" mengisyaratkan suatu asosiatif. Muamalah juga dapat dikaitkan dengan rahasia. Dalam menjaga rahasia orang yang bersangkutan bermuamalah atau bekerjasama untuk saling menjaga rahasia tersebut agar terjaga. Dengan bermuamalah akan tercipta kerukunan antar sesama dalam mengerjakan sesuatu yang baik. Sebagai makhluk sosial, manusia menerima dan memberikan andilnya kepada orang lain, saling bermuamalah untuk memenuhi hajat hidup dan mencapai kemajuan dalam hidupnya. Muamalah disini dapat dicontohkan dalam jual beli. Sebagai penjual dan pembeli akan terjadi keharmonisan interaksi satu sama lain (Hasbi, 2002:112).

Sifat terakhir dari latis adalah absorpsi. Absorpsi dalam matematika adalah suatu penyerapan. Dalam Islam absorpsi dapat dicontohkan dalam perintah untuk saling memaafkan. Perhatikan firman Allah dalam surat asy-Syura/42 ayat 40:

وَجَزَٰٓؤُاْ سَيِّئَةٖ سَيِّئَةٞ مِّثۡلُهَاۖ فَمَنۡ عَفَا وَأَصۡلَحَ فَأَجۡرُهُۥ عَلَى ٱللَّهِۚ إِنَّهُۥ لَا يُحِبُّ ٱلظَّٰلِمِينَ ﴿٤٠﴾

"Dan balasan suatu kejahatan adalah kejahatan yang serupa, maka barang siapa memaafkan dan berbuat baik maka pahalanya atas (tanggungan) Allah. Sesungguhnya Dia tidak menyukai orang-orang yang zalim" (QS. asy-Syura/42:40).

Dari ayat di atas istilah absorpsi sudah ada dalam al-Qur'an. Dari definisinya absorpsi merupakan suatu penyerapan. Dalam Islam, absorpsi adalah memaafkan atau menghapus atau mengampuni kesalahan orang lain. Seperti dalam ayat diatas terapat kalimat عَفَا yang artinya “*memaafkan*”. Islam mengajak manusia untuk saling memaafkan dan memberi derajat tinggi bagi pemaaf. Contoh memaafkan orang yang berbuat salah kepada kita ketika orang tersebut menyadari kesalahannya dan berjanji tidak akan mengulangi lagi kesalahan tersebut, sehingga kerukunan hubungan sesama akan terbina dalam kehidupan bermasyarakat (Hasbi, 2002:1121).

Dari keterangan diatas dapat disimpulkan bahwa himpunan-himpunan dalam latis mempunyai elemen atau anggota. Anggota di dalam himpunan itu diibaratkan dalam kehidupan merupakan makhluk yang menjadi salah satu anggota dari ciptaan-Nya. Sedangkan operasi *biner* merupakan operasi antar anggota himpunan dengan dua interaksi. Hal ini diibaratkan seperti interaksi antara makhluk-makhluk Allah, dan sifat-sifat yang harus dipenuhi merupakan aturan-aturan yang telah ditetapkan oleh Allah, artinya sekalipun makhluk-Nya berinteraksi dengan sesama makhluk, ia harus tetap berada dalam koridor yang telah ditetapkan Allah.

BAB III

PEMBAHASAN

Berdasarkan kerangka teori pada bab sebelumnya maka pembahasan berawal dari definisi latis secara teoritis yang memenuhi unsur-unsur struktur aljabar sebagai berikut.

3.1. Definisi Latis

Berdasarkan penjelasan pada bab II, latis dapat dipandang sebagai order dan aljabar. Pada bab ini akan dibahas tentang latis sebagai order dan latis sebagai aljabar. Kemudian dari kedua pembahasan tersebut akan diperoleh pembahasan tentang ideal dari latis yang merupakan pengembangan dari latis yang mengalami adaptasi, berbeda dengan ideal pada aljabar abstrak.

3.1.1. Latis sebagai Order

Pengembangan dari definisi latis terdapat beberapa teorema yang berhubungan dengan order, diantaranya adalah

Teorema 3.1.1.1

Order $(L\,;\,\leq)$ dengan anggota himpunan poset adalah latis jika sup H dan inf H ada untuk setiap finit subset tidak kosong H dari L.

(Grätzer, 2011:11)

Bukti.

Ambil $(L\,;\,\leq)$ memenuhi definisi asli dan ambil $H \subseteq L$ tidak kosong dan finit. Jika $H = \{a\}$, maka $sup\,H = \,inf\,\,H = a$. Jika $H = \{a_0, \dots, a_{n-1}\}$ untuk suatu $n \geq 1$, maka

$$sup\ \{\dots sup\{sup\{a_0, a_1\}, a_2\}, \dots, a_{n-1}\}\ =\ sup\ H$$

Sebagai contoh, jika $H = \{a, b, c\}$, maka himpunan $d = \sup\{a\ , b\}$ dan $e = \sup\{c\ ,\ d\}$; terbukti bahwa $e = \sup H$. Pertama, $a\ , b \leq d$ dan $c\ , d \leq e$; oleh sebab itu (oleh transitif), $x \leq e$ bagi setiap $x \in H$. Kedua, jika f adalah batas atas dari H, maka $a\ , b \leq f$ dan dengan demikian $d \leq f$; juga $c \leq f$, sehingga $c\ , d \leq f$, oleh sebab itu, $e \leq f$, karena $e = \sup\{c\ , d\}$. Dengan demikian e adalah sup dari H.

Oleh dualitas (dengan kata lain, dengan menerapkan prinsip dualitas), disimpulkan bahwa inf H ada.

Latis yang tidak mempunyai nol atau identitas, sehingga sup $\emptyset$ dan inf $\emptyset$ atau sup-nya tidak ada dan inf tidak ada. Batas latisnya adalah nol atau identitas. Setiap latis finit mempunyai batas. Bukti sederhana dari teorema 3.1.1.1 dapat dibedakan untuk menghasilkan sejumlah besar dengan persamaan pernyataan trivial tentang latis dan order. Untuk membuat penggunaan dari prinsip dualitas untuk latis, catatan:

jika $(P\ ;\ \leq)$ adalah latis, sehingga dualnya $P^{\delta} = (P;\ \leq)$.

(Grätzer, 2011:9-10)

Dengan demikian latis dapat dipandang sebagai order karena pada sisi lain latis merupakan himpunan tidak kosong yang memenuhi sifat-sifat relasi disebut himpunan order atau order (*partially ordered set* atau poset).

3.1.2. Latis sebagai Aljabar

Pada subbab selanjutnya telah dibahas tentang latis sebagai order, selanjutnya akan dibahas latis sebagai aljabar. Artinya bahwa latis juga merupakan operasi dari anggota-anggota himpunannya. Berdasarkan pengertian dan simbol dari himpunan yaitu menggunakan huruf kapital, maka berikut ini merupakan pengertian dari latis sebagai aljabar.

Ambil $(A\,;\circ)$ sebagai aljabar dengan A sembarang anggota himpunan dan sembarang operasi *biner* $\circ$. Aljabar $(A\,;\circ)$ didefinisikan semilatis jika operasi $\circ$ bersifat idempoten, komutatif, dan asosiatif. Selanjutnya, aljabar $(L\,;\vee\,;\wedge)$ yang merupakan himpunan L yang anggota-anggotanya mempunyai sifat-sifat latis pada operasi $\vee$ dan $\wedge$ akan disebut latis jika L adalah himpunan tak kosong, $(L\,;\vee)$ dan $(L\,;\wedge)$ adalah semilatis, dan kedua-duanya sifat absorpsinya dipenuhi.

Dari kondisi latis sebagai order dan latis sebagai aljabar, teorema berikut menyatakan bahwa latis sebagai aljabar dan latis sebagai order adalah konsep "ekuivalen" (Grätzer, 2011:12).

Teorema 3.1.1.1

(i) Ambil order $\mathfrak{L} = (L\,;\,\leq)$ sebagai latis. Himpunan

$$a \vee b = \sup\{a\,,b\};$$

$$a \wedge b = \inf\{a\,,b\}.$$

Maka aljabar $\mathfrak{L}^{alg} = (L\,;\vee\,;\wedge)$ adalah latis.

(ii) Ambil aljabar $\mathfrak{L} = (L\,;\vee\,;\wedge)$ sebagai latis.

$$a \leq b \text{ jika } a \vee b = b$$

Maka $\mathfrak{L}^{ord} = (L\,;\,\leq)$ adalah order, dan order $\mathfrak{L}^{ord}$ adalah latis.

(Grätzer, 2011:12-13)

Bukti.

(i) Teorema ini telah dibuktikan dalam subbab sebelumnya yaitu pada subbab latis sebagai order. Pada subbab sebelumnya telah dijelaskan bahwa $\vee$ adalah operasi gabungan, dan $\wedge$ adalah operasi irisan, pada latis keduanya adalah operasi *biner*, yang berarti dapat berlaku untuk sepasang unsur $a\,,b$ dari L untuk menghasilkan elemen dari L. Dengan demikian $\vee$ adalah peta dari L^2 ke dalam L dan demikian adalah $\wedge$.

Bukti sebelumnya menghasilkan

$$(\dots((a_1 \vee 1_2) \vee a_3) \dots) \vee a_n \;=\; \sup\{a_1\;, \dots\;, a_n\},$$

dan terdapat suatu rumus serupa untuk infimum.

(ii) Pertama, himpunan $a \leq b$ didefinisikan $a \vee b = b$. Sekarang relasi $\leq$ adalah refleksif karena $\vee$ idempoten; relasi $\leq$ adalah antisimetrik karena $a \leq b$ dan $b \leq a$ dimaksudkan $a \vee b = b$ dan $b \vee a = a$ oleh komutatif dari $\vee$, mengakibatkan bahwa $a = a \vee b = b \vee a = b$; relasi $\leq$ adalah transitif, karena jika $a \leq b$ dan $b \leq c$, maka $b = a \vee b$ dan $c = b \vee c$, dan demikian

$c \;=\; b \;\vee\; c \;=\; (a \;\vee\; b) \;\vee\; c$ ($\vee$ asosiatif)

$\;=\; a \;\vee\; (b \;\vee\; c) \;=\; a \;\vee\; c,$

yaitu, $a \leq c$. Dengan demikian $(L\,;\,\leq)$ adalah order. Untuk membuktikan bahwa $(L\,;\,\leq)$ adalah latis, diverifikasi $a \vee b = \sup\{a, b\}$ dan $a \wedge b = \inf\{a, b\}$. Bahwasanya, $a \leq a \vee b$, karena

$$a \vee (a \vee b) = (a \vee a) \vee b = a \vee b;$$

mempergunakan asosiatif dan idempoten dari $\vee$; dengan cara yang sama, $b \leq a \vee b$. Sehingga $a \vee b$ adalah batas atas dari a dan b. Sekarang jika c adalah beberapa batas atas dari a dan b, maka $a \leq c$ dan $b \leq c$, yang, $a \vee c = c$ dan $b \vee c = c$, maka

$$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c) = a \vee c = c;$$

dengan demikian $a \vee b \leq c$, membuktikan $a \vee b = \sup\{a, b\}$.

Kedua, $a \wedge b \leq a$ dan $a \wedge b \leq b$, karena $(a \wedge b) \vee a = a$ dan $(a \wedge b) \vee b = a$ oleh yang pertama sifat absorpsi. Jika $c \leq a$ dan $c \leq b$, yang, jika $a = a \vee c$ dan $b = b \vee c$, maka $a \wedge c = (a \vee c) \wedge c = c$ dan $b \wedge c = c$ (oleh kedua ciri absorpsi). Demikian

$(a \wedge b) \vee c = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ (karena $c = a \wedge c$)

$= (a \wedge b) \vee (a \wedge (b \wedge c))$ (karena $c = b \wedge c$)

$= (a \wedge b) \vee ((a \wedge b) \wedge c)$ (asosiatif)

$= a \wedge b$ (absorpsi)

dimana $c \leq a \wedge b$, melengkapi pembuktian dari $a \wedge b = \inf\{a , b\}$.

Pembahasan (i) dan (ii) mendeskripsikan proses dari order ke aljabar dan sebaliknya.

Bukti dari teorema 3.1.1.1 dan juga pernyataan dari teorema 3.1.1.1, adalah pokok ke kritik:

- Pada definisi dari latis sebagai aljabar, diperlukan delapan sifat (sebagaimana disebutkan pada bab II halaman 27); keidempotenan adalah *redundant*.
- Langkah terakhir dari bukti dari (ii) dapat dibuat lebih sederhana dengan membuktikan

$$b = a \vee b \text{ jika dan hanya jika } a = a \wedge b$$

- Teorema 3.1.1.1 harus didahului oleh dalil serupa untuk "semilatis"

Akhirnya, catatan itu untuk latis sebagai aljabar, prinsip dualitas menjadi bentuk sederhana.

3.1.3 Prinsip Dualitas untuk Latis

Dipergunakan notasi

$$a \vee b = \sup\{a, b\},$$

$$a \wedge b = \inf\{a, b\},$$

dan sebut $\vee$ gabungan, dan $\wedge$ irisan. Di latis, keduanya adalah operasi *biner*, yang berarti dapat berlaku untuk sepasang unsur a, b dari L untuk menghasilkan elemen dari L. Dengan demikian $\vee$ adalah peta dari L^2 ke dalam L dan demikian juga $\wedge$.

Bukti sebelumnya menghasilkan bahwa

$$(\ldots((a_1 \vee 1_2) \vee a_3) \ldots) \vee a_n = \sup\{a_1, \ldots, a_n\},$$

dan terdapat rumus serupa untuk infimum. Diamati bahwa sisi kanan tidak dapat menyesuaikan dalam cara unsur a_i didaftarkan. Dengan demikian $\vee$ dan $\wedge$ adalah idempoten, komutatif, dan asosiatif adalah yang memenuhi kondisi berikut:

(Idem) Idempoten: $a \vee b = a,$

$a \wedge b = a$

(Comm) Komutatif: $a \vee b = b \vee a,$

$a \wedge b = b \wedge a$

(Assoc) Asosiatif: $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$

$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$

Sifat dari operasi tersebut disebut idempoten, komutatif, dan asosiatif (sebagaimana pada pengertian latis sebagai aljabar). Seperti halnya kasus ketika terdapat satu operasi asosiatif, ditulis operasi yang teriterasi tanpa tanda kurung, sebagai contoh,

$$a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_n$$

dan sama untuk $\wedge$.

Ada pasangan lain dari ketentuan yang menghubungkan $\vee$ dan $\wedge$. Untuk memperoleh operasi tersebut, diketahui bahwa jika $a \leq b$, maka $\sup\{a , b\} = b$; yaitu, $a \vee b = b$, dan sebaliknya. Dengan demikian

$$a \leq b \text{ jika dan hanya jika } a \vee b = b$$

Oleh dualitas (dan dengan mempertukarkan a dan b),

$$a \leq b \text{ jika dan hanya jika } a \wedge b = a$$

benar. Penerapan "hanya jika" bagian dari yang ketentuan pertama ke a dan $a \wedge b$, dan ketentuan kedua ke $a \vee b$ dan a, diperoleh sifat absorpsi:

(Absorp) absorpsi: $a \wedge (b \vee c) = a$

$$a \vee (b \wedge c) = a$$

Ambil Φ sebagai latis dengan operasi $\vee$ dan $\wedge$. Dual dari Φ adalah Φ^{δ} diambil dari Φ dengan memadukan $\vee$ dan $\wedge$. Jika Φ adalah benar secara keseluruhan latis, maka Φ^{δ} juga benar secara keseluruhan latis (Grätzer, 2011:14).

Untuk membuktikan ini hanya harus mengamati jika $\mathfrak{L} = (L ; \vee, \wedge)$, maka dualitas dari $\mathfrak{L}^{ord}$ adalah $(L ; \wedge, \vee)^{ord}$. Akhirnya, Φ melibatkan $\leq$, dan kemungkinanya 0 dan 1, sebagai tambahan terhadap $\vee$ dan $\wedge$. Ketika dualism pada Φ, dipadukan $\vee$ dan $\wedge$, pergantian $\leq$ oleh $\geq$, dan substitusi dengan 0 dan 1. Untuk latis L, ditunjukkan latis L dual oleh L^{δ}.

Menggunakan latis sebagai aljabar secara alamiah untuk mendefinisikan kondisi pada latis seperti delapan sifat di atas yaitu idempoten, komutatif, asosiatif dan absorpsi, menurut latis tetapi tidak untuk yang lainnya, sebagai contoh,

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z),$$

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

Latis yang memenuhi sifat-sifat tersebut disebut distributif dan kelas latis distributif dinotasikan oleh D. Sebagai contoh yang lain

$$(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = x \wedge (y \vee (x \wedge z))$$

Latis yang memenuhi sifat di atas disebut modular dan kelas latis modular dinotasikan oleh M. Selanjutnya kelas pada aljabar menyatakan bahwa latis dengan operasi penambahan, sebagaimana kelas aljabar Boolean, $(B\,; \vee\,,\ \wedge\,,\ ', 0\,, 1)$, dimana $(B\,; \vee\,,\ \wedge)$ adalah latis distributif dengan himpunan kosong, 0, dan identitas, 1, dimana

$$a \vee \acute{a} = 1$$

$$a \wedge \acute{a} = 0$$

Korespondensi latis, $(B\,; \vee\,,\ \wedge)$, disebut latis Boolean (Grätzer, 2011:15).

3.2. Sublatis

Definisi 3.2.1

Latis $\mathfrak{K} = (K\,; \vee\,,\ \wedge)$ dengan anggota himpunan poset adalah sublatis dari latis $\mathfrak{L} = (L,\ \vee\,,\ \wedge)$ dengan anggota himpunan poset, jika K adalah subset di L dengan sifat $a\,, b \in K$ yang mengakibatkan $a \vee b, a \wedge b \in K$ (operasi $\vee$ dan $\wedge$ diambil di $\mathfrak{L}$), dan $\vee$ dan $\wedge$ di $\mathfrak{K}$ adalah pembatasan di K dengan $\vee$ dan $\wedge$ pada L; disimbolkan $\mathfrak{K} \leq \mathfrak{L}$ dan dapat juga disimbolkan $K \leq L$

(Grätzer, 2011:31).

Dalam bahasa yang lebih sederhana, diambil subset tidak kosong K pada latis L bahwa K tertutup dari operasi $\vee$ dan $\wedge$ pada L. Jelas, K adalah latis dengan operasi $\vee$ dan $\wedge$. Jika K adalah sublatis dari L, maka L adalah ekstensi di K; dalam notasi, $L \geq K$. Extensi adalah *proper* jika memiliki setidaknya satu unsur. Jika

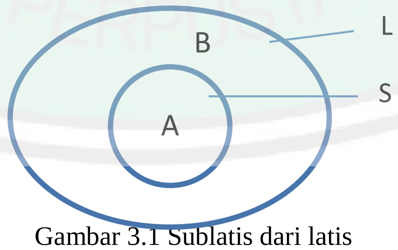
$K \leq L$ dan terdapat endomorfisma $\varphi : L \longrightarrow K$ memenuhi $\varphi(x) = x$ untuk semua $x \in K$, maka φ adalah *retraction* dan K adalah *retract* di L. Jika φ adalah homomorfisma dari latis K ke latis L, maka

$$\varphi(K) = \{\varphi(x) | x \in K\}$$

adalah sublatis L; jika φ adalah satu-ke-satu, maka sublatis ini isomorfik ke K.

Ambil L latis dan ambil $A_\lambda \leq L$ untuk $\lambda \in \Lambda$. Kemudian $\bigcap(A_\lambda | \lambda \in \Lambda)$ (teori himpunan irisan untuk $\lambda \in \Lambda$) juga tertutup pada $\vee$ dan $\wedge$ dan dapat disebut latis jika tidak kosong; sehingga untuk setiap $H \subseteq L$ dengan $H \neq \emptyset$, terdapat himpunan bagian terkecil dari L mengandung H dan tertutup di $\vee$ dan $\wedge$; ditunjukkan dengan $sub(H)$. Sublatis $sub(H)$ disebut sublatis dari L dihasilkan oleh H, dan H disebut menghasilkan himpunan pada $sub(H)$. Jika $H = \{a, b, c, \dots,\}$, maka dapat ditulis $sub(a\,, b\,, c\,, \dots)$ untuk $sub(H)$. $Sub(H)$ dinotasikan dengan $[H]$ (Grätzer, 2011:31).

Pada bab sebelumnya juga telah dijelaskan tentang definisi dan teorema-teorema sublatis. Sublatis merupakan subhimpunan dari unsur-unsur suatu latis seperti pada gambar berikut.



Gambar 3.1 Sublatis dari latis

Pada gambar di atas diberikan B sebagai L yaitu latis dan A sebagai S yaitu sublatis dengan semesta pembicaraan Latis. Artinya bahwa semua anggota dari himpunan yang digambar diagram vennnya memenuhi sifat-sifat latis. Jadi dari gambar di atas dapat diketahui bahwa setiap unsur dari S terdapat pada unsur L

yang dapat dikatakan S adalah subhimpunan dari L. Subhimpunan tersebut dapat disebut sublatis jika memuat irisan dan gabungan sebarang dua unsur dari latis tersebut.

Contoh 3.2.1

S adalah latis dengan anggota himpunan bilangan bulat genap dengan operasi $\vee$ dan $\wedge$ dari suatu latis L dengan anggota himpunan bilangan bulat dengan operasi $\vee$ dan $\wedge$. Buktikan bahwa S adalah sublatis.

Bukti.

Latis $(S\,;\vee\,,\ \wedge)$ adalah sublatis dari latis $(L,\ \vee\,,\ \wedge)$ jika S adalah subset di L dengan sifat $a\,,b \in S$ yang mengakibatkan $a \vee b, a \wedge b \in S$ (operasi $\vee$ dan $\wedge$ diambil di L), dan $\vee$ dan $\wedge$ di S adalah pembatasan di S dengan $\vee$ dan $\wedge$ pada L; disimbolkan $S \leq L$ dan dapat juga disimbolkan $S \leq L$

3.3 Sublatis Konveks

Definisi 3.3.1

Sublatis S dari latis L disebut konveks jika dan hanya jika untuk setiap pasang unsur komparabel a, b di S, $a \leq b$, seluruh interval $[a, b]$ berada di S

(Sukardjono, 2002:93)

Sublatis konveks terbentuk dari suatu sublatis S dari latis L jika setiap pasang unsur dalam sublatis tersebut dapat saling dibandingkan. Ketika pada setiap pasang unsur itu tidak dapat saling dibandingkan, maka sublatis S tersebut tidak konveks. Setiap pasang unsur yang komparabel dan memenuhi $a \leq b$ tersebut dapat terbentuk dari suatu poset.

Definisi 3.3.2

Sublatis S dari latis L disebut konveks jika dan hanya jika sublatis ini memuat sebarang a dan b bukan saja ab dan $a + b$ tetapi memuat juga semua x dimana $ab \leq x \leq a + b$

(Sukardjono, 2002:93)

Pada bab 2 telah dijelaskan bahwa disebut sublatis jika himpunan bagian dari unsur-unsur suatu latis tersebut memuat irisan dan gabungan sebarang dua unsur dari latis tersebut. Sedangkan pada sublatis konveks, sublatis tersebut tidak hanya memuat irisan dan gabungan tetapi juga memuat semua x. Pada himpunan x tersebut menghasilkan $ab \leq x \leq a + b$.

Teorema 3.3.1

Definisi 3.1.1 dan definisi 3.1.2 adalah ekuivalen

(Sukardjono, 2002:93)

Bukti.

Jika sublatis S adalah konveks menurut definisi 3.3.1, untuk sebarang unsur a, b di S unsur komparabel ab dan a + b anggota S (sebab S adalah sublatis) dan seluruh interval [ab, a + b] dengan demikian anggota S; yaitu S memuat semua x dimana ab ≤ x ≤ a + b. Jadi definisi 3.3.1 ⟹ definisi 3.3.2.

Jika sublatis S adalah konveks menurut definisi 3.3.2, dan a, b adalah sepasang unsur sebarang yang komparabel, dengan umpamanya, $a \leq b$, maka $ab = a, a + b = b$, sehingga interval $[ab, a + b]$ yang menjadi anggota S menurut definisi 3.3.2 berimpit dengan interval $[a, b]$, dan definisi 3.3.1 dipenuhi. Jadi, definisi 3.3.2 ⟹ definisi 3.3.1.

Contoh 3.3.1

Misalkan $(L, +, x)$ adalah latis dengan operasi penjumlahan $(+)$ dan perkalian $(\times)$ dengan anggota himpunan bilangan bulat positif $a, b, \dots, a \leq b$ dimaksudkan dengan $a = b$ atau terdapat c sehingga $a + c = b$. Dari suatu latis diambil sublatis dengan himpunan bagian tak kosong yang meliputi himpunan bilangan bulat positif genap. Buktikan bahwa sublatis S adalah sublatis konveks.

Bukti.

Setiap pasang unsur pada himpunan sublatis tersebut komparabel karena misal ambil sebarang a, b anggota himpunan sublatis S, $a \neq b$ sehingga $a \leq b$.

Sublatis S dari latis L dapat disebut konveks jika dan hanya jika sublatis ini memuat sebarang ab dan $a + b$. Ambil sebarang anggota himpunan sublatis tersebut. Ketika anggota himpunan bilangan bulat positif genap dikalikan dengan anggota himpunan bilangan bulat positif genap maka akan menghasilkan himpunan bilangan bulat positif genap yang akan kembali pada anggota himpunan sublatis S tersebut itu sendiri yang dituliskan $ab \in S$. Begitu juga sebaliknya pada operasi penjumlahan, ketika himpunan bilangan bulat positif genap dijumlahkan dengan himpunan anggota himpunan bulat positif genap maka akan menghasilkan anggota himpunan bilangan positif genap juga yang dituliskan $a + b \in S$.

Dalam suatu sublatis konveks bukan saja ab dan $a + b$ tetapi juga memuat semua x dimana $ab \leq x \leq a + b$. Misal ambil sebarang anggota himpunan sublatis a, b dan terdapat juga x dalam sublatis tersebut, maka akan mengakibatkan $ab \leq x \leq a + b$.

3.4 Ideal

Pada sub bab ini adalah pembahasan tentang ideal yang merupakan pengembangan dari latis yang mengalami adaptasi, berbeda dengan ideal pada aljabar abstrak. Berikut adalah definisi, teorema-teorema dan contoh yang membahas ideal dari latis tersebut.

Definisi 3.4.1

Suatu himpunan bagian tak kosong X dari suatu latis L disebut ideal dari L jika dan hanya jika dipenuhi syarat-syarat berikut:

(i) Untuk $a, b \in X \Rightarrow a + b \in X$

(ii) Untuk $a \in X, c \in L \Rightarrow ac \in X$

(Sukardjono, 2002:94)

Menurut Grätzer (2011:32) suatu subset X dari latis L disebut ideal jika X sublatis dari L dan $x \in X$ dan $a \in L$ menyebabkan $x \wedge a \in X$. Suatu latis dapat disebut ideal jika suatu subset dari latis tersebut membentuk sublatis dari latis itu sendiri. Pada definisi yang tercantum dalam bab 2 telah dijelaskan tentang subset dari latis yang menjadi suatu sublatis. Ketika subset I tersebut tidak membentuk sublatis dari latis itu sendiri, maka subset dari latis tersebut tidak dapat disebut dengan ideal. Jika subset dari latis tersebut telah membentuk sublatis serta misal $x \in I$ dan $a \in L$, maka terbentuklah ideal dengan sifat $x \wedge a \in I$. Begitu juga menurut Sukardjono, pada definisi 3.4.1 tersebut menunjukkan bahwa subset dari latis dapat disebut ideal jika terdapat syarat yang telah disebutkan di atas.

Contoh 3.4.1

S adalah subset dengan anggota himpunan bilangan bulat genap dengan operasi $\times$ dan $+$ dari suatu latis L dengan anggota himpunan bilangan bulat dengan operasi $\times$ dan $+$. Buktikan bahwa subset S dari latis L adalah ideal.

Bukti.

Pada definisi 3.4.1 telah disebutkan syarat-syarat ideal dari latis yaitu:

(i) Untuk $a, b \in X \Rightarrow a + b \in X$

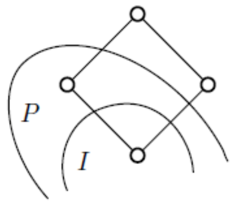
(ii) Untuk $a \in X, c \in L \Rightarrow ac \in X$

Misal $a, b \in S \Rightarrow a + b \in S$

Misal $a \in S, c \in L \Rightarrow ac \in S$

Dari pembuktian di atas, tekbukti bahwa subset S dari latis L adalah ideal.

Suatu ideal I dari L adalah *proper* jika $I \neq L$. Suatu latis dapat disebut ideal jika terdapat subset dari latis tersebut yang membentuk sublatis. Jika subset dan latis tersebut sama maka latis tersebut tidak dapat menjadi ideal. Maka seperti yang telah disebutkan pada definisi di atas, ideal I dari L adalah *proper* jika $I \neq L$. Seperti pada gambar 3.1, diberikan B sebagai L yaitu latis dan A sebagai S yaitu subset dari latis. Jadi dari gambar dapat diketahui bahwa setiap unsur dari S terdapat pada unsur L yang dapat dikatakan S adalah subset dari L dan subset A dapat menjadi ideal jika subset S merupakan sublatis dari latis L. *Proper* ideal I pada L adalah prima jika $a\ , b \in L$ dan $a \wedge b \in I$ menyatakan bahwa $a \in I$ atau $b \in I$. Pada Gambar 3.2, I adalah ideal dan P adalah ideal prima.



Gambar 3.2 Ideal dan Ideal Prima

Karena irisan dari sembarang bilangan sublatis konveks (ideal) adalah sublatis konveks (ideal) kecuali tidak pernah kosong (*unless void*), dapat didefinisikan sublatis konveks dihasilkan oleh subset H, dan ideal yang dihasilkan oleh subset H dari latis L, diperjelas bahwa $H \neq \emptyset$. Ideal yang dihasilkan oleh subset H akan dilambangkan oleh $id(H)$, dan jika $H = \{a\}$, dituliskan $id(a)$ untuk $id(\{a\})$; akan disebut $id(a)$ sebagai ideal utama.

Dari definisi di atas telah disebutkan bahwa suatu latis dapat disebut ideal jika setiap unsur latis dengan himpunan bagian dari unsur latis tersebut membentuk sublatis dari latis tersebut yang pada keduanya mengakibatkan sifat. Dengan adanya sifat tersebut, latis dapat membentuk ideal. Seperti halnya manusia, setiap manusia mempunyai sifat yang berbeda. Jika beberapa sifat mereka dipertemukan satu sama lain, akan timbul suatu sifat yang dapat membentuk suatu kesempurnaan. Seperti halnya orang mukmin yang telah dijelaskan di dalam al-Qur'anul Karim pada surat al Isra'/17 ayat 70 yang berbunyi

۞ وَلَقَدْ كَرَّمْنَا بَنِيٓ ءَادَمَ وَحَمَلْنَٰهُمْ فِي ٱلْبَرِّ وَٱلْبَحْرِ وَرَزَقْنَٰهُم مِّنَ ٱلطَّيِّبَٰتِ وَفَضَّلْنَٰهُمْ عَلَىٰ كَثِيرٖ مِّمَّنْ خَلَقْنَا تَفْضِيلٗا ٧٠

"Dan sesungguhnya telah Kami muliakan anak-anak Adam, Kami angkut mereka di daratan dan dil autan, Kami beri mereka rezki dari yang baik-baik dan Kami lebihkan mereka dengan kelebihan yang sempurna atas kebanyakan makhluk yang telah Kami ciptakan" (QS. al-Isra'/17:70).

Dalam ayat di atas menjelaskan tentang adapun kemuliaan manusia bermula ketika Allah berkehendak menjadikan Adam sebagai Khalifah-Nya di atas muka bumi dengan misi ibadah kepada-Nya. Kehendak Allah menjadikan manusia sebagai Khalifah-Nya di bumi itu tentunya berdasarkan ilmu dan perencanaan-Nya yang sangat matang. Kemuliaan tersebut bukan karena subyektivitas Tuhan Pencipta yang Maha Kuasa atas segala makhluk-Nya, melainkan berdasarkan standar ilmiyah terkait dengan rancangan penciptaan yang sangat sempurna baik fisik maupun non fisik seperti akal, qalb (hati), tanpa kehilangan syahwat dan nafsu hewaniyahnya, demikian juga gerak mekanik seluruh tubuhnya yang demikian indah dan dinamis. Dengan demikian, manusia dianugerahkan berbagai kelebihan, dan kelebihan-kelebihan tersebut tidak diberikan Allah kepada makhluk lain selain manusia dan telah pula menyebabkan mereka memperoleh kemuliaan-Nya. Namun demikian, kemulian manusia erat kaitannya dengan komitmen untuk menjaga kelebihan-kelebihan tersebut dengan cara menggunakannya secara optimal dan seimbang sesuai dengan kehendak yang telah dirancang Tuhan Pencipta.

Manusia adalah makhluk Allah yang paling mulia selama mereka dapat memanfaatkan secara optimal tiga anugerah keistimewaan/kelebihan yang mereka miliki yakni, **Spiritual, Emotional, dan Intellektual** dalam diri sesuai misi dan visi penciptaan meraka. Namun apabila terjadi penyimpangan misi dan visi hidup, mereka akan menjadi makhluk paling hina, bahkan lebih hina dari binatang dan Iblis bilamana mereka kehilangan kontrol atas ketiga keistimewaan yang mereka miliki. Penyimpangan misi dan visi hidup akan menyebabkan derajat manusia jatuh di hadapan Tuhan Pencipta dan di dunia.

Dari ayat di atas juga dapat diperoleh suatu teorema berikut. Pada teorema berikut terdapat dua subset tak kosong dari latis L. Kedua subset dari latis tersebut dapat saling berkesinambungan sebagaimana manusia yang juga dapat saling berkesinambungan satu sama lain seperti yang telah dijelaskan sebelumnya.

Teorema 3.4.1

Ambil L adalah latis dan ambil H dan I adalah subset tidak kosong dari L.

(i) I adalah ideal jika dan hanya jika berikut dua kondisi terus:

(i1) $a, b \in I$ mengakibatkan $a \wedge b \in I$

(i2) I adalah himpunan turunannya

(ii) $I = id(H)$ jika dan hanya jika

$$I = \{x | x < h_0 \vee \ldots \vee h_{n-1} \text{ untuk } n \geq 1 \; dan \; h_0, h_1, h_2 \ldots \; h_{n-1} \in H\}$$

(Grätzer, 2011:32)

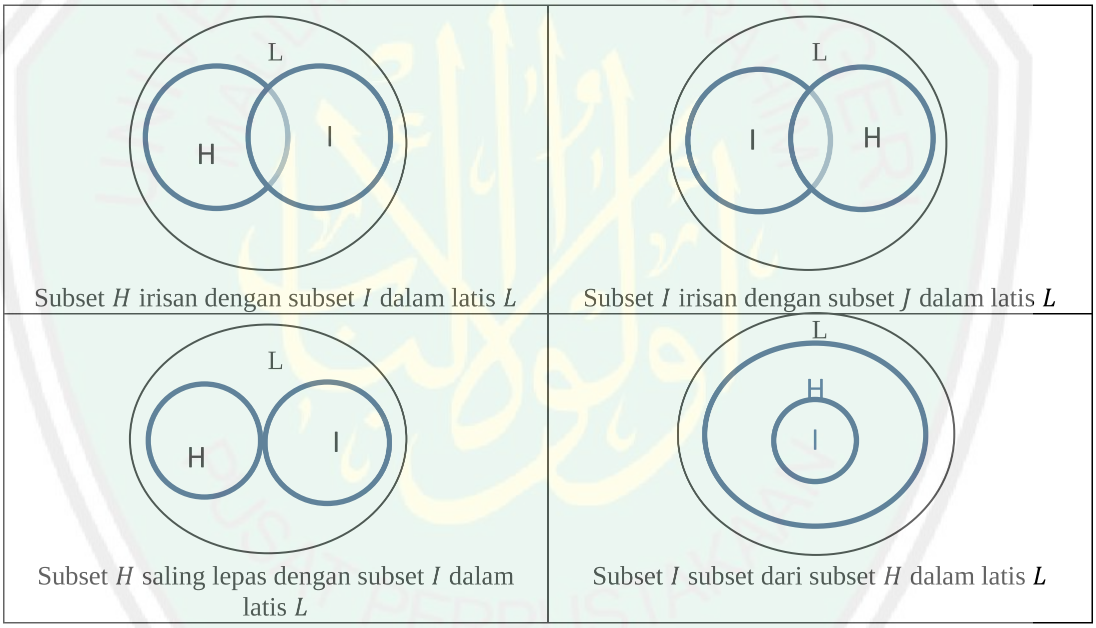
Bukti

(i) Ambil I sebagai ideal. Maka $a, b \in I$ mengakibatkan bahwa $a \vee b \in I$, karena I adalah sublatis, sesuai (i1). Jika $x \leq a \in I$, maka $x = x \wedge a \in I$ hal ini sesuai dengan (i2). Sebaliknya, ambil I yang memenuhi (i1) dan (i2). Ambil $a, b \in I$. Maka $a \vee b \in I$ berdasarkan (i1), dan karena $a \wedge b \leq a \in I$, selanjutnya $a \wedge b \in I$ berdasarkan (i2); sehingga I adalah sublatis. Akhirnya, jika $x \in L$ dan $a \in I$, maka $a \wedge x \leq a \in I$, demikian $a \wedge x \in I$ yang berdasarkan (i2), membuktikan bahwa I adalah ideal.

(ii) Misalkan I_0 adalah himpunan di sisi kanan dari rumus ditampilkan dalam (ii). Menggunakan (i), jelas bahwa I_0 adalah ideal, dan jelas

$H \subseteq I_0$. Jika $H \subseteq J$ dan J adalah ideal, maka $I_0 \subseteq J$, dan dengan demikian I_0 adalah ideal terkecil yang memuat H; yaitu, $I = I_0$.

Pada teorema di atas terdapat banyak kemungkinan yang ada pada subset I dan subset J karena subset I dan subset J tidak dijelaskan pada ketentuannya. Kemungkinan-kemungkinan tersebut diantaranya yaitu subset I himpunan saling lepas dengan subset H dalam latis L, subset I himpunan irisan dengan subset H dalam latis L, subset I subset dari subset H dalam latis L atau subset H subset dari subset I dalam latis L. Kemungkinan tersebut dapat digambar sebagai berikut.



Subset H irisan dengan subset I dalam latis L

Subset I irisan dengan subset J dalam latis L

Subset H saling lepas dengan subset I dalam latis L

Subset I subset dari subset H dalam latis L

Gambar 3.3 Kemungkinan-kemungkinan dari subset H dan I dalam latis L

Ambil $Id\ L$ dinotasikan sebagai himpunan semua ideal pada L dan ambil $id_0L = IdL \cup \{\emptyset\}$. Disebut $Id\ L$ latis ideal dan Id_0L setara dengan (*the augmented*) latis ideal pada L.

Lemma 3.4.1

$Id\ L$ dan Id_0L adalah order di bawah himpunan inklusi yang setara dengan latis (Grätzer, 2011:33).

Bukti.

Untuk $I, J \in Id\ L$,

$$I \vee J = id(I \cup J)$$

Rumus ini dapat dibangun untuk I , $J \in Id_0 L$ jika mendapatkan bahwa $Id(\emptyset) = \emptyset$. Dari pembuktian teorema 1 poin (ii), dilihat bahwa I , $J \in Id\ L$, elemen $x \in I \vee J$ jika dan hanya jika $x \leq i \vee j$ untuk setiap $i \in I$ dan $j \in J$.

Sekarang amati postulat berikut

$$id(a) \vee id(b) = id(a \vee b);$$

$$id(a) \wedge id(b) = id(a \wedge b)$$

Karena $a \neq b$ menyatakan bahwa $id(a) \neq id(b)$, hal ini terbukti.

Teorema 3.4.2

(i) I adalah ideal sejati L jika dan hanya jika ada irisan-homomorfisma φ pada L onto C_2 seperti $I = \varphi^{-1}(0)$, gambaran invers dari 0, yaitu

$$I = \{x | \varphi(x) = 0\}$$

(ii) I adalah ideal utama L jika dan hanya jika ada homomorfisma φ pada L onto C_2 dengan $I = \varphi^{-1}(0)$

(Grätzer, 2011:33)

Bukti.

(i) Ambil I suatu ideal sejati dan φ didefinisikan $\varphi(x) = \begin{cases} 0, jika\ x \in I \\ 1, jika\ x \notin I \end{cases}$

jelas, φ adalah irisan-homomorfisma ke C_2.

Sebaliknya, ambil φ irisan-homomorfisma di L onto C_2 dan $I = \varphi^{-1}(0)$. Maka $\varphi\ (a) = \varphi(b) = 0$ berlaku untuk semua $a, b \in I$;

demikian

$$\varphi\,(a \vee b) \;=\; \varphi\,(a) \;\vee\; \varphi\,(b) \;=\; 0 \vee 0 \;=\; 0; \text{ dan juga } a \vee b \;\in\; I.$$

Jika $a \in I$; $x \in L$; $x \leq a$, maka $\varphi(x) \leq \varphi(a) = 0$, yaitu $\varphi(x) = 0$; maka $x \in I$. Akhirnya, φ adalah onto, oleh karena itu, $I \neq L$.

(ii) Jika I adalah prima, ambil φ dikonstruksi dalam bukti (i) dan perhatikan bahwa φ dapat bertentangan sifatnya menjadi homomorfisma hanya dengan $a, b \notin I$. Akan Tetapi, jika I adalah prima, $a \wedge b \notin I$; akibatnya, $\varphi(a \wedge b) = 1 = \varphi(a) \wedge \varphi(b)$, dan φ adalah homomorfisma. Sebaliknya, ambil φ adalah homomorfisma suatu L onto C2 dan ambil $I = \varphi - 1(0)$. Jika $a, b \notin I$, maka $\varphi(a) = \varphi\,(b) = 1$, sehingga $\varphi(a \wedge b) = \varphi\,(a) \wedge \varphi\,(b) = 1$, dan oleh karena itu, $a \wedge b \;\notin\; I$, sehingga I adalah prima.

Dari pembahasan di atas telah diketahui bahwa ideal dari latis dan ideal dari aljabar abstrak sangatlah berbeda. Namun terdapat beberapa kesamaan konsep dari kedua ideal tersebut. Pada aljabar abstrak ideal terbentuk dari suatu subring dari ring dengan beberapa syarat yang harus dipenuhi sedangkan ideal dari latis tersebut terbentuk dari sublatis dari latis dengan beberapa syarat yang harus dipenuhi. Sehingga dapat disimpulkan bahwa ideal tersebut terbentuk dari himpunan bagian dari bidang yang disejajarkannya.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah diberikan, maka dapat disimpulkan bahwa suatu aljabar dengan sifat yang berbeda dapat membentuk aljabar yang lain, seperti halnya ideal dari latis dengan sifat-sifat berikut.

a. Suatu subset I dari latis L disebut ideal jika sublatis dari L dan $x \in I$ dan $a \in L$ menyebabkan $x \wedge a \in I$
b. Suatu ideal I dari L adalah *proper* jika $I \neq L$
c. Ideal I adalah ideal sejati L jika dan hanya jika ada irisan-homomorfisma φ pada L onto C_2 seperti $I = \varphi^{-1}(0)$, gambaran invers dari 0, yaitu
$$I = \{x | \varphi(x) = 0\}$$
d. Ideal I adalah ideal utama L jika dan hanya jika ada homomorfisma φ pada L onto C_2 dengan $I = \varphi^{-1}(0)$

4.2 Saran

Pada penelitian ini penulis mengkaji perumusan tentang struktur aljabar yaitu ideal sebagai aplikasi dari latis. Bagi penelitian selanjutnya dapat dikembangkan dengan mengkaji bentuk aljabar lainnya seperti ring, modul sebagai aplikasi dari latis disertai dengan deskripsi gambar, teorema dan buktinya. Dapat pula diberikan aplikasi nyata dari topik-topik latis sebagaimana pada buku "*Lattice-Ordered Rings and Modules*" karangan Stuart A Steinberg (2010) diterbitkan oleh Springer, "*Lattice Theory: Special Topics and Applications*

(Volume 1)" karangan George Grätzer dan Friedrich Wehrung (2014) yang diterbitkan oleh Birkhauser.

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir, 2007. *Ketika Kiai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press.

Ash Shidiqi, TMH. 2002. *Al Bayan Tafsir Penjelas Al-Qur'an.*Bandung: PT Pustaka Rizki Putra

Grätzer, G. 2011. *Lattice Theory: Foundation.* Canada: Springer Basel.

Kasanah, S. 2009. *Aplikasi Fuzzy MADM Metode Topsis untuk Identifikasi Servqual (Contoh Kasus pada Swalayan BC UIN Malang).* Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim

Mas'oed, F. 2013. *Struktur Aljabar*. Jakarta: Permata Putri Media

Raisinghania, M.D. and Anggarwai, R.S. 1980. *Modern Algebra*. New Delhi: Ram Nagar

Rasyad, R. 2003. *Logika Aljabar*. Jakarta PT. Grasindo

Septaria, I. 2010. *Latis Modular dan Sifat-Sifatnya.* Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Sukardjono. 2002. *Teori Latis*. Yogyakarta: Andi