

**PENYELESAIAN MASALAH SYARAT BATAS
PADA PERSAMAAN TELEGRAF**

SKRIPSI

**OLEH
ROFIATUN JAMILA
NIM. 10610022**



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2015**

**PENYELESAIAN MASALAH SYARAT BATAS
PADA PERSAMAAN TELEGRAF**

SKRIPSI

**Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan
dalam Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)**

**Oleh
Rofiatun Jamila
NIM. 10610022**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2015**

**PENYELESAIAN MASALAH SYARAT BATAS
PADA PERSAMAAN TELEGRAF**

SKRIPSI

Oleh
Rofiatun Jamila
NIM. 10610022

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 08 April 2015

Pembimbing I,

Pembimbing II,

Ari Kusumastuti, S.Si., M.Pd
NIP. 19770521 200501 2 004

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

**PENYELESAIAN MASALAH SYARAT BATAS
PADA PERSAMAAN TELEGRAF**

SKRIPSI

Oleh
Rofiatun Jamila
NIM. 10610022

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal 29 April 2015

Penguji Utama : Dr. Usman Pagalay, M.Si

Ketua Penguji : Mohammad Jamhuri, M.Si

Sekretaris Penguji : Ari Kusumastuti, S.Si., M.Pd

Anggota Penguji : Dr. Abdussakir, M.Pd

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Rofiatun Jamila

NIM : 10610022

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul : Penyelesaian Masalah Syarat Batas pada Persamaan Telegraph

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan hasil pikiran atau tulisan orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada kajian pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 08 April 2015
Yang membuat pernyataan,

Rofiatun jamila
NIM. 10610022

MOTO

اللَّهُ لَا إِلَهَ إِلَّا هُوَ الْحَيُّ الْقَيُّومُ

“Allah, tidak ada Tuhan (yang berhak disembah) melainkan Dia, yang hidup kekal lagi terus menerus mengurus (makhluk-Nya).”(QS. Ali Imran:2)

فَإِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا إِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا

“Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan. Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan.”(QS. Alam Nasyrh: 5-6)

PERSEMBAHAN

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Teriring do'a semoga skripsi ini bermanfaat dan menjadi kesuksesan dunia akhirat, penulis persembahkan skripsi ini untuk:

Ibunda tersayang Siti Alfati yang selalu memberi dorongan dan semangat pada penulis

Ayahanda tersayang Umar Layang yang selalu menginspirasi penulis dengan kegigihan dan kesabarannya

Kedua saudara tersayang Ary Istrada dan Nurul Qomariyah yang senantiasa memberikan motivasi yang tiada tara.

Semoga Allah selalu menyertai langkahnya dalam menggapai kesuksesan di dunia dan akhirat.

KATA PENGANTAR

Syukur *Alhamdulillah* penulis panjatkan ke hadirat Allah Swt. atas limpahan rahmat, nikmat, dan karunia-Nya sehingga penulis dapat merampungkan penulisan skripsi yang berjudul “Penyelesaian Masalah Syarat Batas Pada Persamaan Telegraf” ini dengan baik dan benar. Shalawat dan salam semoga senantiasa tercurahkan kepada Rasulullah Muhammad Saw. yang telah menuntun umat manusia dari jaman jahiliyah menuju jaman ilmiah.

Selanjutnya penulis ucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah mengarahkan, membimbing, dan memberikan pemikirannya sehingga skripsi ini dapat diselesaikan dengan baik. Ucapan terima kasih penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Raharjo, M.Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Hj. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, sekaligus Dosen Pembimbing keagamaan yang telah memberikan saran dan bimbingan yang terbaik selama penulisan skripsi ini.
4. Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd, selaku dosen pembimbing, yang telah meluangkan waktunya untuk memberikan bimbingan dan arahan yang terbaik selama penyelesaian skripsi ini.
5. H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd, selaku dosen wali.

6. Seluruh dosen Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang dan seluruh staf serta karyawan.
7. Kedua orang tua penulis, Bapak Umar Layang dan Ibu Siti Alfati tercinta, yang selama ini memberikan segala yang terbaik untuk penulis yang tiada pernah terkira.
8. Teman-teman mahasiswa Jurusan Matematika angkatan 2010 dan 2011, terutama Abu Yazid Al-Busthomi, Imam Mufid, Moch. Irfan, Moch. Arif, Nurhasanah Ahdie, Yulias Mita Rosanti, Inggiani, Fafika Hayati, Ririt Novita Sari, Annora Azzahra, Siti Muyassaroh, Rurin Arista, Sri Shazi, Thaufina Kurniyati, Afidah Karimatul, Lia Izza, Luluk Ianatul Afifah, Wahyudi, dan Moh. Sukron, yang rela meluangkan waktunya untuk bertukar pikiran dengan penulis.
9. Semua pihak yang tidak mungkin penulis sebut satu persatu, penulis ucapkan terima kasih atas bantuannya.

Semoga skripsi ini bermanfaat dan dapat menambah wawasan keilmuan khususnya bidang matematika. Amiin.

Malang, April 2015

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PENGAJUAN	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	
HALAMAN MOTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR.....	viii
DAFTAR ISI.....	x
DAFTAR GAMBAR.....	xii
DAFTAR LAMPIRAN.....	xiii
ABSTRAK	xiv
ABSTRACT	xv
ملخص	xvi
BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah.....	5
1.3 Tujuan Penelitian	5
1.4 Manfaat Penelitian.....	5
1.5 Batasan Masalah	6
1.6 Metode Penelitian	6
1.7 Sistematika Penulisan.....	7
BAB II KAJIAN PUSTAKA	
2.1 Persamaan Telegraph sebagai Persamaan Diferensial Parsial.....	8
2.2 Persamaan Diferensial Parsial Linier	9
2.3 Pemisahan Variabel.....	11
2.4 Persamaan Diferensial Biasa Linier Homogen	18
2.5 Mengkaji Ilmu dalam Pandangan Islam.....	20
BAB III PEMBAHASAN	
3.1 Penyelesaian Persamaan Telegraph.....	22
3.1.1 Analisis Metode Pemisahan Variabel pada Persamaan Telegraph.	22
3.1.2 Analisis Solusi Khusus	28
3.2 Simulasi.....	32
3.3 Kajian Al-Quran tentang Model Persamaan Telegraph	42
BAB IV PENUTUP	
4.1 Kesimpulan	45
4.2 Saran	45

DAFTAR PUSTAKA	46
LAMPIRAN-LAMPIRAN	48
RIWAYAT HIDUP	57



DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Grafik 2D dan 3D Solusi Analitik Persamaan Telegraf.....	18
Gambar 3.1 Grafik 2D dan 3D Solusi Analitik Persamaan Telegraf Menggunakan Metode Pemisahan Variabel $u(x, 0) = x$ dan $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$	37
Gambar 3.2 Grafik 2D dan 3D Solusi Analitik Persamaan Telegraf Menggunakan Metode Pemisahan Variabel $u(x, 0) = \sin(x)$ dan $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$	42



DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1 Grafik 2D Solusi Analitik Persamaan Telegraph Menggunakan Metode Pemisahan Variabel $u(x, 0) = x$ dan $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$	48
Lampiran 2 Grafik 2D Solusi Analitik Persamaan Telegraph Menggunakan Metode Pemisahan Variabel $u(x, 0) = \sin(x)$ dan $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$	49
Lampiran 3 Grafik 3D Solusi Analitik Persamaan Telegraph Menggunakan Metode Pemisahan Variabel $u(x, 0) = x$ dan $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$	50
Lampiran 4 Grafik 3D Solusi Analitik Persamaan Telegraph Menggunakan Metode Pemisahan Variabel $u(x, 0) = \sin(x)$ dan $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$	51
Lampiran 5 Keabsahan Solusi dengan Menggunakan Program MAPLE.....	52
Lampiran 6 Keabsahan Solusi Secara Manual.....	53

ABSTRAK

Jamila, Rofiatun. 2015. **Penyelesaian Masalah Syarat Batas pada Persamaan Telegraph**. Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi. Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Ari Kusumastuti, S.Si., M.Pd. (II) Dr. Abdussakir, M.Pd.

Kata Kunci: Persamaan Telegraph, Pemisahan Variabel

Persamaan telegraf disajikan dalam bentuk persamaan diferensial parsial yang dapat diterapkan pada masalah gelombang sinyal listrik dijalar transmisi kabel. Dalam penelitian ini akan dibahas tentang penyelesaian masalah syarat batas pada persamaan telegraf dengan menggunakan metode pemisahan variabel. Langkah-langkah yang dilakukan adalah menyelesaikan persamaan telegraf dengan menggunakan metode pemisahan variabel, menentukan solusi, analisis keabsahan solusi, simulasi, dan interpretasi.

Tujuan penelitian ini adalah untuk menganalisis penyelesaian masalah syarat batas pada persamaan telegraf dengan menggunakan metode pemisahan variabel. Hasil analisis diperoleh solusi analitik yang memenuhi kondisi awal sebagai berikut:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n e^{-\alpha t} \cos \left(t \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \right) - \alpha^2} \right) + c_n e^{-\alpha t} \sin \left(t \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \right) - \alpha^2} \right) \right) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

Simulasi dilakukan dengan mengubah kondisi awal sehingga dapat disimpulkan bahwa perubahan gerak tegangan amplitudo gelombang bergantung pada variasi kondisi awalnya. Untuk penelitian selanjutnya disarankan dapat membandingkan masalah syarat batas pada persamaan telegraf yang non linier secara numerik dengan metode yang menghasilkan *error* terkecil yang dibandingkan dengan solusi analitiknya.

ABSTRACT

Jamila, Rofiatun. 2015. **Boundary Condition Problem Solving in Telegraph Equation.** Thesis. Department of Mathematics Faculty of Science and Technology. State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisor: (I) Ari Kusumastuti, S.Si., M.Pd. (II) Dr. Abdussakir, M.Pd.

Keywords: Telegraph Equation, Separation of Variables

Telegraph equation is presented in the form of partial differential equations that can be applied to problems in the electrical signal wave in the line transmission cable. In this study solving the boundary conditions on the telegraph equation using the method of separation of variables will be discussed. The performed in this study are: solving telegraph equation using the method of separation of variables, determining the solutions, analysing the solutions validity, simulation, and interpretation.

The aim of this study is analyzing the problem solving boundary condition on the telegraph equation using the method of separation of variables. From the analysis we obtained the analytic solution that satisfies the initial conditions as follows:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n e^{-\alpha t} \cos \left(t \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \right) - \alpha^2} \right) + c_n e^{-\alpha t} \sin \left(t \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \right) - \alpha^2} \right) \right) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

The simulations are conducted by varying the initial conditions so it can be concluded that changes the voltage amplitude of the wave motion depends on variations in the initial conditions. For further research the researcher can compare boundary conditions problems on the non-linear telegraph equation numerically using the method that produces the smallest error in comparison with analytical solutions.

ملخص

جميله. رفعة. ٢٠١٥. استكشاف الأخطاء وإصلاحها شروط حدود على تلغراف المعادلة . بحث جامعي .
 قسم الرياضيات، كلية العلوم و التكنولوجيا، الجامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم
 مالانج. المشرف: (١) أري كوسوماستوتي الماجستير، (٢) عبد الشاكر، الماجستير.

الكلمات الرئيسية: مرادف الرساله، فصل المتغيرات

ويقدم معادلة التلغراف في شكل معادلات التفاضلية الجزئية التي يمكن تطبيقها على المشاكل في
 موجة إشارة كابلات خط نقل الكهرباء. في هذه الدراسة سيتم مناقشتها على حل شروط الحدود على معادلة
 التلغراف باستخدام طريقة فصل المتغيرات. يتم الانتهاء من التدابير المتخذة معادلة التلغراف باستخدام أسلوب
 الفصل بين المتغيرات، وتحديد الحلول، حلول تحليل صحة، والمحاكاة وتفسيرها.
 وكان الغرض من هذه الدراسة لتحليل حالة حل الحدود على معادلة التلغراف باستخدام طريقة
 فصل المتغيرات المشكلة. النتائج التي تم الحصول عليها من خلال تحليل الحلول التحليلية التي استيفاء الشروط
 الأولية التالية:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n e^{-\alpha t} \cos \left(t \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2} \right) - \alpha^2} \right) + c_n e^{-\alpha t} \sin \left(t \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2} \right) - \alpha^2} \right) \right) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

قامت المحاكاة من خلال تغيير الظروف الأولية بحيث يمكن أن نخلص إلى أن تغيير سعة الجهد لحركة الموجة يعتمد
 على التغيرات في الظروف الأولية . مقترح لإجراء مزيد من البحوث يمكن مقارنة المشاكل شروط الحدود على
 معادلة التلغراف غير الخطية عددياً من الطريقة التي تنتج أصغر خطأ في مقارنة مع الحلول التحليلية.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Dalam Islam diajarkan agar setiap manusia mencari ilmu atau berilmu sebelum berkata dan berbuat, karena ilmu merupakan pondasi sebelum berkata dan berbuat, seperti yang dijelaskan dalam al-Quran surat al-Israa' ayat 36 yang berbunyi :

وَلَا تَقْفُ مَا لَيْسَ لَكَ بِهِ عِلْمٌ إِنَّ السَّمْعَ وَالْبَصَرَ وَالْفُؤَادَ كُلُّ أُولَئِكَ كَانَ عَنْهُ مَسْئُولًا ﴿٣٦﴾

“dan janganlah kamu mengikuti apa yang kamu tidak mempunyai pengetahuan tentangnya. Sesungguhnya pendengaran, penglihatan dan hati, semuanya itu akan diminta pertanggung jawaban” (QS. al-Israa’: 36).

Ayat tersebut menjelaskan bahwa tidak boleh beramal dengan tanpa ilmu. Dari sini dapat diambil kesimpulan bahwa Islam mewajibkan ilmu terlebih dahulu sebelum berkata dan berbuat. Menurut Tafsir Imam Qurthubi, ayat di atas menjelaskan bahwa jangan mengikuti apa yang tidak kamu ketahui dan tidak penting bagimu. Jika memiliki pengetahuan, maka manusia boleh menetapkan suatu hukum berdasarkan pengetahuannya (Amar, 2010:7).

Matematika merupakan salah satu cabang ilmu yang mendasari berbagai macam ilmu yang lain dan selalu menghadapi berbagai macam fenomena yang semakin kompleks sehingga penting untuk dipelajari. Dalam kehidupan sehari-hari banyak permasalahan yang memerlukan pemecahan. Seiring dengan bantuan matematika permasalahan tersebut lebih mudah dipahami, lebih mudah dipecahkan, bahkan dapat ditunjukkan bahwa suatu persoalan tidak mempunyai penyelesaian, yaitu dengan menggunakan metode analitik dan numerik. Untuk

keperluan tersebut, perlu dicari pokok permasalahannya dan kemudian dibuat rumusan masalah atau model matematikanya (Fitri, 2011:4).

Pemodelan matematika adalah salah satu cabang matematika yang banyak manfaatnya. Dengan menggunakan model matematika, masalah-masalah di berbagai bidang dapat diselesaikan. Oleh karena itu, model matematika diharapkan akan mendapatkan solusi akhir yang tepat, valid, dan diterima secara ilmiah.

Model matematika telah banyak digunakan dalam berbagai fenomena seperti dalam ilmu fisika, ilmu kedokteran, ilmu biologi, dan ilmu sosial lainnya. Cara untuk memodelkan fenomena tersebut dengan mengasumsikan fenomena tersebut ke dalam persamaan diferensial. Pada penelitian ini digunakan persamaan diferensial parsial. Persamaan diferensial parsial merupakan kajian matematika yang sangat fundamental yang dapat menerjemahkan fenomena alam ke dalam bentuk yang sistematis. Fakta dari suatu objek yang diamati akan menjadi logis dan jelas dengan menampilkan suatu model dan dapat menemukan solusi dari persamaan tersebut, dimana solusi tersebut dapat diselesaikan secara analitik maupun secara numeriknya. Pada umumnya bentuk persamaan tersebut berupa persamaan diferensial parsial.

Persamaan diferensial parsial melibatkan serangkaian kajian yang mendalam atas solusi analitik atau bahkan solusi numerik dari model persamaan tersebut. Solusi analitik atau *exact solution* adalah solusi sesungguhnya, yaitu solusi yang memiliki galat (*error*) sama dengan nol dari persamaan diferensial parsial yang merupakan penentuan solusi yang terdefinisi dalam model tersebut. Penyelesaian analitik diperoleh dengan menggunakan perhitungan secara

sistematis dan solusi yang diperoleh berupa nilai eksak. Akan tetapi, metode analitik hanya unggul untuk sejumlah persoalan yang terbatas, yaitu persoalan yang memiliki tafsiran geometri sederhana. Dalam pembahasan solusi analitik pada persamaan diferensial parsial umumnya mengkaji masalah syarat batas dengan menggunakan metode pemisahan variabel. Mencari solusi analitik bukanlah proses yang mudah karena melibatkan proses yang rumit. Oleh karena itu biasanya digunakan solusi numerik yang dikategorikan sebagai prosedur yang masuk akal. Solusi numerik merupakan solusi pendekatan, yang digunakan untuk memformulasikan persoalan matematika sehingga dapat dipecahkan dengan operasi aritmetika biasa (Munir, 2006:5). Sehingga solusi analitik memegang kendali dalam keakuratan dari solusi pendekatannya. Tetapi tidak dapat dipungkiri bahwa kadangkala ada beberapa masalah dalam suatu model yang tidak mungkin ditentukan solusi analitiknya.

Dalam skripsi ini, dibahas tentang penyelesaian persamaan telegraf dengan syarat batas yang diberikan. Seperti pada proses penyelesaian masalah syarat batas ini, sebelum penulis menentukan cara yang paling efektif untuk mencari tentang bagaimana menyelesaikan masalah syarat batas pada persamaan tersebut, maka dikaji lebih dalam tentang model persamaan matematika pada persamaan telegraf tersebut.

Persamaan telegraf merupakan persamaan diferensial parsial yang lebih dikenal dengan persamaan gelombang. Persamaan telegraf adalah persamaan yang mendeskripsikan tentang bagaimana pemancaran sinyal pengiriman dan penerimaan aliran listrik jarak jauh. Persamaan telegraf umumnya digunakan pada propagasi gelombang sinyal-sinyal listrik dari transmisi kabel dan juga dalam

fenomena gelombang yang mempunyai sifat linier dan berorde dua (Naresh, 2013:317-318).

Selanjutnya untuk penelitian terdahulu yang digunakan dalam skripsi ini adalah merujuk pada dua penelitian, yaitu pertama dengan merujuk pada jurnal penelitian yang dilakukan oleh Javidi dan Nyamoradi pada tahun 2013 yaitu persamaan telegraf dengan menggunakan transformasi Laplace dan *Homotopy* pada persamaan telegraf. Persamaan telegraf yang digunakan dalam model tersebut berupa persamaan diferensial parsial linier hiperbolik. Metode yang diterapkan yaitu untuk mendapatkan solusi numerik dengan metode transformasi Laplace dan *Homotopy* yang dapat menggambarkan hasil solusi dari gelombang propogasi sinyal listrik dijalar tranmisi kabel. Sedangkan penelitian yang kedua yaitu menurut Aini pada tahun 2011 yaitu tentang penyelesaian solusi analitik dan numerik pada persamaan sinyal pengiriman pesan dengan nilai awal menyelesaikan dengan menggunakan metode *d'Alembert's Solution* dan syarat batas menggunakan metode pemisahan variabel dan deret Fourier dan mumerik menggunakan metode skema beda hingga eksplisit. Perbedaan antara penelitian yang dilakukan oleh Javidi dan Nemat (2013) dan Aini (2011) dengan yang dilakukan penulis terletak pada metode yang digunakan dan model persamaannya. Penelitian ini lebih menekankan pada penyelesaian dalam memecahkan solusi analitik model persamaan telegraf, dimana persamaan telegraf dalam skripsi ini membahas mengenai aliran sinyal gelombang listrik.

Berdasarkan latar belakang di atas, maka penelitian ini menjadi penting untuk dilakukan karena akan sangat menguntungkan pengamatan lebih lanjut mengenai sinyal pengiriman aliran gelombang listrik dari jarak jauh, dengan

melihat masalah syarat batas yang telah diberikan dalam penelitian ini. Oleh karena itu, peneliti menuangkan gagasan tersebut dalam skripsi ini dengan menyajikan dalam judul “*Penyelesaian Masalah Syarat Batas pada Persamaan Telegraph*”.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian pada latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam skripsi ini adalah bagaimana penyelesaian masalah syarat batas pada persamaan telegraf?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan uraian rumusan masalah di atas, maka tujuan dalam skripsi ini adalah untuk mengetahui tentang penyelesaian masalah syarat batas pada persamaan telegraf.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dalam penelitian skripsi ini adalah sebagai berikut:

1. Untuk mengetahui tentang penyelesaian masalah syarat batas pada persamaan telegraf secara analitik dengan menggunakan metode pemisahan variabel.
2. Hasil solusi yang diperoleh dari metode pemisahan variabel ini diharapkan dapat dijadikan sebagai acuan dasar perhitungan untuk mendesain suatu pemecahan masalah persamaan telegraf.

1.5 Batasan Masalah

Batasan masalah pada penyelesaian masalah syarat batas pada persamaan telegraf $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial t} + \beta^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ dengan domain $0 < x < l$, dengan nilai awal $u(x, 0) = f(x)$ dan $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x)$, dengan syarat batas $u(0, t) = u(l, t) = 0$, $\forall t > 0$ (Javidi dan Nyamoradi, 2013:64).

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah penelitian kepustakaan (*library research*). Adapun langkah-langkah yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Memisalkan solusi sebagai variabel terpisah $u(x, t) = X(x)T(t)$
2. Mensubstitusikan pemisalan solusi ke persamaan telegraf
3. Menentukan solusi untuk variabel $X(x)$
4. Menentukan nilai C_1 dan C_2 dari variabel $X(x)$ dengan menggunakan kondisi batas
5. Menentukan solusi untuk variabel $T(t)$
6. Mencari solusi umum $u(x, t)$ dengan mengalikan variabel $X(x)$ dan $T(t)$
7. Menentukan nilai b_n dan c_n dengan menggunakan deret Fourier
8. Analisis keabsahan solusi
9. Simulasi dan interpretasi model persamaan telegraf
10. Kesimpulan

1.7 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan skripsi ini terdiri dari empat sub bab yaitu, sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Bab ini menjelaskan tentang latar belakang masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Bab ini memuat kajian pustaka meliputi: persamaan telegraf sebagai persamaan diferensial parsial, persamaan diferensial parsial linier orde persamaan diferensial parsial, metode pemisahan variabel, persamaan diferensial biasa linier homogen, dan kajian tentang mengkaji ilmu dalam pandangan Islam.

Bab III Pembahasan

Bab ini memuat pembahasan meliputi: penyelesaian persamaan telegraf, analisis metode pemisahan variabel pada persamaan telegraf, analisis keabsolutan solusi, simulasi dan kajian al-Quran tentang analisis model persamaan telegraf.

Bab IV Penutup

Bab ini memuat penutup meliputi: kesimpulan dan saran yang berkaitan dengan penelitian ini dan juga dapat menjadi rujukan untuk penelitian selanjutnya.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Telegraph sebagai Persamaan Diferensial Parsial

Persamaan diferensial parsial adalah diferensial parsial yang menyangkut satu atau lebih fungsi (peubah tak terbatas) beserta turunannya terhadap lebih dari satu peubah bebas (Pamuntjak dan Santoso, 1990:11). Salah satu contoh persamaan diferensial parsial adalah persamaan telegraf, yaitu:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial t} + \beta^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.1)$$

Persamaan telegraf lebih dikenal dengan persamaan gelombang (Javidi dan Nyamoradi, 2013:64). Persamaan gelombang dalam penelitian ini adalah gelombang sinyal listrik dari jalur transmisi kabel. Orde dalam persamaan (2.1) ini adalah berorde 2. Pada persamaan (2.1) bersifat linier karena suatu bentuk persamaan diferensial parsial yang berderajat satu dalam peubah tak bebasnya dan turunan parsialnya dan bertipe hiperbolik dimana dalam tipe ini biasanya berhubungan dengan getaran, atau permasalahan yang terjadi *discontinue* dalam waktu (Triatmodjo, 2002:201-202).

Model persamaan telegraf yaitu terdiri dari variabel-variabel seperti x dan t , dimana x adalah jarak dan t adalah waktu dengan parameter seperti α dan β diketahui sebagai koefisien konstanta, dimana untuk $\alpha > 0$ dan $\beta = 0$ merupakan persamaan telegraf (Naresh, 2013:318-319). Persamaan (2.1) adalah variabel bebas x dan t , sedangkan variabel u adalah variabel tak bebasnya. Orde atau tingkat suatu persamaan diferensial parsial adalah pangkat tertinggi dari turunan yang terdapat pada persamaan diferensial (Ault dan Ayres, 1992:231).

2.2 Persamaan Diferensial Parsial Linier

Persamaan diferensial parsial adalah persamaan diferensial yang memiliki lebih dari satu variabel bebas x dan y . Variabel terikat adalah suatu fungsi yang tidak diketahui dari variabel $u(x, y)$. Turunan persamaan diferensial parsial dapat ditulis $\frac{\partial u}{\partial x} = u_x$. Persamaan diferensial parsial adalah sebuah identitas yang berhubungan dengan variabel bebas, yang bergantung pada variabel u , dan variabel u merupakan turunan persamaan diferensial parsial. Hal ini dapat ditulis sebagai berikut:

$$F(x, y, u(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y)) = F(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \quad (2.2)$$

Persamaan (2.2) merupakan bentuk umum dari persamaan diferensial parsial orde satu yang mempunyai dua variabel bebas. Orde persamaan dapat diketahui dari pangkat tertinggi dari turunan parsialnya. Bentuk yang paling umum dari persamaan diferensial parsial orde dua dalam dua variabel bebas adalah

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0 \quad (2.3)$$

Solusi persamaan diferensial parsial adalah fungsi $u(x, y)$ yang memenuhi persamaan dengan identik setidaknya di beberapa daerah variabel x dan y . Untuk memecahkan persamaan diferensial biasa $\frac{du}{dx} = u^3$ maka dapat dilakukan dengan membalikkan peran variabel bebas dan terikatnya. Untuk persamaan diferensial parsial, perbedaan antara variabel bebas dan variabel terikat tidak diketahui. Beberapa contoh persamaan diferensial parsial adalah

1. $u_x + u_y = 0$
2. $u_x + yu_y = 0$
3. $u_x + uu_y = 0$

$$4. u_{xx} + u_{yy} = 0$$

$$5. u_{tt} - u_{xx} + u^3 = 0$$

$$6. u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$$

$$7. u_{tt} - u_{xxxx} = 0$$

$$8. u_t - iu_{xx} = 0 \quad (i = \sqrt{-1})$$

Masing-masing memiliki dua variabel bebas, dapat ditulis keduanya sebagai x dan y atau x dan t . Contoh 1 sampai 3 merupakan persamaan orde satu, sedangkan 4, 5 dan 8 merupakan persamaan orde dua, adapun 6 merupakan persamaan orde tiga dan 7 merupakan persamaan orde empat. Contoh 3, 5 dan 6 tidak termasuk persamaan “Linier”.

Linieritas persamaan dapat dituliskan dalam bentuk $\mathcal{L}u = 0$, dimana \mathcal{L} adalah operator. Artinya, jika v merupakan fungsi sembarang, maka $\mathcal{L}v$ adalah fungsi baru. Misalkan, $\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial x}$ adalah operator diferensial yang menurunkan v menjadi v_x . Seperti contoh 2, operator \mathcal{L} adalah $\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$ maka $\mathcal{L}u = u_x + yu_y$. Definisi untuk linieritas adalah

$$\mathcal{L}(u + v) = \mathcal{L}u + \mathcal{L}v \quad \mathcal{L}(cu) = c\mathcal{L}u \quad (2.4)$$

Untuk u dan v adalah sebarang fungsi dan c adalah sebarang konstanta. Dimana $u_x + uu_y = 0$ mempertahankan sifatnya untuk semua u, v dan c , maka \mathcal{L} disebut operator linier. Persamaan ini

$$\mathcal{L}u = 0 \quad (2.5)$$

disebut persamaan linier jika \mathcal{L} merupakan operator linier. Persamaan (2.5) disebut persamaan diferensial parsial linier homogen. Persamaan

$$\mathcal{L}u = g \quad (2.6)$$

dengan $g \neq 0$ disebut persamaan diferensial parsial linier nonhomogen, dimana g adalah suatu fungsi. Misalkan

$$(\cos x y^2)u_x - y^2u_y = \tan(x^2 + y^2) \quad (2.7)$$

Persamaan (2.7) disebut persamaan linier nonhomogen. Adapun persamaan (2.1) merupakan persamaan linier tipe hiperbolik dan berorde dua (Strauss, 2007:1-2).

2.3 Pemisahan Variabel

Metode pemisahan variabel adalah teknik klasik yang efektif untuk menyelesaikan beberapa tipe dari persamaan diferensial parsial. Misalnya saja solusi $u(x, t)$ untuk persamaan diferensial parsial. Untuk menentukan solusi $u(x, t)$ dapat ditulis dengan variabel terpisah $u(x, t) = X(x)T(t)$. Selanjutnya dilakukan substitusi dari bentuk ini ke persamaan diferensial. Dengan cara ini akan dihasilkan solusi persamaan untuk persamaan diferensial parsial (Nagle, 1993:536-543).

Metode pemisahan variabel diterapkan untuk solusi awal atau masalah nilai batas dan kondisi batas pada persamaan homogen (Zauderer, 2006:179-183). Untuk menentukan solusi persamaan gelombang dengan $c = 2$ dan $l = 1$ yakni

$$u_{tt} = 2^2u_{xx} \quad \text{untuk } 0 < x < 1 \quad (2.8)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad (2.9)$$

dengan beberapa kondisi awal yaitu

$$u(x, 0) = x \quad u_t(x, 0) = 0 \quad (2.10)$$

misalkan solusi terpisah dari $u_{tt} = 2^2u_{xx}$ adalah $u(x, t) = X(x)T(t)$ maka diperoleh

$$u_{tt} = X(x)T''(t) \quad (2.11)$$

$$u_{xx} = X''(x)T(t)$$

Kemudian substitusikan ke persamaan (2.8) diperoleh

$$X(x)T''(t) = 2^2 X''(x)T(t) \quad (2.12)$$

Persamaan (2.12) dapat ditulis sebagai berikut

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = 2^2 \frac{X''(x)}{X(x)} \quad (2.13)$$

Dari persamaan (2.13) diperoleh

$$\frac{T''(t)}{2^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \quad (2.14)$$

Karena fungsi T hanya dipengaruhi variabel t dan fungsi X hanya dipengaruhi variabel x maka persamaan (2.14) hanya terpenuhi jika berupa konstanta.

Selanjutnya karena kondisi batas yang diberikan adalah kondisi *Dirichlet*

Homogenous maka konstanta yang memenuhi adalah konstanta negatif, misalkan

$-\lambda$. Sehingga dari persamaan (2.14) diperoleh

$$\frac{T''(t)}{2^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \quad (2.15)$$

Persamaan (2.15) dapat ditulis secara terpisah menjadi

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0$$

dan

$$T''(t) + \lambda 2^2 X(x) = 0 \quad (2.16)$$

Misalkan $\lambda = \gamma^2$ maka diperoleh

$$X''(x) + \gamma^2 X(x) = 0 \quad (2.17)$$

dan

$$T''(x) + \gamma^2 2^2 T(t) = 0 \quad (2.18)$$

Persamaan (2.17) adalah

$$X''(x) + \gamma^2 X(x) = 0$$

Solusi umum untuk persamaan (2.17) adalah

$$\begin{aligned} X(x) &= A(\cos \gamma x + i \sin \gamma x) + B(\cos \gamma x - i \sin \gamma x) \\ &= (A + B)\cos \gamma x + i(A - B)\sin \gamma x \\ &= A_1 \cos \gamma x + B_1 \sin \gamma x \end{aligned}$$

Penggunaan kondisi batas $X(x) = X(1) = 0$ menghasilkan $A_1 = 0$ dan

$$B_1 \sin(\gamma x) = 0$$

$$\sin(\gamma 1) = 0$$

Untuk $B_1 = 0$ tidak mungkin dipilih, sehingga haruslah yang dipilih adalah $\sin(\gamma 1) = 0$, karena $\gamma 1 = \arcsin(0)$

$$\gamma 1 = n\pi, \quad \forall n = 1, 2, 3 \dots$$

$$\gamma = n\pi$$

Sehingga solusi $X(x)$ adalah

$$X_n(x) = \sin(n\pi x) \quad \forall n = 1, 2, 3 \dots \quad (2.19)$$

Selanjutnya untuk persamaan (2.18) adalah

$$T''(t) + \gamma^2 T(t) = 0$$

Solusi umum untuk persamaan (2.18) adalah

$$\begin{aligned} T(t) &= C(\cos 4\gamma t + i \sin 4\gamma t) + D(\cos 4\gamma t - i \sin 4\gamma t) \\ &= (C + D)\cos 4\gamma t + i(C - D)\sin 4\gamma t \\ &= C_1 \cos 4\gamma t + D_1 \sin 4\gamma t \end{aligned}$$

Sehingga solusi $T(t)$ adalah

$$T_n(t) = C_1 \cos(4n\pi t) + D_1 \sin(4n\pi t) \quad (2.20)$$

Selanjutnya substitusi dari persamaan (2.19) dan (2.20) maka diperoleh

$$\begin{aligned} u_n(x, t) &= X_n(x)T_n(t) \\ &= [C_n \cos(4n\pi t) + D_n \sin(4n\pi t)] \sin(n\pi x) \quad \forall n = 1, 2, 3 \dots \end{aligned} \quad (2.21)$$

Jadi persamaan (3.21) menjadi

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [C_n \cos(4n\pi t) + D_n \sin(4n\pi t)] \sin(n\pi x) \quad (2.22)$$

Selanjutnya dengan menggunakan deret Fourier untuk mencari nilai C_n dan D_n persamaan (2.22) dengan mensubstitusikan kondisi awal $u(x, t) = x$ dan $u_t(x, t) = 0$ maka diperoleh

$$\begin{aligned} x &= \sum_{n=1}^{\infty} [C_n + 0] \sin(n\pi x) \\ x &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\pi x) \end{aligned} \quad (2.23)$$

dan

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} [D_n \cos(4n\pi t) - C_n \sin(4n\pi t)] (4n\pi) \sin(n\pi x) \\ 0 &= \sum_{n=1}^{\infty} [D_n - 0] (4n\pi) \sin(n\pi x) \\ 0 &= \sum_{n=1}^{\infty} (4n\pi) D_n \sin(n\pi x) \end{aligned} \quad (2.24)$$

Selanjutnya untuk mendapatkan nilai C_n dengan menggunakan deret Fourier diperoleh

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\pi x) \quad (2.25)$$

Selanjutnya persamaan (2.25) dikalikan dengan $\sin(m\pi x)$ dan diintegrasikan terhadap x , dengan interval $0 < x < 1$ maka diperoleh

$$\int_0^1 x \sin(m\pi x) dx = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\pi x) \sin(m\pi x) dx \quad (2.26)$$

Pada saat $m \neq n$ nilai $\int_0^1 \sin(n\pi x) \sin(m\pi x) = 0$, maka haruslah $m = n$ (Vabreng, 2004:4). Maka persamaan (2.26) dengan asumsi $m = n$ dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \sin(m\pi x) dx &= \int_0^1 C_m \sin(m\pi x) \cdot \sin(m\pi x) dx \\ &= C_m \int_0^1 \sin^2(m\pi x) dx \end{aligned} \quad (2.27)$$

Untuk persamaan (2.27) dapat dimisalkan bahwa $\frac{m\pi x}{1} = u$ maka $du = \frac{m\pi}{1} dx$ sehingga $dx = \frac{1 du}{m\pi}$, maka diperoleh

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \sin(m\pi x) dx &= C_m \int_0^{m\pi} \sin^2 u \cdot \frac{1}{m\pi} \cdot du \\ &= \frac{1}{m\pi} \cdot C_m \int_0^{m\pi} \frac{1}{2} (1 - \cos 2u) du \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{m\pi} \cdot C_m \int_0^{m\pi} 1 - \cos 2u du \end{aligned}$$

$$\int_0^1 x \sin(m\pi x) dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{m\pi} \cdot C_m \left[\int_0^{m\pi} du - \int_0^{m\pi} \cos 2u du \right] \quad (2.28)$$

Dari persamaan (2.28) dapat dimisalkan bahwa $2u = v$ dan $du = \frac{1}{2} v$ maka diperoleh

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x \sin(m\pi x) dx &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{m\pi} \cdot C_m \left[[u]_0^{m\pi} - \int_0^{2m\pi} \cos v \cdot \frac{1}{2} dv \right] \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{m\pi} \cdot C_m \left[m\pi \cdot \frac{1}{2} [\sin v]_0^{2m\pi} \right] \\
\int_0^1 x \sin(m\pi x) dx &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{m\pi} \cdot b_m \left[m\pi - \frac{1}{2} \sin(2m\pi) \right] \tag{2.29}
\end{aligned}$$

Karena nilai $\sin(2m\pi) = 0$ untuk $m \in N$, maka untuk persamaan (2.29) diperoleh

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x \sin(m\pi x) dx &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{m\pi} \cdot C_m \cdot m\pi \\
&= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot C_m \\
&= \frac{1}{2} \cdot C_m \tag{2.30}
\end{aligned}$$

Selanjutnya mencari nilai C_m pada persamaan (2.30) adalah

$$C_m = \frac{2}{1} \int_0^1 x \sin(m\pi x) dx \tag{2.31}$$

Untuk dapat menyelesaikan persamaan (2.31) maka dengan pemisalan yaitu $u = x$, $dv = \sin(m\pi x) dx$ dan $du = dx$, $v = -\frac{1}{m\pi} \cos(m\pi x)$ maka diperoleh

$$C_m = \frac{2}{1} \left[\left[-x \cdot \frac{1}{m} \cos(m\pi x) \right]_0^1 - \int_0^{\infty} -\frac{1}{m\pi} \cos(m\pi x) dx \right] \tag{2.32}$$

Untuk persamaan (2.32) dengan pemisalan bahwa $z = m\pi x$ dan $dx = \frac{1}{m\pi} dz$ maka diperoleh

$$C_m = \frac{2}{1} \left[-\frac{1^2}{m\pi} \cos(m\pi) + \frac{1}{m\pi} \int_0^{m\pi} \cos z \cdot \frac{1}{m\pi} dz \right] \quad (2.33)$$

Persamaan (2.33) dapat disederhanakan menjadi

$$C_m = \frac{2}{1} \left[-\frac{1^2}{m\pi} \cos(m\pi) + \frac{1^2}{(m\pi)^2} [\sin z]_0^{m\pi} \right] \quad (2.34)$$

Selanjutnya persamaan (2.34) dapat dinyatakan sebagai berikut

$$C_m = \frac{2}{1} \cdot \frac{1^2}{m\pi} \left[-\cos(m\pi) + \frac{1}{m\pi} \sin(m\pi) \right] \quad (2.35)$$

Karena pada persamaan (2.35) untuk nilai $\cos(m\pi) = \pm 1, \forall m \in N$ dan $\sin(m\pi) = 0, \forall m \in N$, maka dapat diperoleh

$$C_m = \frac{2}{1} \cdot \frac{1^2}{m\pi} [(-1)^{m+1} + 0] \quad (2.36)$$

Untuk persamaan (2.36) karena $-\cos(m\pi)$ bernilai positif saat $m = 1$, maka dapat dipilih pangkat (-1) yaitu $m + 1$ agar bernilai positif juga pada saat $m = 1$, sehingga diperoleh

$$C_m = \frac{2}{m\pi} \cdot (-1)^{m+1} \quad (2.37)$$

Selanjutnya untuk nilai D_m yang memenuhi persamaan $0 = \sum_{m=1}^{\infty} (4m\pi) D_m \sin(m\pi x)$ adalah nol, karena pada nilai $\sin(m\pi x)$ belum tentu nol. Jadi untuk memenuhi persamaan D_m harus sama dengan nol.

Untuk nilai $D_m = 0$, maka diperoleh

$$C_m = \frac{2}{m\pi} \cdot (-1)^{m+1} \text{ dan } D_m = 0$$

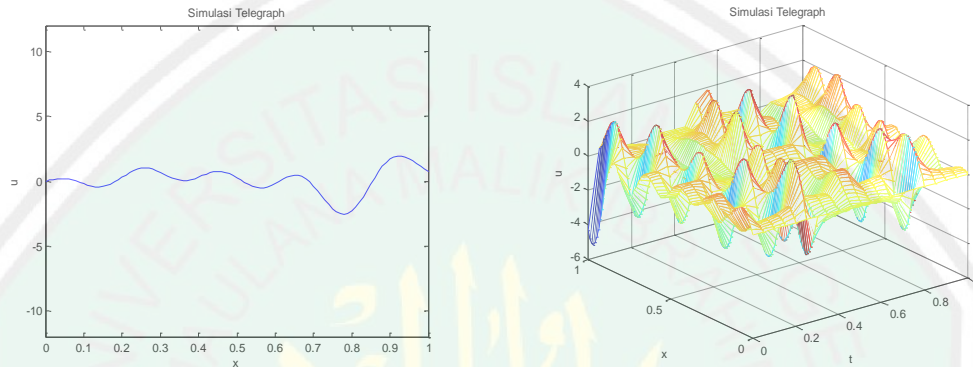
Jadi untuk solusi khususnya adalah

$$u(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{2}{m\pi} \cdot (-1)^{m+1} \cos(t(4m\pi)) + 0 \sin(t(4m\pi)) \right) \sin(m\pi x) \quad (2.38)$$

Kemudian untuk persamaan (2.38) dapat disederhanakan menjadi

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} \cos(t(4m\pi)) \sin(m\pi x) \quad (2.39)$$

Adapun gambar dari solusi persamaan (2.39) ditunjukkan pada Gambar (2.1) berikut:



Gambar 2.1 Grafik 2D dan 3D Solusi Analitik Persamaan Difusi Menggunakan Metode Pemisahan Variabel dengan Nilai Awal $u(x, 0) = x$ dan $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$

2.4 Persamaan Diferensial Biasa Linier Homogen

Persamaan umum persamaan diferensial biasa linier adalah

$$\begin{aligned} A(x, y)u_{xx}(x, y) + 2B(x, y)u_{xy}(x, y) + C(x, y)u_{yy}(x, y) \\ + D(x, y)u_x(x, y) + E(x, y)u_y(x, y) + F(x, y)u(x, y) \\ = G(x, y) \end{aligned} \quad (2.40)$$

Persamaan (2.40) disebut persamaan homogen jika $G = 0$ untuk x dan y , sedangkan jika $G \neq 0$ disebut persamaan nonhomogen. Suatu persamaan diferensial biasa linier homogen orde dua dengan koefisien konstanta

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (2.41)$$

dimana a, b , dan c adalah konstanta bilangan riil, mempunyai solusi umum

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 \quad (2.42)$$

dimana c_1 dan c_2 adalah konstanta.

Selanjutnya jika $y = e^{rx}$ disubstitusikan ke persamaan (2.41) maka diperoleh

$$ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0$$

$$\text{dan } e^{rx}(ar^2 + br + c) = 0 \quad (2.43)$$

Karena e^{rx} tidak mungkin sama dengan nol, maka persamaan di atas dapat dibagi dengan e^{rx} , sehingga diperoleh

$$ar^2 + br + c = 0 \quad (2.44)$$

Akibatnya jika $y = e^{rx}$ adalah solusi untuk persamaan (2.41) jika dan hanya jika r memenuhi persamaan (2.44). Kemudian persamaan (2.44) disebut persamaan karakteristik yang bersesuaian dengan persamaan homogen. Akar-akar persamaan karakteristik persamaan (2.44) adalah

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ dan } r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Jika $b^2 - 4ac > 0$, akar r_1 dan r_2 adalah riil dan nyata. Jika $b^2 - 4ac = 0$, maka akar-akarnya riil dan sama. Jika $b^2 - 4ac < 0$ maka akar-akarnya adalah bilangan kompleks konjugat.

a. Akar Riil Berbeda

Jika persamaan karakteristik mempunyai akar-akar riil r_1 dan r_2 , maka e^{r_1x} dan e^{r_2x} adalah solusi untuk persamaan (2.17). Oleh karena itu, solusi umum dari persamaan (2.17) adalah $y(x) = c_1e^{r_1x} + c_2e^{-r_2x}$ dimana c_1 dan c_2 konstanta.

b. Akar Berulang

Jika persamaan karakteristik mempunyai akar kembar r , maka solusi untuk persamaan (2.17) adalah e^{rx} dan xe^{rx} , dan solusi umumnya adalah $y(x) = c_1x + c_2$ dimana c_1 dan c_2 konstanta.

c. Akar kompleks

Jika persamaan karakteristik mempunyai akar-akar kompleks $a \pm i\beta$, maka solusi untuk persamaan (2.18) adalah $e^{ax} \cos \beta x$ dan $e^{ax} \sin \beta x$ dan solusi umumnya adalah $y(x) = c_1 e^{ax} \cos \beta x + c_2 e^{ax} \sin \beta x$ dimana c_1 dan c_2 konstanta (Nagle, 1993:537-538).

2.5 Mengkaji Ilmu dalam Pandangan Islam

Menurut Yusuf (2009:20) berdasarkan ayat sebelumnya bahwa Islam memiliki perhatian yang sangat besar terhadap ilmu pengetahuan. Dalam al-Quran dan hadits sebagai pedoman umat Islam banyak sekali yang mendeskripsikan tentang ilmu pengetahuan serta pentingnya memperoleh ilmu baik dengan membaca, menganalisis maupun menuliskannya (mengamalkannya). Setiap proses dalam mendapatkan ilmu pengetahuan amatlah berharga dalam pandangan Islam, karena beberapa ayat dalam al-Quran menjelaskan tentang pentingnya hal ini, sehingga hasil dan manfaat yang amat besar akan diperoleh manusia yang berilmu baik dalam kehidupannya di dunia (bermasyarakat) maupun di akhirat kelak, seperti yang dijelaskan dalam al-Quran yaitu:

يَتَأْتِيهَا الَّذِينَ ءَامَنُوا إِذَا قِيلَ لَكُمْ تَفَسَّحُوا فِي الْمَجَالِسِ فَافْسَحُوا يَفْسَحَ اللَّهُ لَكُمْ وَإِذَا قِيلَ أَنْشُرُوا فَأَنْشُرُوا يَرْفَعَ اللَّهُ الَّذِينَ ءَامَنُوا مِنْكُمْ وَالَّذِينَ أُوتُوا الْعِلْمَ دَرَجَاتٍ وَاللَّهُ بِمَا تَعْمَلُونَ خَبِيرٌ ﴿١١﴾

"Hai orang-orang beriman apabila kamu dikatakan kepadamu: "Berlapang-lapanglah dalam majlis", maka lapangkanlah niscaya Allah akan memberi kelapangan untukmu. Dan apabila dikatakan: "Berdirilah kamu", maka berdirilah, niscaya Allah akan meninggikan orang-orang yang beriman di antaramu dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat. Dan Allah Maha mengetahui apa yang kamu kerjakan"(QS. al-Mujadalah: 11).

Kata ilmu biasanya disepadankan dengan kata dalam bahasa arab lainnya, yaitu *ma'rifah* (pengetahuan), *fiqh* (pemahaman), *hikmah* (kebijaksanaan), dan

syu'ur (perasaan). *Ma'rifah* adalah padanan kata yang paling sering digunakan. Ada dua jenis pengetahuan yaitu pengetahuan biasa dan pengetahuan ilmiah. Pengetahuan biasa diperoleh dari keseluruhan bentuk upaya kemanusiaan seperti perasaan, pikiran, pengalaman, panca indra, dan intuisi untuk mengetahui sesuatu tanpa memperhatikan objek, cara dan kegunaannya. Dalam bahasa Inggris, jenis pengetahuan ini disebut *knowledge*. Pengetahuan ilmiah merupakan keseluruhan bentuk upaya manusia untuk mengetahui sesuatu, tetapi dengan memperhatikan objek yang ditelaah, cara yang digunakan, dan kegunaan pengetahuan tersebut. Dengan kata lain, pengetahuan ilmiah memperhatikan objek ontologis (sumber ilmu), landasan epistemologis (pengembangan ilmu), dan landasan aksiologis (pemanfaatan ilmu) dari pengetahuan itu sendiri. jenis pengetahuan ini dalam bahasa Inggris disebut *science* (Nata, 2008:22).

Secara epistemologis, al-Ghozali membagi ilmu menjadi dua, yaitu ilmu *syari'at* ialah ilmu yang diperoleh dari para Nabi seperti al-Quran dan hadits, maupun dari para sahabat seperti *ijma'*. Sedangkan yang *ghairu syari'at* ialah ilmu-ilmu yang bersifat duniawi seperti ilmu kedokteran, matematika, geografi, astrologi, dan lain sebagainya. Secara ontologis, al-Ghozali menjelaskannya sebagai ilmu yang berhubungan dengan tugas dan tujuan hidup manusia. Ada yang bersifat *fardlu 'ain* yaitu yang dibutuhkan untuk melaksanakan tugas-tugas akhirat dengan baik seperti ilmu tauhid dan ilmu *syari'at* maupun tasawuf. Ada yang bersifat *kifayah* yakni ilmu-ilmu yang berkaitan dengan urusan keduniaan yang perlu diketahui manusia, seperti ilmu arsitektur Islam, ilmu bahasa sastra, ilmu filsafat, ilmu psikologi, ilmu antropologi, dan lain sebagainya (Abidin dan Rusdi, 1998:23).

BAB III
PEMBAHASAN

3.1 Penyelesaian Persamaan Telegraph

3.1.1 Analisis Metode Pemisahan Variabel pada Persamaan Telegraph

Masalah syarat batas pada persamaan telegraf dapat diselesaikan dengan menggunakan metode pemisahan variabel. Adapun bentuk umum persamaan telegraf adalah

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial t} + \beta^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (3.1)$$

pada domain $0 < x < l$ dan $t > 0$ dengan kondisi awal

$$u(x, 0) = f(x) \quad (3.2)$$

dan

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) \quad (3.3)$$

dengan syarat batas

$$\begin{aligned} u(0, t) &= 0 \\ u(l, t) &= 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Untuk menyelesaikan persamaan (3.1) digunakan metode pemisahan variabel, misal $u(x, t) = X(x)T(t)$. Maka persamaan (3.1) dapat dinyatakan sebagai berikut

$$X(x)T''(t) + 2\alpha X(x)T'(t) + \beta^2 X(x)T(t) = X''(x)T(t) \quad (3.5)$$

Persamaan (3.5) dikalikan dengan $\frac{1}{X(x)T(t)}$, maka diperoleh

$$\frac{X(x)T''(t)}{X(x)T(t)} + \frac{2\alpha X(x)T'(t)}{X(x)T(t)} + \beta^2 = \frac{X''(x)T(t)}{X(x)T(t)} \quad (3.6)$$

Dari persamaan (3.6) dapat dinyatakan kembali menjadi

$$\frac{T''(t)}{T(t)} + \frac{2\alpha T'(t)}{T(t)} + \beta^2 = \frac{X''(x)}{X(x)} \quad (3.7)$$

Karena pada persamaan (3.7) ruas kanan hanya bergantung pada x dan ruas kiri hanya bergantung pada t . Maka persamaan (3.7) terpenuhi jika berupa konstanta.

Misalkan k adalah konstanta dari persamaan (3.7) maka dapat ditulis

$$\frac{T''(t)}{T(t)} + \frac{2\alpha T'(t)}{T(t)} + \frac{\beta^2 T(t)}{T(t)} = k \quad (3.8)$$

dan

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = k \quad (3.9)$$

Persamaan (3.9) dapat dinyatakan kembali menjadi

$$X''(x) - kX(x) = 0 \quad (3.10)$$

Untuk konstanta k pada persamaan (3.10) terdapat tiga kemungkinan yaitu pada $k = 0$, $k > 0$ dan $k < 0$.

Kasus I (untuk $k > 0$):

Misalkan $k = r^2$ maka persamaan (3.10) menjadi

$$X''(x) - r^2 X(x) = 0 \quad (3.11)$$

Persamaan (3.11) mempunyai solusi

$$X(x) = C_1 e^{r x} + C_2 e^{-r x} \quad (3.12)$$

Selanjutnya persamaan (3.33) disubstitusikan pada persamaan (3.12) maka diperoleh

$$X(0) = C_1 e^{r x} + C_2 e^{-r x}$$

$$C_1 e^0 + C_2 e^0 = 0$$

$$C_1 + C_2 = 0$$

$$C_1 = -C_2 \quad (3.13)$$

Sedangkan untuk $X(l) = 0$ maka

$$\begin{aligned} X(l) &= C_1 e^{r l} + C_2 e^{-r l} = 0 \\ C_1 e^{r l} + C_2 e^{-r l} &= 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.13) ke persamaan (3.14) maka diperoleh

$$C_1 (e^{r l} - e^{-r l}) = 0 \quad (3.15)$$

Selanjutnya pada kasus I ini adalah untuk menentukan nilai C_1 dan C_2 , maka dengan mensubstitusikan persamaan (3.3) diperoleh nilai $C_1 = C_2 = 0$. Jadi untuk kasus $k > 0$ diperoleh solusi nol (*nontrivial*).

Kasus II (untuk $k = 0$):

Misalkan $k = r^2$ untuk $r^2 = 0$, maka persamaan (3.10) menjadi

$$X''(x) = 0 \quad (3.16)$$

Jadi solusi persamaan (3.16) adalah

$$X(x) = C_1 x + C_2 \quad (3.17)$$

Dengan mensubstitusikan nilai syarat batas maka diperoleh

$$\begin{aligned} X(0) &= C_1 \cdot 0 + C_2 = 0 \\ C_1 &= 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Sedangkan untuk $X(l) = 0$ diperoleh

$$\begin{aligned} X(l) &= C_1 + l C_2 = 0 \\ 0 + l C_2 &= 0 \\ l C_2 &= 0 \\ C_2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

Oleh karena itu, dengan mengingat bahwa pada kasus II ini adalah untuk menentukan nilai C_1 dan C_2 maka dengan mensubstitusikan persamaan (3.3)

diperoleh nilai $C_1 = C_2 = 0$. Jadi untuk kasus $k = 0$ diperoleh solusi nol (*nontrivial*).

Kasus III (untuk $k < 0$):

Misalkan $k = -r^2$ maka persamaan (3.10) menjadi

$$X''(x) + r^2 X(x) = 0 \quad (3.20)$$

Berdasarkan Nagle (1993:537-538) persamaan (3.20) mempunyai solusi

$$X(x) = C_1 \cos(rx) + C_2 \sin(rx) \quad (3.21)$$

Selanjutnya persamaan (3.21) disubstitusikan pada persamaan (3.3) maka diperoleh

$$X(0) = C_1 \cos(r \cdot 0) + C_2 \sin(r \cdot 0) = 0$$

$$C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 = 0$$

$$C_1 = 0$$

Sehingga persamaan (3.21) menjadi

$$X(x) = C_2 \sin(rx)$$

Sedangkan untuk $X = l$ diperoleh

$$C_2 \sin(rx) = 0$$

$$\sin(rl) = 0$$

Untuk $C_2 = 0$ tidak mungkin dipilih, sehingga haruslah yang dipilih adalah $\sin(rl) = 0$, karena $rl = \arcsin(0)$

$$rl = n\pi, \quad \forall n = 1, 2, 3 \dots$$

$$r = \frac{n\pi}{l}$$

Sehingga solusi $X(x)$ adalah

$$X_n(x) = C_2 \sin \frac{n\pi x}{l} \quad \forall n = 1, 2, 3 \dots \quad (3.22)$$

Selanjutnya menyelesaikan persamaan (3.8) yaitu variabel $T(t)$. Karena fungsi T hanya dipengaruhi variabel t dan fungsi X hanya dipengaruhi variabel x maka persamaan (3.8) hanya terpenuhi jika berupa konstanta. Selanjutnya karena kondisi batas yang diberikan adalah kondisi Dirichlet Homogenous maka konstanta yang memenuhi adalah konstanta negatif. Misalkan $k = -r^2$. Sehingga persamaan (2.3.8) diperoleh

$$\frac{T''(t)}{T(t)} + \frac{2\alpha T'(t)}{T(t)} + \beta^2 = -r^2 \quad (3.23)$$

Suatu konstanta adalah r^2 persamaan (3.23) disubstitusikan ke persamaan (3.6) maka diperoleh

$$\frac{T''(t)}{T(t)} + \frac{2\alpha T'(t)}{T(t)} + \beta^2 = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$$

atau dapat ditulis

$$\frac{T''(t) + 2\alpha T'(t) + \beta^2 T(t)}{T(t)} = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \quad (3.24)$$

Dengan menjabarkan persamaan (3.24) maka diperoleh

$$T''(t) + 2\alpha T'(t) + \beta^2 T(t) = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 T(t)$$

atau dapat ditulis

$$T''(t) + 2\alpha T'(t) + \left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) T(t) = 0 \quad (3.25)$$

Jadi persamaan (3.25) merupakan persamaan karakteristik yaitu

$$m^2 + (2\alpha)m + \left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) = 0 \quad (3.26)$$

Sehingga diperoleh akar-akar karakteristik persamaan (3.26) adalah

$$m_{1,2} = \frac{-2\alpha \pm \sqrt{-4\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - 4\alpha^2}}{2(1)}$$

Dengan asumsi bahwa $(2\alpha)^2 - 4\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) < 0$, maka diperoleh

$$m_{1,2} = \frac{-2\alpha}{2} \pm i \frac{\sqrt{4\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - 4\alpha^2}}{2} \quad (3.27)$$

Persamaan (3.27) disederhanakan menjadi

$$m_{1,2} = -\alpha \pm i \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2} \quad (3.28)$$

Selanjutnya persamaan (3.28) dapat dijabarkan menjadi

$$T(t) = C_3 e^{-\alpha t} e^{i t \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2}} + C_4 e^{-\alpha t} e^{-i t \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2}} \quad (3.29)$$

Persamaan (3.29) diperoleh

$$T(t) = C_3 e^{-\alpha t} \left(\cos \left(t \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2} \right) + i \sin \left(t \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2} \right) \right) + C_4 e^{-\alpha t} \left(\cos \left(t \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2} \right) - i \sin \left(t \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2} \right) \right) \quad (3.30)$$

Selanjutnya persamaan (3.30) dapat disederhanakan menjadi

$$T(t) = C_3 e^{-\alpha t} \cos \left(t \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2} \right) + i C_3 e^{-\alpha t} \sin \left(t \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2} \right) + C_4 e^{-\alpha t} \cos \left(t \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2} \right) - i C_4 e^{-\alpha t} \sin \left(t \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2} \right) \quad (3.31)$$

Persamaan (3.31) diperoleh

$$T(t) = e^{-\alpha t} \cos \left(t \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2} \right) (C_3 + C_4) + e^{-\alpha t} \sin \left(t \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2} \right) (iC_3 - iC_4) \quad (3.32)$$

Persamaan (3.32) dapat dimisalkan bahwa $(C_3 + C_4) = A$

$$(iC_3 - iC_4) = B$$

maka dari pemisalan A dan B pada persamaan (3.32) maka diperoleh

$$T(t) = A e^{-\alpha t} \cos\left(t\sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2}\right) + B e^{-\alpha t} \sin\left(t\sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2}\right) \quad (3.33)$$

Selanjutnya persamaan (3.22) dan persamaan (3.33) disubstitusikan ke solusi persamaan telegraf maka diperoleh

$$\begin{aligned} u_n(x, t) &= X_n(x)T_n(t) \\ &= C_2 \sin \frac{n\pi x}{l} \left[A e^{-\alpha t} \cos\left(t\sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2}\right) + B e^{-\alpha t} \sin\left(t\sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2}\right) \right] \end{aligned} \quad (3.34)$$

Persamaan (3.34) untuk koefisien C_2 , dimana A dan B maka dapat disederhanakan dengan pemisalan bahwa

$$C_2 A = b_n \quad (3.35)$$

$$C_2 B = c_n \quad (3.36)$$

Selanjutnya persamaan (3.35) dan persamaan (3.36) disubstitusikan maka diperoleh

$$u_n(x, t) = \left(b_n e^{-\alpha t} \cos\left(t\sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2}\right) + c_n e^{-\alpha t} \sin\left(t\sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2}\right) \right) \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (3.37)$$

Menurut Strauss (2007:137) karena nilai n merupakan jumlah dari deret sehingga persamaan (3.37) menjadi

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n e^{-\alpha t} \cos\left(t\sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2}\right) + c_n e^{-\alpha t} \sin\left(t\sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2}\right) \right) \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (3.38)$$

3.1.2 Analisis Solusi Khusus

Pada bab ini akan dibahas tentang analisis solusi khusus yaitu untuk mendapatkan nilai b_n dan c_n dengan nilai awal $u(x, 0) = f(x)$, diperoleh

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (3.39)$$

Kemudian dari persamaan (3.39) dikalikan dengan $\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)$ dan selanjutnya di integralkan terhadap x , dengan interval $0 < x < l$ maka diperoleh

$$\int_0^l f(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) dx = \int_0^l \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) dx \quad (3.40)$$

Pada saat $m \neq n$ nilai $\int_0^l \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) dx = 0$, maka haruslah $m = n$ (Vabreg, 2004:4). Maka persamaan (3.40) dengan asumsi $m = n$, maka dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\int_0^l f(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) dx = \int_0^l b_m \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) dx \quad (3.41)$$

$$= b_m \int_0^l \sin^2\left(\frac{m\pi x}{l}\right) dx \quad (3.42)$$

Persamaan (3.42) dapat dimisalkan bahwa $\frac{m\pi x}{l} = u$ maka $du = \frac{m\pi}{l} dx$ sehingga

$dx = \frac{l du}{m\pi}$, maka diperoleh

$$\begin{aligned} \int_0^l f(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) dx &= b_m \int_0^{m\pi} \sin^2 u \cdot \frac{l}{m\pi} \cdot du \\ &= \frac{l}{m\pi} \cdot b_m \int_0^{m\pi} \frac{1}{2} (1 - \cos 2u) du \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{m\pi} \cdot b_m \int_0^{m\pi} 1 - \cos 2u \, du \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{m\pi} \cdot b_m \left[\int_0^{m\pi} du - \int_0^{m\pi} \cos 2u \, du \right] \end{aligned} \quad (3.43)$$

Dari persamaan (3.43) dapat dimisalkan bahwa $2u = v$ dan $du = \frac{1}{2} dv$ maka diperoleh

$$\begin{aligned}
\int_0^l f(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) dx &= \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{m\pi} \cdot b_m \left[[u]_1^{m\pi} - \int_0^{2m\pi} \cos v \cdot \frac{1}{2} dv \right] \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{m\pi} \cdot b_m \left[m\pi \cdot \frac{1}{2} [\sin v]_0^{2m\pi} \right] \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{m\pi} \cdot b_m \left[m\pi - \frac{1}{2} \sin(2m\pi) \right] \tag{3.45}
\end{aligned}$$

Karena nilai $\sin(2m\pi) = 0$ untuk $m \in N$, maka untuk persamaan (3.45) diperoleh

$$\begin{aligned}
\int_0^l f(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) dx &= \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{m\pi} \cdot b_m \cdot m\pi \\
&= \frac{1}{2} \cdot l \cdot b_m \tag{3.46}
\end{aligned}$$

Kemudian untuk mendapatkan nilai b_n dan c_n dengan mensubstitusikan persamaan (3.2), maka diperoleh

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\alpha b_n + c_n \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2} \right) \sin \frac{n\pi x}{l} \tag{3.47}$$

Selanjutnya dari persamaan (3.47) dikalikan dengan $\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)$ dan diintegrasikan terhadap x , dengan interval $0 < x < l$ maka diperoleh

$$\int_0^l g(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) dx = \int_0^l \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\alpha b_n + c_n \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2} \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) dx \tag{3.48}$$

Pada saat $m \neq n$ nilai $\int_0^l \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) dx = 0$, maka haruslah $m = n$ (Vabreg, 2004). Sehingga persamaan (3.48) dengan asumsi $m = n$ diperoleh

$$\begin{aligned}
\int_0^l g(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) dx &= \int_0^l \left(-\alpha b_m + c_m \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2} \right) \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) dx \\
&= \left(-\alpha b_m + c_m \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2} \right) \int_0^l \sin^2\left(\frac{m\pi x}{l}\right) dx \tag{3.49}
\end{aligned}$$

Untuk persamaan (3.49) dapat dimisalkan bahwa $\frac{m\pi x}{l} = u$ sehingga $du = \frac{m\pi}{l} dx$

dan $dx = \frac{ldu}{m\pi}$, diperoleh

$$\begin{aligned}
 \int_0^l g(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) dx &= \left(-\alpha b_m + c_m \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2}\right) \int_0^{m\pi} \sin^2 u \cdot \frac{l}{m\pi} \cdot du \\
 &= \frac{l}{m\pi} \left(-\alpha b_m + c_m \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2}\right) \int_0^{m\pi} \frac{1}{2} (1 - \cos 2u) du \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{m\pi} \left(-\alpha b_m + c_m \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2}\right) \int_0^{m\pi} 1 - \cos 2u du \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{m\pi} \left(-\alpha b_m + c_m \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2}\right) \left[\int_0^{m\pi} du - \int_0^{m\pi} \cos 2u du \right] \quad (3.50)
 \end{aligned}$$

Dari persamaan (3.50) dapat dimisalkan bahwa $2u = v$ dan $du = \frac{1}{2}v$ maka diperoleh

$$\begin{aligned}
 \int_0^l g(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) dx &= \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{m\pi} \left(-\alpha b_m + c_m \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2}\right) \left[[u]_0^{m\pi} - \int_0^{2m\pi} \cos v \cdot \frac{1}{2} dv \right] \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{m\pi} \left(-\alpha b_m + c_m \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2}\right) \left[m\pi \cdot \frac{1}{2} [\sin v]_0^{2m\pi} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{m\pi} \left(-\alpha b_m + c_m \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2}\right) \left[m\pi - \frac{1}{2} \sin(2m\pi) \right] \quad (3.51)
 \end{aligned}$$

Karena nilai $\sin(2m\pi) = 0$ untuk $m \in N$, maka untuk persamaan (3.51) diperoleh

$$\begin{aligned}
 \int_0^l g(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) dx &= \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{m\pi} \left(-\alpha b_m + c_m \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2}\right) \cdot m\pi \\
 &= \frac{1}{2} \cdot l \left(-\alpha b_m + c_m \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2}\right) \quad (3.52)
 \end{aligned}$$

Sehingga hasil persamaan (3.46) dan persamaan (3.52) adalah

$$\int_0^l f(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) dx = \frac{1}{2} \cdot l \cdot b_m$$

$$\int_0^l g(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) dx = \frac{1}{2} \cdot l \left(-\alpha b_m + c_m \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2} \right)$$
(3.53)

3.2 Simulasi

Pada bab ini akan dijelaskan tentang simulasi pada persamaan telegraf. Adapun pada simulasi ini terdapat dua contoh kasus yaitu kasus I adalah $u(x, 0) = x$ dan $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$, sedangkan kasus II adalah $u(x, 0) = \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$ dan $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$ dengan $\Delta x = 0.1$ dan $\Delta t = 0.05$, dari interval $0 \leq x \leq 10$ dan $0 \leq t \leq 10$. Selanjutnya untuk mendapatkan nilai b_n dan c_n dapat diperoleh dengan memasukkan persamaan (3.2) dan persamaan (3.3) menggunakan deret Fourier.

Contoh kasus I:

Pada contoh kasus I, dengan mengambil hasil solusi pada persamaan telegraf menggunakan metode pemisahan variabel pada persamaan (3.38) dengan kondisi awal dan syarat batas $u(x, 0) = x$ dan $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$ dengan $\Delta x = 0.1$ dan $\Delta t = 0.05$, dari interval $0 \leq x \leq 10$ dan $0 \leq t \leq 10$ adalah sebagai berikut:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n e^{-\alpha t} \cos\left(t \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2}\right) + c_n e^{-\alpha t} \sin\left(t \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2}\right) \right) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

Saat $t = 0$ untuk persamaan (3.38) diperoleh

$$\begin{aligned}
 u(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n e^{-\alpha \cdot 0} \cos \left(0 \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2} - \alpha^2 \right)} + c_n e^{-\alpha \cdot 0} \sin \left(0 \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2} - \alpha^2 \right)} \right) \right) \sin \frac{n\pi x}{l} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}
 \end{aligned}$$

Dengan mensubstitusi nilai awal $u(x, 0) = x$ dan $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$, ke dalam persamaan (3.38) diperoleh

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (3.54)$$

Selanjutnya persamaan (3.54) dikalikan dengan $\sin \left(\frac{m\pi x}{l} \right)$ dan diintegrasikan terhadap x , dengan interval $0 < x < l$ diperoleh

$$\int_0^l x \sin \left(\frac{m\pi x}{l} \right) dx = \int_0^l \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \left(\frac{n\pi x}{l} \right) \sin \left(\frac{m\pi x}{l} \right) dx \quad (3.55)$$

Pada saat $m \neq n$ nilai $\int_0^l \sin \left(\frac{n\pi x}{l} \right) \sin \left(\frac{m\pi x}{l} \right) dx = 0$, maka haruslah $m = n$ (Vabrerger, 2004:4). Sehingga persamaan (3.55) dengan asumsi $m = n$ diperoleh

$$\begin{aligned}
 \int_0^l x \sin \left(\frac{m\pi x}{l} \right) dx &= \int_0^l b_m \sin \left(\frac{m\pi x}{l} \right) \cdot \sin \left(\frac{m\pi x}{l} \right) dx \\
 &= b_m \int_0^l \sin^2 \left(\frac{m\pi x}{l} \right) dx
 \end{aligned} \quad (3.56)$$

Pada persamaan (3.56) dapat dimisalkan bahwa $\frac{m\pi x}{l} = p$ sehingga $dp = \frac{m\pi}{l} dx$

dan $dx = \frac{ldp}{m\pi}$, maka diperoleh

$$\begin{aligned}
 \int_0^l x \sin \left(\frac{m\pi x}{l} \right) dx &= b_m \int_0^{m\pi} \sin^2 p \cdot \frac{l}{m\pi} \cdot dp \\
 &= \frac{l}{m\pi} \cdot b_m \int_0^{m\pi} \frac{1}{2} (1 - \cos 2p) dp
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{m\pi} \cdot b_m \int_0^{m\pi} 1 - \cos 2p \, dp \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{m\pi} \cdot b_m \left[\int_0^{m\pi} dp - \int_0^{m\pi} \cos 2p \, dp \right] \quad (3.57)
\end{aligned}$$

Pada persamaan (3.57) dapat dimisalkan bahwa $2p = v$ dan $dp = \frac{1}{2} dv$ maka diperoleh

$$\begin{aligned}
\int_0^l x \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) dx &= \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{m\pi} \cdot b_m \left[[p]_0^{m\pi} - \int_0^{2m\pi} \cos v \cdot \frac{1}{2} dv \right] \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{m\pi} \cdot b_m \left[m\pi - \frac{1}{2} [\sin v]_0^{2m\pi} \right] \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{m\pi} \cdot b_m \left[m\pi - \frac{1}{2} \sin(2m\pi) \right] \quad (3.58)
\end{aligned}$$

Nilai $\sin(2m\pi) = 0$ untuk $m \in N$, maka untuk persamaan (3.58) diperoleh

$$\begin{aligned}
\int_0^l x \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) dx &= \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{m\pi} \cdot b_m \cdot m\pi \\
&= \frac{1}{2} \cdot l \cdot b_m \\
&= \frac{1}{2} l \cdot b_m \quad (3.59)
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh nilai untuk b_m yaitu

$$b_m = \frac{2}{l} \int_0^l x \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) dx \quad (3.60)$$

Persamaan (3.60) disederhanakan menjadi

$$b_m = \frac{2}{l} \left[\left[-x \cdot \frac{l}{m\pi} \cos\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \right]_0^l - \int_0^l -\frac{l}{m\pi} \cos\left(\frac{m\pi x}{l}\right) dx \right] \quad (3.61)$$

Untuk menyelesaikan persamaan (3.61) dengan pemisalan bahwa $dz = \frac{m\pi x}{l} dx$

dan $dx = \frac{l}{m\pi} dz$ maka diperoleh

$$b_m = \frac{2}{l} \left[-\frac{l^2}{m\pi} \cos(m\pi) + \frac{l}{m\pi} \int_0^{m\pi} \frac{l}{m\pi} \cos z dz \right] \quad (3.62)$$

Persamaan (3.62) dapat disederhanakan menjadi

$$b_m = \frac{2}{l} \left[-\frac{l^2}{m\pi} \cos(m\pi) + \frac{l^2}{(m\pi)^2} [\sin z]_0^{m\pi} \right] \quad (3.63)$$

$$= \frac{2}{l} \cdot \frac{l^2}{m\pi} \left[-\cos(m\pi) + \frac{1}{m\pi} \sin(m\pi) \right], \forall m \in N \quad (3.64)$$

Karena pada persamaan (3.64) untuk nilai $\cos(m\pi) = \pm 1, \forall m \in N$ dan $\sin(m\pi) = 0, \forall m \in N$, maka diperoleh

$$b_m = \frac{2}{l} \cdot \frac{l^2}{m\pi} [(-1)^{m+1} + 0] \quad (3.65)$$

Untuk persamaan (3.65) karena $-\cos(m\pi)$ bernilai positif saat $m = 1$, maka dapat dipilih pangkat (-1) yaitu $m + 1$ agar bernilai positif juga pada saat $m = 1$, diperoleh

$$b_m = \frac{2l}{m\pi} \cdot (-1)^{m+1} \quad (3.66)$$

Selanjutnya untuk nilai c_m yang memenuhi persamaan $0 =$

$\sum_{m=1}^{\infty} \left(-\alpha b_m + c_m \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \right) - \alpha^2} \right) \sin \frac{m\pi x}{l}$ adalah nol, karena pada

nilai $\sin \left(\frac{m\pi x}{l} \right)$ belum tentu nol. Jadi untuk memenuhi persamaan c_m

harus sama dengan nol. Untuk nilai $c_m = 0$, maka diperoleh

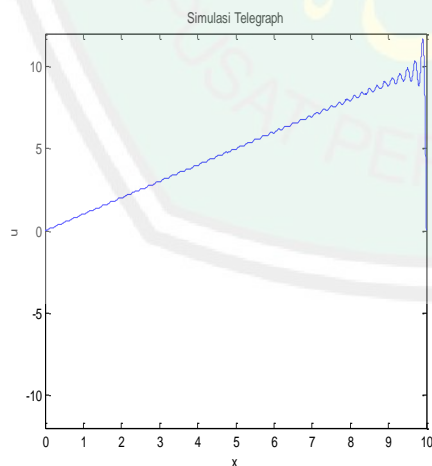
$$b_m = \frac{2l}{m\pi} \cdot (-1)^{m+1} \text{ dan } c_m = 0$$

Solusi khusus persamaan (3.39) adalah

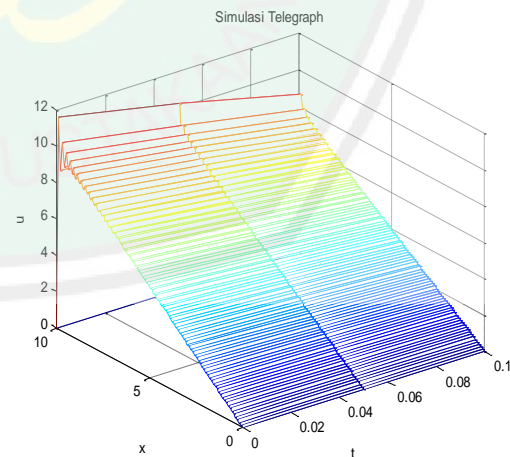
$$u(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{2l}{m\pi} \cdot (-1)^{m+1} e^{-\alpha t} \cos \left(t \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \right) - \alpha^2} \right) \right. \\ \left. + 0 e^{-\alpha t} \sin \left(t \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \right) - \alpha^2} \right) \right) \sin \frac{m\pi x}{l} \quad (3.67)$$

$$= \frac{2l}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} e^{-\alpha t} \cos \left(t \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \right) - \alpha^2} \right) \sin \frac{m\pi x}{l} \quad (3.68)$$

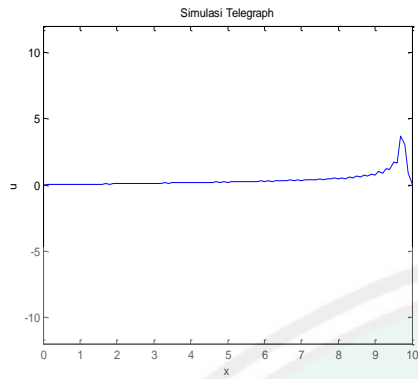
Selanjutnya pada kasus I, akan dilakukan simulasi persamaan telegraf pada gelombang listrik di jalur transmisi kabel yaitu persamaan (3.1) secara analitik dengan menggunakan metode pemisahan variabel. Adapun hasil solusi adalah persamaan (3.68), yang disubstitusikan ke persamaan $u(x, t)$. Dalam hal ini peneliti memodifikasi nilai awal dan kecepatan awal yang ada untuk melihat pengaruh dari kecepatan dari persamaan tersebut terhadap fenomena yang terjadi. Adapun gambar dari solusi persamaan (3.68) ditunjukkan pada Gambar 3.1 berikut



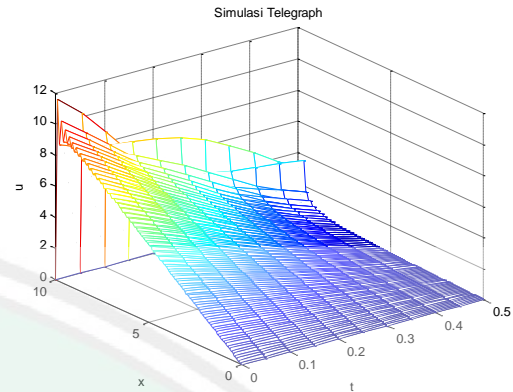
Gambar 3.1a Grafik 2D dengan $t = 0$ dan $0 \leq x \leq 10$ dengan $\Delta x = 0.1$ dan $\Delta t = 0.05$



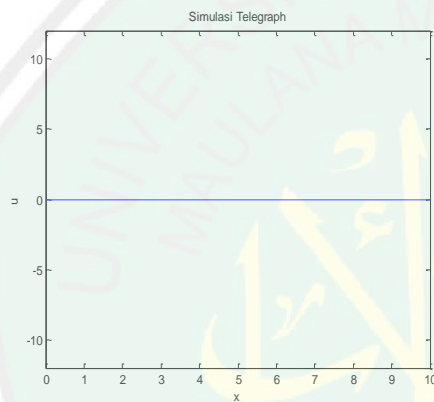
Gambar 3.1b Grafik 3D dengan $0 \leq t \leq 0.1$ dan $0 \leq x \leq 10$ dengan $\Delta x = 0.1$ dan $\Delta t = 0.05$



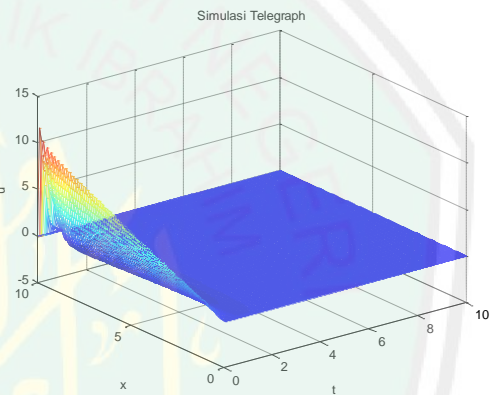
Gambar 3.1c Grafik 2D dengan $t = 0.5$ dan $0 \leq x \leq 10$ dengan $\Delta x = 0.1$ dan $\Delta t = 0.05$



Gambar 3.1d Grafik 3D dengan $0 \leq t \leq 0.5$ dan $0 \leq x \leq 10$ dengan $\Delta x = 0.1$ dan $\Delta t = 0.05$



Gambar 3.1e Grafik 2D dengan $t = 10$ dan $0 \leq x \leq 10$ dengan $\Delta x = 0.1$ dan $\Delta t = 0.05$



Gambar 3.1f Grafik 3D dengan $0 \leq t \leq 10$ dan $0 \leq x \leq 10$ dengan $\Delta x = 0.1$ dan $\Delta t = 0.05$

Gambar 3.1 Grafik 2D dan 3D Solusi Analitik Persamaan Telegraph Menggunakan Metode Pemisahan Variabel dengan Nilai Awal $u(x, 0) = x$ dan $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$

Gambar 3.1 menunjukkan hasil simulasi persamaan telegraf pada grafik 2D dan 3D, untuk gambar grafik 2D pada gambar (3.1a), (3.1c) dan (3.1e), sedangkan gambar grafik 3D pada gambar (3.1b), (3.1d) dan (3.1f). Hasil simulasi terhadap ruang (x), waktu (t) dan tegangan (u) pada persamaan $u(x, t)$. Dari grafik tersebut menunjukkan pada saat $t = 0$, panjang elektrik kabel $l = 0$. Pada saat $t = 0 - 0.5$ panjang elektrik kabel mengalami kenaikan, sedangkan pada waktu $t = 0 - 10$ panjang amplitudo gelombang menuju ke nol atau konvergen ke panjang elektrik kabel.

Contoh kasus II:

Pada contoh kasus II, yaitu dengan mengambil hasil solusi pada persamaan telegraf dengan menggunakan metode pemisahan variabel pada persamaan (3.38) dengan kondisi awal dan syarat batas $u(x, 0) = \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)$ dan $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$ dengan $\Delta x = 0.1$ dan $\Delta t = 0.05$, dari interval $0 \leq x \leq 10$ dan $0 \leq t \leq 10$ adalah

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n e^{-\alpha t} \cos \left(t \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 - \alpha^2} \right)} + c_n e^{-\alpha t} \sin \left(t \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 - \alpha^2} \right)} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

Ketika $t = 0$ persamaan (3.38) menjadi

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n e^{-\alpha \cdot 0} \cos \left(0 \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 - \alpha^2} \right)} + c_n e^{-\alpha \cdot 0} \sin \left(0 \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 - \alpha^2} \right)} \right) \right) \sin \frac{n\pi x}{l} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \end{aligned}$$

Dengan mensubstitusikan nilai awal $u(x, 0) = \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)$ dan $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$ maka diperoleh

$$\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (3.69)$$

Kemudian dari persamaan (3.69) dikalikan dengan $\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)$ dan selanjutnya diintegrasikan terhadap x , dengan interval $0 < x < l$ maka diperoleh

$$\int_0^l \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) dx = \int_0^l \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) dx \quad (3.70)$$

Pada saat $m \neq n$ nilai $\int_0^l \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) dx = 0$, haruslah $m = n$ (Vabrerger, 2004:4). Sehingga dengan asumsi $m = n$ persamaan (3.70) menjadi

$$\int_0^l \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) dx = \int_0^l b_m \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) dx$$

$$= b_m \int_0^l \sin^2 \left(\frac{m\pi x}{l} \right) dx \quad (3.71)$$

Untuk persamaan (3.71) dapat dimisalkan bahwa $\frac{m\pi x}{l} = p$ sehingga $dp = \frac{m\pi}{l} dx$

dan $dx = \frac{ldp}{m\pi}$, maka diperoleh

$$\begin{aligned} \int_0^l \sin^2(x) \sin \left(\frac{m\pi x}{l} \right) dx &= b_m \int_0^{m\pi} \sin^2 p \cdot \frac{l}{m\pi} \cdot dp \\ &= \frac{l}{m\pi} \cdot b_m \int_0^{m\pi} \frac{1}{2} (1 - \cos 2p) dp \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{m\pi} \cdot b_m \int_0^{m\pi} 1 - \cos 2p dp \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{m\pi} \cdot b_m \left[\int_0^{m\pi} dp - \int_0^{m\pi} \cos 2p dp \right] \end{aligned} \quad (3.72)$$

Persamaan (3.72) dapat dimisalkan bahwa $2p = v$ dan $dp = \frac{1}{2} dv$ maka diperoleh

$$\begin{aligned} \int_0^l \sin^2(x) \sin \left(\frac{m\pi x}{l} \right) dx &= \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{m\pi} \cdot b_m \left[p \Big|_0^{m\pi} - \int_0^{2m\pi} \cos v \cdot \frac{1}{2} dv \right] \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{m\pi} \cdot b_m \left[m\pi - \frac{1}{2} [\sin v]_0^{2m\pi} \right] \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{m\pi} \cdot b_m \left[m\pi - \frac{1}{2} \sin(2m\pi) \right] \end{aligned} \quad (3.73)$$

Nilai $\sin(2m\pi) = 0$ untuk $m \in N$, maka untuk persamaan (3.73) diperoleh

$$\begin{aligned} \int_0^l \sin^2(x) \sin \left(\frac{m\pi x}{l} \right) dx &= \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{m\pi} \cdot b_m \cdot m\pi \\ &= \frac{1}{2} \cdot l \cdot b_m \end{aligned}$$

$$\int_0^l \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) dx = \frac{1}{2}l \cdot b_m \quad (3.74)$$

Persamaan (3.74) dapat disederhanakan menjadi

$$\int_0^l \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}l \cdot b_m \quad (3.75)$$

$$-\sin\left(x - \left(\frac{m\pi x}{l}\right)\right) + \sin\left(x + \left(\frac{m\pi x}{l}\right)\right) = \frac{1}{2}l \cdot b_m \quad (3.76)$$

$$b_m = \frac{-\sin\left(x - \left(\frac{m\pi x}{l}\right)\right) + \sin\left(x + \left(\frac{m\pi x}{l}\right)\right)}{\frac{1}{2}l} \quad (3.77)$$

Selanjutnya nilai c_m yang memenuhi persamaan $0 = \sum_{m=1}^{\infty} \left(-\alpha b_m + c_n \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2}\right) \sin \frac{m\pi x}{l}$ adalah nol, karena pada nilai $\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)$ belum tentu nol. Jadi untuk memenuhi persamaan c_m harus sama dengan nol. Untuk nilai $c_m = 0$, diperoleh

$$b_m = \frac{-\sin\left(x - \left(\frac{m\pi x}{l}\right)\right) + \sin\left(x + \left(\frac{m\pi x}{l}\right)\right)}{\frac{1}{2}l} \text{ dan } c_m = 0$$

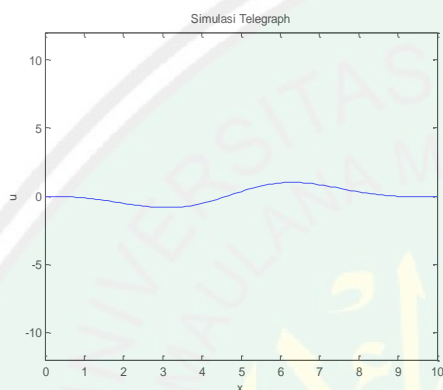
Solusi khusus persamaan (3.69) adalah

$$u(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{-\sin\left(x - \left(\frac{m\pi x}{l}\right)\right) + \sin\left(x + \left(\frac{m\pi x}{l}\right)\right)}{\frac{1}{2}l} e^{-\alpha t} \cos\left(t \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2}\right) + 0 e^{-\alpha t} \sin\left(t \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2}\right) \right) \sin \frac{m\pi x}{l} \quad (3.78)$$

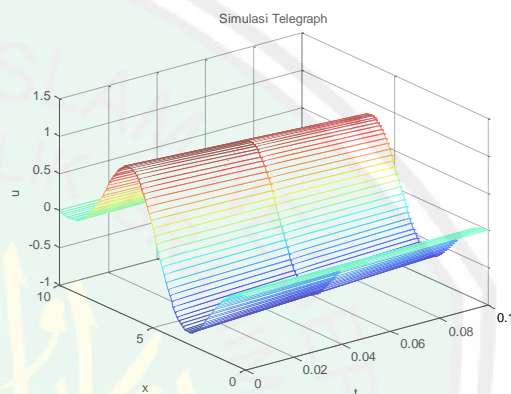
$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{-\sin\left(x - \left(\frac{m\pi x}{l}\right)\right) + \sin\left(x + \left(\frac{m\pi x}{l}\right)\right)}{\frac{1}{2}l} e^{-\alpha t} \cos\left(t \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2}\right) \sin \frac{m\pi x}{l} \quad (3.79)$$

Selanjutnya akan dilakukan simulasi persamaan telegraf pada gelombang listrik di jalur transmisi kabel pada persamaan (3.1) secara analitik dengan

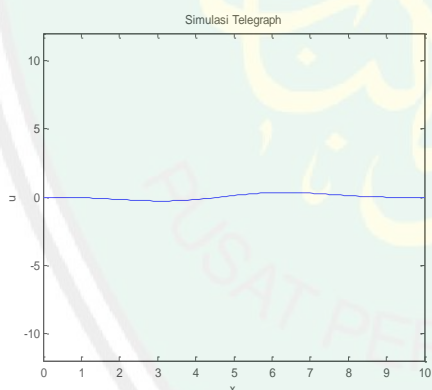
menggunakan metode pemisahan variabel dan solusi pada persamaan (3.79), yang disubstitusikan ke persamaan $u(x, t)$. Dalam hal ini peneliti memodifikasi nilai awal dan kecepatan awal yang ada untuk melihat pengaruh dari kecepatan persamaan tersebut terhadap fenomena yang terjadi. Adapun gambar dari hasil solusi persamaan (3.79) ditunjukkan pada Gambar 3.2 berikut



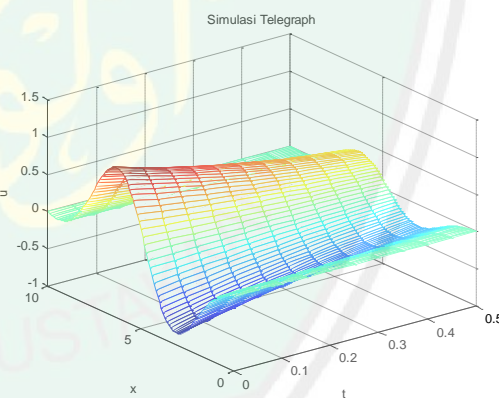
Gambar 3.2a Grafik 2D dengan $t = 0$ dan $0 \leq x \leq 10$ dengan $\Delta x = 0.1$ dan $\Delta t = 0.05$



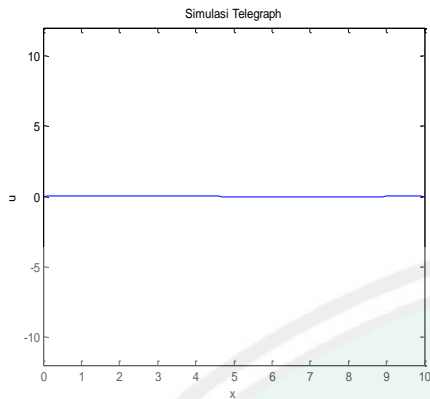
Gambar 3.2b Grafik 3D dengan $0 \leq t \leq 0.1$ dan $0 \leq x \leq 10$ dengan $\Delta x = 0.1$ dan $\Delta t = 0.05$



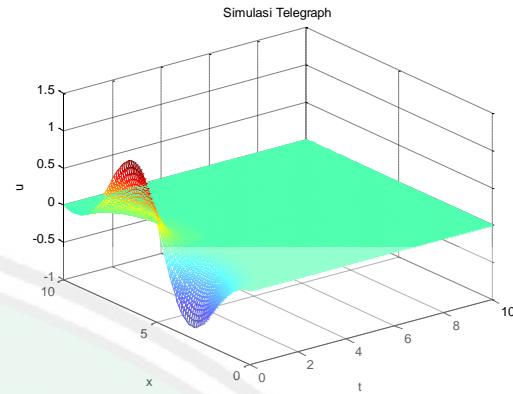
Gambar 3.2c Grafik 2D dengan $t = 0.5$ dan $0 \leq x \leq 10$ dengan $\Delta x = 0.1$ dan $\Delta t = 0.05$



Gambar 3.2d Grafik 3D dengan $t = 0.5$ dan $0 \leq x \leq 10$ dengan $\Delta x = 0.1$ dan $\Delta t = 0.05$



Gambar 3.2e Grafik 2D dengan $t = 10$ dan $0 \leq x \leq 10$ dengan $\Delta x = 0.1$ dan $\Delta t = 0.05$



Gambar 3.2f Grafik 2D dengan $0 \leq t \leq 10$ dan $0 \leq x \leq 10$ dengan $\Delta x = 0.1$ dan $\Delta t = 0.05$

Gambar 3.2 Grafik 2D dan 3D Solusi Analitik Persamaan Telegraph Menggunakan Metode Pemisahan Variabel dengan Nilai Awal $u(x, 0) = \sin(x)$ dan $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$

Gambar 3.2 menunjukkan hasil simulasi persamaan telegraf pada grafik 2D dan 3D, untuk gambar grafik 2D adalah pada gambar (3.2a), (3.2c) dan (3.2e), adapun gambar grafik 3D adalah pada gambar (3.2b), (3.2d) dan (3.2f). Hasil simulasi terhadap ruang (x), waktu (t) dan tegangan (u) pada persamaan $u(x, t)$. Dari gambar grafik tersebut menunjukkan pada saat $t = 0$, panjang elektrik kabel $l = 0$. Pada saat $t = 0 - 0.5$ panjang elektrik kabel mengalami kenaikan, sedangkan saat $t = 0 - 10$ panjang amplitudo gelombang menuju ke nol atau konvergen ke panjang elektrik kabel.

Berdasarkan Gambar (3.1) dan (3.2) dapat dilihat bahwa gerak amplitudo gelombang mengalami kenaikan dan penurunan yang dipengaruhi oleh variasi nilai awal. Sehingga dapat disimpulkan bahwa perubahan tegangan amplitudo gelombang bergantung pada variasi nilai awal.

3.3 Kajian Al-Quran Tentang Model Persamaan Telegraph

Analisis model berarti mendalami secara lebih tentang memodelkan masalah yang ada di dunia nyata ke dalam bahasa matematika, yang dalam kasus

ini memodelkan proses persamaan diferensial biasa dari transformasi persamaan telegraf. Persamaan telegraf dalam penelitian ini membahas tentang gelombang sinyal listrik di jalur transmisi kabel dengan menganalisis perilaku ke dalam bahasa matematika yaitu berupa variabel yang ada pada model. Mencari ilmu merupakan suatu kewajiban setiap muslim, begitupun dengan mendalami suatu ilmu juga merupakan kewajiban setiap muslim. Seperti dalam al-Quran surah al-Baqarah ayat 269 yang berbunyi:

يُؤْتِي الْحِكْمَةَ مَنْ يَشَاءُ وَمَنْ يُؤْتَ الْحِكْمَةَ فَقَدْ أُوتِيَ خَيْرًا كَثِيرًا وَمَا يَدْرِكُهُ إِلَّا الْأَلْبَابُ



“Allah menganugerahkan al-Hikmah (kefahaman yang dalam tentang al-Quran dan as-Sunnah) kepada siapa yang dikehendaki-Nya. Dan barang siapa yang dianugerahi hikmah, ia benar-benar telah dianugerahi karunia yang banyak. Dan hanya orang-orang yang berakallah yang dapat mengambil pelajaran (dari firman Allah)”(QS. al-Baqarah: 269).

Pada ayat tersebut dijelaskan bahwa hikmah itu adalah ilmu-ilmu yang bermanfaat, pengetahuan, pemikiran yang matang dan terciptanya kebenaran dalam perkataan maupun perbuatan. Ini merupakan pemberian yang paling utama dan sebaik-baiknya karunia. Sama halnya pada analisis model persamaan diferensial biasa dari transformasi persamaan telegraf, mempelajari lebih mendalam tentang model matematika ini merupakan suatu hal yang bermanfaat untuk sesama manusia, dan terciptanya suatu kebenaran dalam perkataan pada analisis model matematika ini merupakan sebuah nikmat yang agung dari Allah untuk hambanya.

Pelajaran yang dapat diambil dari ayat tersebut adalah:

1. Sesungguhnya apa yang ada pada manusia itu berupa ilmu dan petunjuk yang semua ini adalah keutamaan dari Allah, maka jika Allah memberi nikmat

kepada seorang hamba berupa ilmu, kemampuan, pendengaran, dan penglihatan janganlah menjadi sombong.

2. Wajib bersyukur bagi orang yang Allah berikan kepadanya al-Hikmah atau sebuah ilmu yang bermanfaat, karena kebaikan yang sangat banyak ini mewajibkan untuk mensyukurinya.
3. Anugerah al-Hikmah diberikan Allah kepada seseorang melalui banyak cara, diantaranya Allah fitrahkan pada seseorang dengan hal tersebut, atau dapat diraih dengan latihan dan bertemu dengan orang-orang yang mulia. Seperti analisis model matematika pada analisis kestabilan perilaku ini, hasil dari pengetahuan yang diperoleh dengan cara latihan dan bertemu dengan orang-orang yang mulia.
4. Seseorang yang tidak dapat mengambil pelajaran yang terdapat di alam dan pada *syari'at* ini menunjukkan adanya kekurangan pada akalnya yaitu akal sehat, akal yang memberikan petunjuk pada dirinya, yang mana dengan akal tersebut seseorang dapat menghayati dan mempelajari apa yang terjadi dari tanda-tanda yang telah lalu dan yang akan datang, sehingga dapat mengambil pelajaran darinya.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan penelitian yang dilakukan, maka dapat disimpulkan bahwa solusi umum persamaan telegraf dengan metode pemisahan variabel berbentuk

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n e^{-\alpha t} \cos \left(t \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \right) - \alpha^2} \right) + c_n e^{-\alpha t} \sin \left(t \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \right) - \alpha^2} \right) \right) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

yang memenuhi nilai awal $u(x, 0) = f(x)$ dan $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x)$ serta memenuhi persamaan umum persamaan telegraf.

Adapun solusi khususnya berbentuk

$$u(x, t) = \frac{2l}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} e^{-\alpha t} \cos \left(t \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \right) - \alpha^2} \right) \sin \frac{m\pi x}{l}$$

yang memenuhi nilai awal $u(x, 0) = x$ dan $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$. Sedangkan simulasi dengan nilai awal yang berbeda memperoleh solusi khusus yang berbentuk:

$$u(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{-\sin \left(x - \left(\frac{m\pi x}{l} \right) \right) + \sin \left(x + \left(\frac{m\pi x}{l} \right) \right)}{\frac{1}{2}l} e^{-\alpha t} \cos \left(t \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \right) - \alpha^2} \right) \sin \frac{m\pi x}{l}$$

solusi tersebut yang memenuhi nilai awal $u(x, 0) = \sin \left(\frac{x}{2} \right)$ dan $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$.

4.2 Saran

Berdasarkan hasil analisis penelitian, saran untuk penelitian selanjutnya adalah membandingkan masalah syarat batas pada persamaan telegraf yang non linier secara numerik dengan metode yang menghasilkan *error* terkecil yang dibandingkan dengan solusi analitiknya.

DAFTAR PUSTAKA

- Abidin, & Rusdi, I. 2008. *Al-Qur'an dan Hadits (Dirasah Islamiyah I)*. Jakarta: PT. Raja Grafindo Persada.
- Amar, A. 2010. *Ringkasan Tafsir Al Israa ayat 36 Tentang segala sesuatu yang ada dalam diri kita dan yang kita lakukan akan dimintai pertanggung jawaban*. 09 Desember 2014, dari Pondok Ilmu: <http://ewidoyoko.blogspot.com/2010/12/ringkasan-tafsir-al-israa-ayat-36.html>.
- Ault, J.C. & Ayres, J. R. 1992. *Persamaan Diferensial*. Jakarta: Erlangga.
- Aini, L. 2011. *Penyelesaian Analitik dan Numerik Persamaan Pengiriman Sinyal Pesan*. Skripsi. Tidak diterbitkan. Fakultas Sains dan Teknologi Jurusan Matematika, Malang: UIN.
- Fitri, A. R. 2011. *Titik Keseimbangan Model Matematika Pada Mekanisme Respon Imun Terhadap Infeksi Mikrobakterium Tuberkulosis Di Paru-Paru*. Skripsi. Tidak diterbitkan. Malang: UIN Press.
- Javidi, M & Nyamoradi, N. 2013. Numerical Solution of Telegraph Equation by Using LT Inversion Technique. *International journal of advanced mathematical sciences*. Vol 02, Hal 64-77.
- Munir, R. 2008. *Metode Numerik*. Bandung: Informatika bandung.
- Nata, A. 1998. *Pemikiran Al-Ghazali tentang Pendidikan*. Yogyakarta: Pustaka Pelajar.
- Nagle, R.K., Saff, E.B., & Snider, A.D. 1993. *Fundamentals of Differential Equation and Boundary Value Problems*. New York: Addison Wesley.
- Naresh, B. 2013. Haar Wavelet Method For Numerical Solution Of Telegraph Equations. *Italian journal of Pure And Applied Mathematics*. Vol 03, Hal 317-328.
- Pamuntjak, & Santoso. 1990. *Persamaan Diferensial Biasa*. Bandung: ITB.
- Strauss, W. 2007. *Partial Differential Equations an Introduction Second Edition*. New York: John Wiley & Sons, Ltd.
- Triatmodjo, B. 2002. *Metode Numerik Dilengkapi dengan Program Komputer*. Yogyakarta: Beta offset.
- Vabrerger, D. Purcell, E. J. & Rigdon. 2004. *Kalkulus Jilid 2*. Jakarta: Erlangga.
- Yusuf, A. 2009. *Ensiklopedi Keajaiban Ilmiah Al-Qur'an*. Jakarta: Tausiah.

Zauderer, E. 2006. *Partial Differential Equations of Applied Mathematics Third Edition*. New York: John Wiley & Sons, Inc.



LAMPIRAN-LAMPIRAN

Lampiran 1

Grafik 2D Solusi Analitik Persamaan Telegraph Menggunakan Metode Pemisahan

Variabel $u(x, 0) = x$ dan $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$

```
clc,clear
dx = 0.1;
dt = 0.05;
l = 10;
tn =10;
x = 0:dx:l;
t = 0:dt:tn;

alpha = 2;
bbeta=1;

% figure(1),clf

for i=1:length(t)
    for j = 1:length(x)
        jml =0;
        for m =1:100
            jml = jml + ( 2*l/pi)*((-1)^(m+1)/m)*exp(-
alpha*t(i))*cos(((sqrt(((m*pi/l))/2))^2+bbeta^2-
(alpha)^2))*t(i))*sin(m*pi/l*x(j));
        end
        u(i,j) = jml;
    end
    figure (1)
    plot(x,u(i,:))
    ylim([-12 12])
    title('Simulasi Telegraph')
    xlabel('x')
    ylabel('u')
    pause(0.001)
end
```

Lampiran 2

Grafik 2D Solusi Analitik Persamaan Telegraph Menggunakan Metode Pemisahan

Variabel $u(x, 0) = \sin(x)$ dan $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$

```

clc,clear
dx = 0.1;
dt = 0.05;
l = 10;
tn =10;
x = 0:dx:l;
t = 0:dt:tn;

alpha = 2;
btheta=1;

% figure(1),clf

for i=1:length(t)
    for j = 1:length(x)
        jml =0;
        for m =1:1
            jml = jml +(-sin(x(j)-
(m*pi*x(j))/l)+sin(x(j)+(m*pi*x(j))/l)/(1/2*1))*exp(-
alpha*t(i))*cos(((sqrt(-
alpha)^2+btheta^2+(m*pi/l)/2))^2*t(i))*sin(m*pi/l*x(j));
        end
        u(i,j) = jml;
    end
    figure (1)
    plot(x,u(i,:))
    ylim([-12 12])
    title('Simulasi Telegraph')
    xlabel('x')
    ylabel('u')
    pause(0.001)
end

```

Lampiran 3

Grafik 3D Solusi Analitik Persamaan Telegraph Menggunakan Metode Pemisahan

$$\text{Variabel } u(x, 0) = x \text{ dan } \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$$

```

clc,clear
dx = 0.1;
dt = 0.05;
l = 10;
tn =0.1;
x = 0:dx:l;
t = 0:dt:tn;

alpha = 2;
btheta=1;

% figure(1),clf

for i=1:length(t)
    for j = 1:length(x)
        jml =0;
        for m =1:100
            jml = jml +( 2*l/pi)*((-1)^(m+1)/m)*exp(-
alpha*t(i))*cos((((sqrt(((m*pi/l)/2))^2+btheta^2-
(alpha)^2))*t(i))*sin(m*pi/l*x(j)));
        end
        u(i,j) = jml;
    end
end
figure (2)
x=linspace(0,l,101)
t = 0:dt:tn;
[X,T] = meshgrid(x,t);
mesh(T,X,u)
ylim([0 l])
title('Simulasi Telegraph')
xlabel('t')
ylabel('x')
zlabel('u')

```

Lampiran 4

Grafik 3D Solusi Analitik Persamaan Telegraph Menggunakan Metode Pemisahan

Variabel $u(x, 0) = \sin(x)$ dan $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$

```

clc,clear
dx = 0.1;
dt = 0.05;
l = 10;
tn =10;
x = 0:dx:l;
t = 0:dt:tn;

alpha = 2;
btheta=1;

% figure(1),clf

for i=1:length(t)
    for j = 1:length(x)
        jml =0;
        for m =1:1
            jml = jml +(-sin(x(j)-
(m*pi*x(j))/l)+sin(x(j)+(m*pi*x(j))/l)/(1/2*1))*exp(-
alpha*t(i))*cos(((sqrt(-
alpha)^2+btheta^2+((m*pi/l)/2))^2*t(i))*sin(m*pi/l*x(j));
        end
        u(i,j) = jml;
    end
end
figure (2)
x=linspace(0,1,101);
t = 0:dt:tn;
[X,T] = meshgrid(x,t);
mesh(T,X,u)
ylim([0 1])
title('Simulasi Telegraph')
xlabel('t')
ylabel('x')
zlabel('u')

```

Lampiran 5

Analisis Keabsahan Solusi dengan Program MAPLE

> restart :

> $X := C \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{l}\right) :$

> simplify($\text{diff}(X, x) + \left(\frac{n \cdot \pi}{l}\right)^2 \cdot X$)

0

> $T := \exp(-a \cdot t) \cdot \left(A \cdot \cos\left(\sqrt{B^2 + \left(\frac{n \cdot \pi}{l}\right)^2 - a^2} \cdot t\right) + B \cdot \sin\left(\sqrt{B^2 + \left(\frac{n \cdot \pi}{l}\right)^2 - a^2} \cdot t\right) \right)$

$$T := e^{-at} \left(A \cos\left(t \sqrt{-a^2 + B^2 + \frac{n^2 \pi^2}{l^2}}\right) + B \sin\left(t \sqrt{-a^2 + B^2 + \frac{n^2 \pi^2}{l^2}}\right) \right)$$

> simplify($\text{diff}(T, t) + 2 \cdot a \cdot \text{diff}(T, t) + \left(B^2 + \left(\frac{n \cdot \pi}{l}\right)^2\right) \cdot T$)

0

> $P := \text{diff}(T(t), t) + 2 \cdot a \cdot \text{diff}(T(t), t) + \left(B^2 + \left(\frac{n \cdot \pi}{l}\right)^2\right) \cdot T(t);$

> ln(e);

ln(e)

> $u := X \cdot T;$

$$u := C \sin\left(\frac{n \pi x}{l}\right) e^{-at} \left(A \cos\left(t \sqrt{-a^2 + B^2 + \frac{n^2 \pi^2}{l^2}}\right) + B \sin\left(t \sqrt{-a^2 + B^2 + \frac{n^2 \pi^2}{l^2}}\right) \right)$$

> simplify($\text{diff}(u, t) + 2 \cdot a \cdot \text{diff}(u, t) + B^2 \cdot u - \text{diff}(u, x)$)

0

>

Lampiran 6

Analisis Keabsahan Solusi Manual

Saat $t = 0$

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n e^{-\alpha t} \cos \cdot 0 \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2} + c_n e^{-\alpha t} \sin n \cdot 0 \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (1)$$

Jadi persamaan (1) dapat disimpulkan bahwa saat $t = 0$ memenuhi kondisi awal yaitu $u(x, 0) = f(x)$.

Selanjutnya untuk solusi dari persamaan telegraf pada persamaan (3.38) dengan menggunakan metode pemisahan variabel dengan kondisi nilai awal

$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x)$, dan diturunkan terhadap t adalah sebagai berikut:

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n e^{-\alpha t} \cos t \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2} + c_n e^{-\alpha t} \sin n t \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\alpha b_n e^{-\alpha t} \cos t \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2} + b_n e^{-\alpha t} \left(-\sin \left(t \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2} \right) \cdot \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2} \right) \right.$$

$$\left. - \alpha c_n e^{-\alpha t} \sin n t \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2} \right.$$

$$\left. + c_n e^{-\alpha t} \left(\cos \left(t \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2} \right) \cdot \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2} \right) \right) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

Dengan mensubstitusikan bahwa $t = 0$ maka diperoleh:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} & \left(-\alpha b_n e^{-\alpha 0} \cos 0 \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2} \right. \\ & + b_n e^{-\alpha 0} \left(-\sin \left(0 \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2} \right) \cdot \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2} \right) \\ & - \alpha c_n e^{-\alpha 0} \sin 0 \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2} \\ & \left. + c_n e^{-\alpha 0} \left(\cos \left(0 \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2} \right) \cdot \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2} \right) \right) \sin \frac{n\pi x}{l} \end{aligned}$$

Sehingga didapatkan solusi untuk nilai $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x)$ adalah sebagai berikut:

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\alpha b_n + c_n \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

Jadi dapat disimpulkan bahwa saat $t = 0$ memenuhi kondisi awal yaitu $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x)$.

Saat $t \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} & \left(-\alpha b_n e^{-\alpha t} \cos t \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2} \right. \\ & + b_n e^{-\alpha t} \left(-\sin t \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2} \cdot \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2} \right) \\ & - \alpha c_n e^{-\alpha t} \sin t \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2} \\ & \left. + c_n e^{-\alpha t} \left(\cos t \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2} \cdot \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2} \right) \right) \sin \frac{n\pi x}{l} \end{aligned} \quad (3)$$

Untuk persamaan (3) diturunkan terhadap t dengan turunan kedua yaitu, sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = & \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\alpha^2 b_n e^{-\alpha t} \cos t \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2} \right. \\
& + \left(-\alpha b_n e^{-\alpha t} \left(-\sin t \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2} \cdot \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2} \right) + b_n \right. \\
& - \alpha e^{-\alpha t} \left(-\sin t \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2} \cdot \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2} \right) \\
& + b_n e^{-\alpha t} \left(-\cos t \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2} \cdot \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2} \right) \\
& + \alpha^2 c_n e^{-\alpha t} \sin t \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2} \\
& + \left(-\alpha c_n e^{-\alpha t} \left(\cos t \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2} \cdot \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2} \right) \right) \\
& + \left(-\alpha c_n e^{-\alpha t} \left(\cos t \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2} \cdot \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2} \right) \right) \\
& \left. + c_n e^{-\alpha t} \left(-\sin t \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2} \cdot \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2} \right) \sin \frac{n\pi x}{l} \right)
\end{aligned} \tag{4}$$

Kemudian dari persamaan (3.38) diturunkan terhadap x dengan turunan pertama yaitu:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n e^{-\alpha t} \cos t \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2} + c_n e^{-\alpha t} \sin t \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2} \right) \left(\frac{n\pi}{l}\right) \cos \frac{n\pi x}{l} \tag{5}$$

dan persamaan (5) diturunkan terhadap x dengan turunan kedua yaitu:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = & \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n e^{-\alpha t} \cos t \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2} \right. \\
& \left. + c_n e^{-\alpha t} \sin t \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2} \right) - \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \sin \frac{n\pi x}{l}
\end{aligned} \tag{6}$$

Selanjutnya untuk persamaan (4), (5), (3.38) dan (6) disubstitusikan ke persamaan

(3.1) yaitu:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial t} + \beta^2 u - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

dari hasil substitusi persamaan (5), (4), (3.38) dan (6) ke persamaan (3.1) maka diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(-\alpha^2 b_n e^{-\alpha t} \cos t \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2} + \left(-\alpha b_n e^{-\alpha t} \left(-\sin t \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2} \cdot \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2} \right) + b_n - \alpha e^{-\alpha t} \left(-\sin t \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2} \cdot \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2} \right) + \right. \\
& \left. b_n e^{-\alpha t} \left(-\cos t \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2} \cdot \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2} \right) + \alpha^2 c_n e^{-\alpha t} \sin t \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2} + \right. \\
& \left. \left(-\alpha c_n e^{-\alpha t} \left(\cos t \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2} \cdot \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2} \right) \right) + \right. \\
& \left. \left(-\alpha c_n e^{-\alpha t} \left(\cos t \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2} \cdot \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2} \right) \right) + \right. \\
& \left. c_n e^{-\alpha t} \left(-\sin t \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2} \cdot \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2} \right) \sin \frac{n\pi x}{l} \right) + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} 2\alpha \left(\left(-\alpha b_n e^{-\alpha t} \cos t \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2} + b_n e^{-\alpha t} \left(-\sin t \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2} \cdot \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2} \right) - \alpha c_n e^{-\alpha t} \sin t \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2} + c_n e^{-\alpha t} \left(\cos t \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2} \cdot \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2} \right) \right) \sin \frac{n\pi x}{l} \right) + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \beta^2 \left(\left(b_n e^{-\alpha t} \cos t \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2} + c_n e^{-\alpha t} \sin t \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2} \right) \sin \frac{n\pi x}{l} \right) - \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(b_n e^{-\alpha t} \cos t \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2} + \right. \right. \\
& \left. \left. c_n e^{-\alpha t} \sin t \sqrt{\left(\beta^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right) - \alpha^2} \right) - \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \sin \frac{n\pi x}{l} \right) = 0 \tag{7}
\end{aligned}$$