

**DESKRIPSI PENGARUH PARAMETER TERHADAP KESTABILAN
PERILAKU SISTEM BANDUL GANDA SEDERHANA**

SKRIPSI

OLEH
THOUFINA KURNIYATI
NIM. 10610068



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2015**

**DESKRIPSI PENGARUH PARAMETER TERHADAP KESTABILAN
PERILAKU SISTEM BANDUL GANDA SEDERHANA**

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh
Thoufina Kurniyati
NIM. 10610068

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2015**

**DESKRIPSI PENGARUH PARAMETER TERHADAP KESTABILAN
PERILAKU SISTEM BANDUL GANDA SEDERHANA**

SKRIPSI

Oleh
Thoufina Kurniyati
NIM. 10610068

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 24 Desember 2014

Pembimbing I,

Pembimbing II,

Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd
NIP. 19770521 200501 2 004

Dr. H. Iman Sujarwo, M.Pd
NIP. 19630502 198703 1 005

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

**DESKRIPSI PENGARUH PARAMETER TERHADAP KESTABILAN
PERILAKU SISTEM BANDUL GANDA SEDERHANA**

SKRIPSI

Oleh
Thoufina Kurniyati
NIM. 10610068

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Pengaji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal 07 Januari 2015

Pengaji Utama : Mohammad Jamhuri, M.Si

Ketua Pengaji : Dr. Usman Pagalay, M.Si

Sekretaris Pengaji : Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd

Anggota Pengaji : Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Thoufina Kurniyati

NIM : 10610068

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Deskripsi Pengaruh Parameter terhadap Kestabilan Perilaku
Sistem Bandul Ganda Sederhana

menyatakan bahwa skripsi tersebut adalah karya pribadi dan bukan karya orang lain, baik sebagian ataupun keseluruhan kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan hasil karya ini adalah jiplakan maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 17 Januari 2015
Yang membuat pernyataan,

Thoufina Kurniyati
NIM. 10610068

MOTO

يُؤْتَى الْحِكْمَةُ مَن يَشَاءُ وَمَن يُؤْتَ الْحِكْمَةَ فَقَدْ أُوتِيَ خَيْرًا كَثِيرًا

وَمَا يَذَّكَّرُ إِلَّا أُولُوا الْأَلْبَابِ ﴿٢٦﴾

“Allah menganugerahkan al-Hikmah (kefahaman yang dalam tentang al-Quran dan al-sunnah) kepada siapa yang dikehendaki-Nya. Dan barangsiapa yang dianugerahi hikmah, ia benar-benar telah dianugerahi karunia yang banyak. Dan hanya orang-orang yang berakallah yang dapat mengambil pelajaran (dari firman Allah)” (QS. al-Baqarah/1: 269).

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk ayah dan ibu penulis, H. Moch. Ihya' Ulumuddin dan Hj. Siti Cholifah. Serta kakak penulis: Lilik Ihda Tauhidah, Hj. Faiqotul Himma, Fitriyah Yuni Rachmawati, M. Rifqi Faizin, dan Zulfi Afwina Hidayati.

Terima kasih atas semua pengorbanan, doa, dan dukungan kepada penulis.



KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Alhamdulillahi Rabbil 'alamin, segala puji hanya bagi Allah Swt. Tuhan semesta alam yang telah memberi rahmat kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan pendidikan Sarjana di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang dan menyelesaikan skripsi dengan judul “Deskripsi Pengaruh Parameter terhadap Kestabilan Perilaku Sistem Bandul Ganda Sederhana”.

Penulis menyadari bahwa selesainya skripsi ini karena saran, bimbingan, dukungan dan doa dari berbagai pihak, oleh karena itu penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Drh. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd, selaku dosen pembimbing I dan dosen wali. Terima kasih atas arahan dan nasihatnya sehingga skripsi ini dapat terselesaikan serta bimbangannya selama masa perkuliahan.
5. Dr. Imam Sujarwo, M.Pd, selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan bimbingan dan arahan selama penulisan skripsi ini.

6. Seluruh dosen Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah memberikan ilmu pengetahuan kepada penulis.
7. Kedua orang tua penulis H. Moch. Ihya' Ulumuddin dan Hj. Siti Cholifah yang telah memberikan doa, semangat, serta motivasi kepada penulis.
8. Seluruh teman-teman Jurusan Matematika angkatan 2010, terutama Khuriatul Hawwin, Khafidhoh Nurul Aini, Ani Sri Wiryaningsih, Nova Nevisa A.F., "Keluarga Cemara", teman-teman seperjuangan Afidah Karimatul Laili, Siti Muyassaroh, Luluk Ianatul, Binti Tsamrotul Fitria dan Rofiatun Jamilah yang telah berbagi doa dan motivasi kepada penulis.
9. Semua pihak yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
Semoga penulisan skripsi ini dapat bermanfaat bagi penulis dan pembaca.

Wassalamu 'alaikum Warahtullahi Wabarakatuh

Malang, 17 Januari 2015

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL

HALAMAN PENGAJUAN

HALAMAN PERSETUJUAN

HALAMAN PENGESAHAN

HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

HALAMAN MOTO

HALAMAN PERSEMBAHAN

KATA PENGANTAR viii

DAFTAR ISI x

DAFTAR GAMBAR xii

ABSTRAK xiii

ABSTRACT xiv

ملخص xv

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	4
1.3 Tujuan Penelitian	4
1.4 Manfaat Penelitian	4
1.5 Batasan Masalah	5
1.6 Metode Penelitian	5
1.7 Sistematika Penulisan	6

BAB II KAJIAN PUSTAKA

2.1 Bandul Ganda Sederhana	8
2.2 Model Matematika Bandul Ganda Sederhana	9
2.2.1 Persamaan Lagrange	9
2.2.2 Osilasi Kecil Bandul Ganda	16
2.3 Nilai Eigen dan Vektor Eigen	18
2.4 Solusi dan Potret Fase dengan Nilai Eigen Kompleks	18
2.5 <i>Flow</i> dari Persamaan Diferensial	22
2.6 Osilasi	24
2.7 Kajian Al-Quran dan Hadits	25

BAB III PEMBAHASAN

3.1 Analisis Perilaku Sistem Bandul Ganda Sederhana	28
3.1.1 Analisis Titik Tetap	32
3.1.2 Contoh Analisis Perilaku Sistem Bandul Ganda Sederhana.....	34
3.2 Deskripsi Pengaruh Parameter terhadap Kestabilan Perilaku Sistem Bandul Ganda Sederhana	47
3.2.1 Parameter Massa Benda Pertama Lebih Besar daripada Massa Benda Kedua ($m_1 > m_2$)	47
3.2.2 Parameter Massa Benda Pertama Sama dengan Massa Benda Kedua ($m_1 = m_2$)	48
3.2.3 Parameter Massa Benda Pertama Lebih Kecil daripada Massa Benda Kedua ($m_1 < m_2$)	49
3.3 Perintah Memilih Teman yang Baik dan Larangan Memilih Teman yang Buruk	50

BAB IV PENUTUP

4.1 Kesimpulan	53
4.2 Saran	54

DAFTAR PUSTAKA	55
-----------------------------	----

LAMPIRAN-LAMPIRAN	56
--------------------------------	----

RIWAYAT HIDUP	58
----------------------------	----

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Sistem Bandul Ganda Sederhana	8
Gambar 2.2 Model Bandul Ganda Sederhana	10
Gambar 2.3 Grup dari <i>Flow</i>	22
Gambar 2.4 Grafik dengan Orbit Periodik	23
Gambar 2.5 Potret Fase dengan Kestabilan <i>L</i> -stabil	23
Gambar 2.6 Potret Fase dengan Kestabilan Tak Stabil	24
Gambar 3.1 Grafik Solusi x_1 terhadap t	41
Gambar 3.2 Grafik Solusi x_2 terhadap t	42
Gambar 3.3 Grafik Solusi x_3 terhadap t	42
Gambar 3.4 Grafik Solusi x_4 terhadap t	43
Gambar 3.5 Grafik Perubahan Sudut Perpindahan Benda pada Sistem Bandul Ganda Sederhana	44
Gambar 3.6 Potret Fase Sistem Bandul Ganda Sederhana	45
Gambar 3.7 Lanjutan	46
Gambar 3.8 Trayektori dengan $m_1 > m_2$	48
Gambar 3.9 Trayektori dengan $m_1 = m_2$	48
Gambar 3.10 Trayektori dengan $m_1 < m_2$	49

ABSTRAK

Kurniyati, Thoufina. 2015. **Deskripsi Pengaruh Parameter terhadap Kestabilan Perilaku Sistem Bandul Ganda Sederhana.** Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd. (II) Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd.

Kata kunci: sistem bandul ganda sederhana, analisis perilaku, titik tetap, nilai eigen, vektor eigen, solusi periodik, solusi *quasiperiodic*

Sistem bandul ganda sederhana merupakan pengembangan dari sistem bandul sederhana. Penurunan persamaan bandul ganda sederhana menggunakan energi kinetik dan potensial, kemudian disubtitusikan ke dalam persamaan *Euler Lagrange*. Sistem bandul ganda sederhana didapatkan dengan mengasumsikan sudut perpindahan benda (θ) yang kecil.

Penelitian ini difokuskan untuk analisis perilaku sistem bandul ganda sederhana dan mendeskripsikan pengaruh parameter terhadap kestabilan perilaku sistem bandul ganda sederhana. Hasil analisis perilaku sistem bandul ganda sederhana didapatkan titik tetap trivial, nilai eigen berupa imajiner murni sehingga sistem memiliki tipe kestabilan *elliptic center*, vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen, dan solusi yang periodik untuk sudut perpindahan benda pertama dan kedua (θ_1 dan θ_2), *quasiperiodic* untuk laju kecepatan benda pertama dan kedua ($\ddot{\theta}_1$ dan $\ddot{\theta}_2$). Perubahan parameter pada sistem bandul ganda tidak mempengaruhi kestabilan dari sistem bandul ganda sederhana.

ABSTRACT

Kurniyati, Thoufina. 2015. **Description of Parameter Influence on the Stability Behavior of a Simple Double Pendulum System.** Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Islamic State University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd. (II) Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd.

Keyword: simple double pendulum system, behavioral analysis, fixed point, eigenvalues, eigenvectors, periodic solutions, quasiperiodic solutions

Simple double pendulum system is the development of a simple pendulum system. Decrease double pendulum equation is simple using the kinetic and potential energy, then substituted into the Euler Lagrange equation. Simple double pendulum system is obtained by assuming the pendulum displacement angle (θ) is small.

This study focused on the analysis of the behavior of a simple double pendulum system. The results of the analysis of the behavior of a simple double pendulum system obtained a nontrivial fixed point, purely imaginary eigenvalues form so that the system has a stable elliptic center, corresponding eigenvectors with eigenvalues, and periodic solutions to the corner first and second pendulum displacement (θ_1 dan θ_2), quasiperiodic for the rate of speed of the first and second pendulum ($\ddot{\theta}_1$ dan $\ddot{\theta}_2$). Changes in the parameters of the double pendulum system do not affect the stability of the simple double pendulum system.

ملخص

كرنيه، طوفينا. ٢٠١٥. وصف تأثير المعلمة ضد الاستقرار السلوك من نظام البندول المتعدد البسيط. بحث جامعي. شعبة الرياضيات. كلية العلوم والتكنولوجيا. جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج. المشرف: (١) أري كوسومستوتي المسرجان الماجستير. (٢) الدكتور الحج ايام سوجاروا الماجستير.

الكلمة المفتاحية : نظام البندول المتعدد البسيط، تحليل السلوك، نقطة ثابتة، القيم الذاتية، المتجهات الذاتية، حلول الدورية، حلول شبه الدورية

نظام البندول المتعدد البسيط هو التنمية من نظام البندول البسيط. لتخفيض نظام البندول المتعدد باستخدام الطاقة الحركية و المعادلة، ثم الاستبدال في المعادلة أويلر لاغرانج. نظام البندول المتعدد البسيط تم الحصول عليها بزاوية النزوح البندول (θ) هو صغير.

في هذا البحث يحلل السلوك نظام البندول المتعدد البسيط. نتائج يحلل السلوك نظام البندول المتعدد البسيط الحصول على تبقى نقطة غير بدائي القيم الذاتية في شكل نقى وهمية بحيث نظام دיהם الاستقرار مركز بيضاوي الشكل، المتجهات الذاتية المقابلة مع القيم الذاتية، وحلول دورية لزاوية النزوح البندول الأول والثانية (θ_1 و θ_2)، شبه الدورية معدل سرعة البندول الأول والثانية ($\dot{\theta}_1$ و $\dot{\theta}_2$). التغييرات المعلمات على نظام البندول المتعدد البسيط لا يؤثر على استقرار من نظام البندول المتعدد البسيط.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Peranan teori dan peranan penerapan matematika tidak dapat dipisahkan. Banyak konsep abstrak matematika yang dikembangkan karena kebutuhan untuk menjawab permasalahan dari dunia nyata dan bidang ilmu lain serta banyak pula konsep abstrak matematika yang awalnya semata-mata untuk pengembangan teori dalam matematika itu sendiri ternyata kemudian mendapatkan tempat dan dapat diterapkan untuk menjawab permasalahan di dunia nyata dan bidang ilmu lain (Supriatna, 2002:1).

Berbagai banyak hal di alam ini yang bisa diambil dan dipelajari agar mendatangkan manfaat yang luar biasa. Salah satunya adalah sistem osilasi pendulum ganda atau lebih dikenal sistem bandul ganda. Bandul sederhana adalah benda ideal yang terdiri dari sebuah titik massa, yang digantungkan pada tali ringan yang tidak dapat mulur (Resnick & Halliday, 1978:459). Secara umum bandul sederhana terdiri dari sebuah benda pejal dengan massa m yang digantungkan pada seutas tali dengan panjang l dan massa yang diabaikan. Sistem bandul ganda adalah sistem yang terdiri dari dua benda B_1 dan B_2 dengan massa masing-masing benda m_1 dan m_2 . Benda tersebut masing-masing dihubungkan dengan dua helai kawat yang kuat tapi ringan L_1 dan L_2 dengan panjang masing-masing kawat adalah l_1 dan l_2 , benda B_1 terpasang pada ujung kawat L_1 (ujung kawat L_1 lainnya terpasang mantap pada sebuah bidang), sementara itu benda B_2 terpasang pada ujung kawat L_2 di bawah pengaruh grafitasi ujung kawat L_1 .

lainnya terpasang mantap pada benda pertama B_1 . Parameter yang digunakan pada sistem bandul ganda sederhana adalah m_1 (massa benda pertama), m_2 (massa benda kedua), l_1 (panjang kawat/tali pertama), l_2 (panjang kawat/tali kedua) dan g (grafitasi bumi). Dengan dipengaruhi oleh grafitasi g , bandul ganda berosilasi pada bidang vertikal dengan sudut perpindahan untuk suatu waktu adalah $\theta_1(t)$ dan $\theta_2(t)$ (Amanto dan Zakaria, 2008:24).

Allah Swt. berfirman dalam al-Quran surat al-Fathir/35:3 yang berbunyi

يُولِّجُ الْأَيْلَ فِي النَّهَارِ وَيُولِّجُ النَّهَارَ فِي الْأَيْلِ وَسَخَرَ الشَّمْسَ وَالْقَمَرَ كُلُّ شَجَرٍ لَا جَلِ مُسَمِّيٌّ
ذَلِكُمُ اللَّهُ رَبُّكُمْ لَهُ الْمُلْكُ وَالَّذِينَ تَدْعُونَ مِنْ دُونِهِ مَا يَمْلِكُونَ مِنْ قَطْمَمِير

"Dia memasukkan malam ke dalam siang dan memasukkan siang ke dalam malam dan menundukkan matahari dan bulan, masing-masing berjalan menurut waktu yang ditentukan. Yang (berbuat) demikian Itulah Allah Tuhanmu, kepunyaan-Nyalah kerajaan. Dan orang-orang yang kamu seru (sembah) selain Allah tiada mempunyai apa-apa walaupun setipis kulit ari"(QS. al-Fathir/35:3).

Maha Agung Allah Swt. yang menciptakan langit, bumi beserta isinya tanpa satu cela sedikitpun. Semua yang ada di dunia ini mempunyai konsep yang sempurna dan tidak terlepas dari kehendak dan pengaturan-Nya.

Penelitian sebelumnya oleh Amanto dan La Zakaria (2008:23-32) mengupas tentang analisis kestabilan dan solusi eksak dari sistem tersebut. Pada penelitian ini akan menyempurnakan penelitian tersebut dengan menganalisis perilaku dan mendeskripsikan kestabilan perilaku sehingga dapat diketahui perilaku sistem bandul ganda secara lebih jelas.

Salah satu permasalahan yang menggunakan sistem bandul ganda adalah sistem kerja tim SAR (Search and Rescue) dan suplai makanan atau amunisi ke barak dengan menggunakan helikopter. Berbagai bencana alam yang ada di Indonesia akhir-akhir ini, menyebabkan intensitas kerja tim SAR semakin tinggi.

Keefektifan kerja tim SAR sangat diperlukan agar bantuan makanan, pakaian ataupun obat-obatan dapat tersebar merata.

Allah Swt. berfirman dalam al-Quran surat al-Baqarah/1:251 yang berbunyi

أَوَلَمْ يَتَفَكَّرُوا فِي أَنفُسِهِمْ مَا خَلَقَ اللَّهُ الْحَمَدُ لِلَّهِ وَالْحُمْدُ لِلَّهِ وَمَا يَبْيَهُمَا إِلَّا بِالْحَقِّ وَأَجَلٌ مُسَمٌّ وَإِنَّ كَثِيرًا مِنَ النَّاسِ بِلِقَاءِ رَبِّهِمْ لَكَفِرُونَ

“Dan mengapa mereka tidak memikirkan tentang (kejadian) diri mereka? Allah tidak menjadikan langit dan bumi dan apa yang ada diantara keduanya melainkan dengan (tujuan) yang benar dan waktu yang ditentukan. dan Sesungguhnya kebanyakan di antara manusia benar-benar ingkar akan Pertemuan dengan Tuhan mereka (QS. al-Baqarah/1:251).

Allah Swt. memberikan hikmah yang luar biasa pada setiap ciptaan-Nya agar manusia dapat mempergunakan dengan sebaik mungkin. Namun sering kali manusia tidak menyadari hikmah yang luar biasa tersebut sehingga tidak mempergunakan dengan sebaik mungkin. Sistem bandul ganda sederhana mempunyai manfaat yang besar apabila dapat mempelajari lebih dalam misalnya sistem kerja bandul pada tim SAR yang akan menyalurkan bantuan kepada korban bencana sehingga sistem tersebut dapat dimaksimalkan sebesar mungkin.

Pengaruh parameter pada suatu sistem dapat dianalogikan seperti pengaruh teman terhadap perilaku seseorang. Apabila pengambilan parameter tersebut tepat maka didapatkan suatu sistem yang ideal. Begitu juga dengan dalam memilih teman, apabila tepat dalam berteman maka akan mempengaruhi diri jauh lebih baik.

Sesuai dengan latar belakang yang dikemukakan untuk melanjutkan penelitian sebelumnya, maka dalam penelitian ini penulis mengambil tema

“Deskripsi Pengaruh Parameter terhadap Kestabilan Perilaku Sistem Bandul Ganda Sederhana”.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas rumusan masalah pada penelitian ini adalah:

1. Bagaimana analisis perilaku sistem bandul ganda sederhana?
2. Bagaimana deskripsi pengaruh parameter terhadap kestabilan perilaku sistem bandul ganda sederhana?
3. Bagaimana kajian al-Quran dan hadits terkait pengaruh perubahan parameter terhadap suatu sistem?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah:

1. Menjelaskan perilaku sistem bandul ganda sederhana.
2. Mendeskripsikan pengaruh parameter terhadap kestabilan perilaku sistem bandul ganda sederhana.
3. Mengkaji pengaruh perubahan parameter terhadap suatu sistem menurut pandangan al-Quran dan hadits.

1.4 Manfaat Penelitian

Memahami perilaku sistem bandul ganda sederhana dan pengaruh variasi parameter terhadap kestabilan perilaku sistem bandul ganda sederhana.

1.5 Batasan Masalah

1. Analisis perilaku sistem bandul ganda sederhana dengan asumsi sudut perpindahan (θ_1 dan θ_2) sangat kecil.
2. Model sistem bandul ganda sederhana yang dianalisis berbentuk:

$$\begin{cases} (m_1 + m_2)l_1^2\ddot{\theta}_1 + m_1l_1l_2\ddot{\theta}_2 + (m_1 + m_2)l_1g\theta_1 = 0 \\ m_2l_1l_2\ddot{\theta}_1 + m_1l_2^2\ddot{\theta}_2 + m_2l_2g\theta_2 = 0 \end{cases}$$

3. Kedua tali pada sistem adalah konstan (tidak mulur). Massa pada kedua tali diabaikan.
4. Gravitasi bumi tidak diabaikan.
5. Parameter yang berubah adalah massa benda pertama m_1 .

1.6 Metode Penelitian

Metode dalam penelitian ini adalah studi pustaka dan literatur.

Adapun langkah-langkah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Penondimensionalan sistem bandul ganda sederhana.
2. Transformasi sistem bandul ganda sederhana orde dua ke sistem bandul ganda sederhana orde satu.
3. Menentukan titik tetap sistem bandul ganda sederhana.
4. Subtitusi parameter yang telah ditentukan ke sistem persamaan bandul ganda sederhana orde satu.
5. Menentukan nilai eigen dan vektor eigen dari sistem persamaan bandul ganda sederhana orde satu.
6. Menetukan solusi umum kemudian solusi khusus.
7. Analisis grafik solusi sistem bandul ganda sederhana.

8. Simulasi dengan massa benda pertama yang berbeda dan mendekripsikannya.

1.7 Sistematika Penulisan

Adapun sistematika dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Bab pendahuluan berisi tentang latar belakang dilakukannya penelitian ini, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Bab ini berisi tentang dasar teori yang digunakan dalam penelitian ini. Dasar teori tersebut meliputi identifikasi parameter dan variabel sistem bandul ganda sederhana, penurunan model matematika pada sistem bandul ganda sederhana, definisi nilai eigen dan vektor eigen, menentukan solusi dan potret fase dari persamaan diferensial dengan nilai eigen kompleks, *flow* dari persamaan diferensial, osilasi dan kajian al-Quran dan hadits.

Bab III Pembahasan

Bab pembahasan berisi tentang analisis perilaku sistem bandul ganda sederhana yang di dalamnya terdapat analisis titik tetap, contoh analisis perilaku dengan parameter tertentu. Selanjutnya, mendekripsikan pengaruh perubahan parameter terhadap kestabilan perilaku sistem bandul ganda sederhana dengan tiga kondisi yang berbeda. Selanjutnya kajian al-Quran dan hadits megenai perintah memilih teman yang baik dan larangan memilih teman yang buruk.

Bab IV Penutup

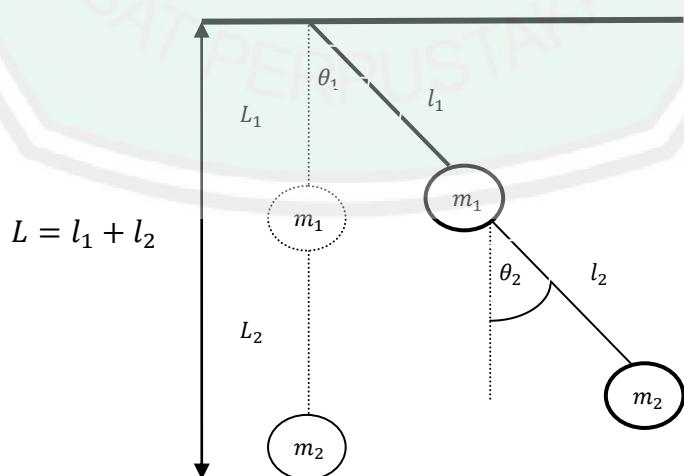
Bab penutup berisi tentang kesimpulan dari analisis perilaku, deskripsi pengaruh parameter terhadap kestabilan perilaku sistem bandul ganda sederhana dan kajian al-Quran dan hadits mengenai perintah memilih teman yang baik dan larangan memilih teman yang buruk. Kemudian, saran bagi peneliti berikutnya ataupun pembaca pada penelitian ini.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Bandul Ganda Sederhana

Amanto dan Zakaria (208:24) mengatakan bahwa “Sistem bandul ganda sederhana adalah sistem yang terdiri dari dua benda B_1 dan B_2 dengan massa masing-masing benda adalah m_1 dan m_2 . Benda tersebut masing-masing dihubungkan dengan dua helai kawat yang kuat tapi ringan L_1 dan L_2 dengan panjang masing-masing kawat adalah l_1 dan l_2 , benda B_1 terpasang pada ujung kawat L_1 (ujung kawat L_1 lainnya terpasang mantap pada sebuah bidang). Benda B_2 terpasang pada ujung kawat L_2 di bawah pengaruh gravitasi (ujung kawat L_2 lainnya mantap terpasang pada benda pertama B_1). Gambar 2.1 merupakan sistem bandul ganda yang memiliki 4 (empat) parameter yakni l_1 , l_2 , m_1 dan m_2 dengan dipengaruhi oleh gravitasi g , bandul ganda berosilasi pada bidang vertikal dengan sudut perpindahan untuk suatu waktu adalah $\theta_1(t)$ dan $\theta_2(t)$.”



Gambar 2.1 Sistem Bandul Ganda Sederhana

Model matematika sistem bandul ganda yang diilustrasikan pada Gambar 2.1 adalah sebagai berikut:

$$\begin{cases} (m_1 + m_2)l_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2l_1l_2\ddot{\theta}_2 + (m_1 + m_2)l_1g\theta_1 = 0 \\ m_2l_1l_2\ddot{\theta}_1 + m_2l_2^2\ddot{\theta}_2 + m_2l_2g\theta_2 = 0 \end{cases}. \quad (2.1)$$

Variabel dan parameter yang digunakan adalah

- m_1 : Massa benda pertama dalam satuan slug
- m_2 : Massa benda kedua dalam satuan slug
- l_1 : Panjang kawat/tali pertama dalam satuan kaki
- l_2 : Panjang kawat/tali kedua dalam satuan kaki
- g : Grafitasi bumi dalam satuan kaki/s²
- $\theta_1(t)$: Sudut perpindahan benda pertama pada waktu t dalam satuan radian
- $\theta_2(t)$: Sudut perpindahan benda kedua pada waktu t dalam satuan radian
- $\ddot{\theta}_1(t)$: Laju kecepatan benda pertama terhadap waktu dalam satuan kaki/s²
- $\ddot{\theta}_2(t)$: Laju kecepatan benda kedua terhadap waktu dalam satuan kaki/s²

Besaran parameter dan kondisi awal yang digunakan adalah $m_1 = 937,5$ slug, $m_2 = 312,5$ slug, $l_1 = 16$ kaki, $l_2 = 16$ kaki, dan $g = 32$ kaki/s² dengan kondisi awal yang berbeda $x_1(0) = -0,5$ rad, $x_2(0) = -1$ rad/s, $x_3(0) = 1$ rad, dan $x_4(0) = 2$ rad/s (Amanto dan Zakaria, 2008:28).

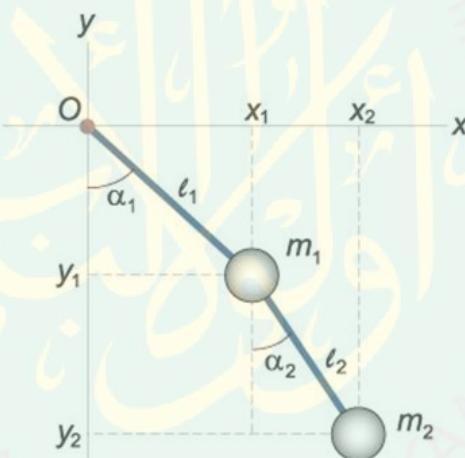
2.2 Analisis Model Bandul Ganda Sederhana

2.2.1 Persamaan Lagrange untuk Penurunan Model

Pada subbab ini akan dianalisis model bandul ganda sederhana yang dibangun ke dalam bentuk sistem persamaan diferensial. Analisis dimulai dengan penurunan dari persamaan *Euler-Lagrange*.

Dalam mekanika *Lagrangian*, evolusi sistem dijelaskan dalam hal koordinat umum dan kecepatan umum. Dalam kasus ini, sudut defleksi bandul θ_1 , θ_2 dan kecepatan angular dapat diambil sebagai variabel umum. Sistem bandul ganda sederhana dibangun dari persamaan *Lagrangian* kemudian disubtitusikan ke persamaan *Euler-Lagrange* dengan menggunakan variabel-variabel tersebut.

Sebuah model sederhana dari bandul ganda ditunjukkan pada Gambar 2.2. Diasumsikan bahwa batang yang tak bermassa dan panjang kawat pertama adalah l_1 dan panjang kawat kedua l_2 . Titik massa (mereka diwakili oleh bola dari jari-jari terbatas) benda pertama adalah m_1 dan massa benda kedua adalah m_2 .



Gambar 2.2 Model Bandul Ganda Sederhana

Koordinat bandul pertama didefinisikan sebagai berikut

$$x_1 = l_1 \sin \theta_1,$$

$$y_1 = -l_1 \cos \theta_1.$$

Selanjutkan dapat ditentukan turunan dari koordinat bandul pertama

$$\dot{x}_1 = l_1 \cos \theta_1 \cdot \dot{\theta}_1,$$

$$\dot{y}_1 = l_1 \sin \theta_1 \cdot \dot{\theta}_1.$$

Kemudian pangkatkan dua masing-masing turunan dari koordinat bandul pertama

$$\dot{x}_1^2 = l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \cos^2 \theta_1 ,$$

$$\dot{y}_1^2 = l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \sin^2 \theta_1 .$$

Sedangkan, koordinat bandul kedua didefinisikan sebagai berikut

$$x_2 = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 ,$$

$$y_2 = -l_1 \cos \theta_1 - l_2 \cos \theta_2 .$$

Selanjutkan dapat ditentukan turunan dari koordinat bandul kedua

$$\dot{x}_2 = l_1 \cos \theta_1 \cdot \dot{\theta}_1 + l_2 \cos \theta_2 \cdot \dot{\theta}_2 ,$$

$$\dot{y}_2 = l_1 \sin \theta_1 \cdot \dot{\theta}_1 + l_2 \sin \theta_2 \cdot \dot{\theta}_2 .$$

Kemudian pangkatkan dua masing-masing turunan dari koordinat bandul kedua

$$\dot{x}_2^2 = (l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2)^2 ,$$

$$\dot{y}_2^2 = (l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2)^2 .$$

Kemudian dari koordinat masing-masing bandul ganda sederhana beserta turunannya dapat ditentukan masing-masing kecepatan dari bandul. Kecepatan (v) merupakan laju (*rate*) perubahan posisi terhadap waktu (Resnick & Halliday, 1960:45), kecepatan rata-rata didefinisikan sebagai

$$v = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ t \rightarrow 0}} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t - t_0} ,$$

dimana x adalah posisi bandul pada waktu t dan x_0 adalah posisi bandul pada saat $t = 0$. Diasumsikan bahwa gerak bandul ganda sederhana adalah gerak dua dimensi oleh karena itu kecepatan rata-rata didefinisikan sebagai

$$v = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ t \rightarrow 0}} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ t \rightarrow 0}} \frac{\Delta y}{\Delta t} ,$$

maka untuk v^2 dapat dinyatakan sebagai berikut

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 . \quad (2.2)$$

Persamaan (2.2) dapat ditulis sebagai berikut

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 .$$

Energi kinetik (T) secara umum dinyatakan oleh persamaan

$$T = \frac{1}{2}mv^2 ,$$

sedangkan energi potensial (V) secara umum dinyatakan oleh persamaan

$$V = mgh .$$

Energi kinetik benda pertama T_1 dinyatakan sebagai berikut

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2)}{2} \\ &= \frac{m_1}{2}(l_1^2\dot{\theta}_1^2 \cos^2 \theta_1 + l_1^2\dot{\theta}_1^2 \sin^2 \theta_1) \\ T_1 &= \frac{m_1}{2}(l_1^2\dot{\theta}_1^2) . \end{aligned} \quad (2.3)$$

Kemudian energi kinetik benda kedua T_2 dinyatakan sebagai berikut

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)}{2} \\ &= \frac{m_2}{2}[(l_1\dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2\dot{\theta}_2 \cos \theta_2)^2 + (l_1\dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + l_2\dot{\theta}_2 \sin \theta_2)^2] \\ &= \frac{m_2}{2}[l_1^2\dot{\theta}_1^2 \cos^2 \theta_1 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 \cos^2 \theta_2 \\ &\quad + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 + l_1^2\dot{\theta}_1^2 \sin^2 \theta_1 \\ &\quad + l_2^2\dot{\theta}_2^2 \sin^2 \theta_2 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos \theta_1 \sin \theta_2] \\ T_2 &= \frac{m_2}{2}[l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)] . \end{aligned} \quad (2.4)$$

Sedangkan energi potensial benda pertama V_1 dinyatakan sebagai berikut

$$V_1 = m_1gy_1 = -m_1g l_1 \cos \theta_1 . \quad (2.5)$$

Kemudian energi potensial benda pertama V_2 dinyatakan sebagai berikut

$$V_2 = m_2 g y_2 = -m_2 g (l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2). \quad (2.6)$$

Lagrangiang adalah selisih antara energi kinetik (T) dengan energi potensial (V) atau dapat ditulis sebagai berikut

$$L = T - V. \quad (2.7)$$

Kemudian substitusikan persaman (2.3), (2.4), (2.5), dan (2.6) ke persamaan (2.7)

$$L = T - V = T_1 + T_2 - (V_1 + V_2)$$

$$\begin{aligned} &= \left[\frac{m_1}{2} (l_1^2 \dot{\theta}_1^2) + \frac{m_2}{2} [l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)] \right] \\ &\quad - [-m_1 g l_1 \cos \theta_1 - m_2 g (l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2)] \\ L &= \left(\frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{2} \right) l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2) g l_1 \cos \theta_1 + m_2 g l_2 \cos \theta_2. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Turunan parsial persamaan (2.8) terhadap $\dot{\theta}_1$ adalah sebagai berikut

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2). \quad (2.9)$$

Turunan parsial persamaan (2.8) terhadap θ_1 adalah sebagai berikut

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - (m_1 + m_2) g l_1 \sin \theta_1. \quad (2.10)$$

Turunan parsial persamaan (2.8) terhadap $\dot{\theta}_2$ adalah sebagai berikut

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2). \quad (2.11)$$

Turunan parsial persamaan (2.8) terhadap θ_2 adalah sebagai berikut

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - m_2 g l_2 \sin \theta_2. \quad (2.12)$$

Persamaan *Euler - Lagrange* dinyatakan sebagai berikut

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} = 0, \quad i = 1, 2.$$

Selanjutnya, menentukan persamaan *Euler-Lagrange* pertama yang didefinisikan sebagai berikut

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0. \quad (2.13)$$

Substitusi persamaan (2.9) dan (2.10) ke persamaan (2.13) yaitu

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [(m_1 + m_2)l_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)] \\ - [-m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - (m_1 + m_2) g l_1 \sin \theta_1] = 0. \end{aligned}$$

Turunkan persamaan (2.9) terhadap t maka diperoleh

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 [\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_2 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 - \theta_2)] \\ + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2) g l_1 \sin \theta_1 = 0. \end{aligned}$$

Selanjutnya kalikan $m_2 l_1 l_2$ dengan $[\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_2 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 - \theta_2)]$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 \\ - \theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 \\ - \theta_2) + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2) g l_1 \sin \theta_1 = 0. \end{aligned}$$

Selanjutnya dapat disederhanakan sebagai berikut

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \\ + (m_1 + m_2) g l_1 \sin \theta_1 = 0. \end{aligned}$$

Lakukan *cancelling* untuk $l_1 \neq 0$, maka diperoleh *Euler-Lagrange* pertama sebagai berikut

$$(m_1 + m_2) l_1 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2) g \sin \theta_1 = 0. \quad (2.14)$$

Sama halnya persamaan *Euler-Lagrange* pertama, persamaan *Euler-Lagrange* kedua didefinikan sebagai berikut

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0. \quad (2.15)$$

Subtitusi persamaan (2.11) dan (2.12) ke persamaan (2.15)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2)] - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \\ + m_2 g l_2 \sin \theta_2 = 0. \end{aligned}$$

Turunkan persamaan (2.11) terhadap t

$$\begin{aligned} m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1 - \theta_2) \\ - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 g l_2 \sin \theta_2 = 0. \end{aligned}$$

Selanjutkan kalikan $(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)$ dengan $m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1 - \theta_2)$

$$\begin{aligned} m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \\ + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \\ + m_2 g l_2 \sin \theta_2 = 0. \end{aligned}$$

Selanjutkan dapat disederhanakan sebagai berikut

$$\begin{aligned} m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \\ + m_2 g l_2 \sin \theta_2 = 0. \end{aligned}$$

Selanjutkan *cancelling* untuk $m_2 l_1 \neq 0$, sehingga diperoleh persamaan *Euler-Lagrange* sebagai berikut

$$l_2 \ddot{\theta}_2 + l_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + g \sin \theta_2 = 0. \quad (2.16)$$

Oleh karena itu, didapatkan sistem bandul ganda dari persamaan (2.14) dan (2.16) sebagai berikut

$$\begin{cases} (m_1 + m_2) l_1 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + \\ \quad (m_1 + m_2) g \sin \theta_1 = 0 \\ l_2 \ddot{\theta}_2 + l_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - l_2 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + g \sin \theta_2 = 0 \end{cases}. \quad (2.17)$$

2.2.2 Osilasi Kecil Bandul Ganda

Berbeda dengan sistem bandul ganda (2.17), pada subbab ini akan diturunkan sistem bandul ganda sederhana dengan asumsi bahwa besar sudut $\theta_1(t)$ dan $\theta_2(t)$ kecil. Perhatikan persamaan (2.8)

$$\begin{aligned} L = & \left(\frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{2} \right) l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ & + (m_1 + m_2) g l_1 \cos \theta_1 + m_2 g l_2 \cos \theta_2. \end{aligned}$$

Persamaan (2.8) dapat diubah ke dalam bentuk yang lebih sederhana, dengan menggunakan ekspansi deret *Maclaurin*. Fungsi trigonometri $\cos \theta_1$, dan $\cos \theta_2$ dapat digantikan oleh ekspresi perkiraan berikut:

$$\cos \theta_1 \approx 1 - \frac{\dot{\theta}_1^2}{2}, \quad \cos \theta_2 \approx 1 - \frac{\dot{\theta}_2^2}{2}. \quad (2.18)$$

Diasumsikan bahwa sudut θ_1 dan θ_2 sangatlah kecil maka nilai $\cos(\theta_1 - \theta_2)$ dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\cos(\theta_1 - \theta_2) \approx \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \approx 1.$$

Mengingat bahwa energi potensial didefinisikan sampai konstan, diperoleh persamaan *Lagrangian* kuadrat untuk bandul ganda berupa:

$$L = \left(\frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{2} \right) l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - \left(\frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{2} \right) g l_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2}{2} g l_2 \dot{\theta}_1^2. \quad (2.19)$$

Turunan parsial persamaan (2.19) terhadap $\dot{\theta}_1$ dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2. \quad (2.20)$$

Turunan parsial persamaan (2.19) terhadap θ_1 dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -(m_1 + m_2) g l_1 \theta_1. \quad (2.21)$$

Turunan parsial persamaan (2.19) terhadap $\dot{\theta}_2$ dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1. \quad (2.22)$$

Turunan parsial persamaan (2.19) terhadap θ_2 dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = -m_2 g l_2 \theta_2. \quad (2.23)$$

Subtitusi persamaan (2.20) dan (2.21) ke persamaan (2.13). Persamaan (2.22) dan (2.23) ke persamaan (2.15), sehingga diperoleh sistem bandul ganda sederhana dengan asumsi sudut osilasi yang kecil

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} [(m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2] + (m_1 + m_2) g l_1 \theta_1 = 0 \\ \frac{d}{dt} [m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1] - m_2 g l_2 \theta_2 = 0 \end{cases}$$

atau

$$\begin{cases} (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 + (m_1 + m_2) g l_1 \theta_1 = 0 \\ m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 - m_2 g l_2 \theta_2 = 0 \end{cases}. \quad (2.24)$$

2.3 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Misalkan matriks A adalah matriks $n \times n$, maka vektor tak nol x di dalam \mathcal{R}^n dinamakan vektor eigen (*eigenvector*) dari A adalah kelipatan skalar dari x ; yakni,

$$Ax = \lambda x$$

untuk suatu skalar λ . Skalar λ dinamakan nilai eigen dari A dan x dikatakan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ (Anton, 1997:277).

2.4 Solusi dan Potret Fase dengan Nilai Eigen Kompleks

Persamaan diferensial $\dot{x} = ax$ memiliki solusi $x(t) = x_0(t)e^{at}$ dengan $x(t)$ merupakan variabel yang bergantung pada waktu t , a merupakan parameter dan kondisi awal x_0 yang berbeda. Jika mengombinasikan dua skalar ke dalam persamaan tunggal, $\dot{x}_1 = a_1x_1$, $\dot{x}_2 = a_2x_2$, maka persamaan tersebut memiliki solusi $x_1(t) = c_1(t)e^{a_1t}$ dan $x_2(t) = c_2(t)e^{a_2t}$, di mana c_1 dan c_2 adalah sebarang konstanta. Mengkombinasikan dua solusi tersebut menjadi vektor solusi

$$x(t) = c_1(t)e^{a_1t}\mathbf{u}^1 + c_2(t)e^{a_2t}\mathbf{u}^2$$

di mana \mathbf{u}^j adalah vektor unit dengan 1 pada tempat j^{th} dan 0 pada tempat lainnya (Robinson, 2012:20).

Selanjutnya untuk solusi dari nilai eigen kompleks, diperlukan untuk memahami eksponensial dengan eksponen kompleks. Dengan membandingkan ekspansi deret kuasa, dapat dilihat bahwa

$$e^{i\beta t} = \cos(\beta t) + i \sin(\beta t),$$

$$e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t} e^{i\beta t} = e^{\alpha t} (\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)).$$

Demikian, jika $\lambda = \alpha + i\beta$ adalah nilai eigen kompleks dengan vektor kompleks $v = u + i w$ (dengan α dan β adalah bilangan real serta u dan w adalah vektor real), maka

$$\begin{aligned} e^{(\alpha+i\beta)t}(u + i w) &= e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i \sin(\beta t))(u + i w) \\ &= e^{\alpha t}(\cos(\beta t) u + \sin(\beta t) w) + i e^{\alpha t}(\sin(\beta t) u + \cos(\beta t) w) \end{aligned}$$

Berikutnya adalah menggambar potret fase untuk sepasang nilai eigen kompleks. Diasumsikan sebuah nilai eigen adalah $\lambda = \alpha \pm i\beta$ dengan $\beta \neq 0$ (Robinson, 2012:32)

1. Jika $\alpha = 0$, maka titik tetap adalah *elliptic center*, dengan solusi periodik. Arah gerakan yaitu searah jarum jam atau berlawanan dengan jarum jam.
2. Jika $\alpha < 0$, maka titik tetap adalah *stable focus*. Arah gerakan yaitu searah jarum jam atau berlawanan dengan jarum jam.
3. Jika $\alpha > 0$, maka solusi spiral keluar dan titik tetap adalah *unstable focus*, dengan arah gerak spiral yaitu searah jarum jam atau berlawanan dengan jarum jam.
4. Dalam tiga kasus di atas, arah solusi menuju ke sekitar titik tetap dapat ditentukan dengan mengecek apakah \dot{x}_1 adalah positif atau negatif ketika $x_1 = 0$. Jika \dot{x}_1 positif maka solusi searah dengan jarum jam dan jika \dot{x}_1 negatif maka solusi berlawanan dengan jarum jam.

Pandang sistem persamaan linier berikut

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= 2x_1 + x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_1 + 2x_2 \end{aligned} \tag{2.25}$$

dengan kondisi awal $x_1(0) = 1$ dan $x_2(0) = 0$. Sistem persamaan (2.25) dapat ditulis sebagai berikut

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \quad (2.26)$$

dengan

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Solusi dari persamaan (2.26) adalah

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 e^{At}$$

dengan \mathbf{x}_0 merupakan kondisi awal maka didapatkan

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{A_{1,1}t} & e^{A_{1,2}t} \\ e^{A_{2,1}t} & e^{A_{2,2}t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.27)$$

Persamaan (2.27) merupakan solusi dari persamaan (2.25) dengan persamaan (2.27) dapat diketahui nilai dari $x_1(t)$ dan $x_2(t)$ untuk sebarang t . Selanjutnya, untuk mengetahui nilai $x_1(t)$ dan $x_2(t)$ untuk $t \rightarrow \infty$ dengan memenuhi

$$e^{At} = \mathbf{v} e^{\lambda t} \mathbf{v}^{-1}, \quad (2.28)$$

dimana λ merupakan nilai eigen dari (2.25), \mathbf{v} merupakan vektor eigen dan \mathbf{v}^{-1} merupakan invers dari vektor eigen. Pertama, menentukan nilai eigen dari persamaan karakteristik yang memenuhi

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

dengan I merupakan matriks identitas berukuran 2×2 . Persamaan karakteristik dari persamaan (2.25) adalah $x = x^2 - 4x + 3$ maka akar-akarnya $\lambda_1 = 3$ dan $\lambda_2 = 1$. Kedua, menentukan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen. Vektor eigen pertama adalah $\mathbf{v}^1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ dan vektor eigen kedua adalah $\mathbf{v}^2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

sedangkan inversnya adalah $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$. Subtitusi nilai eigen, vektor eigen dan invers dari vektor eigen ke persamaan (2.28)

$$\begin{aligned} e^{At} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \exp \left(\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} t \right) \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{e^{3t}}{2} & \frac{e^{3t}}{2} \\ \frac{e^t}{2} & -\frac{e^t}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^{3t} + e^t) & \frac{1}{2}(e^{3t} - e^t) \\ \frac{1}{2}(e^{3t} - e^t) & \frac{1}{2}(e^{3t} + e^t) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Nilai $x_1(t)$ dan $x_2(t)$ dengan kondisi awal $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ adalah

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^{3t} + e^t) & \frac{1}{2}(e^{3t} - e^t) \\ \frac{1}{2}(e^{3t} - e^t) & \frac{1}{2}(e^{3t} + e^t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Kalikan e^{At} dengan t

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^{3t} + e^t) \\ \frac{1}{2}(e^{3t} - e^t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.29)$$

maka nilai $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 205,4089 \\ 198,0199 \end{bmatrix}$. Terlihat bahwa untuk $t \rightarrow \infty$ maka $e^{3t} \rightarrow \infty$ dan $|x(t)| \rightarrow \infty$.

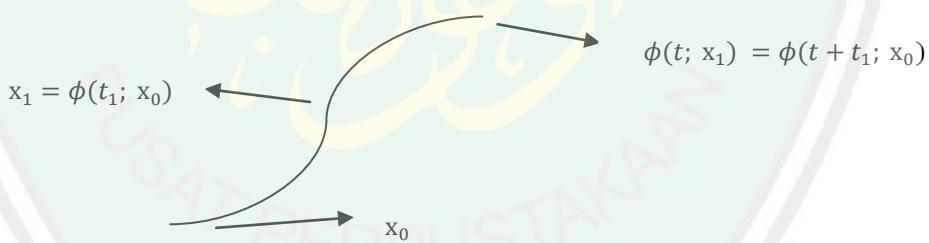
2.5 Flow dari Persamaan Diferensial

Fungsi $\phi(t; x_0)$, yang memberikan solusi sebagai fungsi waktu t dan kondisi awal x_0 , disebut dengan *flow* dari persamaan diferensial. Untuk masing-masing x_0 , fungsi $\phi(t; x_0)$ adalah kurva parameter pada ruang dimensi tinggi \mathbb{R}^n . Himpunan pada titik-titik kurva tersebut disebut orbit atau trayektori.

Pandang suatu sistem persamaan linier $\dot{x} = Ax$ yang memiliki *flow* $\phi(t; x_0) = e^{At}x_0$. Diberikan $x_1 = \phi(t_1; x_0)$ dengan $\phi(t + t_1; x_0)$ dan $\phi(t; x_1)$ adalah solusi yang sama x_1 saat $t = 0$. Jadi,

$$\phi(t + t_1; x_0) = \phi(t; x_1) = \phi(t; \phi(t_1; x_0)).$$

Perhatikan Gambar 2.3, solusi $\phi(t + t_1; x_0)$ pada saat $t = t + t_1$ adalah sebagai berikut: trayektori menuju ke waktu t_1 , berhenti dan mendapatkan kondisi awal yang baru yaitu x_1 , dan selanjutnya menuju ke waktu t yang lebih $\phi(t; \phi(t_1; x_0))$ (Robinson, 2012:72).

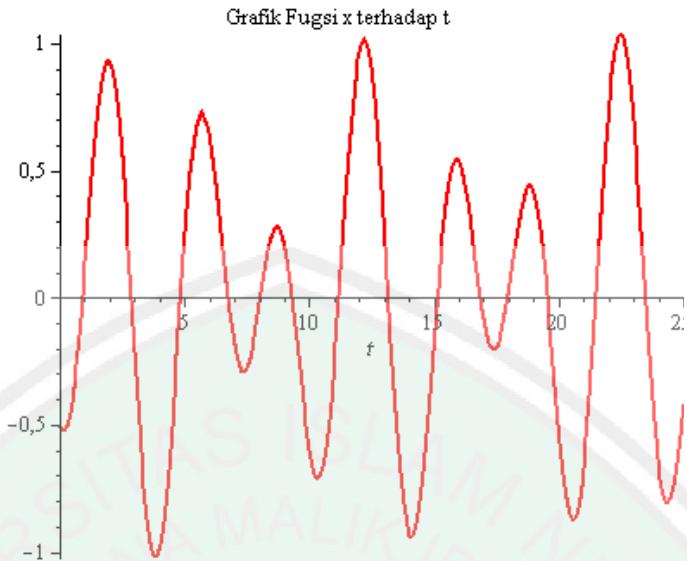


Gambar 2.3 Grup dari *flow*

Diberikan $\phi(T; x_0) = x_0$ untuk nilai T positif $T > 0$, tetapi tidak semua t , oleh properti grup

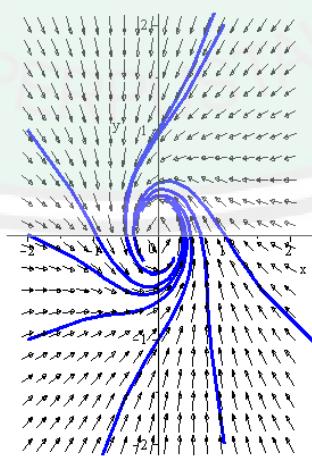
$$\phi(t + T; x_0) = \phi(t; \phi(T; x_0)) = \phi(t; x_0)$$

(yaitu, kembali ke titik yang sama di bidang fase), dengan demikian orbit adalah periodik. Nilai terkecil dari T yang bekerja disebut periode (Robinson, 2012:72).



Gambar 2.4 Grafik dengan Orbit Periodik

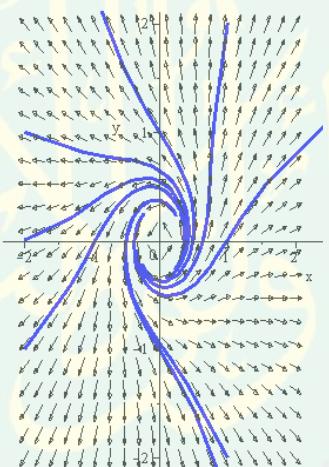
Sebuah titik tetap x^* dikatakan *Lyapunov Stable* or *L-Stable*, dengan ketentuan bahwa setiap solusi $\phi(t; x_0)$ tetap mendekati x^* untuk semua $t \geq 0$ jika kondisi awal x_0 dimulai cukup dekat ke x^* . Lebih tepatnya, titik tetap x^* disebut L-stabil dengan ketentuan untuk setiap $\epsilon > 0$, terdapat sebuah $\delta > 0$ sehingga, jika $\|x_0 - x^*\| < \delta$, maka $\|\phi(t; x_0) - x^*\| < \epsilon$ untuk setiap $t \geq 0$ (Robinson, 2012:101).



Gambar 2.5 Potret Fase dengan Kestabilan L-Stabil

Gambar 2.5 menunjukkan trayektori $\phi(t; x_0)$ cenderung menuju ke titik tetap meskipun tidak sampai pada titik tetap x_0 . Hal tersebut dapat dilihat dengan arah panah menuju titik tetap.

Sebuah titik tetap x^* dikatakan tak stabil, dengan ketentuan tak L -stabil (yaitu terdapat $\epsilon_1 > 0$ sehingga untuk setiap $\delta > 0$ terdapat beberapa titik x_δ dengan $\|x_\delta - x^*\| < \delta$ dan waktu $t_1 > 0$ bergantung pada titik x_δ dengan $\|\phi(t_1; x_\delta) - x^*\| < \epsilon_1$). Dengan demikian, trayektori mulai mendekati ke x^* seperti yang diinginkan untuk mendekati perpindahan setidaknya jarak ϵ_1 jauh dari x^* (Robinson, 2012:101).



Gambar 2.6 Potret Fase dengan Kestabilan Tak Stabil

Gambar 2.6 menunjukkan sistem yang tak stabil karena trayektori $\phi(t; x_0)$ cenderung menjauhi titik tetap x_0 . Hal tersebut dapat dilihat pada arah panah yang cenderung menjauhi titik tetap.

2.6 Osilasi

Setiap gerak yang berulang dalam selang waktu yang sama disebut gerak periodik. Pergeseran partikel yang bergerak periodik selalu dapat dinyatakan

dalam fungsi sinus dan cosinus karena pernyataan memuat fungsi ini diberi istilah harmonik maka gerak periodik sering disebut gerak harmonik. Jika suatu partikel dalam gerak periodik bergerak bolak-balik melalui lintasan yang sama, geraknya disebut gerak osilasi atau vibrasi (getaran).

Periode T suatu gerak harmonik adalah waktu yang dibutuhkan untuk menempuh satu lintasan lengkap dari geraknya, yaitu satu ayunan penuh (Resnick & Halliday, 1978: 443).

2.7 Kajian Al-Quran dan Hadist

Dalam al-Quran surat Ali Imran/3:28 Allah Swt. berfirman:

لَا يَتَّخِذُ الْمُؤْمِنُونَ أَوْلَيَاءَ مِنْ دُونِ الْمُؤْمِنِينَ وَمَنْ يَفْعَلْ ذَلِكَ فَلَيْسَ مِنْ اللَّهِ فِي شَيْءٍ
إِلَّا أَنْ تَتَقَوَّلُ مِنْهُمْ تُقْنَةً وَيُحَذَّرُ كُمُّ اللَّهُ نَفْسَهُ وَإِلَى اللَّهِ الْمَصِيرُ

“Janganlah orang-orang mukmin mengambil orang-orang kafir menjadi wali dengan meninggalkan orang-orang mukmin. Barang siapa berbuat demikian, niscaya lepaslah ia dari pertolongan Allah, kecuali karena (siasat) memelihara diri dari sesuatu yang ditakuti dari mereka. Dan Allah memperingatkan kamu terhadap diri (siksa)-Nya. dan hanya kepada Allah kembali (mu)”(QS. Ali Imran/3:28).

Ayat tersebut menyebutkan kata wali. Wali jamaknya adalah auliya yang memiliki arti teman yang akrab juga berarti pemimpin atau penolong. Dalam ayat tersebut Allah Swt. menjelaskan seorang mukmin diperintah oleh-Nya untuk memilih teman bergaul yang akrab dari golongan selain kafirin.

Manusia memiliki kebiasaan untuk saling mempengaruhi satu sama lain. Teman yang baik akan mempengaruhi kepada kebaikan dan sebaliknya. Seorang teman adalah cermin dari diri, oleh karenanya Allah memberikan batasan kepada hamba-Nya dalam memilih teman atau dalam bergaul.

Jika dianalogikan dalam kehidupan, sistem dinamik merupakan seorang manusia yang dapat berubah seiring dengan berjalannya waktu. Pengaruh perubahan sikap diibaratkan seperti perubahan parameter dalam sistem dinamik. Perubahan sikap ataupun perilaku manusia dapat disebabkan oleh pengaruh dari luar. Pengaruh tersebut dapat berupa lingkungan baru yang ada di sekitar manusia. Misalnya, seorang anak desa yang bermigrasi ke kota untuk menuntut ilmu. Cepat atau lambat ataupun anak tersebut akan terpengaruh dengan lingkungan barunya. Perubahan tersebut dapat berupa perubahan sikap yang positif atau bahkan perubahan sikap yang negatif. Lingkungan barulah yang dapat menentukan perubahan tersebut. Nabi Muhammad Saw. bersabda,

مَثَلُ الْجَلِيلِ الصَّالِحِ وَالسُّوءِ كَحَامِلِ الْمِسْكِ وَنَافِخِ الْكِيرِ ، فَحَامِلُ الْمِسْكِ إِمَّا أَنْ يُخْذِلَكَ ، وَإِمَّا
أَنْ تَبْتَاعَ مِنْهُ ، وَإِمَّا أَنْ تَجِدَ مِنْهُ رِيحًا طَيِّبَةً ، وَنَافِخُ الْكِيرِ إِمَّا أَنْ يُخْرِقَ ثِيَابَكَ ، وَإِمَّا أَنْ تَجِدَ رِيحًا
خَيْرَةً

“Perumpaan teman yang shalih dan yang buruk itu seperti penjual minyak wangi dan tukang pandai besi. Berteman dengan penjual minyak wangi akan membuatmu harum karena kamu bisa membeli minyak wangi darinya atau sekurang-kurangnya mencium bau wanginya. Sementara berteman dari pandai besi akan membakar badan dan bajumu atau kamu akan mendapat bau yang tidak sedap”(HR. Bukhari dan Muslim).

Hadits tersebut menjelaskan tentang perumpamaan teman yang shalih dan yang buruk, dimana teman yang shalih akan mempengaruhi diri yang semula mempunyai perilaku yang buruk menjadi seseorang yang berakhhlak baik, shalih, mulia, dan mengajak kepada kebajikan. Sebaliknya teman memiliki perilaku yang buruk akan mengajak yang semula berakhhlak mulia menjadi seorang yang berakhhlak buruk. Akan tetapi tidak semua manusia memilih untuk bergaul dengan seseorang “penjual parfum”, mereka lebih sering untuk memilih teman yang sepadan, sefikiran, dan tidak jauh dari perilaku mereka. Oleh karena itu

dibutuhkan kesadaran yang tinggi di dalam individu masing-masing agar memilih teman yang selayaknya seorang penjual parfum agar setiap individu dapat tertular wanginya.



BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Analisis Perilaku Sistem Bandul Ganda Sederhana

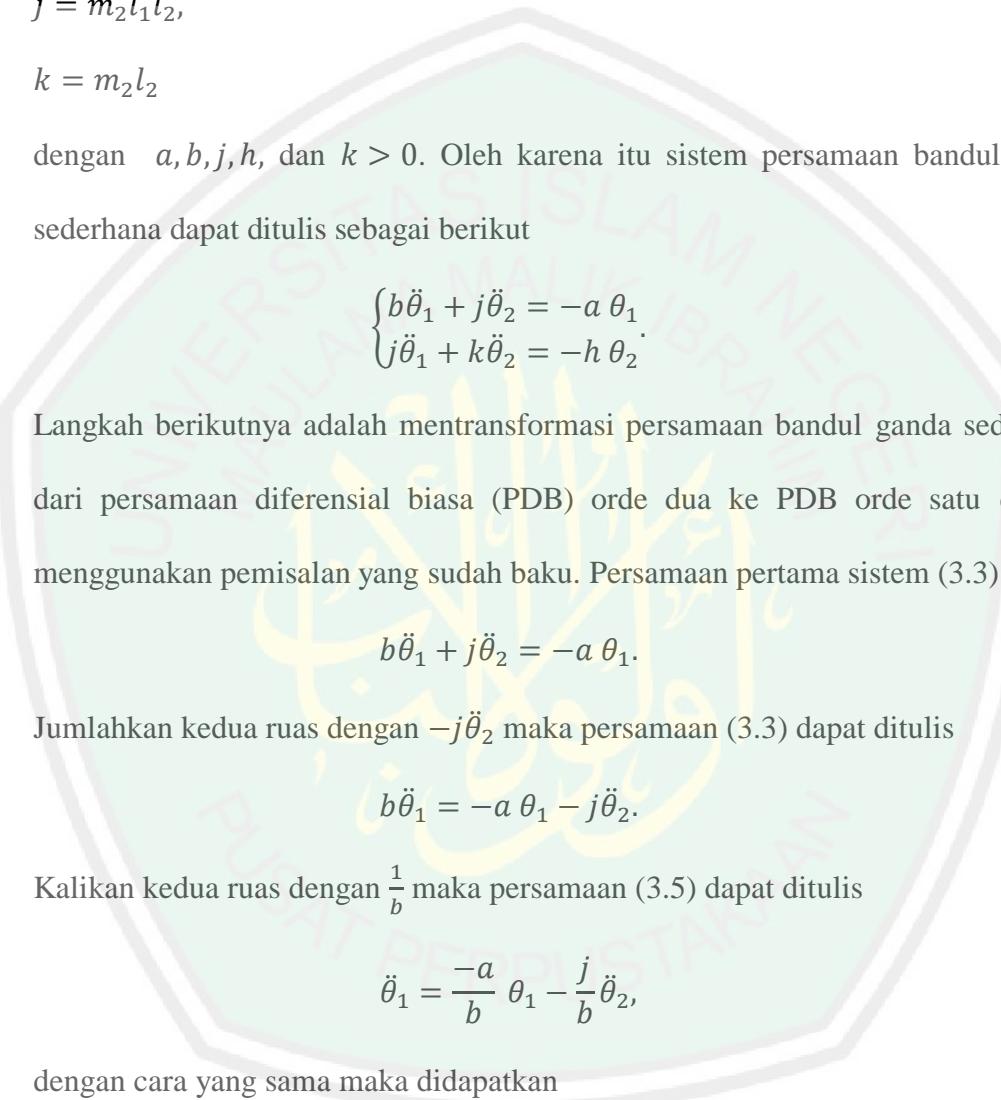
Analisis perilaku dari sistem bandul ganda sederhana diawali dengan penondimensioalan sistem bandul ganda sederhana sehingga didapatkan sistem bandul ganda yang memiliki sedikit parameter. Selanjutnya menentukan titik tetap sistem bandul ganda sederhana dan contoh analisis perilaku sistem bandul ganda sederhana dengan parameter dan kondisi awal tertentu.

Sistem bandul ganda sederhana merupakan sistem yang terdiri dari dua benda. Masing-masing benda memiliki massa yaitu m_1 merupakan massa benda pertama B_1 dan m_2 merupakan massa benda kedua B_2 . Kemudian benda pertama terletak pada ujung kawat/tali pertama dengan panjang l_1 dan l_2 merupakan panjang kawat/tali kedua yang menghubungkan benda pertama dengan benda kedua. θ_1 merupakan sudut perpindahan pada kawat/tali pertama dan θ_2 merupakan sudut perpindahan pada kawat/tali kedua. $\ddot{\theta}_1$ merupakan laju kecepatan benda pertama terhadap waktu. $\ddot{\theta}_2$ merupakan laju kecepatan benda kedua terhadap waktu. Gravitasi bumi dinyatakan sebagai g . Riset pendahuluan bandul ganda sederhana oleh Amanto dan Zakaria (2008:24-25) telah dilakukan penondimensionalan terhadap sistem bandul ganda sederhana. Pandang sistem bandul ganda sederhana sebagai berikut

$$\begin{cases} (m_1 + m_2)l_1^2\ddot{\theta}_1 + m_1l_1l_2\ddot{\theta}_2 + (m_1 + m_2)l_1g\theta_1 = 0 \\ m_2l_1l_2\ddot{\theta}_1 + m_1l_2^2\ddot{\theta}_2 + m_2l_2g\theta_2 = 0 \end{cases}. \quad (3.1)$$

Dimisalkan

$$\begin{aligned}
 a &= (m_1 + m_2)l_1 g, \\
 b &= (m_1 + m_2)l_1^2, \\
 h &= m_2 l_2 g, \\
 j &= m_2 l_1 l_2,
 \end{aligned} \tag{3.2}$$



$$k = m_2 l_2$$

dengan a, b, j, h , dan $k > 0$. Oleh karena itu sistem persamaan bandul ganda sederhana dapat ditulis sebagai berikut

$$\begin{cases} b\ddot{\theta}_1 + j\ddot{\theta}_2 = -a\theta_1 \\ j\ddot{\theta}_1 + k\ddot{\theta}_2 = -h\theta_2 \end{cases}. \tag{3.3}$$

Langkah berikutnya adalah mentransformasi persamaan bandul ganda sederhana dari persamaan diferensial biasa (PDB) orde dua ke PDB orde satu dengan menggunakan pemisalan yang sudah baku. Persamaan pertama sistem (3.3) adalah

$$b\ddot{\theta}_1 + j\ddot{\theta}_2 = -a\theta_1. \tag{3.4}$$

Jumlahkan kedua ruas dengan $-j\ddot{\theta}_2$ maka persamaan (3.3) dapat ditulis

$$b\ddot{\theta}_1 = -a\theta_1 - j\ddot{\theta}_2. \tag{3.5}$$

Kalikan kedua ruas dengan $\frac{1}{b}$ maka persamaan (3.5) dapat ditulis

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{-a}{b}\theta_1 - \frac{j}{b}\ddot{\theta}_2, \tag{3.6}$$

dengan cara yang sama maka didapatkan

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{-a}{j}\theta_1 - \frac{b}{j}\ddot{\theta}_1. \tag{3.7}$$

Persamaan kedua pada sistem (3.3) adalah

$$j\ddot{\theta}_1 + k\ddot{\theta}_2 = -h\theta_2. \tag{3.8}$$

Jumlah kedua ruas dengan $-k\ddot{\theta}_2$ maka persamaan (3.8) dapat ditulis

$$j\ddot{\theta}_1 = -h \theta_2 - k\ddot{\theta}_2. \quad (3.9)$$

Kalikan kedua ruas dengan $\frac{1}{j}$ maka persamaan (3.9) dapat ditulis

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{-h}{j} \theta_2 - \frac{k}{j} \ddot{\theta}_2, \quad (3.10)$$

dengan cara yang sama, maka didapatkan

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{-h}{k} \theta_2 - \frac{j}{k} \ddot{\theta}_1. \quad (3.11)$$

Subtitusi persamaan (3.11) ke persamaan (3.6) maka diperoleh

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{-a}{b} \theta_1 - \frac{j}{b} \left(\frac{-h}{k} \theta_2 - \frac{j}{k} \ddot{\theta}_1 \right). \quad (3.12)$$

Kalikan $-\frac{j}{b}$ dengan $\left(\frac{-h}{k} \theta_2 - \frac{j}{k} \ddot{\theta}_1 \right)$ maka persamaan (3.12) dapat ditulis

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{-a}{b} \theta_1 + \frac{jh}{bk} \theta_2 + \frac{j^2}{bk} \ddot{\theta}_1. \quad (3.13)$$

Jumlah kedua ruas dengan $-\frac{j^2}{bk} \ddot{\theta}_1$ kedua ruas maka persamaan (2.13) dapat ditulis

$$\ddot{\theta}_1 - \frac{j^2}{bk} \ddot{\theta}_1 = \frac{-a}{b} \theta_1 + \frac{jh}{bk} \theta_2 \quad (3.14)$$

atau dapat ditulis

$$\left(1 - \frac{j^2}{bk} \right) \ddot{\theta}_1 = \frac{-a}{b} \theta_1 + \frac{jh}{bk} \theta_2, \quad (3.15)$$

manipulasi aljabar pada $1 = \frac{bk}{bk}$ maka persamaan (3.15) dapat ditulis

$$\left(\frac{bk - j^2}{bk} \right) \ddot{\theta}_1 = \frac{-a}{b} \theta_1 + \frac{jh}{bk} \theta_2. \quad (3.16)$$

Kalikan kedua ruas dengan $\frac{bk}{bk - j^2}$ maka persamaan (3.16) dapat ditulis

$$\ddot{\theta}_1 = \left(\frac{-a}{b} \theta_1 + \frac{jh}{bk} \theta_2 \right) \left(\frac{bk}{bk - j^2} \right), \quad (3.17)$$

manipulasi aljabar pada $\frac{-a}{b} = \frac{-ak}{bk}$ maka persamaan (3.17) dapat ditulis

$$\ddot{\theta}_1 = \left(\frac{-ak}{bk} \theta_1 + \frac{jh}{bk} \theta_2 \right) \left(\frac{bk}{bk - j^2} \right). \quad (3.18)$$

Kalikan $\left(\frac{-ak}{bk} \theta_1 + \frac{jh}{bk} \theta_2 \right)$ dengan $\left(\frac{bk}{bk - j^2} \right)$ maka persamaan (3.18) dapat ditulis

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{-ak}{bk - j^2} \theta_1 + \frac{jh}{bk - j^2} \theta_2. \quad (3.19)$$

Subtitusi persamaan (3.10) ke persamaan (3.7) maka diperoleh

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{-a}{j} \theta_1 - \frac{b}{j} \left(\frac{-h}{j} \theta_2 - \frac{k}{j} \ddot{\theta}_2 \right). \quad (3.20)$$

Kalikan $-\frac{b}{j}$ dengan $\left(\frac{-h}{j} \theta_2 - \frac{k}{j} \ddot{\theta}_2 \right)$ maka persamaan (3.20) dapat ditulis

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{-a}{j} \theta_1 + \frac{bh}{j^2} \theta_2 + \frac{bk}{j^2} \ddot{\theta}_2. \quad (3.21)$$

Jumlahkan kedua ruas dengan $-\frac{bk}{j^2} \ddot{\theta}_2$ maka persamaan (2.21) dapat ditulis

$$\ddot{\theta}_2 - \frac{bk}{j^2} \ddot{\theta}_2 = \frac{-a}{j} \theta_1 + \frac{bh}{j^2} \theta_2 \quad (3.22)$$

atau dapat ditulis

$$\left(1 - \frac{bk}{j^2} \right) \ddot{\theta}_2 = \frac{-a}{j} \theta_1 + \frac{bh}{j^2} \theta_2,$$

manipulasi aljabar pada $1 = \frac{j^2}{j^2}$ maka persamaan (3.22) dapat ditulis

$$\left(\frac{j^2 - bk}{j^2} \right) \ddot{\theta}_2 = \frac{-a}{j} \theta_1 + \frac{bh}{j^2} \theta_2. \quad (3.23)$$

Kalikan kedua ruas dengan $\frac{bk}{j^2 - bk}$ maka persamaan (3.23) dapat ditulis

$$\ddot{\theta}_2 = \left(\frac{-a}{j} \theta_1 + \frac{bh}{j^2} \theta_2 \right) \left(\frac{j^2}{j^2 - bk} \right), \quad (3.24)$$

manipulasi aljabar pada $\frac{-a}{j} = \frac{aj}{j^2}$ maka persamaan (3.24) dapat ditulis

$$\ddot{\theta}_2 = \left(\frac{-aj}{j^2} \theta_1 + \frac{bh}{j^2} \theta_2 \right) \left(\frac{j^2}{j^2 - bk} \right). \quad (3.25)$$

Kalikan $\left(\frac{-aj}{j^2} \theta_1 + \frac{bh}{j^2} \theta_2 \right)$ dengan $\left(\frac{j^2}{j^2 - bk} \right)$ maka persamaan (3.24) dapat ditulis

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{-aj}{j^2 - bk} \theta_1 + \frac{bh}{j^2 - bk} \theta_2. \quad (3.26)$$

Misalkan $x_1 = \theta_1$, $x_2 = \dot{\theta}_1$, $\dot{x}_2 = \ddot{\theta}_1$, $x_3 = \theta_2$, $x_4 = \dot{\theta}_2$ dan $\dot{x}_4 = \ddot{\theta}_2$ maka diperoleh

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{\theta}_1 \\ \dot{x}_2 = \ddot{\theta}_1 \\ \dot{x}_3 = \dot{\theta}_2 \\ \dot{x}_4 = \ddot{\theta}_2 \end{cases} \quad (3.27)$$

Subtitusi persamaan (3.19) dan (3.26) ke sistem (3.27) maka diperoleh

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{-ak}{-j^2 + bk} x_1 + \frac{jh}{-j^2 + bk} x_3 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{-aj}{j^2 - bk} x_1 + \frac{bh}{j^2 - bk} x_3 \end{cases} \quad (3.28)$$

Sistem (3.28) menunjukkan bahwa laju kecepatan benda pertama dipengaruhi oleh besar $\frac{-ak}{-j^2 + bk}$ dari sudut perpindahan benda pertama ditambah besar $\frac{jh}{-j^2 + bk}$ dari sudut perpindahan benda kedua. Laju kecepatan benda kedua dipengaruhi oleh besar $\frac{-aj}{j^2 - bk}$ dari sudut perpindahan benda pertama dan besar $\frac{bh}{j^2 - bk}$ dari perpindahan sudut bandul kedua.

3.1.1 Analisis Titik Tetap

Analisis titik tetap dikerjakan dengan mengasumsikan bahwa

$$\dot{x}_1 = \frac{dx_1}{dt} = 0, \quad \dot{x}_2 = \frac{dx_2}{dt} = 0, \quad \dot{x}_3 = \frac{dx_3}{dt} = 0, \quad \dot{x}_4 = \frac{dx_4}{dt} = 0$$

maka didapatkan sistem linier untuk model bandul ganda sederhana sebagai berikut:

$$0 = x_2$$

$$0 = \frac{-ak}{-j^2+bk} x_1 + \frac{jh}{-j^2+bk} x_3 \quad (3.29)$$

$$0 = x_2$$

$$0 = \frac{-aj}{j^2-bk} x_1 + \frac{bh}{j^2-bk} x_3$$

Sistem (3.29) merupakan sistem sistem PDB orde satu linier yang homogen. Menurut Anton (1987:19), tiap-tiap sistem persamaan linier homogen adalah sistem yang konsisten, karena $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$ selalu merupakan pemecahan. Pemecahan tersebut dinamakan pemecahan trivial (*trivial solution*), jika ada pemecahan yang lain maka pemecahan tersebut dinamakan pemecahan tak trivial (*nontrivial solution*). Oleh karena itu, sistem (3.27) mempunyai pemecahan trivial sehingga didapatkan titik tetap yaitu

$$F = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0, 0)$$

Sistem bandul ganda sederhana hanya memiliki satu titik tetap yaitu $F = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0, 0)$ yang berarti bahwa posisi seimbang pada bandul ganda sederhana ketika sudut perpindahan benda pertama suatu waktu, laju kecepatan benda pertama terhadap waktu, sudut perpindahan benda kedua suatu waktu dan laju kecepatan benda kedua terhadap waktu sama dengan nol ($\theta_1(t) = \ddot{\theta}_1(t) = \theta_2(t) = \ddot{\theta}_2(t) = 0$). Posisi seimbang merupakan posisi di mana energi potensial mencapai harga minimum dan merupakan posisi untuk keseimbangan stabil.

3.1.2 Contoh Analisis Perilaku Sistem Bandul Ganda Sederhana

Contoh analisis perilaku sistem bandul ganda sederhana diberikan untuk memahami lebih dalam mengenai perilaku pada sistem bandul ganda sederhana.

Contoh kasus dengan parameter $m_1 = 937,5$ slug, $m_2 = 312,5$ slug, $l_1 = 16$ kaki, $l_2 = 16$ kaki, dan $g = 32$ kaki/s² dengan kondisi awal yang berbeda $x_1(0) = -0,5$ rad, $x_2(0) = -1$ rad/s, $x_3(0) = 1$ rad, dan $x_4(0) = 2$ rad/s.

Pandang sistem linier (3.26) menjadi sebuah matriks

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$$

dengan

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -ak & 0 & jh & 0 \\ -j^2 + bk & 0 & -j^2 + bk & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -aj & 0 & bh & 0 \\ j^2 - bk & 0 & j^2 - bk & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

Subtitusi nilai parameter ke persamaan (3.2) sehingga didapatkan

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -512 & 0 & 128 & 0 \\ 192 & 0 & 192 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 512 & 0 & -512 & 0 \\ 192 & 0 & 192 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad (3.30)$$

kondisi awal yang diberikan adalah

$$\begin{bmatrix} x_1(0) = -0,5 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 2 \end{bmatrix}.$$

Sistem (3.30) memiliki solusi sebagai berikut

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 e^{At}$$

atau dapat ditulis

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{A_{1,1}t} & e^{A_{1,2}t} & e^{A_{1,3}t} & e^{A_{1,4}t} \\ e^{A_{2,1}t} & e^{A_{2,2}t} & e^{A_{2,3}t} & e^{A_{2,4}t} \\ e^{A_{3,1}t} & e^{A_{3,2}t} & e^{A_{3,3}t} & e^{A_{3,4}t} \\ e^{A_{4,1}t} & e^{A_{4,2}t} & e^{A_{4,3}t} & e^{A_{4,4}t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,5 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}. \quad (3.31)$$

Persamaan (3.31) menunjukkan perilaku sistem (3.30) pada saat t tertentu sedangkan menentukan perilaku dari e^{At} saat $t \rightarrow \infty$ dengan memenuhi

$$e^{At} = \mathbf{v} e^{\lambda t} \mathbf{v}^{-1}$$

di mana λ merupakan nilai eigen dan \mathbf{v} merupakan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ serta \mathbf{v}^{-1} merupakan invers dari vektor eigen. Selanjutnya, menentukan nilai eigen dari persamaan karakteristik yang memenuhi

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

dengan I adalah matriks identitas yang berukuran 4×4 maka $\det(A - \lambda I) = 0$ dapat ditulis sebagai berikut

$$\det \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{512}{192} & 0 & \frac{128}{192} & 0 \\ \frac{192}{192} & 0 & \frac{192}{192} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{512}{192} & 0 & -\frac{512}{192} & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) = 0.$$

Kurangi matriks A dengan matriks λI

$$\det \left(\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{512}{192} & -\lambda & \frac{128}{192} & 0 \\ \frac{192}{192} & 0 & -\lambda & 1 \\ \frac{512}{192} & 0 & -\frac{512}{192} & -\lambda \end{bmatrix} \right) = 0.$$

Persamaan karakteristik A adalah

$$\lambda^4 + 1 \left(\frac{128}{192} \right) 1 \left(\frac{512}{192} \right) - 1 \left(\frac{-512}{192} \right) 1 \left(\frac{-512}{192} \right) = 0.$$

Sehingga dengan menggunakan bantuan Maple 12 nilai-nilai eigen dari matriks A adalah

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{2}{3}\sqrt{3}i, & \lambda_2 &= -\frac{2}{3}\sqrt{3}i, \\ \lambda_3 &= 2i, & \lambda_4 &= -2i.\end{aligned}\tag{3.32}$$

Keempat nilai eigen berupa bilangan kompleks $\lambda_i = \alpha \pm \beta i$ di mana pada bagian real sama dengan nol ($\alpha = 0$) maka sistem bandul ganda sederhana memiliki perilaku yang periodik (benda pertama dan kedua berayun di sekitar posisi seimbang) dan tipe kestabilan dari contoh kasus adalah *elliptic center*.

Jika $\lambda_i = \alpha \pm \beta i$ adalah nilai eigen berupa bilangan kompleks maka $v_i = u + i w$ adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen (α dan β adalah bilangan real, u dan v vektor real),

$$(A - \lambda_i I)v_i = 0, \forall i = 1, 2, 3, 4.$$

Dengan bantuan Maple 12 didapatkan vektor eigen

$$v^i = u^{i,j} + w^{i,j}, \quad \forall i, j = 1, 2, 3, 4$$

- Untuk nilai eigen $\lambda_1 = \frac{2}{3}\sqrt{3}i$ vektor eigen yang bersesuaian adalah

$$v^1 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}\sqrt{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix} i. \tag{3.32}$$

- Untuk nilai eigen $\lambda_2 = -\frac{2}{3}\sqrt{3}i$ vektor eigen yang bersesuaian adalah

$$v^2 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4}\sqrt{3} \\ 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix} i. \tag{3.33}$$

- Untuk nilai eigen $\lambda_3 = 2i$ vektor eigen yang bersesuaian adalah

$$\mathbf{v}^3 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} i. \quad (3.34)$$

4. Untuk nilai eigen $\lambda_2 = -2i$ vektor eigen yang bersesuaian adalah

$$\mathbf{v}^4 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} i. \quad (3.35)$$

Vektor eigen (3.32)-(3.35) dapat ditulis

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}\sqrt{3}i & \frac{1}{4}\sqrt{3}i & \frac{1}{4}i & -\frac{1}{4}i \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3}i & \frac{1}{2}\sqrt{3}i & -\frac{1}{2}i & \frac{1}{2}i \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Solusi umum persamaan (3.30) adalah

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = e^{\alpha t} \left(C_1 \left(\begin{bmatrix} u^{1,1} \\ u^{1,2} \\ u^{1,3} \\ u^{1,4} \end{bmatrix} \cos \beta t - \begin{bmatrix} w^{1,1} \\ w^{1,2} \\ w^{1,3} \\ w^{1,4} \end{bmatrix} \sin \beta t \right) + C_2 \left(\begin{bmatrix} u^{2,1} \\ u^{2,2} \\ u^{2,3} \\ u^{2,4} \end{bmatrix} \sin \beta t - \begin{bmatrix} w^{2,1} \\ w^{2,2} \\ w^{2,3} \\ w^{2,4} \end{bmatrix} \cos \beta t \right) + C_3 \left(\begin{bmatrix} u^{3,1} \\ u^{3,2} \\ u^{3,3} \\ u^{3,4} \end{bmatrix} \cos \beta t - \begin{bmatrix} w^{3,1} \\ w^{3,2} \\ w^{3,3} \\ w^{3,4} \end{bmatrix} \sin \beta t \right) + C_4 \left(\begin{bmatrix} u^{4,1} \\ u^{4,2} \\ u^{4,3} \\ u^{4,4} \end{bmatrix} \sin \beta t - \begin{bmatrix} w^{4,1} \\ w^{4,2} \\ w^{4,3} \\ w^{4,4} \end{bmatrix} \cos \beta t \right) \right). \quad (3.36)$$

Subtitusi vektor eigen yang bersesuaian ke persamaan (3.36)

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} C_1 \left(\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cos(2t) - \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \sin(2t) \right) + \\ C_2 \left(\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \sin(-2t) - \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \cos(-2t) \right) + \\ C_3 \left(\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cos\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}t\right) - \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}\sqrt{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix} \sin\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}t\right) \right) + \\ C_4 \left(\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \sin\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}t\right) - \begin{bmatrix} \frac{1}{4}\sqrt{3} \\ 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix} \cos\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}t\right) \right) \end{pmatrix}. \quad (3.37)$$

Selanjutnya menentukan masing-masing solusi umum dari $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ dan $x_4(t)$.

$$\begin{aligned} x_1(t) &= C_1 \left(-\frac{1}{4} \sin(2t) \right) + C_2 \left(\frac{1}{4} \cos(-2t) \right) + C_3 \left(\frac{1}{4} \sqrt{3} \sin\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}t\right) \right) \\ &\quad + C_4 \left(\frac{1}{4} \sqrt{3} \cos\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}t\right) \right) \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} x_2(t) &= C_1 \left(-\frac{1}{2} \cos(2t) \right) + C_2 \left(\frac{1}{2} \sin(-2t) \right) + C_3 \left(\frac{1}{2} \cos\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}t\right) \right) \\ &\quad + C_4 \left(\frac{1}{2} \sin\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}t\right) \right) \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} x_3(t) &= C_1 \left(\frac{1}{2} \sin(2t) \right) + C_2 \left(-\frac{1}{2} \cos(-2t) \right) + C_3 \left(\frac{1}{2} \sqrt{3} \sin\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}t\right) \right) \\ &\quad + C_4 \left(-\frac{1}{2} \sqrt{3} \cos\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}t\right) \right) \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$x_4(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(-2t) + C_3 \cos\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}t\right) + C_4 \sin\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}t\right) \quad (3.41)$$

Jika $x_1(0) = -0,5$ rad, $x_2(0) = -1$ rad/s, $x_3(0) = 1$ rad dan $x_4(0) = 2.0$ rad/s merupakan kondisi awal maka solusi khusus dari persamaan (3.38)-(3.41) dapat ditentukan dengan mencari nilai C_1, C_2, C_3 , dan C_4 .

$$\begin{aligned} x_1(0) &= C_1\left(-\frac{1}{4}\sin(2.0)\right) + C_2\left(\frac{1}{4}\cos(-2.0)\right) + C_3\left(\frac{1}{4}\sqrt{3}\sin\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}.0\right)\right) \\ &\quad + C_4\left(\frac{1}{4}\sqrt{3}\cos\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}.0\right)\right) \\ -0,5 &= \frac{1}{4}C_2 + \frac{1}{4}\sqrt{3}C_4 \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} x_2(0) &= C_1\left(-\frac{1}{2}\cos(2.0)\right) + C_2\left(-\frac{1}{2}\sin(-2.0)\right) + C_3\left(\frac{1}{2}\cos\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}.0\right)\right) \\ &\quad + C_4\left(\frac{1}{2}\sin\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}.0\right)\right) \\ -1 &= -\frac{1}{2}C_1 + \frac{1}{2}C_3 \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} x_3(0) &= C_1\left(\frac{1}{2}\sin(2.0)\right) + C_2\left(-\frac{1}{2}\cos(-2.0)\right) + C_3\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\sin\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}.0\right)\right) \\ &\quad + C_4\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\cos\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}.0\right)\right) \\ 1 &= -\frac{1}{2}C_2 - \frac{1}{2}\sqrt{3}C_4 \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} x_4(0) &= C_1(\cos(2.0)) + C_2(\sin(-2.0)) + C_3\left(\cos\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}.0\right)\right) \\ &\quad + C_4\left(\sin\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}.0\right)\right) \\ 2 &= C_1 + C_3 \end{aligned} \quad (3.45)$$

Misal $C_2 = 1$ dan substitusikan ke persamaan (3.42).

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{4}C_2 + \frac{1}{4}\sqrt{3}C_4 &= -0,5 \\
 \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4}\sqrt{3}C_4 &= -0,5 \\
 \frac{1}{4}\sqrt{3}C_4 &= -0,5 - \frac{1}{4} \\
 \frac{1}{4}\sqrt{3}C_4 &= -\frac{3}{4} \\
 C_4 &= -\frac{3}{\sqrt{3}}
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

Misal $C_1 = 1$ dan substitusi ke persamaan (3.45).

$$\begin{aligned}
 C_1 + C_3 &= 2 \\
 1 + C_3 &= 2 \\
 C_3 &= 1
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

Didapatkan $C_1 = 1$, $C_2 = 1$, $C_3 = 1$, dan $C_4 = -\frac{3}{\sqrt{3}}$. Kemudian substitusi ke persamaan (3.38)-(3.41) maka solusi khusus dari $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ dan $x_4(t)$.

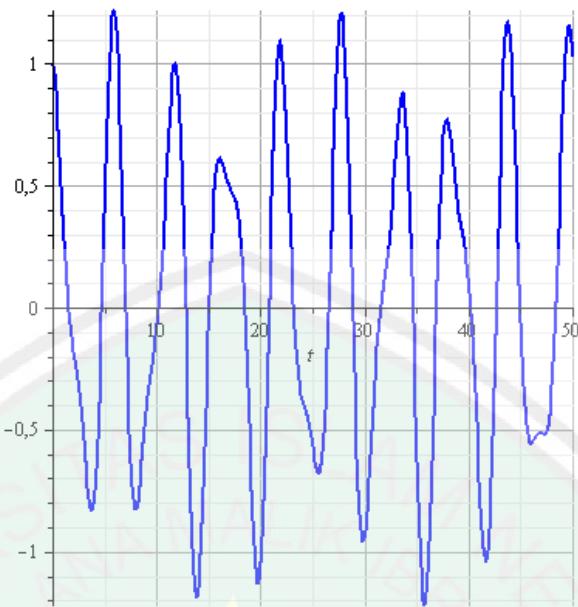
$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= -\frac{1}{4}\sin(2t) + \frac{1}{4}\cos(-2t) + \frac{1}{4}\sqrt{3}\sin\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}t\right) \\
 &\quad - \frac{3}{4}\cos\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}t\right)
 \end{aligned} \tag{3.48}$$

$$\begin{aligned}
 x_2(t) &= -\frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{2}\sin(-2t) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}t\right) \\
 &\quad - \frac{3}{2\sqrt{3}}\sin\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}t\right)
 \end{aligned} \tag{3.49}$$

$$x_3(t) = \frac{1}{2}\sin(2t) - \frac{1}{2}\cos(-2t) + \frac{1}{2}\sqrt{3}\sin\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}t\right) + \frac{3}{2}\cos\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}t\right) \tag{3.50}$$

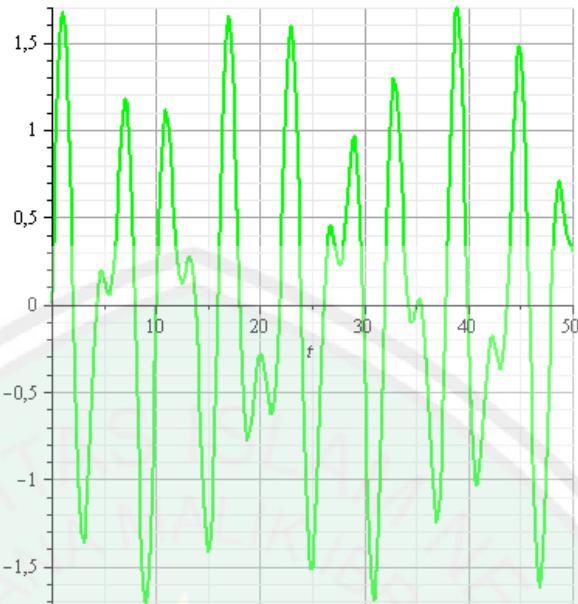
$$x_4(t) = \cos(2t) + \sin(-2t) + \cos\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}t\right) - \frac{3}{\sqrt{3}}\sin\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}t\right) \tag{3.51}$$

Berikut adalah grafik perilaku dari sistem bandul ganda dengan $t = 0 \dots 50$ detik.

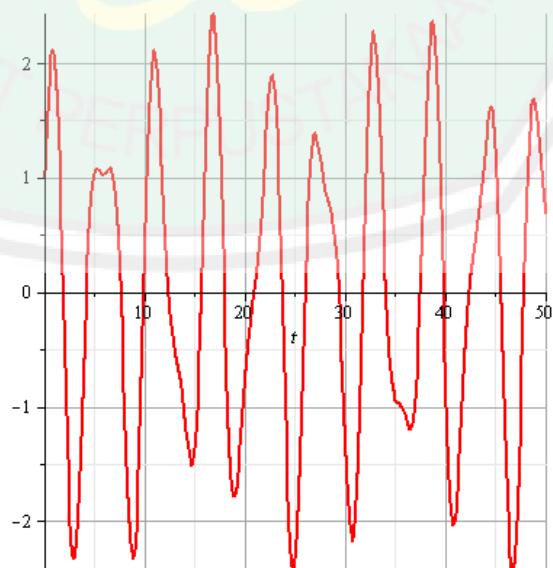


Gambar 3.1 Grafik Solusi $x_1(t)$ terhadap t

Gambar 3.1 merupakan grafik perubahan sudut perpindahan benda pertama terhadap waktu dengan rentang waktu 50 detik. Benda pertama mulai berayun pada posisi sudut $-0,5$ rad (benda pertama berada di sebelah kiri posisi seimbang) kemudian bergerak mendekati posisi seimbang $(0,0)$ akan tetapi setelah benda pertama berada di posisi seimbang perlahan benda pertama menjahui posisi seimbang, hal tersebut terjadi secara periodik. Pada gambar tersebut menunjukkan bahwa pergerakan benda pertama berubah secara periodik baik besar maupun arahnya di sekitar titik keseimbangan dengan periode 4,9 detik, simpangan maksimum yaitu 1,21 rad pada saat benda pertama berayun selama 5,49 detik dan selama rentang waktu 50 detik benda pertama tetap berosilasi di sekitar posisi seimbang.

Gambar 3.2 Grafik Solusi $x_2(t)$ terhadap t

Gambar 3.2 merupakan grafik laju kecepatan benda pertama terhadap waktu selama rentang waktu 50 detik. Pada gambar tersebut menunjukkan bahwa kecepatan awal benda pertama sebesar 1 rad/s^2 (benda pertama berada di sebelah kanan posisi seimbang) dan kecepatannya berubah secara *quasiperiodic* baik besar maupun arahnya. Benda kedua memiliki kecepatan maksimal saat 8,9 detik.

Gambar 3.3 Grafik Solusi $x_3(t)$ terhadap t

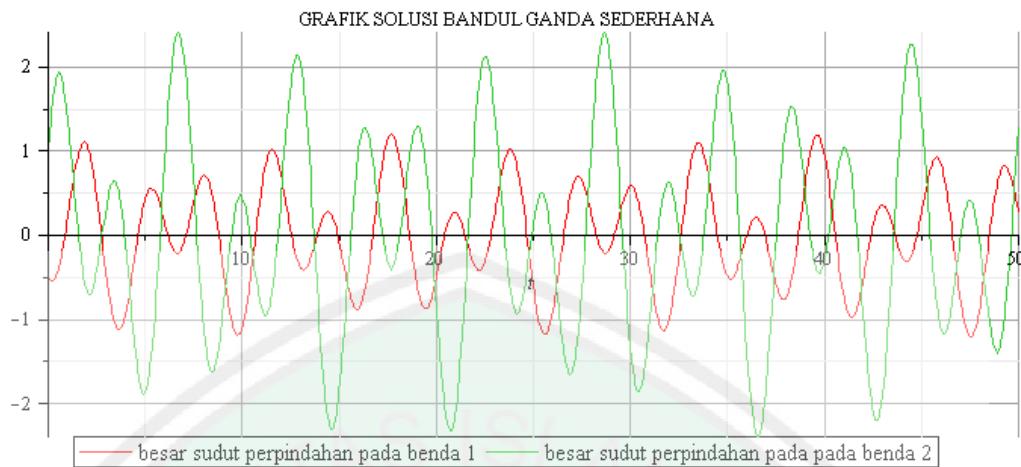
Gambar 3.3 merupakan grafik perubahan sudut perpindahan benda kedua terhadap waktu selama kurung waktu 50 detik. Pada gambar tersebut menunjukkan bahwa pergerakan benda kedua berubah secara periodik baik besar maupun arahnya di sekitar titik keseimbangan dengan periode 4,91 s dan simpangan maksimum yaitu 16,76 rad saat $t = 2,43$ detik.



Gambar 3.4 Grafik Solusi $x_4(t)$ terhadap t

Gambar 3.4 merupakan grafik laju kecepatan bandul kedua terhadap waktu dengan kurun waktu 50 detik. Pada gambar tersebut menunjukkan bahwa kecepatan awal sebear -0,5 rad, kecepatan benda kedua terhadap waktu berubah secara *quasiperiodic* baik besar maupun arahnya. Pada saat $t = 19,94$ detik benda kedua memiliki laju kecepatan maksimal.

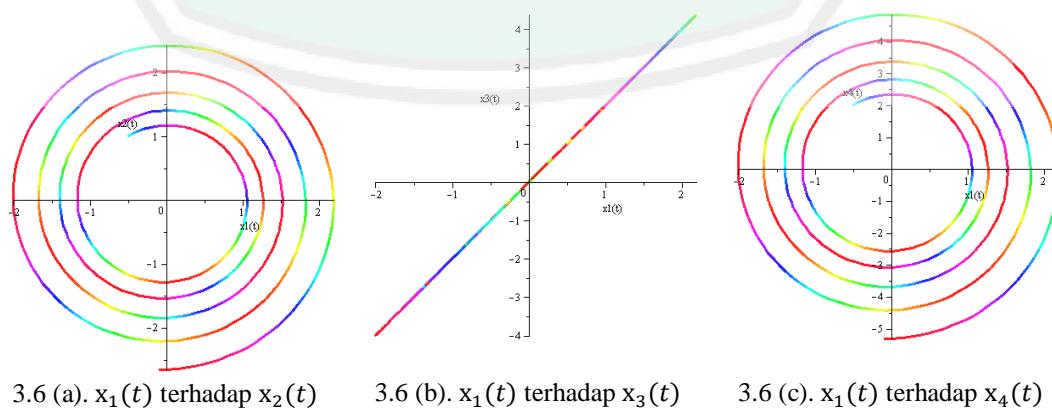
Berikutnya adalah grafik solusi dari sistem (3.3) yaitu grafik perubahan besar sudut benda pertama dan kedua dalam kurung waktu 50 detik dengan $m_1 = 937,5$ slug, $m_2 = 312,5$ slug, $l_1 = 16$ kaki, $l_2 = 16$ kaki, dan $g = 32$ kaki/ s^2 dengan kondisi awal yang berbeda $\theta_1(0) = -0,5$ rad, $\theta_2(0) = 1$ rad.



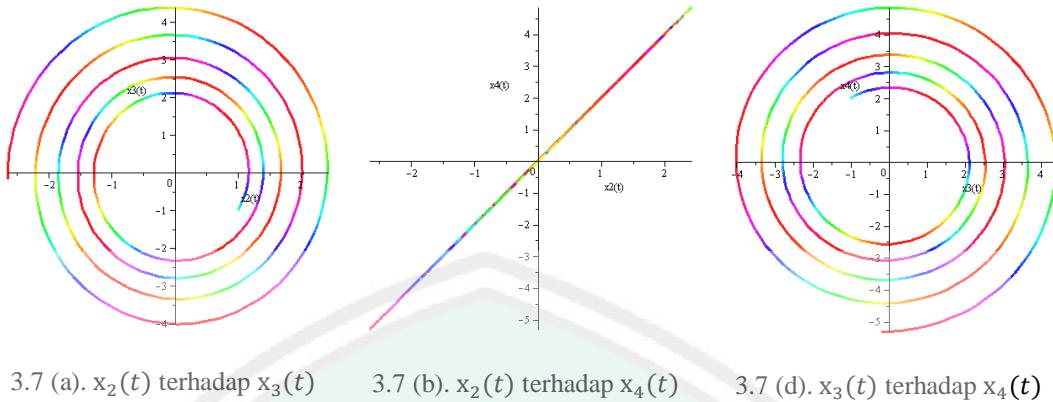
Gambar 3.5 Grafik Perubahan Sudut Perpindahan Benda pada Sistem Bandul Ganda Sederhana

Grafik pada Gambar 3.5 (kurva merah) menunjukkan perubahan besar sudut perpindahan benda pertama sistem bandul ganda sederhana terhadap waktu $\theta_1(t)$. Kondisi awal dari benda pertama adalah $\theta_2 = -0,5$ rad (benda pertama berada di sebelah kiri) dari posisi seimbang $(\theta_1, \theta_2) = (0,0)$, kemudian benda pertama mulai berayun menuju posisi seimbang dan sampai pada posisi seimbang saat $t = 0,86$ detik pada saat itulah besar energi potensial pada benda pertama sama dengan nol. Saat setelah benda pertama berada di posisi seimbang, benda pertama mulai menjauhi posisi seimbang dan pada saat $t = 0,86$ detik dengan besar sudut perpindahan $\theta_1 = 1,1$ rad benda pertama kembali mendekati posisi seimbang, pada saat itulah besar energi potensial benda pertama mencapai nilai maksimum kemudian sampai pada posisi seimbang saat $t = 2,72$ detik. Hal tersebut terjadi berulang-ulang dengan lintasan yang sama, besar periode T (waktu diperlukannya benda pertama berayun sebanyak satu lintasan penuh) benda pertama adalah $t = 4,44$ detik. Simpangan maksimum benda pertama dalam kurung waktu 50 detik adalah 1,17 rad.

Grafik pada Gambar 3.5 (kurva hijau) menunjukkan perubahan besar sudut perpindahan benda kedua sistem bandul ganda sederhana terhadap waktu $\theta_2(t)$. Kondisi awal dari benda kedua adalah $\theta_2 = 1$ rad (benda kedua berada di sebelah kanan) dari posisi seimbang $(\theta_1, \theta_2) = (0,0)$, kemudian benda kedua mulai berayun menuju posisi seimbang dan sampai pada posisi seimbang saat $t = 0,48$ detik pada saat itulah besar energi potensial pada benda pertama sama dengan nol. Saat setelah benda pertama berada di posisi seimbang, benda pertama mulai menjauhi posisi seimbang dan pada saat $t = 0,54$ detik dengan besar sudut perpindahan $\theta_2 = 1,89$ rad benda kedua kembali mendekati posisi seimbang dan pada saat itulah besar energi potensial dari benda kedua mencapai nilai maksimum, kemudian sampai pada posisi seimbang saat $t = 2,72$ detik. Hal tersebut terjadi berulang-ulang dengan lintasan yang sama, besar periode T (waktu diperlukannya benda pertama berayun sebanyak satu lintasan penuh) benda pertama adalah $t = 4,44$ detik. Simpangan maksimum benda pertama dalam kurung waktu 50 detik adalah 2,37 rad. Oleh karena itu pada kurung waktu 50 detik benda kedua memiliki simpangan maksimum yang lebih besar dari pada simpangan maksimum benda pertama.



Gambar 3.6 Potret Fase Sistem Bandul Ganda Sederhana

3.7 (a). $x_2(t)$ terhadap $x_3(t)$ 3.7 (b). $x_2(t)$ terhadap $x_4(t)$ 3.7 (d). $x_3(t)$ terhadap $x_4(t)$

Gambar 3.7 Lanjutan

Gambar 3.6 merupakan potret fase sistem bandul ganda sederhana (3.28).

Pada Gambar 3.6 terdapat 3 potret fase dengan rentang waktu 25 detik, Gambar 3.6 (a) merupakan potret fase dari besar sudut perpindahan benda pertama dengan laju kecepatan benda pertama. Pada Gambar tersebut ditunjukkan bahwa trayektori berupa orbit periodik dengan pusat (0,0). Titik tetap (0,0) memiliki kestabilan tak stabil (*unstable*) karena pada saat $t \geq 0$ trayektori bergerak menjahui titik pusat (0,0). Sama halnya dengan Gambar 3.6 (c), Gambar 3.7 (a) dan Gambar 3.7 (c) memiliki kestabilan tak stabil karena trayektori menjahui titik tetap manakala t menuju tak hingga positif.

Gambar 3.6 (b) dan Gambar 3.7 (b) menunjukkan trayektori berupa garis linier yang melewati titik (0,0) dengan kestabilan stabil terisolasi. Gambar 3.6 (b) merupakan potret fase yang menunjukkan hubungan antara sudut perpindahan benda pertama dengan sudut perpindahan benda kedua ($x_1(t)$ terhadap $x_3(t)$), semakin besar sudut perpindahan benda pertama maka semakin besar pula sudut perpindahan benda kedua. Gambar 3.7 (b) merupakan potret fase yang menunjukkan hubungan antara laju kecepatan benda pertama dengan laju

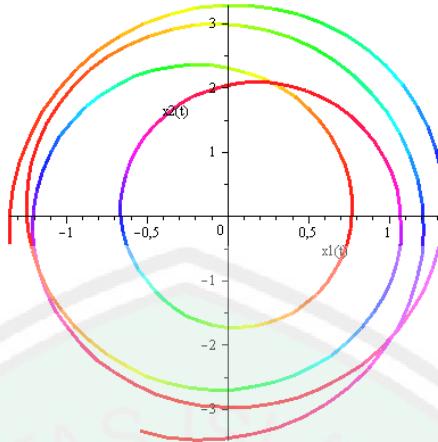
kecepatan benda kedua ($x_1(t)$ terhadap $x_3(t)$), semakin tinggi laju kecepatan benda pertama maka semakin tinggi pula laju kecepatan benda kedua.

3.2 Deskripsi Pengaruh Parameter terhadap Kestabilan Perilaku Sistem Bandul Ganda Sederhana

Simulasi pada subbab ini untuk mendeskripsikan pengaruh parameter terhadap kestabilan perilaku sistem bandul ganda sederhana. Potret fase yang digunakan adalah potret fase $x_1(t)$ terhadap $x_2(t)$ (sudut perpindahan benda pertama dengan laju kecapatan benda pertama). Kestabilan sistem benda ganda sederhana dapat dilihat dari perilaku trayektori dan kestabilan titik tetap yang akan dibahas adalah kestabilan berdasarkan konsep kestabilan *Lyapunov*. Berikut ini adalah simulasi dari potret fase sistem benda ganda sederhana dengan $m_1 > m_2$, $m_1 = m_2$ dan $m_1 < m_2$ dan $l_1, l_2 = 16$ kaki, serta kondisi awal $x_1(0) = -0,5$ rad, $x_2(0) = -1,0$ rad/s².

3.2.1 Parameter Massa Benda Pertama Lebih Besar daripada Massa Benda Kedua ($m_1 > m_2$)

Simulasi pertama dengan massa benda pertama sebesar 412.5 slug dan massa benda kedua sama dengan 312.5 slug. Bandul pertama mulai begerak saat sudut perpidahan sebesar -0,5 rad (benda pertama berada di sebelah kiri posisi seimbang dengan besar -0,5 rad) dan laju kecepatannya 1 rad/s² (benda pertama berada di sebelah kanan posisi seimbang dengan kecepatan 1 rad/s²).

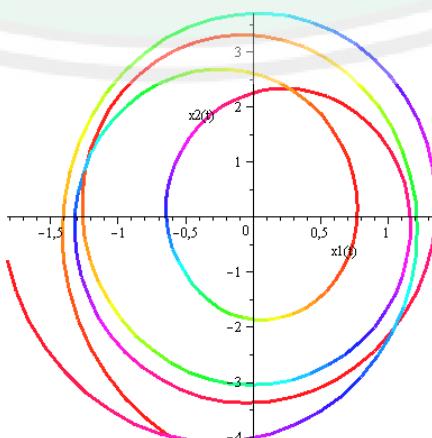


Gambar 3.8 Trayektori dengan $m_1 > m_2$

Gambar 3.8 memperlihatkan bahwa trayektori bergerak searah jarum jam untuk mendekati titik tetap sampai akhirnya mulai menjahui titik tetap saat $t > 0$ detik artinya kestabilan dari sistem adalah tidak stabil. Periode dari sistem bandul ganda sederhana berangsur-angsur meningkat sampai $t \rightarrow \infty$.

3.2.2 Parameter Massa Benda Pertama Sama dengan Massa Benda Kedua ($m_1 = m_2$)

Simulasi kedua dengan massa benda pertama sebesar 312,5 slug dan massa benda kedua sama dengan 312,5 slug. Benda pertama mulai begerak saat sudut perpindahan sebesar $-0,5$ rad dan laju kecepatannya 1 rad/s 2 .

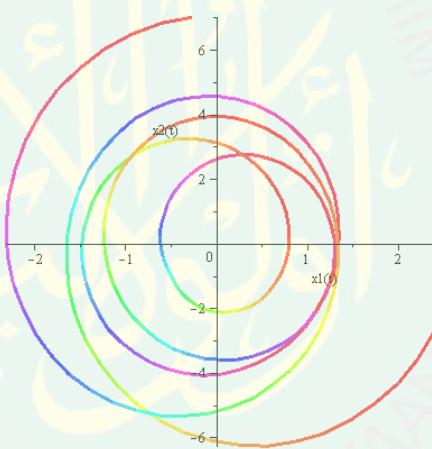


Gambar 3.9 Trayektori dengan $m_1 = m_2$

Gambar 3.9 memperlihatkan bahwa trayektori bergerak melawan arah jarum jam untuk mendekati titik tetap sampai akhirnya mulai menjahui titik tetap saat $t > 0$ detik artinya kestabilan dari sistem adalah tidak stabil. Periode dari sistem bandul ganda sederhana berangsur-angsur membesar sampai $t \rightarrow \infty$.

3.2.3 Parameter Massa Benda Pertama Lebih Kecil daripada Massa Benda Kedua $m_1 < m_2$

Simulasi ketiga dengan massa benda pertama sebesar 212,5 slug dan massa benda kedua sama dengan 312,5 slug. Bandul pertama mulai begerak saat sudut perpidahan sebesar $-0,5$ rad dan laju kecepatannya 1 rad/s².



Gambar 3.10 Trayektori dengan $m_1 < m_2$

Gambar 3.10 memperlihatkan bahwa trayektori bergerak melawan arah jarum jam untuk mendekati titik tetap sampai akhirnya mulai menjahui titik tetap saat $t > 0$ detik artinya kestabilan dari sistem adalah tidak stabil. Periode dari sistem bandul ganda sederhana berangsur-angsur membesar sampai $t \rightarrow \infty$. Oleh karena itu, perubahan parameter tidak mempengaruhi kestabilan sistem melainkan hanya arah trayektorinya saja.

3.3 Perintah Memilih Teman yang Baik dan Larangan Memilih Teman yang Buruk

Sistem dinamik merupakan sistem yang berubah seiring dengan berubahnya waktu. Parameter pada suatu sistem dinamik dapat berpengaruh maupun tidak terhadap perilaku dan kestabilan sistem tersebut. Trayektori suatu sistem dapat menjahui atau mendekati titik tetap. Hal tersebut seperti perilaku manusia yang dapat berubah oleh beberapa faktor seperti penagaru seorang teman. Teman yang bertakwa akan menyerukan kepada perintah Allah Swt. dan mengingatkan kepada larangan-Nya, dalam al-Quran surat Ali Imran/3:28 Allah Swt. berfirman

لَا يَتَّخِذِ الْمُؤْمِنُونَ أَكْفَارِينَ أَوْلَيَاءَ مِنْ دُونِ الْمُؤْمِنِينَ وَمَنْ يَفْعُلْ ذَلِكَ فَلَيْسَ مِنَ اللَّهِ فِي شَيْءٍ
 إِلَّا أَنْ تَتَّقُوا مِنْهُمْ تُقْنَةً وَيُحَذِّرُكُمُ اللَّهُ نَفْسَهُ وَإِلَى اللَّهِ الْمَصِيرُ

“Janganlah orang-orang mukmin mengambil orang-orang kafir menjadi wali dengan meninggalkan orang-orang mukmin. barang siapa berbuat demikian, niscaya lepaslah ia dari pertolongan Allah, kecuali karena (siasat) memelihara diri dari sesuatu yang ditakuti dari mereka. dan Allah memperingatkan kamu terhadap diri (siksa)-Nya. dan hanya kepada Allah kembali (mu) (QS. Ali Imran/3: 28) ”.

Al-Imam Jalaluddin Muhammad dan al-Imam Jalaluddin Abdirahman (2011:227-228) dalam Tafsir Jalalain berpendapat bahwa janganlah seorang mukmin memberikan kesetiaan kepada orang-orang kafir dengan mengesampingkan orang-orang mukmin. Barangsiapa yang melakukan hal tersebut (bersikap setia kepada orang kafir) niscaya Allah Swt. tidak akan memberinya pertolongan, kecuali kamu menghawatirkan sesuatu dari mereka (kafirin) maka diperbolehkan menunjukkan kesetiaan kepada mereka di bibir saja bukan di hati. Hal ini berlaku sebelum Islam mencapai kejayaan dan khusus bagi orang yang berada di daerah yang Islamnya tidak kuat. Allah Swt. akan murka

bila kepadamu jika menjadikan orang-orang kafir sebagai teman yang setia, tempat berpulang kemudian Allah Swt. akan memberikan balasan yang setimpal.

Islam merupakan agama sempurna yang mengatur penganutnya dalam berbagai aspek kehidupan seperti contohnya bagaimana tata cara manusia menjalankan ibadah, bagaimana manusia bermuamalah, dan bagaimana manusia berakhlaq. Allah mengatur semua hal tersebut agar manusia tetap pada koridor yang benar.

Salah satunya dari contoh tersebut adalah bagaimana manusia bergaul dengan sesama. Hal ini penting karena pergaulan dapat mempengaruhi hidup seseorang. Apabila baik lingkungan seorang tersebut maka baik pula perangainya. Begitu pula sebaliknya, apabila buruk lingkungan seseorang tersebut maka buruk pula perangainya. Jika seseorang tidak menjadi baik dengan lingkungan yang baik setidaknya dia memperoleh kebaikan yang dilakukan oleh temannya.

Rasulullah Saw. bersabda, “Seseorang berdasarkan pada bentuk teman dekatnya, maka dari itu hendaknya seseorang di antara kalian terlebih dahulu melihat siapa yang akan dijadikan teman”. Oleh karenanya Rasulullah memerintahkan untuk senantiasa berteman dengan orang yang baik, ukurannya adalah seorang mukmin. Seorang mukmin adalah orang yang senantiasa bertaqwah kepada Allah Swt. dan menjahui larangan-Nya. Rasulullah bersabda, “Janganlah engkau berteman kecuali dengan orang mukmin, dan janganlah memakan makananmu kecuali hanya orang yang taqwa”. Teman yang mukmin senantiasa mengajak kepada kebaikan, memotivasi untuk selalu berbuat kebaikan, mengingatkan untuk berbakti kepada orang tua, menghormati yang lebih tua,

menyayangi yang lebih muda, bersabar dengan cobaan dan ujian, selalu menjaga perkataan dan perbuatan dan berbagai kebaikan lainnya.

Di sisi lain berteman dengan orang yang buruk akan mendapatkan dua kemungkinan yaitu akan mengikuti sifat temannya menjadi seorang yang buruk atau mendapatkan keburukan dari temannya. Jangan sampai menyesal di akhirat karena berteman dengan orang yang buruk. Allah Swt. berfirman dalam al-Quran surat al-Furqaan/25:27-29, yaitu:

وَيَوْمَ يَعْصُمُ الظَّالِمُ عَلَىٰ يَدَيهِ يَقُولُ يَا لَيْتَنِي أَخْحَذْتُ مَعَ الرَّسُولِ سَيِّلًا ﴿٢٩﴾ يَا وَيْلَكَ لَيْتَنِي لَمْ أَخْحَذْ فُلَانًا حَلِيلًا ﴿٢٨﴾ لَقَدْ أَضَلَّنِي عَنِ الدِّرْكِ بَعْدَ إِذْ جَاءَنِي وَكَانَ الشَّيْطَنُ لِلنِّسَنِ حَذُولًا ﴿٢٧﴾

"Dan (ingatlah) hari (ketika itu) orang yang zalm menggigit dua tangannya, seraya berkata: "Aduhai kiranya (dulu) aku mengambil jalan bersama-sama Rasul". Kecelakaan besarlah bagiku; kiranya aku (dulu) tidak menjadikan si fulan itu teman akrab(ku). Sesungguhnya Dia telah menyesatkan aku dari al-Quran ketika Al Quran itu telah datang kepadaku. dan adalah syaitan itu tidak mau menolong manusia"(QS. al-Furqaan/25:27-29).

Dalam al-Quran surat al-Furqaan/25:27-29 disebutkan menggigit tangan maksudnya adalah menyesali perbutannya sedangkan si fulan adalah setan atau orang yang menyesatkannya. Dalam ayat tersebut Allah Swt. menggambarkan seseorang yang menyesali perbuatannya di dunia berteman dengan setan atau seseorang yang menjerumuskan kepadanya kemaksiatan karena sesungguhnya dia (setan) telah menyesatkan dari al-Quran dan setan tidak akan pernah menolong di akhirat kelak.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan di atas dapat diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Sistem bandul ganda sederhana tersebut memiliki titik tetap saat $F = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0, 0)$ artinya sistem memiliki posisi seimbang ketika sudut perpindahan benda pertama dan kedua suatu waktu serta laju kecepatan benda pertama dan kedua terhadap waktu sama dengan nol. Nilai eigen dari sistem bandul ganda dengan parameter tertentu adalah imajiner murni berarti kestabilan dari sistem bandul ganda sederhana yaitu tak stabil dan tipe kestabilan sistem bandul ganda sederhana adalah *elliptic center*. Grafik perpindahan bandul pertama dan kedua terhadap waktu adalah periodik dan grafik laju kecepatan bandul pertama dan kedua adalah *quasiperiodic*. Hal tersebut menunjukkan bahwa sistem bandul ganda bergerak bolak-balik melalui lintasan yang sama. Hubungan antara sudut perpindahan pertama dengan benda kedua $(\theta_1(t), \theta_2(t))$ adalah berbanding lurus, begitu juga dengan hubungan laju kecepatan benda pertama dan kedua $(\ddot{\theta}_1(t), \ddot{\theta}_2(t))$ adalah berbanding lurus. Perubahan parameter m_1 pada sistem bandul ganda sederhana tidak mempengaruhi kestabilan dari sistem.
2. Perubahan besar parameter benda pertama tidak mempengaruhi kestabilan sistem.

3. Allah Swt. memerintahkan hamba-Nya untuk memilih wali (teman atau penolong) yang baik agar memberikan efek yang baik pula pada diri hamba-Nya. Sebaliknya Allah Swt. milarang hamba-Nya untuk berteman dengan seorang wali yang buruk yang akan memberikan efek yang buruk pula pada pribadi seseorang.

4.2 Saran

Pada penelitian ini difokuskan pada masalah analisis perilaku sistem bandul ganda sederhana. Pada penelitian selanjutkan penulis menyarankan untuk analisis bifurkasi pada sistem bandul ganda sederhana karena telah diketahui bahwa sistem bandul ganda sederhana memiliki nilai eigen murni yang merupakan syarat cukup untuk analisis bifurkasi.

DAFTAR PUSTAKA

- Amanto & Zakaria, L. 2008. *Solusi Eksak dan Kestabilan Sistem Bandul Ganda*. Jurnal Sains MIPA, (Online) 14 (1): 23-32, (<http://Jurnal.fmipa.unila.ac.id>) diakses 10 Februari 2014.
- Anton, H. 1997. *Elementary Linier Algebra, Jilid I*. Terjemahan P. Silaban & I.N. Susila. Bandung: Erlangga.
- Ripno, J.I. 2012. *Pemodelan Matematika Aplikasi dan Penerapannya*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Muhammad, J. & Jalaluddin, A. _____. *Tafsirul Jalalain*. Terjemahan N. Junaidi. Surabaya: Pustaka eLBA.
- Resnick, R. & Halliday, D. 1978. *Physics, 3'th Edition*. Terjemahan P. Silaban & E. Sucipto. Jakarta: Erlangga.
- Robinson, R.C. 2012. *An Introduction To Dynamical Systems Continuous And Discrete*. Northwestern: American Mathematical Society.
- Scheinerman, E.R. 1995. *Invitation to Dynamical System*. New York. Dover Publications.
- Supriatna, A.K. 2002. *Matematika Terapan dan Contoh Penerapan Matematika dalam Disiplin Ilmu Lain*. Jurnal Matematika Integratif, (Online), 1 (1): 1-7, (<http://Pustaka.unpad.ac.id>) diakses tanggal 6 Mei 2014.

LAMPIRAN-LAMPIRAN

Lampiran 1

Solusi analitik dan grafik solusi sistem bandul ganda sederhana orde dua.

> restart :

$$\begin{aligned} pers1 &:= 32 \cdot \text{diff}(\theta_1(t), t, t) + 8 \cdot \text{diff}(\theta_2(t), t, t) = -64 \cdot \theta_1(t); \\ &\quad 32 \left(\frac{d^2}{dt^2} \theta_1(t) \right) + 8 \left(\frac{d^2}{dt^2} \theta_2(t) \right) = -64 \theta_1(t) \\ pers2 &:= 8 \cdot \text{diff}(\theta_1(t), t, t) + 8 \cdot \text{diff}(\theta_2(t), t, t) = -16 \cdot \theta_2(t); \\ &\quad 8 \left(\frac{d^2}{dt^2} \theta_1(t) \right) + 8 \left(\frac{d^2}{dt^2} \theta_2(t) \right) = -16 \theta_2(t) \\ dsolve &\left([pers1, pers2], [\theta_1(t), \theta_2(t)] \right); \\ &\left\{ \theta_1(t) = -\frac{1}{2} - C1 \sin(2t) - \frac{1}{2} - C2 \cos(2t) \right. \\ &\quad + \frac{1}{2} - C3 \sin\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}t\right) + \frac{1}{2} - C4 \cos\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}t\right), \theta_2(t) \\ &= -C1 \sin(2t) + -C2 \cos(2t) + -C3 \sin\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}t\right) \\ &\quad \left. + -C4 \cos\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}t\right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dsolve &\left([pers1, pers2, \theta_1(0) = -0.5, \theta_2(0) = 1], [\theta_1(t), \theta_2(t)] \right); \\ &\left\{ \theta_1(t) = -\frac{1}{2} - C1 \sin(2t) - \frac{1}{2} \cos(2t) + \frac{1}{2} - C3 \sin\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}t\right), \right. \\ &\quad \left. \theta_2(t) = -C1 \sin(2t) + \cos(2t) + -C3 \sin\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}t\right) \right\} \end{aligned}$$

restart;

with(plots) :

> plot $\left(\left[-\frac{1}{2} \sin(2t) - \frac{1}{2} \cos(2t) + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}t\right), \sin(2t) \right. \right.$
 $\left. \left. + \cos(2t) + \sin\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}t\right) \right], t = 0 .. 4, thickness = 1, legend$
 $= ["sudut perpindahan pada kawat/tali 1,"$
 $"sudut perpindahan pada kawat/tali 2"], title$
 $= "GRAFIK SOLUSI BANDUL GANDA SEDERHANA");$

Lampiran 2

Potret fase sistem bandul ganda sederhana tereduksi.

> $m1 := 937.5 : m2 := 312.5 : l1 := 16 : l2 := 16 : g := 32 :$
 $a := (m1 + m2) \cdot l1 \cdot 32; b := (m1 + m2) \cdot l1^2; j := m2 \cdot l1 \cdot l2; h$
 $:= m2 \cdot l2 \cdot g; k := m2 \cdot l2^2;$

$$6.40000010^5$$

$$3.20000010^5$$

$$80000.0$$

$$1.60000010^5$$

$$80000.0$$

$$x21 := -\frac{a \cdot k}{-j^2 + b \cdot k} : x22 := -\frac{j \cdot h}{-j^2 + b \cdot k} : x41 := -\frac{a \cdot j}{j^2 - b \cdot k} : x42$$

$$:= \frac{b \cdot h}{j^2 - b \cdot k} :$$

> $\text{phaseportrait}\left(\left[\left(\text{D}(x1)\right)(t) = x2(t), \left(\text{D}(x2)\right)(t) = (x21) * x1(t) + (x22) * x3(t), \left(\text{D}(x3)\right)(t) = x4(t), \left(\text{D}(x4)\right)(t) = (x41) * x1(t) + (x42) * x3(t)\right], [x1(t), x2(t), x3(t), x4(t)], t = -5 .. 0, [[x1(0) = -0.5, x2(0) = -1.0, x3(0) = 1, x4(0) = 2]], \text{stepsize} = 0.5e-1, \text{scene} = [x1(t), x2(t)], \text{linecolour} = \sin((1/2) * t * \pi), \text{method} = \text{classical}[\text{foreuler}]\right);$