

**PENYELESAIAN NUMERIK MODEL IMUNOLOGI SELULER PADA
TUBERKULOSIS DENGAN METODE RUNGE KUTTA FEHLBERG
(RKF 45) DAN METODE ADAMS BASHFORTH MOULTON**

SKRIPSI

**OLEH
MUHLISH
NIM. 10610066**



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2015**

**PENYELESAIAN NUMERIK MODEL IMUNOLOGI SELULER PADA
TUBERKULOSIS DENGAN METODE RUNGE KUTTA FEHLBERG
(RKF 45) DAN METODE ADAMS BASHFORTH MOULTON**

SKRIPSI

**Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)**

**Oleh
Muhlish
NIM. 10610066**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2015**

**PENYELESAIAN NUMERIK MODEL IMUNOLOGI SELULER PADA
TUBERKULOSIS DENGAN METODE RUNGE KUTTA FEHLBERG
(RKF 45) DAN METODE ADAMS BASHFORTH MOULTON**

SKRIPSI

**Oleh
Muhlish
NIM. 10610066**

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 09 April 2015

Pembimbing I,

Pembimbing II,

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

Dr. H. Ahmad Barizi, M.A
NIP. 19731212 199803 1 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

**PENYELESAIAN NUMERIK MODEL IMUNOLOGI SELULER PADA
TUBERKULOSIS DENGAN METODE RUNGE KUTTA FEHLBERG
(RKF 45) DAN METODE ADAMS BASHFORTH MOULTON**

SKRIPSI

**Oleh
Muhlish
NIM. 10610066**

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal 29 April 2015

Penguji Utama : Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd
Ketua Penguji : Mohammad Jamhuri, M.Si
Sekretaris Penguji : Dr. Usman Pagalay, M.Si
Anggota Penguji : Dr. H. Ahmad Barizi, M.A

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Muhlish
NIM : 10610066
Jurusan : Matematika
Fakultas : Sains dan Teknologi
Judul Skripsi : Penyelesaian Numerik Model Imunologi Seluler pada Tuberkulosis dengan Metode Runge Kutta Fehlberg (RKF 45) dan Metode Adams Bashforth Moulton.

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 25 Maret 2015
Yang membuat pernyataan

Muhlish
NIM. 10610066

MOTO

خَيْرُ النَّاسِ أَنْفَعُهُمْ لِلنَّاسِ

"KHOIRUNNAS 'ANFA'UHUM LINNAS"

“... *Sebaik-baik manusia ialah mereka yang paling bermanfaat bagi sesama manusia*” (H.R. Thabrani).

“Tirulah sifat air jernih yang keluar dari sumber mata air, ia selalu berguna bagi seluruh makhluk hidup dimanapun dan kapanpun, bersikap rendah hati dan tidak sombong atas kekayaan dan kebajikannya” (Penulis).



PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Ayahanda Basri dan Ibunda Suriyani (*almarhumah*) yang telah bersusah payah dalam membesarkan, mendidik, dan memberikan segenap cinta kasihnya kepada penulis. Semoga Allah Swt. memberikan kebahagiaan di dunia dan akhirat.



KATA PENGANTAR



Alhamdulillahirabbil 'Alamin

Syukur alhamdulillah ke hadirat Allah Swt. yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi dengan judul “Penyelesaian Numerik Model Imunologi Seluler pada Tuberkulosis dengan Metode Runge Kutta Fehlberg (RKF 45) dan Metode Adams Bashforth Moulton”.

Shalawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad Saw. yang telah menunjukkan manusia dari jalan yang gelap menuju jalan yang terang benderang yaitu agama Islam.

Dalam penulisan skripsi ini, penulis menyadari bahwa tidak akan mendapatkan hasil yang baik tanpa adanya bimbingan, bantuan, dorongan, saran, serta do'a dari berbagai pihak, maka dalam kesempatan ini, penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Raharjo, M.Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Hj. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku dosen pembimbing matematika yang selalu sabar memberikan bimbingannya kepada penulis.

5. Dr. H. Ahmad Barizi, M.A, selaku dosen pembimbing keagamaan yang selalu sabar memberikan bimbingannya kepada penulis.
6. Ayah dan Ibu tercinta dan seluruh keluarga besar penulis, yang senantiasa memberikan semangat dan motivasi baik moril maupun spirituil kepada penulis agar mencapai kesuksesan.
7. Teman-teman terbaik penulis Naghfir, Nur Hasanah, Khairul Umam, Andri Eka Prasetya, Muhammad Sukron, Muhammad Yunus, Muhammad Hasan, Lukman Hakim, Wildan Hakim, Rofi'atun Jamila, serta teman-teman mahasiswa Jurusan Matematika angkatan 2010 yang selalu memberikan dorongan dan semangat kepada penulis dalam mengerjakan skripsi.
8. Bapak Abdul Aziz, M.Pd, Ibu Lika Rahmawati, S.S dan seluruh Keluarga Besar Mahasiswa Bidik Misi (KBMB) Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, Keluarga Besar Lembaga Kajian Penelitian dan Pengembangan Mahasiswa (LKP2M), Keluarga Besar Padepokan Pagar Nusa Bapak Nu Wahyu Hidayat, Ibu Endang Sulastri, Abdur Rohim dan yang lainnya, serta Bapak dan Ibu Guru MTs Mambaul Ulum Banjarejo.
9. Semua pihak yang telah membantu namun tidak dapat disebutkan satu persatu.

Semoga Allah Swt. membalas kebaikan mereka semua. Penulis berharap, semoga skripsi ini bermanfaat bagi semua pihak pada umumnya dan bagi penulis sendiri pada khususnya.

Malang, April 2015

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PENGAJUAN	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	
HALAMAN MOTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	x
DAFTAR TABEL	xii
DAFTAR GAMBAR	xiii
DAFTAR LAMPIRAN	xiv
ABSTRAK	xv
ABSTRACT	xvi
ملخص	xvii
 BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	5
1.3 Tujuan Penelitian	5
1.4 Manfaat Penelitian	6
1.5 Batasan Masalah	6
1.6 Metode Penelitian	7
1.7 Sistematika Penulisan	8
 BAB II KAJIAN PUSTAKA	
2.1 Model Matematika Imunologi Seluler pada Tuberkulosis	9
2.1.1 Model Matematika Imunologi Seluler pada Tuberkulosis sebagai Sistem Persamaan Diferensial Nonlinier	10
2.1.2 Nilai Parameter dan Nilai Awal Model Matematika Imunologi Seluler pada Tuberkulosis	11
2.2 Metode Runge Kutta.....	12
2.3 Metode Runge Kutta Orde Tinggi	14
2.3.1 Metode Runge Kutta Fehlberg (RKF 45).....	14

2.3.2 Metode RKF 45 untuk Menyelesaikan Sistem Persamaan Diferensial Orde-1 dengan Empat Variabel Tak Bebas	18
2.4 Metode Adams Bashforth Moulton	22
2.4.1 Metode Adams Bashforth Moulton Orde-4.....	22
2.4.2 Galat Metode Adams Bashforth Moulton Orde-4.....	28
2.4.3 Metode Adams Bashforth Moulton Orde-4 untuk Menyelesaikan Sistem Persamaan Diferensial Orde-1 dengan Empat Variabel Tak Bebas	32
2.6 Galat	35
2.7 Solusi Analitik dan Numerik dalam Perspektif Agama	37
 BAB III PEMBAHASAN	
3.1 Penyelesaian Numerik Model Imunologi Seluler pada Tuberkulosis dengan Metode Runge Kutta Fehlberg (RKF 45).....	44
3.1.1 Penyelesaian Numerik dengan Metode Runge Kutta Fehlberg (RKF) Orde-4	45
3.1.2 Penyelesaian Numerik dengan Metode Runge Kutta Fehlberg (RKF) Orde-5	54
3.2 Penyelesaian Numerik Model Imunologi Seluler pada Tuberkulosis dengan Metode Adams Bashforth Moulton Orde-4	55
3.3 Analisis Numerik Metode Runge Kutta Fehlberg (RKF 45) dan Metode Adams Bashforth Moulton (ABM) Model Imunologi Seluler pada Tuberkulosis	65
3.3.1 Analisis Galat Metode RKF 45 dan ABM Orde-4	65
3.3.2 Analisis Hasil Numerik dan Interpretasi Grafik	80
3.4 Metode Numerik Runge Kutta Fehlberg (RKF 45) dan Adams Bashforth Moulton (ABM) dalam Perspektif Agama	84
 BAB IV PENUTUP	
4.1 Kesimpulan	89
4.2 Saran	91
 DAFTAR PUSTAKA	 92
 LAMPIRAN-LAMPIRAN	
 RIWAYAT HIDUP	

DAFTAR TABEL

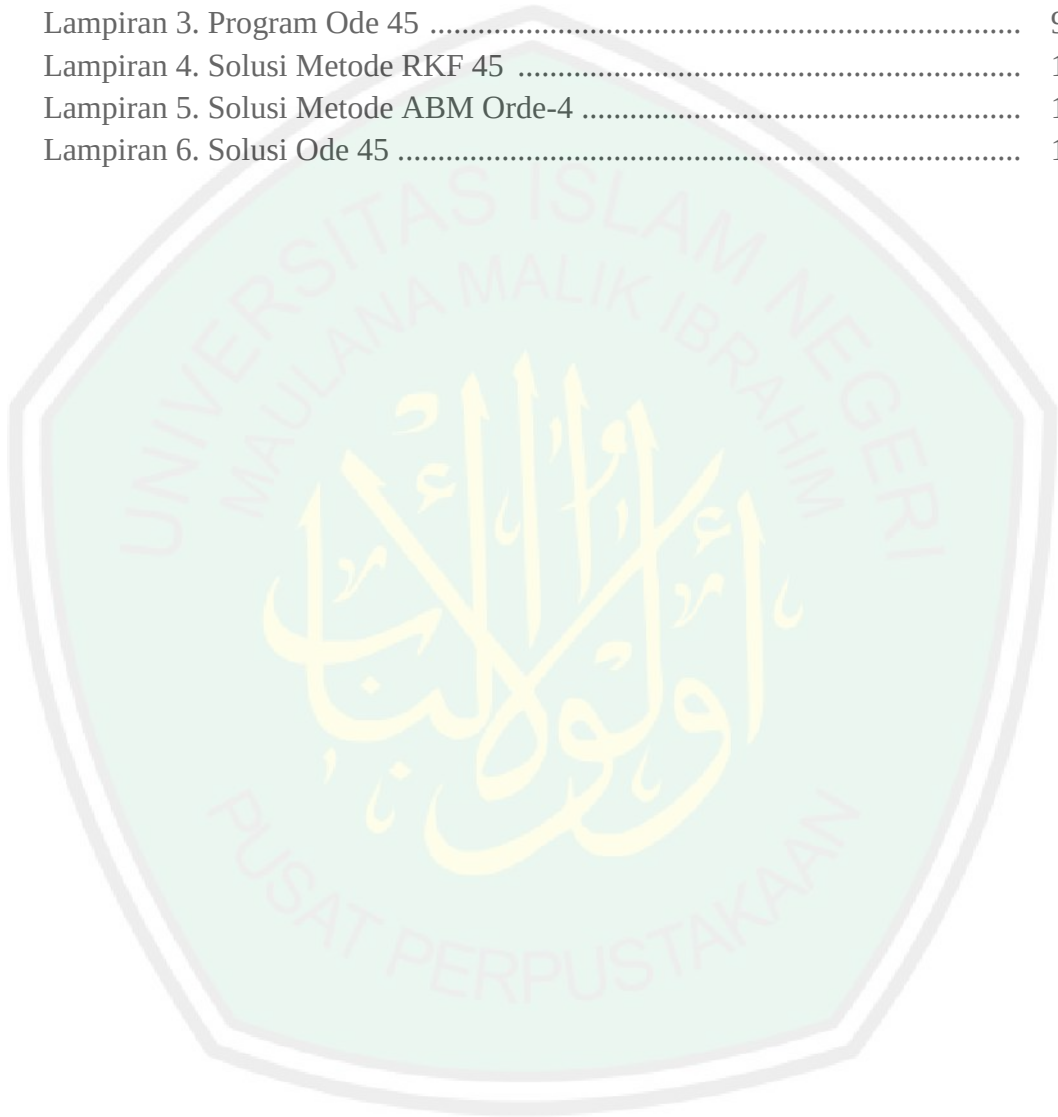
Tabel 2.1 Nilai Parameter dan Nilai Awal Persamaan (2.1) s.d (2.4).....	12
Tabel 2.2 Koefisien a_n , dan b_{nm} untuk Metode RKF 45	15
Tabel 2.3 Koefisien p_n , $\hat{p}_n$, dan c_n untuk Metode RKF 45.....	16
Tabel 3.1 Nilai Parameter dan Nilai Awal Sistem Persamaan (3.1)	45
Tabel 3.2 Solusi $Mu(t)$, $Mi(t)$, $B(t)$ dan $T(t)$ dengan RKF Orde-4.....	53
Tabel 3.3 Solusi $Mu(t)$, $Mi(t)$, $B(t)$ dan $T(t)$ dengan RKF Orde-5.....	65
Tabel 3.4 Nilai Mu_n , Mi_n , B_n dan T_n dengan $n = 0,1,2,3$	60
Tabel 3.5 Nilai f_n , g_n , j_n dan k_n , $n = 0,1,2,3$	60
Tabel 3.6 Nilai Prediktor ABM Orde-4 Sistem Persamaan (3.2)	64
Tabel 3.7 Nilai Korektor ABM Orde-4 Sistem Persamaan (3.2).....	65
Tabel 3.8 Solusi Numerik Sistem Persamaan (3.1) dengan Metode RKF 45 .	67
Tabel 3.9 Solusi Numerik Sistem Persamaan (3.1) dengan Metode ABM Orde-4.....	73

DAFTAR GAMBAR

Gambar 3.1 Solusi Metode RKF 45.....	69
Gambar 3.2 Solusi Metode RKF 45 Saat $t = 100$	70
Gambar 3.3 Galat Relatif Metode RKF 45	71
Gambar 3.4 Galat Relatif Metode RKF 45 Saat $t = 250$	71
Gambar 3.5 Solusi Metode ABM Orde-4	75
Gambar 3.6 Galat Metode ABM Orde-4.....	76
Gambar 3.7 Galat Metode ABM Orde-4 Saat $t = 250$	76
Gambar 3.8 Grafik $Mu(t), Mi(t), B(t)$ dan $T(t)$ pada Penelitian Ibarguen, dkk.	77
Gambar 3.9 Grafik $Mu(t)$ dan $Mi(t)$ dengan Metode RKF 45, ABM dan Ode 45	78
Gambar 3.10 Grafik $B(t)$ dan $T(t)$ dengan Metode RKF 45, ABM dan Ode 45	78
Gambar 3.11 Solusi RKF 45, ABM dan Ode 45 Saat $t = 300$	79
Gambar 3.12 Grafik $Mi(t), B(t)$ dan $T(t)$ pada Saat $t = 1000$	81
Gambar 3.13 Grafik $Mu(t), Mi(t)$ dan $B(t)$ pada Saat $t = 1000$	82
Gambar 3.14 Grafik $Mu(t), Mi(t), B(t)$ dan $T(t)$ pada Saat $t = 1000$	83

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1. Program RKF 45	94
Lampiran 2. Program Adams Bashforth Moulton	97
Lampiran 3. Program Ode 45	99
Lampiran 4. Solusi Metode RKF 45	100
Lampiran 5. Solusi Metode ABM Orde-4	103
Lampiran 6. Solusi Ode 45	107



ABSTRAK

Muhlish. 2015. **Penyelesaian Numerik Model Imunologi Seluler pada Tuberkulosis dengan Metode Runge Kutta Fehlberg (RKF 45) dan Metode Adams Bashforth Moulton**. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. Usman Pagalay, M.Si. (II) Dr. H. Ahmad Barizi, MA.

Kata kunci: *Runge Kutta Fehlberg, Adams Bashforth Moulton, model imunologi seluler pada tuberkulosis*

Model imunologi seluler pada tuberkulosis yang telah dirumuskan oleh Eduardo Ibarguen, dkk. (2011) berbentuk sistem persamaan diferensial nonlinier, sehingga membutuhkan metode khusus dalam menentukan solusinya. Penyelesaian sistem persamaan diferensial nonlinier pada umumnya sulit dilakukan baik secara analitik maupun numerik. Dalam penelitian ini, metode Runge Kutta Fehlberg (RKF 45) dan metode Adams Bashforth Moulton (ABM) digunakan sebagai salah satu metode numerik untuk menyelesaikan sistem persamaan diferensial nonlinier tersebut. Metode RKF 45 adalah metode numerik satu langkah dengan ketelitian yang tinggi dikarenakan memiliki 6 konstanta perhitungan yang berperan untuk memperbarui solusi sampai orde-5, sedangkan metode ABM merupakan metode numerik dua langkah berbentuk prediktor korektor dengan ketelitian yang tinggi.

Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui bagaimana penyelesaian numerik model imunologi seluler pada tuberkulosis dengan metode RKF 45 dan metode ABM, serta bagaimana perbandingan kedua metode dalam menyelesaikan sistem persamaan diferensial nonlinier. Hasil penelitian ini menunjukkan pada saat $t = 1000$ dan $h = 0.1$ dengan metode RKF 45 diperoleh solusi $Mu = 0.78432660796594$, $Mi = 0.00000092745234$, $B = 0.00000073025277$, dan $T = 0.00000140963308$, selanjutnya dengan metode ABM diperoleh solusi $Mu = 0.78432284958716$, $Mi = 0.00000094967835$, $B = 0.00000074775997$, dan $T = 0.00000144341432$. Dalam perhitungan galat, dengan $\varepsilon = 5 \times 10^{-8}$ diperoleh galat pemotongan metode ABM lebih kecil dari pada metode RKF 45.

Berdasarkan hasil penelitian ini dapat diambil kesimpulan bahwa metode RKF 45 dan metode ABM merupakan metode numerik dengan ketelitian yang tinggi dalam menyelesaikan sistem persamaan diferensial nonlinier. Hasil analisis galat dalam penelitian ini diperoleh bahwa galat metode ABM lebih kecil dari pada metode RKF 45. Pada penelitian selanjutnya dapat dilakukan penelitian terhadap metode RKF dan ABM dengan orde yang lebih tinggi dalam menyelesaikan sistem persamaan diferensial nonlinier.

ABSTRACT

Muhlish. 2015. **Numerical Solution for The Cellular Immunology Model of Tuberculosis Using Runge Kutta Fehlberg (RKF 45) and Adams Bashforth Moulton Method.** Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisor: (I) Dr. Usman Pagalay, M.Si. (II) Dr. H. Ahmad Barizi, MA.

Keywords: Runge Kutta Fehlberg (RKF 45), Adams Bashforth Moulton, Immunology cellular model of tuberculosis

The immunology cellular model of tuberculosis that have been formulated by Eduardo Ibarguen, et. al (2011) is in the form of non linear differential equations system, thus it requires a special method to determine the solution. Solving the system of non linear differential equations is in general difficult both analytically and numerically. In this study, the Runge Kutta Fehlberg method (RKF 45) and Adams Bashforth Moulton (ABM) method is used as a numerical method to solve the system of non linear differential equations. RKF 45 method is a one-step numerical method with high accuracy since it has six constants calculations, while the ABM method is a numerical method of two-step shaped predictor corrector with high accuracy.

This study aims to determine how the numerical solution of the Immunology cellular model of tuberculosis using RKF 45 and ABM method, and how it compares two methods in solving the system of non linear differential equations. The results of this study show at $t = 100$ and $h = 0.1$ using RKF 45 method obtained solution $Mu = 0.78432660796594$, $Mi = 0.00000092745234$, $B = 0.00000073025277$, and $T = 0.00000140963308$, next to the ABM method obtained solution $Mu = 0.78432284958716$, $Mi = 0.00000094967835$, $B = 0.00000074775997$, and $T = 0.00000144341432$. In the calculation error, with $\varepsilon = 5 \times 10^{-8}$ obtained the error cuts of ABM method is smaller than RKF 45 method.

Based on these results it can be concluded that the RKF 45 method and ABM method is a numerical method with high accuracy in solving the system of non linear differential equations. The results of error analysis in this study showed that the ABM method error is smaller than the RKF 45 method. For further study it can be conducted research on the RKF and ABM method with higher-order in solving the system of non linear differential equations.

ملخص

مخلص. ٢٠١٥. الحلا العددي لنموذج المناعة الخلوية بطريقة رونج كوتا (RKF 45) Fehlborg وطريقة آدم Bashforth مولتون. بحث جامعي. قسم الرياضيات كلية العلوم والتكنولوجيا، الجامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج. مشرف: (١) الدكتور عثمان فكالاي الماجستير (٢) الدكتور الحاج أحمد بارزي الماجستير.

الكلمات الري: رونج كوتا Fehlborg ، آدم Bashforth مولتون، ونماذج من المناعة الخلوية من السل.

نموذج المناعة الخلوية من السل الذي تمت صياغته من قبل Eduardo Ibarguen (2011) في تشكيل نظام المعادلات التفاضلية غير الخطية، مما يتطلب طريقة خاصة لتحديد الحل. الحل لنظام المعادلات التفاضلية غير الخطية من الصعب بشكل عام سواء من الناحية لتحليلية كانت أو عددية. في هذه الدراسة، يتم استخدام طريقة رونج كوتا (RKF 45) Fehlborg وطريقة آدم Bashforth مولتون (ABM) باعتبارها واحدة من الطرق العددية لحل أنظمة المعادلات التفاضلية غير الخطية. طريقة RKF 45 هي طريقة العددية من خطوة واحدة مع دقة عالية نظراً لديها ست قطع من الثوابت الحساب الذي يتمثل دوره في تحديد حلول لرتبة ٥، في حين أن طريقة ABM هي طريقة العددي للمنحنيتين شكل مؤشراً مصحح مع دقة عالية. وتهدف هذه الدراسة إلى تحديد كيفية الحل العددي للنموذج على المناعة الخلوية من السل مع طريقة RKF 45 وطريقة ABM، وكذلك كيف يقارن طريقتين في حل أنظمة المعادلات التفاضلية غير الخطية. نتائج هذه الدراسة تظهر في الوقت $t = 1000$ و $h = 0.1$ مع طريقة RKF 45 تم الحصول عليها $Mu = 0.784322849587164$ ، $0.00000092745234 = Mi$ ، $0.00000073025277 = B$ ، و $T = 0.000000140963308$ ، في حين أن الحصول على طريقة ABM هو $0.784322849587164 = Mu$ ، $0.00000092745234 = Mi$ ، $0.00000073025277 = B$ ، و $T = 0.000000140963308$ ، مع تخفيضات $\varepsilon = 5 \times 10^{-8}$ تم الحصول عليها أن الخطأ طريقة ABM هو أصغر من طريقة RKF 45.

وبناء على هذه النتائج يمكن استنتاج أن طريقة RKF 45 وطريقة ABM هو طريقة العددي مع دقة عالية في حل أنظمة المعادلات التفاضلية غير الخطية. وأظهرت نتائج تحليل الخطأ في هذه الدراسة أن الخطأ طريقة ABM هو أصغر من RKF 45. وفي دراسة لاحقة يمكن إجراء البحوث على طرق RKF 45 و ABM مع ارتفاع النظام في حل أنظمة المعادلات التفاضلية غير الخطية.



BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan salah satu cabang ilmu pengetahuan yang mendasari berbagai macam ilmu pengetahuan yang lain dan selalu menghadapi berbagai macam fenomena yang semakin kompleks sehingga penting untuk dipelajari. Abdussakir (2007:23) menyatakan bahwa “Alam semesta memuat bentuk-bentuk dan konsep matematika, meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Alam semesta serta segala isinya diciptakan Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan hitungan-hitungan yang mapan dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi”. Sebagaimana telah dijelaskan dalam firman Allah Swt. yaitu QS. al-Furqan/25:2:

وَحَلَقَ كُلَّ شَيْءٍ فَقَدَرَهُ تَقْدِيرًا

Artinya: ”.....dan Dia telah menciptakan segala sesuatu, dan Dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya”. (QS. al-Furqân /25:2)

Berdasarkan ayat di atas dapat dipahami bahwa segala sesuatu yang diciptakan Allah terdapat ukurannya serta diberinya perlengkapan-perengkapan dan persiapan-persiapan, sesuai dengan naluri, sifat-sifat dan fungsinya masing-masing dalam hidup, karena setiap ciptaan Allah itu selalu ada tujuan dan manfaatnya secara esensial. Demikian juga dalam ilmu matematika terdapat berbagai macam cabang ilmu sesuai dengan kegunaannya masing-masing dalam menyelesaikan suatu masalah.

Model matematika imunologi seluler pada tuberkulosis telah dikemukakan oleh Eduardo Ibarguen, Lourdes Esteve, dan Leslie Chavez (2011) dalam karya tulis yang berjudul *A Mathematical Model for Cellular Immunology of Tuberculosis*. Model matematika imunologi seluler pada tuberkulosis di atas berbentuk sistem persamaan diferensial nonlinier yang terdiri dari empat variabel bergantung sehingga memerlukan metode khusus dalam menentukan solusi dari sistem persamaan diferensial tersebut (Ibarguen, dkk., 2011:975).

Dalam Tafsir al-Aisar dijelaskan solusi dari satu masalah dapat diselesaikan tidak hanya dengan satu cara, namun dapat diselesaikan dengan beberapa cara. Sebagaimana telah dijelaskan dalam al-Quran surat Yusuf/12:67:

وَقَالَ يَبْنِي لَا تَدْخُلُوا مِنْ بَابٍ وَاحِدٍ، وَأَدْخُلُوا مِنْ أَبْوَابٍ مُتَفَرِّقَةٍ ﴿٦٧﴾

Artinya: "Hai anak-anakku janganlah kamu (bersama-sama) masuk dari satu pintu gerbang, dan masuklah dari pintu-pintu gerbang yang berlain-lain".(QS. Yusuf/12:67)

Berdasarkan ayat di atas dapat dijelaskan bahwa Allah telah menyediakan berbagai pintu (metode) dalam menyelesaikan suatu masalah. Hal ini juga terjadi dalam penyelesaian masalah matematika, terdapat banyak metode untuk menentukan solusi dari suatu masalah baik masalah linier maupun nonlinier.

Dalam upaya menyelesaikan suatu masalah nonlinier tersebut telah dikembangkan berbagai metode baik secara analitik maupun numerik. Metode analitik adalah metode penyelesaian model matematika dengan rumus-rumus aljabar yang sudah baku (lazim), sedangkan metode numerik adalah teknik yang digunakan untuk memformulasikan persoalan matematika sehingga dapat dipecahkan dengan operasi perhitungan atau aritmetika biasa (tambah, kurang,

kali dan bagi). Metode numerik akan menghasilkan solusi berbentuk angka, sedangkan metode analitik akan menghasilkan solusi dalam bentuk fungsi matematika yang selanjutnya dapat dievaluasi untuk menghasilkan nilai atau angka (Munir, 2006:5).

Penyelesaian model matematika imunologi seluler pada tuberkulosis yang berbentuk sistem persamaan diferensial nonlinier secara eksplisit atau analitik tidak dapat diselesaikan, artinya tidak mempunyai solusi eksak. Akan tetapi dengan metode numerik sistem persamaan diferensial nonlinier tersebut dapat diselesaikan dengan menghasilkan solusi numerik (solusi aproksimasi atau hampiran), dimana solusi hampiran ini dapat dibuat seteliti mungkin sesuai dengan yang diinginkan. Sehingga dalam menyelesaikan sistem persamaan diferensial model imunologi seluler pada tuberkulosis tersebut penulis memilih menggunakan metode numerik untuk menentukan solusinya.

Metode penyelesaian persamaan diferensial biasa secara numerik terbagi menjadi dua, yaitu metode satu langkah dan metode banyak langkah. Metode yang termasuk satu langkah adalah metode deret Taylor, metode Euler, metode Runge Kutta dan metode Heun. Sedangkan metode yang termasuk banyak langkah adalah metode Adams Bashforth Moulton (ABM), metode Milne Simpson dan metode Hamming (Munir, 2006:392).

Dalam skripsi ini, penulis menggunakan metode Runge Kutta Fehlberg (RKF 45) dan metode Adams Bashforth Moulton (ABM) yang merupakan salah satu solusi persamaan diferensial menggunakan metode satu langkah dan metode banyak langkah. Selain itu kedua metode ini sering digunakan karena memiliki ketelitian yang cukup baik.

Metode Runge Kutta Fehlberg (RKF 45) termasuk dalam keluarga metode Runge Kutta Orde-4, namun memiliki ketelitian sampai orde-5. Ketelitian yang tinggi ini dimungkinkan karena metode RKF 45 memiliki 6 konstanta perhitungan yang berperan untuk memperbarui solusi sampai orde-5 (Mathews & Kurtis, 2004:497).

Metode Adams Bashforth Moulton (ABM) merupakan gabungan dari dua metode yaitu metode Adams Bashforth sebagai prediktor dan metode Adams Moulton sebagai korektor. Metode ABM merupakan cara mencari solusi numerik pada titik tertentu dari suatu persamaan diferensial nonlinier dengan nilai awal yang telah diketahui. Persamaan diferensial tersebut terlebih dahulu diselesaikan menggunakan metode Runge Kutta Orde-4 untuk memperoleh empat solusi awal dan selanjutnya disubstitusikan ke persamaan prediktor ABM (Chapra & Canala, 2010:774).

Dalam penelitian-penelitian sebelumnya kedua metode di atas telah diterapkan pada berbagai persamaan diferensial baik linier maupun nonlinier, namun masih jarang diterapkan pada sistem persamaan diferensial nonlinier. Berdasarkan hal tersebut penulis tertarik untuk mengkaji secara detail dan mendalam tentang metode RKF 45 dan metode ABM dalam menyelesaikan sistem persamaan diferensial nonlinier dan selanjutnya menyelesaikan model imunologi seluler pada tuberkulosis dengan menggunakan kedua metode tersebut serta membandingkan hasil keduanya. Dengan penelitian ini, diharapkan akan menghasilkan sebuah solusi numerik yang dapat digunakan dalam perkembangan ilmu kedokteran.

Berdasarkan pada latar belakang di atas, maka dalam penelitian ini penulis memilih judul *“Penyelesaian Numerik Model Imunologi Seluler pada Tuberkulosis dengan Metode Runge Kutta Fehlberg (RKF 45) dan Metode Adams Bashforth Moulton”*.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah penelitian ini adalah:

1. Bagaimana penyelesaian numerik model imunologi seluler pada tuberkulosis dengan metode Runge Kutta Fehlberg (RKF 45)?
2. Bagaimana penyelesaian numerik model imunologi seluler pada tuberkulosis dengan metode Adams Bashforth Moulton (ABM)?
3. Bagaimana analisis hasil penyelesaian numerik model imunologi seluler pada tuberkulosis dengan metode RKF 45 dan metode ABM?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mendeskripsikan dan menjelaskan bagaimana penyelesaian numerik model imunologi seluler pada tuberkulosis dengan metode Runge Kutta Fehlberg (RKF 45).
2. Mendeskripsikan dan menjelaskan bagaimana penyelesaian numerik model imunologi seluler pada tuberkulosis dengan metode Adams Bashforth Moulton (ABM).

3. Mendeskripsikan dan menjelaskan hasil analisis penyelesaian numerik model imunologi seluler pada tuberkulosis dengan metode RKF 45 dan metode ABM.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat penelitian ini adalah:

1. Memperdalam pengetahuan tentang metode Runge Kutta Fehlberg (RKF 45) dalam menyelesaikan sistem persamaan diferensial nonlinier secara numerik.
2. Memperdalam pengetahuan tentang metode Adams Bashforth Moulton (ABM) dalam menyelesaikan sistem persamaan diferensial nonlinier secara numerik.
3. Mengetahui hasil perbandingan metode RKF 45 dan metode ABM dalam menyelesaikan sistem persamaan diferensial nonlinier secara numerik.

1.5 Batasan Masalah

Model matematika yang diselesaikan adalah model matematika imunologi seluler pada tuberkulosis yang berbentuk sistem persamaan diferensial nonlinier. Model tersebut dirumuskan oleh Eduardo Ibarguen, Lourdes Esteve, dan Leslie Chavez (2011) dalam karya tulis yang berjudul *A Mathematical Model for Cellular Immunology of Tuberculosis*.

Selanjutnya dari model tersebut akan diselesaikan dengan menggunakan metode RKF 45 dan metode ABM orde-4 untuk menemukan solusi dari sistem persamaan diferensial nonlinier tersebut.

1.6 Metode Penelitian

Metode penelitian yang digunakan penulis pada penelitian ini adalah penelitian kepustakaan atau *library research* yaitu dengan menelaah dan mempelajari buku, jurnal, artikel ilmiah dan refrensi lain yang mendukung penelitian.

Adapun langkah-langkah umum yang dilakukan penulis dalam membahas penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mengidentifikasi variabel, parameter, dan model matematika imunologi seluler pada tuberkulosis.
2. Mengestimasi nilai parameter dan nilai awal pada model matematika imunologi seluler pada tuberkulosis.
3. Mencari solusi numerik model imunologi seluler pada tuberkulosis dengan metode Runge Kutta Fehlberg (RKF 45) dan metode Adams Bashforth Moulton Orde-4
4. Menganalisis hasil solusi numerik dan interpretasi grafik
5. Menarik kesimpulan.

1.7 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan yang digunakan dalam penelitian ini terdiri dari empat bab, masing-masing dibagi ke dalam subbab yaitu sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Pada bab pendahuluan berisi: latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Pada bab dua ini, memberikan kajian-kajian yang menjadi landasan masalah yang dibahas, yaitu model imunologi seluler pada tuberkulosis, model imunologi seluler pada tuberkulosis sebagai sistem persamaan diferensial nonlinier, penyelesaian persamaan diferensial biasa dengan metode numerik, metode Runge Kutta, metode Runge Kutta Fehlberg (RKF 45), metode Adams Bashforth Moulton (ABM), galat dan kajian tentang solusi analitik dan numerik dalam perspektif agama.

Bab III Pembahasan

Pada bab ini dibahas penyelesaian numerik model imunologi seluler pada tuberkulosis dengan metode Runge Kutta Fehlberg (RKF 45) dan metode Adams Bashforth Moulton (ABM), analisis hasil penyelesaian numerik model imunologi seluler pada tuberkulosis dan solusi numerik dalam perspektif agama.

Bab IV Penutup

Pada bab empat ini berisi kesimpulan dari hasil penelitian yang telah dilakukan dan saran bagi pembaca yang akan melanjutkan penelitian.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Model Matematika Immunologi Seluler pada Tuberkulosis

Eduardo Ibarguen, dkk. (2011) merumuskan model matematika untuk dinamika Mtb dengan memberikan analisis global terhadap dinamika Mtb, makrofag dan sel t . Tujuannya adalah untuk mengevaluasi dampak dari respon sel t dan makrofag dalam pengendalian Mtb. Sehingga terbentuk sebuah sistem persamaan diferensial biasa untuk model interaksi antara makrofag tak terinfeksi, makrofag terinfeksi, sel t dan Mtb basil.

Dalam karya ilmiah yang berjudul *A Mathematical Model for Cellular Immunology of Tuberculosis* diperoleh model matematika imunologi seluler pada tuberkulosis yang terdiri dari empat variabel bergantung. Keempat variabel tersebut yaitu populasi makrofag tak terinfeksi (Mu), populasi makrofag terinfeksi (Mi), populasi bakteri Mtb (B) dan populasi sel t (T).

Ibarguen, dkk. (2011:976) menggambarkan model matematika imunologi seluler pada tuberkulosis sebagai berikut.

$$\frac{dMu(t)}{dt} = \mu_U - \mu_U Mu(t) - \beta B(t) Mu(t) \quad (2.1)$$

$$\frac{dMi(t)}{dt} = \beta B(t) Mu(t) - \alpha_T Mi(t) T(t) - \mu_I Mi(t) \quad (2.2)$$

$$\frac{dB(t)}{dt} = r Mi(t) - \gamma_U Mu(t) B(t) - \mu_B B(t) \quad (2.3)$$

$$\frac{dT(t)}{dt} = k_1 Mi(t) - k_1 Mi(t) T(t) - \mu_T T(t) \quad (2.4)$$

dimana $\beta, \alpha_T, \mu_U, \mu_I, \mu_B, \gamma_U, r$, dan k_1 semuanya adalah koefisien positif. β menunjukkan laju infeksi bakteri, α_T menunjukkan laju pertumbuhan sel t

terhadap makrofag terinfeksi, μ_U adalah laju kematian makrofag tak terinfeksi, μ_I sebagai kematian makrofag terinfeksi, μ_B menunjukkan laju kematian alami bakteri, γ_U sebagai laju kematian bakteri karena makrofag terinfeksi, r adalah jumlah rata-rata produksi bakteri pada makrofag terinfeksi dan k_1 adalah laju pertumbuhan sel t (Ibarguen, dkk., 2011:975).

2.1.1 Model Matematika Immunologi Seluler pada Tuberkulosis sebagai Sistem Persamaan Diferensial Nonlinier

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang memuat turunan satu atau beberapa fungsi yang tidak diketahui. Persamaan diferensial biasa adalah sebuah persamaan diferensial yang terdiri dari satu atau lebih variabel terikat dengan satu variabel bebas (Haniyah, 2011:8).

Contoh : $y' + xy = 3$

Dalam persamaan tersebut terdapat fungsi yang tidak diketahui. y dan x dianggap sebagai satu peubah bebas, yaitu $y = y(x)$. Argumen x dalam $y(x)$ (dan turunan-turunannya) biasanya dihilangkan untuk penyederhanaan notasi. Lambang y' dalam persamaan tersebut menyatakan turunan pertama dari fungsi $y(x)$ terhadap x .

Selanjutnya dimisalkan terdapat suatu persamaan diferensial $F(x, y, y', \dots, y^m) = 0$ maka persamaan tersebut disebut persamaan diferensial nonlinier jika salah satu dari berikut ini dipenuhi oleh F :

- F tak berbentuk polinum dalam $y, y', \dots, y^m$
- F berbentuk polinom berpangkat lebih dari satu dalam $y, y', \dots, y^m$

(Pamuntjak, 1990:14).

Pengertian sistem persamaan diferensial nonlinier adalah persamaan yang terdiri atas lebih dari satu persamaan yang saling terkait. Sistem dari dua persamaan diferensial nonlinier dengan dua fungsi yang tak diketahui berbentuk:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax + by + F(x, y) \\ \dot{y} &= cx + dy + G(x, y) \end{aligned}$$

dimana $ad - bc \neq 0$ (Amanah, 2012:13).

Dari penjelasan di atas maka persamaan (2.1), (2.2), (2.3) dan (2.4) dapat dilihat bahwa masing-masing memuat satu turunan fungsi yang tidak diketahui dan dari masing-masing persamaan tidak berbentuk persamaan polinom. Selain itu, persamaan (2.1) s.d (2.4) juga memiliki keterkaitan satu sama lain dan membentuk sebuah sistem, sehingga dapat disimpulkan bahwa model imunologi seluler pada tuberkulosis yang digambarkan dalam persamaan (2.1) s.d (2.4) di atas merupakan sistem persamaan diferensial nonlinier.

2.1.2 Nilai Parameter dan Nilai Awal Model Matematika Imunologi Seluler pada Tuberkulosis

Eduardo Ibarguen, dkk. (2011:983) telah memberikan nilai masing-masing parameter dari model matematika imunologi seluler pada tuberkulosis untuk melihat simulasi interaksi antara sel t dan makrofag dalam mengendalikan bakteri tuberkulosis. Nilai-nilai parameter dan nilai awal dari variabel yang digunakan pada model tersebut diberikan pada tabel berikut ini.

Tabel 2.1 Nilai Parameter dan Nilai Awal Persamaan (2.1) s.d (2.4)

Variabel/ Parameter	Deskripsi	Nilai Parameter	Satuan
α_T	Laju pertumbuhan sel t terhadap makrofag terinfeksi	0.1	Perhari
μ_U	Laju kematian makrofag tak terinfeksi	0.00033	Perhari
β	Laju infeksi bakteri	$8.25 * 10^{-9}$	Perhari
μ_I	Laju kematian makrofag terinfeksi	0.011	Perhari
μ_B	Laju kematian alami bakteri	0.012	Perhari
μ_T	Laju kematian alami sel t	0.33	Perhari
r	Jumlah rata-rata produksi bakteri pada makrofag terinfeksi	$5 * 0.011$	(sel/ml) perhari
γ_U	Laju kematian bakteri karena makrofag terinfeksi	0.0879	Perhari
k_1	Laju pertumbuhan sel t	0.484848	Perhari
$Mu(0)$	Populasi awal makrofag tak terinfeksi	0.7	(sel/ml)
$Mi(0)$	Populasi awal makrofag terinfeksi	0.2	(sel/ml)
$B(0)$	Populasi awal bakteri	0	(sel/ml)
$T(0)$	Populasi awal sel t	0	(sel/ml)

(Ibarguen, dkk., 2011:983).

2.2 Metode Runge Kutta

Penyelesaian Persamaan Diferensial Biasa (PDB) dengan metode deret Taylor tidak praktis, karena metode tersebut membutuhkan perhitungan turunan $f(x, y)$. Di samping itu, tidak semua fungsi mudah dihitung turunannya, terutama bagi fungsi yang bentuknya rumit. Semakin tinggi orde metode deret Taylor, maka semakin tinggi turunan fungsi yang harus dihitung. Selain itu, untuk mendapatkan hasil yang lebih teliti diperlukan Δx atau h yang kecil, padahal penggunaan Δx yang kecil menyebabkan waktu hitungan yang lebih panjang. Oleh karena itu, metode Runge Kutta merupakan alternatif dari metode deret Taylor yang memberikan ketelitian hasil yang lebih besar dan tidak memerlukan turunan fungsi (Munir, 2006:384).

Bentuk umum dari metode Runge Kutta adalah

$$y_{i+1} = y_i + \varphi(x_i, y_i, h)h \quad (2.5)$$

dengan $\varphi(x_i, y_i, h)$ adalah fungsi pertambahan yang merupakan kemiringan rerata pada interval. Fungsi pertambahan dapat ditulis dalam bentuk umum

$$\varphi = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \dots + a_n k_n \quad (2.6)$$

dengan a adalah konstanta dan k adalah

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h)$$

$$k_3 = f(x_i + p_2 h, y_i + q_{21} k_1 h + q_{22} k_2 h)$$

...

$$k_n = f(x_i + p_{n-1} h, y_i + q_{n-1,1} k_1 h + q_{n-1,2} k_2 h + \dots + q_{n-1,n-1} k_{n-1} h)$$

dengan p dan q adalah konstanta. Nilai k menunjukkan hubungan berurutan. Nilai k_1 muncul dalam persamaan untuk menghitung k_2 , yang keduanya juga muncul dalam persamaan untuk menghitung k_3 dan seterusnya. Hubungan berurutan ini membuat metode Runge Kutta menjadi efisien untuk hitungan komputer (Chapra & Canale, 2010:725)

Ada beberapa tipe metode Runge Kutta yang bergantung pada nilai n yang dapat digunakan. Untuk $n = 1$ disebut metode Runge Kutta Orde-1 atau disebut juga metode Euler yang diperoleh dari $k_1 = f(x, y)$ dan persamaan (2.6).

$$\varphi = a_1 k_1 = a_1 f(x_i, y_i)$$

Untuk $a_1 = 1$ maka persamaan (2.5) menjadi

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h$$

Dalam metode Runge Kutta, setelah nilai n ditetapkan, kemudian nilai a , p , q dicari dengan menyamakan persamaan (2.5) dengan suku-suku dari deret Taylor, selanjutnya dapat ditentukan metode Runge Kutta pada orde selanjutnya.

Munir (2006:385) merumuskan metode Runge Kutta Orde-4 sebagai berikut.

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h$$

dengan

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1h\right)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2h\right)$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + k_3h)$$

2.3 Metode Runge Kutta Orde Tinggi

Terdapat beberapa metode yang termasuk dalam metode Runge Kutta orde tinggi, di antaranya adalah metode Runge Kutta Gill (RKG), metode Runge Kutta Merson (RKM) dan metode Runge Kutta Fehlberg (RKF 45) (Mathews & Kurtis, 2004:489)

2.3.1 Metode Runge Kutta Fehlberg (RKF 45)

Metode RKF 45 tergolong dalam keluarga metode Runge Kutta Orde-4, akan tetapi memiliki ketelitian sampai orde-5. Ketelitian yang tinggi ini dimungkinkan karena metode RKF 45 memiliki 6 konstanta perhitungan yang

berperan untuk memperbarui solusi sampai orde-5. Dengan kata lain, dapat dikatakan bahwa metode RKF 45 merupakan metode Runge Kutta yang saat ini paling populer. Pada metode ini, galat pemotongannya dihitung dengan membandingkan hasil perhitungan y_{i+1} dengan hasil perhitungan $\hat{y}_{i+1}$ pada orde selanjutnya (Urifah, 2008:34).

Metode Runge Kutta Fehlberg (RKF 45) diformulasikan sebagai berikut.

Didefinisikan

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_i, y_i) \\ k_n &= hf\left(x_i + a_n h, y_i + \sum_{m=1}^{n-1} b_{nm} k_m\right), n = 2, \dots, 6 \end{aligned} \quad (2.7)$$

dengan koefisien-koefisien yang ada dalam Tabel 2.2 dan 2.3 di bawah ini.

Tabel 2.2 Koefisien a_n , dan b_{nm} untuk Metode RKF 45

n	b_{nm}					
	a_n	$m=1$	2	3	4	5
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$				
3	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{9}{32}$			
4	$\frac{12}{13}$	$\frac{1932}{2197}$	$-\frac{7200}{2197}$	$\frac{7296}{2197}$		
5	1	$\frac{439}{216}$	-8	$\frac{3680}{513}$	$-\frac{845}{4104}$	
6	$\frac{1}{2}$	$-\frac{8}{27}$	2	$-\frac{3544}{2565}$	$\frac{1859}{4104}$	$-\frac{11}{40}$

(Ritschel, 2013:17).

Tabel 2.3 Koefisien $p_n, \hat{p}_n$, dan c_n untuk Metode RKF 45

n	1	2	3	4	5	6
p_n	$\frac{25}{216}$	0	$\frac{1408}{2565}$	$\frac{2197}{4104}$	$-\frac{1}{5}$	
$\hat{p}_n$	$\frac{16}{135}$	0	$\frac{6656}{12825}$	$\frac{28561}{56430}$	$-\frac{9}{50}$	$\frac{2}{55}$
c_n	$\frac{16}{360}$	0	$-\frac{128}{4275}$	$-\frac{2197}{75240}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{2}{55}$

(Ritschel, 2013:17).

Formula RKF orde-4

$$y_{i+1} = y_i + \sum_{n=1}^5 p_n k_n$$

Formula RKF orde-5

$$\hat{y}_{i+1} = y_i + \sum_{n=1}^6 \hat{p}_n k_n$$

Butcher (2008:430) merumuskan galat pemotongan RKF orde-4 sebagai berikut.

$$\hat{y}_{i+1} - y_{i+1} = h \sum_{n=1}^6 c_n k_n$$

Menurut Mathews dan Kurtis (2004:497) formulasi RKF 45 bentuk pertama adalah sebagai berikut.

$$\text{Formula Orde-4: } y_{i+1} = y_i + \frac{25}{216} k_1 + \frac{1408}{2565} k_3 + \frac{2197}{4104} k_4 - \frac{1}{5} k_5 \quad (2.8)$$

$$\text{Formula Orde-5: } \hat{y}_{i+1} = y_i + \frac{16}{135} k_1 + \frac{6656}{12825} k_3 + \frac{28561}{56437} k_4 - \frac{9}{50} k_5 + \frac{2}{55} k_6 \quad (2.9)$$

dimana

$$\begin{aligned}
 k_1 &= hf(x_i, y_i) \\
 k_2 &= hf\left(x_i + \frac{1}{4}h, y_i + \frac{1}{4}k_1\right) \\
 k_3 &= hf\left(x_i + \frac{3}{8}h, y_i + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2\right) \\
 k_4 &= hf\left(x_i + \frac{12}{13}h, y_i + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3\right) \\
 k_5 &= hf\left(x_i + h, y_i + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3860}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4\right) \\
 k_6 &= hf\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5\right)
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Galat pemotongan RKF orde-4

$$\hat{y}_{i+1} - y_{i+1} = \frac{1}{360}k_1 - \frac{128}{4275}k_3 - \frac{2197}{75240}k_4 + \frac{1}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6 \tag{2.11}$$

untuk $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$, n = banyak langkah atau iterasi.

Galat longgokan total (*cumulative error*) metode RKF 45 adalah

$$\varepsilon = \left| \frac{1}{h_{i+1}} (\hat{y}_{i+1} - y_{i+1}) \right| \text{ atau } \varepsilon = |\hat{y}_{i+1} - y_{i+1}| \tag{2.12}$$

Dari penghitungan variabel-variabel di atas, dapat dikatakan bahwa dalam menyelesaikan masalah matematika dengan metode numerik, dibutuhkan ketelitian karena penghitungan dalam metode numerik dilakukan secara berulang-ulang (menggunakan beberapa iterasi) dan dalam metode numerik juga digunakan bilangan mulai yang sangat kecil sampai yang paling besar. Sebagai contoh, dalam menghitung galat dibutuhkan ketelitian yang tinggi. Ketelitian ini menjadi sangat penting karena galat merupakan besarnya kesalahan suatu metode numerik.

2.3.2 Metode RKF 45 untuk Menyelesaikan Sistem Persamaan Diferensial Orde-1 dengan Empat Variabel Tak Bebas

Dalam bidang sains dan rekayasa, persamaan diferensial banyak muncul dalam bentuk simultan, yang dinamakan sistem persamaan diferensial. Bentuk umum dari suatu sistem n persamaan orde-1 mempunyai bentuk sebagai berikut

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), y_1(x_0) = y_{1_0} \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), y_2(x_0) = y_{2_0} \\ &\vdots \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n), y_n(x_0) = y_{n_0}\end{aligned}\quad (2.13)$$

Sistem persamaan diferensial tersebut dapat ditulis dalam notasi vektor sebagai berikut.

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

yang mana dalam hal ini,

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, y' = \begin{bmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y'_n \end{bmatrix}, f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}, y_0 = \begin{bmatrix} y_{1_0} \\ y_{2_0} \\ \vdots \\ y_{n_0} \end{bmatrix}$$

Menurut Munir (2006:404), semua metode yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial tunggal dapat diterapkan pada sistem persamaan diferensial, sehingga metode RKF 45 dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan diferensial orde-1 dengan empat variabel tak bebas.

Diberikan sistem persamaan diferensial orde-1 dengan dua variabel tak bebas sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= f(t, x, y, z, w) \\ \frac{dy(t)}{dt} &= g(t, x, y, z, w) \\ \frac{dz(t)}{dt} &= h(t, x, y, z, w) \\ \frac{dw(t)}{dt} &= i(t, x, y, z, w)\end{aligned}\tag{2.14}$$

Berdasarkan penelitian Aga dan Ekpenyong (2013) serta penelitian Nur Urifah (2008) tentang aplikasi metode RKF 45, maka formulasi metode RKF 45 untuk sistem persamaan (2.14) adalah

Orde 4:

$$\begin{aligned}x_{i+1} &= x_i + \frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{256}k_3 + \frac{2197}{4104}k_4 - \frac{1}{5}k_5 \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{25}{216}m_1 + \frac{1408}{256}m_3 + \frac{2197}{4104}m_4 - \frac{1}{5}m_5 \\ z_{i+1} &= z_i + \frac{25}{216}n_1 + \frac{1408}{256}n_3 + \frac{2197}{4104}n_4 - \frac{1}{5}n_5 \\ w_{i+1} &= w_i + \frac{25}{216}p_1 + \frac{1408}{256}p_3 + \frac{2197}{4104}p_4 - \frac{1}{5}p_5\end{aligned}\tag{2.15}$$

Orde 5:

$$\begin{aligned}\hat{x}_{i+1} &= x_i + \frac{16}{135}k_1 + \frac{6656}{12825}k_3 + \frac{28561}{56437}k_4 - \frac{9}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6 \\ \hat{y}_{i+1} &= y_i + \frac{16}{135}m_1 + \frac{6656}{12825}m_3 + \frac{28561}{56437}m_4 - \frac{9}{50}m_5 + \frac{2}{55}m_6 \\ \hat{z}_{i+1} &= z_i + \frac{16}{135}n_1 + \frac{6656}{12825}n_3 + \frac{28561}{56437}n_4 - \frac{9}{50}n_5 + \frac{2}{55}n_6 \\ \hat{w}_{i+1} &= w_i + \frac{16}{135}p_1 + \frac{6656}{12825}p_3 + \frac{28561}{56437}p_4 - \frac{9}{50}p_5 + \frac{2}{55}p_6\end{aligned}\tag{2.16}$$

dimana

$$k_1 = hf(t_i, x_i, y_i, z_i, w_i)$$

$$m_1 = hg(t_i, x_i, y_i, z_i, w_i)$$

$$n_1 = hh(t_i, x_i, y_i, z_i, w_i)$$

$$p_1 = hi(t_i, x_i, y_i, z_i, w_i)$$

$$k_2 = hf\left(t_i + \frac{1}{4}h, x_i + \frac{1}{4}k_1, y_i + \frac{1}{4}m_1, z_i + \frac{1}{4}n_1, w_i + \frac{1}{4}p_1\right)$$

$$m_2 = hg\left(t_i + \frac{1}{4}h, x_i + \frac{1}{4}k_1, y_i + \frac{1}{4}m_1, z_i + \frac{1}{4}n_1, w_i + \frac{1}{4}p_1\right)$$

$$n_2 = hh\left(t_i + \frac{1}{4}h, x_i + \frac{1}{4}k_1, y_i + \frac{1}{4}m_1, z_i + \frac{1}{4}n_1, w_i + \frac{1}{4}p_1\right)$$

$$p_2 = hi\left(t_i + \frac{1}{4}h, x_i + \frac{1}{4}k_1, y_i + \frac{1}{4}m_1, z_i + \frac{1}{4}n_1, w_i + \frac{1}{4}p_1\right)$$

$$k_3 = hf\left(t_i + \frac{3}{8}h, x_i + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2, y_i + \frac{3}{32}m_1 + \frac{9}{32}m_2, z_i + \frac{3}{32}n_1 + \frac{9}{32}n_2, w_i + \frac{3}{32}p_1 + \frac{9}{32}p_2\right)$$

$$m_3 = hg\left(t_i + \frac{3}{8}h, x_i + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2, y_i + \frac{3}{32}m_1 + \frac{9}{32}m_2, z_i + \frac{3}{32}n_1 + \frac{9}{32}n_2, w_i + \frac{3}{32}p_1 + \frac{9}{32}p_2\right)$$

$$n_3 = hh\left(t_i + \frac{3}{8}h, x_i + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2, y_i + \frac{3}{32}m_1 + \frac{9}{32}m_2, z_i + \frac{3}{32}n_1 + \frac{9}{32}n_2, w_i + \frac{3}{32}p_1 + \frac{9}{32}p_2\right)$$

$$p_3 = hi\left(t_i + \frac{3}{8}h, x_i + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2, y_i + \frac{3}{32}m_1 + \frac{9}{32}m_2, z_i + \frac{3}{32}n_1 + \frac{9}{32}n_2, w_i + \frac{3}{32}p_1 + \frac{9}{32}p_2\right)$$

$$k_4 = hf\left(t_i + \frac{12}{13}h, x_i + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3, y_i + \frac{1932}{2197}m_1 - \frac{7200}{2197}m_2 + \frac{7296}{2197}m_3, \right. \\ \left. z_i + \frac{1932}{2197}n_1 - \frac{7200}{2197}n_2 + \frac{7296}{2197}n_3, w_i + \frac{1932}{2197}p_1 - \frac{7200}{2197}p_2 + \frac{7296}{2197}p_3\right)$$

$$m_4 = hg\left(t_i + \frac{12}{13}h, x_i + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3, y_i + \frac{1932}{2197}m_1 - \frac{7200}{2197}m_2 + \frac{7296}{2197}m_3, \right. \\ \left. z_i + \frac{1932}{2197}n_1 - \frac{7200}{2197}n_2 + \frac{7296}{2197}n_3, w_i + \frac{1932}{2197}p_1 - \frac{7200}{2197}p_2 + \frac{7296}{2197}p_3\right)$$

$$n_4 = hh\left(t_i + \frac{12}{13}h, x_i + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3, y_i + \frac{1932}{2197}m_1 - \frac{7200}{2197}m_2 + \frac{7296}{2197}m_3, \right. \\ \left. z_i + \frac{1932}{2197}n_1 - \frac{7200}{2197}n_2 + \frac{7296}{2197}n_3, w_i + \frac{1932}{2197}p_1 - \frac{7200}{2197}p_2 + \frac{7296}{2197}p_3\right)$$

$$\begin{aligned}
p_4 &= hi \left(\begin{array}{l} t_i + \frac{12}{13}h, x_i + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3, y_i + \frac{1932}{2197}m_1 - \frac{7200}{2197}m_2 + \frac{7296}{2197}m_3, \\ z_i + \frac{1932}{2197}n_1 - \frac{7200}{2197}n_2 + \frac{7296}{2197}n_3, w_i + \frac{1932}{2197}p_1 - \frac{7200}{2197}p_2 + \frac{7296}{2197}p_3 \end{array} \right) \\
k_5 &= hf \left(\begin{array}{l} t_i + h, x_i + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3860}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4, y_i + \frac{439}{216}m_1 - 8m_2 + \frac{3860}{513}m_3 - \frac{845}{4104}m_4, \\ z_i + \frac{439}{216}n_1 - 8n_2 + \frac{3860}{513}n_3 - \frac{845}{4104}n_4, w_i + \frac{439}{216}p_1 - 8p_2 + \frac{3860}{513}p_3 - \frac{845}{4104}p_4 \end{array} \right) \\
m_5 &= hg \left(\begin{array}{l} t_i + h, x_i + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3860}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4, y_i + \frac{439}{216}m_1 - 8m_2 + \frac{3860}{513}m_3 - \frac{845}{4104}m_4, \\ z_i + \frac{439}{216}n_1 - 8n_2 + \frac{3860}{513}n_3 - \frac{845}{4104}n_4, w_i + \frac{439}{216}p_1 - 8p_2 + \frac{3860}{513}p_3 - \frac{845}{4104}p_4 \end{array} \right) \\
n_5 &= hh \left(\begin{array}{l} t_i + h, x_i + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3860}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4, y_i + \frac{439}{216}m_1 - 8m_2 + \frac{3860}{513}m_3 - \frac{845}{4104}m_4, \\ z_i + \frac{439}{216}n_1 - 8n_2 + \frac{3860}{513}n_3 - \frac{845}{4104}n_4, w_i + \frac{439}{216}p_1 - 8p_2 + \frac{3860}{513}p_3 - \frac{845}{4104}p_4 \end{array} \right) \\
p_5 &= hi \left(\begin{array}{l} t_i + h, x_i + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3860}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4, y_i + \frac{439}{216}m_1 - 8m_2 + \frac{3860}{513}m_3 - \frac{845}{4104}m_4, \\ z_i + \frac{439}{216}n_1 - 8n_2 + \frac{3860}{513}n_3 - \frac{845}{4104}n_4, w_i + \frac{439}{216}p_1 - 8p_2 + \frac{3860}{513}p_3 - \frac{845}{4104}p_4 \end{array} \right) \\
k_6 &= hf \left(\begin{array}{l} t_i + \frac{1}{2}h, x_i - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5, y_i - \frac{8}{27}m_1 + 2m_2 - \frac{3544}{2565}m_3 + \frac{1859}{4104}m_4 - \frac{11}{40}m_5, \\ z_i - \frac{8}{27}n_1 + 2n_2 - \frac{3544}{2565}n_3 + \frac{1859}{4104}n_4 - \frac{11}{40}n_5, w_i - \frac{8}{27}p_1 + 2p_2 - \frac{3544}{2565}p_3 + \frac{1859}{4104}p_4 - \frac{11}{40}p_5 \end{array} \right) \\
m_6 &= hg \left(\begin{array}{l} t_i + \frac{1}{2}h, x_i - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5, y_i - \frac{8}{27}m_1 + 2m_2 - \frac{3544}{2565}m_3 + \frac{1859}{4104}m_4 - \frac{11}{40}m_5, \\ z_i - \frac{8}{27}n_1 + 2n_2 - \frac{3544}{2565}n_3 + \frac{1859}{4104}n_4 - \frac{11}{40}n_5, w_i - \frac{8}{27}p_1 + 2p_2 - \frac{3544}{2565}p_3 + \frac{1859}{4104}p_4 - \frac{11}{40}p_5 \end{array} \right) \\
n_6 &= hh \left(\begin{array}{l} t_i + \frac{1}{2}h, x_i - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5, y_i - \frac{8}{27}m_1 + 2m_2 - \frac{3544}{2565}m_3 + \frac{1859}{4104}m_4 - \frac{11}{40}m_5, \\ z_i - \frac{8}{27}n_1 + 2n_2 - \frac{3544}{2565}n_3 + \frac{1859}{4104}n_4 - \frac{11}{40}n_5, w_i - \frac{8}{27}p_1 + 2p_2 - \frac{3544}{2565}p_3 + \frac{1859}{4104}p_4 - \frac{11}{40}p_5 \end{array} \right) \\
p_6 &= hi \left(\begin{array}{l} t_i + \frac{1}{2}h, x_i - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5, y_i - \frac{8}{27}m_1 + 2m_2 - \frac{3544}{2565}m_3 + \frac{1859}{4104}m_4 - \frac{11}{40}m_5, \\ z_i - \frac{8}{27}n_1 + 2n_2 - \frac{3544}{2565}n_3 + \frac{1859}{4104}n_4 - \frac{11}{40}n_5, w_i - \frac{8}{27}p_1 + 2p_2 - \frac{3544}{2565}p_3 + \frac{1859}{4104}p_4 - \frac{11}{40}p_5 \end{array} \right)
\end{aligned}
\tag{2.17}$$

2.4 Metode Adams Bashforth Moulton

2.4.1 Metode Adams Bashforth Moulton Orde-4

Penyelesaian persamaan diferensial biasa dengan menggunakan metode Adams Bashforth Moulton (ABM) adalah proses mencari nilai fungsi $y(x)$ pada titik x tertentu dari persamaan diferensial biasa nonlinier orde-1 $y' = f(x, y)$ dan nilai awal $y(x_0) = y_0$ yang diketahui dengan melakukan prediksi dengan persamaan prediktor dan melakukan koreksi dengan persamaan korektor. Nilai-nilai awal yang dibutuhkan pada metode ABM dapat diperoleh dari metode satu langkah (*one-step method*). Selanjutnya untuk mendapatkan kombinasi hasil yang baik, metode Runge-Kutta Orde-4 dapat digunakan bersama metode ABM.

Apriadi dan Prihandono (2014:109) mendefinisikan persamaan diferensial nonlinier orde-1 dengan nilai awal $y(x_0) = y_0$ sebagai berikut.

$$y' = f(x, y(x)) \quad (2.18)$$

Persamaan (2.18) diintegrasikan dari x_n sampai $x_{n+1} = x_n + h$ untuk mendapatkan solusi y_{n+1} pada titik x_{n+1} , sehingga diperoleh

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{dy}{dx} dx = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx$$

$$y(x) \Big|_{x_n}^{x_{n+1}} = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx$$

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx$$

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx$$

Rumus prediktor (y_{n+1}^p) diperoleh dengan substitusi interpolasi arah mundur Newton derajat-3 untuk $y' = f(x, y(x))$ yang terdefinisi pada titik-titik x_n, x_{n-1}, x_{n-2} . Jika dinotasikan $f(x_{n+i}, y(x_{n+i})) = f_{n+i}$ dan digunakan $\nabla^k f_{n+i}$ sebagai bentuk operasi selisih mundur derajat- k dari fungsi f_{n+i} , maka diperoleh hasil sebagai berikut.

$$y_{n+1}^p = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left[f_n + \frac{\nabla f_n}{1!h}(x-x_n) + \frac{\nabla^2 f_n}{2!h^2}(x-x_n)(x-x_{n-1}) + \frac{\nabla^3 f_n}{3!h^3}(x-x_n)(x-x_{n-1})(x-x_{n-2}) \right] dx \quad (2.19)$$

Selanjutnya untuk menyederhanakan integral persamaan (2.19), didefinisikan peubah

$$u = \frac{x-x_n}{h}, \quad du = \frac{dx}{h}, \quad h = x_{n+1} - x_n$$

Jika $x = x_n$ maka $u = \frac{x-x_n}{h} = \frac{0}{h} = 0$, dan jika $x = x_{n+1}$ maka $u = \frac{x_{n+1}-x_n}{h} = \frac{h}{h} = 1$,

sehingga persamaan (2.19) diintegrasikan dari 0 sampai 1 terhadap u menjadi

$$y_{n+1}^p = y_n + \int_0^1 \left[f_n + \nabla f_n u + \frac{\nabla^2 f_n}{2} u(u+1) + \frac{\nabla^3 f_n}{6} u(u+1)(u+2) \right] h du \quad (2.20)$$

Selanjutnya dengan menyelesaikan integral persamaan (2.20), maka diperoleh rumus prediktor metode ABM sebagai berikut.

$$\begin{aligned} y_{n+1}^p &= y_n + \int_0^1 \left[f_n + \nabla f_n u + \frac{\nabla^2 f_n}{2} (u^2 + u) + \frac{\nabla^3 f_n}{6} (u^3 + 3u^2 + 2u) \right] h du \\ &= y_n + h \left(f_n u + \frac{1}{2} \nabla f_n u^2 + \frac{\nabla^2 f_n}{2} \left(\frac{1}{3} u^3 + \frac{1}{2} u^2 \right) + \frac{\nabla^3 f_n}{6} \left(\frac{1}{4} u^4 + u^3 + u^2 \right) \right) \Bigg|_0^1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= y_n + h \left(\left(f_n + \frac{1}{2} \nabla f_n + \frac{\nabla^2 f_n}{2} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) + \frac{\nabla^3 f_n}{6} \left(\frac{1}{4} + 1 + 1 \right) \right) - (0) \right) \\
&= y_n + h \left(f_n + \frac{1}{2} \nabla f_n + \frac{\nabla^2 f_n}{2} \left(\frac{5}{6} \right) + \frac{\nabla^3 f_n}{6} \left(\frac{9}{4} \right) \right) \\
&= y_n + h \left(f_n + \frac{1}{2} \nabla f_n + \frac{5}{12} \nabla^2 f_n + \frac{3}{8} \nabla^3 f_n \right) \tag{2.21}
\end{aligned}$$

Persamaan diferensial pada titik berikutnya dapat dihitung sebagai berikut.

$$f_{n+1} = f_{n+1}(x_{n+1}, y_{n+1}^p)$$

Setelah f dihitung, dengan substitusi polinomial Newton derajat-3 yang baru untuk $y' = f(x, y(x))$ dengan menggunakan titik-titik x_{n+1}, x_n, x_{n-1} diperoleh rumus korektor (y_{n+1}^c) metode ABM, yaitu:

$$\begin{aligned}
y_{n+1}^c = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} &\left[f_{n+1} + \frac{\nabla f_{n+1}}{1!h} (x - x_{n+1}) + \frac{\nabla^2 f_{n+1}}{2!h^2} (x - x_{n+1})(x - x_n) + \right. \\
&\left. \frac{\nabla^3 f_{n+1}}{3!h^3} (x - x_{n+1})(x - x_n)(x - x_{n-1}) \right] dx \tag{2.22}
\end{aligned}$$

Selanjutnya untuk menyederhanakan integral persamaan (2.22), didefinisikan peubah

$$u = \frac{x - x_{n+1}}{h}, \quad du = \frac{dx}{h}, \quad h = x_{n+1} - x_{n+1-1}$$

Jika $x = x_n$ maka $u = \frac{(x - x_{n+1})}{h} = \frac{-h}{h} = -1$, dan jika $x = x_{n+1}$ maka $u = \frac{x_{n+1} - x_{n+1}}{h}$

$= \frac{0}{h} = 0$, sehingga persamaan (2.22) diintegrasikan dari -1 sampai 0 terhadap u

menjadi

$$y_{n+1}^c = y_n + \int_{-1}^0 \left[f_{n+1} + \nabla f_{n+1} u + \frac{\nabla^2 f_{n+1}}{2} u(u+1) + \frac{\nabla^3 f_{n+1}}{6} u(u+1)(u+2) \right] h du \tag{2.23}$$

Dengan menyelesaikan integral persamaan (2.23), maka diperoleh rumus korektor metode ABM sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 y_{n+1}^c &= y_n + \int_{-1}^0 \left[f_{n+1} + \nabla f_{n+1} u + \frac{\nabla^2 f_{n+1}}{2} (u^2 + u) + \frac{\nabla^3 f_{n+1}}{6} (u^3 + 3u^2 + 2u) \right] h du \\
 &= y_n + h \left(f_{n+1} u + \frac{1}{2} \nabla f_{n+1} u^2 + \frac{\nabla^2 f_{n+1}}{2} \left(\frac{1}{3} u^3 + \frac{1}{2} u^2 \right) + \frac{\nabla^3 f_{n+1}}{6} \left(\frac{1}{4} u^4 + u^3 + u^2 \right) \right) \Bigg|_{-1}^0 \\
 &= y_n + h \left((0) - \left(-f_{n+1} + \frac{1}{2} \nabla f_{n+1} + \frac{\nabla^2 f_{n+1}}{2} \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) + \frac{\nabla^3 f_{n+1}}{6} \left(\frac{1}{4} - 1 + 1 \right) \right) \right) \\
 &= y_n + h \left(f_{n+1} - \frac{1}{2} \nabla f_{n+1} - \frac{\nabla^2 f_{n+1}}{2} \left(\frac{1}{6} \right) - \frac{\nabla^3 f_{n+1}}{6} \left(\frac{1}{4} \right) \right) \\
 &= y_n + h \left(f_{n+1} - \frac{1}{2} \nabla f_{n+1} - \frac{1}{12} \nabla^2 f_{n+1} - \frac{1}{24} \nabla^3 f_{n+1} \right) \quad (2.24)
 \end{aligned}$$

Persamaan (2.21) dan (2.24) diubah menjadi bentuk yang ekuivalen dengan cara substitusi hubungan ordinat diferensial (Azizah, 2013:15-17).

Adapun definisi mengenai operator selisih mundur derajat- k didapatkan bahwa:

Selisih mundur derajat-1 adalah

$$\nabla f_{n+i} = f_{n+i} - f_{n+i-1}$$

Selisih mundur derajat-2 adalah

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 f_{n+i} &= \nabla f_{n+i} - \nabla f_{n+i-1} \\
 &= (f_{n+i} - f_{n+i-1}) - (f_{n+i-1} - f_{n+i-2}) \\
 &= f_{n+i} - f_{n+i-1} - f_{n+i-1} + f_{n+i-2}
 \end{aligned}$$

Sehingga dapat dinyatakan

$$\nabla^2 f_{n+i} = f_{n+i} - 2f_{n+i-1} + f_{n+i-2}$$

Selisih mundur derajat-3 adalah

$$\begin{aligned}\nabla^3 f_{n+i} &= \nabla^2 f_{n+i} - \nabla^2 f_{n+i-1} \\ &= (f_{n+i} - 2f_{n+i-1} + f_{n+i-2}) - (f_{n+i-1} - 2f_{n+i-2} + f_{n+i-3}) \\ &= f_{n+i} - 2f_{n+i-1} + f_{n+i-2} - f_{n+i-1} + 2f_{n+i-2} - f_{n+i-3}\end{aligned}$$

Sehingga dapat dinyatakan

$$\nabla^3 f_{n+i} = f_{n+i} - 3f_{n+i-1} + 3f_{n+i-2} - f_{n+i-3}$$

Selanjutnya dengan mensubstitusikan selisih mundur derajat-1 sampai derajat-3 ke dalam persamaan (2.21) dan (2.24), maka diperoleh rumus prediktor dan korektor metode ABM sebagai berikut.

Rumus prediktor ABM

$$\begin{aligned}y_{n+1}^p &= y_n + h \left(f_n + \frac{1}{2} \nabla f_n + \frac{5}{12} \nabla^2 f_n + \frac{3}{8} \nabla^3 f_n \right) \\ &= y_n + h \left(f_n + \frac{1}{2} (f_n - f_{n-1}) + \frac{5}{12} (f_n - 2f_{n-1} + f_{n-2}) + \frac{3}{8} (f_n - 3f_{n-1} \right. \\ &\quad \left. + 3f_{n-2} - f_{n-3}) \right) \\ &= y_n + h \left(f_n + \frac{1}{2} f_n - \frac{1}{2} f_{n-1} + \frac{5}{12} f_n - \frac{10}{12} f_{n-1} + \frac{5}{12} f_{n-2} + \frac{3}{8} f_n - \frac{9}{8} f_{n-1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{9}{8} f_{n-2} - \frac{3}{8} f_{n-3} \right) \\ &= y_n + h \left(\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{5}{12} + \frac{3}{8} \right) f_n - \left(\frac{1}{2} + \frac{10}{12} + \frac{9}{8} \right) f_{n-1} + \left(\frac{5}{12} + \frac{9}{8} \right) f_{n-2} - \frac{3}{8} f_{n-3} \right) \\ &= y_n + h \left(\left(\frac{55}{24} \right) f_n - \left(\frac{59}{24} \right) f_{n-1} + \left(\frac{37}{24} \right) f_{n-2} - \frac{9}{24} f_{n-3} \right) \\ &= y_n + \frac{h}{24} (55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3})\end{aligned}$$

Sehingga rumus prediktor ABM dapat dinyatakan

$$y_{n+1}^p = y_n + \frac{h}{24} (55y_n' - 59y_{n-1}' + 37y_{n-2}' - 9y_{n-3}') \quad (2.25)$$

Rumus korektor ABM

$$\begin{aligned}
 y_{n+1}^c &= y_n + h \left(f_{n+1} - \frac{1}{2} \nabla f_{n+1} - \frac{1}{12} \nabla^2 f_{n+1} - \frac{1}{24} \nabla^3 f_{n+1} \right) \\
 &= y_n + h \left(f_{n+1} - \frac{1}{2} (f_{n+1} - f_n) - \frac{1}{12} (f_{n+1} - 2f_n + f_{n-1}) - \frac{1}{24} (f_{n+1} - 3f_n \right. \\
 &\quad \left. + 3f_{n-1} - f_{n-2}) \right) \\
 &= y_n + h \left(f_{n+1} - \frac{1}{2} f_{n+1} + \frac{1}{2} f_n - \frac{1}{12} f_{n+1} + \frac{2}{12} f_n - \frac{1}{12} f_{n-1} - \frac{1}{24} f_{n+1} + \frac{3}{24} f_n \right. \\
 &\quad \left. - \frac{3}{24} f_{n-1} + \frac{1}{24} f_{n-2} \right) \\
 &= y_n + h \left(\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{12} - \frac{1}{24} \right) f_{n+1} + \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{12} + \frac{3}{24} \right) f_n - \left(\frac{1}{12} + \frac{3}{24} \right) f_{n-1} + \frac{1}{24} f_{n-2} \right) \\
 &= y_n + h \left(\left(\frac{9}{24} \right) f_{n+1} + \left(\frac{19}{24} \right) f_n - \left(\frac{5}{24} \right) f_{n-1} + \frac{1}{24} f_{n-2} \right) \\
 &= y_n + \frac{h}{24} (9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2})
 \end{aligned}$$

Sehingga rumus korektor ABM dapat dinyatakan

$$y_{n+1}^c = y_n + \frac{h}{24} (9y_{n+1}^p + 19y_n' - 5y_{n-1}' + y_{n-2}') \quad (2.26)$$

dengan $y_n' = f(x_n, y_n)$ dan $y_{n+1}^p = f(x_{n+1}, y_{n+1})$, $\forall n = 3, 4, \dots$

Metode ABM di atas disebut juga metode ABM orde-4. Andaikan py_{n+1} merupakan nilai dari y_{n+1}^p dan y_{n+1} merupakan nilai dari y_{n+1}^c , maka rumus metode ABM orde-4 dapat ditulis sebagai berikut.

$$\text{Prediktor: } py_{n+1} = y_n + \frac{h}{24} (55y_n' - 59y_{n-1}' + 37y_{n-2}' - 9y_{n-3}')$$

$$\text{Korektor: } y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24} (9py_{n+1}' + 19y_n' - 5y_{n-1}' + y_{n-2}') \quad (2.27)$$

dengan $y_n' = f(x_n, y_n)$, $\forall n = 3, 4, \dots$ (Bronson dan Costa, 2007:145).

2.4.2 Galat Metode Adams Bashforth Moulton Orde-4

Djojodihadjo (2002) dalam skripsi Azizah (2013:22), menyatakan bahwa untuk menyelidiki galat perlangkah pasangan prediktor dan korektor yang terdiri dari Adams Bashforth (AB) dan Adams Moulton (AM) dalam orde-4 pada persamaan diferensial, maka anggap $e_k(x)$ menyatakan galat bawaan sewaktu penggantian $y'(x)$ dengan polinomial interpolasi $p(x)$ yaitu:

$$e_k(x) = y'(x) - p(x)$$

Maka galat $e_k(x)$ dapat ditulis menjadi

$$e_k(x) = \frac{y^{(k+2)}(\xi_n)}{(k+1)!} (x - x_{n+i})(x - x_{n-1+i}) \dots (x - x_{n-k+i})$$

Galat E_{AM} pada prediktor diperoleh dengan mengintegrasikan $e_k(x)$ di $[x_n, x_{n+1}]$

$$E_{AM} = \frac{y^{(k+2)}(\xi_1)}{(k+1)!} \int_{x_n}^{x_{n+1}} (x - x_n)(x - x_{n-1}) \dots (x - x_{n-k}) dx \quad (2.28)$$

dengan $y^{(k+2)}(\xi_1)$ adalah turunan ke- $(k+2)$ dari y di ξ_1 , $(x_{n-k} < \xi_1 < x_{n+1})$.

Selanjutnya untuk menyederhanakan integral, didefinisikan peubah

$$u = \frac{x - x_n}{h}, \quad du = \frac{dx}{h}, \quad h = x_{n+1} - x_n$$

Jika $x = x_n$ maka $u = \frac{(x_n - x_n)}{h} = \frac{0}{h} = 0$, dan jika $x = x_{n+1}$ maka

$$u = \frac{x_{n+1} - x_n}{h} = \frac{h}{h} = 1, \text{ sehingga persamaan (2.28) diintegrasikan dari 0 sampai 1}$$

terhadap u menjadi

$$E_{AM} = \frac{y^{(k+2)}(\xi_1)}{(k+1)!} \int_0^1 u(u+1)\dots(u+k)h^{k+1} h du \quad (2.29)$$

Jika integral dikerjakan, maka diperoleh galat E_{AM} untuk prediktor derajat-3 sebagai berikut.

$$\begin{aligned} E_{AM} &= \frac{y^{(3+2)}(\xi_1)}{(3+1)!} \int_0^1 u(u+1)(u+2)(u+3)h^{3+1} h du \\ &= \frac{h^5 y^{(5)}(\xi_1)}{4!} \int_0^1 u(u+1)(u+2)(u+3) du \\ &= \frac{h^5 y^{(5)}(\xi_1)}{24} \int_0^1 (u^4 + 6u^3 + 11u^2 + 6u) du \\ &= \frac{h^5 y^{(5)}(\xi_1)}{24} \left(\frac{1}{5}u^5 + \frac{6}{4}u^4 + \frac{11}{3}u^3 + \frac{6}{2}u^2 \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{h^5 y^{(5)}(\xi_1)}{24} \left(\left(\frac{1}{5} + \frac{6}{4} + \frac{11}{3} + 3 \right) - (0) \right) \\ &= \frac{h^5 y^{(5)}(\xi_1)}{24} \left(\frac{502}{60} \right) \end{aligned}$$

Sehingga dapat dinyatakan

$$E_{AM} = \frac{251}{720} h^5 y^{(5)}(\xi_1) \quad (2.30)$$

Selanjutnya dengan cara yang sama, maka galat E_{AB} pada korektor dapat dicari sebagai berikut.

$$E_{AB} = \frac{y^{(k+2)}(\xi_2)}{(k+1)!} \int_{x_n}^{x_{n+1}} (x-x_{n+1})(x-x_n)\dots(x-x_{n-k+1})dx \quad (2.31)$$

dengan $y^{(k+2)}(\xi_2)$ adalah turunan ke- $(k+2)$ dari y di ξ_2 ($x_{n-k} < \xi_2 < x_{n+1}$).

Selanjutnya untuk menyederhanakan integral, didefinisikan peubah

$$u = \frac{x - x_{n+1}}{h}, \quad du = \frac{dx}{h}, \quad h = x_{n+1} - x_{n+1-1}$$

Jika $x = x_n$ maka $u = \frac{(x_n - x_{n+1})}{h} = \frac{-h}{h} = -1$, dan jika $x = x_{n+1}$ maka

$u = \frac{(x_{n+1} - x_{n+1})}{h} = \frac{0}{h} = 0$, sehingga persamaan (2.31) diintegrasikan dari -1 sampai

0 terhadap u menjadi

$$E_{AB} = \frac{y^{(k+2)}(\xi_2)}{(k+1)!} \int_{-1}^0 u(u+1)\dots(u+k)h^{k+1} h du \quad (2.32)$$

Jika integral dikerjakan, maka diperoleh galat E_{AB} untuk korektor derajat-3 sebagai berikut.

$$\begin{aligned} E_{AB} &= \frac{y^{(3+2)}(\xi_2)}{(3+1)!} \int_{-1}^0 u(u+1)(u+2)(u+3)h^{3+1} h du \\ &= \frac{h^5 y^{(5)}(\xi_2)}{4!} \int_{-1}^0 u(u+1)(u+2)(u+3) du \\ &= \frac{h^5 y^{(5)}(\xi_2)}{24} \int_{-1}^0 (u^4 + 6u^3 + 11u^2 + 6u) du \\ &= \frac{h^5 y^{(5)}(\xi_2)}{24} \left(\frac{1}{5}u^5 + \frac{6}{4}u^4 + \frac{11}{3}u^3 + \frac{6}{2}u^2 \right) \Big|_{-1}^0 \\ &= \frac{h^5 y^{(5)}(\xi_2)}{24} \left((0) - \left(-\frac{1}{5} + \frac{6}{4} - \frac{11}{3} + 3 \right) \right) \\ &= \frac{h^5 y^{(5)}(\xi_2)}{24} \left(-\frac{38}{60} \right) \end{aligned}$$

Sehingga dapat dinyatakan

$$E_{AB} = -\frac{19}{720} h^5 y^{(5)}(\xi_2) \quad (2.33)$$

Jika nilai-nilai dari $f(x)$ dianggap eksak pada semua titik sampai dengan x_n dan jika Y_{n+1} merupakan nilai eksak dari y pada x_{n+1} , maka dari persamaan (2.30) dan (2.33) diperoleh perkiraan kesalahan sebagai berikut.

$$Y_{n+1} - py_{n+1} = \frac{251}{720} h^5 y^{(5)}(\xi_1) \quad (2.34)$$

$$Y_{n+1} - y_{n+1} = -\frac{19}{720} h^5 y^{(5)}(\xi_2) \quad (2.35)$$

Pada umumnya $\xi_1 \neq \xi_2$, akan tetapi jika beranggapan bahwa pada selang yang bersangkutan $y^{(5)}(t)$ mendekati tetap, maka setelah mengurangi persamaan (2.34) dari (2.35) diperoleh perkiraan untuk $y^{(5)}$ sebagai berikut.

$$(Y_{n+1} - py_{n+1}) - (Y_{n+1} - y_{n+1}) = \frac{251}{720} h^5 y^{(5)} - \left(-\frac{19}{720} h^5 y^{(5)} \right)$$

Sehingga dapat disederhanakan menjadi

$$(y_{n+1} - py_{n+1}) = \frac{270}{720} h^5 y^{(5)}$$

Dengan demikian diperoleh

$$h^5 y^{(5)} = \frac{720}{270} (y_{n+1} - py_{n+1})$$

Jika hasil di atas disubstitusikan ke persamaan (2.33) diperoleh

$$E_{AB} = -\frac{19}{720} \left(\frac{720}{270} (y_{n+1} - py_{n+1}) \right) = -\frac{19}{270} (y_{n+1} - py_{n+1}) = D_{n+1} \quad (2.36)$$

Selanjutnya agar galat perlangkah memiliki batas maka dapat dibentuk menjadi

$$\varepsilon_1 \leq \frac{|D_{n+1}|}{h} \leq \varepsilon_2$$

dengan ε_1 adalah batas bawah galat dan ε_2 adalah batas atas galat dengan nilai awalnya telah tersedia, maka perhitungan galat dapat dilakukan sebagai berikut.

1. Gunakan persamaan (2.25) dan (2.26) untuk memperoleh nilai py_{n+1} dan y_{n+1} .

2. Hitung $|D_{n+1}|$ dari persamaan (2.25), jika $\varepsilon_1 \leq \frac{|D_{n+1}|}{h} \leq \varepsilon_2$, maka lanjutkan ke iterasi berikutnya dengan menggunakan nilai h yang sama. Jika $\frac{|D_{n+1}|}{h} \geq \varepsilon_2$, maka ukuran langkah h adalah terlalu besar dan harus dikurangi yaitu mengganti h dengan $\frac{h}{2}$, menghitung kembali empat nilai awal dan kemudian kembali ke langkah 1. Akan tetapi jika $\frac{|D_{n+1}|}{h} \leq \varepsilon_1$, maka diperoleh ketelitian lebih besar dari pada yang diperlukan, sehingga untuk menghemat waktu komputasi dapat mengganti h dengan $2h$, dan kembali ke langkah 1 (Azizah, 2013:24-25).

2.4.3 Metode Adams Bashforth Moulton Orde-4 untuk Menyelesaikan Sistem Persamaan Diferensial Orde-1 dengan Empat Variabel Tak Bebas

Diberikan sistem persamaan diferensial orde-1 dengan empat variabel tak bebas, sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= f(t, x, y, z, w) \\ \frac{dy(t)}{dt} &= g(t, x, y, z, w) \\ \frac{dz(t)}{dt} &= h(t, x, y, z, w) \\ \frac{dw(t)}{dt} &= i(t, x, y, z, w)\end{aligned}\tag{2.37}$$

Formulasi metode Adam Basforth Moulton (ABM) Orde-4 yang sesuai dengan (2.27) adalah

$$\text{Prediktor: } py_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(55y_n' - 59y_{n-1}' + 37y_{n-2}' - 9y_{n-3}')$$

$$\text{Korektor: } y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(9py_{n+1}' + 19y_n' - 5y_{n-1}' + y_{n-2}')$$

Dimana $y_n' = f(x_n, y_n)$, $\forall n = 3, 4, \dots$ dan nilai y_0, y_1, y_2 , dan y_3 dapat dicari dengan menggunakan metode Runge Kutta Orde-4 dan nilai dari f_n, f_{n-1}, f_{n-2} dan f_{n-3} dengan $n = 3, 4, \dots$ didefinisikan sebagai berikut.

$$f_{n-3} = f_0 = f(x_0, y_0)$$

$$f_{n-2} = f_1 = f(x_1, y_1)$$

$$f_{n-1} = f_2 = f(x_2, y_2)$$

$$f_n = f_3 = f(x_3, y_3)$$

Berdasarkan penelitian Apriadi dan Prihandono (2014) serta penelitian Nur Azizah (2013) tentang aplikasi metode ABM orde-4, maka penyelesaian persamaan (2.37) dengan metode ABM orde-4 dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \text{Prediktor: } px_{n+1} &= x_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}). \\ py_{n+1} &= y_n + \frac{h}{24}(55g_n - 59g_{n-1} + 37g_{n-2} - 9g_{n-3}). \\ pz_{n+1} &= z_n + \frac{h}{24}(55h_n - 59h_{n-1} + 37h_{n-2} - 9h_{n-3}). \\ pw_{n+1} &= w_n + \frac{h}{24}(55i_n - 59i_{n-1} + 37i_{n-2} - 9i_{n-3}). \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned} \text{Korektor: } x_{n+1} &= x_n + \frac{h}{24}(9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}). \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{24}(9g_{n+1} + 19g_n - 5g_{n-1} + g_{n-2}). \\ z_{n+1} &= z_n + \frac{h}{24}(9h_{n+1} + 19h_n - 5h_{n-1} + h_{n-2}). \\ w_{n+1} &= w_n + \frac{h}{24}(9i_{n+1} + 19i_n - 5i_{n-1} + i_{n-2}). \end{aligned} \quad (2.39)$$

dimana penentuan nilai awal $x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}$ dan w_{n+1} dengan metode Runge Kutta

Orde-4 dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} &= x_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\
 y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4) \\
 z_{n+1} &= z_n + \frac{1}{6}(n_1 + 2n_2 + 2n_3 + n_4) \\
 w_{n+1} &= w_n + \frac{1}{6}(p_1 + 2p_2 + 2p_3 + p_4)
 \end{aligned} \tag{2.40}$$

dimana

$$\begin{aligned}
 k_1 &= hf(t_n, x_n, y_n, z_n, w_n) \\
 m_1 &= hg(t_n, x_n, y_n, z_n, w_n) \\
 n_1 &= hh(t_n, x_n, y_n, z_n, w_n) \\
 p_1 &= hi(t_n, x_n, y_n, z_n, w_n) \\
 k_2 &= hf\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_1}{2}, y_n + \frac{m_1}{2}, z_n + \frac{n_1}{2}, w_n + \frac{p_1}{2}\right) \\
 m_2 &= hg\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_1}{2}, y_n + \frac{m_1}{2}, z_n + \frac{n_1}{2}, w_n + \frac{p_1}{2}\right) \\
 n_2 &= hh\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_1}{2}, y_n + \frac{m_1}{2}, z_n + \frac{n_1}{2}, w_n + \frac{p_1}{2}\right) \\
 p_2 &= hi\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_1}{2}, y_n + \frac{m_1}{2}, z_n + \frac{n_1}{2}, w_n + \frac{p_1}{2}\right) \\
 k_3 &= hf\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_2}{2}, y_n + \frac{m_2}{2}, z_n + \frac{n_2}{2}, w_n + \frac{p_2}{2}\right) \\
 m_3 &= hg\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_2}{2}, y_n + \frac{m_2}{2}, z_n + \frac{n_2}{2}, w_n + \frac{p_2}{2}\right) \\
 n_3 &= hh\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_2}{2}, y_n + \frac{m_2}{2}, z_n + \frac{n_2}{2}, w_n + \frac{p_2}{2}\right) \\
 p_3 &= hi\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_2}{2}, y_n + \frac{m_2}{2}, z_n + \frac{n_2}{2}, w_n + \frac{p_2}{2}\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_4 &= hf(t_n + h, x_n + k_3, y_n + m_3, z_n + n_3, w_n + p_3) \\
m_4 &= hg(t_n + h, x_n + k_3, y_n + m_3, z_n + n_3, w_n + p_3) \\
n_4 &= hh(t_n + h, x_n + k_3, y_n + m_3, z_n + n_3, w_n + p_3) \\
p_4 &= hi(t_n + h, x_n + k_3, y_n + m_3, z_n + n_3, w_n + p_3)
\end{aligned}
\tag{2.41}$$

2.5 Galat

Penyelesaian secara numerik suatu persamaan matematika hanya memberikan nilai perkiraan yang mendekati nilai eksak (nilai sejati) yang sesuai dengan kenyataan, sehingga dalam penyelesaian numerik terdapat beberapa kesalahan (galat) terhadap nilai eksak. Galat berasosiasi dengan seberapa dekat solusi hampiran terhadap solusi sejatinya. Semakin kecil galatnya maka semakin teliti solusi numerik yang didapatkan. Terdapat tiga macam galat perhitungan numerik, yaitu galat pemotongan, galat pembulatan, dan galat total (Munir, 2006:25).

Galat pemotongan terjadi karena tidak dilakukannya perhitungan sesuai dengan prosedur matematika yang benar. Galat pemotongan mengacu pada galat yang ditimbulkan akibat penggunaan hampiran sebagai pengganti formula eksak. Sebagai contoh, suatu proses tak berhingga diganti dengan proses berhingga. Dalam matematika, suatu fungsi dapat dipresentasikan dalam bentuk deret tak berhingga, misalkan

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Nilai eksak dari e^x diperoleh apabila semua suku deret tersebut diperhitungkan. Dalam praktik, sulit memperhitungkan semua suku pertama sampai tak berhingga. Apabila hanya diperhitungkan beberapa suku pertama saja, maka hasilnya tidak sama dengan nilai eksak (Munir, 2006:26).

Galat pembulatan terjadi karena tidak diperhitungkannya beberapa angka terakhir dari suatu bilangan. Galat ini terjadi apabila bilangan perkiraan digunakan untuk menggantikan bilangan eksak. Suatu bilangan dibulatkan pada posisi ke n dengan membuat semua angka di sebelah kanan dari posisi tersebut nol. Sedangkan angka pada posisi ke n tersebut tidak berubah atau dinaikkan satu digit yang tergantung apakah nilai tersebut lebih kecil atau lebih besar 0.5 dari angka posisi ke n . Sebagai contoh, nilai

7832574 dapat dibulatkan menjadi 7833000

2,5415926 dapat dibulatkan menjadi 2,54

Galat total atau galat akhir pada solusi numerik merupakan jumlah galat pemotongan dan galat pembulatan. Misalkan diberikan contoh perhitungan hampiran nilai $\cos(0.2)$ dengan menggunakan deret Maclaurin orde-4 sebagai berikut.

$$\cos(0.2) \approx 1 - \frac{0.2^2}{2} + \frac{0.2^4}{24} \approx 0.9800667$$

$\uparrow$
galat pemotongan

$\uparrow$
galat pembulatan

Galat pemotongan timbul karena menghampiri $\cos(0.2)$ sampai suku orde-4, sedangkan galat pembulatan timbul karena membulatkan nilai hampiran ke dalam 7 digit angka (Munir, 2006:28).

2.6 Solusi Analitik dan Numerik dalam Perspektif Agama

Dalam kehidupan manusia, manusia telah dibedakan ke dalam dua Maqom yaitu manusia yang berada dalam Maqom Asbab dan manusia yang berada dalam Maqom Tajrid. Manusia yang berada dalam Maqom Asbab akan selalu melakukan interaksi dengan manusia yang lain sehingga akan terjadi kelangsungan hidup di antara mereka, mereka sama-sama memiliki tanggung jawab terhadap kehidupan di antara mereka sehingga berkewajiban untuk memikirkan keberlangsungan kehidupan satu sama lain sebagai hubungan *hablum min an-nas*. Oleh karena itu, manusia dituntut untuk terus berusaha menjalani kehidupan dengan sebaik-baiknya.

Manusia yang berada pada Maqom Tajrid akan jauh dari interaksi dengan sesama manusia, mereka hanya mengutamakan hubungan dengan sang penciptanya atau *hablum min Allah*. Dalam memenuhi kebutuhan hidupnya mereka telah memasrahkan segala kebutuhannya kepada Allah, karena dalam maqom ini Allah telah menjamin dalam masalah rizki, sehingga mereka hanya terfokus pada urusan akhirat.

Dilihat dari sisi lain, kehidupan manusia di dunia ini juga terbagi menjadi dua bagian yaitu manusia yang hidup secara linier dan manusia yang hidup secara nonlinier. Manusia yang hidup secara linier cenderung akan menjalani hidup sesuai aturan, tujuan hidupnya terfokus pada satu tujuan dan tidak banyak keinginan yang ingin dicapai dalam hidupnya. Sedangkan mereka yang hidup secara tak linier dalam hidupnya akan mengalami berbagai rintangan demi mencapai tujuan hidupnya. Ketaklinieran dalam hidup manusia juga terjadi pada masalah-masalah yang mereka hadapi, sehingga mereka tidak selamanya mampu

memecahkan masalah kehidupan dengan mudah. Dalam Islam manusia diajarkan untuk terus berusaha menemukan solusi dari setiap masalah yang mereka hadapi. Hal ini karena solusi dari satu masalah dapat diselesaikan tidak hanya dengan satu cara, namun dapat selesai dengan beberapa cara. Sebagaimana telah dijelaskan dalam al-Quran surat Yusuf/12:

وَقَالَ يَبْنِي لَا تَدْخُلُوا مِنْ بَابٍ وَاحِدٍ, وَأَدْخُلُوا مِنْ أَبْوَابٍ مُتَفَرِّقَةٍ ﴿٦٧﴾

”Hai anak-anakku janganlah kamu (bersama-sama) masuk dari satu pintu gerbang, dan masuklah dari pintu-pintu gerbang yang berlain-lain”. (QS. Yusuf/12:67)

Dalam *Tafsir al-Aisar* dijelaskan bahwa ayat tersebut turun pada saat Nabi Ya’kub a.s. telah memberikan izin kepada putra-putranya untuk pergi ke Kota Mesir bersama adik termudanya, namun demi keselamatannya beliau memerintahkan putra-putranya agar tidak memasuki Kota Mesir melalui satu jalan, hendaknya dapat memasuki melalui berbagai pintu masuk agar terhindar dari bahaya yang tidak diinginkan. Berdasarkan ayat di atas dapat dijelaskan pula bahwa Allah Swt. telah menyediakan berbagai metode dalam menyelesaikan suatu masalah agar menemukan solusi terbaiknya. Manusia dituntut untuk terus berusaha menemukan solusi yang tepat dari satu metode ke metode yang lain bahkan di berbagai metode (*min abwabim mutafarriqah*). Hal ini juga terjadi dalam penyelesaian masalah matematika, terdapat banyak metode baik metode analitik maupun metode numerik dalam menentukan suatu solusi dari masalah-masalah linier maupun nonlinier (Jabir, 2009:838-839).

Metode analitik maupun metode numerik memberikan tingkat kebenaran yang berbeda, metode analitik akan selalu berusaha memberikan solusi eksak

sedangkan metode numerik memberikan solusi hampiran yang mendekati solusi eksak. Namun keduanya sama-sama memiliki tingkat kebenaran yang telah diakui dan disepakati, karena tidak semua masalah matematika dapat diselesaikan secara eksak sehingga perlu perhitungan numerik untuk mendapatkan solusinya. Dalam *Tafsir Nurul Qur'an* dari lanjutan ayat di atas menjelaskan bahwa keputusan menetapkan hanyalah milik Allah (*Inil Hukmu Illa Lillahi*), sehingga dapat ditarik kesimpulan bahwa semua metode memiliki tingkat kebenaran yang telah diakui meskipun tidak mencapai tingkat kebenaran sejati (Faqih, 2005:569-570).

Dalam sains dan teknik sering ditemukan masalah-masalah yang penyelesaiannya tidak dapat diatasi dengan hanya menggunakan rumus atau konsep yang sudah ada. Banyak fenomena-fenomena yang melahirkan model matematika, namun model matematikanya berbentuk nonlinier. Dalam situasi seperti ini dibutuhkan metode penyelesaian atau perhitungan matematika secara khusus dan perhitungan-perhitungan tersebut memerlukan persamaan diferensial.

Berkenaan dengan penyelesaian masalah, Allah Swt. memiliki janji kepada manusia, apabila manusia dihadapkan dengan suatu masalah yang sulit dipecahkan, maka hendaknya ia selalu ingat kepada Allah, dan senantiasa mendekatkan diri kepada-Nya dengan memperbanyak amal shaleh. Hal tersebut karena dengan memperbanyak amal shaleh akan mendatangkan pertolongan Allah dari arah yang tidak diduga. Allah Swt. berfirman dalam QS. al-Thalâq/65:2:

وَمَنْ يَتَّقِ اللَّهَ تَجْعَلْ لَهُ مَخْرَجًا ﴿٢﴾

“...Barangsiapa bertakwa kepada Allah niscaya Dia akan mengadakan baginya jalan keluar “(QS. al-Thalâq/65:2).

Ayat di atas menjelaskan barang siapa bertakwa kepada Allah dengan melaksanakan tuntunan-Nya dan meninggalkan larangan-Nya niscaya Dia akan mengadakan baginya jalan keluar dari aneka kesulitan hidup, termasuk hidup rumah tangga yang dihadapinya dan memberinya rizki yakni perolehan rizki duniawi dan ukhrawi dari arah yang tidak diduga (Jabir, 2009:499).

Menurut pandangan Islam setiap masalah ada beberapa penyelesaian yang dapat diambil jalan keluar atau solusi pemecahannya. Ketika suatu masalah itu sulit untuk diselesaikan dengan satu cara, maka hal tersebut pasti ada cara atau penyelesaian yang lain. Sebagaimana firman-Nya dalam QS. Alam Nasyroh, ayat 5-6:

فَإِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٥﴾ إِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٦﴾

“Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan (5) Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan (6)”. (QS. Alam Nasyroh /94:5-6)

Dalam *Tafsir al-Aisar* (2009) dijelaskan bahwa satu kesulitan tidak akan mampu mengalahkan dua kemudahan. Pada ayat di atas terdapat kata ‘*usri* (kesulitan) yang merupakan isim makrifat artinya satu dan terdapat pula kata *yusron* (kemudahan) sebagai isim nakirah artinya umum atau banyak. Dari penjabaran ayat tersebut dapat diketahui bahwa ada berbagai kemudahan yang telah dikaruniakan Allah pada hamba-Nya sebagai beberapa solusi alternatif dari satu kesulitan (Jabir, 2009:967).

Berdasarkan penjelasan di atas terbesit masalah matematika khususnya persamaan diferensial nonlinier yang sulit untuk dipecahkan baik secara analitik maupun numerik. Namun dengan terus berkembangnya ilmu matematika, metode-

metode penyelesaian masalah nonlinier terus ditemukan baik metode analitik maupun metode numerik, sehingga mampu memberikan kemudahan dalam menentukan solusi dari suatu masalah tak linier. Salah satu metode numerik untuk penyelesaian persamaan diferensial nonlinier adalah metode Runge Kutta Fehlberg (RKF 45) dan metode Adams Bashforth Moulton (ABM). Kedua metode tersebut merupakan salah satu metode numerik untuk menyelesaikan suatu masalah nonlinier, dimana kedua metode ini telah banyak diterapkan dalam berbagai bidang ilmu pengetahuan.

Suatu cabang ilmu matematika khususnya matematika rekayasa di antaranya adalah metode numerik. Menurut Munir (2006:5), metode numerik adalah teknik yang digunakan untuk memformulasikan persoalan matematika sehingga dapat dipecahkan dengan operasi perhitungan atau aritmetika biasa (tambah, kurang, kali dan bagi). Dalam metode numerik tidak mengutamakan jawaban yang eksak, tetapi mengusahakan metode yang menghasilkan jawaban pendekatan yang berbeda dari jawaban eksak sebesar nilai yang dapat diterima sesuai dengan pertimbangan praktis.

Berkaitan dengan metode numerik, dalam ayat lain Allah Swt. juga telah menjelaskan bahwa dalam setiap penciptaan-Nya telah diukur dan ditetapkan berdasarkan ukuran-Nya, seperti dalam firman-Nya surat al-Qomar/54:2:

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَاهُ بِقَدَرٍ ﴿٥٤﴾

”Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran ”
(QS. al-Qamar/54:49).

Dalam ayat di atas terdapat kata *qadar* yang mana dari segi bahasa dapat berarti kadar tertentu yang tidak bertambah atau berkurang atau juga berarti kuasa. Tetapi karena ayat tersebut berbicara tentang segala sesuatu yang berada dalam kuasa Allah Swt. maka lebih tepat memahaminya dalam arti ketentuan dan sistem yang ditetapkan terhadap segala sesuatu. Selanjutnya kata *qadar* atau ukuran dapat diartikan sebagai proporsi. Dalam kehidupan ini Allah Swt. telah menetapkan sesuatu sesuai dengan proporsi atau bagiannya masing-masing. Salah satu contohnya Allah Swt. telah menciptakan lalat yang merupakan binatang penghasil jutaan telur, tetapi ia tidak dapat bertahan hidup lebih dari dua minggu. Seandainya ia dapat hidup beberapa tahun dengan kemampuan bertelurnya, maka pastilah bumi ini dipenuhi lalat dan kehidupan sekian banyak jenis makhluk khususnya manusia akan menjadi mustahil. Tetapi semua itu berjalan berdasarkan sistem pengaturan dan kadar yang ditentukan Allah Swt. di alam raya ini (Jabir, 2009:200).

BAB III

PEMBAHASAN

Dalam bab ini akan dibahas penyelesaian numerik model imunologi seluler pada tuberkulosis yang berbentuk sistem persamaan diferensial nonlinier dengan Metode Runge Kutta Fehlberg (RKF 45) dan Metode Adams Bashforth Moulton (ABM). Model imunologi seluler pada tuberkulosis telah disusun oleh Eduardo Ibarguen dan lainnya dalam karya ilmiah yang berjudul *A Mathematical Model for Cellular Immunology of Tuberculosis*. Model tersebut terdiri dari empat variabel bergantung yang dirumuskan sebagai berikut (Ibarguen, dkk., 2011:976).

$$\begin{aligned}\frac{dMu(t)}{dt} &= \mu_U - \mu_U Mu(t) - \beta B(t) Mu(t) \\ \frac{dMi(t)}{dt} &= \beta B(t) Mu(t) - \alpha_T Mi(t) T(t) - \mu_I Mi(t) \\ \frac{dB(t)}{dt} &= r Mi(t) - \gamma_U Mu(t) B(t) - \mu_B B(t) \\ \frac{dT(t)}{dt} &= k_1 Mi(t) - k_1 Mi(t) T(t) - \mu_T T(t)\end{aligned}\tag{3.1}$$

dengan $Mu(t)$, $Mi(t)$, $B(t)$ dan $T(t)$ secara berturut-turut menunjukkan populasi makrofag tak terinfeksi, populasi makrofag terinfeksi, populasi bakteri Mtb dan populasi sel t pada saat t waktu. Sedangkan $Mu(0) = Mu_0$, $Mi(0) = Mi_0$, $B(0) = B_0$ dan $T(0) = T_0$ merupakan jumlah populasi makrofag, bakteri dan sel t pada saat $t = 0$. β , α_T , μ_U , μ_B , μ_I , μ_T , r , γ_U dan k_1 semuanya adalah koefisien dan konstanta positif pada model (3.1). β menunjukkan laju infeksi bakteri, α_T menunjukkan laju pertumbuhan sel t terhadap makrofag terinfeksi, μ_U adalah laju kematian makrofag tak terinfeksi, μ_I sebagai kematian makrofag terinfeksi, μ_B menunjukkan laju kematian alami bakteri, γ_U sebagai laju kematian bakteri

karena makrofag terinfeksi, r adalah jumlah rata-rata produksi bakteri pada makrofag terinfeksi dan k_1 adalah laju pertumbuhan sel t .

3.1 Penyelesaian Numerik Model Imunologi Seluler pada Tuberkulosis dengan Metode Runge Kutta Fehlberg (RKF 45)

Dalam menyelesaikan sistem persamaan diferensial nonlinier (3.1) dengan metode Runge Kutta Fehlberg (RKF 45), secara umum dapat dilakukan dengan langkah-langkah penyelesaian sebagai berikut:

1. Mengidentifikasi nilai parameter dan nilai awal pada sistem persamaan diferensial (3.1) yaitu variabel $Mu(0)$, $Mi(0)$, $B(0)$ dan $T(0)$
2. Menentukan nilai t (waktu) yang akan ditentukan penyelesaiannya beserta besarnya h (ukuran langkah)
3. Menentukan formulasi metode RKF 45 untuk sistem persamaan (3.1)
4. Menghitung variabel-variabel yang terdapat dalam rumus RKF 45 dengan menggunakan formulasi yang telah ditentukan, yaitu variabel k_1-k_6 , m_1-m_6 , n_1-n_6 dan p_1-p_6 .
5. Menghitung Mu_{i+1} , Mi_{i+1} , B_{i+1} dan T_{i+1} dengan mensubstitusikan variabel-variabel yang telah didapatkan pada langkah 4 ke dalam formulasi metode RKF 45 pada langkah 3.

3.1.1 Penyelesaian Numerik dengan Metode Runge Kutta Fehlberg (RKF) Orde-4

Langkah 1

Nilai parameter dan nilai awal dari setiap variabel pada sistem persamaan (3.1) diberikan pada Tabel 3.1 sebagai berikut.

Tabel 3.1 Nilai Parameter dan Nilai Awal Sistem Persamaan (3.1)

Variabel/ Parameter	Deskripsi	Nilai Parameter	Satuan
α_T	Laju pertumbuhan sel t terhadap makrofag terinfeksi	0.1	Perhari
μ_U	Laju kematian makrofag tak terinfeksi	0.00033	Perhari
β	Laju infeksi bakteri	$8.25 * 10^{-9}$	Perhari
μ_I	Laju kematian makrofag terinfeksi	0.011	Perhari
μ_B	Laju kematian alami bakteri	0.012	Perhari
μ_T	Laju kematian alami sel t	0.33	Perhari
r	Jumlah rata-rata produksi bakteri pada makrofag terinfeksi	$5 * 0.011$	(sel/ml) perhari
γ_U	Laju kematian bakteri karena makrofag terinfeksi	0.0879	Perhari
k_1	Laju pertumbuhan sel t	0.484848	Perhari
$Mu(0)$	Populasi awal makrofag tak terinfeksi	0.7	(sel/ml)
$Mi(0)$	Populasi awal makrofag terinfeksi	0.2	(sel/ml)
$B(0)$	Populasi awal bakteri	0	(sel/ml)
$T(0)$	Populasi awal sel t	0	(sel/ml)

(Ibarguen dkk., 2011:983).

Langkah 2

Dalam penelitian ini penulis menentukan t (waktu) yang akan diselesaikan adalah pada saat $t = 1000$ hari dengan ukuran langkah $h = 0.1$. Berdasarkan langkah 1 maka sistem persamaan (3.1) dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned}
f(t, Mu, Mi, B, T) &= \frac{dM_U(t)}{dt} = 0.0033 - 0.0033 * M_U(t) - 8.25 * 10^{(-9)} B(t) M_U(t) \\
g(t, Mu, Mi, B, T) &= \frac{dM_I(t)}{dt} = 8.25 * 10^{-9} B(t) M_U(t) - 0.1 * M_I(t) T(t) - 0.011 * M_I(t) \\
j(t, Mu, Mi, B, T) &= \frac{dB(t)}{dt} = 5 * 0.011 * M_I(t) - 0.0879 * M_U(t) B(t) - 0.012 * B(t) \\
k(t, Mu, Mi, B, T) &= \frac{dT(t)}{dt} = 0.484848 * M_I(t) - 0.484848 * M_I(t) T(t) - 0.33 * T(t)
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Langkah 3

Formulasi metode RKF Orde-4 untuk persamaan (3.2) adalah

$$\begin{aligned}
Mu_{i+1} &= Mu_i + \frac{25}{216} k_1 + \frac{1408}{256} k_3 + \frac{2197}{4104} k_4 - \frac{1}{5} k_5 \\
Mi_{i+1} &= Mi_i + \frac{25}{216} m_1 + \frac{1408}{256} m_3 + \frac{2197}{4104} m_4 - \frac{1}{5} m_5 \\
B_{i+1} &= B_i + \frac{25}{216} n_1 + \frac{1408}{256} n_3 + \frac{2197}{4104} n_4 - \frac{1}{5} n_5 \\
T_{i+1} &= T_i + \frac{25}{216} p_1 + \frac{1408}{256} p_3 + \frac{2197}{4104} p_4 - \frac{1}{5} p_5
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Langkah 4

Pada langkah 2 diberikan $h = 0.1$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
k_1 &= hf(t_i, Mu_i, Mi_i, B_i, T_i) = (0.1) f(t_i, Mu_i, Mi_i, B_i, T_i) \\
m_1 &= hg(t_i, Mu_i, Mi_i, B_i, T_i) = (0.1) g(t_i, Mu_i, Mi_i, B_i, T_i) \\
n_1 &= hj(t_i, Mu_i, Mi_i, B_i, T_i) = (0.1) j(t_i, Mu_i, Mi_i, B_i, T_i) \\
p_1 &= hk(t_i, Mu_i, Mi_i, B_i, T_i) = (0.1) k(t_i, Mu_i, Mi_i, B_i, T_i) \\
k_2 &= (0.1) f\left(t_i + \frac{1}{4}(0.1), Mu_i + \frac{1}{4}k_1, Mi_i + \frac{1}{4}m_1, B_i + \frac{1}{4}n_1, T_i + \frac{1}{4}p_1\right) \\
m_2 &= (0.1) g\left(t_i + \frac{1}{4}(0.1), Mu_i + \frac{1}{4}k_1, Mi_i + \frac{1}{4}m_1, B_i + \frac{1}{4}n_1, T_i + \frac{1}{4}p_1\right) \\
n_2 &= (0.1) j\left(t_i + \frac{1}{4}(0.1), Mu_i + \frac{1}{4}k_1, Mi_i + \frac{1}{4}m_1, B_i + \frac{1}{4}n_1, T_i + \frac{1}{4}p_1\right) \\
p_2 &= (0.1) k\left(t_i + \frac{1}{4}(0.1), Mu_i + \frac{1}{4}k_1, Mi_i + \frac{1}{4}m_1, B_i + \frac{1}{4}n_1, T_i + \frac{1}{4}p_1\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_3 &= (0.1)f \left(t_i + \frac{3}{8}(0.1), Mu_i + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2, Mi_i + \frac{3}{32}m_1 + \frac{9}{32}m_2, B_i + \frac{3}{32}n_1 + \frac{9}{32}n_2, T_i + \frac{3}{32}p_1 + \frac{9}{32}p_2 \right) \\
m_3 &= (0.1)g \left(t_i + \frac{3}{8}(0.1), Mu_i + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2, Mi_i + \frac{3}{32}m_1 + \frac{9}{32}m_2, B_i + \frac{3}{32}n_1 + \frac{9}{32}n_2, T_i + \frac{3}{32}p_1 + \frac{9}{32}p_2 \right) \\
n_3 &= (0.1)j \left(t_i + \frac{3}{8}(0.1), Mu_i + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2, Mi_i + \frac{3}{32}m_1 + \frac{9}{32}m_2, B_i + \frac{3}{32}n_1 + \frac{9}{32}n_2, T_i + \frac{3}{32}p_1 + \frac{9}{32}p_2 \right) \\
p_3 &= (0.1)k \left(t_i + \frac{3}{8}(0.1), Mu_i + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2, Mi_i + \frac{3}{32}m_1 + \frac{9}{32}m_2, B_i + \frac{3}{32}n_1 + \frac{9}{32}n_2, T_i + \frac{3}{32}p_1 + \frac{9}{32}p_2 \right) \\
k_4 &= (0.1)f \left(t_i + \frac{12}{13}(0.1), Mu_i + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3, Mi_i + \frac{1932}{2197}m_1 - \frac{7200}{2197}m_2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{7296}{2197}m_3, B_i + \frac{1932}{2197}n_1 - \frac{7200}{2197}n_2 + \frac{7296}{2197}n_3, T_i + \frac{1932}{2197}p_1 - \frac{7200}{2197}p_2 + \frac{7296}{2197}p_3 \right) \\
m_4 &= (0.1)g \left(t_i + \frac{12}{13}(0.1), Mu_i + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3, Mi_i + \frac{1932}{2197}m_1 - \frac{7200}{2197}m_2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{7296}{2197}m_3, B_i + \frac{1932}{2197}n_1 - \frac{7200}{2197}n_2 + \frac{7296}{2197}n_3, T_i + \frac{1932}{2197}p_1 - \frac{7200}{2197}p_2 + \frac{7296}{2197}p_3 \right) \\
n_4 &= (0.1)j \left(t_i + \frac{12}{13}(0.1), Mu_i + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3, Mi_i + \frac{1932}{2197}m_1 - \frac{7200}{2197}m_2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{7296}{2197}m_3, B_i + \frac{1932}{2197}n_1 - \frac{7200}{2197}n_2 + \frac{7296}{2197}n_3, T_i + \frac{1932}{2197}p_1 - \frac{7200}{2197}p_2 + \frac{7296}{2197}p_3 \right) \\
p_4 &= (0.1)k \left(t_i + \frac{12}{13}(0.1), Mu_i + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3, Mi_i + \frac{1932}{2197}m_1 - \frac{7200}{2197}m_2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{7296}{2197}m_3, B_i + \frac{1932}{2197}n_1 - \frac{7200}{2197}n_2 + \frac{7296}{2197}n_3, T_i + \frac{1932}{2197}p_1 - \frac{7200}{2197}p_2 + \frac{7296}{2197}p_3 \right) \\
k_5 &= (0.1)f \left(t_i + (0.1), Mu_i + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3860}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4, Mi_i + \frac{439}{216}m_1 - 8m_2 + \frac{3860}{513}m_3 \right. \\
&\quad \left. - \frac{845}{4104}m_4, B_i + \frac{439}{216}n_1 - 8n_2 + \frac{3860}{513}n_3 - \frac{845}{4104}n_4, T_i + \frac{439}{216}p_1 - 8p_2 + \frac{3860}{513}p_3 - \frac{845}{4104}p_4 \right) \\
m_5 &= (0.1)g \left(t_i + (0.1), Mu_i + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3860}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4, Mi_i + \frac{439}{216}m_1 - 8m_2 + \frac{3860}{513}m_3 \right. \\
&\quad \left. - \frac{845}{4104}m_4, B_i + \frac{439}{216}n_1 - 8n_2 + \frac{3860}{513}n_3 - \frac{845}{4104}n_4, T_i + \frac{439}{216}p_1 - 8p_2 + \frac{3860}{513}p_3 - \frac{845}{4104}p_4 \right) \\
n_5 &= (0.1)j \left(t_i + (0.1), Mu_i + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3860}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4, Mi_i + \frac{439}{216}m_1 - 8m_2 + \frac{3860}{513}m_3 \right. \\
&\quad \left. - \frac{845}{4104}m_4, B_i + \frac{439}{216}n_1 - 8n_2 + \frac{3860}{513}n_3 - \frac{845}{4104}n_4, T_i + \frac{439}{216}p_1 - 8p_2 + \frac{3860}{513}p_3 - \frac{845}{4104}p_4 \right) \\
p_5 &= (0.1)k \left(t_i + (0.1), Mu_i + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3860}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4, Mi_i + \frac{439}{216}m_1 - 8m_2 + \frac{3860}{513}m_3 \right. \\
&\quad \left. - \frac{845}{4104}m_4, B_i + \frac{439}{216}n_1 - 8n_2 + \frac{3860}{513}n_3 - \frac{845}{4104}n_4, T_i + \frac{439}{216}p_1 - 8p_2 + \frac{3860}{513}p_3 - \frac{845}{4104}p_4 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_6 &= (0.1) f \left(t_i + \frac{1}{2}(0.1), Mu_i - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5, Mi_i - \frac{8}{27}m_1 + 2m_2 - \frac{3544}{2565}m_3 + \frac{1859}{4104}m_4 \right. \\
&\quad \left. - \frac{11}{40}m_5, B_i - \frac{8}{27}n_1 + 2n_2 - \frac{3544}{2565}n_3 + \frac{1859}{4104}n_4 - \frac{11}{40}n_5, T_i - \frac{8}{27}p_1 + 2p_2 - \frac{3544}{2565}p_3 + \frac{1859}{4104}p_4 - \frac{11}{40}p_5 \right) \\
m_6 &= (0.1)g \left(t_i + \frac{1}{2}(0.1), Mu_i - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5, Mi_i - \frac{8}{27}m_1 + 2m_2 - \frac{3544}{2565}m_3 + \frac{1859}{4104}m_4 \right. \\
&\quad \left. - \frac{11}{40}m_5, B_i - \frac{8}{27}n_1 + 2n_2 - \frac{3544}{2565}n_3 + \frac{1859}{4104}n_4 - \frac{11}{40}n_5, T_i - \frac{8}{27}p_1 + 2p_2 - \frac{3544}{2565}p_3 + \frac{1859}{4104}p_4 - \frac{11}{40}p_5 \right) \\
n_6 &= (0.1)j \left(t_i + \frac{1}{2}(0.1), Mu_i - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5, Mi_i - \frac{8}{27}m_1 + 2m_2 - \frac{3544}{2565}m_3 + \frac{1859}{4104}m_4 \right. \\
&\quad \left. - \frac{11}{40}m_5, B_i - \frac{8}{27}n_1 + 2n_2 - \frac{3544}{2565}n_3 + \frac{1859}{4104}n_4 - \frac{11}{40}n_5, T_i - \frac{8}{27}p_1 + 2p_2 - \frac{3544}{2565}p_3 + \frac{1859}{4104}p_4 - \frac{11}{40}p_5 \right) \\
p_6 &= (0.1)k \left(t_i + \frac{1}{2}(0.1), Mu_i - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5, Mi_i - \frac{8}{27}m_1 + 2m_2 - \frac{3544}{2565}m_3 + \frac{1859}{4104}m_4 \right. \\
&\quad \left. - \frac{11}{40}m_5, B_i - \frac{8}{27}n_1 + 2n_2 - \frac{3544}{2565}n_3 + \frac{1859}{4104}n_4 - \frac{11}{40}n_5, T_i - \frac{8}{27}p_1 + 2p_2 - \frac{3544}{2565}p_3 + \frac{1859}{4104}p_4 - \frac{11}{40}p_5 \right)
\end{aligned}$$

Selanjutnya untuk iterasi yang pertama ($t = 0.1$) dengan $t_1 = t_0 = 0$,

$Mu_1 = Mu_0 = 0.7$, $Mi_1 = Mi_0 = 0.2$, $B_1 = B_0 = 0$, dan $T_1 = T_0 = 0$ maka akan

diperoleh

$$\begin{aligned}
k_1 &= hf(t_0, Mu_0, Mi_0, B_0, T_0) = (0.1) f(0, 0.7, 0.2, 0, 0) \\
&= (0.1)(0.00033 - 0.00033(0.7) - 8.25(10^{-9})(0)(0.7)) = 0.0000099 \\
m_1 &= hg(t_0, Mu_0, Mi_0, B_0, T_0) = (0.1) f(0, 0.7, 0.2, 0, 0) \\
&= (0.1)(8.25(10^{-9})(0)(0.7) - 0.1(0.2)(0) - 0.011(0.2)) = -0.00022 \\
n_1 &= hj(t_0, Mu_0, Mi_0, B_0, T_0) = (0.1) j(0, 0.7, 0.2, 0, 0) \\
&= (0.1)(0.055)(0.2) - 0.0879(0.7)(0) - 0.012(0) = 0.00110 \\
p_1 &= hk(t_0, Mu_0, Mi_0, B_0, T_0) = (0.1)k(0, 0.7, 0.2, 0, 0) \\
&= (0.1)(0.484848)(0.2) - 0.484848(0.2)(0) - 0.33(0) = 0.00969696 \\
k_2 &= (0.1) f \left(t_0 + \frac{1}{4}(0.1), Mu_0 + \frac{1}{4}k_1, Mi_0 + \frac{1}{4}m_1, B_0 + \frac{1}{4}n_1, T_0 + \frac{1}{4}p_1 \right) \\
&= (0.1) f(0.025, 0.7000024750, 0.1999450, 0.0002750, 0.002424240) \\
&= (0.1)(0.00033 - 0.00033(0.700002475) - 8.25(10^{-9})(0.0002750)(0.700002475)) \\
&= 0.000009899918166
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_2 &= (0.1)g\left(t_0 + \frac{1}{4}(0.1), Mu_0 + \frac{1}{4}k_1, Mi_0 + \frac{1}{4}m_1, B_0 + \frac{1}{4}n_1, T_0 + \frac{1}{4}p_1\right) \\
&= (0.1)g(0.025, 0.7000024750, 0.1999450, 0.0002750, 0.002424240) \\
&= (0.1)(8.25(10^{(-9)})(0.0002750)(0.700002475) - \\
&\quad 0.1(0.199945)(0.00242424) - 0.011(0.199945)) = -0.0002247866465
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n_2 &= (0.1)j\left(t_0 + \frac{1}{4}(0.1), Mu_0 + \frac{1}{4}k_1, Mi_0 + \frac{1}{4}m_1, B_0 + \frac{1}{4}n_1, T_0 + \frac{1}{4}p_1\right) \\
&= (0.1)j(0.025, 0.7000024750, 0.1999450, 0.0002750, 0.002424240) \\
&= (0.1)(0.055)(0.1999450) - 0.0879(0.700002475)(0.0002750) \\
&\quad - 0.012(0.0002750)) = 0.001097675419
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_2 &= (0.1)k\left(t_0 + \frac{1}{4}(0.1), Mu_0 + \frac{1}{4}k_1, Mi_0 + \frac{1}{4}m_1, B_0 + \frac{1}{4}n_1, T_0 + \frac{1}{4}p_1\right) \\
&= (0.1)k(0.025, 0.7000024750, 0.1999450, 0.0002750, 0.002424240) \\
&= (0.1)(0.484848)(0.1999450) - 0.484848(0.1999450)(0.00242424) \\
&\quad - 0.33(0.00242424)) = 0.009590792122
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_3 &= (0.1)f\left(t_0 + \frac{3}{8}(0.1), Mu_0 + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2, Mi_0 + \frac{3}{32}m_1 + \frac{9}{32}m_2, B_0 + \frac{3}{32}n_1 + \frac{9}{32}n_2, \right. \\
&\quad \left. T_0 + \frac{3}{32}p_1 + \frac{9}{32}p_2\right) \\
&= (0.1)f(0.0375, 0.7000037125, 0.1999161538, 0.0004118462116, 0.003606500284) \\
&= (0.1)(0.00033 - 0.00033(0.7000037125) - 8.25(10^{(-9)})(0.0004118462116)(0.7000037125)) \\
&= 0.00000989987725
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_3 &= (0.1)g\left(t_0 + \frac{3}{8}(0.1), Mu_0 + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2, Mi_0 + \frac{3}{32}m_1 + \frac{9}{32}m_2, B_0 + \frac{3}{32}n_1 + \frac{9}{32}n_2, \right. \\
&\quad \left. T_0 + \frac{3}{32}p_1 + \frac{9}{32}p_2\right) \\
&= (0.1)g(0.0375, 0.7000037125, 0.1999161538, 0.0004118462116, 0.003606500284) \\
&= (0.1)(8.25(10^{(-9)})(0.0004118462116)(0.7000037125) - \\
&\quad 0.1(0.1999161538)(0.003606500284) - 0.011(0.1999161538)) = -0.0002271177455
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n_3 &= (0.1)j\left(t_0 + \frac{3}{8}(0.1), Mu_0 + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2, Mi_0 + \frac{3}{32}m_1 + \frac{9}{32}m_2, B_0 + \frac{3}{32}n_1 + \frac{9}{32}n_2, \right. \\
&\quad \left. T_0 + \frac{3}{32}p_1 + \frac{9}{32}p_2\right) \\
&= (0.1)j(0.0375, 0.7000037125, 0.1999161538, 0.0004118462116, 0.003606500284) \\
&= (0.1)(0.055(0.1999161538) - 0.0879(0.7000037125)(0.0004118462116) \\
&\quad - 0.012(0.0004118462116)) = 0.001096510527
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_3 &= (0.1)k \left(t_0 + \frac{3}{8}(0.1), Mu_0 + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2, Mi_0 + \frac{3}{32}m_1 + \frac{9}{32}m_2, B_0 + \frac{3}{32}n_1 + \frac{9}{32}n_2, \right. \\
 &\quad \left. T_0 + \frac{3}{32}p_1 + \frac{9}{32}p_2 \right) \\
 &= (0.1)k(0.0375, 0.7000037125, 0.1999161538, 0.0004118462116, 0.003606500284) \\
 &= (0.1)(0.484848(0.1999161538) - 0.484848(0.1999161538)(0.003606500284) \\
 &\quad - 0.33(0.003606500284)) = 0.009590792122
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_4 &= (0.1)f \left(t_0 + \frac{12}{13}(0.1), Mu_0 + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3, Mi_0 + \frac{1932}{2197}m_1 - \frac{7200}{2197}m_2 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{7296}{2197}m_3, B_0 + \frac{1932}{2197}n_1 - \frac{7200}{2197}n_2 + \frac{7296}{2197}n_3, T_0 + \frac{1932}{2197}p_1 - \frac{7200}{2197}p_2 + \frac{7296}{2197}p_3 \right) \\
 &= (0.1)f(0.09230769231, 0.7000091383, 0.1997889726, 0.001011414561, 0.00877414846) \\
 &= (0.1)(0.00033 - 0.00033(0.7000091383) - 8.25(10^{-9})(0.001011414561)(0.7000091383)) \\
 &= 0.000009899697851
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m_4 &= (0.1)g \left(t_0 + \frac{12}{13}(0.1), Mu_0 + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3, Mi_0 + \frac{1932}{2197}m_1 - \frac{7200}{2197}m_2 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{7296}{2197}m_3, B_0 + \frac{1932}{2197}n_1 - \frac{7200}{2197}n_2 + \frac{7296}{2197}n_3, T_0 + \frac{1932}{2197}p_1 - \frac{7200}{2197}p_2 + \frac{7296}{2197}p_3 \right) \\
 &= (0.1)g(0.09230769231, 0.7000091383, 0.1997889726, 0.001011414561, 0.00877414846) \\
 &= (0.1)(8.25(10^{-9})(0.001011414561)(0.7000091383) - \\
 &\quad 0.1(0.1997889726)(0.00877414846) - 0.011(0.1997889726)) = -0.0002372976503
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 n_4 &= (0.1)j \left(t_0 + \frac{12}{13}(0.1), Mu_0 + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3, Mi_0 + \frac{1932}{2197}m_1 - \frac{7200}{2197}m_2 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{7296}{2197}m_3, B_0 + \frac{1932}{2197}n_1 - \frac{7200}{2197}n_2 + \frac{7296}{2197}n_3, T_0 + \frac{1932}{2197}p_1 - \frac{7200}{2197}p_2 + \frac{7296}{2197}p_3 \right) \\
 &= (0.1)j(0.09230769231, 0.7000091383, 0.1997889726, 0.001011414561, 0.00877414846) \\
 &= (0.1)(0.055(0.1997889726) - 0.0879(0.7000091383)(0.001011414561) \\
 &\quad - 0.012(0.001011414561)) = 0.001091402337
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_4 &= (0.1)k \left(t_0 + \frac{12}{13}(0.1), Mu_0 + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3, Mi_0 + \frac{1932}{2197}m_1 - \frac{7200}{2197}m_2 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{7296}{2197}m_3, B_0 + \frac{1932}{2197}n_1 - \frac{7200}{2197}n_2 + \frac{7296}{2197}n_3, T_0 + \frac{1932}{2197}p_1 - \frac{7200}{2197}p_2 + \frac{7296}{2197}p_3 \right) \\
 &= (0.1)k(0.09230769231, 0.7000091383, 0.1997889726, 0.001011414561, 0.00877414846) \\
 &= (0.1)(0.484848(0.1997889726) - 0.484848(0.1997889726)(0.00877414846) \\
 &\quad - 0.33(0.00877414846)) = 0.009312188692
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_5 &= (0.1) f \left(t_0 + (0.1), Mu_0 + \frac{439}{216} k_1 - 8k_2 + \frac{3860}{513} k_3 - \frac{845}{4104} k_4, Mi_0 + \frac{439}{216} m_1 - 8m_2 + \frac{3860}{513} m_3 \right. \\
&\quad \left. - \frac{845}{4104} m_4, B_0 + \frac{439}{216} n_1 - 8n_2 + \frac{3860}{513} n_3 - \frac{845}{4104} n_4, T_0 + \frac{439}{216} p_1 - 8p_2 + \frac{3860}{513} p_3 - \frac{845}{4104} p_4 \right) \\
&= (0.1) f(0.1, 0.7000098999, 0.1997707957, 0.001095335182, 0.009491847957) \\
&= (0.1)(0.00033 - 0.00033(0.7000098999) - 8.25(10^{-9})(0.001095335182)(0.7000098999)) \\
&= 0.000009899672671
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_5 &= (0.1) g \left(t_0 + (0.1), Mu_0 + \frac{439}{216} k_1 - 8k_2 + \frac{3860}{513} k_3 - \frac{845}{4104} k_4, Mi_0 + \frac{439}{216} m_1 - 8m_2 + \frac{3860}{513} m_3 \right. \\
&\quad \left. - \frac{845}{4104} m_4, B_0 + \frac{439}{216} n_1 - 8n_2 + \frac{3860}{513} n_3 - \frac{845}{4104} n_4, T_0 + \frac{439}{216} p_1 - 8p_2 + \frac{3860}{513} p_3 - \frac{845}{4104} p_4 \right) \\
&= (0.1) g(0.1, 0.7000098999, 0.1997707957, 0.001095335182, 0.009491847957) \\
&= (0.1)(8.25(10^{-9})(0.001095335182)(0.7000098999) - \\
&\quad 0.1(0.1997707957)(0.009491847957) - 0.011(0.1997707957)) = -0.0002387098148
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n_5 &= (0.1) j \left(t_0 + (0.1), Mu_0 + \frac{439}{216} k_1 - 8k_2 + \frac{3860}{513} k_3 - \frac{845}{4104} k_4, Mi_0 + \frac{439}{216} m_1 - 8m_2 + \frac{3860}{513} m_3 \right. \\
&\quad \left. - \frac{845}{4104} m_4, B_0 + \frac{439}{216} n_1 - 8n_2 + \frac{3860}{513} n_3 - \frac{845}{4104} n_4, T_0 + \frac{439}{216} p_1 - 8p_2 + \frac{3860}{513} p_3 - \frac{845}{4104} p_4 \right) \\
&= (0.1) j(0.1, 0.7000098999, 0.1997707957, 0.001095335182, 0.009491847957) \\
&= (0.1)(0.055(0.1997707957) - 0.0879(0.7000098999)(0.001095335182) \\
&\quad - 0.012(0.001095335182)) = 0.001090685279
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_5 &= (0.1) k \left(t_0 + (0.1), Mu_0 + \frac{439}{216} k_1 - 8k_2 + \frac{3860}{513} k_3 - \frac{845}{4104} k_4, Mi_0 + \frac{439}{216} m_1 - 8m_2 + \frac{3860}{513} m_3 \right. \\
&\quad \left. - \frac{845}{4104} m_4, B_0 + \frac{439}{216} n_1 - 8n_2 + \frac{3860}{513} n_3 - \frac{845}{4104} n_4, T_0 + \frac{439}{216} p_1 - 8p_2 + \frac{3860}{513} p_3 - \frac{845}{4104} p_4 \right) \\
&= (0.1) k(0.1, 0.7000098999, 0.1997707957, 0.001095335182, 0.009491847957) \\
&= (0.1)(0.484848(0.1997707957) - 0.484848(0.1997707957)(0.009491847957) \\
&\quad - 0.33(0.009491847957)) = 0.009280679497
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_6 &= (0.1) f \left(t_0 + \frac{1}{2}(0.1), Mu_0 - \frac{8}{27} k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565} k_3 + \frac{1859}{4104} k_4 - \frac{11}{40} k_5, Mi_0 - \frac{8}{27} m_1 + 2m_2 - \frac{3544}{2565} m_3 + \frac{1859}{4104} m_4 \right. \\
&\quad \left. - \frac{11}{40} m_5, B_0 - \frac{8}{27} n_1 + 2n_2 - \frac{3544}{2565} n_3 + \frac{1859}{4104} n_4 - \frac{11}{40} n_5, T_0 - \frac{8}{27} p_1 + 2p_2 - \frac{3544}{2565} p_3 + \frac{1859}{4104} p_4 - \frac{11}{40} p_5 \right) \\
&= (0.1) f(0.05, 0.700004950, 0.1998875709, 0.0005488392021, 0.004794686762) \\
&= (0.1)(0.0033 - 0.0033(0.700004950) - 8.25(10^{-9})(0.0005488392021)(0.700004950)) \\
&= 0.000009899836334
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_6 &= (0.1)g \left(t_0 + \frac{1}{2}(0.1), Mu_0 - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5, Mi_0 - \frac{8}{27}m_1 + 2m_2 - \frac{3544}{2565}m_3 + \frac{1859}{4104}m_4 \right. \\
&\quad \left. - \frac{11}{40}m_5, B_0 - \frac{8}{27}n_1 + 2n_2 - \frac{3544}{2565}n_3 + \frac{1859}{4104}n_4 - \frac{11}{40}n_5, T_0 - \frac{8}{27}p_1 + 2p_2 - \frac{3544}{2565}p_3 + \frac{1859}{4104}p_4 - \frac{11}{40}p_5 \right) \\
&= (0.1)g(0.05, 0.700004950, 0.1998875709, 0.0005488392021, 0.004794686762) \\
&= (0.1)(8.25(10^{(-9)})(0.0005488392021)(0.700004950) - \\
&\quad 0.1(0.1998875709)(0.004794686762) - 0.011(0.1998875709)) = -0.0002294603107 \\
n_6 &= (0.1)j \left(t_0 + \frac{1}{2}(0.1), Mu_0 - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5, Mi_0 - \frac{8}{27}m_1 + 2m_2 - \frac{3544}{2565}m_3 + \frac{1859}{4104}m_4 \right. \\
&\quad \left. - \frac{11}{40}m_5, B_0 - \frac{8}{27}n_1 + 2n_2 - \frac{3544}{2565}n_3 + \frac{1859}{4104}n_4 - \frac{11}{40}n_5, T_0 - \frac{8}{27}p_1 + 2p_2 - \frac{3544}{2565}p_3 + \frac{1859}{4104}p_4 - \frac{11}{40}p_5 \right) \\
&= (0.1)j(0.05, 0.700004950, 0.1998875709, 0.0005488392021, 0.004794686762) \\
&= (0.1)(0.055(0.1998875709)-0.0879(0.700004950)(0.0005488392021)-0.012(0.0005488392021)) \\
&= 0.001095346003 \\
p_6 &= (0.1)k \left(t_0 + \frac{1}{2}(0.1), Mu_0 - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5, Mi_0 - \frac{8}{27}m_1 + 2m_2 - \frac{3544}{2565}m_3 + \frac{1859}{4104}m_4 \right. \\
&\quad \left. - \frac{11}{40}m_5, B_0 - \frac{8}{27}n_1 + 2n_2 - \frac{3544}{2565}n_3 + \frac{1859}{4104}n_4 - \frac{11}{40}n_5, T_0 - \frac{8}{27}p_1 + 2p_2 - \frac{3544}{2565}p_3 + \frac{1859}{4104}p_4 - \frac{11}{40}p_5 \right) \\
&= (0.1)k(0.05, 0.700004950, 0.1998875709, 0.0005488392021, 0.004794686762) \\
&= (0.1)(0.484848(0.1998875709)-0.484848(0.1998875709)(0.004794686762)-0.33(0.004794686762)) \\
&= 0.009486816489
\end{aligned}$$

Langkah 5

Setelah dilakukan perhitungan pada langkah 4, selanjutnya substitusikan nilai-nilai k_1 - k_6 , m_1 - m_6 , n_1 - n_6 dan p_1 - p_6 tersebut ke persamaan (3.3), sehingga diperoleh solusi numerik dari persamaan (3.2) sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
Mu_{0+1} &= Mu_0 + \frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{256}k_3 + \frac{2197}{4104}k_4 - \frac{1}{5}k_5 \\
Mu_1 &= 0.7 + \frac{25}{216}(0.0000099) + \frac{1408}{256}(0.00000989987725) \\
&\quad + \frac{2197}{4104}(0.000009899697851) - \frac{1}{5}(0.000009899672671) \\
Mu_1 &= 0.7000098998
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Mi_{0+1} &= Mi_0 + \frac{25}{216}m_1 + \frac{1408}{256}m_3 + \frac{2197}{4104}m_4 - \frac{1}{5}m_5 \\
 Mi_1 &= 0.125 + \frac{25}{216}(-0.00022) + \frac{1408}{256}(-0.0002271177455) \\
 &\quad + \frac{2197}{4104}(-0.0002387098148) - \frac{1}{5}(-0.0002294603107) \\
 Mi_1 &= 0.1997705748
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_{0+1} &= B_0 + \frac{25}{216}n_1 + \frac{1408}{256}n_3 + \frac{2197}{4104}n_4 - \frac{1}{5}n_5 \\
 B_1 &= 0 + \frac{25}{216}(0.00110) + \frac{1408}{256}(0.001096510527) \\
 &\quad + \frac{2197}{4104}(0.001091402337) - \frac{1}{5}(0.001090685279) \\
 B_1 &= 0.001095344876 \\
 T_{0+1} &= T_0 + \frac{25}{216}p_1 + \frac{1408}{256}p_3 + \frac{2197}{4104}p_4 - \frac{1}{5}p_5 \\
 T_1 &= 0.1 + \frac{25}{216}(0.00969696) + \frac{1408}{256}(0.009538922795) \\
 &\quad + \frac{2197}{4104}(0.009312188692) - \frac{1}{5}(0.009280679497) \\
 T_1 &= 0.009487484921
 \end{aligned}$$

Berdasarkan perhitungan di atas diketahui pada saat $t = 0.1$, besarnya $Mu_1 = 0.7000098998$, $Mi_1 = 0.1997705748$, $B_1 = 0.001095344876$ dan $T_1 = 0.009487484921$. Selanjutnya dengan cara yang sama pada iterasi ke 2 saat $t = 0.2$ sampai iterasi ke 10001 saat $t = 1000$, perhitungan dilakukan dengan bantuan program Matlab sehingga diperoleh nilai sebagai berikut.

Tabel 3.2 Solusi $Mu(t)$, $Mi(t)$, $B(t)$ dan $T(t)$ dengan Metode RKF Orde-4

i	t	Variabel			
		Mu_{i+1}	Mi_{i+1}	B_{i+1}	T_{i+1}
0	0.1	0.7000098998	0.1997705748	0.001095344876	0.009487484921
10	1	0.7000989888713 3	0.1971728201624 1	0.0106824486384 0	0.0829338127561 6
100	10	0.7009884181042 8	0.1521744575750 4	0.0686453882226 7	0.1914441903776 0
1000	100	0.7097389078548 9	0.0253401399688 9	0.0238736141330 3	0.0374633827746 6
10000	1000	0.7843266079659 4	0.0000009274523 4	0.0000007302527 7	0.0000014096330 8

3.1.2 Penyelesaian Numerik dengan Metode Runge Kutta Fehlberg (RKF) Orde-5

Penyelesaian numerik sistem persamaan diferensial (3.2) dengan metode RKF orde-5 dapat dilakukan dengan langkah-langkah yang sama pada metode RKF orde-4, sehingga nilai-nilai k_1-k_6 , m_1-m_6 , n_1-n_6 dan p_1-p_6 yang telah diketahui dari hasil perhitungan metode RKF orde-4 dapat disubstitusikan secara langsung ke dalam formulasi RKF orde-5 sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\hat{Mu}_{i+1} &= Mu_i + \frac{16}{135}k_1 + \frac{6656}{12825}k_3 + \frac{28561}{56437}k_4 - \frac{9}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6 \\ \hat{Mu}_{0+1} &= Mu_0 + \frac{16}{135}k_1 + \frac{6656}{12825}k_3 + \frac{28561}{56437}k_4 - \frac{9}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6 \\ \hat{Mu}_1 &= 0,7 + \frac{16}{135}(0.0000099) + \frac{6656}{12825}(0.00000989987725) + \frac{28561}{56437} \\ &\quad (0.000009899697851) - \frac{9}{50}(0.000009899672671) + \frac{2}{55}(0.000009899836334)\end{aligned}$$

$$\hat{Mu}_1 = 0.7000098992$$

$$\begin{aligned}\hat{Mi}_{i+1} &= Mi_i + \frac{16}{135}m_1 + \frac{6656}{12825}m_3 + \frac{28561}{56437}m_4 - \frac{9}{50}m_5 + \frac{2}{55}m_6 \\ \hat{Mi}_{0+1} &= Mi_0 + \frac{16}{135}m_1 + \frac{6656}{12825}m_3 + \frac{28561}{56437}m_4 - \frac{9}{50}m_5 + \frac{2}{55}m_6 \\ \hat{Mi}_1 &= 0,125 + \frac{16}{135}(-0.00022) + \frac{6656}{12825}(-0.0002271177455) + \frac{28561}{56437} \\ &\quad (-0.0002372976503) - \frac{9}{50}(-0.0002387098148) + \frac{2}{55}(-0.0002294603107)\end{aligned}$$

$$\hat{Mi}_1 = 0.1997705898$$

$$\begin{aligned}\hat{B}_{i+1} &= B_i + \frac{16}{135}n_1 + \frac{6656}{12825}n_3 + \frac{28561}{56437}n_4 - \frac{9}{50}n_5 + \frac{2}{55}n_6 \\ \hat{B}_{0+1} &= B_0 + \frac{16}{135}n_1 + \frac{6656}{12825}n_3 + \frac{28561}{56437}n_4 - \frac{9}{50}n_5 + \frac{2}{55}n_6 \\ \hat{B}_1 &= 0 + \frac{16}{135}(0.00110) + \frac{6656}{12825}(0.001096510527) + \frac{28561}{56437} \\ &\quad (0.001091402337) - \frac{9}{50}(0.001090685279) + \frac{2}{55}(0.001095346003)\end{aligned}$$

$$\hat{B}_1 = 0.001095276363$$

$$\begin{aligned}\hat{T}_{i+1} &= T_i + \frac{16}{135} p_1 + \frac{6656}{12825} p_3 + \frac{28561}{56437} p_4 - \frac{9}{50} p_5 + \frac{2}{55} p_6 \\ \hat{T}_{0+1} &= T_0 + \frac{16}{135} p_1 + \frac{6656}{12825} p_3 + \frac{28561}{56437} p_4 - \frac{9}{50} p_5 + \frac{2}{55} p_6 \\ \hat{T}_1 &= 0,1 + \frac{16}{135} (0.00969696) + \frac{6656}{12825} (0.009538922795) + \frac{28561}{56437} \\ &\quad (0.009312188692) - \frac{9}{50} (0.009280679497) + \frac{2}{55} (0.009486816489) \\ \hat{T}_1 &= 0.009486900296\end{aligned}$$

Berdasarkan hasil perhitungan di atas diketahui bahwa pada saat $t = 0.1$, besarnya $\hat{Mu}_1 = 0.7000098992$, $\hat{Mi}_1 = 0.1997705898$, $\hat{B}_1 = 0.001095276363$ dan $\hat{T}_1 = 0.009486900296$. Selanjutnya dengan cara yang sama pada iterasi ke 2 saat $t = 0.2$ sampai iterasi ke 10001 saat $t = 1000$ perhitungan dilakukan dengan bantuan program Matlab sehingga diperoleh nilai sebagai berikut.

Tabel 3.3 Solusi $Mu(t)$, $Mi(t)$, $B(t)$ dan $T(t)$ dengan Metode RKF Orde-5

i	t	Variabel			
		$\hat{Mu}_{i+1}$	$\hat{Mi}_{i+1}$	$\hat{B}_{i+1}$	$\hat{T}_{i+1}$
0	0.1	0.7000098992	0.1997705898	0.001095276363	0.009486900296
10	1	0.70009898237230	0.1971624928074 5	0.0106735122195 4	0.0826784018186 4
100	10	0.70098835331038	0.1521930014858 8	0.0685988496025 8	0.1914102937689 3
1000	100	0.70973827889261	0.0253521622361 8	0.0238856613376 9	0.0374806481436 2
10000	1000	0.78432193451241	0.0000009292954 6	0.0000007317085 1	0.0000014124344 3

3.2 Penyelesaian Numerik Model Imunologi Seluler Pada Tuberkulosis dengan Metode Adams Bashforth Moulton Orde-4

Dalam menyelesaikan sistem persamaan diferensial nonlinier (3.1) dengan Metode Adams Bashforth Moulton (ABM) Orde-4 secara umum dapat dilakukan dengan langkah-langkah penyelesaian sebagai berikut.

1. Mengidentifikasi nilai parameter dan nilai awal pada sistem persamaan diferensial (3.1) yaitu variabel $Mu(0)$, $Mi(0)$, $B(0)$ dan $T(0)$

2. Menentukan nilai t (waktu) yang akan ditentukan penyelesaiannya beserta besarnya h (ukuran langkah)
3. Menghitung empat solusi awal $Mu_0, Mu_1, Mu_2, Mu_3, Mi_0, Mi_1, Mi_2, Mi_3, B_0, B_1, B_2, B_3$, dan T_0, T_1, T_2, T_3 dengan metode Runge Kutta Orde-4
4. Menentukan nilai dari f_n, f_{n-1}, f_{n-2} dan f_{n-3} dengan $n = 3, 4, \dots$ didefinisikan sebagai berikut.

$$f_{n-3} = f_0 = f(t_0, Mu_0, Mi_0, B_0, T_0)$$

$$f_{n-2} = f_1 = f(t_1, Mu_1, Mi_1, B_1, T_1)$$

$$f_{n-1} = f_2 = f(t_2, Mu_2, Mi_2, B_2, T_2)$$

$$f_n = f_3 = f(t_3, Mu_3, Mi_3, B_3, T_3)$$

Untuk nilai g_n, j_n dan k_n dilakukan langkah yang sama seperti pada f_n

5. Menentukan solusi numerik dengan menggunakan prediktor metode ABM orde-4, formulasi prediktor metode ABM orde-4 untuk sistem persamaan (3.1) adalah

$$pMu_{n+1} = Mu_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3})$$

$$pMi_{n+1} = Mi_n + \frac{h}{24}(55g_n - 59g_{n-1} + 37g_{n-2} - 9g_{n-3})$$

$$pB_{n+1} = B_n + \frac{h}{24}(55j_n - 59j_{n-1} + 37j_{n-2} - 9j_{n-3})$$

$$pT_{n+1} = T_n + \frac{h}{24}(55k_n - 59k_{n-1} + 37k_{n-2} - 9k_{n-3})$$

6. Menghitung nilai dari

$$f_{n+1} = f(t_{n+1}, Mu_{n+1}, Mi_{n+1}, B_{n+1}, T_{n+1})$$

$$g_{n+1} = g(t_{n+1}, Mu_{n+1}, Mi_{n+1}, B_{n+1}, T_{n+1})$$

$$j_{n+1} = j(t_{n+1}, Mu_{n+1}, Mi_{n+1}, B_{n+1}, T_{n+1})$$

$$k_{n+1} = k(t_{n+1}, Mu_{n+1}, Mi_{n+1}, B_{n+1}, T_{n+1})$$

7. Dari hasil perhitungan langkah 6 selanjutnya dihitung solusi numerik dengan menggunakan korektor metode ABM orde-4. Formulasi korektor metode ABM orde-4 untuk sistem persamaan (3.1) adalah

$$Mu_{n+1} = Mu_n + \frac{h}{24}(9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}).$$

$$Mi_{n+1} = Mi_n + \frac{h}{24}(9g_{n+1} + 19g_n - 5g_{n-1} + g_{n-2}).$$

$$B_{n+1} = B_n + \frac{h}{24}(9j_{n+1} + 19j_n - 5j_{n-1} + j_{n-2}).$$

$$T_{n+1} = T_n + \frac{h}{24}(9k_{n+1} + 19k_n - 5k_{n-1} + k_{n-2}).$$

8. Korektor metode ABM orde-4 diiterasikan pada n sampai memenuhi

$$\frac{19}{270} \frac{|y_{n+1} - py_{n+1}|}{y_{n+1}} < \varepsilon$$

untuk $n = 3, 4, 5, \dots$ dan ε adalah kriteria pemberhentian yang dikehendaki yaitu $\varepsilon = 5 \times 10^{-8}$.

9. Jika kriteria pemberhentian tidak dipenuhi, maka dilakukan analisis kriteria pemilihan ukuran langkah h sebagai berikut.

Jika $10^{-12} < \frac{19}{270} * \frac{|y_{n+1} - py_{n+1}|}{y_{n+1}} < 10^{-8}$, maka langkah berikutnya digunakan nilai

h yang sama.

Jika $\frac{19}{270} * \frac{|y_{n+1} - py_{n+1}|}{y_{n+1}} > 10^{-8}$, maka h diganti $\frac{h}{2}$ pada langkah 3.

Jika $\frac{19}{270} * \frac{|y_{n+1} - py_{n+1}|}{y_{n+1}} < 10^{-12}$, maka h diganti $2h$ dan kembali pada langkah 3.

Dari penjelasan langkah-langkah di atas maka penyelesaian persamaan (3.1) dengan metode ABM orde-4 adalah sebagai berikut.

Langkah 1 dan Langkah 2

Nilai parameter dan nilai awal empat variabel telah diberikan pada Tabel 3.1, selanjutnya langkah 1 dan langkah 2 pada metode ini sama seperti pada metode RKF 45.

Langkah 3

Dalam menentukan empat solusi awal dari masing-masing variabel pada persamaan (3.2) yaitu Mu_0, Mu_1, Mu_2, Mu_3 , Mi_0, Mi_1, Mi_2, Mi_3 , B_0, B_1, B_2, B_3 , dan T_0, T_1, T_2, T_3 , digunakan metode Runge Kutta Orde-4 dengan formulasi sebagai berikut.

$$Mu_{n+1} = Mu_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$Mi_{n+1} = Mi_n + \frac{1}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4)$$

$$B_{n+1} = B_n + \frac{1}{6}(n_1 + 2n_2 + 2n_3 + n_4)$$

$$T_{n+1} = T_n + \frac{1}{6}(p_1 + 2p_2 + 2p_3 + p_4)$$

dengan

$$k_1 = hf(t_n, Mu_n, Mi_n, B_n, T_n)$$

$$m_1 = hg(t_n, Mu_n, Mi_n, B_n, T_n)$$

$$n_1 = hj(t_n, Mu_n, Mi_n, B_n, T_n)$$

$$p_1 = hk(t_n, Mu_n, Mi_n, B_n, T_n)$$

$$\begin{aligned}
k_2 &= hf \left(t_n + \frac{h}{2}, Mu_n + \frac{k_1}{2}, M_n + \frac{m_1}{2}, B_n + \frac{n_1}{2}, T_n + \frac{p_1}{2} \right) \\
m_2 &= hg \left(t_n + \frac{h}{2}, Mu_n + \frac{k_1}{2}, M_n + \frac{m_1}{2}, B_n + \frac{n_1}{2}, T_n + \frac{p_1}{2} \right) \\
n_2 &= hj \left(t_n + \frac{h}{2}, Mu_n + \frac{k_1}{2}, M_n + \frac{m_1}{2}, B_n + \frac{n_1}{2}, T_n + \frac{p_1}{2} \right) \\
p_2 &= hk \left(t_n + \frac{h}{2}, Mu_n + \frac{k_1}{2}, M_n + \frac{m_1}{2}, B_n + \frac{n_1}{2}, T_n + \frac{p_1}{2} \right) \\
k_3 &= hf \left(t_n + \frac{h}{2}, Mu_n + \frac{k_2}{2}, Mi_n + \frac{m_2}{2}, B_n + \frac{n_2}{2}, T_n + \frac{p_2}{2} \right) \\
m_3 &= hg \left(t_n + \frac{h}{2}, Mu_n + \frac{k_2}{2}, Mi_n + \frac{m_2}{2}, B_n + \frac{n_2}{2}, T_n + \frac{p_2}{2} \right) \\
n_3 &= hj \left(t_n + \frac{h}{2}, Mu_n + \frac{k_2}{2}, Mi_n + \frac{m_2}{2}, B_n + \frac{n_2}{2}, T_n + \frac{p_2}{2} \right) \\
p_3 &= hk \left(t_n + \frac{h}{2}, Mu_n + \frac{k_2}{2}, Mi_n + \frac{m_2}{2}, B_n + \frac{n_2}{2}, T_n + \frac{p_2}{2} \right) \\
k_4 &= hf (t_n + h, Mu_n + k_3, Mi_n + m_3, B_n + n_3, T_n + p_3) \\
m_4 &= hg (t_n + h, Mu_n + k_3, Mi_n + m_3, B_n + n_3, T_n + p_3) \\
n_4 &= hj (t_n + h, Mu_n + k_3, Mi_n + m_3, B_n + n_3, T_n + p_3) \\
p_4 &= hk (t_n + h, Mu_n + k_3, Mi_n + m_3, B_n + n_3, T_n + p_3)
\end{aligned}$$

Dengan menggunakan bantuan program Maple untuk menghitung solusi dari masing-masing variabel diperoleh nilai sebagai berikut.

Tabel 3.4 Nilai Mu_n , Mi_n , B_n dan T_n dengan $n = 0,1,2,3$.

n	$h = 0.1$			
	Mu_n	Mi_n	B_n	T_n
0	0.7	0.125	0	0
1	0.6999752510	0.1997705748	0.001095345045	0.009487484640
2	0.6999851517	0.1995228918	0.002181357998	0.01856728953
3	0.6999950520	0.1992578153	0.003258009373	0.02725582762

Langkah 4

Hasil dari langkah 3 selanjutnya disubstitusikan kepersamaan (3.2) untuk mendapatkan nilai $f_n, f_{n-1}, f_{n-2}, f_{n-3}, g_n, g_{n-1}, g_{n-2}, g_{n-3}, j_n, j_{n-1}, j_{n-2}, j_{n-3}$, dan $k_n, k_{n-1}, k_{n-2}, k_{n-3}$. Pada metode Runge Kutta Orde-4 di atas besar $n = 3$ sehingga nilai dari masing-masing fungsi yang harus dicari adalah $f_3, f_2, f_1, f_0, g_3, g_2, g_1, g_0, j_3, j_2, j_1, j_0$, dan k_3, k_2, k_1, k_0 . Dengan menggunakan bantuan program Maple dalam menghitung nilai dari masing-masing fungsi, maka diperoleh nilai sebagai berikut.

Tabel 3.5 Nilai f_n, g_n, j_n dan $k_n, n = 0,1,2,3$.

n	$h = 0.1$			
	f_n	g_n	j_n	k_n
0	0.000099	- 0.0022	0.0110	0.0969696
1	0.00009900816087	-0.002387008343	0.01090684327	0.09280855148
2	0.00009900488730	-0.002565211727	0.01081336664	0.08881490194
3	0.00009900161399	-0.002734929616	0.01071961983	0.08498215134

Langkah 5

Setelah diketahui solusi awal dan nilai masing-masing fungsi pada langkah 3 dan 4, maka untuk mendapatkan solusi numerik substitusikan nilai-nilai tersebut ke persamaan prediktor metode ABM Orde-4 sebagai berikut.

Pada perhitungan ini nilai $n \geq 3$, sehingga diperoleh

$$pMu_{n+1} = Mu_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3})$$

$$pMu_{3+1} = Mu_3 + \frac{h}{24}(55f_3 - 59f_2 + 37f_1 - 9f_0)$$

$$pMu_4 = 0.6999950520 + \frac{(0.1)}{24}(55(0.00009900161399) - 59(0.0000990048873) \\ + 37(0.00009900816087) - 9(0.000099)) = 0.7000049524$$

$$pMi_{n+1} = Mi_n + \frac{h}{24}(55g_n - 59g_{n-1} + 37g_{n-2} - 9g_{n-3})$$

$$pMi_{3+1} = Mi_3 + \frac{h}{24}(55g_3 - 59g_2 + 37g_1 - 9g_0)$$

$$pMi_4 = 0.1992578153 + \frac{(0.1)}{24}(55(-0.002734929616) - 59(-0.002565211727) \\ + 37(-0.002387008343) - 9(-0.0022)) = 0.1989761780$$

$$pB_{n+1} = B_n + \frac{h}{24}(55j_n - 59j_{n-1} + 37j_{n-2} - 9j_{n-3})$$

$$pB_{3+1} = B_3 + \frac{h}{24}(55j_3 - 59j_2 + 37j_1 - 9j_0)$$

$$pB_4 = 0.003258009373 + \frac{(0.1)}{24}(55(0.01071961983) - 59(0.01081336664) \\ + 37(0.01090684327) - 9(0.0110)) = 0.004325274622$$

$$pT_{n+1} = T_n + \frac{h}{24}(55k_n - 59k_{n-1} + 37k_{n-2} - 9k_{n-3})$$

$$pT_{3+1} = T_3 + \frac{h}{24}(55k_3 - 59k_2 + 37k_1 - 9k_0)$$

$$pT_4 = 0.02725582762 + \frac{(0.1)}{24}(55(0.08498215134) - 59(0.08881490194) \\ + 37(0.09280855148) - 9(0.0969696)) = 0.03556886560$$

Langkah 6

Setelah diperoleh solusi numerik dengan rumus prediktor ABM orde-4 selanjutnya hitung kembali nilai dari masing-masing fungsi untuk $n \geq 4$, sehingga dari hasil langkah 5 diperoleh nilai masing-masing fungsi sebagai berikut.

$$f_4 = f(t_4, Mu_4, Mi_4, B_4, T_4)$$

$$f_4 = f(0.1, 0.7000049524, 0.198976178, 0.004325274622, 0.03556886560)$$

$$f_4 = (0.00033 - 0.00033(0.700049524) - 8.25 * 10^{(-9)}(0.004325274622)(0.700049524)) \\ = 0.00009899834072$$

$$g_4 = g(t_4, Mu_4, Mi_4, B_4, T_4)$$

$$g_4 = g(0.1, 0.7000049524, 0.198976178, 0.004325274622, 0.03556886560)$$

$$g_4 = (8.25 * 10^{(-9)})(0.004325274622)(0.700049524) - 0.1(0.198976178)(0.03556886560) - 0.011(0.198976178)) = -0.001646853242$$

$$j_4 = j(t_4, Mu_4, Mi_4, B_4, T_4)$$

$$j_4 = j(0.1, 0.7000049524, 0.198976178, 0.004325274622, 0.03556886560)$$

$$j_4 = (0.055(0.198976178) - 0.0879(0.700049524)(0.004325274622) - 0.012(0.004325274622)) = 0.01062565046$$

$$k_4 = k(t_4, Mu_4, Mi_4, B_4, T_4)$$

$$k_4 = k(0.1, 0.7000049524, 0.198976178, 0.004325274622, 0.03556886560)$$

$$k_4 = (0.484848(0.198976178) - 0.484848(0.198976178)(0.0355688656) - 0.33(0.0355688656)) = 0.08130403395$$

Langkah 7

Setelah diperoleh hasil perhitungan pada langkah 6, selanjutnya menghitung solusi numerik dengan menggunakan korektor metode ABM orde-4.

Pada perhitungan ini nilai $n \geq 3$, sehingga diperoleh

$$Mu_{n+1} = Mu_n + \frac{h}{24}(9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2})$$

$$Mu_{3+1} = Mu_3 + \frac{h}{24}(9f_4 + 19f_3 - 5f_2 + f_1)$$

$$Mu_4 = 0.699995052 + \frac{(0.1)}{24}(9(0.00009899834072) + 19(0.00009900161399) - 5(0.0000990048873) + (0.00009900816087)) = 0.7000049520$$

$$Mi_{n+1} = Mi_n + \frac{h}{24}(9g_{n+1} + 19g_n - 5g_{n-1} + g_{n-2})$$

$$Mi_{3+1} = Mi_3 + \frac{h}{24}(9g_4 + 19g_3 - 5g_2 + g_1)$$

$$Mi_4 = 0.1992578153 + \frac{(0.1)}{24}(9(-0.002896473626) + 19(-0.002734929616) - 5(-0.002565211727) + (-0.002387008343)) = 0.1989761783$$

$$B_{n+1} = B_n + \frac{h}{24}(9j_{n+1} + 19j_n - 5j_{n-1} + j_{n-2})$$

$$B_{3+1} = B_3 + \frac{h}{24}(9j_4 + 19j_3 - 5j_2 + j_1)$$

$$B_4 = 0.003258009373 + \frac{(0.1)}{24}(9(0.01062565046) + 19(0.01071961983) - 5(0.01081336664) + f(0.01090684327)) = 0.004325274544$$

$$T_{n+1} = T_n + \frac{h}{24}(9k_{n+1} + 19k_n - 5k_{n-1} + k_{n-2})$$

$$T_{3+1} = T_3 + \frac{h}{24}(9k_4 + 19k_3 - 5k_2 + k_1)$$

$$T_4 = 0.02725582762 + \frac{(0.1)}{24}(9(0.08130403395) + 19(0.08498215134) - 5(0.08881490194) + (0.09280855148)) = 0.03556887438$$

Langkah 8

Pada langkah 7 telah dilakukan perhitungan korektor metode ABM orde-4 pada iterasi ke 1, selanjutnya perhitungan sampai iterasi ke n dilakukan dengan bantuan program matlab sampai memenuhi

$$\frac{19}{270} \frac{|y_{n+1} - py_{n+1}|}{y_{n+1}} < \varepsilon$$

untuk $n = 3, 4, 5, \dots$ dan $\varepsilon = 5 \times 10^{-8}$.

Pada iterasi ke 5 telah diperoleh nilai $pMu_4 = 0.7000049524$, $Mu_4 = 0.7000049520$,

$pMi_4 = 0.1989761780$, $Mi_4 = 0.1989761783$, $pB_4 = 0.004325274622$, $B_4 = 0.004325274544$

dan $pT_4 = 0.03556886560$, $T_4 = 0.03556887438$ maka

$$\begin{aligned} \frac{19}{270} \frac{|Mu_4 - pMu_4|}{Mu_4} < 5(10^{-8}) &\Rightarrow \frac{19}{270} \frac{|0.7000049520 - 0.7000049524|}{0.7000049520} \\ &= 4.021135574 \times 10^{-11} < 5(10^{-8}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{19}{270} \frac{|Mi_4 - pMi_4|}{Mi_4} < 5(10^{-8}) &\Rightarrow \frac{19}{270} \frac{|0.1986787826 - 0.1986787823|}{0.1986787826} \\ &= 1.060986862 \times 10^{-10} < 5(10^{-8}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{19}{270} \frac{|B_4 - pB_4|}{B_4} < 5(10^{-8}) &\Rightarrow \frac{19}{270} \frac{|0.005383133638 - 0.005383133712|}{0.005383133638} \\ &= 1.269026702 * 10^{(-9)} < 5(10^{-8}) \\ \frac{19}{270} \frac{|T_4 - pT_4|}{T_4} < 5(10^{-8}) &\Rightarrow \frac{19}{270} \frac{|0.04352157938 - 0.04352157121|}{0.04352157938} \\ &= 1.737057645 * 10^{(-8)} < 5(10^{-8}) \end{aligned}$$

Dari hasil perhitungan di atas diketahui bahwa galat yang di peroleh dari masing-masing variabel sudah memenuhi kriteria pemberhentian sehingga langkah 9 tidak dilanjutkan. Melalui hasil perhitungan di atas dapat diketahui pada saat $t = 0.5$, solusi dari (3.2) adalah: $Mu = 0.7000049520$, $Mi = 0.1989761783$, $B = 0.004325274544$ dan $T = 0.03556887438$. Selanjutnya dengan cara yang sama pada iterasi ke 6 saat $t = 0.6$ sampai iterasi ke 10001 saat $t = 1000$ perhitungan dilakukan dengan bantuan program Matlab dan diperoleh nilai sebagai berikut.

Tabel 3.6 Nilai Prediktor ABM Orde-4 Sistem Persamaan (3.2)

n	t	Variabel			
		pMu_{n+1}	pMi_{n+1}	pB_{n+1}	pT_{n+1}
4	0.5	0.7000049524	0.1989761780	0.004325274622	0.03556886560
10	1	0.7000989836359 4	0.1969814486588 1	0.0105309236637 2	0.0783703552543 4
100	10	0.7009883659679 5	0.1524533590715 3	0.0678314449954 1	0.1906696145825 7
1000	100	0.7097384020627 5	0.0255177575349 4	0.0240504583508 6	0.0377183608301 7
10000	1000	0.7843228495871 6	0.0000009496783 5	0.0000007477599 7	0.0000014434143 2

Tabel 3.7 Nilai Korektor ABM Orde-4 Sistem Persamaan (3.2)

n	T	Variabel			
		Mu_{n+1}	Mi_{n+1}	B_{n+1}	T_{n+1}
4	0.5	0.7000049520	0.1989761783	0.004325274544	0.03556887438
10	1	0.7000989836359 4	0.1969814489695 7	0.0105309235974 8	0.0783703626304 3
100	10	0.7009883659679 5	0.1524533590818 6	0.0678314449952 2	0.1906696147798 9
1000	100	0.7097384020627 5	0.0255177575349 4	0.0240504583508 6	0.0377183608301 6
1000 0	1000	0.7843228495871 6	0.0000009496783 5	0.0000007477599 7	0.0000014434143 2

3.3 Analisis Numerik Metode Runge Kutta Fehlberg (RKF 45) dan Metode Adams Bashforth Moulton (ABM) Model Imunologi Seluler pada Tuberkulosis

3.3.1 Analisis Galat Metode RKF 45 dan ABM

Hasil penyelesaian numerik model imunologi seluler pada tuberkulosis dengan metode RKF 45 dan metode ABM telah ditunjukkan pada Tabel 3.2, Tabel 3.3, Tabel 3.6 dan Tabel 3.7. Berdasarkan hasil perhitungan dengan kedua metode di atas besarnya ketelitian eksak tidak dapat diukur, hal ini disebabkan model imunologi seluler pada tuberkulosis berbentuk sistem persamaan diferensial nonlinier yang tidak dapat diselesaikan secara analitik atau tidak mempunyai solusi eksak. Oleh karena itu, tidak dapat dihasilkan galat seajatnya.

Dalam penyelesaian numerik ini galat yang digunakan adalah galat pemotongan/galat relatif. Galat relatif metode RKF 45 merupakan selisih Mu , Mi , B dan T pada orde-4 dan orde-5, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$\varepsilon_{Mu} = |\hat{Mu}_{i+1} - Mu_{i+1}|, \quad \varepsilon_{Mi} = |\hat{Mi}_{i+1} - Mi_{i+1}|, \quad \varepsilon_B = |\hat{B}_{i+1} - B_{i+1}|, \quad \text{dan} \quad \varepsilon_T = |\hat{T}_{i+1} - T_{i+1}|$$

Pada iterasi pertama saat $i = 0$ atau $t = 0.1$, maka dapat dihitung galat relatif metode RKF 45 sebagai berikut.

$$\varepsilon_{Mu} = |\hat{Mu}_{i+1} - Mu_{i+1}| = |0.7000098992 - 0.7000098998| = 0.0000000006,$$

$$\varepsilon_{Mi} = |\hat{Mi}_{i+1} - Mi_{i+1}| = |0.1997705898 - 0.1997705748| = 0.000000015,$$

$$\varepsilon_B = |\hat{B}_{i+1} - B_{i+1}| = |0.001095276363 - 0.001095344876| = 0.000000068513,$$

$$\varepsilon_T = |\hat{T}_{i+1} - T_{i+1}| = |0.009486900296 - 0.009487484921| = 0.000000584625$$

untuk iterasi selanjutnya perhitungan galat dilakukan dengan bantuan program matlab. Solusi numerik model imunologi seluler pada tuberkulosis dan hasil perhitungan galat relatif pada metode RKF 45 dapat dilihat pada Tabel 3.8 sebagai berikut.

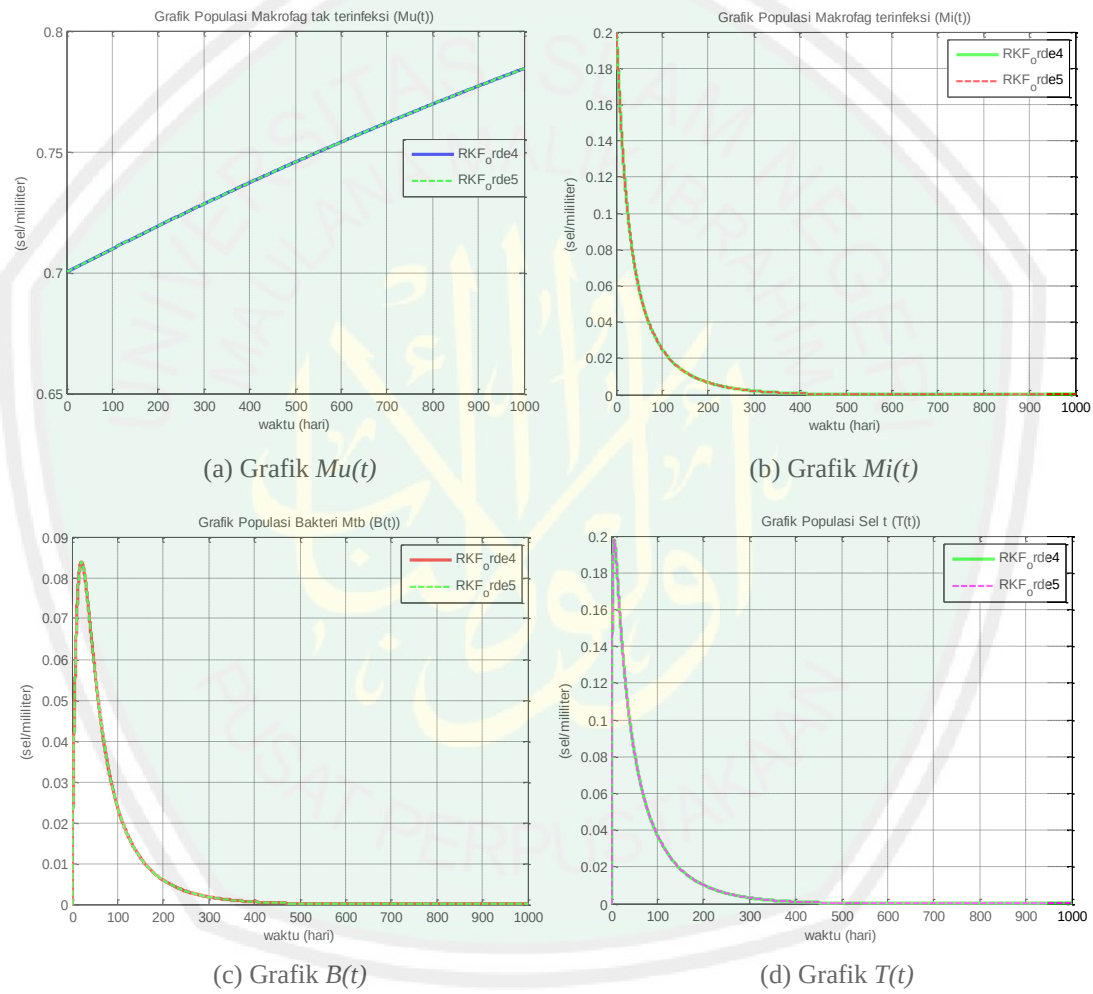
Tabel 3.8 Solusi Numerik dan Galat Metode RKF 45 pada Sistem Persamaan (3.1)

i	t	Variabel	Solusi RKF 45		E	Galat Relatif Metode RKF 45
			Orde-4	Orde-5		
0	0.1	Mu_{i+1}	0.7000098998	0.7000098992	$\mathcal{E}_{Mu}$	5.999999386219201e-010
		Mi_{i+1}	0.1997705748	0.1997705898	$\mathcal{E}_{Mi}$	1.500000001986024e-008
		B_{i+1}	0.001095344876	0.001095276363	$\mathcal{E}_B$	6.851300000010503e-008
		T_{i+1}	0.009487484921	0.009486900296	$\mathcal{E}_T$	5.846249999993253e-007
10	1	Mu_{i+1}	0.70009898887133	0.70009898237230	$\mathcal{E}_{Mu}$	6.499030091866587e-009
		Mi_{i+1}	0.19717282016241	0.19716249280745	$\mathcal{E}_{Mi}$	1.032735496001025e-005
		B_{i+1}	0.01068244863840	0.01067351221954	$\mathcal{E}_B$	8.936418859999823e-006
		T_{i+1}	0.08293381275616	0.08267840181864	$\mathcal{E}_T$	2.554109375200037e-004
100	10	Mu_{i+1}	0.70098841810428	0.70098835331038	$\mathcal{E}_{Mu}$	6.479390002311902e-008
		Mi_{i+1}	0.15217445757504	0.15219300148588	$\mathcal{E}_{Mi}$	1.854391083999651e-005
		B_{i+1}	0.06864538822267	0.06859884960258	$\mathcal{E}_B$	4.653862008999199e-005
		T_{i+1}	0.19144419037760	0.19141029376893	$\mathcal{E}_T$	3.389660866998101e-005
1000	100	Mu_{i+1}	0.70973890785489	0.70973827889261	$\mathcal{E}_{Mu}$	6.289622800359496e-007
		Mi_{i+1}	0.02534013996889	0.02535216223618	$\mathcal{E}_{Mi}$	1.202226728999958e-005
		B_{i+1}	0.02387361413303	0.02388566133769	$\mathcal{E}_B$	1.204720465999842e-005
		T_{i+1}	0.03746338277466	0.03748064814362	$\mathcal{E}_T$	1.726536896000386e-005

3000	300	Mu_{i+1}	0.72827857087567	0.72827680449821	$\mathcal{E}_{Mu}$	1.766377460077351e-006
		Mi_{i+1}	0.00213753333281	0.00213919462378	$\mathcal{E}_{Mi}$	1.661290969999854e-006
i	t	Variabel	RKF Orde-4	RKF Orde-5	E	Galat Relatif Metode RKF 45
3000	300	B_{i+1}	0.00182272257470	0.00182415353960	$\mathcal{E}_B$	1.430964899999925e-006
		T_{i+1}	0.00324133375346	0.00324384703477	$\mathcal{E}_T$	2.513281310000028e-006
5000	500	Mu_{i+1}	0.74563406938604	0.74563131345628	$\mathcal{E}_{Mu}$	2.755929760067666e-006
		Mi_{i+1}	0.00022987586436	0.00023013188857	$\mathcal{E}_{Mi}$	2.560242100000179e-007
		B_{i+1}	0.00019044408246	0.00019065709054	$\mathcal{E}_B$	2.130080800000136e-007
		T_{i+1}	0.00034930146274	0.00034969039988	$\mathcal{E}_T$	3.889371399999706e-007
10000	1000	Mu_{i+1}	0.78432660796594	0.78432193451241	$\mathcal{E}_{Mu}$	4.673453530057437e-006
		Mi_{i+1}	0.00000092745234	0.00000092929546	$\mathcal{E}_{Mi}$	1.843119999999958e-009
		B_{i+1}	0.00000073025277	0.00000073170851	$\mathcal{E}_B$	1.455739999999967e-009
		T_{i+1}	0.00000140963308	0.00000141243443	$\mathcal{E}_T$	2.801350000000025e-009

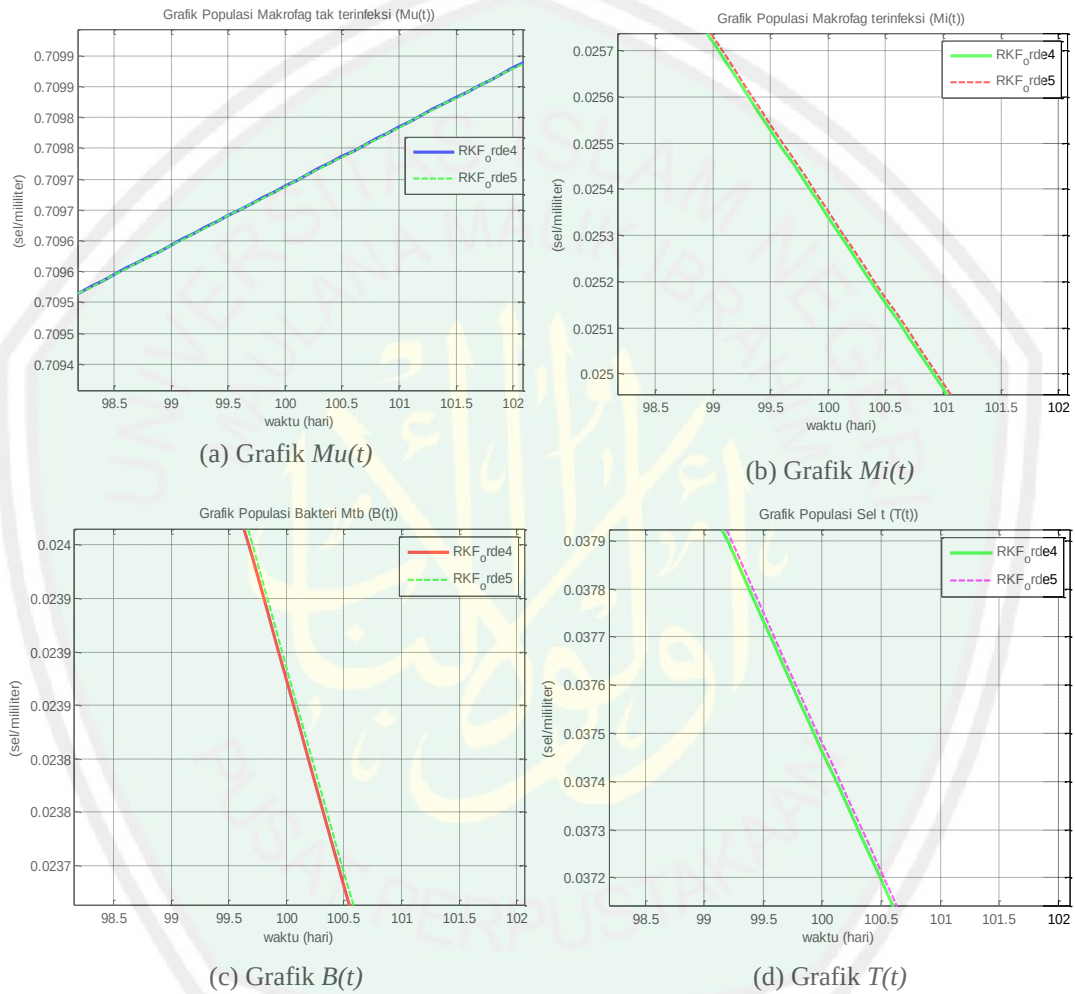
Berdasarkan hasil perhitungan galat pemotongan metode RKF 45 pada Tabel 3.8 di atas diperoleh bahwa galat < 0.0001 sehingga dapat dikatakan bahwa solusi yang diperoleh dengan metode RKF 45 mendekati solusi eksak.

Hasil penyelesaian numerik model imunologi seluler pada tuberkulosis dengan metode RKF 45 dapat digambarkan sebagai berikut.



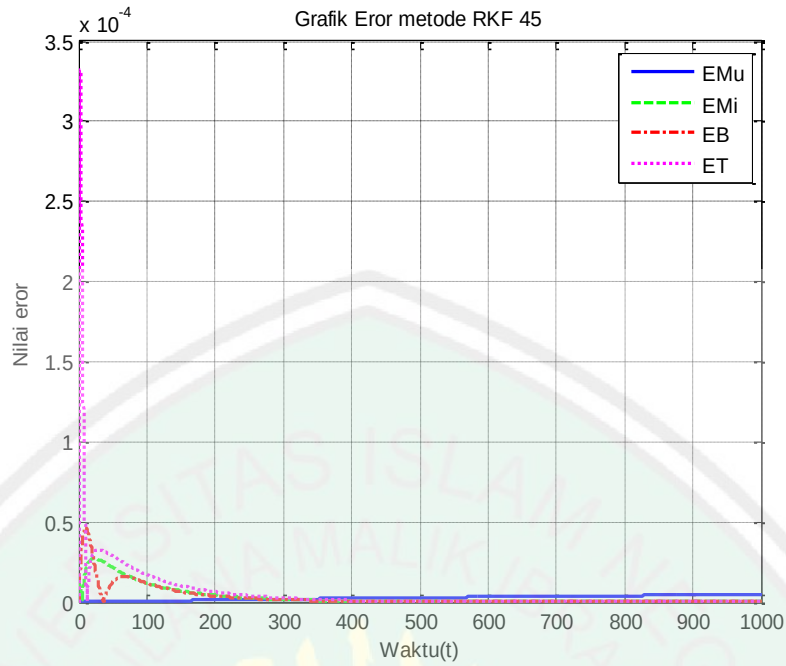
Gambar 3.1 Solusi Metode RKF 45

Berdasarkan Gambar 3.1, perbandingan solusi dari metode RKF orde-4 dan metode RKF orde-5 tidak terlihat secara jelas. Selanjutnya dari gambar di atas dilakukan pembesaran pada saat $t = 100$, sehingga perbandingan kedua metode dapat ditunjukkan pada gambar berikut.

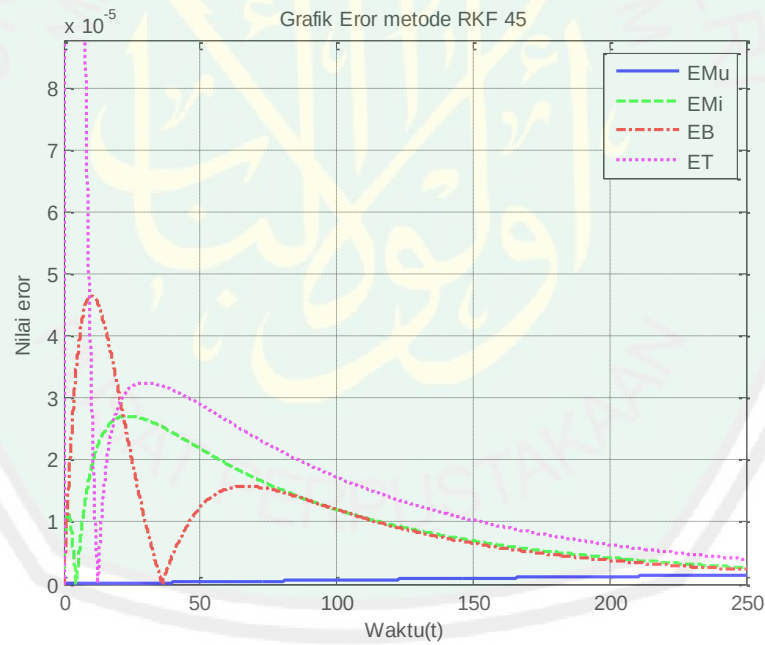


Gambar 3.2 Solusi Metode RKF 45 Saat $t = 100$

Pada Gambar 3.2 di atas menunjukkan perbandingan solusi metode RKF 45 pada penyelesaian sistem persamaan (3.1). Berdasarkan Gambar 3.2 tersebut dapat diketahui bahwa besarnya galat pada metode RKF 45 lebih kecil dari 0.0001, besarnya galat pada metode ini dapat dilihat pada Tabel 3.8 dan secara keseluruhan dapat digambarkan sebagai berikut.



Gambar 3.3 Galat Relatif Metode RKF 45



Gambar 3.4 Galat Relatif Metode RKF 45 Saat $t = 250$

Selanjutnya galat relatif metode ABM orde-4 dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$\varepsilon_{Mu} = \frac{19}{270} \frac{|Mu_{n+1} - pMu_{n+1}|}{Mu_{n+1}}, \quad \varepsilon_{Mi} = \frac{19}{270} \frac{|Mi_{n+1} - pMi_{n+1}|}{Mi_{n+1}},$$

$$\varepsilon_B = \frac{19}{270} \frac{|B_{n+1} - pB_{n+1}|}{B_{n+1}} \quad \text{dan} \quad \varepsilon_T = \frac{19}{270} \frac{|T_{n+1} - pT_{n+1}|}{T_{n+1}}$$

Pada iterasi pertama saat $i = 0$ atau $t = 0.1$, maka dapat dihitung galat relatif metode ABM orde-4 sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{Mu} &= \frac{19}{270} \frac{|Mu_4 - pMu_4|}{Mu_4} = \frac{19}{270} \frac{|0.7000049520 - 0.7000049524|}{0.7000049520} \\ &= 4.021135574 * 10^{(-11)} \\ \varepsilon_{Mi} &= \frac{19}{270} \frac{|Mi_4 - pMi_4|}{Mi_4} = \frac{19}{270} \frac{|0.1986787826 - 0.1986787823|}{0.1986787826} \\ &= 1.060986862 * 10^{(-10)} \\ \varepsilon_B &= \frac{19}{270} \frac{|B_4 - pB_4|}{B_4} = \frac{19}{270} \frac{|0.005383133638 - 0.005383133712|}{0.005383133638} \\ &= 1.269026702 * 10^{(-9)} \\ \varepsilon_{Mu} &= \frac{19}{270} \frac{|T_4 - pT_4|}{T_4} = \frac{19}{270} \frac{|0.04352157938 - 0.04352157121|}{0.04352157938} \\ &= 1.737057645 * 10^{(-8)} \end{aligned}$$

untuk iterasi selanjutnya perhitungan galat dilakukan dengan bantuan program matlab. Solusi numerik model imunologi seluler pada tuberkulosis dan hasil perhitungan galat relatif pada metode ABM orde-4 dapat dilihat pada Tabel 3.9 sebagai berikut.

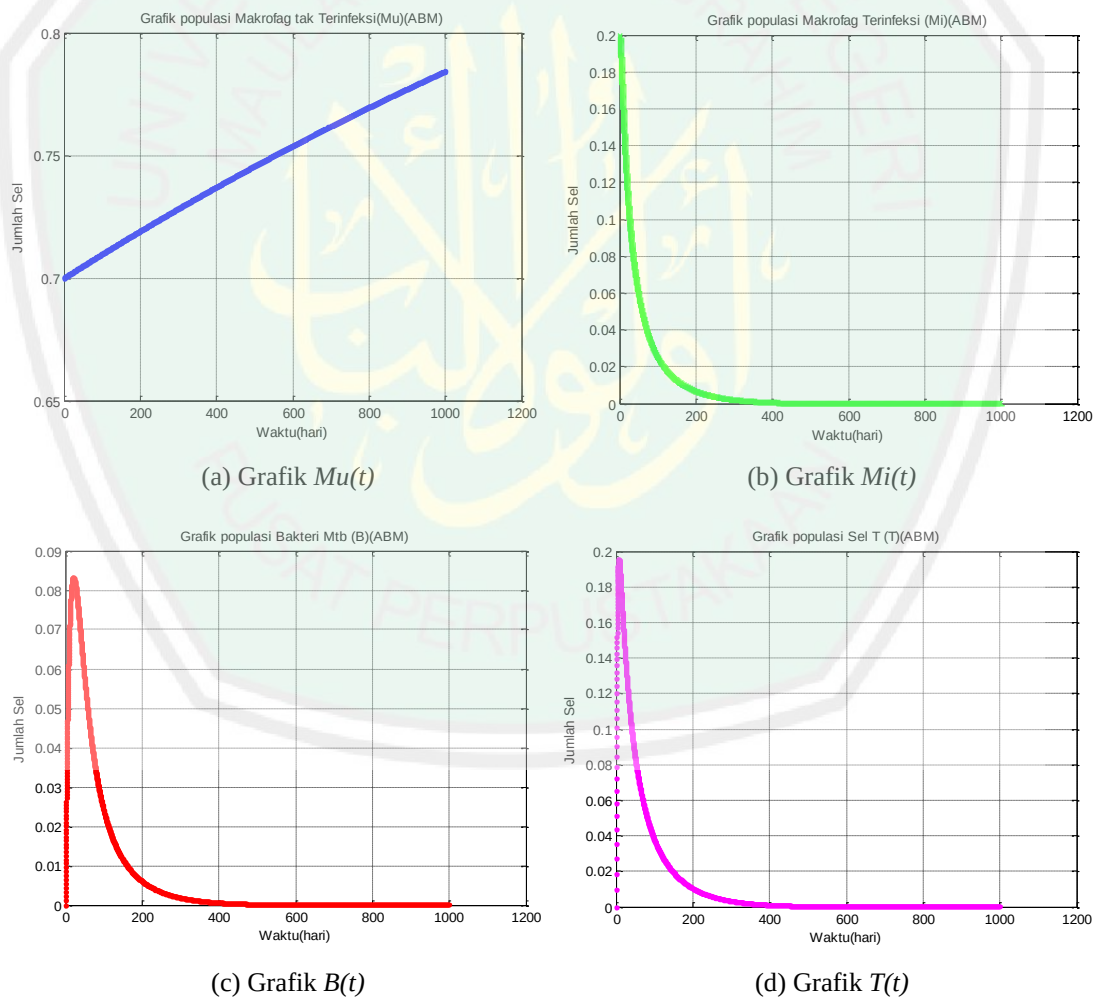
Tabel 3.9 Solusi Numerik dan Galat Metode ABM Orde-4 pada Sistem Persamaan (3.1)

n	t	Variabel	Solusi ABM Orde 4		E	Galat Relatif Metode ABM
			Prediktor	Korektor		
4	0.5	Mu_{i+1}	0.7000049524	0.7000049520	$\mathcal{E}_{Mu}$	4.021135907212321e-011
		Mi_{i+1}	0.1989761780	0.1989761783	$\mathcal{E}_{Mi}$	1.060986852046808e-010
		B_{i+1}	0.004325274622	0.004325274544	$\mathcal{E}_B$	1.269026696714670e-009
		T_{i+1}	0.03556886560	0.03556887438	$\mathcal{E}_T$	1.737057645124241e-008
10	1	Mu_{i+1}	0.70009898363594	0.70009898363594	$\mathcal{E}_{Mu}$	0
		Mi_{i+1}	0.19698144865881	0.19698144896957	$\mathcal{E}_{Mi}$	1.110170347800133e-010
		B_{i+1}	0.01053092366372	0.01053092359748	$\mathcal{E}_B$	4.426329050623014e-010
		T_{i+1}	0.07837035525434	0.07837036263043	$\mathcal{E}_T$	6.623143851217924e-009
100	10	Mu_{i+1}	0.70098836596795	0.70098836596795	$\mathcal{E}_{Mu}$	0
		Mi_{i+1}	0.15245335907153	0.15245335908186	$\mathcal{E}_{Mi}$	4.768192444051757e-012
		B_{i+1}	0.06783144499541	0.06783144499522	$\mathcal{E}_B$	1.971125068372903e-013
		T_{i+1}	0.19066961458257	0.19066961477989	$\mathcal{E}_T$	7.282482346552183e-011
1000	100	Mu_{i+1}	0.70973840206275	0.70973840206275	$\mathcal{E}_{Mu}$	0
		Mi_{i+1}	0.02551775753494	0.02551775753494	$\mathcal{E}_{Mi}$	0
		B_{i+1}	0.02405045835086	0.02405045835086	$\mathcal{E}_B$	0
		T_{i+1}	0.03771836083017	0.03771836083016	$\mathcal{E}_T$	1.865482820506386e-014
3000	300	Mu_{i+1}	0.72827715033229	0.72827715033229	$\mathcal{E}_{Mu}$	0

		Mi_{i+1}	0.00215969529175	0.00215969529175	$\mathcal{E}_{Mi}$	0
n	t	Variabel	Prediktor	Korektor	E	Galat Relatif Metode ABM
3000	300	B_{i+1}	0.00184176403829	0.00184176403829	$\mathcal{E}_B$	0
		T_{i+1}	0.00327486039462	0.00327486039462	$\mathcal{E}_T$	0
5000	500	Mu_{i+1}	0.74563185305042	0.74563185305042	$\mathcal{E}_{Mu}$	0
		Mi_{i+1}	0.00023312340506	0.00023312340506	$\mathcal{E}_{Mi}$	0
		B_{i+1}	0.00019313809422	0.00019313809422	$\mathcal{E}_B$	0
		T_{i+1}	0.00035423491881	0.00035423491881	$\mathcal{E}_T$	0
10000	1000	Mu_{i+1}	0.78432284958716	0.78432284958716	$\mathcal{E}_{Mu}$	0
		Mi_{i+1}	0.00000094967835	0.00000094967835	$\mathcal{E}_{Mi}$	0
		B_{i+1}	0.00000074775997	0.00000074775997	$\mathcal{E}_B$	0
		T_{i+1}	0.00000144341432	0.00000144341432	$\mathcal{E}_T$	0

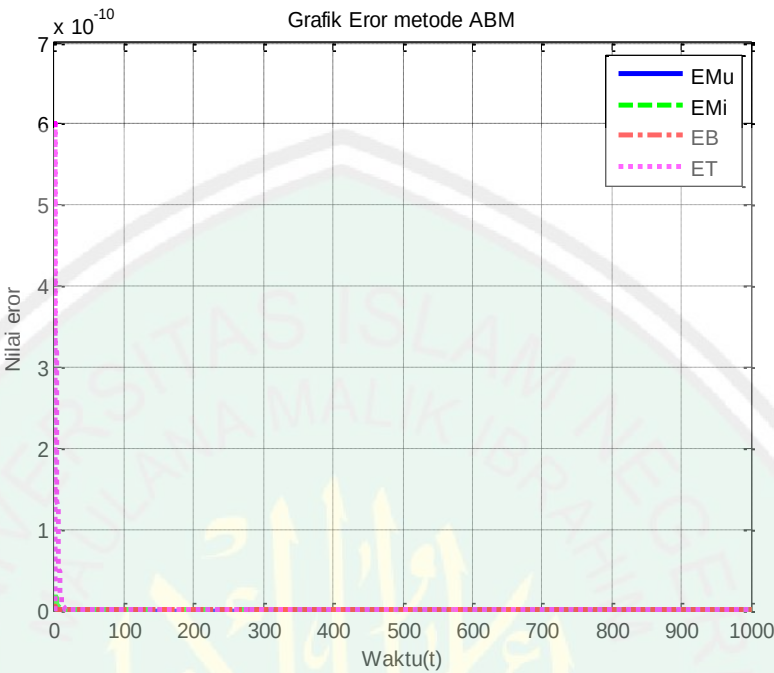
Berdasarkan hasil perhitungan galat pemotongan metode ABM orde-4 yang ditunjukkan pada Tabel 3.9, dan dengan kriteria pemberhentian $\varepsilon = 5 \times 10^{-8}$ yang dikehendaki pada skripsi ini, selanjutnya dengan membandingkan hasil perhitungan galat pada metode RKF 45 dan metode ABM maka dapat diketahui bahwa galat pada metode ABM lebih kecil dan lebih cepat memenuhi kriteria pemberhentian dari pada galat metode RKF 45.

Hasil penyelesaian numerik model imunologi seluler pada tuberkulosis dengan metode ABM orde-4 dapat digambarkan sebagai berikut.

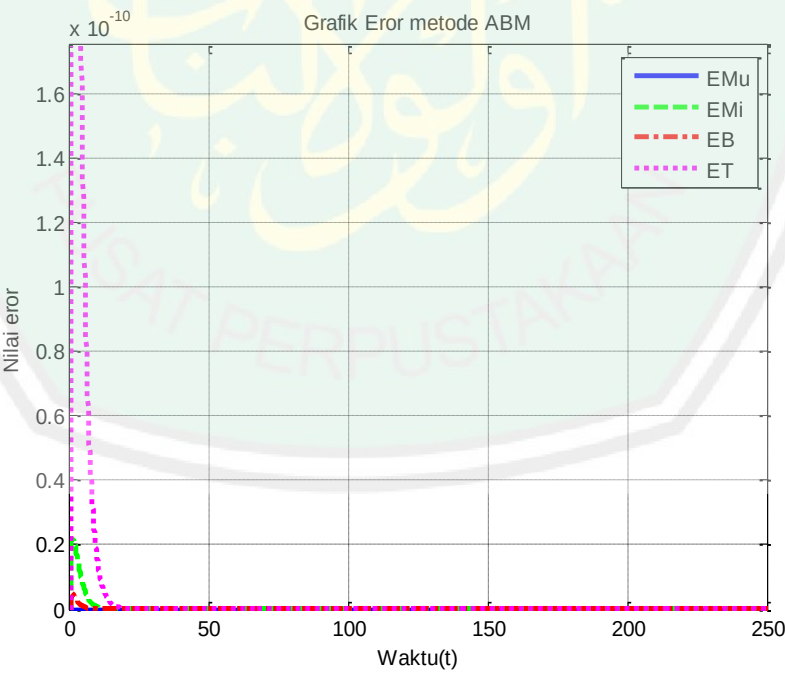


Gambar 3.5 Solusi Metode ABM Orde-4

Selanjutnya galat relatif pada metode ABM orde-4 dapat dilihat pada Tabel 3.9 dan secara keseluruhan digambarkan sebagai berikut.



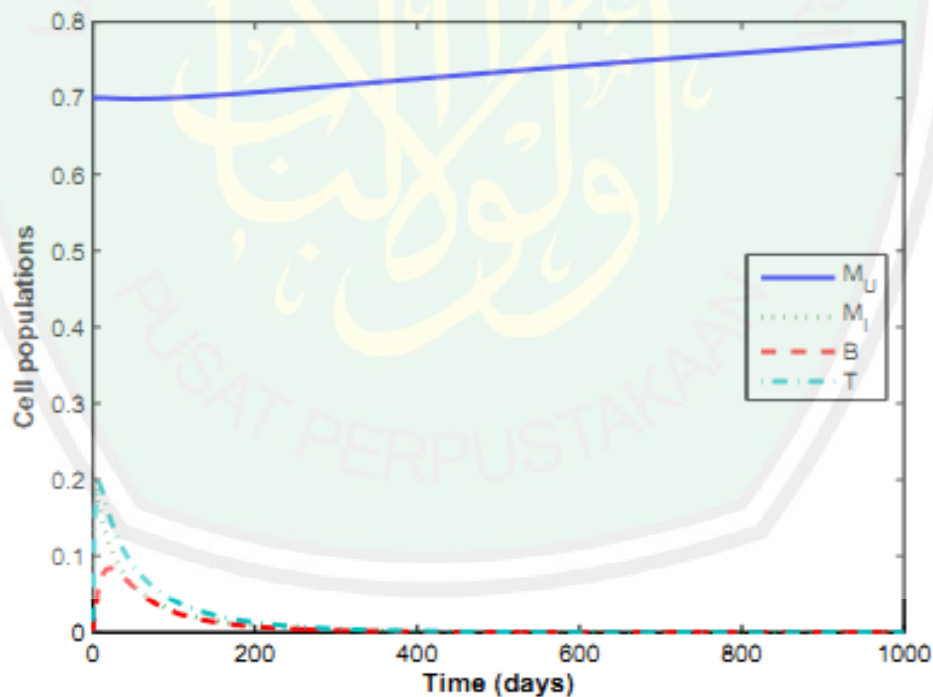
Gambar 3.6 Galat Metode ABM Orde-4



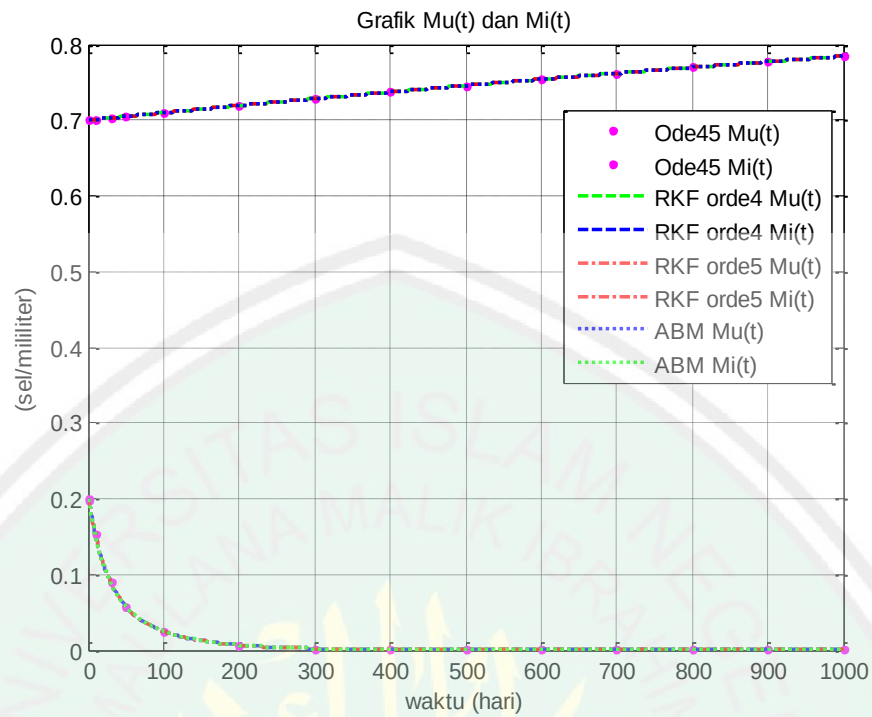
Gambar 3.7 Galat Metode ABM Orde-4 Saat $t = 250$

Pada Gambar 3.6 dan Gambar 3.7 di atas menunjukkan galat metode ABM orde-4 mengalami fluktuasi saat t berjalan dari 0 hingga 100 dan galat berjalan stabil mendekati 0 saat $t > 100$. Selain itu dapat diketahui bahwa besarnya galat pada metode ABM orde-4 lebih kecil dari kriteria pemberhentian pada skripsi ini yaitu $\varepsilon = 5 \times 10^{-8}$, sehingga solusi akan mendekati solusi eksak.

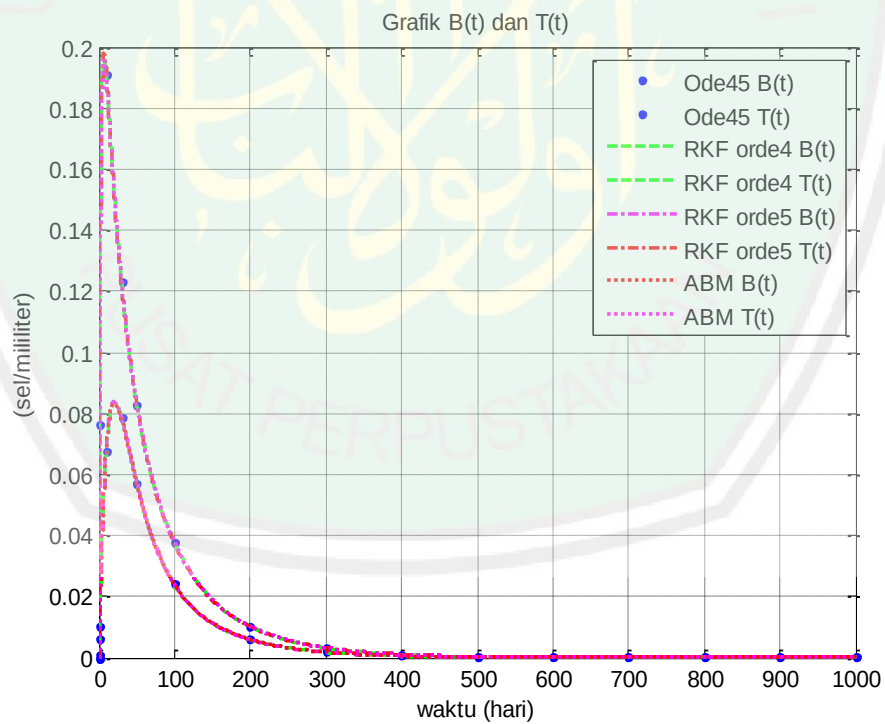
Perbandingan solusi penyelesaian sistem persamaan (3.1) dengan metode RKF 45 dan metode ABM serta galat dari kedua metode dapat dilihat pada Tabel 3.8 dan Tabel 3.9. Perbandingan solusi pada kedua metode tersebut dengan solusi menggunakan metode Ode 45 dan solusi pada penelitian Eduaro Ibarguen, dkk. (2011) dapat dilihat pada gambar sebagai berikut.



Gambar 3.8 Grafik $M_u(t)$, $M_i(t)$, $B(t)$ dan $T(t)$ pada Penelitian Ibarguen, dkk.

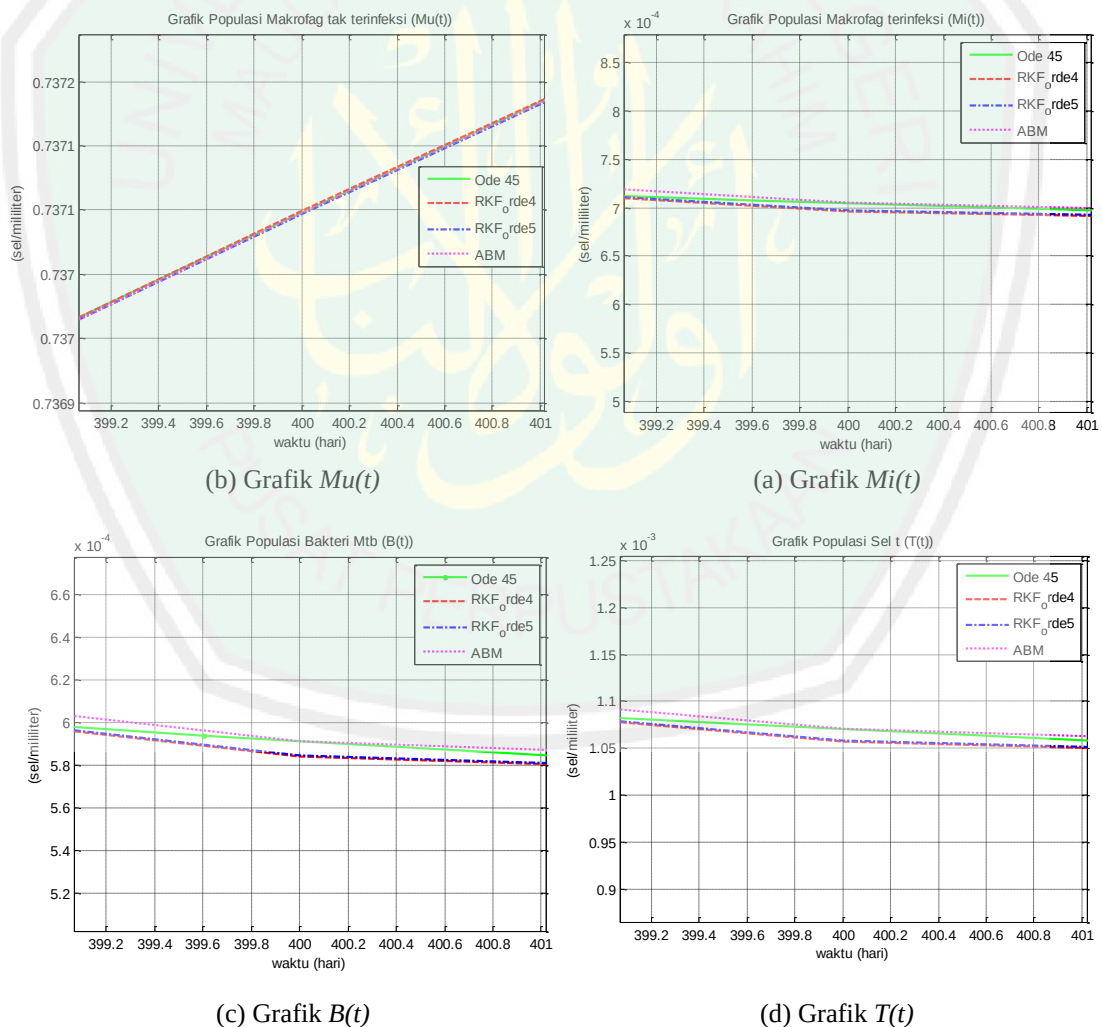


Gambar 3.9 Grafik $\mu(t)$ dan $M_i(t)$ dengan Metode RKF 45, ABM dan Ode 45



Gambar 3.10 Grafik $B(t)$ dan $T(t)$ dengan Metode RKF 45, ABM dan Ode 45

Gambar 3.9 dan Gambar 3.10 menunjukkan grafik solusi model imunologi seluler pada tuberkulosis dengan metode RKF 45, metode ABM dan Ode 45. Metode RKF 45 dan metode ABM memberikan solusi yang hampir sama, hal ini terlihat pada grafik dari masing-masing solusi yang saling berdekatan serta ditunjukkan dengan perbedaan galat yang sangat kecil. Perbandingan antara kedua metode yang terlihat pada Gambar 3.9 dan Gambar 3.10 tidak terlihat secara jelas, sehingga jika grafik tersebut diperbesar pada saat $t = 400$, maka diperoleh hasil sebagai berikut.



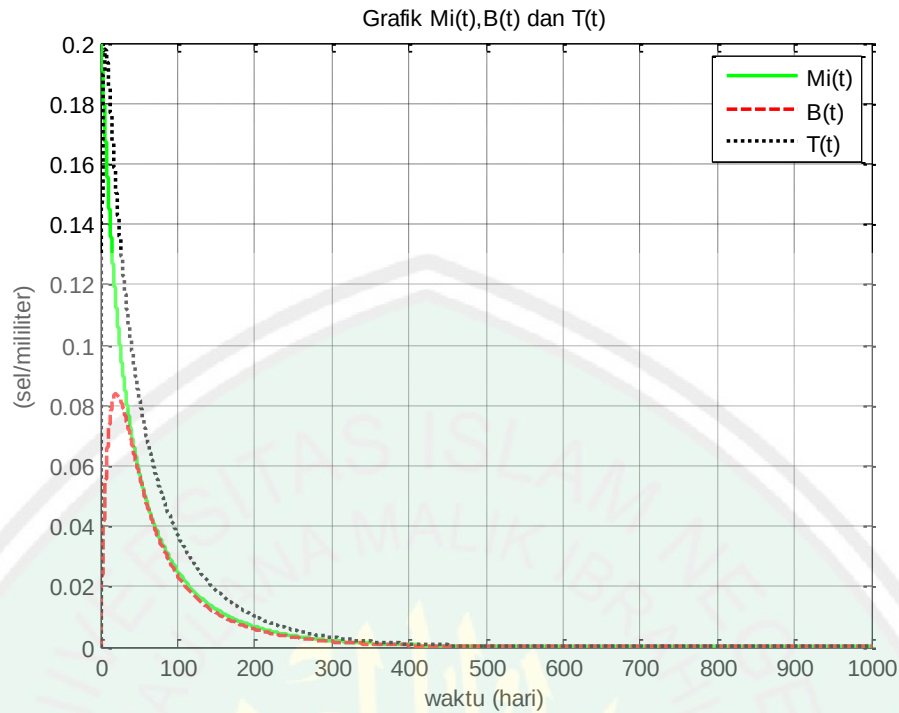
Gambar 3.11 Solusi RKF 45, ABM dan Ode 45 Saat $t = 400$

Pada Gambar 3.8 dan Gambar 3.11 menunjukkan perbandingan antara metode RKF 45, metode ABM orde-4, metode Ode 45 dan solusi pada penelitian Eduardo Ibarguen, dkk. (2011). Selanjutnya dapat dilihat solusi dari setiap metode hampir sama dengan selisih yang sangat kecil pada setiap solusi dari masing-masing metode. Solusi metode ABM Orde-4 mendekati solusi Ode 45 dan memiliki galat yang lebih kecil dari pada metode RKF 45, namun solusi dari keduanya sama-sama mendekati solusi pada penelitian Eduardo Ibarguen, dkk. (2011) sehingga dapat diketahui bahwa penyelesaian numerik model imunologi seluler pada tuberkulosis dengan metode RKF 45 dan metode ABM orde-4 mendekati solusi eksak dengan galat relatif yang kecil.

3.3.2 Analisis Hasil Numerik dan Interpretasi Grafik

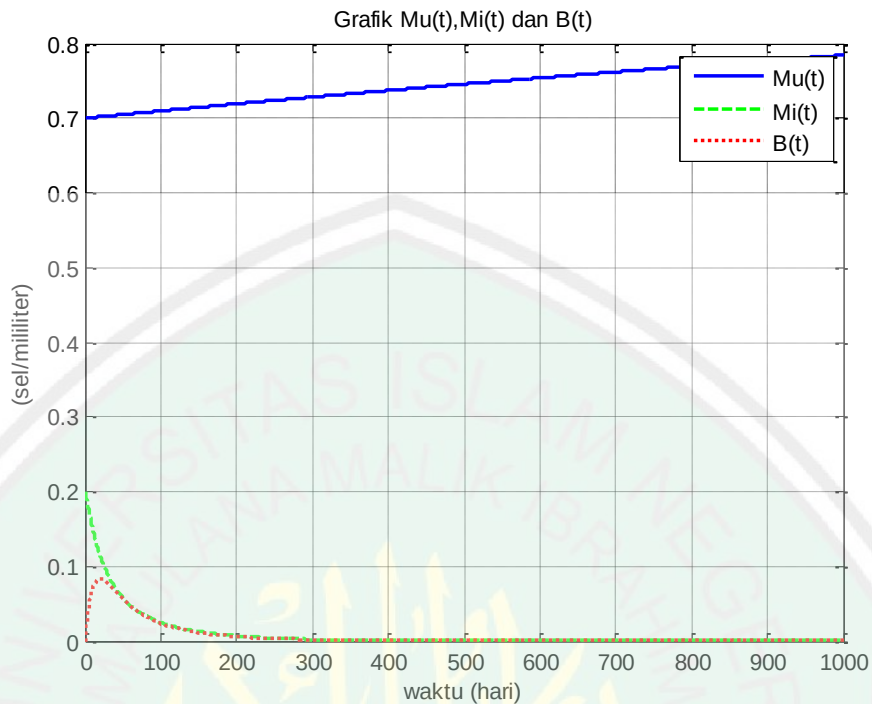
Dalam penelitian ini, nilai parameter dan nilai awal yang digunakan untuk memperoleh solusi numerik model imunologi seluler pada tuberkulosis dengan menggunakan metode RKF 45 dan metode ABM orde-4 mengacu pada penelitian yang dilakukan oleh Eduardo Ibarguen, dkk. (2011) seperti pada Tabel 3.1, dimana penelitian tersebut dilakukan terhadap satu spesies/populasi yang terdiri dari makrofag tak terinfeksi (M_u), makrofag terinfeksi (M_i), bakteri M_{tb} (B) dan sel t (T).

Dengan menggunakan metode RKF 45 dan metode ABM maka diperoleh grafik $M_u(t)$, $M_i(t)$, $B(t)$ dan $T(t)$ pada saat $t = 1000$ dengan nilai parameter pada Tabel 3.1 sebagai berikut.



Gambar 3.12 Grafik $Mi(t)$, $B(t)$ dan $T(t)$ pada Saat $t = 1000$

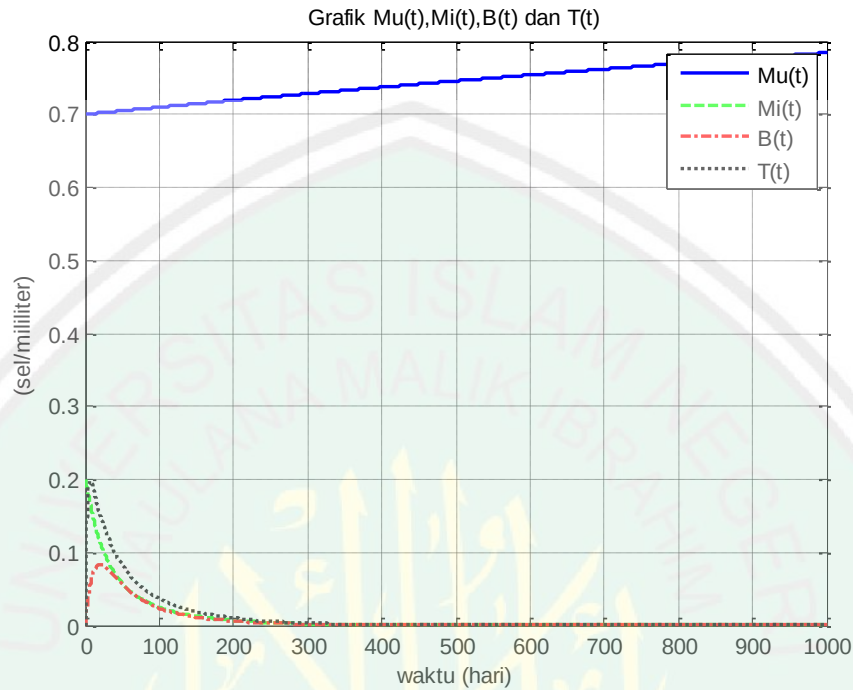
Gambar 3.12 menunjukkan populasi (B) dimulai pada hari ke 0 infeksi dengan nilai parameter dan nilai awal yang telah disajikan pada Tabel 3.1. Dengan nilai awal ($B(0) = 0$), grafik pertumbuhan bergerak naik yang dimulai pada hari ke 1 dan bakteri terus mengalami kenaikan sampai pada hari ke 20 infeksi yang masing-masing mencapai 0.06 sel/ml, dan setelah hari ke 20 pergerakan bakteri terus mengalami penurunan mendekati 0 diakibatkan kematian alami pada bakteri dengan laju 0.012 perharinya. Sedangkan populasi (Mi) dimulai dari hari ke 1 terus-menerus mengalami penurunan hingga mendekati 0 yang diakibatkan adanya interaksi terhadap sel t serta kematian alami pada makrofag terinfeksi (Mi) dengan laju kematian 0.33 perharinya. Sehingga berdasarkan Gambar 3.12 di atas penurunan makrofag terinfeksi bergantung pada besarnya populasi sel t dalam mengendalikan infeksi bakteri terhadap makrofag.



Gambar 3.13 Grafik $Mu(t)$, $Mi(t)$ dan $B(t)$ pada Saat $t = 1000$

Gambar 3.13 menunjukkan populasi (Mu) dimulai pada hari ke 0 dengan nilai parameter dan nilai awal yang telah disajikan pada Tabel 3.1. Dengan nilai awal ($Mu(0) = 0.7$), grafik pertumbuhan bergerak naik yang dimulai pada hari ke 1 dan makrofag tak terinfeksi terus mengalami kenaikan sampai pada hari ke 1000 yang mencapai 0.8 sel/ml dan setelah hari ke 1000 pergerakan bakteri terus mengalami peningkatan mendekati 1 sel/ml diakibatkan adanya pengendalian sel t terhadap bakteri serta penurunan makrofag terinfeksi (Mi). Sedangkan populasi (Mi) dimulai hari ke 0 dengan nilai awal ($Mi(0)=0.2$) terus mengalami penurunan hingga hari ke 1000 disebabkan adanya interaksi dengan sel t dan terus menurunnya populasi bakteri akibat adanya pengendalian oleh sel t serta kematian alami bakteri. Berdasarkan Gambar 3.13 di atas peningkatan makrofag tak

terinfeksi bergantung pada besarnya populasi sel t dalam mengendalikan infeksi bakteri terhadap makrofag terinfeksi serta laju kematian alami bakteri.



Gambar 3.14 Grafik $Mu(t)$, $Mi(t)$, $B(t)$ dan $T(t)$ pada Saat $t = 1000$

Gambar 3.14 menunjukkan populasi (Mu) , (Mi) , (B) dan (T) dimulai pada hari ke 0 dengan nilai parameter dan nilai awal yang telah disajikan pada Tabel 3.1. Dengan nilai awal $(Mu(0) = 0.7)$, $(Mi(0) = 0.2)$, $(B(0) = 0)$, dan $(T(0) = 0)$, grafik pertumbuhan (Mu) terus menerus bergerak naik yang dimulai pada hari ke 1 hingga hari ke 1000 yang mencapai 0.8 sel/ml, sedangkan grafik pertumbuhan (Mi) terus menerus bergerak turun yang dimulai pada hari ke 1 hingga hari ke 1000 yang mencapai 0.002 sel/ml. Pergerakan grafik pertumbuhan (B) dan (T) mengalami kenaikan hingga hari ke 15 selanjutnya terus menerus mengalami penurunan hingga hari ke 1000 yang mencapai 0.002 sel/ml. Maka berdasarkan Gambar 3.14 di atas perubahan populasi dari setiap variabel terhadap waktu sesuai dengan konsep imonologi dimana sel t berperan penting dalam

meningkatkan makrofag tak terinfeksi dan mengurangi tingkat makrofag terinfeksi, sehingga kehidupan makhluk hidup tersebut kembali normal.

3.1 Metode Numerik Runge Kutta Fehlberg (RKF 45) dan Adams Bashforth Moulton (ABM) dalam Perspektif Agama

Dalam agama Islam manusia diajarkan untuk terus berusaha menemukan solusi dari setiap masalah yang mereka hadapi. Hal ini karena solusi dari satu masalah dapat diselesaikan tidak hanya dengan satu cara namun dapat diselesaikan dengan beberapa cara sebagaimana telah dijelaskan dalam al-Quran surat Yusuf/12:

وَقَالَ يَبْنِي لَا تَدْخُلُوا مِنْ بَابٍ وَاحِدٍ، وَادْخُلُوا مِنْ أَبْوَابٍ مُتَفَرِّقَةٍ

”Hai anak-anakku janganlah kamu (bersama-sama) masuk dari satu pintu gerbang, dan masuklah dari pintu-pintu gerbang yang berlain-lain”.
(Q.S. Yusuf/12: 67)

Dalam *Tafsir al-Aisar* dijelaskan bahwa ayat tersebut turun pada saat Nabi Ya’kub a.s. telah memberikan izin kepada putra-putranya untuk pergi ke Kota Mesir bersama adik termudanya, namun demi keselamatannya beliau memerintahkan putra-putranya agar tidak memasuki Kota Mesir melalui satu jalan, hendaknya dapat memasuki melalui berbagai pintu masuk agar terhindar dari bahaya yang tidak diinginkan. Pertemuan dengan nabi Yusuf a.s. setelah melalui berbagai pintu dapat diartikan sebagai sebuah solusi dengan menggunakan berbagai cara (Jabir, 2009:838-839).

Berdasarkan ayat di atas dapat dijelaskan pula bahwa dalam berbagai persoalan di dunia Allah Swt. telah memberikan berbagai metode dalam menyelesaikan suatu masalah agar menemukan solusi terbaiknya. Manusia

dituntut untuk terus berusaha menemukan solusi yang tepat dari satu metode ke metode yang lain bahkan di berbagai metode (*min abwabim mutafarriqah*). Hal ini juga terjadi dalam penyelesaian masalah matematika, sebagai contoh permasalahan persamaan diferensial nonlinier yang sulit untuk dipecahkan sehingga dikembangkan metode analitik dan metode numerik untuk menentukan solusi dari permasalahan nonlinier tersebut.

Dalam ayat yang lain dijelaskan pula bahwa ketika suatu masalah itu sulit untuk diselesaikan dengan satu cara, maka hal tersebut pasti ada cara atau penyelesaian yang lain. Sebagaimana firman-Nya dalam al-Quran Surat Alam Nasyroh, ayat 5-6:

فَإِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٥﴾ إِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٦﴾

“Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan (5) Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan (6)”. (QS. Alam Nasyroh /94:5-6)

Dalam *Tafsir al-Aisar* dijelaskan bahwa dari ayat di atas terdapat kata ‘*usri* (kesulitan) yang merupakan isim makrifat artinya satu dan terdapat pula kata *yusron* (kemudahan) sebagai isim nakirah artinya umum atau banyak. Sehingga dari penjabaran ayat tersebut dapat diketahui bahwa satu kesulitan memiliki banyak metode / cara penyelesaiannya (Jabir, 2009:967).

Sesuai dengan perkembangan ilmu pengetahuan maka telah dikembangkan berbagai metode penyelesaian masalah nonlinier baik metode analitik maupun metode numerik. Metode analitik akan selalu berusaha memberikan solusi eksak (sejati), sedangkan metode numerik akan memberikan solusi numerik (solusi aproksimasi atau hampiran) yang mendekati solusi eksak. Hal ini karena tidak

semua masalah nonlinier dapat diselesaikan dengan metode analitik, sehingga dapat dikatakan bahwa metode numerik sebagai metode alternatif .

Berdasarkan ayat di atas dijelaskan bahwa terdapat berbagai metode (*min abwabim mutafarriqah*) dalam menentukan sebuah solusi. Dalam metode numerik terdapat berbagai macam metode yang dapat digunakan untuk menentukan solusi persamaan diferensial nonlinier, salah satu metode numerik yang memiliki tingkat kesalahan kecil adalah Metode Runge Kutta Fehlberg (RKF 45) dan metode Adams Bashforth Moulton (ABM).

Metode Runge Kutta Fehlberg (RKF 45) termasuk dalam keluarga metode Runge Kutta Orde-4, namun memiliki ketelitian sampai orde-5. Ketelitian yang tinggi ini dimungkinkan karena metode RKF 45 memiliki 6 konstanta perhitungan yang berperan untuk memperbarui solusi sampai orde-5. Sedangkan Metode Adams Bashforth Moulton (ABM) merupakan gabungan dari dua metode yaitu metode Adams Bashforth sebagai prediktor dan metode Adams Moulton sebagai korektor. Metode ABM orde-4 merupakan metode yang memiliki tingkat kesalahan relatif kecil.

Metode analitik maupun metode numerik memberikan tingkat kebenaran yang berbeda, namun keduanya sama-sama memiliki tingkat kebenaran yang telah diakui dan disepakati. Kebenaran dan keputusan yang paling tepat hanya milik Allah sebagaimana firman-Nya dalam QS. Yusuf/12:67:

﴿إِنِ الْحُكْمُ إِلَّا لِلَّهِ عَلَيْهِ تَوَكَّلْتُ وَعَلَيْهِ فَلْيَتَوَكَّلِ الْمُتَوَكِّلُونَ﴾

"..Keputusan menetapkan (sesuatu) hanyalah hak Allah; kepada-Nya-lah aku bertawakkal dan hendaklah kepada-Nya saja orang-orang yang bertawakkal berserah diri"(QS. Yusuf/12:67)

Dalam *Tafsir Nurul Qur'an* ayat di atas menjelaskan bahwa keputusan menetapkan hanyalah milik Allah (*Inil Hukmu Illa Lillahi*), sehingga dapat ditarik kesimpulan pula bahwa semua metode memiliki tingkat kebenaran yang telah diakui meskipun tidak mencapai tingkat kebenaran sejati (eksak) karena kebenaran yang sesungguhnya hanya Allah yang mengetahuinya. Lanjutan ayat di atas menjelaskan bahwa Allah memerintahkan agar manusia terus berusaha untuk mencari solusi yang tepat dalam hidupnya, selanjutnya bertawakkal dan berserah diri kepada-Nya atas usahanya tersebut. Begitu pula dengan solusi yang diperoleh dari metode numerik kebenarannya harus dapat diakui setelah melewati prosedur yang telah ditentukan (Faqih, 2005:570).

Berkaitan dengan metode numerik, dalam ayat lain Allah juga telah menjelaskan bahwa dalam setiap penciptaan-Nya telah diukur dan ditetapkan berdasarkan ukuran-Nya, seperti dalam firman-Nya surat al-Qomar/54:2::

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَاهُ بِقَدَرٍ ﴿٢﴾

”Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran ”
(QS. al-Qamar/54:49).

Dalam ayat di atas terdapat kata *qadar* yang mana dari segi bahasa bisa berarti kadar tertentu yang tidak bertambah atau berkurang atau juga berarti kuasa. Tetapi karena ayat tersebut berbicara tentang segala sesuatu yang berada dalam kuasa Allah Swt. maka lebih tepat memahaminya dalam arti ketentuan dan sistem yang ditetapkan terhadap segala sesuatu. Selanjutnya kata *qadar* atau ukuran dapat diartikan sebagai proporsi. Dalam kehidupan ini Allah Swt. telah menetapkan sesuatu sesuai dengan proporsi atau bagiannya masing-masing. Salah satu contohnya Allah Swt. telah menciptakan lalat

yang merupakan binatang penghasil jutaan telur, tetapi ia tidak dapat bertahan hidup lebih dari dua minggu. Seandainya ia dapat hidup beberapa tahun dengan kemampuan bertelurnya, maka pastilah bumi ini dipenuhi lalat dan kehidupan sekian banyak jenis makhluk khususnya manusia akan menjadi mustahil. Tetapi semua itu berjalan berdasarkan sistem pengaturan dan kadar yang ditentukan Allah Swt. di alam raya ini (Jabir, 2009:199).





BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pada hasil pembahasan pada bab 3, maka dapat diambil kesimpulan bahwa dalam menyelesaikan sistem persamaan diferensial nonlinier pada model imunologi seluler pada tuberkulosis dengan metode Runge Kutta Fehlberg (RKF 45) dapat dilakukan dengan beberapa tahap yaitu: (1). Mengidentifikasi nilai parameter dan nilai awal pada sistem persamaan diferensial yaitu variabel $Mu(0)$, $Mi(0)$, $B(0)$ dan $T(0)$, (2). Menentukan nilai t (waktu) dan besarnya h (ukuran langkah) yang akan ditentukan, (3). Menentukan formulasi metode RKF 45, (4). Menghitung nilai k_1-k_6 , m_1-m_6 , n_1-n_6 dan p_1-p_6 dengan menggunakan formulasi yang telah ditentukan, dan (5). Menghitung solusi Mu_{i+1} , Mi_{i+1} , B_{i+1} dan T_{i+1} dengan mensubstitusikan variabel-variabel yang telah didapatkan pada langkah 4 ke dalam formulasi metode RKF 45. Dalam penelitian ini dengan $h = 0.1$ dan $t = 1000$, maka untuk metode RKF orde-4 diperoleh solusi $Mu = 0.78432660796594$, $Mi = 0.00000092745234$, $B = 0.00000073025277$, dan $T = 0.00000140963308$, sedangkan untuk metode RKF orde-5 diperoleh solusi $Mu = 0.78432193451241$, $Mi = 0.00000092929546$, $B = 0.00000073170851$ dan $T = 0.00000141243443$.

Penyelesaian numerik model imunologi seluler pada tuberkulosis dengan metode Adams Bashforth Moulton (ABM) dapat dilakukan dengan beberapa tahap yakni: (1). Mengidentifikasi nilai parameter dan nilai awal pada sistem persamaan diferensial yaitu variabel $Mu(0)$, $Mi(0)$, $B(0)$ dan $T(0)$, (2).

Menentukan nilai t (waktu) dan besarnya h (ukuran langkah) yang akan ditentukan, (3). Menghitung empat solusi awal $Mu_{0...3}$, $Mi_{0...3}$, $B_{0...3}$ dan $T_{0...3}$ dengan metode Runge Kutta Orde-4, (4). Menentukan nilai dari f_n , g_n , j_n dan k_n dengan $n = 3, 4, \dots$, (5). Menentukan solusi numerik dengan menggunakan formulasi prediktor dan korektor metode ABM, dan (6). Korektor metode ABM diiterasikan pada $n = 3, 4, 5, \dots$ sampai memenuhi kriteria pemberhentian yang dikehendaki, yaitu $\varepsilon = 5 \times 10^{-8}$. Dalam penelitian ini dengan $h = 0.1$ dan $t = 1000$, maka untuk metode ABM diperoleh solusi $Mu = 0.78432284958716$, $Mi = 0.00000094967835$, $B = 0.00000074775997$, dan $T = 0.00000144341432$.

Berdasarkan hasil penyelesaian model imunologi seluler pada tuberkulosis dengan metode RKF 45 dan metode ABM dapat ditarik kesimpulan bahwa solusi dari kedua metode saling berdekatan dan hampir sama, hal tersebut dapat ditunjukkan dengan grafik solusi dari kedua metode tersebut. Galat pemotongan dari kedua metode tersebut lebih kecil dari kriteria pemberhentian yang dikehendaki dalam skripsi ini yaitu $\varepsilon = 5 \times 10^{-8}$ sehingga dapat dikatakan bahwa solusi yang diperoleh dengan metode RKF 45 dan metode ABM mendekati solusi eksak. Perbandingan galat pemotongan dari kedua metode tersebut dapat dilihat dengan menentukan kriteria pemberhentian yang dikehendaki pada skripsi ini, maka dari hasil analisis perhitungan galat pada bab 3 dapat diketahui bahwa galat pada metode ABM lebih kecil dan lebih cepat memenuhi kriteria pemberhentian dari pada galat metode RKF 45.

4.2 Saran

Dalam penelitian ini telah ditunjukkan perbandingan metode Runge Kutta Fehlberg (RKF 45) dan metode Adams Basforth Moulton (ABM) dalam menyelesaikan sistem persamaan differensial nonlinier, maka bagi para pembaca untuk penelitian selanjutnya dapat dilakukan penelitian yang sama menggunakan metode RKF dan metode ABM dengan orde yang lebih tinggi atau dengan metode numerik lainnya.



DAFTAR PUSTAKA

- Abdussakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press.
- Aga, S.A & Ekpenyong. 2013. *Upgrading Runge Kutta Fehlberg Method (RKFM) for Second Order Ordinary Differential Equations*. *International Journal of Science and Technology*. 3:258-262.
- Apriadi & Prihandono. 2014. *Metode Adams Bashforth Moulton dalam Penyelesaian Sistem Persamaan Diferensial Nonlinier*. *Buletin Ilmiah Mat. Stat dan Terapan*. 3:107-116.
- Amanah, N.F. 2012. *Analisis Model Matematika pada Makrofag di Paru-Paru sebagai Respon dari Infeksi Mycobacterium Tuberculosis*. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
- Azizah, N. 2013. *Penyelesaian Persamaan Vander Pol Menggunakan Metode Adams Bashforth Moulton Orde-4*. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
- Bronson, R. & Costa, G.B. 2007. *Schaum's Outlines: Persamaan Diferensial Edisi Ketiga*. Jakarta: Erlangga.
- Butcher, C.J. 2008. *Numerical Method for Ordinary Differential Equations*. England: John Wiley & Sons Ltd.
- Chapra S dan Canale, R, 2010. *Numerical Methods for Engineers*. New York: The McGraw-Hill Companies.
- Faqih, I. 2005. *Tafsir Nurul Quran Jilid VII*. Jakarta: Penerbit Al-Huda.
- Haniyah, K. 2011. *Analisis Simulasi Model Matematika pada Interaksi Makrofag dan Mikobakterium Tuberculosis*. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
- Ibarguen, E., Esteva, L., & Chavez, L. 2011. *A Mathematical Model for Cellular Immunology of Tuberculosis*. *Mathematical Biosciences and Engineering*. 8:973-986.
- Jabir, A.B. 2009. *Tafsir al-Aisar*. Jatinegara: Darussunnah Press.
- Mathews & Kurtis. 2004. *Numerical Methods Using Matlab*. 4th Editions. New Jersey: The Prentice Hall, Inc

Munir, R. 2006. *Metode Numerik*. Bandung: Informatika

Pamuntjak. 1990. *Persamaan Diferensial Biasa*. Bandung: ITB

Ritschel, T. 2013. *Numerical Methods for Solution of Differential Equations*. Lyngby: Department of Applied Mathematics and Computer Science.

Urifah, N. 2008. *Penyelesaian Numerik Sistem Persamaan Diferensial Lotka Voltera dengan Metode Runge Kutta Fehlberg (RKF 45)*. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.



LAMPIRAN– LAMPIRAN

Lampiran 1. Program RKF 45

```

clc;clear;format long;
disp('=====')
disp('Program Solusi Numerik Model Imonologi Seluler pada Tuberkulosis')
disp('dengan Metode Runge Kutta Fehlberg (orde-4)')
disp('=====')

tic;
f1=inline('0.33e-3-0.33e-3*Mu-8.250000000*10^(-9)*B*Mu','t','Mu','Mi','B','T');
f2=inline('8.250000000*10^(-9)*B*Mu-.1*Mi*T-0.11e-1*Mi','t','Mu','Mi','B','T');
f3=inline('0.55e-1*Mi-0.879e-1*B*Mu-0.12e-1*B','t','Mu','Mi','B','T');
f4=inline('(.484848*(1-T))*Mi-.33*T','t','Mu','Mi','B','T');
Mu0=0.7;
Mi0=0.2;
B0=0;
T0=0;
h=0.1; a=0;
b=input('masukkan batas atas interval waktu =');
n=(b-a)/h;
Mu=zeros(n,1);Mu(1)=Mu0;
Mi=zeros(n,1);Mi(1)=Mi0;
B=zeros(n,1);B(1)=B0;
T=zeros(n,1);T(1)=T0;
t=[0:h:n*h];
for i = 1:n
    k1=h*f1(t(i),Mu(i),Mi(i),B(i),T(i));
    m1=h*f2(t(i),Mu(i),Mi(i),B(i),T(i));
    n1=h*f3(t(i),Mu(i),Mi(i),B(i),T(i));
    p1=h*f4(t(i),Mu(i),Mi(i),B(i),T(i));
    k2=h*f1(t(i)+(h/4),Mu(i)+(k1/4),Mi(i)+(m1/4),B(i)+(n1/4),T(i)+(p1/4));
    m2=h*f2(t(i)+(h/4),Mu(i)+(k1/4),Mi(i)+(m1/4),B(i)+(n1/4),T(i)+(p1/4));
    n2=h*f3(t(i)+(h/4),Mu(i)+(k1/4),Mi(i)+(m1/4),B(i)+(n1/4),T(i)+(p1/4));
    p2=h*f4(t(i)+(h/4),Mu(i)+(k1/4),Mi(i)+(m1/4),B(i)+(n1/4),T(i)+(p1/4));
    k3=h*f1(t(i)+(3*h/8),Mu(i)+(3*k1/32)+(9*k2/32),Mi(i)+(3*m1/32)+(9*m2/32),B(i)+(3*n1/32)+(9*n2/32),T(i)+(3*p1/32)+(9*p2/32));
    m3=h*f2(t(i)+(3*h/8),Mu(i)+(3*k1/32)+(9*k2/32),Mi(i)+(3*m1/32)+(9*m2/32),B(i)+(3*n1/32)+(9*n2/32),T(i)+(3*p1/32)+(9*p2/32));
    n3=h*f3(t(i)+(3*h/8),Mu(i)+(3*k1/32)+(9*k2/32),Mi(i)+(3*m1/32)+(9*m2/32),B(i)+(3*n1/32)+(9*n2/32),T(i)+(3*p1/32)+(9*p2/32));
    p3=h*f4(t(i)+(3*h/8),Mu(i)+(3*k1/32)+(9*k2/32),Mi(i)+(3*m1/32)+(9*m2/32),B(i)+(3*n1/32)+(9*n2/32),T(i)+(3*p1/32)+(9*p2/32));
    k4=h*f1(t(i)+(12*h/13),Mu(i)+(1932*k1/2197)-(7200*k2/2197)+(7290*k3*h/2197),Mi(i)+(1932*m1/2197)-(7200*m2/2197)+(7290*m3*h/2197),B(i)+(1932*n1/2197)-(7200*n2/2197)+(7290*n3*h/2197),T(i)+(1932*p1/2197)-(7200*p2/2197)+(7290*p3*h/2197));
    m4=h*f2(t(i)+(12*h/13),Mu(i)+(1932*k1/2197)-(7200*k2/2197)+(7290*k3*h/2197),Mi(i)+(1932*m1/2197)-(7200*m2/2197)+(7290*m3*h/2197),B(i)+(1932*n1/2197)-(7200*n2/2197)+(7290*n3*h/2197),T(i)+(1932*p1/2197)-(7200*p2/2197)+(7290*p3*h/2197));
    n4=h*f3(t(i)+(12*h/13),Mu(i)+(1932*k1/2197)-(7200*k2/2197)+(7290*k3*h/2197),Mi(i)+(1932*m1/2197)-(7200*m2/2197)+(7290*m3*h/2197),B(i)+(1932*n1/2197)-(7200*n2/2197)+(7290*n3*h/2197),T(i)+(1932*p1/2197)-(7200*p2/2197)+(7290*p3*h/2197));
    p4=h*f4(t(i)+(12*h/13),Mu(i)+(1932*k1/2197)-(7200*k2/2197)+(7290*k3*h/2197),Mi(i)+(1932*m1/2197)-(7200*m2/2197)+(7290*m3*h/2197),B(i)+(1932*n1/2197)-(7200*n2/2197)+(7290*n3*h/2197),T(i)+(1932*p1/2197)-(7200*p2/2197)+(7290*p3*h/2197));
    k5=h*f1(t(i)+h,Mu(i)+(439*k1/216)-(8*k2)+(3680*k3/513)-(845*k4/4104),Mi(i)+(439*m1/216)-(8*m2)+(3680*m3/513)-(845*m4/4104),B(i)+(439*n1/216)-(8*n2)+(3680*n3/513)-(845*n4/4104),T(i)+(439*p1/216)-(8*p2)+(3680*p3/513)-(845*p4/4104));
    m5=h*f2(t(i)+h,Mu(i)+(439*k1/216)-(8*k2)+(3680*k3/513)-(845*k4/4104),Mi(i)+(439*m1/216)-(8*m2)+(3680*m3/513)-(845*m4/4104),B(i)+(439*n1/216)-(8*n2)+(3680*n3/513)-(845*n4/4104),T(i)+(439*p1/216)-(8*p2)+(3680*p3/513)-(845*p4/4104));
    n5=h*f3(t(i)+h,Mu(i)+(439*k1/216)-(8*k2)+(3680*k3/513)-(845*k4/4104),Mi(i)+(439*m1/216)-(8*m2)+(3680*m3/513)-(845*m4/4104),B(i)+(439*n1/216)-(8*n2)+(3680*n3/513)-(845*n4/4104),T(i)+(439*p1/216)-(8*p2)+(3680*p3/513)-(845*p4/4104));
    p5=h*f4(t(i)+h,Mu(i)+(439*k1/216)-(8*k2)+(3680*k3/513)-(845*k4/4104),Mi(i)+(439*m1/216)-(8*m2)+(3680*m3/513)-(845*m4/4104),B(i)+(439*n1/216)-(8*n2)+(3680*n3/513)-(845*n4/4104),T(i)+(439*p1/216)-(8*p2)+(3680*p3/513)-(845*p4/4104));
    Mu(i+1)=Mu(i)+h*k5;
    Mi(i+1)=Mi(i)+h*m5;
    B(i+1)=B(i)+h*n5;
    T(i+1)=T(i)+h*p5;
end

```

```

p5=h*f4(t(i)+h,Mu(i)+(439*k1/216)-(8*k2)+(3680*k3/513)-(845*k4/4104),
Mi(i)+(439*m1/216)-(8*m2)+(3680*m3/513)-(845*m4/4104),B(i)+(439*n1/216)-
(8*n2)+(3680*n3/513)-(845*n4/4104),T(i)+(439*p1/216)-(8*p2)+(3680*p3/513)-
(845*p4/4104));
Mu(i+1)=Mu(i)+(25*k1/216)+(1408*k3/2565)+(2197*k4/4104)-(k5/5);
Mi(i+1)=Mi(i)+(25*m1/216)+(1408*m3/2565)+(2197*m4/4104)-(m5/5);
B(i+1)=B(i)+(25*n1/216)+(1408*n3/2565)+(2197*n4/4104)-(n5/5);
T(i+1)=T(i)+(25*p1/216)+(1408*p3/2565)+(2197*p4/4104)-(p5/5);

end
disp('=====')
disp('hasil komputasi')
disp(' iterasi      t          Mu          Mi')
disp(' B          T          ')
A=[1:i+1]';
for i=1:n+1
    fprintf('%8.0f %8.2f %8.14f %8.14f %8.14f\n',A(i,1),A(i,2),A(i,3),A(i,4),A(i,5),A(i,6))
end
disp(['Waktu Komputasi=',num2str(toc)])
figure(1)
plot(t,Mu,'--r');
hold on
plot(t,Mi,'-.b');
plot(t,B,'.:m');
plot(t,T,':k');
hold off
title('Grafik Mu,Mi,B,dan T')
xlabel('Waktu(hari)')
ylabel('Jumlah Sel')
legend('Mu','Mi','B','T')
grid on

clc;clear;format long;
disp('=====')
disp('Program Solusi Numerik Model Imonologi Seluler pada Tuberkulosis ')
disp(' dengan Metode Runge Kutta Fehlberg (orde-5) ')
disp('=====')

tic;
f1=inline('0.33e-3-0.33e-3*Mu-8.250000000*10^(-9)*B*Mu;','t','Mu','Mi','B','T');
f2=inline('8.250000000*10^(-9)*B*Mu-.1*Mi*T-0.11e-1*Mi;','t','Mu','Mi','B','T');
f3=inline('0.55e-1*Mi-0.879e-1*B*Mu-0.12e-1*B;','t','Mu','Mi','B','T');
f4=inline('(.484848*(1-T))*Mi-.33*T;','t','Mu','Mi','B','T');
Mu0=0.7;
Mi0=0.2;
B0=0;
T0=0;
h=0.1; a=0;
b=1000;
n=(b-a)/h;
Mu=zeros(n,1);Mu(1)=Mu0;
Mi=zeros(n,1);Mi(1)=Mi0;
B=zeros(n,1);B(1)=B0;
T=zeros(n,1);T(1)=T0;
t=[0:h:n*h];
for i = 1:n
    k1=h*f1(t(i),Mu(i),Mi(i),B(i),T(i));
    m1=h*f2(t(i),Mu(i),Mi(i),B(i),T(i));
    n1=h*f3(t(i),Mu(i),Mi(i),B(i),T(i));
    p1=h*f4(t(i),Mu(i),Mi(i),B(i),T(i));
    k2=h*f1(t(i)+(h/4),Mu(i)+(k1/4),Mi(i)+(m1/4),B(i)+(n1/4),T(i)+(p1/4));
    m2=h*f2(t(i)+(h/4),Mu(i)+(k1/4),Mi(i)+(m1/4),B(i)+(n1/4),T(i)+(p1/4));
    n2=h*f3(t(i)+(h/4),Mu(i)+(k1/4),Mi(i)+(m1/4),B(i)+(n1/4),T(i)+(p1/4));
    p2=h*f4(t(i)+(h/4),Mu(i)+(k1/4),Mi(i)+(m1/4),B(i)+(n1/4),T(i)+(p1/4));
    k3=h*f1(t(i)+(3*h/8),Mu(i)+(3*k1/32)+(9*k2/32),Mi(i)+(3*m1/32)+(9*m2/32),B(i)+(3*n1/32)+(9*n2/32),T(i)+(3*p1/32)+(9*p2/32));
    m3=h*f2(t(i)+(3*h/8),Mu(i)+(3*k1/32)+(9*k2/32),Mi(i)+(3*m1/32)+(9*m2/32),B(i)+(3*n1/32)+(9*n2/32),T(i)+(3*p1/32)+(9*p2/32));
    n3=h*f3(t(i)+(3*h/8),Mu(i)+(3*k1/32)+(9*k2/32),Mi(i)+(3*m1/32)+(9*m2/32),B(i)+(3*n1/32)+(9*n2/32),T(i)+(3*p1/32)+(9*p2/32));
    p3=h*f4(t(i)+(3*h/8),Mu(i)+(3*k1/32)+(9*k2/32),Mi(i)+(3*m1/32)+(9*m2/32),B(i)+(3*n1/32)+(9*n2/32),T(i)+(3*p1/32)+(9*p2/32));

```

```

k4=h*f1(t(i)+(12*h/13),Mu(i)+(1932*k1/2197)-(7200*k2/2197)+(7290*k3*h/2197),
Mi(i)+(1932*m1/2197)-(7200*m2/2197)+(7290*m3*h/2197),B(i)+(1932*n1/2197)-
(7200*n2/2197)+(7290*n3*h/2197),T(i)+(1932*p1/2197)-(7200*p2/2197)+
(7290*p3*h/2197));
m4=h*f2(t(i)+(12*h/13),Mu(i)+(1932*k1/2197)-(7200*k2/2197)+(7290*k3*h/2197),
Mi(i)+(1932*m1/2197)-(7200*m2/2197)+(7290*m3*h/2197),B(i)+(1932*n1/2197)-
(7200*n2/2197)+(7290*n3*h/2197),T(i)+(1932*p1/2197)-(7200*p2/2197)+
(7290*p3*h/2197));
n4=h*f3(t(i)+(12*h/13),Mu(i)+(1932*k1/2197)-(7200*k2/2197)+(7290*k3*h/2197),
Mi(i)+(1932*m1/2197)-(7200*m2/2197)+(7290*m3*h/2197),B(i)+(1932*n1/2197)-
(7200*n2/2197)+(7290*n3*h/2197),T(i)+(1932*p1/2197)-(7200*p2/2197)+
(7290*p3*h/2197));
p4=h*f4(t(i)+(12*h/13),Mu(i)+(1932*k1/2197)-(7200*k2/2197)+(7290*k3*h/2197),
Mi(i)+(1932*m1/2197)-(7200*m2/2197)+(7290*m3*h/2197),B(i)+(1932*n1/2197)-
(7200*n2/2197)+(7290*n3*h/2197),T(i)+(1932*p1/2197)-(7200*p2/2197)+
(7290*p3*h/2197));
k5=h*f1(t(i)+h,Mu(i)+(439*k1/216)-(8*k2)+(3680*k3/513)-(845*k4/4104),
Mi(i)+(439*m1/216)-(8*m2)+(3680*m3/513)-(845*m4/4104),B(i)+(439*n1/216)-
(8*n2)+(3680*n3/513)-(845*n4/4104),T(i)+(439*p1/216)-(8*p2)+(3680*p3/513)-
(845*p4/4104));
m5=h*f2(t(i)+h,Mu(i)+(439*k1/216)-(8*k2)+(3680*k3/513)-(845*k4/4104),
Mi(i)+(439*m1/216)-(8*m2)+(3680*m3/513)-(845*m4/4104),B(i)+(439*n1/216)-
(8*n2)+(3680*n3/513)-(845*n4/4104),T(i)+(439*p1/216)-(8*p2)+(3680*p3/513)-
(845*p4/4104));
n5=h*f3(t(i)+h,Mu(i)+(439*k1/216)-(8*k2)+(3680*k3/513)-(845*k4/4104),
Mi(i)+(439*m1/216)-(8*m2)+(3680*m3/513)-(845*m4/4104),B(i)+(439*n1/216)-
(8*n2)+(3680*n3/513)-(845*n4/4104),T(i)+(439*p1/216)-(8*p2)+(3680*p3/513)-
(845*p4/4104));
p5=h*f4(t(i)+h,Mu(i)+(439*k1/216)-(8*k2)+(3680*k3/513)-(845*k4/4104),
Mi(i)+(439*m1/216)-(8*m2)+(3680*m3/513)-(845*m4/4104),B(i)+(439*n1/216)-
(8*n2)+(3680*n3/513)-(845*n4/4104),T(i)+(439*p1/216)-(8*p2)+(3680*p3/513)-
(845*p4/4104));
k6=h*f1(t(i)+(h/2),Mu(i)-(8*k1/27)+(2*k2)-(3544*k3/2565)+(1859*k4/4104)-
(11*k5/40),Mi(i)-(8*m1/27)+(2*m2)-(3544*m3/2565)+(1859*m4/4104)-(11*m5/40),B(i)-
(8*n1/27)+(2*n2)-(3544*n3/2565)+(1859*n4/4104)-(11*n5/40),T(i)-(8*p1/27)+(2*p2)-
(3544*p3/2565)+(1859*p4/4104)-(11*p5/40));
m6=h*f2(t(i)+(h/2),Mu(i)-(8*k1/27)+(2*k2)-(3544*k3/2565)+(1859*k4/4104)-
(11*k5/40),Mi(i)-(8*m1/27)+(2*m2)-(3544*m3/2565)+(1859*m4/4104)-(11*m5/40),B(i)-
(8*n1/27)+(2*n2)-(3544*n3/2565)+(1859*n4/4104)-(11*n5/40),T(i)-(8*p1/27)+(2*p2)-
(3544*p3/2565)+(1859*p4/4104)-(11*p5/40));
n6=h*f3(t(i)+(h/2),Mu(i)-(8*k1/27)+(2*k2)-(3544*k3/2565)+(1859*k4/4104)-
(11*k5/40),Mi(i)-(8*m1/27)+(2*m2)-(3544*m3/2565)+(1859*m4/4104)-(11*m5/40),B(i)-
(8*n1/27)+(2*n2)-(3544*n3/2565)+(1859*n4/4104)-(11*n5/40),T(i)-(8*p1/27)+(2*p2)-
(3544*p3/2565)+(1859*p4/4104)-(11*p5/40));
p6=h*f4(t(i)+(h/2),Mu(i)-(8*k1/27)+(2*k2)-(3544*k3/2565)+(1859*k4/4104)-
(11*k5/40),Mi(i)-(8*m1/27)+(2*m2)-(3544*m3/2565)+(1859*m4/4104)-(11*m5/40),B(i)-
(8*n1/27)+(2*n2)-(3544*n3/2565)+(1859*n4/4104)-(11*n5/40),T(i)-(8*p1/27)+(2*p2)-
(3544*p3/2565)+(1859*p4/4104)-(11*p5/40));

Mu(i+1)=Mu(i)+(16*k1/135)+(6656*k3/12825)+(28561*k4/56437)-(9*k5/50)+(2*k6/55);
Mi(i+1)=Mi(i)+(16*m1/135)+(6656*m3/12825)+(28561*m4/56437)-(9*m5/50)+(2*m6/55);
B(i+1)=B(i)+(16*n1/135)+(6656*n3/12825)+(28561*n4/56437)-(9*n5/50)+(2*n6/55);
T(i+1)=T(i)+(16*p1/135)+(6656*p3/12825)+(28561*p4/56437)-(9*p5/50)+(2*p6/55);
end
disp('=====')
disp('hasil komputasi')
disp(' iterasi      t      Mu      Mi
      B      T      ')
A=[1:i+1]' t' Mu Mi B T;
for i=1:n+1
    fprintf('%8.0f %8.2f %8.14f %8.14f %8.14f\n',A(i,1),A(i,2),A(i,3),A(i,4),A(i,5),A(i,6))
end
disp(['Waktu Komputasi=',num2str(toc)])
disp('===== ERROR =====')
DD1=abs([Mu2-Mu1]);
DD2=abs([Mi2-Mi1]);
DD3=abs([B2-B1]);
DD4=abs([T2-T1]);
disp('===== ERROR =====')
disp([DD1 DD2 DD3 DD4])
xx=[0:0.1:b];

```

```

figure(1)
plot(t',Mu,'--r');
hold on
plot(t',Mi,'-.b');
plot(t',B,'.:m');
plot(t',T,':k');
hold off
title('Grafik Mu,Mi,B,dan T')
xlabel('Waktu(hari)')
ylabel('Jumlah Sel')
legend('Mu','Mi','B','T')
grid on
figure(2)
plot(xx',DD1,'--b')
hold on
plot(xx',DD2,'-.g')
plot(xx',DD3,'--r')
plot(xx',DD4,'-.m')
hold off
title('Grafik Error metode RKF 45')
xlabel('Waktu(t)')
ylabel('Nilai eror')
legend('EMu','EMi','EB','ET')
grid on

```

Lampiran 2. Program Adams Bashforth Moulton

```

clc;clear;format long;
disp('=====')
disp('Program Solusi Numerik Model Immunologi Seluler pada Tuberkulosis')
disp('dengan Metode ABM orde-4')
disp('=====')

tic;
f1=inline('0.33e-3-0.33e-3*Mu-8.250000000*10^(-9)*B*Mu','t','Mu','Mi','B','T');
f2=inline('8.250000000*10^(-9)*B*Mu-.1*Mi*T-0.11e-1*Mi','t','Mu','Mi','B','T');
f3=inline('0.55e-1*Mi-0.879e-1*B*Mu-0.12e-1*B','t','Mu','Mi','B','T');
f4=inline('(.484848*(1-T))*Mi-.33*T','t','Mu','Mi','B','T');
Mu0=0.7;
Mi0=0.2;
B0=0;
T0=0;
h=0.1; a=0;
b=1000;
n=(b-a)/h;
Mu=zeros(n,1);Mu(1)=Mu0;
Mi=zeros(n,1);Mi(1)=Mi0;
B=zeros(n,1);B(1)=B0;
T=zeros(n,1);T(1)=T0;
t=[0:h:n*h];
%('untuk RK 4')
for i=1:4
    k1=h*f1(t(i),Mu(i),Mi(i),B(i),T(i));
    l1=h*f2(t(i),Mu(i),Mi(i),B(i),T(i));
    m1=h*f3(t(i),Mu(i),Mi(i),B(i),T(i));
    n1=h*f4(t(i),Mu(i),Mi(i),B(i),T(i));
    k2=h*f1(t(i)+(h/2),Mu(i)+(k1/2),Mi(i)+(l1/2),B(i)+(m1/2),T(i)+(n1/2));
    l2=h*f2(t(i)+(h/2),Mu(i)+(k1/2),Mi(i)+(l1/2),B(i)+(m1/2),T(i)+(n1/2));
    m2=h*f3(t(i)+(h/2),Mu(i)+(k1/2),Mi(i)+(l1/2),B(i)+(m1/2),T(i)+(n1/2));
    n2=h*f4(t(i)+(h/2),Mu(i)+(k1/2),Mi(i)+(l1/2),B(i)+(m1/2),T(i)+(n1/2));
    k3=h*f1(t(i)+(h/2),Mu(i)+(k2/2),Mi(i)+(l2/2),B(i)+(m2/2),T(i)+(n2/2));
    l3=h*f2(t(i)+(h/2),Mu(i)+(k2/2),Mi(i)+(l2/2),B(i)+(m2/2),T(i)+(n2/2));
    m3=h*f3(t(i)+(h/2),Mu(i)+(k2/2),Mi(i)+(l2/2),B(i)+(m2/2),T(i)+(n2/2));
    n3=h*f4(t(i)+(h/2),Mu(i)+(k2/2),Mi(i)+(l2/2),B(i)+(m2/2),T(i)+(n2/2));
    k4=h*f1(t(i)+h,Mu(i)+k3,Mi(i)+l3,B(i)+m3,T(i)+n3);
    l4=h*f2(t(i)+h,Mu(i)+k3,Mi(i)+l3,B(i)+m3,T(i)+n3);
    m4=h*f3(t(i)+h,Mu(i)+k3,Mi(i)+l3,B(i)+m3,T(i)+n3);
    n4=h*f4(t(i)+h,Mu(i)+k3,Mi(i)+l3,B(i)+m3,T(i)+n3);
    Mu(i+1)=Mu(i)+(1/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4);
    Mi(i+1)=Mi(i)+(1/6)*(l1+2*l2+2*l3+l4);
    B(i+1)=B(i)+(1/6)*(m1+2*m2+2*m3+m4);

```



```

T(i+1)=T(i)+(1/6)*(n1+2*n2+2*n3+n4);
t(i+1)=t(i)+h;
end
% ('untuk ABM')
for i=5:n
    t(i+1)=t(i)+h;
    pMu(i+1)=Mu(i)+(h/24)*(55*f1(t(i),Mu(i),Mi(i),B(i),T(i))-59*f1(t(i-1),Mu(i-1),Mi(i-1),B(i-1),T(i-1))+37*f1(t(i-2),Mu(i-2),Mi(i-2),B(i-2),T(i-2))-9*f1(t(i-3),Mu(i-3),Mi(i-3),B(i-3),T(i-3)));
    pMi(i+1)=Mi(i)+(h/24)*(55*f2(t(i),Mu(i),Mi(i),B(i),T(i))-59*f2(t(i-1),Mu(i-1),Mi(i-1),B(i-1),T(i-1))+37*f2(t(i-2),Mu(i-2),Mi(i-2),B(i-2),T(i-2))-9*f2(t(i-3),Mu(i-3),Mi(i-3),B(i-3),T(i-3)));
    pB(i+1)=B(i)+(h/24)*(55*f3(t(i),Mu(i),Mi(i),B(i),T(i))-59*f3(t(i-1),Mu(i-1),Mi(i-1),B(i-1),T(i-1))+37*f3(t(i-2),Mu(i-2),Mi(i-2),B(i-2),T(i-2))-9*f3(t(i-3),Mu(i-3),Mi(i-3),B(i-3),T(i-3)));
    pT(i+1)=T(i)+(h/24)*(55*f4(t(i),Mu(i),Mi(i),B(i),T(i))-59*f4(t(i-1),Mu(i-1),Mi(i-1),B(i-1),T(i-1))+37*f4(t(i-2),Mu(i-2),Mi(i-2),B(i-2),T(i-2))-9*f4(t(i-3),Mu(i-3),Mi(i-3),B(i-3),T(i-3)));

    Mu(i+1)=Mu(i)+(h/24)*(9*f1(t(i+1),pMu(i+1),pMi(i+1),pB(i+1),pT(i+1))+19*f1(t(i),Mu(i),Mi(i),B(i),T(i))-5*f1(t(i-1),Mu(i-1),Mi(i-1),B(i-1),T(i-1))+f1(t(i-2),Mu(i-2),Mi(i-2),B(i-2),T(i-2)));

    Mi(i+1)=Mi(i)+(h/24)*(9*f2(t(i+1),pMu(i+1),pMi(i+1),pB(i+1),pT(i+1))+19*f2(t(i),Mu(i),Mi(i),B(i),T(i))-5*f2(t(i-1),Mu(i-1),Mi(i-1),B(i-1),T(i-1))+f2(t(i-2),Mu(i-2),Mi(i-2),B(i-2),T(i-2)));

    B(i+1)=B(i)+(h/24)*(9*f3(t(i+1),pMu(i+1),pMi(i+1),pB(i+1),pT(i+1))+19*f3(t(i),Mu(i),Mi(i),B(i),T(i))-5*f3(t(i-1),Mu(i-1),Mi(i-1),B(i-1),T(i-1))+f3(t(i-2),Mu(i-2),Mi(i-2),B(i-2),T(i-2)));

    T(i+1)=T(i)+(h/24)*(9*f4(t(i+1),pMu(i+1),pMi(i+1),pB(i+1),pT(i+1))+19*f4(t(i),Mu(i),Mi(i),B(i),T(i))-5*f4(t(i-1),Mu(i-1),Mi(i-1),B(i-1),T(i-1))+f4(t(i-2),Mu(i-2),Mi(i-2),B(i-2),T(i-2)));

end

disp('hasil:')
disp('          pMu          pMi          pB          pT')
disp([ pMu' pMi' pB' pT'])
disp('=====')
disp('          Mu          Mi          B          T')
disp([ Mu  Mi  B  T ])
disp('=====')

figure(1)
plot(t',Mu,'-xr')
title('Grafik populasi Makrofag tak Terinfeksi (Mu)')
xlabel('Waktu(hari)')
ylabel('Jumlah Sel')
grid on
figure(2)
plot(t',Mi,'-ob')
title('Grafik populasi Makrofag Terinfeksi (Mi)')
xlabel('Waktu(hari)')
ylabel('Jumlah Sel')
grid on
figure(3)
plot(t',B,'-*m')
title('Gambar 3.4. Grafik populasi Bakteri Mtb (B)')
xlabel('Waktu(hari)')
ylabel('Jumlah Sel')
grid on
figure(4)
plot(t',T,'-+k')
title('Gambar 3.5. Grafik populasi Sel T (T)')
xlabel('Waktu(hari)')
ylabel('Jumlah Sel')
grid on
figure(5)
plot(t',Mu,'--r');
hold on
plot(t',Mi,'-.b');
plot(t',B,'.:m');

```



```

plot(t',T,':k');
hold off
title('Grafik Mu,Mi,B,dan T')
xlabel('Waktu(hari)')
ylabel('Jumlah Sel')
legend ('Mu','Mi','B','T')
grid on
figure(6)
plot(xx',D1,'--b')
hold on
plot(xx',D2,'-.g')
plot(xx',D3,'--r')
plot(xx',D4,'-.m')
hold off
title('Grafik Error metode ABM')
xlabel('Waktu(t)')
ylabel('Nilai error')
legend ('EMu','EMi','EB','ET')
grid on

```

Lampiran 3. Program Ode 45

```

clc;clear;format long;
disp('=====')
disp('Program Solusi Numerik Model Imonologi Seluler pada Tuberkulosis ')
disp('                        dengan Program Ode 45 ')
disp('=====')

function fv=TB(T,X)
fv=zeros(4,1);
fv(1)=0.00033-0.00033*X(1)-8.250000000*10^(-9)*X(3)*X(1);
fv(2)=8.250000000*10^(-9)*X(3)*X(1)-.1*X(2)*X(4)-0.011*X(2);
fv(3)=0.055*X(2)-0.0879*X(3)*X(1)-0.012*X(3);
fv(4)=(.484848*(1-X(4)))*X(2)-.33*X(4);

clc;clear all;format long;
disp('=====')
[T X]=ode45('TB_Ode45',0,1000,[0.7 0.125 0 0]',5*10^-7);
disp(X)

figure(1);
plot(T,X(:,1),'.-r',T,X(:,2),'.-r',T,X(:,3),'.-r',T,X(:,4),'.-r');
title('Grafik Mu(t),Mi(t),B(t),dan T(t)')
xlabel('Waktu(hari)')
ylabel('Jumlah Sel/mililiter')
legend ('Ode45_Mu','Ode45_Mi','Ode45_B','Ode45_T')
grid on

```

Lampiran 4. Solusi Metode RKF 45

Program Solusi Numerik Model Imonologi Seluler pada Tuberkulosis
dengan Metode Runge Kutta Fehlberg (orde-4)

Jumlah awal populasi makrofag tak terinfeksi, $Mu(0)=0.7$

Jumlah awal populasi makrofag terinfeksi, $Mi(0)=0.2$

Jumlah awal populasi bakteri Mtb, $B(0)=0$

Jumlah awal populasi sel T, $T(0)=0$

Masukkan jarak interval, $h=0.1$

Masukkan batas atas interval waktu =1000

Hasil komputasi

iterasi	t	Mu	Mi	B	T
1	0.00	0.7000000000000000	0.0000000000000000	0.2000000000000000	0.0000000000000000
2	0.10	0.70000990036011	0.00111024926101	0.19980063630680	0.01015492238653
3	0.20	0.70001980039284	0.00221128194900	0.19958017767492	0.01984712666877
4	0.30	0.70002970009823	0.00330304335922	0.19933965417543	0.02909635796941
5	0.40	0.70003959947627	0.00438548513059	0.19908005725853	0.03792155243964
6	0.50	0.70004949852699	0.00545856497894	0.19880234064537	0.04634086718765
7	0.60	0.70005939725041	0.00652224643698	0.19850742125472	0.05437170940546
8	0.70	0.70006929564653	0.00757649860121	0.19819618015699	0.06203076468663
9	0.80	0.70007919371538	0.00862129588600	0.19786946354879	0.06933402453043
10	0.90	0.70008909145697	0.00965661778475	0.19752808374210	0.07629681303141
11	1.00	0.70009898887133	0.01068244863840	0.19717282016241	0.08293381275616
21	2.00	0.70019794502014	0.02041834323263	0.19300653135522	0.13420471172169
31	3.00	0.70029686846270	0.02921617288022	0.18810262718484	0.16515013684245
41	4.00	0.70039575921515	0.03711158490326	0.18284409151598	0.18309135498372
51	5.00	0.70049461729336	0.04415518783676	0.17746813245413	0.19273330335247
61	6.00	0.70059344271293	0.05040472711164	0.17211792898487	0.19709396574617
71	7.00	0.70069223548909	0.05592025092261	0.16687724465214	0.19810902255351
101	10.00	0.70098841810428	0.06864538822267	0.15217445757504	0.19144419037760
201	20.00	0.70197357738819	0.08370451060151	0.11455722351423	0.15310099959921
301	30.00	0.70295549061620	0.07890925513972	0.08933240533655	0.12291686199546
401	40.00	0.70393416917236	0.06840336350019	0.07152701383135	0.10042535893656

501	50.00	0.70490962387183	0.05842132756474
		0.05747907610519	0.08324578296939
601	60.00	0.70588186530386	0.04845523063306
		0.04785131827466	0.06982096199060
701	70.00	0.70685090396817	0.04067864072586
		0.03986057914967	0.05912640869274
801	80.00	0.70781675032572	0.03448346056006
		0.03337201845040	0.05046807376263
901	90.00	0.70877941481495	0.02946402877136
		0.02812771625766	0.04336232159091
1001	100.00	0.70973890785489	0.02534013996889
		0.02387361413303	0.03746338277466
2001	200.00	0.71916168312492	0.00683954217241
		0.00599003608628	0.01031864582651
3001	300.00	0.72827857087567	0.00213753333281
		0.00182272257470	0.00324133375346
4001	400.00	0.73709949733958	0.00069638351909
		0.00058433093172	0.00105763666193
5001	500.00	0.74563406938604	0.00022987586436
		0.00019044408246	0.00034930146274
5501	550.00	0.74979688929271	0.00013231983161
		0.00010898832361	0.00020108411218
6001	600.00	0.75389158268220	0.00007620878274
		0.00006242288094	0.00011582016466
7001	700.00	0.76188103132676	0.00002530076229
		0.00002050525947	0.00003845356873
8001	800.00	0.76961111750527	0.00000840362747
		0.00000674256168	0.00001277255456
9001	900.00	0.77709026092396	0.00000279169464
		0.00000221844566	0.00000424308295
10000	999.90	0.78431949025072	0.00000092847491
		0.00000073106451	0.00000141118728
10001	1000.00	0.78432660796594	0.00000092745234
		0.00000073025277	0.00000140963308

Waktu Komputasi=351.929

Program Solusi Numerik Model Imonologi Seluler pada Tuberkulosis
dengan Metode Runge Kutta Fehlberg (orde-5)

Jumlah awal populasi makrofag tak terinfeksi, $Mu(0)=0.7$

Jumlah awal populasi makrofag terinfeksi, $Mi(0)=0.2$

Jumlah awal populasi bakteri Mtb, $B(0)=0$

Jumlah awal populasi sel T, $T(0)=0$

Masukkan jarak interval, $h=0.1$

Masukkan batas atas interval waktu =1000

Hasil komputasi

iterasi	t	Mu	Mi	B	T
1	0.00	0.7000000000000000	0.0000000000000000	0.2000000000000000	0.0000000000000000
2	0.10	0.70000989971001	0.00110936753949	0.19979897071662	0.01011711791609
3	0.20	0.70001979909269	0.00220951223605	0.19957701154576	0.01977472937094
4	0.30	0.70002969814806	0.00330038089307	0.19933514266840	0.02899237964164

5	0.40	0.70003959687613	0.19907434607286
		0.00438192656734	0.03778881551750
6	0.50	0.70004949527693	0.19879556644026
		0.00545410830597	0.04618201478165
7	0.60	0.70005939335046	0.19849971206338
		0.00651689089005	0.05418921490188
8	0.70	0.70006929109675	0.19818765579181
		0.00757024458518	0.06182694092359
9	0.80	0.70007918851581	0.19786023599668
		0.00861414489907	0.06911103256110
10	0.90	0.70008908560765	0.19751825754916
		0.00964857234618	0.07605667048660
11	1.00	0.70009898237230	0.19716249280745
		0.01067351221954	0.08267840181864
21	2.00	0.70019793202648	0.19299524179188
		0.02040085438103	0.13387532646872
31	3.00	0.70029684897879	0.18809465562342
		0.02919112754280	0.16483237188956
41	4.00	0.70039573324535	0.18284096193953
		0.03708021278339	0.18281967086929
51	5.00	0.70049458484205	0.17747000544734
		0.04411874644789	0.19251651701151
61	6.00	0.70059340378445	0.17212436949344
		0.05036439921891	0.19692915078356
71	7.00	0.70069219008778	0.16688761654815
		0.05587710026952	0.19798874730746
81	8.00	0.70079094376691	0.16180646753311
		0.06071618486860	0.19693684153080
91	9.00	0.70088966483637	0.15690489840570
		0.06493876318916	0.19457245936546
101	10.00	0.70098835331038	0.15219300148588
		0.06859884960258	0.19141029376893
201	20.00	0.70197344823070	0.11458397237177
		0.08367317599472	0.15312965605430
301	30.00	0.70295529751975	0.08935898604289
		0.07889936435059	0.12294933194413
401	40.00	0.70393391255886	0.07155145631801
		0.06840807563325	0.10045671660435
501	50.00	0.70490930416124	0.05844320935998
		0.05749141030104	0.08327480921996
601	60.00	0.70588148291432	0.04847463762845
		0.04786662720732	0.06984734674848
701	70.00	0.70685045931594	0.04069581511600
		0.03987627727451	0.05915020067588
801	80.00	0.70781624382514	0.03449867315098
		0.03338686015187	0.05048946021712
901	90.00	0.70877884687836	0.02947753395629
		0.02814121248219	0.04338153220135
1001	100.00	0.70973827889261	0.02535216223618
		0.02388566133769	0.03748064814362
2001	200.00	0.71916046603091	0.00684379329218
		0.00599385744815	0.01032501110506
3001	300.00	0.72827680449821	0.00213919462378
		0.00182415353960	0.00324384703477
4001	400.00	0.73709721862358	0.00069704006676
		0.00058488496086	0.00105863304112
5001	500.00	0.74563131345628	0.00023013188857
		0.00019065709054	0.00034969039988

6001	600.00	0.75388838292275	0.00007630687907
		0.00006250353167	0.00011596923662
7001	700.00	0.76187741945710	0.00002533774575
		0.00002053533778	0.00003850977680
8001	800.00	0.76960712365320	0.00000841738224
		0.00000675363457	0.00001279346005
9001	900.00	0.77708591369549	0.00000279675314
		0.00000222247839	0.00000425077131
10000	999.90	0.78431481711033	0.00000093031990
		0.00000073252174	0.00000141399148
10001	1000.00	0.78432193451241	0.00000092929546
		0.00000073170851	0.00000141243443

Waktu Komputasi=448.5442

Lampiran 5. Solusi Metode ABM Orde-4

Program Solusi Numerik Model Imonologi Seluler pada Tuberkulosis
dengan Metode Adams Bashforth Moulton (orde-4) (Prediktor)

Jumlah awal populasi makrofag tak terinfeksi, $Mu(0)=0.7$
Jumlah awal populasi makrofag terinfeksi, $Mi(0)=0.2$
Jumlah awal populasi bakteri Mtb, $B(0)=0$
Jumlah awal populasi sel T, $T(0)=0$
Masukkan jarak interval, $h=0.1$
Masukkan batas atas interval waktu =1000

Hasil komputasi prediktor ABM

iterasi	t	pMu	pMi	pB	pT
1	0.00	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
2	0.10	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
3	0.20	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
4	0.30	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
5	0.40	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
6	0.50	0.70004949590865	0.00538312957004	0.19867878259004	0.04352157832081
7	0.60	0.70005939410855	0.00643156517749	0.19836640086463	0.05112852402784
8	0.70	0.70006929198121	0.00747056760594	0.19803977576209	0.05840369548721
9	0.80	0.70007918952665	0.00850012971111	0.19769962182550	0.06536053510084
10	0.90	0.70008908674489	0.00952024824160	0.19734662604547	0.07201195476947
11	1.00	0.70009898363594	0.01053092366372	0.19698144865881	0.07837035525434
21	2.00	0.70019793455456	0.02012074050403	0.19278741629168	0.12823747723145
31	3.00	0.70029685277204	0.02878845285810	0.18793290219049	0.15930934344395
41	4.00	0.70039573830437	0.03657392949192	0.18275307037183	0.17802014150088

51	5.00	0.70049459116728	0.17746081315609
		0.04352850776814	0.18861838478511
61	6.00	0.70059341137617	0.17218822819821
		0.04970887407307	0.19390539943770
71	7.00	0.70069219894611	0.16701498307796
		0.05517320935525	0.19572820700535
81	8.00	0.70079095389184	0.16198714706727
		0.05997884129001	0.19530545300748
91	9.00	0.70088967622776	0.15712947855408
		0.06418087454526	0.19344194276613
100	9.90	0.70097849846034	0.15291266519940
		0.06748978576385	0.19097662412512
101	10.00	0.70098836596795	0.15245335907153
		0.06783144499541	0.19066961458257
201	20.00	0.70197347351842	0.11497540352610
		0.08312778658522	0.15353406852610
301	30.00	0.70295533535335	0.08974648175901
		0.07868934872102	0.12342064757202
401	40.00	0.70393396284369	0.07190516291476
		0.06843189442624	0.10090955123469
501	50.00	0.70490936680499	0.05875726245510
		0.05764088092663	0.08369081294030
601	60.00	0.70588155782892	0.04875082351101
		0.04806841153097	0.07022244405004
701	70.00	0.70685054641672	0.04093817430037
		0.04008889130155	0.05948567617102
801	80.00	0.70781634302970	0.03471157568413
		0.03358986039454	0.05078857673850
901	90.00	0.70877895810574	0.02966501974115
		0.02832619708384	0.04364808603220
1001	100.00	0.70973840206275	0.02551775753494
		0.02405045835086	0.03771836083017
2001	200.00	0.71916070432319	0.00689866803905
		0.00604310598121	0.01040716765647
3001	300.00	0.72827715033229	0.00215969529175
		0.00184176403829	0.00327486039462
4001	400.00	0.73709766477471	0.00070488928825
		0.00059148827672	0.00107054490680
5001	500.00	0.74563185305042	0.00023312340506
		0.00019313809422	0.00035423491881
6001	600.00	0.75388900942449	0.00007743370996
		0.00006342701500	0.00011768162088
7001	700.00	0.76187812665608	0.00002575707231
		0.00002087529712	0.00003914707579
8001	800.00	0.76960790565038	0.00000857175382
		0.00000687752239	0.00001302808505
9001	900.00	0.77708676488967	0.00000285306501
		0.00000226723551	0.00000433635917
10000	999.90	0.78431573212376	0.00000095072358
		0.00000074858972	0.00000144500297
10001	1000.00	0.78432284958716	0.00000094967835
		0.00000074775997	0.00000144341432

Waktu Komputasi=584.2227

Program Solusi Numerik Model Imonologi Seluler pada Tuberkulosis
dengan Metode Adams Bashforth Moulton (orde-4) (Korektor)

Jumlah awal populasi makrofag tak terinfeksi, $Mu(0)=0.7$

Jumlah awal populasi makrofag terinfeksi, $Mi(0)=0.2$

Jumlah awal populasi bakteri Mtb, $B(0)=0$

Jumlah awal populasi sel T, $T(0)=0$

Masukkan jarak interval, $h=0.1$

Masukkan batas atas interval waktu =1000

Hasil komputasi prediktor ABM

iterasi	t	Mu	Mi	B	T
1	0.00	0.7000000000000000	0.0000000000000000	0.2000000000000000	0.0000000000000000
2	0.10	0.70000989983633	0.00109534487803	0.19977057484389	0.00948748463908
3	0.20	0.70001979934535	0.00218135733502	0.19952289179570	0.01856728952978
4	0.30	0.70002969852706	0.00325800788940	0.19925781531490	0.02725582761647
5	0.40	0.70003959738149	0.00432527192822	0.19897617829728	0.03556887344834
6	0.50	0.70004949590865	0.00538312949295	0.19867878289074	0.04352158686486
7	0.60	0.70005939410855	0.00643156510228	0.19836640117217	0.05112853237638
8	0.70	0.70006929198121	0.00747056753324	0.19803977607052	0.05840370355337
9	0.80	0.70007918952665	0.00850012964050	0.19769962213643	0.06536054294535
10	0.90	0.70008908674489	0.00952024817318	0.19734662635687	0.07201196237858
11	1.00	0.70009898363594	0.01053092359748	0.19698144896957	0.07837036263043
21	2.00	0.70019793455456	0.02012074045782	0.19278741655787	0.12823748248087
31	3.00	0.70029685277204	0.02878845282743	0.18793290238895	0.15930934704444
41	4.00	0.70039573830437	0.03657392947227	0.18275307051003	0.17802014391790
51	5.00	0.70049459116728	0.04352850775593	0.17746081324879	0.18861838638809
61	6.00	0.70059341137617	0.04970887406575	0.17218822825905	0.19390540049406
71	7.00	0.70069219894611	0.05517320935107	0.16701498311739	0.19572820769955
81	8.00	0.70079095389184	0.05997884128783	0.16198714709262	0.19530545346343
91	9.00	0.70088967622776	0.06418087454432	0.15712947857030	0.19344194306583
101	10.00	0.70098836596795	0.06783144499522	0.15245335908186	0.19066961477989
201	20.00	0.70197347351842	0.08312778658581	0.11497540352611	0.15353406852951
301	30.00	0.70295533535335	0.07868934872128	0.08974648175895	0.12342064757207

401	40.00	0.70393396284369	0.07190516291474
		0.06843189442635	0.10090955123467
501	50.00	0.70490936680499	0.05875726245509
		0.05764088092667	0.08369081294029
601	60.00	0.70588155782892	0.04875082351100
		0.04806841153099	0.07022244405003
701	70.00	0.70685054641672	0.04093817430037
		0.04008889130156	0.05948567617102
801	80.00	0.70781634302970	0.03471157568413
		0.03358986039454	0.05078857673850
901	90.00	0.70877895810574	0.02966501974115
		0.02832619708384	0.04364808603220
1000	99.90	0.70972882328606	0.02555548671151
		0.02408905119062	0.03777255705337
1001	100.00	0.70973840206275	0.02551775753494
		0.02405045835086	0.03771836083016
2001	200.00	0.71916070432319	0.00689866803905
		0.00604310598121	0.01040716765647
3001	300.00	0.72827715033229	0.00215969529175
		0.00184176403829	0.00327486039462
4001	400.00	0.73709766477471	0.00070488928825
		0.00059148827672	0.00107054490680
5001	500.00	0.74563185305042	0.00023312340506
		0.00019313809422	0.00035423491881
6001	600.00	0.75388900942449	0.00007743370996
		0.00006342701500	0.00011768162088
7001	700.00	0.76187812665608	0.00002575707231
		0.00002087529712	0.00003914707579
8001	800.00	0.76960790565038	0.00000857175382
		0.00000687752239	0.00001302808505
9001	900.00	0.77708676488967	0.00000285306501
		0.00000226723551	0.00000433635917
10000	999.90	0.78431573212376	0.00000095072358
		0.00000074858972	0.00000144500297
10001	1000.00	0.78432284958716	0.00000094967835
		0.00000074775997	0.00000144341432

Waktu Komputasi=551.1317

Lampiran 6. Solusi Ode 45

Program Solusi Numerik Model Imonologi Seluler pada Tuberkulosis
dengan Program Ode 45

Jumlah awal populasi makrofag tak terinfeksi, $Mu(0)=0.7$

Jumlah awal populasi makrofag terinfeksi, $Mi(0)=0.2$

Jumlah awal populasi bakteri Mtb, $B(0)=0$

Jumlah awal populasi sel T, $T(0)=0$

Masukkan jarak interval, $h=0.1$

Masukkan batas atas interval waktu =1000

Hasil komputasi

t	Mu	Mi	B	T
0.0	0.700000000000000	0.200000000000000	0	0
0.1	0.700006359846868	0.199854756705795	0.000704736858575	0.006142607040773
0.2	0.700019181708062	0.199538862812648	0.002113872739716	0.01856728952978
0.3	0.700025592432759	0.199369824786860	0.002812556232261	0.02725582761647
0.4	0.700032003020195	0.199193698916435	0.003507307139355	0.03778881551750
1.0	0.700096101346188	0.197089363042108	0.010237494446174	0.076555063921266
10.0	0.700986844345250	0.152524330065976	0.067779211814784	0.190717003228480
30.0	0.702958927963819	0.089669282663457	0.078657406376951	0.123302814825751
50.0	0.704955729305580	0.058218823963120	0.057151199357183	0.082968882140072
100	0.709724222238477	0.025573718830520	0.024107577716380	0.037809675143425
200	0.719084319002345	0.006967484523133	0.006105353691325	0.010506107903161
300	0.728190640682394	0.002183427278127	0.001862351203104	0.003221486775380
400	0.737063114947927	0.000708014079483	0.000594143189243	0.001075626847456
500	0.745587854531958	0.000234475716117	0.000194270536044	0.000356643758159
600	0.753844813710167	0.000077899084315	0.000063811994507	0.000118697901163
700	0.761842584830349	0.000025885582487	0.000020980426863	0.000039593100767
800	0.769603566819032	0.000008577138779	0.000006881880860	0.000012618158230
900	0.777128728290898	0.000002835216380	0.000002252930600	0.000004062377117
1000	0.784322849587130	0.000000949678463	0.000000747760160	0.000001320733845

RIWAYAT HIDUP



Muhlish, lahir di Kab. Malang pada tanggal 09 Agustus 1991, biasa dipanggil Muhlish, tinggal di Jl. Kyai Mannan RT. 035 RW. 004 Ds. Pagelaran Kec. Pagelaran Kab. Malang. Anak pertama dari Bapak Basri dan Ibu Suriyani.

Pendidikan dasarnya ditempuh di MI Mambaul Ulum Pagelaran dan lulus pada tahun 2004, setelah itu melanjutkan ke MTs Mambaul Ulum Pagelaran dan lulus pada tahun 2007.

Kemudian dia melanjutkan pendidikan ke MA Mambaul Ulum Banjarejo dan lulus pada tahun 2010. Selanjutnya pada tahun 2010 menempuh kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang mengambil Jurusan Matematika.

Selama menjadi mahasiswa, dia berperan aktif pada organisasi intra dan ekstra kampus dalam rangka mengembangkan kompetensi akademiknya. Dia pernah menjadi anggota Himpunan Mahasiswa Jurusan (HMJ) Matematika pada periode 2011/2012, dia juga pernah menjadi anggota Dewan Eksekutif Mahasiswa Fakultas (DEMA-F) Saintek pada periode 2012/2013, dia aktif di Lembaga Kajian Penelitian dan Pengembangan Mahasiswa (LKP2M) pada tahun 2011-2013, dan dia juga aktif di Organisasi Keluarga Besar Mahasiswa Bidikmisi (KBMB) Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang pada tahun 2010-2013.



**KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jln. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933**

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Muhlish
NIM : 10610066
Fakultas/ Jurusan : Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi : Penyelesaian Numerik Model Imunologi Seluler pada Tuberkulosis dengan Metode Runge Kutta Fehlberg (RKF 45) dan Metode Adams Bashforth Moulton
Pembimbing I : Dr. Usman Pagalay, M.Si
Pembimbing II : Dr. H. Ahmad Barizi, M.A

No	Tanggal	Materi Konsultasi	Tanda Tangan	
1	25 November 2014	Konsultasi Bab I dan II	1.	
2	27 November 2014	Konsultasi Bab II Agama		2.
3	25 Desember 2014	Revisi Bab II	3.	
4	30 Desember 2014	Revisi Bab I dan II Agama		4.
5	14 Januari 2015	Konsultasi Bab III	5.	
6	21 Januari 2015	Revisi Bab III		6.
7	19 Februari 2015	Konsultasi Bab III Agama	7.	
8	26 Februari 2015	ACC Bab I dan II		8.
9	10 Maret 2015	Konsultasi Bab IV	9.	
10	18 Maret 2015	Acc Bab III dan IV		10.
11	09 April 2015	Acc Agama	11.	
12	09 April 2015	Acc Keseluruhan		12.

Malang, 10 April 2015
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001