TRANSFORMASI LAPLACE PADA PERSAMAAN TELEGRAF

SKRIPSI

OLEH
RIANTI MANDASARI
NIM. 10610006

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2015

TRANSFORMASI LAPLACE PADA PERSAMAAN TELEGRAF

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh
Rianti Mandasari
NIM. 10610006

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG

2015

TRANSFORMASI LAPLACE PADA PERSAMAAN TELEGRAF

SKRIPSI

Oleh
Rianti Mandasari
NIM. 10610006

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 17 Juni 2015

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Ari Kusumastuti, S.Si., M.Pd	Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19770521 200501 2 004	NIP. 19751006 200312 1 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

TRANSFORMASI LAPLACE PADA PERSAMAAN TELEGRAF

SKRIPSI

Oleh
Rianti Mandasari
NIM. 10610006

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal 25 Juni 2015

Penguji Utama	:	Dr. Usman Pagalay, M.Si	....
Ketua Penguji	:	Hairur Rahman, M.Si	....
Sekretaris Penguji	:	Ari Kusumastuti, S.Si., M.Pd	....
Anggota Penguji	:	Dr. Abdussakir, M.Pd	....

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Rianti Mandasari
NIM	: 10610006
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	: Transformasi Laplace pada Persamaan Telegraf

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 29 Mei 2015
Yang membuat pernyataan,

Rianti Mandasari
NIM. 10610006

MOTO

... إِنَّ ٱللَّهَ لَا يُغَيِّرُ مَا بِقَوۡمٍ حَتَّىٰ يُغَيِّرُواْ مَا بِأَنفُسِهِمۡۗ ... ﴿١١﴾

"...Sesungguhnya Allah tidak mengubah keadaan suatu kaum sehingga mereka mengubah keadaan yang ada pada diri mereka sendiri..."(QS. ar-Rad/:11).

"Seseorang dengan tujuan yang jelas akan membuat kemajuan walaupun melewati jalan yang sulit. Seseorang yang tanpa tujuan, tidak akan membuat kemajuan walaupun ia berada di jalan yang mulus" (Thomas Carlyle, Philosof Skotlandia)

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Ayahanda Imam Sutaji, ibunda Siti Minarti dan adik tersayang Ahsanul In'am Setiaji. Karena beliau-beliaulah yang selalu memberikan motivasi dan doa kepada penulis sehingga skripsi ini dapat terselesaikan.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah Swt. atas rahmat, taufik serta hidayah-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis banyak mendapat bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Untuk itu ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya penulis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, sekaligus selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan dan berbagi ilmu kepada penulis.
4. Ari Kusumastuti, S.Si., M.Pd, selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, saran, motivasi dan kesabarannya, serta berbagi pengalaman yang berharga kepada penulis.
5. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen, terima kasih atas segenap ilmu dan bimbingannya.

6. Ayah dan Ibu yang selalu memberikan doa, kasih sayang, semangat, serta motivasi kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
7. Seluruh teman-teman di Jurusan Matematika angkatan 2010, terutama Lutfiatuz Zahra’, Jumrotun Nikmah, Kholifatul Khoiriyah, Binti Tsamrotul fitria, Sri Susanti, Masruroh, dan Farida Maslucha yang berjuang bersama-sama demi masa depan yang dicita-citakan.
8. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu-persatu, yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini baik moril maupun materiil.

Akhirnya penulis berharap semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat kepada para pembaca dan khususnya bagi penulis secara pribadi.

Wassalamu’alaikum Wr. Wb

Malang, Mei 2015

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Mandasari, Rianti. 2015. **Transformasi Laplace pada Persamaan Telegraf**. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Ari Kusumastuti, S.Si., M.Pd (II) Dr. Abdussakir, M.Pd.

Kata kunci: Persamaaan Telegraf, Masalah Nilai Awal dan Masalah Nilai Batas, Transformasi Laplace.

Persamaan telegraf adalah persamaan diferensial parsial yang menjelaskan masalah gelombang sinyal-sinyal listrik di transmisi kabel. Tujuan penelitian ini adalah menyelesaikan persamaaan telegraf orde dua linear hiperbolik satu dimensi dengan transformasi Laplace. Langkah-langkah dari penelitian ini adalah menganalisis bentuk transformasi Laplace untuk persamaan telegraf, menerapkan transformasi Laplace pada persamaan telegraf dengan masalah nilai awal dan nilai batas yang diberikan, dan menyelesaikan persamaan untuk mendapatkan solusi transformasi Laplace pada persamaan telegraf.

Hasil solusi analitik dengan metode transformasi Laplace untuk persamaan telegraf dalam penelitian ini mempunyai bentuk yang sama dengan solusi analitik dari referensi yang dirujuk oleh penelitian ini. Berdasarkan hasil dapat disimpulkan bahwa metode transformasi Laplace ini dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial. Bagi penelitian selanjutnya, dapat diperdalam analisis transformasi Laplace dan kriteria metode ini digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial.

ABSTRACT

Mandasari, Rianti. 2015. **Laplace Transform in Telegraph Equation**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) Ari Kusumastuti, S.Si., M.Pd (II) Dr. Abdussakir, M.Pd.

Keywords: Telegraph Equation, Initial Value Problems and Boundary Value Problems, Laplace transform.

Telegraph equation is a partial differential equation that describes the wave of electrical signals in the cable transmission. The purpose of this study is to solve linear hyperbolic one-dimension telegraph equation of order two using Laplace transformation. The steps of this study was to analyze the form of Laplace transforms for the telegraph equation, applied the Laplace transform the telegraph equation with initial value problems and limits value given, and resolved equations to obtain the Laplace transform solution on the telegraph equation.

The results of analytic solutions with Laplace transform method for telegraph equation in this study had the same form with the analytic solution of reference that referred to this study. Based on the results it can be concluded that the Laplace transform method can be used to solve partial differential equations. For further research, it can be deepened the Laplace transform analysis and this criteria method was used to solve partial differential equations.

ملخص

منداسارى, رينتى. ٢٠١٥. تحويل لابلاس في المعادلة تلغراف. بحث جامعى. الشعبة الرياضيات كلية العلوم والتكنولوجيا، الجامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج. المشرف :(١) أري كوسوماستوتي الماجستيرة، (٢) الدكتور عبد الشاكر الماجستير.

الكلمات الر ئيسية: معادلة التلغراف، مشاكل القيمة الأولية والحدية، تحويل لابلاس.

معادلة التلغراف هي المعادلة التفاضلية الجزئية التي تصف مشكلة الموجة من الإشارات الكهربائية في نقل الكابل. الغرض من هذه الدراسة هو حل المعادلة التلغراف الترتيب من خطيتان القطعي من واحد الابعاد مع تحويلات لابلاس. كانت الخطوات هذه الدراسة إلى تحليل شكل تحويلات لابلاس للمعادلة التلغراف، وتطبيق تحويل لابلاس للمعادلة التلغراف مع مشاكل القيمة الأولية والقيم الحدية معين، وحل المعادلات الحسابية للحصول على تحويل لابلاس على معادلة التلغراف.

في هذه الدراسة نتائج الحلول التحليلية مع طريقة تحويل لابلاس لمعادلة التلغراف لها نفس الشكل مع الحل التحليلي المرجعية المشار إليها في هذه الدراسة. واستنادا إلى النتائج التي يمكن أن نخلص إلى أن طريقة تحويل لابلاس يمكن استخدامها لحل المعادلات التفاضلية الجزئية. لمزيد من البحث، ويمكن تعميق تحويل لابلاس التحليل ومعايير لهذا الأسلوب يستخدم لحل المعادلات التفاضلية الجزئية.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Permasalahan merupakan cara Allah untuk menguji hamba-hambanya yang beriman. Contoh sederhana adalah perbedaan pendapat saat menyelesaikan suatu permasalahan. Dalam Islam terdapat tuntunan sebagaimana firman Allah Swt. di dalam surat an-Nisa'/4:59, yang berbunyi

يَـٰٓأَيُّهَا ٱلَّذِينَ ءَامَنُوٓاْ أَطِيعُواْ ٱللَّهَ وَأَطِيعُواْ ٱلرَّسُولَ وَأُوْلِي ٱلۡأَمۡرِ مِنكُمۡۖ فَإِن تَنَـٰزَعۡتُمۡ فِي شَيۡءٖ فَرُدُّوهُ إِلَى ٱللَّهِ وَٱلرَّسُولِ إِن كُنتُمۡ تُؤۡمِنُونَ بِٱللَّهِ وَٱلۡيَوۡمِ ٱلۡأٓخِرِۚ ذَٰلِكَ خَيۡرٞ وَأَحۡسَنُ تَأۡوِيلًا (٥٩)

" Hai orang-orang yang beriman, taatilah Allah dan taatilah Rasul (nya), dan ulil amri di antara kamu. Kemudian jika kamu berlainan pendapat tentang sesuatu, Maka kembalikanlah ia kepada Allah (Al Quran) dan Rasul (sunnahnya), jika kamu benar-benar beriman kepada Allah dan hari kemudian. yang demikian itu lebih utama (bagimu) dan lebih baik akibatnya"(Qs. an-Nisa'/4:59).

Menurut tafsir al-Imam Abul Fida Isma'il Ibnu Katsir Ad-Dimasyqi, yakni dalam ayat tersebut terkandung makna bahwa Allah Swt. menyuruh untuk mentaati-Nya dan Rasul-Nya. Jika berbeda pendapat atau berselisih paham tentang sesuatu, maka kembalikanlah kepada Allah dan kepada Rasul-Nya. Mengembalikan perbedaan pendapat tersebut pada (al-Quran dan Sunnah) itu lebih baik dari pada berselisih paham dan mengandalkan pendapat manusia (Ad-Dimasyqi, 2000:273-275).

Dengan mengingat kutipan ayat di atas, maka secara analog terdapat beberapa pendapat tentang metode penyelesaian persamaan telegraf. Salah satu metode yang dimaksud adalah transformasi Laplace. Transformasi Laplace adalah suatu metode yang mentransformasikan persamaan diferensial dari domain waktu *t* menjadi domain baru dengan variabel bebas *s* yaitu domain frekuensi, dimana *s* adalah bilangan kompleks. Begitu pula sebaliknya, invers transformasi Laplace adalah transformasi dari domain frekuensi *s* menjadi domain waktu *t* (Effendy dan Sugiyono, 2013:156-157). Menurut Zuhair (2007:2) transformasi Laplace adalah sebuah metode yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial yang berkaitan dengan masalah nilai awal dan nilai batas. Pada dasarnya menggunakan sebuah integral untuk mentransformasikan persamaan diferensial parsial menjadi sebuah persamaan diferensial biasa, kemudian dari solusi persamaan diferensial biasa dapat diperoleh solusi persamaan diferensial parsial yang dimaksud dengan menggunakan invers transformasi Laplace. Transformasi Laplace ditemukan oleh matematikawan Perancis *Pierre Simon Laplace* (1749-1827), yang juga dikenal untuk persamaan Laplace (Tang, 2005:271).

Transformasi Laplace dalam penelitian ini untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial khususnya persamaan telegraf. Persamaan telegraf adalah persamaan diferensial parsial yang menjelaskan masalah gelombang sinyal-sinyal listrik di transmisi kabel. Persamaan telegraf merupakan salah satu persamaan gelombang dari bentuk hiperbolik yang berhubungan dengan getaran, atau permasalahan dimana terjadi *discontinue* dalam waktu. Fungsi *y* adalah perpindahan vertikal pada jarak *x* dari ujung tali yang bergetar yang mempunyai panjang *L* sesudah waktu *t*. Nilai *y* pada ujung-ujung tali biasanya diketahui pada semua waktu (kondisi batas) dan bentuk serta kecepatan tali diketahui pada waktu nol (kondisi awal), maka penyelesaian persamaan dengan menghitung *y* pada *x* dan *t* tertentu (Triatmodjo, 2002:201-202).

Penelitian yang dilakukan merujuk pada beberapa penelitian terdahulu. Penelitian yang dilakukan oleh Mohammad Javidi dan Nemat Nyamoradi pada tahun 2013, menggunakan kombinasi skema transformasi Laplace dan metode Homotopy Perturbasi (*Homotopy Perturbation* Method) atau disebut juga metode Laplace Homotopy Perturbasi (*Laplace Homotopy Perturbation Method*). Metode ini memberikan solusi yang baik untuk solusi eksak. Penelitian yang dilakukan oleh Naveed Imran dan Syed Tauseef Mohyud-Din pada tahun 2013, menggunakan metode transformasi Laplace. Metode ini sangat efisien dalam menyelesaikan solusi analitik untuk persamaan diferensial parsial orde tinggi. Penelitian yang dilakukan oleh Mudmainnah Farah Dita dan Basuki Widodo pada tahun 2013, menggunakan metode transformasi Laplace. Metode ini efektif dalam mendapatkan solusi analitik untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial khususnya persamaan aliran panas.

Berdasarkan paparan di atas, maka fokus penelitian ini adalah meneliti transformasi Laplace dalam penyelesaian persamaan telegraf orde dua linear hiperbolik satu dimensi dengan masalah nilai awal dan nilai batas. Sehingga judul penelitian adalah "*Transformasi Laplace pada Persamaan Telegraf* ".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian pada latar belakang di atas, maka rumusan masalah yang dibahas adalah:

1) Bagaimana analisis transformasi Laplace untuk persamaan telegraf?
2) Bagaimana solusi persamaan telegraf dengan variasi masalah nilai awal dan nilai batas yang diberikan?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah:

1) Mengetahui analisis transformasi Laplace untuk persamaan telegraf.
2) Mengetahui solusi persamaan telegraf dengan variasi masalah nilai awal dan nilai batas yang diberikan.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat penelitian ini adalah untuk memahami analisis transformasi Laplace sebagai salah satu metode untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial khususnya persamaan telegraf dengan masalah nilai awal dan nilai batasnya.

1.5 Metode Penelitian

Metode penelitian ini menggunakan kajian teoritis, dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1) Menganalisis transformasi Laplace untuk persamaan telegraf.
2) Menerapkan transformasi Laplace pada persamaan telegraf dengan variasi masalah nilai awal dan nilai batas yang diberikan.
3) Menyelesaikan persamaan untuk mendapatkan solusi transformasi Laplace pada persamaan telegraf.

1.6 Sistematika Penulisan

Agar penulisan skripsi ini lebih terarah, mudah ditelaah dan dipahami, maka digunakan sistematika pembahasan yang terdiri dari empat bab yaitu:

Bab I Pendahuluan

Bagian ini meliputi: latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Bagian ini berisi tentang dasar teori: transformasi Laplace, persamaan diferensial biasa, persamaan diferensial linear orde dua homogen, persamaan diferensial linear orde dua tak homogen, persamaan telegraf, dan masalah nilai awal dan nilai batas. Serta membahas kajian Islam mengenai kesempurnaan ciptaan Allah dalam al-Quran pada persamaan telegraf atau gelombang.

Bab III Pembahasan

Bagian ini menjelaskan semua langkah-langkah yang ada pada metode penelitian, yaitu menganalisis transformasi Laplace untuk persamaan telegraf. Menerapkan transformasi Laplace pada persamaan telegraf dengan variasi masalah nilai awal dan nilai batas yang diberikan. Menyelesaikan persamaan untuk mendapatkan solusi transformasi Laplace pada persamaan telegraf. Selain itu juga berisi tentang penjelasan integrasi antara kesempurnaan ciptaan Allah dalam al-Quran dengan metode transformasi Laplace.

Bab IV Penutup

Bagian ini berisi tentang kesimpulan dan saran sebagai acuan untuk penelitian selanjutnya.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Transformasi Laplace

Menurut Zuhair (2007:2) metode transformasi Laplace adalah sebuah metode yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial yang berkaitan dengan masalah nilai awal dan nilai batas. Transformasi Laplace adalah suatu metode yang mentransformasikan persamaan diferensial dari domain waktu *t* menjadi domain baru dengan variabel bebas *s* yaitu domain frekuensi, dimana *s* adalah bilangan kompleks. Begitu pula sebaliknya, Invers transformasi Laplace adalah transformasi dari domain frekuensi *s* menjadi domain waktu *t* (Effendy dan Sugiyono, 2013:156-157).

Definisi 2.1.1. Misalkan f adalah fungsi real atau bernilai kompleks untuk variabel (waktu) $t > 0$ dan s adalah parameter real atau kompleks. Transformasi Laplace dari f didefinisikan sebagai berikut

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \lim_{\tau\to\infty} \int_0^\tau e^{-st} f(t)dt \tag{2.1}$$

Jika limit ada (sebagai jumlah yang terbatas), maka integral (2.1) dikatakan konvergen. Jika limit tidak ada, maka integral (2.1) dikatakan divergen dan tidak ada transformasi Laplace yang didefinisikan untuk f. Notasi $\mathcal{L}(f)$ digunakan untuk menunjukkan transformasi Laplace dari f. Simbol $\mathcal{L}$ adalah transformasi Laplace, yang berada pada sebuah fungsi $f = f(t)$ dan menghasilkan fungsi baru, $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ (Schiff, 1999:1-2).

2.1.1 Syarat Cukup Agar Transformasi Laplace Ada

Teorema 2.1.2. Jika $f(t)$ adalah fungsi yang kontinu secara sebagian-sebagian dalam setiap interval $0 \le t \le N$ dan eksponensial berorde γ untuk $t > N$, maka transformasi Laplace $F(s)$ ada untuk setiap $s > \gamma$ (Spiegel, 1999:2).

Bukti, untuk setiap bilangan positif N diperoleh

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \int_0^N e^{-st} f(t)dt + \int_N^\infty e^{-st} f(t)dt \tag{2.2}$$

Karena $f(t)$ adalah kontinu secara sebagian-sebagian dalam setiap interval $0 \le t \le N$, integral pertama di ruas kanan ada. Juga integral kedua di ruas kanan ada, karena $f(t)$ adalah eksponensial berorde γ untuk $t > N$. Untuk melihatnya amati hal berikut

$$\left|\int_N^\infty e^{-st} f(t)dt\right| = \int_N^\infty \left|e^{-st} f(t)\right|dt = \int_0^\infty e^{-st}\left|f(t)\right|dt = \int_0^\infty e^{-st} M^{-\gamma t} dt = \frac{M}{s-\gamma} \tag{2.3}$$

Jadi transformasi Laplace ada untuk $s > \lambda$ (Spiegel, 1999:28).

Berdasarkan definisi di atas, dapat ditentukan transformasi Laplace dari beberapa fungsi sederhana, yang dapat dilihat pada lampiran 1. Beberapa contoh transformasi Laplace suatu fungsi dan penjabarannya, yaitu:

1. $f(t) = 1$, maka dapat dihitung $\mathcal{L}\ \{f(1)\}$ sebagai berikut

$$\mathcal{L}\ \{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} \cdot 1 dt = \lim_{p\to\infty}\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^p = \lim_{p\to\infty}\left[-\frac{1}{s}e^{-s\cdot\infty} + \frac{1}{s}e^{-s\cdot 0}\right] = \frac{1}{s} \tag{2.4}$$

2. $f(t) = t$, maka dapat dihitung $\mathcal{L}\ \{f(t)\}$ sebagai berikut

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} \cdot t\ dt = \lim_{p\to\infty}\left[-\frac{1}{s}\cdot t\cdot e^{-st}\right]_0^p - \int_0^p -\frac{1}{s}\cdot e^{-st}dt$$

$$=\left[\left(-\frac{1}{s}\cdot\infty\cdot e^{-s\cdot\infty}\right)-\left(-\frac{1}{s}\cdot 0\cdot e^{-s\cdot 0}\right)\right]+\frac{1}{s}\int_0^p e^{-st}dt$$

$$=\frac{1}{s^2} \tag{2.5}$$

3. $f(t)=e^{at}$, maka dapat dihitung $\mathcal{L}\,\{f(e^{at})\}$ sebagai berikut

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\int_0^{\infty} e^{-st}\cdot e^{at}dt=\lim_{p\to\infty}\left[\frac{1}{-(s-a)}\cdot e^{-(s-a)t}\right]_0^p$$

$$=\lim_{p\to\infty}\left[\frac{1}{-s+a}\cdot e^{(-s+a)t}\right]_0^p$$

$$=\left[\left(\frac{1}{-s+a}\cdot e^{(s+a)\cdot\infty}\right)-\left(\frac{1}{-s+a}\cdot e^{(s+a)\cdot 0}\right)\right]=\frac{1}{s-a} \tag{2.6}$$

(Spiegel, 1999:10-11)

Mencari nilai-nilai transformasi Laplace dari fungsi sinus-cosinus dan fungsi hiperbolik. Diketahui bentuk kompleks dari fungsi-fungsi sinus dan fungsi hiperbolik adalah:

4. $\sin at=\dfrac{e^{iat}-e^{-iat}}{2i}$, maka dapat dihitung $\mathcal{L}\,\{f(\sin at)\}$ sebagai berikut

$$\mathcal{L}\,\{\sin at\}=\mathcal{L}\left[\frac{e^{iat}-e^{-iat}}{2i}\right]=\mathcal{L}\left[\frac{e^{iat}}{2i}\right]-\mathcal{L}\left[\frac{e^{-iat}}{2i}\right]$$

$$=\frac{1}{2i}\left[\left(\frac{1}{s-ia}\right)-\left(\frac{1}{s+ia}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2i}\left[\frac{s+ia-(s-ia)}{s^2-(ia)^2}\right]=\frac{1}{2i}\left[\frac{2ia}{s^2+a^2}\right]=\frac{a}{s^2+a^2} \tag{2.7}$$

5. $\cos at=\dfrac{e^{iat}+e^{-iat}}{2}$, maka dapat dihitung $\mathcal{L}\,\{f(\cos\ at)\}$ sebagai berikut

$$\mathcal{L}\,\{\cos at\}=\mathcal{L}\left[\frac{e^{iat}+e^{-iat}}{2}\right]=\frac{1}{2}\left[\mathcal{L}(e^{iat})+\mathcal{L}(e^{-iat})\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-ia}+\frac{1}{s+ia}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{s+ia+(s-ia)}{s^2-(ia)^2}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{2s}{s^2+a^2}\right] = \frac{s}{s^2+a^2} \quad (2.8)$$

6. $\sinh at = \frac{1}{2}\left(e^{at} - e^{-at}\right)$, maka dapat dihitung $\mathcal{L}\ \{f(\sinh\ at)\}$ sebagai berikut

$$\mathcal{L}\ \{\sinh at\} = \mathcal{L}\left[\frac{1}{2}\left(e^{at} - e^{-at}\right)\right] = \frac{1}{2}[\mathcal{L}(e^{at}) - \mathcal{L}(e^{-at})]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{s+a-(s-a)}{s^2-a^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2a}{s^2-a^2} = \frac{a}{s^2-a^2} \quad (2.9)$$

7. $\cosh at = \frac{1}{2}\left(e^{at} + e^{-at}\right)$, maka dapat dihitung $\mathcal{L}\ \{f(\cosh\ at)\}$ sebagai berikut

$$\mathcal{L}\ \{\cosh at\} = \mathcal{L}\left[\frac{1}{2}\left(e^{at} + e^{-at}\right)\right] = \frac{1}{2}[\mathcal{L}(e^{at}) + \mathcal{L}(e^{-at})]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{s+a+s-a}{s^2-a^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2s}{s^2-a^2} = \frac{s}{s^2-a^2} \quad (2.10)$$

(Tazi, 2008:258-261)

2.1.2 Sifat-Sifat Transformasi Laplace

Transformasi Laplace suatu fungsi yang mempunyai beberapa sifat. Sifat-sifat tersebut antara lain:

a. Sifat linear

Teorema 2.1.3. Jika c_1 dan c_2 adalah sebarang konstanta, sedangkan $f_1(t)$ dan $f_2(t)$ adalah fungsi-fungsi dengan transformasi-transformasi Laplacenya masing-masing $F_1(s)$ dan $F_2(s)$, maka

$$\mathcal{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = c_1 \mathcal{L}\{f_1(t)\} + c_2 \mathcal{L}\{f_2(t)\} = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s) \qquad (2.11)$$

Bukti: $\mathcal{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} dt$

$$= \int_0^\infty e^{-st} c_1 f_1(t) dt + \int_0^\infty e^{-st} c_2 f_2(t) dt$$

$$= c_1 \int_0^\infty e^{-st} f_1(t) dt + c_2 \int_0^\infty e^{-st} f_2(t) dt$$

$$= c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s) \tag{2.12}$$

Contoh:

$$\mathcal{L}\{4t^2 - 3\cos 2t + 5e^{-t}\} = 4\mathcal{L}\{t^2\} - 3\mathcal{L}\{\cos 2t\} + 5\mathcal{L}\{e^{-t}\}$$

$$= 4\left(\frac{2!}{s^3}\right) - 3\left(\frac{s}{s^2+4}\right) + 5\left(\frac{s}{s+1}\right)$$

$$= \frac{8}{s^3} - \frac{3s}{s^2+4} + \frac{5}{s+1} \tag{2.13}$$

Simbol $\mathcal{L}$, yang mentransformasikan $f(t)$ ke dalam $F(s)$, sering disebut operator transformasi Laplace. Karena sifat $\mathcal{L}$ dinyatakan dalam teorema ini, maka dapat dikatakan bahwa $\mathcal{L}$ adalah suatu operator linear atau $\mathcal{L}$ memiliki sifat linear (Spiegel, 1999:12-13).

b. Sifat translasi atau pergeseran pertama

Teorema 2.1.4. Jika $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ maka $\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s-a)$

Bukti: Karena $\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = F(s)$, maka

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} e^{at} f(t) dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} f(t) dt = F(s-a) \tag{2.14}$$

(Spiegel, 1999:13)

c. Sifat translasi atau pergeseran kedua

Teorema 2.1.5. Jika $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ dan $g(t) = \begin{cases} f(t-a), & \text{jika } t > a \\ 0, & \text{jika } t < a \end{cases}$

maka $\mathcal{L}\{g(t)\} = e^{-as} F(s)$ (2.15)

Bukti: $\mathcal{L}\{g(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} g(t)dt = \int_0^a e^{-st} g(t)dt + \int_a^\infty e^{-st} g(t)dt$

$$= \int_0^a e^{-st}(0)dt + \int_a^\infty e^{-st} f(t-a)dt = \int_a^\infty e^{-st} f(t-a)dt \quad (2.16)$$

Misal $u = t - a$ maka $t = u + a$ dan $du = dt$, sehingga

$$\int_a^\infty e^{-st} f(t-a)dt = \int_0^\infty e^{-s(u+a)} f(u)du = e^{-sa}\int_0^\infty e^{-su} f(u)du = e^{-sa}F(u) \quad (2.17)$$

(Spiegel, 1999:14)

d. Sifat pengubahan skala

Teorema 2.1.6. Jika $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, maka $\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$

Karena $\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$ maka $\mathcal{L}\{f(at)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(at)dt$

Misal $u = at$, $du = a$ dt atau $dt = \frac{du}{a}$, Sehingga didapatkan

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(at)dt = \int_0^\infty e^{-u\left(\frac{s}{a}\right)} f(u)\frac{du}{a} = \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-u\left(\frac{s}{a}\right)} f(u)du = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right) \quad (2.18)$$

(Spiegel, 1999:14)

e. Transformasi Laplace dari turunan-turunan

Teorema 2.1.7. Jika $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ maka $\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$

Karena $\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = F(s)$, maka $\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \left[e^{-st} f(t)\right]_0^\infty - \int_0^\infty f(t) - s \cdot e^{-st}dt$$

$$= \left[e^{-st} f(t)\right]_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

$$= \left[\left(e^{-s.\infty} f(\infty)\right) - \left(e^{-s.0} f(0)\right)\right] + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$
$$= -f(0) + sF(t)$$
$$= sF(t) - f(t)$$
$$= sF(s) - f(0) \qquad (2.19)$$

Jika $\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\} = sF(s) - f(0)$ maka $\mathcal{L}\left\{f''(t)\right\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$

Bukti: $\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\} = \int_0^\infty e^{-st} f''(t)dt$

$$= \left[e^{-st} f'(t)\right]_0^\infty - \int_0^\infty -s \cdot e^{-st} f'(t)dt$$
$$= \left[e^{-st} f'(t)\right]_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt$$
$$= \left[\left(e^{-s.\infty} f'(\infty)\right) - \left(e^{-s.0} f'(0)\right)\right] + s\left(\left[e^{-st} f(t)\right]_0^\infty - \int_0^\infty -s \cdot e^{-st} f(t)dt\right)$$
$$= \left(0 - 1 \cdot f'(0)\right) + \left(s\left[e^{-st} f(t)\right]_0^\infty - s\left(\int_0^\infty -s\; e^{-st} f(t)\; dt\right)\right)$$
$$= \left(0 - 1 \cdot f'(0)\right) + \left(\left[\left(s \cdot e^{-s.\infty} f(\infty)\right) - \left(s \cdot e^{-s.0} f(0)\right)\right] + s^2\int_0^\infty e^{-st} f(t)\; dt\right)$$
$$= \left(0 - f'(0)\right) + \left(0 - s\; f(0)\right) + s^2\int_0^\infty e^{-st} f(t)\; dt$$
$$= -f'(0) - s\; f(0) + s^2\, F(t)$$
$$= s^2\, F(t) - s\; f(0) - f'(0)$$
$$= s^2\, F(s) - s\; f(0) - f'(0) \qquad (2.20)$$

dengan menggunakan induksi matematika dapat ditunjukkan bahwa, jika $\mathcal{L}$ $\left\{f(t)\right\} = F(s)$, maka

$$\mathcal{L}\left\{f^n(t)\right\} = s^nF(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - sf^{(n-1)}(0) \qquad (2.21)$$

(Spiegel, 1999:15)

f. Tansformasi Laplace dari integral-integral

Teorema 2.1.8. Jika $\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = F(s)$, maka $\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)du\right\} = \frac{F(s)}{s}$

Bukti: Misal $g(t)=\int_0^t f(u)du$ maka $g'(t)=f(t)$ dan $g(0)=0$

Dengan transformasi Laplace pada kedua ruas, diperoleh

$$\mathcal{L}\{g'(t)\}=s\,\mathcal{L}\{g(t)\}-g(0)=s\,\mathcal{L}\{g(t)\}=F(s)$$

$$\mathcal{L}\{g(t)\}=\frac{F(s)}{s} \qquad (2.22)$$

Jadi $\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)du\right\}=\frac{F(s)}{s}$ (Spiegel, 1999:16).

g. Perkalian dengan t^n

Teorema 2.1.9. Jika $\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$, maka $\mathcal{L}\{t^n f(t)\}=(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}F(s)=(-1)F^n(s)$

Bukti: Karena $F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$ maka menurut aturan Leibnitz untuk menurunkan di bawah tanda integral, diperoleh

$$\frac{df}{ds}=f'(s)=\frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt=\int_0^\infty\frac{d}{ds}e^{-st}f(t)dt=\int_0^\infty -t\,e^{-st}f(t)dt$$

$$=-\int_0^\infty e^{-st}\{t\ f(t)\}dt=-\mathcal{L}\{t\ f(t)\} \qquad (2.23)$$

Jadi $\mathcal{L}\{t\ f(t)\}=\frac{df}{ds}=-F'(s)$ (Spiegel, 1999:17).

h. Sifat pembagian oleh t

Teorema 2.1.10. Jika $\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$, maka $\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}=\int_0^\infty f(u)du$

Bukti: Misal $g(t)=\frac{f(t)}{t}$ maka $f(t)=t\ g(t)$.

Dengan menggunakan definisi transformasi Laplace untuk kedua ruas, maka diperoleh bentuk $\mathcal{L}\{f(t)\}=\mathcal{L}\{t\ g(t)\}$ atau $F(s)=-\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{g(t)\}$ atau $F(s)=-\frac{dg}{ds}$.

Selanjutnya dengan mengintegralkan diperoleh

$$\int F(s) = \int -\frac{dg}{ds}$$

$$\int G(s) = -\int_{\infty}^{s} f(u)du = \int_{\infty}^{s} f(u)du \qquad (2.24)$$

Jadi $\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_{s}^{\infty} f(u)du$ (Spiegel, 1999:18).

2.1.3 Invers Transformasi Laplace

Definisi 2.1.11. Jika transformasi Laplace suatu fungsi $f(t)$ adalah $F(s)$, yaitu jika $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, maka $f(t)$ disebut suatu invers transformasi Laplace dari $F(s)$. Secara simbolis ditulis $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ dimana $\mathcal{L}^{-1}$ disebut operator invers transformasi Laplace.

a. Ketunggalan Invers Transformasi Laplace

Misal $n(t)$ adalah suatu fungsi dan $\mathcal{L}\{f(t)\} = 0$ maka $\mathcal{L}\{f(t) + n(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}$. Dengan demikian dapat diperoleh dua fungsi yang berbeda dengan transformasi Laplace yang sama.

Contoh:

$$f_1(t) = e^{-3t} \text{ dan } f_2(t) = \begin{cases} 0, & \forall\, t = 1 \\ e^{-3t}, & \forall\, t \neq 1 \end{cases}$$

Mengakibatkan $\mathcal{L}^{-1}\{f_1(t)\} = \mathcal{L}^{-1}\{f_2(t)\} = \dfrac{1}{s+3}$ (2.25)

Jika menghitung fungsi-fungsi nol, maka terlihat bahwa invers transformasi Laplace tidak tunggal. Akan tetapi apabila tidak dapat memperhitungkan fungsi-fungsi nol (yang tidak muncul dalam kasus-kasus fisika) maka ia adalah tunggal. Hasilnya dinyatakan oleh teorema berikut.

Teorema Lerch 2.1.12. Jika membatasi diri pada fungi-fungsi $f(t)$ yang kontinu secara sebagian-sebagian dalam setiap selang berhingga $0 \le t \le n$ dan eksponensial berorde untuk $t > n$, maka invers transformasi Laplace dari $f(t)$ yaitu $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$, adalah tunggal. Jika tidak ada pernyataan lainnya, maka dapat dianggap tunggal (Spiegel, 1999:42).

2.2 Persamaan Diferensial Biasa

Persamaan diferensial adalah persamaan yang mengandung turunan di dalamnya. Persamaan diferensial dibagi menjadi dua. Pertama, persamaan diferensial yang mengandung hanya satu variabel bebas, disebut persamaan diferensial biasa (PDB). Kedua, persamaan diferensial yang mengandung lebih dari satu variabel bebas, disebut persamaan diferensial parsial (PDP) (Effendy dan Sugiyono, 2013:127).

Berdasarkan sifat kelinearan (pangkat satu) dari peubah tak bebasnya, persamaan diferensial dapat dibedakan menjadi PD linear dan PD tidak linear. Bentuk umum PD linear orde n diberikan

$a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$ dengan $a_n(x) \neq 0$

$a_n(x), \cdots, a_0(x)$ disebut koefisien PD.

Bila $f(x) = 0$ maka disebut PD Linear Homogen, sedangkan bila $f(x) \neq 0$ maka disebut PD Linear Tak Homogen. Bila tidak dapat dinyatakan seperti bentuk di atas dikatakan PD tidak Linear. Dari contoh terdahulu, persamaan Bernoulli dan Van Der Pol merupakan PD tidak linear (Mursita, 2009:190-191).

2.2.1 Persamaan Diferensial Linear Orde Satu

Suatu persamaan yang mengandung satu atau beberapa turunan dari suatu fungsi yang tidak diketahui disebut persamaan diferensial. Khususnya, suatu persamaan berbentuk

$$F = \left(x, y, y^{(1)}, y^{(2)}, \cdots, y^{(n)}\right) = 0 \tag{2.26}$$

yang mana $y^{(k)}$ menyatakan turunan y terhadap x yang ke k, disebut persamaan diferensial biasa berorde n.

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = k(x) \tag{2.27}$$

Bahwa y dan semua turunannya muncul dalam pangkat satu disebut suatu persamaan linear. Karena jika dituliskan dalam penulisan operator menjadi

$$\left[D_x^n + a_1(x)D_x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(x)D_x + a_n(x)\right]y = k(x) \tag{2.28}$$

operator dalam kurung siku adalah operator linear. Jadi, jika L menyatakan operator, f dan g berupa fungsi dan c konstanta, maka

$$\begin{aligned} L(f+g) &= L(f) + L(g) \\ L(cf) &= cL(f) \end{aligned} \tag{2.29}$$

(Purcell dan Valberg, 1999:433-434)

2.2.2 Persamaan Diferensial Linear Orde Dua Homogen

Suatu persamaan diferensial linear orde dua homogen mempunyai bentuk

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = k(x) \tag{2.30}$$

Misalkan $a_1(x)$, $a_2(x)$ adalah konstanta, dan $k(x)$ secara identik adalah nol (kasus homogen). Persamaan diferensial linear homogen orde dua selalu mempunyai dua selesaian fundamental $u_1(x)$ dan $u_2(x)$, yang bebas satu sama lain (yakni, fungsi yang satu bukan kelipatan fungsi yang lainnya), dari kelinearan operator $D^2 + a_1 D + a_2$, maka

$$C_1 u_1(x) + C_2 u_2(x) \tag{2.31}$$

adalah suatu selesaian juga (Purcell dan Valberg, 1999:441).

Persamaan bantu. Karena $D_x\left(e^{rx}\right) = r \cdot e^{rx}$, maka e^{rx} merupakan suatu selesaian terhadap persamaan diferensial untuk suatu pilihan r yang sesuai. Untuk menguji kemungkinan, pertama menuliskan persamaan tersebut dalam bentuk operator sebagai berikut

$$\left(D^2 + a_1 D + a_2\right)y = 0 \tag{2.32}$$

Sekarang

$$\begin{aligned} \left(D^2 + a_1 D + a_2\right)e^{rx} &= D^2 \cdot \left(e^{rx}\right) + a_1 D \cdot \left(e^{rx}\right) + a_2 \cdot e^{rx} \\ &= r^2 \cdot \left(e^{rx}\right) + a_1 r \cdot \left(e^{rx}\right) + a_2 \cdot e^{rx} \\ &= e^{rx}\left(r^2 + a_1 r + a_2\right) \end{aligned} \tag{2.33}$$

Dimisalkan ruas kanan adalah nol

$$\left(r^2 + a_1 r + a_2\right) = 0 \tag{2.34}$$

Persamaan (2.34) disebut persamaan bantu untuk (2.32). Karena persamaan (2.34) merupakan suatu persamaan kuadrat biasa dan dapat diselesaikan dengan pemfaktoran atau meggunakan rumus kuadrat. Terdapat tiga kasus yang ditinjau yaitu akar-akar riil berlainan, akar tunggal berulang, atau akar-akar kompleks saling konjugat (Purcell dan Valberg, 1999:442).

(Akar-akar riil berlainan). Jika persamaan bantu mempunyai akar-akar riil berlainan r_1 dan r_2, maka selesaian umum $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ adalah

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} \tag{2.35}$$

Tetapi, apabila persamaan bantu mempunyai bentuk

$$r^2 - 2r_1 \cdot r + r_1^2 = (r - r_1)^2 = 0 \tag{2.36}$$

maka persamaan (2.36) akan menghasilkan selesaian fundamental tunggal $e^{r_1 x}$ dan harus mencari selesaian lain yang bebas dari selesaian tersebut. Selesaian yang demikian adalah $xe^{r_1 x}$, seperti yang akan dijabarkan sebagai berikut

$$\begin{aligned}(D^2 - 2r_1 D + r_1^2)xe^{r_1 x} &= D^2 \cdot (xe^{r_1 x}) - 2r_1 D \cdot (xe^{r_1 x}) + r_1^2 \cdot xe^{r_1 x} \\ &= (xr_1^2 \cdot e^{r_1 x} + 2r_1 \cdot e^{r_1 x}) - 2r_1(xr_1 \cdot e^{r_1 x} + e^{r_1 x}) + r_1^2 \cdot xe^{r_1 x} \\ &= 0\end{aligned} \tag{2.37}$$

(Akar tunggal berulang). Jika persamaan bantu mempunyai akar tunggal berulang r_1, maka selesaian umum terhadap $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ adalah

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 x \cdot e^{r_1 x} \tag{2.38}$$

Apabila persamaan bantu mempunyai akar-akar kompleks saling konjugat sebagai berikut

$$(D^2 + B^2)y = 0 \tag{2.39}$$

dengan persamaan bantu $r^2 + \beta^2 = 0$ dan akar-akar kompleks (imajiner) $\pm \beta i$. Selesaian-selesaian fundamentalnya secara mudah kelihatan berupa $\sin \beta x$ dan $\cos \beta x$ (Purcell dan Valberg, 1999:443). Menggunakan penurunan langsung bahwa selesaian umum adalah sebagai berikut

(Akar-akar kompleks saling konjugat). Jika persamaan bantu mempunyai akar-akar kompleks saling konjugat $\alpha \pm \beta i$, maka selesaian umum $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ adalah

$$y = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x \tag{2.40}$$

(Purcell dan Valberg, 1999:443)

2.2.3 Persamaan Diferensial Linear Orde Dua Tak Homogen

Bentuk umum persamaan diferensial linear orde dua tak-homogen dengan koefisien konstan adalah

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = k(x) \tag{2.41}$$

Selesaian persamaan (2.41) dapat direduksi atas tiga langkah:

1) Menentukan Selesaian umum.

   $y_h = C_1u_1(x) + C_2u_2(x) + \cdots + C_nu_n(x)$ terhadap persamaan homogen.

2) Menentukan solusi khusus y_p terhadap persamaan tak-homogen tersebut.

3) Menambahkan selesaian-selesaian dari langkah 1 dan 2. Menyatakan hasilnya sebagai suatu teorema formal.

Teorema 2.1.13. Jika y_p suatu selesaian khusus sebarang terhadap persamaan tak-homogen

$$L(y) = \left[D^n + a_1D^{n-1} + \cdots + a_{n-1}D + a_n\right]y = k(x) \tag{2.42}$$

dan jika y_h adalah selesaian umum terhadap persamaan homogen yang bersesuaian, maka

$$y = y_p + y_h \tag{2.43}$$

adalah selesaian umum dari (2.42) (Purcell dan Valberg, 1999:446).

Bukti. Kelinearan operasi L merupakan elemen kunci dalam pembuktian. Andaikan y_p dan y_h adalah seperti yang dijelaskan, maka

$$L(y_p + y_h) = L(y_p) + L(y_h) = k(x) + 0 \tag{2.44}$$

Sehingga $y = y_p + y_h$ adalah suatu selesaian terhadap (2.42). Sebaliknya, andaikan y sebarang selesaian terhadap (2.42), maka

$$L(y - y_p) = L(y) + L(y_p) = k(x) - k(x) = 0 \tag{2.45}$$

Sehingga $y - y_p$ adalah suatu selesaian terhadap persamaan homogen. Maka dari itu $y = y_p + (y - y_p)$ dapat dituliskan sebagai y_p ditambah selesaian terhadap persamaan homogen (Purcell dan Valberg, 1999:446).

2.2.3.1 Metode Koefisien Tak Tentu

Persamaan umum

$$y''+a_1 y'+a_2 y = k(x) \tag{2.46}$$

Fungsi $k(x)$ yang sering muncul dalam penerapan berupa polinom, eksponen, sinus, dan cosinus (Purcell dan Valberg, 1999:446).

$k(x)$	y_p
$bx^m \quad (m = 0, 1, \cdots)$	$B_m x^m + \cdots + B_1 x + B_0$
be^{ax}	Be^{ax}
$b \sin \beta x$	$B \cos \beta x + C \sin \beta x$
$b \cos \beta x$	$B \cos \beta x + C \sin \beta x$

Tabel 2.2 Metode Koefisien Tak Tentu (Sumber: Purcell dan Valberg, 1999)

2.2.3.2 Metode Variasi Parameter

Metode yang lebih umum daripada metode koefisien tak-tentu adalah metode variasi parameter. Jika $u_1(x)$ dan $u_2(x)$ adalah selesaian umum terhadap persamaan homogen dengan pemisalan $y_h = C_1(x)u_1(x) + C_2(x)u_2(x)$, maka terdapat suatu selesaian khusus terhadap persamaan tak-homogen yang berbentuk

$$y_p = v_1(x)u_1(x) + v_2(x)u_2(x) \tag{2.47}$$

dimana

$$v_1' u_1 + v_2' u_2 = 0 \tag{2.48}$$

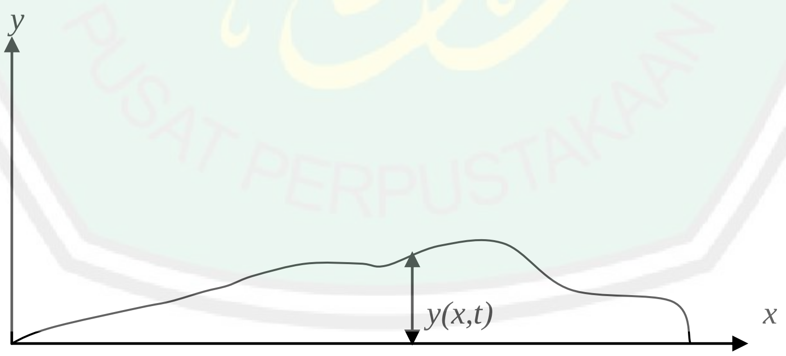
$$v_1' u_1' + v_2' u_2' = k(x) \tag{2.49}$$

(Purcell dan Valberg, 1999:449)

2.3 Dasar Teori Persamaan Telegraf

Persamaan diferensial parsial adalah suatu persamaan yang mengandung satu atau lebih turunan parsial suatu fungsi (yang tidak diketahui) dengan dua atau lebih peubah bebas. Tingkat *(order)* persamaan diferensial parsial adalah pangkat tertinggi dari turunan yang termuat dalam persamaan diferensial parsial. Dan derajat *(degree)* persamaan diferensial parsial adalah pangkat tertinggi dari turunan tingkat tertinggi yang termuat dalam persamaan diferensial parsial. Persamaan diferensial parsial linear adalah suatu bentuk persamaan diferensial parsial yang berderajat satu dalam peubah tak bebasnya dan turunan parsialnya (Kreyszig, 2006:535).

Salah satu contoh persamaan diferensial parsial adalah persamaan telegraf. Persamaan telegraf atau persamaan gelombang ini digunakan untuk getaran transversal dari kabel, tali lentur seperti senar biola, yang asalnya diletakkan pada sumbu x dan digerakkan (lihat gambar).



Gambar 2.1 Getaran Kabel

dimana fungsi $y(x,t)$ adalah perpindahan disuatu titik x pada tali saat t. Konstanta $a^2 = \frac{T}{\mu}$ di mana T adalah tegangan (konstan) dalam tali dan μ adalah massa persatuan panjang (konstan) dari tali. Di sini diandaikan bahwa tidak ada gaya luar yang bekerja pada tali, tetapi bergetar hanya karena kelenturannya (Spiegel, 1999:219).

2.3.1 Persamaan Hiperbola

Persamaan hiperbola biasanya berhubungan dengan getaran, atau permasalahan dimana terjadi *discontinue* dalam waktu. Persamaan gelombang merupakan salah satu bentuk persamaan hiperbola yang paling sederhana yang mempunyai bentuk

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2.50}$$

Dengan y adalah perpindahan vertikal pada jarak x dari ujung tali yang bergetar yang mempunyai panjang L sesudah waktu t. Oleh karena itu, nilai y pada ujung-ujung tali biasanya diketahui untuk semua waktu (kondisi batas) dan bentuk serta kecepatan tali diketahui pada waktu nol (kondisi awal), maka selesaian persamaan adalah serupa dengan selesaian persamaan parabola, yaitu menghitung y pada x dan t tertentu (Triatmodjo, 2002:201-202).

Dalam persamaan gelombang terdapat banyak jenis persamaan, yang salah satunya adalah persamaan telegraf atau persamaan saluran transmisi atau persamaan kawat. Di berikan persamaaan telegraf orde dua linear hiperbolik satu dimensi sebagai berikut

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial t} + \beta^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \tag{2.51}$$

Sedangkan dengan ekspansi Taylor dapat membuktikan persamaan telegraf, dengan pengabdian suku-suku tingkat tinggi dan mensubstitusikannya ke deret taylor (Pipes, 1991:593).

2.3.2 Penurunan Persamaan Telegraf Orde Dua Linear Hiperbolik

Di berikan persamaaan telegraf orde dua linear hiperbolik satu dimensi sebagai berikut

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2\alpha\frac{\partial u}{\partial t}+\beta^2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t) \tag{2.52}$$

Asumsi yang dibangun $\gamma(x,t)$ adalah peluang partikel mendesak dari kiri dan $\lambda(x,t)$ adalah peluang partikel mendesak ke kanan.

Dengan memperhatikan persamaan ini

$$\gamma(x,t+\Gamma)=p\gamma(x-\delta,t)+q\lambda(x-\delta,t) \tag{2.53}$$

$$\lambda(x,t+\Gamma)=p\lambda(x+\delta,t)+q\gamma(x+\delta,t) \tag{2.54}$$

Alat pelacak yang digunakan adalah deret Taylor

Untuk $\gamma(x,t+\Gamma)$ maka

$$\gamma(x,t+\Gamma)=\gamma(x,t)+\Gamma\gamma_t(x,t) \tag{2.55}$$

Untuk $\gamma(x-\delta,t)$ maka

$$\gamma(x-\delta,t)=\gamma(x,t)-\delta\gamma_x(x,t)+\frac{1}{2}\delta^2\gamma_{xx}(x,t) \tag{2.56}$$

Untuk $\lambda(x-\delta,t)$ maka

$$\lambda(x-\delta,t)=\lambda(x,t)-\delta\lambda_x(x,t)+\frac{1}{2}\delta^2\lambda_{xx}(x,t) \tag{2.57}$$

Untuk $\lambda(x,t+\Gamma)$ maka

$$\lambda(x,t+\Gamma)=\lambda(x,t)+\Gamma\lambda_t(x,t) \tag{2.58}$$

Untuk $\lambda(x+\delta,t)$ maka

$$\lambda(x+\delta,t)=\lambda(x,t)+\delta\lambda_x(x,t)+\frac{1}{2}\delta^2\lambda_{xx}(x,t) \tag{2.59}$$

Untuk $\gamma(x+\delta,t)$ maka

$$\gamma(x+\delta,t)=\gamma(x,t)+\delta\gamma_x(x,t)+\frac{1}{2}\delta^2\gamma_{xx}(x,t) \tag{2.60}$$

Substitusi deret Taylor (2.55), (2.56), dan (2.57) ke persamaan (2.53), maka menjadi

$$\gamma(x,t)+\Gamma\gamma_t(x,t)=p\left(\gamma(x,t)-\delta\gamma_x(x,t)+\frac{1}{2}\delta^2\gamma_{xx}(x,t)\right)+$$
$$q\left(\lambda(x,t)-\delta\lambda_x(x,t)+\frac{1}{2}\delta^2\lambda_{xx}(x,t)\right) \quad (2.61)$$

dari (2.61) $\gamma(x,t)$ dipindahkan ke ruas kanan, maka

$$\Gamma\gamma_t(x,t)=(-\gamma(x,t)+p\gamma(x,t)+q\lambda(x,t))-\delta(p\gamma_x(x,t)+q\lambda_x(x,t))+$$
$$\frac{1}{2}\delta^2(p\gamma_{xx}(x,t)+q\lambda_{xx}(x,t)) \quad (2.62)$$

dari (2.62) orde keduanya dipotong dan diganti error, maka diperoleh

$$\Gamma\gamma_t(x,t)=(-\gamma(x,t)+p\gamma(x,t)+q\lambda(x,t))-\delta(p\gamma_x(x,t)+q\lambda_x(x,t))+error \quad (2.63)$$

dari (2.63) Γ dipindahkan ke ruas kanan dan menghilangkan error, diperoleh

$$\gamma_t(x,t)=\frac{-\gamma}{\Gamma}(x,t)+\frac{p}{\Gamma}\gamma(x,t)+\frac{q}{\Gamma}\lambda(x,t)-\frac{\delta}{\Gamma}(p\gamma_x(x,t)+q\lambda_x(x,t)) \quad (2.64)$$

dari (2.64) $\gamma(x,t)$ dikelompokkan menjadi satu, diperoleh

$$\gamma_t(x,t)=\frac{(-\gamma+p)}{\Gamma}(x,t)+\frac{q}{\Gamma}\lambda(x,t)-\frac{\delta}{\Gamma}(p\gamma_x(x,t)+q\lambda_x(x,t)) \quad (2.65)$$

dari (2.65) $-\frac{\delta}{\Gamma}(p\gamma_x(x,t)+q\lambda_x(x,t))$ dijabarkan menjadi seperti di bawah ini

$$\gamma_t(x,t)=\frac{1}{\Gamma}(p-1)\gamma(x,t)+\frac{q}{\Gamma}\lambda(x,t)-\frac{\delta p}{\Gamma}\gamma_x(x,t)-\frac{\delta q}{\Gamma}\lambda_x(x,t) \quad (2.66)$$

dari (2.66) suku $-\frac{\delta q}{\Gamma}\lambda_x(x,t)$ dihilangkan, maka

$$\gamma_t(x,t)=\frac{1}{\Gamma}(p-1)\gamma(x,t)+\frac{q}{\Gamma}\lambda(x,t)-\frac{\delta p}{\Gamma}\gamma_x(x,t), \quad \forall p+q=1 \quad (2.67)$$

Karena di atas sudah dijelaskan bahwa $\forall p+q=1$, maka (2.67) diperoleh

$$\gamma_t(x,t)=\frac{1}{\Gamma}(p-(p+q))\gamma(x,t)+\frac{q}{\Gamma}\lambda(x,t)-\frac{\delta p}{\Gamma}\gamma_x(x,t) \quad (2.68)$$

Substitusikan $\forall p+q=1$ ke dalam (2.68), maka didapatkan

$$\gamma_t(x,t)=\frac{q}{\Gamma}\gamma(x,t)+\frac{q}{\Gamma}\lambda(x,t)-\frac{\delta p}{\Gamma}\gamma_x(x,t) \tag{2.69}$$

Diasumsikan

$$\operatorname{Lim}\frac{q}{\Gamma}=\beta \quad ,\forall\, \beta \text{ Konstanta tak nol} \tag{2.70}$$

$$\operatorname{Lim}\frac{\delta}{\Gamma}=\alpha \quad \&\, \forall\, p\to 0 \tag{2.71}$$

Sehingga persamaan tersebut menjadi

$$\begin{aligned}\gamma_t(x,t)&=-\beta\gamma(x,t)+\beta\lambda(x,t)-\alpha p\gamma_x(x,t)\\ \gamma_t(x,t)&=-\beta\gamma(x,t)+\beta\lambda(x,t)-\alpha\gamma_x(x,t)\\ \gamma_t(x,t)&=-\alpha\gamma_x(x,t)-\beta\gamma(x,t)+\beta\lambda(x,t)\end{aligned} \tag{2.72}$$

Dapat diubah ke dalam bentuk

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t}(x,t)=-\alpha\frac{\partial\gamma}{\partial x}(x,t)-\beta\gamma(x,t)+\beta\lambda(x,t) \tag{2.73}$$

Substitusi deret Taylor (2.58), (2.59), dan (2.60) ke persamaan (2.54), didapatkan

$$\begin{aligned}\lambda(x,t)+\Gamma\lambda_t(x,t)=\ &p\left(\lambda(x,t)+\delta\lambda_x(x,t)+\frac{1}{2}\delta^2\lambda_{xx}(x,t)\right)+\\ &q\left(\gamma(x,t)+\delta\gamma_x(x,t)+\frac{1}{2}\delta^2\gamma_{xx}(x,t)\right)\end{aligned} \tag{2.74}$$

dari (2.74) $\lambda(x,t)$ dipindahkan ke ruas kanan, maka

$$\begin{aligned}\Gamma\lambda_t(x,t)=\ &\left(-\lambda(x,t)+p\lambda(x,t)+q\gamma(x,t)\right)+\delta\left(p\lambda_x(x,t)+q\gamma_x(x,t)\right)+\\ &\frac{1}{2}\delta^2(p\lambda_{xx}(x,t)+q\gamma_{xx}(x,t))\end{aligned} \tag{2.75}$$

dari (2.75) orde keduanya dipotong dan diganti error, maka diperoleh

$$\Gamma\lambda_t(x,t)=\left(-\lambda(x,t)+p\lambda(x,t)+q\gamma(x,t)\right)+\delta\left(p\lambda_x(x,t)+q\gamma_x(x,t)\right)+error \tag{2.76}$$

dari (2.76) Γ dipindahkan ke ruas kanan dan menghilangkan errornya, diperoleh

$$\lambda_t(x,t)=\frac{-\lambda}{\Gamma}(x,t)+\frac{p}{\Gamma}\lambda(x,t)+\frac{q}{\Gamma}\gamma(x,t)+\frac{\delta}{\Gamma}\left(p\lambda_x(x,t)+q\gamma_x(x,t)\right) \tag{2.77}$$

dari (2.77) $\lambda(x,t)$ dikelompokkan menjadi satu, diperoleh

$$\lambda_t(x,t)=\frac{(-\lambda+p)}{\Gamma}(x,t)+\frac{q}{\Gamma}\gamma(x,t)+\frac{\delta}{\Gamma}\left(p\lambda_x(x,t)+q\gamma_x(x,t)\right) \tag{2.78}$$

dari (2.78) $\frac{\delta}{\Gamma}\left(p\lambda_x(x,t)+q\gamma_x(x,t)\right)$ dijabarkan menjadi seperti di bawah ini

$$\lambda_t(x,t)=\frac{1}{\Gamma}(p-1)\lambda(x,t)+\frac{q}{\Gamma}\gamma(x,t)+\frac{\delta p}{\Gamma}\lambda_x(x,t)+\frac{\delta q}{\Gamma}\gamma_x(x,t),\ \forall p+q=1 \tag{2.79}$$

dari (2.79) suku $\frac{\delta q}{\Gamma}\gamma_x(x,t)$ dihilangkan dan $\forall p+q=1$, maka (2.79) diperoleh

$$\lambda_t(x,t)=\frac{1}{\Gamma}(p-(p+q))\lambda(x,t)+\frac{q}{\Gamma}\gamma(x,t)+\frac{\delta p}{\Gamma}\lambda_x(x,t) \tag{2.80}$$

substitusikan $\forall p+q=1$ ke dalam (2.80), maka didapatkan

$$\lambda_t(x,t)=\frac{q}{\Gamma}\lambda(x,t)+\frac{q}{\Gamma}\gamma(x,t)+\frac{\delta p}{\Gamma}\lambda_x(x,t) \tag{2.81}$$

Diasumsikan

$$Lim\frac{q}{\Gamma}=\beta, \qquad \frac{q}{\Gamma}\to\beta \tag{2.82}$$

$$Lim\frac{\delta}{\Gamma}=\alpha \quad \text{dan} \quad p\to 0 \text{ dengan } \lim_{n\to\infty} p=0 \tag{2.83}$$

Sehingga persamaan menjadi

$$\lambda_t(x,t)=-\beta\lambda(x,t)+\beta\gamma(x,t)+\alpha p\lambda_x(x,t)$$
$$\lambda_t(x,t)=-\beta\lambda(x,t)+\beta\gamma(x,t)+\alpha\lambda_x(x,t)$$
$$\lambda_t(x,t)=\alpha\lambda_x(x,t)-\beta\lambda(x,t)+\beta\gamma(x,t) \tag{2.84}$$

Dapat diubah ke dalam bentuk

$$\frac{\partial\lambda}{\partial t}(x,t)=\alpha\frac{\partial\lambda}{\partial x}(x,t)+\beta\gamma(x,t)-\beta\lambda(x,t) \tag{2.85}$$

Persamaan (2.73) dan (2.85) masing-masing dijumlahkan dan dikurangkan

1. Penjumlahan

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t}(x,t)=-\alpha\frac{\partial\gamma}{\partial x}(x,t)-\beta\gamma(x,t)+\beta\lambda(x,t)$$
$$\frac{\partial\lambda}{\partial t}(x,t)=\alpha\frac{\partial\lambda}{\partial x}(x,t)+\beta\gamma(x,t)-\beta\lambda(x,t) \quad +$$
$$\frac{\partial\gamma}{\partial t}(x,t)+\frac{\partial\lambda}{\partial t}(x,t)=-\alpha\frac{\partial\gamma}{\partial x}(x,t)+\alpha\frac{\partial\lambda}{\partial x}(x,t)$$

$$\frac{\partial(\gamma+\lambda)}{\partial t}(x,t)=\alpha\frac{\partial(\gamma-\lambda)}{\partial x}(x,t)$$
$$\frac{\partial(\gamma+\lambda)}{\partial t}(x,t)-\alpha\frac{\partial(\gamma-\lambda)}{\partial x}(x,t)=0 \tag{2.86}$$

2. Pengurangan

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t}(x,t)=-\alpha\frac{\partial\gamma}{\partial x}(x,t)-\beta\gamma(x,t)+\beta\lambda(x,t)$$
$$\frac{\partial\lambda}{\partial t}(x,t)=\alpha\frac{\partial\lambda}{\partial x}(x,t)+\beta\gamma(x,t)-\beta\lambda(x,t) \quad -$$
$$\frac{\partial\gamma}{\partial t}(x,t)-\frac{\partial\lambda}{\partial t}(x,t)=-\alpha\frac{\partial\gamma}{\partial x}(x,t)-\alpha\frac{\partial\lambda}{\partial x}(x,t)-2\beta\gamma(x,t)+2\beta\lambda(x,t)$$
$$\frac{\partial(\gamma-\lambda)}{\partial t}(x,t)=-\alpha\frac{\partial(\gamma+\lambda)}{\partial x}(x,t)-2\beta\gamma(x,t)+2\beta\lambda(x,t)$$
$$\frac{\partial(\gamma-\lambda)}{\partial t}(x,t)+\alpha\frac{\partial(\gamma-\lambda)}{\partial x}(x,t)=-2\beta(\gamma-\lambda)(x,t) \tag{2.87}$$

Kemudian menurunkan persamaan (2.86) dan (2.87)

1. Menurunkan persamaan (2.86) terhadap t

$$\frac{\partial(\gamma+\lambda)}{\partial t}(x,t)-\alpha\frac{\partial(\gamma-\lambda)}{\partial x}(x,t)=0$$
$$\frac{\partial^2(\gamma+\lambda)}{\partial t^2}(x,t)-\alpha\frac{\partial^2(\gamma-\lambda)}{\partial x\partial t}(x,t)=0 \tag{2.88}$$

2. Menurunkan persamaan (2.87) terhadap x

$$\frac{\partial(\gamma-\lambda)}{\partial t}(x,t)+\alpha\frac{\partial(\gamma-\lambda)}{\partial x}(x,t)=-2\beta(\gamma-\lambda)(x,t)$$
$$\frac{\partial^2(\gamma-\lambda)}{\partial x\partial t}(x,t)+\alpha\frac{\partial^2(\gamma-\lambda)}{\partial x^2}(x,t)=-2\beta\frac{\partial(\gamma-\lambda)}{\partial x}(x,t) \tag{2.89}$$

Mengalikannya dengan α

$$\frac{\partial^2(\gamma-\lambda)}{\partial x\partial t}(x,t)+\alpha\frac{\partial^2(\gamma-\lambda)}{\partial x^2}(x,t)=-2\beta\frac{\partial(\gamma-\lambda)}{\partial x}(x,t) \quad x\alpha$$
$$\alpha\frac{\partial^2(\gamma-\lambda)}{\partial x\partial t}(x,t)+\alpha^2\frac{\partial^2(\gamma-\lambda)}{\partial x^2}(x,t)=-2\beta\alpha\frac{\partial(\gamma-\lambda)}{\partial x}(x,t) \tag{2.90}$$

Persamaan (2.90) dimanipulasi ke dalam bentuk

$$-\alpha\frac{\partial^2(\gamma-\lambda)}{\partial x\partial t}(x,t)+\alpha^2\frac{\partial^2(\gamma-\lambda)}{\partial x^2}(x,t)=-2\beta\alpha\frac{\partial(\gamma-\lambda)}{\partial x}(x,t) \tag{2.91}$$

Menambahkan (2.88) dengan (2.91) sehingga

$$\frac{\partial^2(\gamma+\lambda)}{\partial t^2}(x,t)-\alpha\frac{\partial^2(\gamma-\lambda)}{\partial x\partial t}(x,t)=0$$

$$-\alpha\frac{\partial^2(\gamma-\lambda)}{\partial x\partial t}(x,t)+\alpha^2\frac{\partial^2(\gamma-\lambda)}{\partial x^2}(x,t)=-2\beta\alpha\frac{\partial(\gamma-\lambda)}{\partial x}(x,t) \quad +$$

$$\frac{\partial^2(\gamma+\lambda)}{\partial t^2}(x,t)-\alpha\frac{\partial^2(\gamma-\lambda)}{\partial x\partial t}(x,t)-\alpha\frac{\partial^2(\gamma-\lambda)}{\partial x\partial t}(x,t)+\alpha^2\frac{\partial^2(\gamma-\lambda)}{\partial x^2}(x,t)=-2\beta\alpha\frac{\partial(\gamma-\lambda)}{\partial x}(x,t)$$

$$\frac{\partial^2(\gamma+\lambda)}{\partial t^2}(x,t)-2\alpha\frac{\partial^2(\gamma-\lambda)}{\partial x\partial t}(x,t)+\alpha^2\frac{\partial^2(\gamma-\lambda)}{\partial x^2}(x,t))=-2\beta\alpha\frac{\partial(\gamma-\lambda)}{\partial x}(x,t)$$

$$\frac{\partial^2(\gamma+\lambda)}{\partial t^2}(x,t)-2\alpha\frac{\partial^2(\gamma-\lambda)}{\partial x\partial t}(x,t)+\alpha^2\frac{\partial^2(\gamma-\lambda)}{\partial x^2}(x,t)+2\beta\alpha\frac{\partial(\gamma-\lambda)}{\partial x}(x,t)=0 \qquad (2.92)$$

Diasumsikan

$$u(x,t)=\gamma(x,t)+\lambda(x,t) \text{ dan } \lim_{n\to\infty}\alpha=0 \qquad (2.93)$$

Sehingga akan didapatkan

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t)-2\alpha\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}u(x,t)+\alpha^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)+2\beta\alpha\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)=0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)-2\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}(x,t)+\alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)+2\beta\alpha\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)=0 \qquad (2.94)$$

Jika $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}(x,t)$ bernilai $-1\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)$, α^2 bernilai -1, dan $\gamma\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)$ bernilai $\frac{1}{2}\beta u$ maka

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)-2\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}(x,t)+\alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)+2\beta\alpha\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)=0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)-2\alpha-1\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)+(-1)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)+2\beta\frac{1}{2}\beta u=0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)+2\alpha\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)-1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)+\beta^2 u=0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)+2\alpha\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)+\beta^2 u(x,t)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)+f(x,t) \qquad (2.95)$$

2.3.3 Solusi Persamaan Telegraf

Bentuk umum dari persamaaan telegraf orde dua linear hiperbolik adalah

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)+2\alpha\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)+\beta^2 u(x,t)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)+f(x,t) \qquad (2.96)$$

Karena $f(x,t)$ adalah fungsi konstanta sembarang, maka $f(x,t)=0$. Persamaan (2.96) menjadi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)+2\alpha\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)+\beta^2 u(x,t)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \tag{2.97}$$

Berdasarkan klasifikasi notasi persamaan diferensial biasa seperti yang telah dijelaskan di subbab sebelumnya, operator ∂ pada persamaan (2.97) diubah menjadi operator d. Sehingga persamaan (2.97) dapat ditulis dalam bentuk sebagai berikut

$$\frac{d^2 u}{dt^2}(x,t)+2\alpha\frac{du}{dt}(x,t)+\beta^2 u(x,t)=0 \tag{2.98}$$

Persamaan (2.98) dapat ditulis dalam bentuk persamaan karakteristik sebagai berikut

$$m^2+(2\alpha)m+\beta^2=0 \tag{2.99}$$

Karena persamaan (2.99) merupakan suatu persamaan kuadrat biasa, dapat diselesaikan dengan pemfaktoran. Sehingga akar persamaan karakteristik dari persamaan (2.99) adalah

$$m_{1,2}=-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-\beta^2} \tag{2.100}$$

Setelah diperoleh bentuk umum akar-akar dari persamaan (2.99), maka nilai m_1 dan m_2 mempunyai tiga kemungkinan yaitu akar-akar real dan berbeda, akar tunggal berulang, atau akar-akar kompleks saling konjugat.

a. Akar-Akar Real dan Berbeda

Persamaan (2.99) dikatakan mempunyai akar-akar real dan berbeda, apabila $\alpha^2-\beta^2>0$. Maka solusi umum untuk persamaan (2.99) adalah

$$U(t)=C_1e^{\left(-\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\,t\right)}+C_2e^{\left(-\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\,t\right)} \tag{2.101}$$

b. Akar Tunggal Berulang

Persamaan (2.99) dikatakan mempunyai akar tunggal berulang, apabila $\alpha^2 - \beta^2 = 0$. Maka solusi umum untuk persamaan (2.99) adalah

$$U(t) = C_1 e^{-\alpha \cdot t} + C_2 x e^{-\alpha \cdot t} \tag{2.102}$$

c. Akar-Akar Kompleks Saling Konjugat

Persamaan (2.99) dikatakan mempunyai akar tunggal berulang, apabila $\alpha^2 - \beta^2 < 0$. Karena nilai α^2 selalu positif, dimisalkan $\alpha^2 = -\alpha^2$. Maka $-\alpha^2 - \beta^2$ nilainya negatif, sehingga diperoleh

$$m_{1,2} = \frac{-2\alpha}{2} \pm \frac{\sqrt{-4\alpha^2 - 4\beta^2}}{2} \tag{2.103}$$

Persamaan (2.103) disederhanakan menjadi

$$m_{1,2} = -\alpha \pm i\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \tag{2.104}$$

Maka solusi umum untuk persamaan (2.99) adalah

$$U(t) = e^{-\alpha t}\left(C_1 \cos\left(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}\ t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}\ t\right)\right)$$

$$U(t) = C_1 e^{-\alpha t} \cos\left(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}\ t\right) + C_2 e^{-\alpha t} \sin\left(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}\ t\right) \tag{2.105}$$

2.4 Masalah Nilai Awal dan Nilai Batas

Syarat awal (syarat pada waktu $t = 0$) atau syarat batas (nilai tertentu bagi solusi u atau turunannya pada permukaan batas S, atau kurva batas C) atau keduanya. Persamaan telegraf atau gelombang menetapkan dua syarat awal (pergeseran awal dan kecepatan awal). Persamaan telegraf atau persamaan gelombang merupakan salah satu dari bentuk hiperbolik yang memuat ketergantungan waktu. Untuk persamaan telegraf dan persamaan gelombang

$v(x,0)$ dan $\frac{\partial v(x,0)}{\partial t}$ sudah ditentukan. Jika nilai dari x tertutup, ini merupakan masalah nilai awal untuk setiap persamaan (Zauderer, 2006:153-154).

Ketika nilai dari x dibatasi atau interval semi infinite, $v(x,t)$, $\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}$, atau kombinasi linear maka dari keduanya harus ditentukan batas-batas untuk $t \geq 0$, pada persamaan difusi. Sedemikian sehingga kondisi juga harus sesuai untuk persamaan telegraf atau persamaan gelombang ketika x terbatas dengan cara yang sama. Mengkombinasikan dari $v(x,t)$ atau turunan pada syarat awal $t = 0$ dan pada syarat batas (s) maka diperoleh masalah nilai awal dan batas untuk setiap persamaan untuk $v(x,t)$ (Zauderer, 2006:154).

Syarat batas adalah syarat-syarat tertentu atau kondisi-kondisi tertentu yang terlibat dalam persamaan diferensial parsial, yang digunakan untuk mendapatkan solusi dari persamaan diferensial parsial tersebut. Ada tiga kemungkinan, yaitu interval terbatas, interval setengah terbatas, dan interval tak terbatas. Untuk interval terbatas, besarnya interval I adalah $0 < x < L$ mempunyai dua syarat batas yaitu pada $x = 0$ dan $x = L$. Untuk interval setengah tak terbatas, besarnya I adalah $0 < x < \infty$ biasa ditulis $x > 0$, syarat batasnya hanya pada $x = 0$. Sedangkan untuk interval tak terbatas, besarnya interval I adalah $-\infty < x < \infty$ sehingga tidak punya syarat batas. Namun, syarat-syarat batas ∂G untuk persamaan parabolik, eliptik dan hiperbolik diasumsikan menjadi dasar ukuran yang umum dari beberapa aplikasi. Pada kasus dua atau tiga dimensi ruang, bentuk persamaan syaratnya adalah

$$\alpha(x)u + \beta(x)\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial G} = B(x,t), \tag{2.106}$$

Dimana $\alpha(x), \beta(x)$ dan $B(x,t)$ diberikan fungsi yang bernilai pada daerah batas ∂G. Pada kasus eliptik, G adalah sebuah daerah di ruang x dan $B = B(x)$ adalah fungsi bebas dari t. Kasus parabola dan hiperbolik, daerah G_x di ruang x dan bentuk daerah G dalam ruang (x,t) yang menunjukkan (x,t) memenuhi kondisi $x \in G$ dan t jarak yang melalui nilai-nilai tertentu yang telah ditetapkan $t_0 \leq t \leq t_1$. (Daerah G juga dapat dicirikan sebagai hasil yang sebenarnya dalam bentuk $G = G_x x[t_0, t_1]$). Lambang $\frac{\partial u}{\partial n}$ merupakan bagian turunan normal pada ∂G.

Syarat batas pada persamaan (2.41) berkaitan dengan nilai-nilai u pada ∂G dan perubahan dari u melalui ∂G, serta diharuskan $\alpha(x) \geq 0, \beta(x) \geq 0$ dan $\alpha(x) + \beta(x) > 0$ pada ∂G. Terdapat tiga jenis syarat batas yaitu:

(a) Persamaan (2.41) disebut dengan kondisi Dirichlet jika $\alpha \neq 0$ dan $\beta = 0$;

(b) Persamaan (2.41) disebut dengan kondisi Neumann jika $\alpha = 0$ dan $\beta \neq 0$;

(c) Persamaan (2.41) disebut dengan kondisi Robin jika $\alpha \neq 0$ dan $\beta \neq 0$.

Kondisi Robin dapat juga disebut sebagai kondisi campuran (Zauderer, 2006:179).

2.5 Kesempurnaan Ciptaan Allah dalam Al-Quran pada Persamaan Telegraf atau Gelombang

Persamaan telegraf atau persamaan gelombang ini diuraikan dalam bentuk persamaan diferensial parsial yang mungkin merupakan gambaran untuk masalah atau fakta yang sesungguhnya. Karena tidak mungkin diterjemahkan keadaannya secara keseluruhan, tetapi yang mampu dilakukan adalah membuat contoh dari masalah tersebut. Dalam skripsi ini digunakan persamaan diferensial parsial khususnya pada persamaan telegraf atau persamaan gelombang untuk getaran transversal dari kabel, tali lentur seperti senar biola. Gelombang tranversal adalah gelombang yang arah rambatnya tegak lurus dengan arah rambatnya. Hal ini merupakan kesempurnaan ciptaan Allah yang berkaitan dengan persamaan telegraf atau persamaan gelombang transversal dari kabel tali lentur. Allah menciptakan segala sesuatu di alam semesta dengan kesempurnaan dan keindahan. Alam semesta memuat bentuk-bentuk dan konsep matematika, meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Alam semesta serta segala isinya diciptakan oleh Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan, dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi (Abdussakir, 2007:79).

Maka dari penjabaran di atas, dalam matematika dimisalkan dengan menyelesaikan permasalahan pada persamaan telegraf atau persamaan gelombang menggunakan salah satu metode yang ada dalam matematika, yaitu metode transformasi Laplace. Metode transformasi Laplace adalah suatu metode yang digunakan pada persamaan diferensial dengan masalah nilai awal dan masalah nilai batas, untuk mendapatkan solusi atau selesaian dari persamaan diferensial tersebut. Sebagaimana firman Allah Swt. di dalam Surat al-Insyirah/94:6, yang berbunyi

إِنَّ مَعَ ٱلْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٦﴾

"Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan" (QS. al-Insyirah/94:6).

Ini merupakan kabar gembira untuk Nabi Muhammad Saw., yaitu bahwa setiap kali Beliau mendapatkan kesulitan, maka Beliau akan mendapatkan kemudahan setelahnya, dan bahwa betapa pun besar kesusahan yang Beliau alami, maka setelahnya Beliau akan merasakan kemudahan. Oleh karena itu, sebelumnya Nabi Saw. merasakan kesulitan dan penderitaan orang-orang kafir, selanjutnya Beliau mendapatkan kemudahan dengan diberi-Nya kemenangan atas mereka (Marwan, 2013:471).

Bahwa Allah Swt. memberitahukan bersama kesulitan itu terdapat kemudahan. Kemudian Dia mempertegas berita tersebut, Ibnu Jarir meriwayatkan dari al-Hasan, dia berkata: "Nabi Saw. pernah keluar rumah pada suatu hari dalam keadaan senang dan gembira, dan beliau juga dalam keadaan tertawa seraya bersabda

((لَنْ يَغْلِبَ عُسْرٌ يُسْرَيْنِ ، فَإِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا.))

"Satu kesulitan itu tidak akan pernah mengalahkan dua kemudahan, sesungguhnya bersama kesulitan itu pasti terdapat kemudahan" (Ad-Dimasyqi, 2000:498).

Jadi setiap masalah itu pasti ada solusi atau jalan keluarnya, seperti yang dijelaskan dalam ayat al-Quran di atas. Jika mereka mau bersungguh-sungguh dalam menyelesaikan masalahnya maka akan ada solusinya atau jalan keluar. Karena Allah Swt. telah menegaskan bahwa barangsiapa yang bersungguh-sungguh dalam hal melakukan suatu kebaikan maka akan ditunjukkan jalan keluar atau jalan yang benar baginya. Sebagaimana firman Allah Swt. di dalam surat al-Ankabuut/29:69, yang berbunyi

وَٱلَّذِينَ جَٰهَدُواْ فِينَا لَنَهْدِيَنَّهُمْ سُبُلَنَاۚ وَإِنَّ ٱللَّهَ لَمَعَ ٱلْمُحْسِنِينَ ﴿٦٩﴾

"dan orang-orang yang berjihad untuk (mencari keridhaan) Kami, benar- benar akan Kami tunjukkan kepada mereka jalan-jalan kami. dan Sesungguhnya Allah benar-benar beserta orang-orang yang berbuat baik" (Qs. al-Ankabuut/29:69).

BAB III

PEMBAHASAN

Bab III dalam penelitian ini menjelaskan tentang aplikasi transformasi Laplace untuk menentukan solusi dari persamaan diferensial parsial. Menyelesaikan persamaan diferensial parsial khususnya persamaaan telegraf orde dua linear dalam bentuk persamaan hiperbolik ada beberapa langkah. Adapun langkah-langkah penyelesaiannya adalah sebagai berikut:

1. Menentukan transformasi Laplace dari kedua ruas pada persamaan.
2. Menggunakan kondisi awal dan kondisi batas yang ada.
3. Menyatakan $U(s)$ dalam bentuk $\mathcal{L}\{u(t)\}$.
4. Menyatakan $U(s)$ dalam fungsi yang dapat dicari invers transformasi Laplace. Menentukan solusi dari persamaan diferensial parsial $u(t)$ dengan menggunakan invers transformasi Laplace.

3.1 Analisis Transformasi Laplace pada Persamaan Telegraf

Bentuk umum dari persamaaan telegraf orde dua linear hiperbolik satu dimensi adalah

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial t} + \beta^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \tag{3.1}$$

Dimana $\alpha,\ \beta$ dan $f(x,t)$ adalah konstanta, maka dipilih $\alpha = 4, \beta = 2$ dan $f(x,t) = -2 \cdot e^{-t} \sin(x)$. Selanjutnya $\alpha,\ \beta$ dan $f(x,t)$ disubstitusikan ke persamaan (3.1) maka menjadi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 8\frac{\partial u}{\partial t} + 4u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \cdot e^{-t} \sin(x) \tag{3.2}$$

dengan kondisi awal

$$u(x,0)=\sin(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=-\sin(x) \tag{3.3}$$

dan kondisi batas

$$u(0,t)=e^{-t}\sin(0),\ u(2\pi,t)=e^{-t}\sin(2\pi) \tag{3.4}$$

Solusi eksak

$$u(x,t)=e^{-t}\sin(x) \tag{3.5}$$

Dalam penelitian ini diasumsikan simpangan tali $u(x,t)$ merupakan fungsi yang didefinisikan untuk semua $t>0$ (Spiegel, 1999:1). Untuk aplikasi Persamaan (3.1) dengan menggunakan sifat-sifat transformasi Laplace teorema 2.1.7 dalam bab II yaitu transformasi Laplace dari turunan-turunan, maka juga didapatkan

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{u_t(x,t)\} &= \int_0^\infty e^{-st}\,u_t(x,t)dt \\
&= \left[e^{-st}\cdot u\right]_0^\infty - \int_0^\infty u\,(-s\cdot e^{-st})dt \\
&= \left[e^{-st}\cdot u\right]_0^\infty + s\int_0^\infty u\ e^{-st}dt \\
&= \left[\left(e^{-s.\infty}\cdot u\right)-\left(e^{-s.0}\cdot u\right)\right]+s\int_0^\infty e^{-st}u\ dt \\
&= \left(0-1\cdot u\right)+s\int_0^\infty e^{-st}u\ dt \\
&= -u+sU \\
&= sU(x,t)-u(x,0) \\
&= sU(x,s)-u(x,0) \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{u_{tt}(x,t)\} &= \int_0^\infty e^{-st}\,u_{tt}(x,t)dt \\
&= \left[e^{-st}\cdot u_t\right]_0^\infty - \int_0^\infty u_t\,(-s\cdot e^{-st})dt
\end{aligned}$$

$$= \left[e^{-st} \cdot u_t\right]_0^\infty + s\int_0^\infty u_t \cdot e^{-st} dt$$

$$= \left[\left(e^{-s.\infty} \cdot u_t\right) - \left(e^{-s.0} \cdot u_t\right)\right] + s\left(\left[e^{-st} \cdot u\right]_0^\infty - \int_0^\infty - s\,e^{-st} \cdot u\; dt\right)$$

$$= \left(0 - 1 \cdot u_t\right) + \left(s\left[e^{-st} \cdot u\right]_0^\infty - s\left(\int_0^\infty - s\;e^{-st} \cdot u\; dt\right)\right)$$

$$= \left[\left(0 - 1 \cdot u_t\right)\right] + \left(\left[\left(s\,e^{-s.\infty} \cdot u\right) - \left(s\,e^{-s.0} \cdot u\right)\right] + s^2\int_0^\infty e^{-st} \cdot u\; dt\right)$$

$$= \left(0 - u_t\right) + \left(0 - s \cdot u\right) + s^2\int_0^\infty e^{-st} \cdot u\; dt$$

$$= -u_t - s\,u + s^2\,U$$

$$= s^2\;U(x,t) - s\,u(x,0) - u_t(x,0)$$

$$= s^2\;U(x,s) - s\,u(x,0) - u_t(x,0) \tag{3.7}$$

$$\mathcal{L}\{2\alpha u_t(x,t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\, 2\alpha\; u_t(x,t) dt$$

$$= 2\alpha\left(\left[e^{-st} \cdot u\right]_0^\infty - \int_0^\infty u\,(-s \cdot e^{-st})dt\right)$$

$$= 2\alpha\left(\left[e^{-st} \cdot u\right]_0^\infty + s\int_0^\infty u\;e^{-st} dt\right)$$

$$= 2\alpha\left(\left[\left(e^{-s.\infty} \cdot u\right) - \left(e^{-s.0} \cdot u\right)\right] + s\int_0^\infty e^{-st} u\; dt\right)$$

$$= 2\alpha\left(\left(0 - 1 \cdot u\right) + s\int_0^\infty e^{-st} u\; dt\right)$$

$$= -2\alpha u + 2\alpha s U$$

$$= 2\alpha s U(x,t) - 2\alpha u(x,0)$$

$$= 2\alpha s U(x,s) - 2\alpha u(x,0) \tag{3.8}$$

$$\mathcal{L}\{\beta^2 u(x,t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\, \beta^2 u(x,t) dt = \beta^2 \int_0^\infty e^{-st}\, u(x,t) dt = \beta^2 U(x,s) \tag{3.9}$$

Diperlukan juga transformasi Laplace dari turunan x, seperti berikut

$$\mathcal{L}\{u_x(x,t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\, u_x(x,t) dt = \frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty e^{-st} u(x,t)\, dt = \frac{d}{dx} U(x,s) \tag{3.10}$$

$$\mathcal{L}\{u_{xx}(x,t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\, u_{xx}(x,t) dt = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^\infty e^{-st} u(x,t)\, dt = \frac{d^2}{dx^2} U(x,s) \tag{3.11}$$

Transformasi Laplace $-2e^{-t}\sin(x)$ adalah

$$\mathcal{L}\{-2e^{-t}\sin(x)\} = -\frac{2\ sin\ (x)}{s+1} \tag{3.12}$$

Transformasi Laplace $(5-4\alpha+\beta^2)\cdot e^{(-2t)}\sin(x)$ adalah

$$\mathcal{L}\{(5-4\alpha+\beta^2)\cdot e^{(-2t)}\sin(x)\} = (5-4\alpha+\beta^2)\cdot\frac{1}{s+2}\sin\,(x) \tag{3.13}$$

Transformasi Laplace $2\alpha\sin(t)\sin(x)$ adalah

$$\mathcal{L}\{2\alpha\sin(t)\sin(x)\} = 2\alpha\cdot\frac{1}{s^2+1}\sin\,(x) = \frac{2\alpha}{s^2+1}\sin\,(x) \tag{3.14}$$

Transformasi Laplace $\beta^2\cos(t)\sin(x)$ adalah

$$\mathcal{L}\{\beta^2\cos(t)\sin(x)\} = \beta^2\cdot\frac{s}{s^2+1}\sin\,(x) = \frac{\beta^2 s}{s^2+1}\sin\,(x) \tag{3.15}$$

3.2 Solusi Persamaan Telegraf dengan Masalah Nilai Awal dan Nilai Batas

3.2.1 Solusi Saat Nilai Awal $u(x,0)=sin(x)$ dan $\frac{\partial u}{\partial t}=-sin(x)$

Dengan mengingat kembali persamaan (3.7), (3.8), (3.9), (3.11), dan (3.12) yang disubstitusikan ke persamaan (3.2), maka

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+8\frac{\partial u}{\partial t}+4u\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\}+\mathcal{L}\{-2e^{-t}\sin(x)\} \tag{3.16a}$$

dan transformasi Laplace dari (3.16a), didapatkan

$$\left(s^2\ U(x,s)-s\,u(x,0)-\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)\right)+\left(8sU(x,s)-8u(x,0)\right)+\left(4U(x,s)\right)=\frac{d^2}{dx^2}U(x,s)-\frac{2\sin(x)}{s+1} \tag{3.16b}$$

dengan mensubstitusikan kondisi awal (3.3) ke dalam persamaan (3.16b) menghasilkan bentuk persamaan sebagai berikut

$$\left(s^2U(x,s)-s.\sin(x)-(-\sin(x))\right)+\left(8sU(x,s)-8.\sin(x)\right)+\left(4U(x,s)\right)=\frac{d^2}{dx^2}U(x,s)-\frac{2\sin(x)}{s+1}$$

$$\left(s^2+8s+4\right)U(x,s)-(s+7)\sin(x)=\frac{d^2}{dx^2}U(x,s)-\frac{2\sin(x)}{s+1}$$

$$\left(s^2+8s+4\right)U(x,s)=\frac{d^2}{dx^2}U(x,s)-\frac{2\sin(x)}{s+1}+(s+7)\sin(x)$$

$$\left(s^2+8s+4\right)U(x,s)=\frac{d^2}{dx^2}U(x,s)-\frac{2\sin(x)}{s+1}+\frac{(s+1)(s+7)\sin(x)}{s+1} \quad (3.17a)$$

Persamaan (3.17a) dapat ditulis ke bentuk sederhana sebagai berikut

$$\left(s^2+8s+4\right)U(x,s)=\frac{d^2}{dx^2}U(x,s)+\frac{\left(s^2+8s+7-2\right)\sin(x)}{s+1} \quad (3.17b)$$

Persamaan (3.17b) ditulis kembali sebagai berikut

$$\left(s^2+8s+4\right)U(x,s)=\frac{d^2}{dx^2}U(x,s)+\frac{\left(s^2+8s+5\right)\sin(x)}{s+1} \quad (3.17c)$$

Sehingga diperoleh

$$\frac{d^2U(x,s)}{dx^2}-\left(s^2+8s+4\right)U(x,s)=-\frac{\left(s^2+8s+5\right)\sin(x)}{s+1} \quad (3.17d)$$

yang merupakan persamaan diferensial biasa non-homogen.

Menurut Purcell dan Valberg (1999:446), solusi umum untuk persamaan diferensial biasa seperti persamaan (3.17d) didefinisikan sebagai berikut

$$U(x,s)=U_h(x,s)+U_p(x,s) \quad (3.18)$$

dimana $U_h(x,s)$ adalah solusi umum dari persamaan homogen dan $U_p(x,s)$ adalah solusi khusus dari persamaan non homogen. Bentuk homogen dari persamaan (3.17d) adalah

$$\frac{d^2U(x,s)}{dx^2}-\left(s^2+8s+4\right)U(x,s)=0 \quad (3.19a)$$

Persamaan (3.19a) dapat ditulis dalam bentuk karakteristik sebagai berikut

$$m^2-\left(s^2+8s+4\right)m=0 \quad (3.19b)$$

dimana $A=1,\ B=0$ dan $C=-\left(s^2+8s+4\right)$.

Selanjutnya dihitung akar-akar m sebagai berikut

$$m_{1,2}=\pm\frac{\sqrt{-4\cdot-\left(s^2+8s+4\right)}}{2} \quad (3.19c)$$

Artinya akar-akar m imajiner, sehingga dapat dinyatakan solusi $U_h(x,s)$ sebagai berikut

$$U_h(x,s) = c_1 \cos\left(\sqrt{-s^2-8s-4}\,x\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{-s^2-8s-4}\,x\right) \tag{3.19d}$$

Sedangkan untuk $U_p(x,s)$, karena pada persamaan (3.17d) $f(x) = -\frac{\left(s^2+8s+5\right)\sin(x)}{s+1}$ dengan menggunakan Tabel 2.2, maka $U_p(x,s)$ dapat ditulis sebagai berikut

$$U_p(x,s) = A\cos(x) + B\sin(x) \tag{3.20}$$

Selanjutnya dihitung koefisien A dan B dengan langkah-langkah sebagai berikut

$$\frac{d}{dx}U_p(x,s) = -A\sin(x) + B\cos(x) \tag{3.21a}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}U_p(x,s) = -A\cos(x) - B\sin(x) \tag{3.21b}$$

Substitusikan persamaan (3.12b) ke persamaan (3.17d), diperoleh

$$-A\cos(x) - B\sin(x) - \left(s^2+8s+4\right)[A\cos(x) + B\sin(x)] = -\frac{\left(s^2+8s+5\right)\sin(x)}{s+1} \tag{3.22}$$

Dari sini dapat disimpulkan bahwa

$$-\left(s^2+8s+4+1\right)A = 0$$

$$A = 0 \tag{3.23}$$

dan

$$-\left(s^2+8s+4+1\right)B = -\frac{\left(s^2+8s+5\right)}{s+1}$$

$$B = -\frac{\left(s^2+8s+5\right)}{(s+1)\cdot\left(s^2+8s+4+1\right)}$$

$$B = -\frac{\left(s^2 + 8s + 5\right)}{(s+1)\cdot\left(s^2 + 8s + 5\right)}$$

$$B = -\frac{1}{(s+1)} \qquad (3.24)$$

Substitusikan hasil dari (3.24) ke dalam (3.20), sehingga diperoleh

$$U_p(x,s) = 0\cdot\cos(x) + \frac{1}{(s+1)}\sin(x)$$

$$U_p(x,s) = \frac{1}{(s+1)}\sin(x) \qquad (3.25)$$

Substitusikan hasil dari (3.25) ke dalam (3.18), maka didapatkan solusi umum sebagai berikut

$$U(x,s) = c_1 \cos\left(\sqrt{-s^2 - 8s - 4}\; x\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{-s^2 - 8s - 4}\; x\right) + \frac{1}{(s+1)}\sin(x) \qquad (3.26)$$

Dalam hal ini, transformasi Laplace dari kondisi batasnya adalah

$$U(0,s) = \frac{1}{s+1}\sin(0) \text{ dan } U(2\pi,s) = \frac{1}{s+1}\sin(2\pi) \qquad (3.27)$$

Sehingga didapatkan

$$U(0,s) = c_1 + c_2 = \frac{1}{s+1}\sin(0) \qquad (3.28)$$

dan

$$U(2\pi,s) = c_1 \cos\left(\sqrt{-s^2 - 8s - 4}\cdot 2\pi\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{-s^2 - 8s - 4}\cdot 2\pi\right) = \frac{1}{s+1}\sin(2\pi) \qquad (3.29)$$

dengan mensubstitusikan $c_1 = \frac{1}{s+1}\sin(0),\, c_2 = \frac{1}{s+1}\sin(2\pi)$ ke persamaan (3.26) maka didapatkan

$$U(x,s) = \frac{1}{s+1}\sin(0)\cdot\cos\left(\sqrt{-s^2 - 8s - 4}\right) + \frac{1}{s+1}\sin(2\pi)\cdot\sin\left(\sqrt{-s^2 - 8s - 4}\; x\right) + \frac{1}{(s+1)}\sin(x)$$

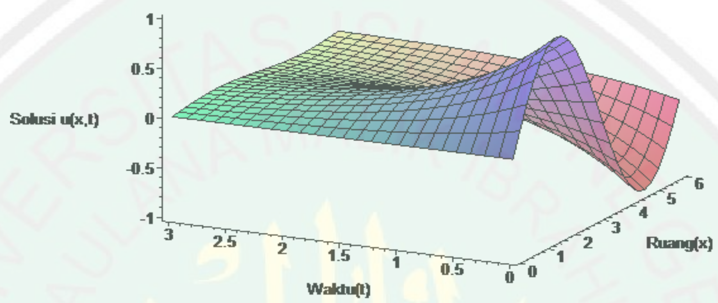
$$U(x,s) = \frac{1}{(s+1)}\sin(x) \qquad (3.30)$$

Terakhir, menerapkan invers Transformasi Laplace (3.30), dan didapatkan

$$u(x,t) = \mathcal{L}^{-1}\big(U(x,s)\big) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)}\sin(x)\right)$$

$$= e^{-t}\sin(x) \qquad (3.31)$$

Sehingga gambar grafik solusi analitik dari transformasi Laplace (3.31) adalah sebagai berikut



Gambar 3.1 Solusi Analitik Transformasi Laplace Pada Persamaan Telegraf

Grafik di atas dapat dilihat bahwa ketika nilai awal $u(x,0) = \sin(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = -\sin(x)$ dan nilai batasnya $u(0,t) = e^{-t}\sin(0)$, $u(2\pi,t) = e^{-t}\sin(2\pi)$, maka grafik yang ditunjukkan pada Gambar 3.1 ada getaran pada simpangan tali sepanjang x dalam selang waktu t tersebut.

Analisis keabsahan solusi persamaan telegraf (3.31) dengan menggunakan invers transformasi Laplace sebagai berikut

Jika $t = 0$ maka

$$u(x,0) = e^{-t}\sin(x) = e^{-0}\sin(x) = \sin(x) \qquad (3.32)$$

dan

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = -e^{-t}\sin(x) = -e^{-0}\sin(x) = -\sin(x) \qquad (3.33)$$

Selanjutnya keabsahan solusi persamaan telegraf saat $t \neq 0$, dilakukan penurunan-penurunan pada solusi dari transformasi Laplace tersebut. Turunan-turunan dari $u(x,t)$ terhadap t adalah sebagai berikut

$$u(x,t) = e^{-t}\sin(x) \tag{3.34}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = -e^{-t}\sin(x) \tag{3.35}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = e^{-t}\sin(x) \tag{3.36}$$

Turunan-turunan dari $u(x,t)$ terhadap x adalah sebagai berikut

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = e^{-t}\cos(x) \tag{3.37}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = -e^{-t}\sin(x) \tag{3.38}$$

Substitusi hasil (3.34), (3.35), (3.36), dan (3.38) ke dalam persamaan (3.2), maka didapatkan

$$e^{-t}\sin(x) + 8\cdot\left(-e^{-t}\sin(x)\right) + 4\left(e^{-t}\sin(x)\right) = -e^{-t}\sin(x) - 2e^{-t}\sin(x)$$

$$e^{-t}\sin(x) - 8e^{-t}\sin(x) + 4e^{-t}\sin(x) = -e^{-t}\sin(x) - 2e^{-t}\sin(x) \tag{3.39a}$$

Sehingga diperoleh

$$e^{-t}\sin(x) - 8e^{-t}\sin(x) + 4e^{-t}\sin(x) + e^{-t}\sin(x) + 2e^{-t}\sin(x) = 0 \tag{3.39b}$$

Jadi, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 8\frac{\partial u}{\partial t} + 4u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2e^{-t}\sin(x)$ persamaan telegraf.

Dengan diberikan nilai awal dan nilai batas ke solusi transformasi Laplace pada persamaan telegraf maka dapat dikatakan bahwa solusi tersebut sahih.

3.2.2 Solusi Saat Nilai Awal $u(x,0) = sin(x)$ dan $\frac{\partial u}{\partial t} = -2sin(x)$

Simulasi pertama pada persamaan telegraf orde dua linear hiperbolik. Diberikan tali dengan panjang L yang terikat pada ujungnya yaitu $x = 0$ dan

$x = L$. Tegangan tali adalah T, jika tali mendapat simpangan dan kemudian dilepaskan, maka tali akan bergetar. Simpangan u dari setiap titik tergantung baik dari x maupun t. Untuk daerah $0 \le x \le L$ dengan $L = 1$ dan $t > 0$. Persamaan telegraf yang kedua dengan memilih $f(x,t) = \left(5 - 4\alpha + \beta^2\right) \cdot e^{(-2t)} \sin(x)$. Selanjutnya, nilai $f(x,t)$ disubstitusikan ke persamaan (3.1) maka menjadi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial t} + \beta^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(5 - 4\alpha + \beta^2\right) \cdot e^{(-2t)} \sin(x) \tag{3.40}$$

dengan kondisi awal

$$u(x,0) = \sin(x), \ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = -2\sin(x) \tag{3.41}$$

dan kondisi batas

$$u(0,t) = 0, \ u(1,t) = e^{(-2t)} \sin(1) \tag{3.42}$$

Solusi eksak

$$u(x,t) = e^{(-2t)} \sin(x) \tag{3.43}$$

Dengan mengingat kembali persamaan (3.7), (3.8), (3.9), (3.11), dan (3.13) yang disubstitusikan ke persamaan (3.40), maka

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial t} + \beta^2 u\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\} + \mathcal{L}\left\{(5 - 4\alpha + \beta^2) \cdot e^{(-2t)} \sin(x)\right\} \tag{3.44a}$$

dan transformasi Laplace dari (3.44a), didapatkan

$$\left(s^2\ U(x,s) - s\,u(x,0) - \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)\right) + \left(2\alpha s U(x,s) - 2\alpha u(x,0)\right) + \left(\beta^2 U(x,s)\right) = \frac{d^2}{dx^2} U(x,s) + \frac{\left(5 - 4\alpha + \beta^2\right)}{s+2} \sin(x) \tag{3.44b}$$

dengan mensubstitusikan kondisi awal (3.41) ke dalam persamaan (3.44b) menghasilkan bentuk persamaan sebagai berikut

$$\left(s^2\ U(x,s) - s\,.\sin(x) - \left(-2\sin(x)\right)\right) + \left(2\alpha s U(x,s) - 2\alpha\,.\sin(x)\right) + \left(\beta^2 U(x,s)\right) = \frac{d^2}{dx^2} U(x,s) + \frac{\left(5 - 4\alpha + \beta^2\right)}{s+2} \sin(x) \tag{3.44c}$$

Persamaan (3.44c) dapat ditulis ke bentuk sederhana sebagai berikut

$$\left(s^2+2\alpha s+\beta^2\right)U(x,s)=\frac{d^2}{dx^2}U(x,s)+\frac{\left(5-4\alpha+\beta^2\right)}{s+2}\sin(x)+(s+2\alpha-2)\sin(x) \quad (3.44d)$$

Persamaan (3.44d) ditulis kembali sebagai berikut

$$\left(s^2+2\alpha s+\beta^2\right)U(x,s)=\frac{d^2}{dx^2}U(x,s)+\frac{\left(5-4\alpha+\beta^2+s^2+2\alpha s-2s+2s+4\alpha-4\right)}{s+2}\sin(x) \quad (3.44e)$$

Sehingga diperoleh

$$\frac{d^2U(x,s)}{dx^2}-\left(s^2+2\alpha s+\beta^2\right)U(x,s)=-\frac{\left(s^2+2\alpha s+\beta^2+1\right)}{s+2}\sin(x) \quad (3.44f)$$

yang merupakan persamaan diferensial biasa non-homogen.

Langkah kedua, menyelesaikan persamaan diferensial biasa (3.44f) dengan mengikuti langkah-langkah dari (3.18), (3.19a), (3.19b), (3.19c), (3.19d), (3.20), (3.21a) dan (3.21b) yang ada di subbab 3.2.1, maka diperoleh

$$-A\cos(x)-B\sin(x)-\left(s^2+2\alpha s+\beta^2\right)[A\cos(x)+B\sin(x)]=-\frac{\left(s^2+2\alpha s+\beta^2+1\right)}{s+2}\sin(x) \quad (3.45)$$

Dari sini dapat disimpulkan bahwa

$$\begin{aligned}-\left(s^2+2\alpha s+\beta^2+1\right)A&=0\\ A&=0\end{aligned} \quad (3.46)$$

dan

$$\begin{aligned}-\left(s^2+2\alpha s+\beta^2+1\right)B&=-\frac{\left(s^2+2\alpha s+\beta^2+1\right)}{s+2}\\ B&=\frac{\left(s^2+2\alpha s+\beta^2+1\right)}{(s+2)\left(s^2+2\alpha s+\beta^2+1\right)}\\ B&=\frac{1}{s+2}\end{aligned} \quad (3.47)$$

Substitusikan hasil dari (3.47) ke dalam (3.20), sehingga diperoleh

$$U_p(x,s)=\frac{1}{s+2}\sin(x) \quad (3.48)$$

Substitusikan hasil dari (3.48) ke dalam (3.18), maka didapatkan solusi umum sebagai berikut

$$U(x,s) = c_1 \cos\left(\sqrt{-s^2 - 2\alpha s - \beta^2}\ x\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{-s^2 - 2\alpha s - \beta^2}\ x\right) + \frac{1}{s+2}\sin(x) \qquad (3.49)$$

Dalam hal ini, transformasi Laplace dari kondisi batasnya adalah

$$U(0,s) = 0 \ \text{ dan } \ U(1,s) = \frac{\sin(1)}{s+2} = 0 \qquad (3.50)$$

Sehingga didapatkan

$$U(0,s) = c_1 + c_2 = 0 \qquad (3.51)$$

dan

$$U(1,s) = c_1 \cos\left(\sqrt{-s^2 - 2\alpha s - \beta^2}\ 1\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{-s^2 - 2\alpha s - \beta^2}\ 1\right) = 0 \qquad (3.52)$$

dengan mensubstitusikan $c_1 = 0, c_2 = 0$ ke persamaan (3.49) maka didapatkan

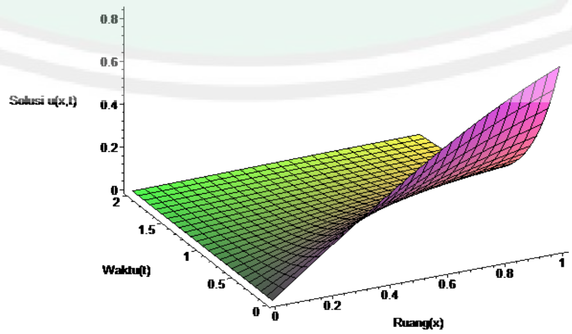
$$U(x,s) = \frac{1}{s+2}\sin(x) \qquad (3.53)$$

Terakhir, menerapkan invers Transformasi Laplace (3.53), dan didapatkan

$$u(x,t) = \mathcal{L}^{-1}\big(U(x,s)\big) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+2}\right)\sin(x)$$

$$= \mathrm{e}^{(-2\mathrm{t})}\sin(x) \qquad (3.54)$$

Sehingga gambar grafik solusi analitik dari transformasi Laplace (3.54) adalah sebagai berikut



Gambar 3.2 Solusi Analitik Transformasi Laplace Pada Persamaan Telegraf Simulasi Pertama

Grafik di atas dapat dilihat bahwa ketika nilai awal $u(x,0) = \sin(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = -2\sin(x)$ dan nilai batasnya $u(0,t) = 0$, $u(1,t) = e^{(-2t)}\sin(1)$, maka grafik yang ditunjukkan pada Gambar 3.2 ada getaran pada simpangan tali sepanjang x dalam selang waktu t tersebut.

Analisis keabsahan solusi persamaan telegraf (3.54) dengan menggunakan invers transformasi Laplace sebagai berikut

Jika $t = 0$ maka

$$u(x,0) = e^{(-2t)}\sin(x) = e^{(-2\cdot 0)}\sin(x) = \sin(x) \tag{3.55}$$

dan

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = -2e^{(-2t)}\sin(x) = -2e^{(-2\cdot 0)}\sin(x) = -2\sin(x) \tag{3.56}$$

Selanjutnya keabsahan solusi persamaan telegraf saat $t \neq 0$, dilakukan penurunan-penurunan pada solusi dari transformasi Laplace tersebut. Turunan-turunan dari $u(x,t)$ terhadap t adalah sebagai berikut

$$u(x,t) = e^{(-2t)}\sin(x) \tag{3.57}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = -2\cdot e^{(-2t)}\sin(x) \tag{3.58}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = 4\cdot e^{(-2t)}\sin(x) \tag{3.59}$$

Turunan-turunan dari $u(x,t)$ terhadap x adalah sebagai berikut

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = e^{(-2t)}\cos(x) \tag{3.60}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = -e^{(-2t)}\sin(x) \tag{3.61}$$

Substitusi hasil (3.57), (3.58), (3.59), dan (3.61) ke dalam persamaan (3.40), maka didapatkan

$$4\cdot e^{(-2t)}\sin(x)+2\alpha\left(-2\cdot e^{(-2t)}\sin(x)\right)+\beta^2\left(e^{(-2t)}\sin(x)\right)=-e^{(-2t)}\sin(x)+$$
$$\left(5-4\alpha+\beta^2\right)\cdot e^{(-2t)}\sin(x) \quad (3.62a)$$

Persamaan (3.62a) dapat ditulis kembali dalam bentuk sederhana sebagai berikut

$$4\cdot e^{(-2t)}\sin(x)-4\alpha\cdot e^{(-2t)}\sin(x)+\beta^2\cdot e^{(-2t)}\sin(x)=4\cdot e^{(-2t)}\sin(x)-$$
$$4\alpha\cdot e^{(-2t)}\sin(x)+\beta^2\cdot e^{(-2t)}\sin(x) \quad (3.62b)$$

Sehingga diperoleh

$$4\cdot e^{(-2t)}\sin(x)-4\alpha\cdot e^{(-2t)}\sin(x)+\beta^2\cdot e^{(-2t)}\sin(x)-4\cdot e^{(-2t)}\sin(x)+$$
$$4\alpha\cdot e^{(-2t)}\sin(x)-\beta^2\cdot e^{(-2t)}\sin(x)=0 \quad (3.62c)$$

Jadi, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2\alpha\frac{\partial u}{\partial t}+\beta^2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left(5-4\alpha+\beta^2\right)\cdot e^{(-2t)}\sin(x)$ persamaan telegraf.

Dengan diberikan nilai awal dan nilai batas ke solusi transformasi Laplace pada persamaan telegraf maka dapat dikatakan bahwa solusi tersebut sahih.

3.2.3 Solusi Saat Nilai Awal $u(x,0)=sin(x)$ dan $\frac{\partial u}{\partial t}=0$

Simulasi kedua pada persamaan telegraf orde dua linear hiperbolik. Persamaan yang ketiga ini dengan memilih $f(x,t)=-2\alpha\sin(t)\sin(x)+\beta^2\cos(t)\sin(x)$ yang dirujuk dari Javidi dan Nyamoradi (2013). Selanjutnya, nilai $f(x,t)$ disubstitusikan ke persamaan (3.1), maka menjadi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2\alpha\frac{\partial u}{\partial t}+\beta^2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\alpha\sin(t)\sin(x)+\beta^2\cos(t)\sin(x) \quad (3.63)$$

dengan kondisi awal

$$u(x,0)=\sin(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0 \quad (3.64)$$

dan kondisi batas

$$u(0,t)=0,\ u(1,t)=\cos(t)\sin(1) \tag{3.65}$$

Solusi eksak

$$u(x,t)=\cos(t)\sin(x) \tag{3.66}$$

(Javidi dan Nyamoradi, 2013)

Dengan mengingat kembali persamaan (3.7), (3.8), (3.9), (3.11), (3.14), dan (3.15) yang disubstitusikan ke persamaan (3.63), maka

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2\alpha\frac{\partial u}{\partial t}+\beta^2 u\right\}=\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\}-\mathcal{L}\{2\alpha\sin(t)\sin(x)\}+\mathcal{L}\{\beta^2\cos(t)\sin(x)\} \tag{3.67a}$$

dan transformasi Laplace dari (3.67a), didapatkan

$$\left(s^2\ U(x,s)-s\,u(x,0)-\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)\right)+\left(2\alpha sU(x,s)-2\alpha u(x,0)\right)+\left(\beta^2 U(x,s)\right)=\frac{d^2}{dx^2}U(x,s)-\frac{2\alpha}{s^2+1}\sin(x)+\frac{\beta^2 s}{s^2+1}\sin(x) \tag{3.67b}$$

mensubstitusikan kondisi awal (3.64) ke dalam persamaan (3.67b) maka menjadi

$$\left(s^2\ U(x,s)-s\cdot\sin(x)-0\right)+\left(2\alpha sU(x,s)-2\alpha\cdot\sin(x)\right)+\left(\beta^2 U(x,s)\right)=\frac{d^2}{dx^2}U(x,s)+\frac{\left(-2\alpha+\beta^2 s\right)}{s^2+1}\sin(x) \tag{3.68a}$$

Persamaan (3.68a) dapat ditulis ke bentuk sederhana sebagai berikut

$$\left(s^2+2\alpha\,s+\beta^2\right)U(x,s)=\frac{d^2}{dx^2}U(x,s)+\frac{\left(-2\alpha+\beta^2 s\right)}{s^2+1}\sin(x)+(s+2\alpha)\sin(x) \tag{3.68b}$$

Persamaan (3.68b) ditulis kembali sebagai berikut

$$\left(s^2+2\alpha\,s+\beta^2\right)U(x,s)=\frac{d^2}{dx^2}U(x,s)+\frac{\left(-2\alpha+\beta^2 s+s^3+2\alpha s^2+s+2\alpha\right)}{s^2+1}\sin(x) \tag{3.68c}$$

Sehingga diperoleh

$$\frac{d^2U(x,s)}{dx^2}-\left(s^2+2\alpha\,s+\beta^2\right)U(x,s)=-\frac{\left(s^3+2\alpha s^2+\beta^2 s+s\right)}{s^2+1}\sin(x) \tag{3.68d}$$

yang merupakan persamaan diferensial biasa non-homogen.

Langkah kedua, menyelesaikan persamaan diferensial biasa (3.68d) dengan mengikuti langkah-langkah dari (3.18), (3.19a), (3.19b), (3.19c), (3.19d), (3.20), (3.21a) dan (3.21b) yang ada di subbab 3.2.1, maka diperoleh

$$-A\cos(x)-B\sin(x)-\left(s^2+2\alpha s+\beta^2\right)[A\cos(x)+B\sin(x)]=-\frac{\left(s^3+2\alpha s^2+\beta^2 s+s\right)}{s^2+1}\sin(x) \quad (3.69)$$

Dari sini dapat disimpulkan

$$-\left(s^2+2\alpha s+\beta^2+1\right)A=0$$
$$A=0 \quad (3.70)$$

dan

$$-\left(s^2+2\alpha s+\beta^2+1\right)B=-\frac{\left(s^3+2\alpha s^2+\beta^2 s+s\right)}{s^2+1}$$
$$B=\frac{s\left(s^2+2\alpha s+\beta^2+1\right)}{\left(s^2+1\right)\left(s^2+2\alpha s+\beta^2+1\right)}$$
$$B=\frac{s}{s^2+1} \quad (3.71)$$

Substitusikan hasil dari (3.71) ke dalam (3.20), sehingga diperoleh

$$U_p(x,s)=\frac{s}{s^2+1}\sin(x) \quad (3.72)$$

Substitusikan hasil dari (3.72) ke dalam (3.18), maka didapatkan solusi umum sebagai berikut

$$U(x,s)=c_1\cos\left(\sqrt{-s^2-2\alpha s-\beta^2}\,x\right)+c_2\sin\left(\sqrt{-s^2-2\alpha s-\beta^2}\,x\right)+\frac{s}{s^2+1}\sin(x) \quad (3.73)$$

Transformasi Laplace dari kondisi batasnya adalah

$$U(0,s)=0 \text{ dan } U(1,s)=\frac{s\cdot\sin(1)}{s^2+1}=0 \quad (3.74)$$

Sehingga didapatkan

$$U(0,s)=c_1+c_2=0 \quad (3.75)$$

dan

$$U(1,s) = c_1 e c_1 \cos\left(\sqrt{-s^2 - 2\alpha s - \beta^2}\ 1\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{-s^2 - 2\alpha s - \beta^2}\ 1\right) = 0 \tag{3.76}$$

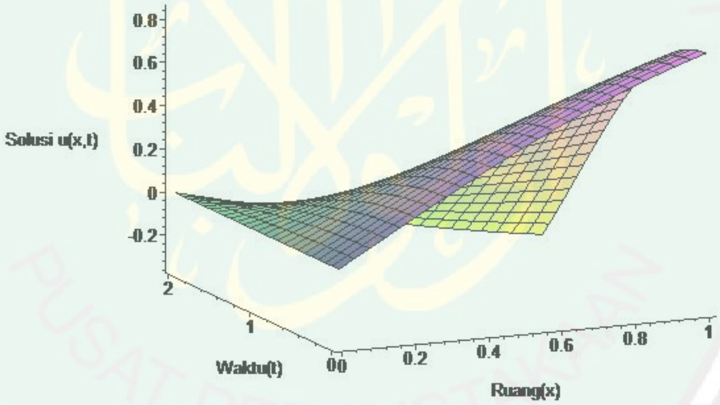
dengan memberikan $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ ke persamaan (3.73) maka didapatkan

$$U(x,s) = \frac{s}{s^2+1}\sin(x) \qquad 3.77)$$

Langkah ketiga, melakukan invers transformasi Laplace dari (3.77) maka didapatkan

$$u(x,t) = \mathcal{L}^{-1}\big(U(x,s)\big) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right)\sin(x)$$
$$= \cos(t)\sin(x) \tag{3.78}$$

Sehingga gambar grafik solusi analitik dari transformasi Laplace (3.78) adalah sebagai berikut



Gambar 3.3 Solusi Analitik Transformasi Laplace pada Persamaan Telegraf Simulasi kedua

Grafik di atas dapat dilihat bahwa ketika nilai awal $u(x,0) = \sin(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$ dan nilai batasnya $u(0,t) = 0$, $u(1,t) = \cos(t)\sin(1)$, maka grafik yang ditunjukkan pada Gambar 3.3 ada getaran pada simpangan tali disepanjang x dalam selang waktu t tersebut.

Analisis keabsahan solusi persamaan telegraf (3.78) dengan menggunakan invers transformasi Laplace sebagai berikut

Jika $t = 0$ maka

$$u(x,0) = \cos(t)\sin(x) = \cos(0)\sin(x) = \sin(x) \tag{3.79}$$

dan

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = -\sin(t)\sin(x) = -\sin(0)\sin(x) = 0 \tag{3.80}$$

Selanjutnya keabsahan solusi persamaan telegraf saat $t \neq 0$, dilakukan penurunan-penurunan pada solusi dari transformasi Laplace tersebut. Turunan-turunan dari $u(x,t)$ terhadap t adalah sebagai berikut

$$u(x,t) = \cos(t)\sin(x) \tag{3.81}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = -\sin(t)\sin(x) \tag{3.82}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = -\cos(t)\sin(x) \tag{3.83}$$

Turunan-turunan dari $u(x,t)$ terhadap x adalah sebagai berikut

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = \cos(t)\cos(x) \tag{3.84}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = -\cos(t)\sin(x) \tag{3.85}$$

Substitusi hasil (3.81), (3.82), (3.83), dan (3.85) ke dalam persamaan (3.63), maka didapatkan

$$-\cos(t)\sin(x) + 2\alpha \cdot \left(-\sin(t)\sin(x)\right) + \beta^2 \cdot \left(\cos(t)\sin(x)\right) = \left(-\cos(t)\sin(x)\right) - 2\alpha\sin(t)\sin(x) + \beta^2\cos(t)\sin(x) \tag{3.86a}$$

Persamaan (3.86a) dapat ditulis kembali dalam bentuk sederhana sebagai berikut

$$-\cos(t)\sin(x) - 2\alpha\sin(t)\sin(x) + \cdot\beta^2\cos(t)\sin(x) = \left(-\cos(t)\sin(x)\right) - 2\alpha\sin(t)\sin(x) + \beta^2\cos(t)\sin(x) \tag{3.86b}$$

Sehingga diperoleh

$$-\cos(t)\sin(x) - 2\alpha\sin(t)\sin(x) + \cdot\beta^2\cos(t)\sin(x) + \cos(t)\sin(x) + 2\alpha\sin(t)\sin(x) - \beta^2\cos(t)\sin(x) = 0 \tag{3.86c}$$

Jadi, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial t} + \beta^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\alpha \sin(t)\sin(x) + \beta^2 \cos(t)\sin(x)$ persamaan telegraf.

Dengan diberikan nilai awal dan nilai batas ke solusi transformasi Laplace pada persamaan telegraf maka dapat dikatakan bahwa solusi tersebut sahih.

3.3 Kesempurnaan Ciptaan Allah dalam Al-Quran dengan Metode Transformasi Laplace

Telah dijelaskan dalam bab I menurut Zuhair (2007:2) transformasi Laplace adalah sebuah metode yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial yang berkaitan dengan masalah nilai awal dan nilai batas.

Sedangkan makna transformasi Laplace dalam kehidupan sehari-hari disamakan dengan makna perubahan. Perubahan adalah suatu keadaan dengan kondisi awal dan batas atau akhir yang berbeda. Contoh untuk masalah ini dapat dilihat pada peran Nabi Muhammad dalam menyebarkan agama Islam. Beliau telah mengabdikan seluruh hidupnya untuk menyelamatkan manusia dari zaman jahiliyah (kegelapan) menuju jalan yang terang benderang yakni agama Islam. Sebagaimana firman Allah Swt. di dalam surat Ibrahim ayat 1 yang menjelaskan tentang diturunkannya al-Quran melalui Nabi Muhammad untuk umat manusia, yang berbunyi

الٓرۚ كِتَٰبٌ أَنزَلۡنَٰهُ إِلَيۡكَ لِتُخۡرِجَ ٱلنَّاسَ مِنَ ٱلظُّلُمَٰتِ إِلَى ٱلنُّورِ بِإِذۡنِ رَبِّهِمۡ إِلَىٰ صِرَٰطِ ٱلۡعَزِيزِ ٱلۡحَمِيدِ
(١)

"Alif, laam raa. (ini adalah) kitab yang Kami turunkan kepadamu supaya kamu mengeluarkan manusia dari gelap gulita kepada cahaya terang benderang dengan izin Tuhan mereka, (yaitu) menuju jalan Tuhan yang Maha Perkasa lagi Maha Terpuji" (QS. Ibrahim/14:1).

Ayat di atas merupakan salah satu tujuan Allah menurunkan al-Quran. Al-Quran adalah Kitab yang Allah turunkan kepada Nabi Muhammad, supaya Nabi

Muhammad dapat mengeluarkan manusia dari kegelapan (kebodohan, kekafiran, akhlak yang buruk serta berbagai kemaksiatan) menuju cahaya (keimanan, akhlak yang mulia serta berbagai ketaatan) yaitu agama Islam.

Keadaan orang-orang Arab sebelum datangnya Islam sangat mengkhawatirkan. Sebab, pada zaman jahiliyah rata-rata orang Arab mempunyai sifat ketidakadilan, kejahatan, dan menyembah berhala. Kaum wanita hanya dipandang sebelah mata oleh masyarakat Arab, mereka hanya menganggap kaum wanita itu sebagai binatang peliharaan. Bahkan, sudah menjadi tradisi bagi suatu kaum untuk mengubur hidup-hidup bayi perempuan mereka, masyarakat Arab berpandangan seperti itu karena mereka merasa malu dan takut apabila anak perempuannya nanti akan membawa kemiskinan dan kesengsaraan. Di samping sifat-sifat buruk itu, mereka juga mempunyai sifat-sifat yang baik, masyarakat Arab adalah masyarakat yang pemberani, mempunyai kesadaran akan harga diri dan martabat, mahir bersyair, setia terhadap sukunya dan sebagainya. Tetapi, apalah arti sifat-sifat positif ini jika mereka memiliki akhlak yang rendah dan berlaku tidak adil terhadap sesama manusia. Maka di sinilah Allah mengutus Nabi Muhammad untuk meluruskan akhlak dan perbuatan masyarakat Arab.

Hal ini, sebagaimana firman Allah Swt. di dalam surat ar-Ra'd ayat 11 yang berbunyi

لَهُۥ مُعَقِّبَٰتٌ مِّنۢ بَيۡنِ يَدَيۡهِ وَمِنۡ خَلۡفِهِۦ يَحۡفَظُونَهُۥ مِنۡ أَمۡرِ ٱللَّهِۗ إِنَّ ٱللَّهَ لَا يُغَيِّرُ مَا بِقَوۡمٍ حَتَّىٰ
يُغَيِّرُواْ مَا بِأَنفُسِهِمۡۗ وَإِذَآ أَرَادَ ٱللَّهُ بِقَوۡمٍ سُوٓءًا فَلَا مَرَدَّ لَهُۥۚ وَمَا لَهُم مِّن دُونِهِۦ مِن وَالٍ ﴿١١﴾

"Bagi manusia ada malaikat-malaikat yang selalu mengikutinya bergiliran, di muka dan di belakangnya, mereka menjaganya atas perintah Allah. Sesungguhnya Allah tidak merobah keadaan sesuatu kaum sehingga mereka merobah keadaan yang ada pada diri mereka sendiri. dan apabila Allah menghendaki keburukan terhadap sesuatu kaum, Maka tak ada yang dapat

menolaknya; dan sekali-kali tak ada pelindung bagi mereka selain Dia" (QS. ar-Ra'd/13:11).

Maksudnya surat ar-Ra'd ayat 11 ini adalah bagi tiap-tiap manusia ada beberapa malaikat yang tetap menjaganya secara bergiliran dan ada pula beberapa malaikat yang mencatat amalan-amalannya, dan yang dikehendaki dalam ayat Ini ialah malaikat yang menjaga secara bergiliran itu, disebut malaikat Hafazhah (pelindung). Tuhan tidak akan merubah keadaan mereka, selama mereka tidak merubah sebab-sebab kemunduran mereka.

Maka datanglah Nabi Muhammad membawa wahyu dari Allah untuk menyelamatkan mereka dari zaman jahiliyah menuju jalan kebenaran. Beliau tidak pernah lelah dan menyerah menghadapi hinaan, caci maki serta perlawanan dari musuh-musuh Islam. Setelah berhasil melewati berbagai rintangan, akhirnya Nabi Muhammad saw berhasil menyebarkan ajaran agama Islam yang penuh kedamaian itu sampai sekarang.

Perubahan masyarakat Arab dari zaman jahiliyah menuju jalan kebenaran yakni agama Islam inilah yang merupakan salah satu dari contoh transformasi Laplace dalam kehidupan, dari suatu kondisi yang buruk berubah menjadi kondisi yang lebih baik. Digambarkan bahwa setiap masalah dalam kehidupan itu pasti ada pemecahannya. Sebagaimana firman Allah Swt. di dalam Surat al-Insyirah/94:6, yang berbunyi

إِنَّ مَعَ ٱلۡعُسۡرِ يُسۡرًا ﴿٦﴾

"Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan" (QS. al-Insyirah/94:6).

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada bab III, maka disimpulkan bahwa transformasi Laplace dapat digunakan untuk mempermudah persamaan telegraf. Salah satu bentuk dari persamaan telegraf orde dua linear hiperbolik satu dimensi adalah

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 8\frac{\partial u}{\partial t} + 4u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2e^{-t}\sin(x) \tag{4.1}$$

Dengan menggunakan sifat-sifat transformasi Laplace teorema 1-5 dalam bab 2 yaitu transformasi Laplace dari turunan-turunan pada persamaan telegraf, diperoleh

$$\left(s^2\ U(x,s) - s\,u(x,0) - \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)\right) + \left(8sU(x,s) - 8u(x,0)\right) + \left(4U(x,s)\right) = U_{xx}(x,s) + \frac{2\sin(x)}{s+1} \tag{4.2}$$

Solusi persamaan diferensial biasa dari masalah nilai awal dan nilai batas pada persamaan telegraf orde dua linear hiperbolik yaitu

$$U(x,s) = \frac{1}{s+1}\sin(x) \tag{4.3}$$

Sehingga penyelesaian dari invers transformasi Laplace pada persamaan telegraf orde dua linear hiperbolik adalah

$$u(x,t) = e^{-t}\sin(x) \tag{4.4}$$

4.2 Saran

Penulisan penelitian ini, hanya membahas penyelesaian masalah nilai awal dan nilai batas untuk persamaan diferensial parsial linear, khususnya persamaan telegraf orde dua linear hiperbolik satu dimensi dengan menggunakan transformasi Laplace. Bagi penelitian selanjutnya disarankan untuk membahas penyelesaian masalah nilai awal dan nilai batas untuk persamaan diferensial parsial non linear dengan menggunakan transformasi Laplace.

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press.

Ad-Dimasyqi, Al-Imam Abul Fida Isma'il Ibnu Katsir. 2000. *Tafsir Ibnu Katsir Juz 5 an-Nisa' 24 1 s.d. an-Nisa' 147 (Penerjemah, Bahrun Abu Bakar) Cetakan Pertama*. Bandung: Sinar Baru Algensindo.

Dita, M.F. & Widodo, B.. 2013. Karakteristik Aliran Panas dalam Logam Penghantar Listrik. *Jurnal Teknik Pomits*, 1 (1): 1-5.

Effendy, N. & Sugiyono, V.. 2013. *Matematika Teknik I.* Yogyakarta: CAPS (Center for Academic Publishing Service).

Imran, N. & Mohyud Din, S. T.. 2013. Decomposition Method for Fractional Partial Differential Equation (PDEs) Using Laplace Transformation. *International Journal of Physical Sciences*, 8 (16): 684-688.

Javidi, M. & Nyamoradi, N.. 2013. Numerical Solution of Telegraph Equation By Using LT Inversion Technique. *International Journal of Advanced Mathematical Sciences*, 1 (2): 64-77.

Kreyszig, E.. 2006. *Advanced Engineering Mathematics 9th ed.*. Singapore: John Wiley & Sons, Inc.

Marwan, A.Y.. 2013. *Tafsir Al-qur'an Hidayatul Insan Jilid 3*, (httpwanssihabuddin.files.wordpress.com201304hidayatul-insan-jilid1.pdf, diakses 19 November 2014)

Marwan, A.Y.. 2013. *Tafsir Al-qur'an Hidayatul Insan Jilid 4*, (httpwanssihabuddin.files.wordpress.com201304hidayatul-insan-jilid1.pdf, diakses 19 November 2014)

Mursita, D.. 2009. *Matematika Dasar untuk Perguruan Tinggi.* Bandung: Rekayasa Sains.

Pipes, L.A.. 1991. *Matematika Terapan: untuk Para Insinyur dan Fisikawan*. Yogyakarta: Gajah Mada University Press.

Purcell, E.J. & Valberg, D.. 1999. *Kalkulus dan Geometri Analitis Jilid 2, Edisi Kelima*. Jakarta: Erlangga.

Schiff, J.L.. 1999. *The Laplace Transform: Theory and Applications*. New York: Springer-Verlag.

Spiegel, M.R.. 1999. *Transformasi laplace*. Jakarta: Erlangga.

Tang, K.T.. 2005. *Mathematical Methods for Engineers and Scientists 2: Vector Analysis, Ordinary Differential Equations and Laplace Transforms*. Tacoma: Springer Science & Business Media.

Tazi, I.. 2008. *Matematika untuk Sains & Teknik Disertai Pembahasan Program Matlab 6.5*. Malang: UIN-Malang Press.

Triatmodjo, B.. 2002. *Metode Numerik*. Yogyakarta: Beta Offset.

Zauderer, E.. 2006. *Partial Differential Equations of Applied Mathematics, Third Edition*. New York: John Wiley & Sons, Inc.

Zuhair. 2007. *Matematika IV Modul 9 Transformasi Laplace*. Jakarta: Universitas Mercu Buana.

LAMPIRAN-LAMPIRAN

LAMPIRAN 1

Tabel 1. Sifat-Sifat Umum Transformasi Laplace (Sumber: Spiegel, 1999)

No.	Fungsi $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{f(t)\}$	Transformasi Laplace $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
1.	1	$\frac{1}{s}, s > 0$
2.	t	$\frac{1}{s^2}, s > 0$
3.	t^2	$\frac{2!}{s^3}, s > 0$
4.	t^n, $n = bilangan\ asli$	$\frac{n!}{s^{n+1}}, s > 0$
5.	e^{at}	$\frac{1}{s-a}, s > a$
6.	$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}, s > 0$
7.	$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}, s > 0$
8.	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}, s > \lvert a\rvert$
9.	$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}, s > \lvert a\rvert$
10.	$e^{at}\cos bt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}, s > a$
11.	$e^{at}\sin bt$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}, s > a$

LAMPIRAN 2

PROGRAM MAPLE 1

```
> restart:with(linalg):with(inttrans):with(plots):
>
eq:=diff(u(x,t),t,t)+8*diff(u(x,t),t)+4*u(x,t)=diff(u(x,t
),x,x)-2*exp(-t)*sin(x);
```

$$eq := \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t)\right) + 8\left(\frac{\partial}{\partial t} u(x,t)\right) + 4\, u(x,t) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t)\right) - 2\, e^{(-t)} \sin(x)$$

```
> u(x,0):=sin(x);
```

$$u(x,0) := \sin(x)$$

```
> D[2](u)(x,0):=-sin(x);
```

$$D_2(u)(x,0) := -\sin(x)$$

```
> c1:=u(0,t)=exp(-t)*sin(0);
```

$$c1 := u(0,t) = 0$$

```
> c2:=u(2*pi,t)=exp(-t)*sin(2*pi);
```

$$c2 := u(2\,\pi, t) = e^{(-t)} \sin(2\,\pi)$$

```
> eqs:=laplace(eq,t,s);
```

$$eqs := -\sin(x)\,(7+s) + s^2\, \mathrm{laplace}(u(x,t),t,s) + 8\, s\, \mathrm{laplace}(u(x,t),t,s) + 4\, \mathrm{laplace}(u(x,t),t,s) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathrm{laplace}(u(x,t),t,s)\right) - \frac{2\sin(x)}{1+s}$$

```
> eqs:=subs(laplace(u(x,t),t,s)=U(x),eqs);
```

$$eqs := -\sin(x)\,(7+s) + s^2\, U(x) + 8\, s\, U(x) + 4\, U(x) = \left(\frac{d^2}{dx^2} U(x)\right) - \frac{2\sin(x)}{1+s}$$

```
> c1:=laplace(c1,t,s):
> c1:=subs(laplace(u(0,t),t,s)=U(0),c1);
```

$$c1 := U(0) = 0$$

```
> c2:=laplace(c2,t,s):
> c2:=subs(laplace(u(2*pi,t),t,s)=U(2*pi),c2);
```

$$c2 := U(2\,\pi) = \frac{\sin(2\,\pi)}{1+s}$$

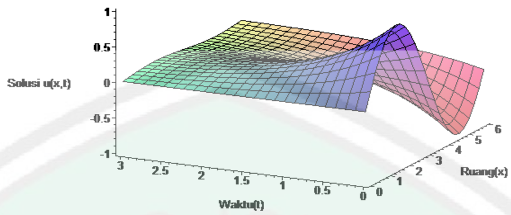
```
> U(x):=rhs(dsolve({eqs,c1,c2},U(x)));
```

$$U(x) := \frac{\sin(x)}{1+s}$$

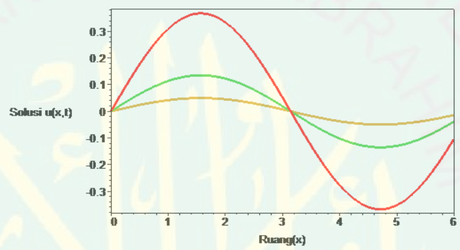
```
> u:=invlaplace(U(x),s,t);
```

$$u := \mathbf{e}^{(-t)} \sin(x)$$

```
> plot3d(subs(u),x=0..6,t=0..3,axes=boxed,title="Figure 3.5",labels=[Ruang(x),Waktu(t),"Solusi u(x,t)"],orientation=[120,60]);
```




```
> plot([subs(t=1,u),subs(t=2,u),subs(t=3,u)],x=0..6,axes=boxed,title="figure 3.6",thickness=3,labels=[Ruang(x),"Solusi u(x,t)"]);
```



PROGRAM MAPLE 2

```
> restart:with(linalg):with(inttrans):with(plots):
> eq:=diff(u(x,t),t,t)+2*alpha*diff(u(x,t),t)+beta^2*u(x,t)=diff(u(x,t),x,x)+(5-4*alpha+beta^2)*exp(-2*t)*sin(x);
```

$$eq := \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathrm{u}(x,t)\right) + 2\,\alpha \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathrm{u}(x,t)\right) + \beta^2\, \mathrm{u}(x,t) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathrm{u}(x,t)\right) + (5 - 4\,\alpha + \beta^2)\, \mathbf{e}^{(-2\,t)} \sin(x)$$

```
> u(x,0):=sin(x);
```

$$\mathrm{u}(x,0) := \sin(x)$$

```
> D[2](u)(x,0):=-2*sin(x);
```

$$\mathrm{D}_2(u)(x,0) := -2\sin(x)$$

```
> c1:=u(0,t)=0;
```

$$c1 := \mathrm{u}(0,t) = 0$$

```
> c2:=u(1,t)=exp(-2*t)*sin(1);
```

$$c2 := \mathrm{u}(1,t) = \mathbf{e}^{(-2\,t)}\,\sin(1)$$

```
> eqs:=laplace(eq,t,s);
```

$$eqs := -\sin(x)\,(-2+s+2\,\alpha) + s^2\,\mathrm{laplace}(\mathrm{u}(x,t),t,s) + 2\,\alpha\,s\,\mathrm{laplace}(\mathrm{u}(x,t),t,s) + \beta^2\,\mathrm{laplace}(\mathrm{u}(x,t),t,s) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\mathrm{laplace}(\mathrm{u}(x,t),t,s)\right) + \frac{(5-4\,\alpha+\beta^2)\,\sin(x)}{s+2}$$

```
> eqs:=subs(laplace(u(x,t),t,s)=U(x),eqs);
```

$$eqs := -\sin(x)\,(-2+s+2\,\alpha) + s^2\,\mathrm{U}(x) + 2\,\alpha\,s\,\mathrm{U}(x) + \beta^2\,\mathrm{U}(x) = \left(\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{U}(x)\right) + \frac{(5-4\,\alpha+\beta^2)\,\sin(x)}{s+2}$$

```
> c1:=laplace(c1,t,s):
> c1:=subs(laplace(u(0,t),t,s)=U(0),c1);
```

$$c1 := \mathrm{U}(0) = 0$$

```
> c2:=laplace(c2,t,s):
> c2:=subs(laplace(u(1,t),t,s)=U(1),c2);
```

$$c2 := \mathrm{U}(1) = \frac{\sin(1)}{s+2}$$

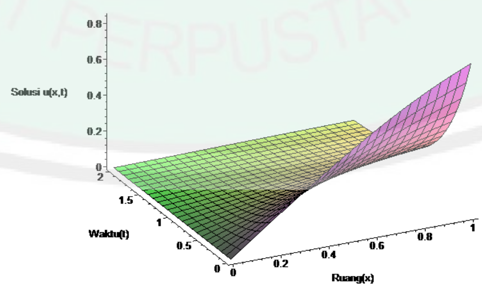
```
> U(x):=rhs(dsolve({eqs,c1,c2},U(x)));
```

$$\mathrm{U}(x) := \frac{\sin(x)}{s+2}$$

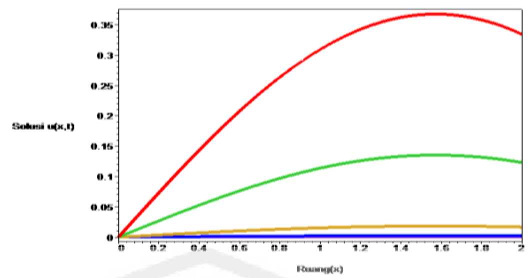
```
> u:=invlaplace(U(x),s,t);
```

$$u := \sin(x)\,\mathbf{e}^{(-2\,t)}$$

```
> plot3d(subs(u),x=0..1,t=0..2,axes=boxed,title="Figure 3.1",labels=[Ruang(x),Waktu(t),"Solusi u(x,t)"],orientation=[100,50]);
```




```
> plot([subs(t=0.50,u),subs(t=1,u),subs(t=2,u),subs(t=3,u),subs(t=4,u)],x=0..2,axes=boxed,title="figure 3.2",thickness=5,labels=[Ruang (x),"Solusi u(x,t)"]);
```



PROGRAM MAPLE 3

```
> restart:with(inttrans):with(plots):
>
eq:=diff(u(x,t),t,t)+2*alpha*diff(u(x,t),t)+beta^2*u(x,t)
=diff(u(x,t),x,x)(2*alpha*sin(t)*sin(x))+(beta^2*cos(t)*s
in(x));
```

$$eq := \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathrm{u}(x,t)\right) + 2\,\alpha\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{u}(x,t)\right) + \beta^2\,\mathrm{u}(x,t) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathrm{u}(x,t)\right) - 2\,\alpha\,\sin(t)\sin(x) + \beta^2\cos(t)\sin(x)$$

```
> u(x,0):=sin(x);
```

$$\mathrm{u}(x,0) := \sin(x)$$

```
> D[2](u)(x,0):=0;
```

$$\mathrm{D}_2(u)(x,0) := 0$$

```
> c1:=u(0,t)=0;
```

$$c1 := \mathrm{u}(0,t) = 0$$

```
> c2:=u(1,t)=cos(t)*sin(1);
```

$$c2 := \mathrm{u}(1,t) = \cos(t)\sin(1)$$

```
> eqs:=laplace(eq,t,s);
```

$$eqs := -\sin(x)\,(s + 2\,\alpha) + s^2\,\mathrm{laplace}(\mathrm{u}(x,t),t,s) + 2\,\alpha\,s\,\mathrm{laplace}(\mathrm{u}(x,t),t,s) + \beta^2\,\mathrm{laplace}(\mathrm{u}(x,t),t,s) = \frac{\sin(x)\,(-2\,\alpha + \beta^2\,s)}{s^2+1} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathrm{laplace}(\mathrm{u}(x,t),t,s)\right)$$

```
> eqs:=subs(laplace(u(x,t),t,s)=U(x),eqs);
```

$$eqs := -\sin(x)\,(s + 2\,\alpha) + s^2\,\mathrm{U}(x) + 2\,\alpha\,s\,\mathrm{U}(x) + \beta^2\,\mathrm{U}(x) = \frac{\sin(x)\,(-2\,\alpha + \beta^2\,s)}{s^2+1} + \left(\frac{d^2}{dx^2}\mathrm{U}(x)\right)$$

```
> c1:=laplace(c1,t,s):
```

```
> c1:=subs(laplace(u(0,t),t,s)=U(0),c1);
```

$$c1 := \mathrm{U}(0) = 0$$

```
> c2:=laplace(c2,t,s):
> c2:=subs(laplace(u(1,t),t,s)=U(1),c2);
```

$$c2 := \mathrm{U}(1) = \frac{\sin(1)\,s}{s^2+1}$$

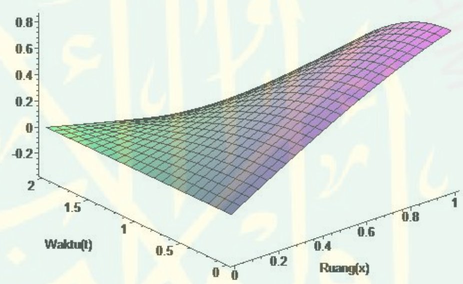
```
> U(x):=rhs(dsolve({eqs,c1,c2},U(x)));
```

$$\mathrm{U}(x) := \frac{s\sin(x)}{s^2+1}$$

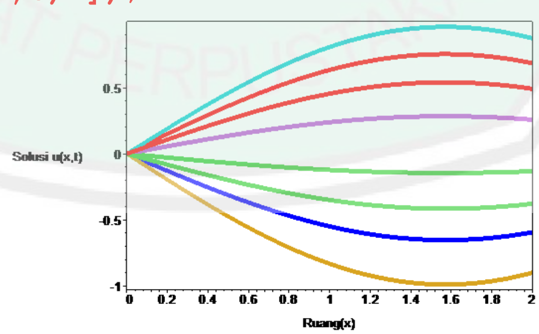
```
> u:=invlaplace(U(x),s,t);
```

$$u := \sin(x)\cos(t)$$

```
>   plot3d(subs(u),x=0..1,t=0..2,axes=boxed,title="Figure
3.3",labels=[Ruang(x),Waktu(t),"Solusi
u(x,t)"],orientation=[120,60]);
```




```
>
plot([subs(t=1,u),subs(t=2,u),subs(t=3,u),subs(t=4,u),sub
s(t=5,u),subs(t=6,u),subs(t=7,u),subs(t=8,u)],x=0..1,axes
=boxed,title="figure 3.4",thickness=5,labels=[Ruang
(x),"Solusi u(x,t)"]);
```



RIWAYAT HIDUP

Rianti Mandasari, lahir di kota Trenggalek pada tanggal 15 Januari 1993, biasa di panggil Ria, tinggal di Rt.31/Rw.07 Dusun Kajang Desa Masaran Kec. Munjungan Kab. Trenggalek. Anak pertama dari Bapak Imam Sutaji dan Ibu Siti Minarti.

Pendidikan dasarnya ditempuh di MI Masaran 1 dan lulus pada tahun 2004, setelah itu melanjutkan ke MTs Negeri Munjungan dan lulus pada tahun 2007. Kemudian melanjutkan pendidikan ke Madrasah Aliyah Negeri 2 Tulungagung dan lulus tahun 2010. Selanjutnya, pada tahun 2010 menempuh kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang mengambil Jurusan Matematika.

Selama menjadi mahasiswa, dia pernah mengikuti program khusus perkuliahan Bahasa Arab pada tahun 2010 dan mengikuti program khusus perkuliahan Bahasa Inggris pada tahun 2011.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341) 558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Rianti Mandasari
NIM : 10610006
Fakultas/ Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Transformasi Laplace pada Persamaan Telegraf
Pembimbing I : Ari Kusumastuti, S.Si., M.Pd
Pembimbing II : Dr. Abdussakir, M.Pd

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	11 April 2014	Konsultasi Bab I dan Bab II	1.
2.	19 Mei 2014	Konsultasi Kajian Keagamaan	2.
3.	18 Juli 2014	Revisi Bab I dan Bab II	3.
4.	18 Juli 2014	Revisi Kajian Keagamaan	4.
5.	19 September 2014	Konsultasi Bab III	5.
6.	28 November 2014	Revisi Kajian Keagamaan	6.
7.	03 Desember 2014	Revisi Bab II dan Bab III	7.
8.	16 Januari 2015	ACC Bab I dan Bab II	8.
9.	20 januari 2015	Revisi Bab III	9.
10.	27 Januari 2015	Konsultasi Bab IV	10.
11.	02 Februari 2015	ACC Bab III	11.
12.	03 Februari 2015	Revisi Kajian Keagamaan	12.
13.	21 April 2015	Revisi Bab IV	13.
14.	08 Mei 2015	ACC Bab IV	14.
15.	03 Juni 2015	ACC Kajian Keagamaan	15.
16.	05 Juni 2015	ACC Keseluruhan	16.

Malang, 17 Juni 2015
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001