

**KEAKURATAN SOLUSI PADA PERSAMAAN DIFUSI MENGGUNAKAN  
SKEMA *CRANK-NICOLSON***

**SKRIPSI**

**OLEH  
AFIDAH KARIMATUL LAILI  
NIM. 10610005**



**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2015**

**KEAKURATAN SOLUSI PADA PERSAMAAN DIFUSI MENGGUNAKAN  
SKEMA *CRANK-NICOLSON***

**SKRIPSI**

**Diajukan Kepada  
Fakultas Sains dan Teknologi  
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang  
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam  
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)**

**Oleh  
Afidah Karimatul Laili  
NIM. 10610005**

**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2015**

**KEAKURATAN SOLUSI PADA PERSAMAAN DIFUSI MENGGUNAKAN  
SKEMA *CRANK-NICOLSON***

**SKRIPSI**

Oleh  
**Afidah Karimatul Laili**  
**NIM. 10610005**

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji  
Tanggal 23 Desember 2014

Pembimbing I,

Pembimbing II,

Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd  
NIP. 19770521 200501 2 004

Fachrur Rozi, M.Si  
NIP. 19800527 200801 1 012

Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd  
NIP. 19751006 200312 1 001

**KEAKURATAN SOLUSI PADA PERSAMAAN DIFUSI MENGGUNAKAN  
SKEMA *CRANK-NICOLSON***

**SKRIPSI**

Oleh  
**Afidah Karimatul Laili**  
**NIM. 10610005**

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi  
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan  
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal 7 Januari 2015

Penguji Utama : Mohammad Jamhuri, M.Si .....

Ketua Penguji : Abdul Aziz, M.Si .....

Sekretaris Penguji : Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd .....

Anggota Penguji : Fachrur Rozi, M.Si .....

Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd  
NIP. 19751006 200312 1 001

## PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Afidah Karimatul Laili  
NIM : 10610005  
Jurusan : Matematika  
Fakultas : Sains dan Teknologi  
Judul : Keakuratan Solusi Pada Persamaan Difusi Menggunakan  
Skema *Crank-Nicolson*

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 04 Januari 2015  
Yang membuat pernyataan,

Afidah Karimatul Laili  
NIM. 10610005

## MOTO

﴿الْمُؤْمِنُونَ﴾ فَلْيَتَوَكَّلْ عَلَى اللَّهِ وَعَلَىٰ مَوْلَانَا هُوَ الَّذِي كَتَبَ مَا إِيصِبْنَا لَنُقَلِّ

Katakanlah: "Sekali-kali tidak akan menimpa kami melainkan apa yang telah ditetapkan Allah untuk kami. Dialah pelindung kami, dan hanya kepada Allah orang-orang yang beriman harus bertawakal." (Qs.at-Taubah/7:51)



## PERSEMBAHAN

Penulis persembahkan karya kecil ini untuk:

Kedua orang tua penulis tercinta, ayahanda Sumali, ibunda Siti Nur Khasanah,  
adik penulis tersayang Fiandika Ashril Adzim, serta seluruh keluarga besar yang  
selalu menerima dan mencintai penulis seutuhnya.



## KATA PENGANTAR

*Assalamua'alaikum Wr. Wb*

Puji Syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah Swt. atas rahmat, taufik serta hidayah-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan skripsi ini dengan baik. Sholawat serta salam semoga tetap tercurahkan kepada Nabi Muhammad Saw. yang telah mengantarkan manusia dari jaman kegelapan ke jaman yang terang benderang.

Dalam penulisan skripsi ini, penulis banyak mendapat bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Ucapan terima kasih penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Hj. Bayyinatul Muctaromah, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd, selaku dosen pembimbing I yang telah sabar dan selalu memberikan motivasi dan arahan dalam penyelesaian penelitian skripsi ini.
5. Fachrur Rozi, M.Si, selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan saran dan bimbingan selama penulisan skripsi ini.
6. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen, terima kasih atas segala ilmu dan bimbingannya.

7. Bapak, ibu dan adik serta seluruh keluarga besar yang senantiasa memberikan doa, dukungan baik secara moril, materil, dan spiritual.
8. Hermansya Mega Pratama, sahabat yang selalu meyakinkan bahwa apapun mungkin dilakukan, terima kasih untuk kekuatan hati dan doa yang selalu diberikan.
9. Seluruh teman Jurusan Matematika angkatan 2010, terutama Siska Dwi Oktavia, Farida Maslucha, Ayu Dewi Purwandini, Syifaul Amamah, Thoufina Kurniyati, Ani Sri, Nova Nefisa, Siti Muyasaroh, Rofiatun Jamila, Binti Tsamrotul Fitria, Luluk Ianatul Afifah, Wahyudi, Andry Eka, Muhammad Ghozali, Muhammad Syukron dan Teman-teman Kos Sukada 18, terutama Fitha Fathya, Mirza Desiyanti.
10. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik moril maupun materiil.

Akhirnya penulis berharap semoga karya yang sederhana ini dapat bermanfaat bagi penulis dan bagi pembaca.

*Wassalamu'alaikum Wr. Wb*

Malang, Januari 2015

Penulis

## DAFTAR ISI

<b>HALAMAN JUDUL</b>	
<b>HALAMAN PENGAJUAN</b>	
<b>HALAMAN PERSETUJUAN</b>	
<b>HALAMAN PENGESAHAN</b>	
<b>HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN</b>	
<b>HALAMAN MOTO</b>	
<b>HALAMAN PERSEMBAHAN</b>	
<b>KATA PENGANTAR</b> .....	viii
<b>DAFTAR ISI</b> .....	x
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	xii
<b>ABSTRAK</b> .....	xii
<b>ABSTRACT</b> .....	xiv
<b>ملخص</b> .....	xv
 <b>BAB IPENDAHULUAN</b>	
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Rumusan Masalah .....	4
1.3 Tujuan Penelitian .....	4
1.4 Manfaat Penelitian .....	5
1.5 Batasan Masalah .....	5
1.6 Metode Penelitian .....	5
1.7 Sistematika Penulisan .....	6
 <b>BAB II KAJIAN PUSTAKA</b>	
2.1 Identifikasi Persamaan Difusi .....	8
2.2 Metode Beda Hingga .....	9
2.3 Skema <i>Crank-Nicolson</i> .....	11
2.4 Keakuratan Solusi .....	12
2.4.1 Analisis Kestabilan .....	13
2.4.2 Analisis Konsistensi .....	16
2.3 Kajian Kesempurnaan dalam Islam .....	17
 <b>BAB III PEMBAHASAN</b>	
3.1 Solusi Persamaan Difusi Menggunakan Skema <i>Crank-Nicolson</i> ....	20
3.2 Keakuratan Solusi Hasil Solusi Skema <i>Crank-Nicolson</i> .....	23

3.2.1 Analisis Kestabilan Hasil Solusi Skema <i>Crank-Nicolson</i> ...	23
3.2.2 Analisis Konsistensi Hasil Solusi Skema <i>Crank-Nicolson</i> ..	25
3.3 Simulasi dan Interpretasi Hasil Solusi Skema <i>Crank-Nicolson</i> .....	29
3.4 Istiqomah dan Iman .....	32

#### **BAB IV PENUTUP**

4.1 Kesimpulan .....	35
4.2 Saran .....	36

<b>DAFTAR PUSTAKA</b> .....	37
-----------------------------	----

<b>LAMPIRAN-LAMPIRAN</b> .....	38
--------------------------------	----

<b>RIWAYAT HIDUP</b> .....	66
----------------------------	----



## DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Skema <i>Crank-Nicolson</i> .....	11
Gambar 3.1 Grafik 3D Solusi Numerik dan Solusi Analitik Persamaan Difusi Menggunakan Skema <i>Crank-Nicolson</i> .....	31



## ABSTRAK

Laili, Afidah Karimatul. 2015. **Keakuratan Solusi Persamaan Difusi Menggunakan Skema Crank-Nicolson**. Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd. (II) Fachrur Rozi, M.Si.

**Kata kunci:** solusi akurat, persamaan difusi, perpindahan panas balik, skema *Crank-Nicolson*.

Persamaan difusi adalah persamaan diferensial parsial linier yang merupakan representasi berpindahnya suatu zat dalam pelarut dari bagian berkonsentrasi tinggi ke bagian yang berkonsentrasi rendah. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan distribusi temperatur persamaan difusi dengan menggunakan skema *Crank-Nicolson*. Pertama, mendiskritisasikan persamaan difusi menggunakan skema *Crank-Nicolson*. Diskritisasi akan menghasilkan matriks. Selanjutnya menentukan kestabilan dan konsistensi. Kestabilan dan konsistensi untuk menunjukkan bahwa metode yang digunakan tersebut memiliki solusi yang dapat mendekati solusi analitiknya sehingga diketahui bahwa solusi tersebut akurat. Matriks hasil diskritisasi akan disimulasikan dalam program. Hasil simulasi menunjukkan bahwa distribusi temperatur menurun terhadap waktu karena adanya perpindahan panas.

## ABSTRACT

Laili, Afidah Karimatul. 2015. **Reliability of Diffusion Equation Solution using Crank-Nicholson Scheme**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, The State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd. (II) FachrurRozi, M.Si.

**Keywords:** reliability, diffusion equation, backward heat equation, crank-nicholson scheme.

Diffusion equation is a linear differential equation that represents the transfer of substance from the high concentration part to the lower concentration part. This research aims to determine the temperature distribution of diffusion equation using Crank-Nicholson scheme. Firstly, Discretizing diffusion equation using Crank-Nicholson scheme, that will obtain a matrix. The next step is, determining stability and consistency. The stability and consistency indicate that the method used have a solution that can approximate analytic solution, so it is known to be reliable. The matrix obtained from discretization process will be simulated in the program. The simulation results show that the temperature distribution decreases over time due to heat transfer.

## ملخص

ليلي، أفيدة كريمة ٢٠١٥. خطأ التقدير وتوفيق معادلة الانتشار باستخدام مخطط كرنك-نيكلسون. بحث جامعي. قسم الرياضيات كلية العلوم و التكنولوجيا الجامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج. المشرف: (١) أري كوسوماستوتي الماجستير، (٢) فخر الرازي الماجستير.

كلمات البحث: خطأ التقدير، التوفيق، معادلة الانتشار، معادلة الحرارة المتخلفة، مخطط كرنك-نيكلسون.

معادلة الانتشار هي المعادلة التفاضلية الخطية التي تمثل نقل المضمون عن جزء تركيز عال إلى أسفل جزء تركيز. حدد هذا البحث توزيع درجة حرارة معادلة الانتشار باستخدام مخطط كرنك-نيكلسون. أولاً، تفريد معادلة الانتشار باستخدام مخطط كرنك-نيكلسون. تم الحصول عليها من التفريد هو المصفوفة. ثم تحديد الاستقرار والثبات. ذلك الاستقرار والثبات للإشارة إلى أن الطريقة المستخدمة لديهم الحل الذي يمكن أن يصبح تقارب الحل التحليلي حتى يعرف خطأ التقدير و التوفيق. ستحاكي نتائج المصفوفة التفريدية في البرنامج. بينت نتائج المحاكاة أن توزيع درجات الحرارة تتناقص بمرور الزمن لتسخين نقل.

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Estimasi *error* adalah suatu proses yang bertujuan untuk mencari solusi terbaik dengan mempertimbangkan besarnya nilai *error* yang dihasilkan dengan metode numerik. Dalam prosesnya, estimasi *error* didapatkan dari ekspansi deret Taylor yang dipotong setelah suku turunan yang diinginkan. Pemotongan suku deret Taylor dikarenakan suku-suku deret Taylor yang takhingga banyaknya, sehingga perlu dipotong sampai suku order tertentu. Dengan pemotongan order yang ke  $n$ , maka hasil perhitungan akan mendekati solusi. Jadi dalam estimasi *error* akan dihasilkan suatu solusi yang akurat. Solusi akurat yaitu dekatnya suatu solusi pendekatan terhadap nilai sebenarnya. Semakin kecil nilai *error* dari suatu solusi numerik, maka solusi tersebut akan semakin akurat.

Dalam prosesnya, dibutuhkan suatu metode numerik yang akan menghasilkan solusi pendekatan terbaik. Solusi pendekatan salah satunya adalah skema *Crank-Nicolson*. Skema *Crank-Nicolson* adalah pengembangan dari metode beda hingga skema eksplisit dengan metode beda hingga maju skema implisit. Namun bentuk dari skema *Crank-Nicolson* adalah skema implisit. Kelebihan metode ini dibandingkan dengan metode beda hingga yang lain adalah stabil tanpa syarat.

Pada penelitian yang dilakukan oleh Durmin (2013:59) membahas tentang perbandingan perpindahan panas dengan menggunakan metode beda hingga maju skema eksplisit dan skema *Crank-Nicolson*. Fokus penelitian Durmin adalah

membandingkan solusi dari skema eksplisit dan skema *Crank-Nicolson* untuk model perpindahan panas satu dimensi. Pada penelitian Durmin untuk mengetahui perbandingan solusi dari skema eksplisit dan skema *Crank-Nicolson* adalah langsung dilakukan simulasi, dengan langsung memasukkan nilai dari setiap variabel. Dengan demikian perbandingan yang didapatkan adalah melihat solusi atau nilai yang hampir sama pada setiap nilai ruang dan waktu yang sama. Penelitian ini difokuskan untuk mengetahui keakuratan solusi dari persamaan difusi satu dimensi dengan menggunakan skema *Crank-Nicolson* yang telah dikerjakan oleh Durmin. Jadi perbedaan penelitian yang akan dilakukan peneliti dengan peneliti sebelumnya adalah pada pencarian solusi dengan skema *Crank-Nicolson* yang didapatkan secara umum tanpa menentukan nilai dari variabel yang digunakan serta keakuratan solusi yang akan menggunakan ekspansi deret Taylor.

Pada penelitian yang dilakukan oleh Le, dkk (2013:440), mereka memfokuskan penelitian tentang pengujian estimasi *error* dan keakuratan solusi pada persamaan panas balik dengan menggunakan ketaksamaan. Ketaksamaan tersebut merupakan lemma dan teorema yang digunakan untuk menguji estimasi *error* dan keakuratan solusi dari persamaan panas balik. Pada hasil diperoleh dengan *error* yang relatif kecil dan mendekati solusi sesungguhnya. Karena telah diketahui bahwa telah didapatkan *error* yang relatif kecil, penulis ingin mengetahui keakuratan solusi pada persamaan yang sama dengan metode yang berbeda pada penentuan solusi pendekatannya.

Al-Quran adalah suatu kitab yang maknanya tidak terbatas. Allah menurunkan makna setiap ayat kepada setiap orang secara kontekstual. Inilah yang membuat al-Quran tidak akan pernah habis ditulis maknanya. Manusia

adalah makhluk yang diciptakan sebagai makhluk Allah Swt. yang paling sempurna. Allah Swt. memerintahkan kita untuk senantiasa menyempurnakan iman. Seperti firman Allah Swt. dalam al-Quran surat al-Baqarah/2:26:

إِنَّ اللَّهَ لَا يَسْتَحْيَ أَنْ يَضْرِبَ مَثَلًا مَّا بَعُوضَةً فَمَا فَوْقَهَا فَأَمَّا الَّذِينَ ءَامَنُوا فَيَعْلَمُونَ أَنَّهُ الْحَقُّ مِنْ رَبِّهِمْ وَأَمَّا الَّذِينَ كَفَرُوا فَيَقُولُونَ مَا ذَا أَرَادَ اللَّهُ بِهَذَا مَثَلًا يُضِلُّ بِهِ كَثِيرًا وَيَهْدِي بِهِ كَثِيرًا وَمَا يُضِلُّ بِهِ إِلَّا الْفٰسِقِينَ ﴿٢٦﴾

*“Sesungguhnya Allah tiada segan membuat perumpamaan berupa nyamuk atau yang lebih rendah dari itu. Adapun orang-orang yang beriman, maka mereka yakin bahwa perumpamaan itu benar dari Tuhan mereka, tetapi mereka yang kafir mengatakan: "Apakah maksud Allah menjadikan ini untuk perumpamaan?." dengan perumpamaan itu banyak orang yang disesatkan Allah, dan dengan perumpamaan itu (pula) banyak orang yang diberi-Nya petunjuk. dan tidak ada yang disesatkan Allah kecuali orang-orang yang fasik “ (QS. al-Baqarah/2:26)*

Ayat tersebut adalah ayat yang dapat menjadi pintu taubat bagi orang-orang yang belum sempurna keimanannya karena belum mengimani al-Quran dan Nabi Muhammad Saw.. Ayat ini mengajarkan kepada kita bahwa Allah Swt. selalu memberi kesempatan kepada semua manusia untuk menyempurnakan keimanannya, sebagaimana beberapa sahabat Nabi Muhammad Saw., yang semula adalah termasuk golongan kaum Kafir, tapi atas kehendak-Nya dan dengan izin-Nya mereka beriman kepada Nabi Muhammad Saw. dan al-Qur’an bahkan menjadi Sahabat Nabi.

Implementasi dari ayat tersebut dengan keakuratan solusi adalah dalam penentuan solusi yang akurat kita mengusahakan mendapatkan hasil yang mendekati *error* minimal, yaitu dalam ayat tersebut dijelaskan bahwa setiap manusia mempunyai kesempatan untuk memperbaiki keimanannya. Sesuai dengan implementasi tersebut maka penulis ingin mendapatkan hasil yang

memiliki *error* minimal dengan menggunakan skema *Crank-Nicolson*. Seperti telah diketahui pada paragraf sebelumnya bahwa skema *Crank-Nicolson* tergolong skema yang menghasilkan *error* minimal, namun dalam penerapannya masih memiliki *error* yang perlu diketahui. Selain itu, sebagai pengetahuan tentang prosedur penyelesaian dengan menggunakan skema *Crank-Nicolson* serta sebagai pedoman pencarian keakuratan solusi. Berdasarkan latar belakang tersebut, penulis akan mengambil judul “Keakuratan Solusi dari Persamaan Difusi Menggunakan Skema *Crank-Nicolson*”.

## 1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah dalam penelitian ini adalah:

1. Bagaimana hasil aproksimasi persamaan difusi menggunakan skema *Crank-Nicolson*?
2. Bagaimana keakuratan solusi yang diperoleh skema *Crank-Nicolson*?
3. Bagaimana perbandingan hasil simulasi aproksimasi skema *Crank-Nicolson* dan solusi eksak dari penyelesaian persamaan difusi?

## 1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah:

1. Mendapatkan hasil aproksimasi persamaan difusi menggunakan skema *Crank-Nicolson*.
2. Mengetahui keakuratan solusi yang diperoleh skema *Crank-Nicolson*.
3. Mengetahui perbandingan hasil simulasi aproksimasi skema *Crank-Nicolson* dan solusi eksak dari penyelesaian persamaan difusi.

#### 1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat penelitian ini yaitu:

1. Mengetahui hasil yang memiliki *error* minimal dengan menggunakan skema *Crank-Nicolson*.
2. Sebagai pedoman penentuan keakuratan solusi.
3. Sebagai perbandingan solusi analitik dan solusi numerik skema *Crank-Nicolson*.

#### 1.5 Batasan Masalah

Dalam pembahasan ini penulis membatasi ruang lingkup permasalahan yaitu merujuk pada Le, dkk (2013:432) bahwa model sistem perpindahan panas balik dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - a(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) &= f(x, t), & (x, t) \in [0, \pi] \times [0, 1] \\ u(0, t) = u(\pi, t) &= 0, & t \in [0, 1] \\ u(x, 1) &= \frac{\cos(1) \sin(x)}{\exp(1^2+1)}, & x \in [0, \pi] \end{aligned}$$

dengan  $a(t)$  adalah suatu fungsi  $2t + 1$  dan  $f(x, t) = -\frac{\sin(t) \sin(x)}{\exp(t^2+t)}$ . Solusi eksak dari persamaan difusi di atas, yaitu:

$$u(x, t) = \frac{\cos(t) \sin(x)}{\exp(t^2 + t)}$$

#### 1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode penelitian kepustakaan (*library research*). Literatur utama yang digunakan oleh penulis adalah yang terkait dengan persamaan difusi, skema *Crank-Nicolson*, dan keakuratan solusi.

Langkah-langkah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menganalisis persamaan difusi
2. Menganalisis skema *Crank-Nicolson* pada persamaan difusi
3. Menganalisis keakuratan solusi
4. Simulasi dan pembahasan

### 1.7 Sistematika Penulisan

Sistematika yang digunakan dalam pembahasan ini adalah:

#### Bab I Pendahuluan

Pendahuluan meliputi: latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian dan sistematika penulisan.

#### Bab II Kajian Pustaka

Pada bagian ini dikaji dasar-dasar teoritik yang signifikan dengan pembahasan, meliputi: persamaan difusi, metode beda hingga, metode beda hingga untuk persamaan difusi, keakuratan solusi, dan kajian kesempurnaan dalam Islam.

#### Bab III Pembahasan

Bab ini membahas tentang analisis skema *Crank-Nicolson* untuk persamaan difusi, analisis keakuratan solusi skema *Crank-Nicolson*, simulasi dan interpretasi hasil solusi skema *Crank-Nicolson*, dan istiqomah dan iman.

#### Bab IV Penutup

Bab ini terdiri atas kesimpulan serta saran-saran yang berkaitan dengan permasalahan yang dikaji.



## BAB II

### KAJIAN PUSTAKA

#### 2.1 Identifikasi Persamaan Difusi

Persamaan difusi adalah persamaan diferensial parsial yang menggambarkan dinamika kepadatan dalam difusi menjalani material. Difusi adalah peristiwa berpindahnya suatu zat dalam pelarut dari bagian berkonsentrasi tinggi ke bagian yang berkonsentrasi rendah. Perbedaan konsentrasi yang ada pada dua larutan disebut gradien konsentrasi. Difusi akan terus terjadi hingga seluruh partikel tersebar luas secara merata atau mencapai keadaan kesetimbangan dimana perpindahan molekul tetap terjadi walaupun tidak ada perbedaan konsentrasi.

Pada penelitian ini penulis mengambil sistem persamaan perpindahan panas balik merujuk pada Le, dkk (2013:432) yang dinyatakan berikut

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - a(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) &= f(x, t), \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0, \\ u(x, 1) = g(x) &= \frac{\cos(1) \sin(x)}{\exp(1^2 + 1)}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

dengan domain  $t \in [0, 1]$ ,  $x \in [0, \pi]$ ,  $a(t)$  adalah fungsi  $2t + 1$ , dengan solusi eksak  $u(x, t) = \frac{\cos(t) \sin(x)}{\exp(t^2 + t)}$ , serta  $f(x, t) = -\frac{\sin(t) \sin(x)}{\exp(t^2 + t)}$ .  $u(x, t)$  adalah fungsi distribusi temperatur dan  $u(x, 1)$  adalah distribusi temperatur awal,  $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t)$  adalah variabel panas yang bergantung pada  $t$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)$  adalah variabel panas yang bergantung pada  $x$ , dan  $a(t)$  adalah konstanta panas. Masalah perpindahan panas balik berkaitan dengan persamaan panas yang mengacu pada masalah

pencarian distribusi temperatur awal dari masalah panas (Ternat, dkk, 2011:262-284).

## 2.2 Metode Beda Hingga

Metode ini digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial secara numerik, dengan menggunakan deret Taylor yang dipangkas pada orde tertentu sesuai kebutuhan yang ada. Berikut adalah ekspansi deret Taylor dari  $f(x \pm \Delta x)$  di sekitar  $x$  yaitu:

$$f(x \pm \Delta x) = f(x) \pm \frac{\Delta x}{1!} f'(x) + \frac{\Delta x^2}{2!} f''(x) \pm \frac{\Delta x^3}{3!} f'''(x) + \dots \quad (2.2)$$

Menurut Djojodiharjo (2000:96), apabila persamaan (2.2) dipangkas setelah suku turunan pertama, maka akan diperoleh

$$f(x \pm \Delta x) = f(x) \pm \frac{\Delta x}{1!} f'(x) + O(\Delta x^2), \quad (2.3)$$

Sehingga turunan suatu fungsi  $f(x)$  untuk beda maju pada  $x = x_0$  didefinisikan sebagai

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (2.4)$$

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (2.5)$$

Djojodiharjo (2000:96) menyatakan bahwa deret Taylor dapat diekspansikan untuk menghitung nilai turunan fungsi  $f(x)$  berdasarkan nilai dari titik yang diketahui. Persamaan (2.3) dipangkas setelah suku turunan pertama dan didapatkan turunan suatu fungsi  $f(x)$  untuk beda mundur pada  $x = x_0$  didefinisikan sebagai

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} \quad (2.6)$$

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} \quad (2.7)$$

Cara ketiga untuk menghitung turunan pertama adalah dengan mengurangi rumus beda maju dan beda mundur berdasarkan ekspansi deret Taylor. Dengan demikian dihasilkan

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} - o(\Delta x^2)$$

atau

$$f'(x) \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x}$$

atau

$$f'(x) \approx \frac{f\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) - f\left(x - \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}$$

Untuk memperkirakan turunan kedua  $f''(x)$  pada  $x = x_0$  adalah dengan mengulangi prosedur untuk memperoleh turunan pertama, tetapi dengan menggunakan  $f'(x)$  sebagai fungsi awal. Dengan demikian dihasilkan

$$f''(x) \approx \frac{f'\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) - f'\left(x - \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}$$

atau

$$f''(x) \approx \frac{\frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x} - \frac{f'(x) - f'(x - \Delta x)}{\Delta x}}{\Delta x}$$

atau

$$f''(x) \approx \frac{f'(x + \Delta x) - 2f'(x) - f'(x - \Delta x)}{\Delta x} \times \frac{1}{\Delta x}$$

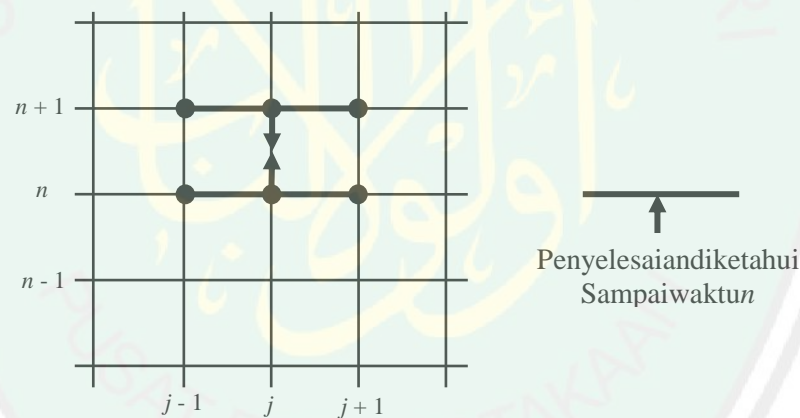
atau

$$f''(x) \approx \frac{f'(x + \Delta x) - 2f'(x) - f'(x - \Delta x)}{\Delta x^2} \quad (2.8)$$

Persamaan (2.8) merupakan persamaan turunan kedua aproksimasi deret Taylor.

### 2.3 Skema Crank-Nicolson

Menurut Triatmodjo (2002:221-223), skema *Crank-Nicolson* merupakan salah satu skema pengembangan dari skema eksplisit dan implisit. Skema *Crank-Nicolson* adalah rata-rata dari skema eksplisit dan skema implisit. Skema jaringan titik hitungan diberikan oleh Gambar 2.1 berikut



Gambar 2.1 Skema Crank-Nicolson

Contoh penerapan skema *Crank-Nicolson* pada persamaan difusi

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \quad (2.9)$$

Pada kedua skema tersebut diferensial terhadap waktu ditulis dalam bentuk

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \approx \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t}$$

yang berarti diferensial terpusat terhadap waktu  $n + \frac{1}{2}$ . Skema *Crank-Nicolson* ruas kanan dari persamaan (2.9) pada waktu  $n + \frac{1}{2}$  yang merupakan nilai rerata dari skema eksplisit dan skema implisit. Aproksimasi turunan kedua fungsi terhadap  $x$ , yaitu

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}}{\Delta x^2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{\Delta x^2} \right),$$

dengan menggunakan skema di atas, persamaan (2.9) dapat ditulis menjadi

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} \left( K \frac{u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}}{\Delta x^2} \right) + \frac{1}{2} \left( K \frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{\Delta x^2} \right) \quad (2.10)$$

Suku kedua ruas kanan dari persamaan di atas telah diketahui. Terlihat bahwa penurunan persamaan di atas menghasilkan bentuk persamaan implisit. Kelebihan dari skema ini adalah bahwa untuk nilai  $\Delta x$  tertentu kesalahan pemotongan pada suku dalam  $\Delta t$  adalah lebih kecil daripada skema implisit dan eksplisit (Triatmodjo, 2002:221-223).

#### 2.4 Keakuratan Solusi

Dalam metode numerik, hasil yang diperoleh bukanlah hasil yang sama persis dengan nilai sejatinya. Selalu ada selisih, karena hasil yang didapat dengan metode numerik merupakan hasil yang diperoleh dengan proses iterasi (*looping*) untuk menghampiri nilai sebenarnya. Walaupun demikian, bukan berarti hasil yang didapat dengan metode numerik salah, karena *error* tersebut dapat ditekan sekecil mungkin sehingga hasil yang didapat sangat mendekati nilai sebenarnya atau bisa dikatakan *error*nya mendekati nol. *Error* atau galat yang terjadi merupakan selisih antara solusi sesungguhnya dengan solusi pendekatan.

Keakuratan solusi numerik diukur berdasarkan kriteria konvergensi, konsistensi serta stabilitas. Konvergensi berhubungan dengan besarnya penyimpangan solusi pendekatan oleh metode beda hingga terhadap solusi eksak.

#### 2.4.1 Analisis Kestabilan

Menurut Zauderer (2006:742), aproksimasi solusi pasti konvergen ke solusi analitiknya, jika konsistensi dari persamaan beda dan stabilitas dari skema yang diberikan terpenuhi. Kriteria stabilitas merupakan kondisi perlu dan cukup agar diperoleh solusi konvergen.

Stabilitas numerik erat kaitannya dengan *error* numerik. Sebuah skema beda hingga dikatakan tidak stabil jika *error* yang didapat pada perhitungan setiap waktu menyebabkan peningkatan *error* pada perhitungan selanjutnya. Sebaliknya, jika *error* tidak meningkat bergantung waktu maka solusi stabil. Stabilitas skema numerik dapat diselidiki dengan syarat kestabilan *Von Neumann*.

Menurut Zauderer (2006:793), solusi dari stabilitas *Von Neumann* dengan didasarkan pada dekomposisi dari kesalahan deret Fourier. Untuk menunjukkan prosedur deret Fourier diberikan interval  $0 \leq x \leq l$ , kemudian dipartisi sebanyak  $N$ , yang menentukan  $x_n = \frac{nl}{N}, n = 0, 1, \dots, N$ . Kenaikan  $x$  didefinisikan sebagai  $h = \frac{l}{N}$ , kenaikan  $t$  didefinisikan sebagai  $k$  sehingga didapatkan  $t_m = mk$ . Maka  $u_{n,m}$  sesuai dengan  $u(x_n, t_m)$ . Berlaku juga  $x_n \pm h = x_{n\pm 1}$  dan  $t_m \pm k = t_{m\pm 1}$ .

Pada grid nilai  $x$ , didefinisikan deret Fourier  $u(x_n, t_m)$  sebagai

$$c_s(m) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} u(x_n, t_m) e^{\left(-\frac{2i\pi s x_n}{l}\right)}, s = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.11)$$

dengan  $c_s(m)$  adalah koefisien Fourier. Invers dari deret Fourier diberikan

$$u(x_n, t_m) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} c_s(m) e^{\left(-\frac{2i\pi s x_n}{l}\right)}, n = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (2.12)$$

Fungsi  $u(x_n, t_m)$  yang didapatkan dari koefisien Fourier  $c_s(m)$ , perhatikan bahwa  $u(x_n, t_m) = u(x_0, t_m)$ , sehingga  $u(x_n, t_m)$  adalah periodik. Deret Fourier dari  $u(x_n \pm h, t_m)$  dan  $u(x_n, t_m \pm k)$  diberikan sebagai  $c_s(m) e^{\left(\pm \frac{2i\pi s x_n}{l}\right)}$  dan  $c_s(m + 1)$ , dengan hal serupa untuk setiap kenaikan  $x$  dan  $t$ .

Sebagai hasil, jika dipertimbangkan persamaan beda hingga

$$u(x_n, t_m \pm k) = au(x_n \pm h, t_m) + bu(x_n, t_m) + cu(x_n - h, t_m) \quad (2.13)$$

deret Fourier yang menghasilkan hubungan rekursi

$$c_s(m + 1) = c_s(m) \left[ ae^{\left(\frac{2i\pi s x_n}{l}\right)} + b + ce^{\left(-\frac{2i\pi s x_n}{l}\right)} \right] \quad (2.14)$$

Solusi dari hubungan rekursi adalah

$$c_s(m + 1) = c_s(0) \left[ ae^{\left(\frac{2i\pi s x_n}{l}\right)} + b + ce^{\left(-\frac{2i\pi s x_n}{l}\right)} \right]^m \quad (2.15)$$

dengan  $c_s(0)$  adalah kondisi awal dari deret Fourier untuk masalah tersebut.

Solusi dari persamaan beda adalah

$$u(x_n, t_m) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} c_s(0) \left[ ae^{\left(\frac{2i\pi s x_n}{l}\right)} + b + ce^{\left(-\frac{2i\pi s x_n}{l}\right)} \right]^m e^{\left(\frac{2i\pi s x_n}{l}\right)}, n = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (2.16)$$

Untuk syarat kestabilan  $\left[ ae^{\left(\frac{2i\pi s x_n}{l}\right)} + b + ce^{\left(-\frac{2i\pi s x_n}{l}\right)} \right]^m$  pada persamaan (2.16)

harus terbatas dan bernilai mutlak pada  $m \rightarrow \infty$  untuk semua  $s$  yang relevan.

Sebagai hasil solusi  $u(x_n, t_m)$  tidak dapat bertumbuh tanpa  $t_m \rightarrow \infty$ . Ini berarti

bahwa

$$\left[ ae^{\left(\frac{2i\pi s x_n}{l}\right)} + b + ce^{\left(-\frac{2i\pi s x_n}{l}\right)} \right] \leq 1 \quad (2.17)$$

Untuk semua  $s$  yang relevan, dan ini adalah kondisi kestabilan *Von Neumann*.

Sebagai jumlah subdivisi  $N \rightarrow \infty$ , kenaikan  $h = \frac{l}{N}$  mendekati nol,  $\frac{2\pi sh}{l} = \frac{2\pi s}{N}$  berada pada interval  $[0, 2\pi]$ . Sehingga kondisi kestabilan *Von Neumann* dapat diberikan sebagai  $\beta = \frac{2\pi sh}{l}$ ,

$$|\rho| \equiv |ae^{i\beta} + b + ce^{-i\beta}| \leq 1, 0 \leq \beta \leq 2\pi \quad (2.18)$$

Telah ditunjukkan  $u(x_n, t_m)$  dinyatakan sebagai jumlah kelipatan konstan  $\rho^m e^{i\beta n}$  yang disebut sebagai deret Fourier.  $\rho^m e^{i\beta n} \approx \rho^n e^{iaj} = u_j^n$ . Untuk lebih jelasnya akan diperlihatkan contoh penerapan kestabilan pada persamaan Transport  $u_t + du_x = 0$ , untuk  $(x, t) \in [0, L] \times [0, T]$  dengan syarat awal  $u(x, 0) = f(x)$ , untuk  $0 \leq x \leq L$  dan telah diketahui mempunyai solusi eksak  $u(x, t) = f(x - dt)$ . Bentuk diskritisasi menggunakan skema eksplisit dari persamaan Transport adalah  $u_j^{n+1} = (1 - C)u_j^n + Cu_{j-1}^n$ , dengan  $C = \frac{d\Delta t}{\Delta x}$ . Kemudian substitusikan  $u_j^n = \rho^n e^{iaj}$  ke dalam bentuk diskrit persamaan Transport dan kemudian dibagi dengan  $\rho^n e^{iaj}$  dan diperoleh  $\rho = 1 - C(1 - e^{-ia})$ . Kemudian substitusikan  $e^{\pm ia} = \cos a \pm i \sin a$  sehingga menjadi  $\rho = 1 - C(1 - \cos a) - iC \sin a$ . Persamaan tersebut stabil jika dan hanya jika  $|\rho| < 1$  atau

$$\begin{aligned} |\rho|^2 &= \left(1 - 2C \sin^2 a \frac{a}{2}\right)^2 + (C \sin a)^2 \leq 1 \\ 1 - 4C \sin^2 \frac{a}{2} + 4C^2 \sin^4 \frac{a}{2} + 4C^2 \sin^2 \frac{a}{2} \cos^2 \frac{a}{2} &\leq 1 \\ \left(4C \sin^2 \frac{a}{2}\right) \left(-1 + C \sin^2 \frac{a}{2} + C \cos^2 \frac{a}{2}\right) &\leq 0 \end{aligned}$$

$$4C(C - 1)\sin^2 \frac{a}{2} \leq 0$$

Ketaksamaan terakhir terpenuhi untuk setiap  $a \in R$  jika dan hanya jika  $0 \leq C = \frac{d\Delta t}{\Delta x} \leq 1$ . Jadi syarat kestabilan skema eksplisit adalah  $0 \leq \frac{d\Delta t}{\Delta x} \leq 1$  (Hoffman, 1992:688-689).

#### 2.4.2 Analisis Konsistensi

Menurut Zauderer (2006:742), solusi numerik dikatakan konvergen apabila stabil dan konsisten. Jika solusi numerik tersebut konvergen maka solusi numerik mendekati solusi analitik. Kriteria konsistensi merupakan kondisi ideal dari solusi metode beda hingga sesuai dengan solusi eksak pada persamaan diferensial parsial.

Konsistensi menunjukkan bahwa solusi dengan metode numerik merupakan pendekatan solusi eksak pada persamaan diferensial parsial. Jika  $\Delta x \rightarrow 0$  dan  $\Delta t \rightarrow 0$ , maka solusi yang didapatkan sama dengan solusi eksak. Jika pada solusi pendekatan mendekati solusi eksak, maka konsistensi terpenuhi.

Untuk lebih jelasnya akan diperlihatkan contoh penerapan konsistensi pada persamaan Transport  $u_t + du_x = 0$ , untuk  $(x, t) \in [0, L] \times [0, T]$  dengan syarat awal  $u(x, 0) = f(x)$ , untuk  $0 \leq x \leq L$  dan telah diketahui mempunyai solusi eksak  $u(x, t) = f(x - dt)$ . Bentuk diskritisasi menggunakan skema eksplisit dari persamaan Transport adalah  $u_j^{n+1} = (1 - C)u_j^n + Cu_{j-1}^n$ , dengan  $C = \frac{d\Delta t}{\Delta x}$ .

Perhatikan ekspansi Taylor  $u_j^{n+1}$  dan  $u_{j-1}^n$  masing-masing di sekitar  $u_j^n$  berikut:

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \Delta t u_t|_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt}|_j^n + \dots \quad (2.19)$$

$$u_{j-1}^n = u_j^n - \Delta x u_x|_j^n + \frac{1}{2} \Delta x^2 u_{xx}|_j^n + \dots \quad (2.20)$$

Susbtitusikan (2.19) dan (2.20) ke dalam bentuk diskrit persamaan Transport dan didapatkan  $(u_t|_j^n + du_x|_j^n) + \frac{1}{2} d(d\Delta t - \Delta x)u_{xx}|_j^n + \dots = 0$ . Suku pertama persamaan di atas adalah persamaan Transport. Suku kedua dan seterusnya adalah suku tambahan yang didapatkan saat melakukan diskritisasi dengan metode beda hingga yang disebut *truncation error*. *Truncation error* yang didapatkan adalah  $\frac{1}{2} d(d\Delta t - \Delta x)u_{xx}|_j^n$ . Perhatikan bahwa  $\Delta t \rightarrow 0$  dan  $\Delta x \rightarrow 0$ , maka *truncation error* mendekati nol. Jadi skema eksplisit konsisten terhadap persamaan Transport (Hoffman, 1992:544-545).

## 2.5 Kajian Kesempurnaan dalam Islam

Manusia adalah salah satu ciptaan Allah Swt. yang sempurna. Allah menciptakan manusia dalam bentuk yang paling sempurna dan melengkapinya dengan sifat yang unggul. Keunggulannya dibandingkan seluruh makhluk sebagaimana ditunjukkan oleh kemampuan intelektualnya yang khas dalam berpikir, memahami, dan kesiapannya untuk belajar dalam mengembangkan budaya tidak perlu dipertanyakan lagi. Seperti pada firman Allah Swt. dalam al-Quran surat al-Isra' /17:70:

وَلَقَدْ كَرَّمْنَا بَنِي آدَمَ وَحَمَلْنَاهُمْ فِي الْبَحْرِ وَرَزَقْنَاهُمْ مِّنَ الطَّيِّبَاتِ وَفَضَّلْنَاهُمْ عَلَى كَثِيرٍ مِّمَّنْ خَلَقْنَا

تَفْضِيلًا ﴿٧٠﴾

“Dan sesungguhnya telah Kami muliakan anak-anak Adam, Kami angkut mereka di daratan dan di lautan, Kami beri mereka rezki dari yang baik-baik dan Kami

*lebihkan mereka dengan kelebihan yang sempurna atas kebanyakan makhluk yang telah Kami ciptakan“ (QS. al-Isra’/17:70).*

Dari ayat diatas menerangkan dengan jelas bahwasannya manusia adalah makhluk Allah Swt.yang diciptakan dengan kelebihan yang sempurna.Ayat diatas adalah bukti nyata bahwa manusia adalah makhluk sempurna (tidak ada keraguan atas Firman Allah Swt.). Untuk melihat kesempurnaan diri manusia, cobalah untuk bercermin.Lihatlah betapa sempurna, dari ujung kaki sampai ujung rambut. Sebagai contoh sederhana, amatilah begitu sempurnanya bulu mata. Bentuk, panjang, dan posisinya begitu proporsional dan sempurna.

Manusia menganggap semua kebutuhan ini adalah fenomena alam.Namun, sebagai manusia keperluan perawatan tersebut memiliki tujuan tersendiri. Setiap detail kebutuhan manusia diciptakan secara khusus. Seperti pada firman Allah Swt. dalam al-Quran surat al-Nisaa’/4:28:

يُرِيدُ اللَّهُ أَنْ يُخَفِّفَ عَنْكُمْ وَخَلَقَ الْإِنْسَانَ ضَعِيفًا ﴿٢٨﴾

*“Allah hendak memberikan keringanan kepadamu dan manusia dijadikan bersifat lemah“ (QS.al-Nisaa’/4:28).*

Dari ayat di atas dijelaskan bahwa manusia selalu mempunyai kekurangan. Kebutuhan manusia yang tanpa batas diciptakan dengan sengaja, agar manusia mengerti bahwa dirinya adalah hamba Allah dan bahwa dunia ini adalah tempat tinggalnya yang sementara. Manusia tidak memiliki kekuasaan apapun terhadap sesuatu yang akan terjadi pada dirinya. Sebagaimana halnya, manusia tidak pernah mengetahui di mana atau bagaimana manusia akan meninggal. Lebih lanjut lagi, seluruh usahanya untuk membatasi faktor-faktor yang berpengaruh negatif bagi hidupnya adalah sia-sia dan tanpa harapan.

Hal ini juga dapat direpresentasikan dalam penyelesaian persamaan difusi menggunakan metode *Crank-Nicolson*. Menurut Durmin (2013:59) metode *Crank-Nicolson* merupakan metode terbaik di antara metode beda hingga yang lain. Dikatakan bahwa metode tersebut mempunyai nilai akurasi yang relatif lebih kecil dibandingkan dengan beberapa metode yang lain. Meskipun telah dikatakan bahwa metode *Crank-Nicolson* adalah metode yang terbaik antara metode bedahingga yang lainnya, namun metode ini tetap memiliki *error*. Tidak ada satu metodepun yang tidak memiliki *error* dalam penerapannya. Sehingga perlu dilakukan pendekatan nilai yang berulang-ulang untuk mendapatkan nilai dengan *error* yang relatif kecil.

### BAB III PEMBAHASAN

#### 3.1 Solusi Persamaan Difusi dengan Skema *Crank-Nicolson*

Persamaan difusi yang digunakan adalah persamaan (2.1) yang akan dianalisis dengan skema *Crank-Nicolson*. Mengacu pada persamaan (2.4), maka bentuk diskrit dari persamaan (2.1) adalah sebagai berikut

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \frac{1}{2} \left( a^n \frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{\Delta x^2} + a^n \frac{u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}}{\Delta x^2} \right) = f_j^n \quad (3.1)$$

Sehingga diperoleh

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \left( a^n \frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{2\Delta x^2} + a^n \frac{u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}}{2\Delta x^2} \right) + f_j^n \quad (3.2)$$

Kemudian untuk semua variabel dengan superskrip  $n$  dikelompokkan ke ruas kanan, sehingga

$$\begin{aligned} - \left[ \frac{a^n}{2\Delta x^2} \right] u_{j-1}^{n+1} + \left[ \frac{1}{\Delta t} + \frac{a^n}{\Delta x^2} \right] u_j^{n+1} - \left[ \frac{a^n}{2\Delta x^2} \right] u_{j+1}^{n+1} = \\ \left[ \frac{a^n}{2\Delta x^2} \right] u_{j-1}^n + \left[ \frac{1}{\Delta t} - \frac{a^n}{\Delta x^2} \right] u_j^n + \left[ \frac{a^n}{2\Delta x^2} \right] u_{j+1}^n + f_j^n \end{aligned} \quad (3.3)$$

diasumsikan sebagai berikut:

$$A_j = C_j = D_j = F_j = \frac{a^n}{2\Delta x^2}; \quad B_j = \frac{1}{\Delta t} + \frac{a^n}{\Delta x^2}; \quad E_j = \frac{1}{\Delta t} - \frac{a^n}{\Delta x^2},$$

Sehingga persamaan diatas dapat ditulis kembali sebagai

$$-A_j u_{j-1}^{n+1} + B_j u_j^{n+1} - C_j u_{j+1}^{n+1} = D_j u_{j-1}^n + E_j u_j^n + F_j u_{j+1}^n + f_j^n \quad (3.4)$$

Untuk  $n = 1, 2, \dots, M - 1$  dan  $j = 1, 2, \dots, M$ . Misalkan  $M = 5$ ,  $M$  adalah banyaknya iterasi, maka pada persamaan (3.4) akan diperoleh suatu sistem persamaan, yaitu:

Untuk  $n = 1$  dan  $j = 1,2,3,4,5$

$$\begin{aligned} -A_1u_0^2 + B_1u_1^2 - C_1u_2^2 &= D_1u_0^1 + E_1u_1^1 + F_1u_2^1 + f_1^1 \\ -A_2u_1^2 + B_2u_2^2 - C_2u_3^2 &= D_2u_1^1 + E_2u_2^1 + F_2u_3^1 + f_2^1 \\ -A_3u_2^2 + B_3u_3^2 - C_3u_4^2 &= D_3u_2^1 + E_3u_3^1 + F_3u_4^1 + f_3^1 \\ -A_4u_3^2 + B_4u_4^2 - C_4u_5^2 &= D_4u_3^1 + E_4u_4^1 + F_4u_5^1 + f_4^1 \\ -A_5u_4^2 + B_5u_5^2 - C_5u_6^2 &= D_5u_4^1 + E_5u_5^1 + F_5u_6^1 + f_5^1 \end{aligned}$$

Untuk  $n = 2$  dan  $j = 1,2,3,4,5$

$$\begin{aligned} -A_1u_0^3 + B_1u_1^3 - C_1u_2^3 &= D_1u_0^2 + E_1u_1^2 + F_1u_2^2 + f_1^2 \\ -A_2u_1^3 + B_2u_2^3 - C_2u_3^3 &= D_2u_1^2 + E_2u_2^2 + F_2u_3^2 + f_2^2 \\ -A_3u_2^3 + B_3u_3^3 - C_3u_4^3 &= D_3u_2^2 + E_3u_3^2 + F_3u_4^2 + f_3^2 \\ -A_4u_3^3 + B_4u_4^3 - C_4u_5^3 &= D_4u_3^2 + E_4u_4^2 + F_4u_5^2 + f_4^2 \\ -A_5u_4^3 + B_5u_5^3 - C_5u_6^3 &= D_5u_4^2 + E_5u_5^2 + F_5u_6^2 + f_5^2 \end{aligned}$$

Untuk  $n = 3$  dan  $j = 1,2,3,4,5$

$$\begin{aligned} -A_1u_0^4 + B_1u_1^4 - C_1u_2^4 &= D_1u_0^3 + E_1u_1^3 + F_1u_2^3 + f_1^3 \\ -A_2u_1^4 + B_2u_2^4 - C_2u_3^4 &= D_2u_1^3 + E_2u_2^3 + F_2u_3^3 + f_2^3 \\ -A_3u_2^4 + B_3u_3^4 - C_3u_4^4 &= D_3u_2^3 + E_3u_3^3 + F_3u_4^3 + f_3^3 \\ -A_4u_3^4 + B_4u_4^4 - C_4u_5^4 &= D_4u_3^3 + E_4u_4^3 + F_4u_5^3 + f_4^3 \\ -A_5u_4^4 + B_5u_5^4 - C_5u_6^4 &= D_5u_4^3 + E_5u_5^3 + F_5u_6^3 + f_5^3 \end{aligned}$$

Untuk  $n = 4$  dan  $j = 1,2,3,4,5$

$$\begin{aligned} -A_1u_0^5 + B_1u_1^5 - C_1u_2^5 &= D_1u_0^4 + E_1u_1^4 + F_1u_2^4 + f_1^4 \\ -A_2u_1^5 + B_2u_2^5 - C_2u_3^5 &= D_2u_1^4 + E_2u_2^4 + F_2u_3^4 + f_2^4 \\ -A_3u_2^5 + B_3u_3^5 - C_3u_4^5 &= D_3u_2^4 + E_3u_3^4 + F_3u_4^4 + f_3^4 \\ -A_4u_3^5 + B_4u_4^5 - C_4u_5^5 &= D_4u_3^4 + E_4u_4^4 + F_4u_5^4 + f_4^4 \\ -A_5u_4^5 + B_5u_5^5 - C_5u_6^5 &= D_5u_4^4 + E_5u_5^4 + F_5u_6^4 + f_5^4 \end{aligned}$$

Dengan nilai awal  $u(x, 1) = g(x)$ ,  $x \in [0, \pi]$ , maka

$$u_j^5 = \frac{\cos(1) \sin(x_j)}{\exp(1^2 + 1)}$$

Sedangkan untuk nilai batas  $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ ,  $t \in [0, 1]$ , maka

$$u_0^n = u_5^n = 0$$

Dengan adanya nilai awal dan nilai batas, maka sistem persamaan dapat dibentuk dalam bentuk matriks yaitu:

Untuk  $n = 1$  dan  $j = 1,2,3,4,5$

$$\begin{bmatrix} B_1 & -C_1 & 0 & 0 & 0 \\ -A_2 & B_2 & -C_2 & 0 & 0 \\ 0 & -A_3 & B_3 & -C_3 & 0 \\ 0 & 0 & -A_4 & B_4 & -C_4 \\ 0 & 0 & 0 & -A_5 & B_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^2 \\ u_2^2 \\ u_3^2 \\ u_4^2 \\ u_5^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \end{bmatrix}$$

Untuk  $n = 2$  dan  $j = 1,2,3,4,5$

$$\begin{bmatrix} B_1 & -C_1 & 0 & 0 & 0 \\ -A_2 & B_2 & -C_2 & 0 & 0 \\ 0 & -A_3 & B_3 & -C_3 & 0 \\ 0 & 0 & -A_4 & B_4 & -C_4 \\ 0 & 0 & 0 & -A_5 & B_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^3 \\ u_2^3 \\ u_3^3 \\ u_4^3 \\ u_5^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \end{bmatrix}$$

Untuk  $n = 3$  dan  $j = 1,2,3,4,5$

$$\begin{bmatrix} B_1 & -C_1 & 0 & 0 & 0 \\ -A_2 & B_2 & -C_2 & 0 & 0 \\ 0 & -A_3 & B_3 & -C_3 & 0 \\ 0 & 0 & -A_4 & B_4 & -C_4 \\ 0 & 0 & 0 & -A_5 & B_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^4 \\ u_2^4 \\ u_3^4 \\ u_4^4 \\ u_5^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \end{bmatrix}$$

Untuk  $n = 4$  dan  $j = 1,2,3,4,5$

$$\begin{bmatrix} B_1 & -C_1 & 0 & 0 & 0 \\ -A_2 & B_2 & -C_2 & 0 & 0 \\ 0 & -A_3 & B_3 & -C_3 & 0 \\ 0 & 0 & -A_4 & B_4 & -C_4 \\ 0 & 0 & 0 & -A_5 & B_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^5 \\ u_2^5 \\ u_3^5 \\ u_4^5 \\ u_5^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \end{bmatrix}$$

Sehingga secara umum matriks tridiagonalnya adalah:

$$\begin{bmatrix} B_1 & C_1 & \cdots & 0 & 0 \\ A_2 & B_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_{M-2} & C_{M-2} \\ 0 & 0 & \cdots & A_{M-1} & B_{M-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ \vdots \\ u_{M-2}^{n+1} \\ u_{M-1}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Untuk  $n = 1, 2, \dots, M - 1$  dan  $j = 1, 2, \dots, N$ , maka matriksnya  $Au_j^{n+1} = D_j$ , dimana  $A$  dan  $B$  adalah matriks tridiagonal dengan ukuran  $(M - 1) \times (M - 1)$  dan unsur  $u_j^n$  dan  $f_j^n$  diketahui dan selesaiannya adalah  $u_j^{n+1} = A^{-1}(D_j)$  yang berukuran  $(M - 1) \times 1$ .

## 3.2 Keakuratan Solusi Hasil Solusi Skema Crank-Nicolson

### 3.2.1 Analisis Kestabilan Hasil Solusi Skema Crank-Nicolson

Suatu persamaan beda hingga dikatakan konvergen apabila konsisten dan stabil. Dalam hal ini digunakan stabilitas *Von Neumann* untuk mengetahui kestabilannya dengan menggunakan deret Fourier.

Tahap pertama akan dilakukan analisis kestabilan. Untuk mengetahui kestabilan metode yang digunakan, maka perlu melakukan uji kestabilan dengan menggunakan analisis stabilitas *Von Neumann*, sehingga syarat kestabilan dari persamaan (3.2) yang terlebih dahulu dikalikan dengan  $\Delta t$ , sehingga menjadi:

$$u_j^{n+1} - u_j^n = \left( a^n \Delta t \frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{2\Delta x^2} + a^n \Delta t \frac{u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}}{2\Delta x^2} \right) + \Delta t f_j^n \quad (3.6)$$

Kemudian dapat dicari dengan cara mensubstitusikan  $u_j^n = \rho^n e^{iaj}$ ,  $\forall i = \sqrt{-1}$  ke dalam persamaan tersebut dan  $\Delta t f_j^n$  dianggap kecil, sehingga

$$\begin{aligned} \rho^{n+1}e^{iaj} - \rho^n e^{iaj} &= \\ \frac{a^n \Delta t}{2\Delta x^2} (\rho^n e^{ia(j-1)} - 2\rho^n e^{iaj} + \rho^n e^{ia(j+1)}) + & \quad (3.7) \\ \frac{a^n \Delta t}{2\Delta x^2} (\rho^{(n+1)} e^{ia(j-1)} - 2\rho^{(n+1)} e^{iaj} + \rho^{(n+1)} e^{ia(j+1)}) & \end{aligned}$$

Untuk penyederhanaan, persamaan (3.7) dibagi dengan  $\rho^n e^{iaj}$ , misalkan  $a^n$  diasumsikan sebagai  $k$  sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \rho - 1 &= \frac{k\Delta t}{2\Delta x^2} (e^{-ia} - 2 + e^{ia}) + \frac{k\Delta t}{2\Delta x^2} (\rho e^{-ia} - 2\rho + \rho e^{ia}), \\ \rho - \frac{k\Delta t}{2\Delta x^2} (\rho e^{-ia} - 2\rho + \rho e^{ia}) &= 1 + \frac{k\Delta t}{2\Delta x^2} (e^{-ia} - 2 + e^{ia}), \\ \rho \left[ 1 - \frac{k\Delta t}{2\Delta x^2} (e^{-ia} - 2 + e^{ia}) \right] &= 1 + \frac{k\Delta t}{2\Delta x^2} (e^{-ia} - 2 + e^{ia}), \\ \rho &= \frac{1 + \frac{k\Delta t}{2\Delta x^2} (e^{-ia} - 2 + e^{ia})}{\left[ 1 - \frac{k\Delta t}{2\Delta x^2} (e^{-ia} - 2 + e^{ia}) \right]} \quad (3.8) \end{aligned}$$

Karena  $e^{\pm ia} = \cos a \pm i \sin a$ , maka persamaan (3.8) dapat ditulis

$$\rho = \frac{1 + \frac{k\Delta t}{2\Delta x^2} (\cos a - i \sin a - 2 + \cos a + i \sin a)}{\left[ 1 - \frac{k\Delta t}{2\Delta x^2} (\cos a - i \sin a - 2 + \cos a + i \sin a) \right]} \quad (3.9)$$

Sehingga diperoleh

$$\rho = \frac{1 + \frac{k\Delta t}{2\Delta x^2} (2 \cos a - 2)}{\left[ 1 - \frac{k\Delta t}{2\Delta x^2} (2 \cos a - 2) \right]} \quad (3.10)$$

Misalkan  $\frac{k\Delta t}{2\Delta x^2} = S$

$$|\rho| = \sqrt{\left[ \frac{1 + S(2 \cos a - 2)}{[1 - S(2 \cos a - 2)]} \right]^2} \quad (3.11)$$

Persamaan stabil jika dan hanya jika  $|\rho| < 1$  atau

$$\sqrt{\left[\frac{1 + S(2 \cos a - 2)}{1 - S(2 \cos a - 2)}\right]^2} \leq 1$$

$$\frac{1 - 4S + 4S \cos a + 4S^2 \cos^2 a - 8S^2 \cos a + 4S^2}{1 + 4S - 4S \cos a + 4S^2 \cos^2 a - 8S^2 \cos a + 4S^2} \leq 1$$

$$\frac{1 - 4S + 4S \cos a}{1 + 4S - 4S \cos a} \leq 1$$

$$\frac{1 + 4S(\cos a - 1)}{1 - 4S(\cos a - 1)} \leq 1 \quad (3.12)$$

Karena  $-2 \leq \cos a - 1 \leq 0$ , maka persamaan (3.12) terpenuhi untuk setiap  $S \in R$ . Sehingga didapatkan kestabilan dari persamaan difusi menggunakan skema *Crank-Nicolson* adalah stabil tanpa syarat.

### 3.2.2 Analisis Konsistensi Hasil Solusi Skema *Crank-Nicolson*

Salah satu syarat solusi numerik dapat dikatakan akurat apabila solusi yang didapatkan adalah konsisten. Dalam hal ini dapat menggunakan ekspansi deret Taylor untuk mengetahui kekonsistenan.

Selanjutnya akan dilakukan analisis konsistensi dengan menggunakan ekspansi deret Taylor yang disubstitusikan ke dalam persamaan (3.2), ekspansi deret Taylor yang digunakan dalam persamaan (3.2) adalah

$$u_j^{n\pm 1} = u_j^n \pm \Delta t u_t|_j^n + \frac{1}{2} \Delta x^2 u_{tt}|_j^n \pm \frac{1}{6} \Delta t^3 ttt|_j^n + \dots \quad (3.16)$$

$$u_{j\pm 1}^{n+1} = u_j^n \pm \Delta t u_t|_j^n \pm \Delta x u_x|_j^n + \frac{1}{2}(\Delta t^2 u_{tt}|_j^n + 2\Delta t \Delta x u_{tx}|_j^n + \Delta x^2 u_{xx}|_j^n) + \quad (3.17)$$

$$\frac{1}{6}(\Delta t^3 u_{ttt}|_j^n + 3\Delta t^2 \Delta x u_{ttx}|_j^n + 3\Delta t \Delta x^2 u_{txx}|_j^n + \Delta x^3 u_{xxx}|_j^n) + \dots$$

$$u_{j\pm 1}^n = u_j^n \pm \Delta x u_x|_j^n + \frac{1}{2} \Delta x^2 u_{xx}|_j^n \pm \frac{1}{6} \Delta x^3 u_{xxx}|_j^n + \dots \quad (3.18)$$

Untuk penyederhanaan, maka persamaan (3.16), (3.17), dan (3.18) dapat disubstitusikan ke dalam persamaan (3.2) yang dapat diuraikan sebagai berikut:

$$u_j^{n+1} - u_j^n = \Delta t u_t|_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt}|_j^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 u_{ttt}|_j^n + \frac{1}{24} \Delta t^4 u_{tttt}|_j^n + \frac{1}{120} \Delta t^5 u_{ttttt}|_j^n + \dots$$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = u_t|_j^n + \frac{1}{2} \Delta t u_{tt}|_j^n + \frac{1}{6} \Delta t^2 u_{ttt}|_j^n + \frac{1}{24} \Delta t^3 u_{tttt}|_j^n + \frac{1}{120} \Delta t^4 u_{ttttt}|_j^n + \dots \quad (3.19)$$

$$u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n = \left[ u_j^n - \Delta x u_x|_j^n + \frac{1}{2} \Delta x^2 u_{xx}|_j^n - \frac{1}{6} \Delta x^3 u_{xxx}|_j^n + \frac{1}{24} \Delta x^4 u_{xxxx}|_j^n - \frac{1}{120} \Delta x^5 u_{xxxxx}|_j^n + \dots \right] - 2u_j^n + \left[ u_j^n + \Delta x u_x|_j^n + \frac{1}{2} \Delta x^2 u_{xx}|_j^n + \frac{1}{6} \Delta x^3 u_{xxx}|_j^n + \frac{1}{24} \Delta x^4 u_{xxxx}|_j^n + \frac{1}{120} \Delta x^5 u_{xxxxx}|_j^n + \dots \right]$$

$$u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n = \Delta x^2 u_{xx}|_j^n + \frac{1}{12} \Delta x^4 u_{xxxx}|_j^n + \dots$$

$$\frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{2\Delta x^2} = \frac{1}{2} u_{xx}|_j^n + \frac{1}{24} \Delta x^2 u_{xxxx}|_j^n + \dots$$

$$a^n \frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{2\Delta x^2} = \frac{a^n}{2} u_{xx}|_j^n + \frac{a^n}{24} \Delta x^2 u_{xxxx}|_j^n + \dots \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned}
& u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1} = \\
& \left[ u_j^n + \Delta t u_t|_j^n - \Delta x u_x|_j^n + \right. \\
& \frac{1}{2} (\Delta t^2 u_{tt}|_j^n + 2\Delta t \Delta x u_{tx}|_j^n + \Delta x^2 u_{xx}|_j^n) + \\
& \frac{1}{6} (\Delta t^3 u_{ttt}|_j^n - 3\Delta t^2 \Delta x u_{ttx}|_j^n - 3\Delta t \Delta x^2 u_{txx}|_j^n - \\
& \Delta x^3 u_{xxx}|_j^n) + \\
& \frac{1}{24} (\Delta t^4 u_{tttt}|_j^n + 4\Delta t \Delta x^3 u_{txxx}|_j^n + 6\Delta t^2 \Delta x^2 u_{ttxx}|_j^n + \\
& 4\Delta t^3 \Delta x u_{tttx}|_j^n + \Delta x^4 u_{xxxx}|_j^n) + \dots \left. \right] - \\
& \left[ 2u_j^n + 2\Delta t u_t|_j^n + \Delta t^2 u_{tt}|_j^n + \frac{1}{3} \Delta t^3 u_{ttt}|_j^n + \right. \\
& \frac{1}{12} \Delta t^4 u_{tttt}|_j^n + \frac{1}{60} \Delta t^5 u_{ttttt}|_j^n + \dots \left. \right] + \\
& \left[ u_j^n + \Delta t u_t|_j^n - \Delta x u_x|_j^n + \right. \\
& \frac{1}{2} (\Delta t^2 u_{tt}|_j^n + 2\Delta t \Delta x u_{tx}|_j^n + \Delta x^2 u_{xx}|_j^n) + \\
& \frac{1}{6} (\Delta t^3 u_{ttt}|_j^n - 3\Delta t^2 \Delta x u_{ttx}|_j^n - 3\Delta t \Delta x^2 u_{txx}|_j^n - \\
& \Delta x^3 u_{xxx}|_j^n) + \\
& \frac{1}{24} (\Delta t^4 u_{tttt}|_j^n + 4\Delta t \Delta x^3 u_{txxx}|_j^n + 6\Delta t^2 \Delta x^2 u_{ttxx}|_j^n + \\
& 4\Delta t^3 \Delta x u_{tttx}|_j^n + \Delta x^4 u_{xxxx}|_j^n) + \dots \left. \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1} = \\
& \Delta x^2 u_{xx}|_j^n + \Delta t \Delta x + \frac{1}{3} \Delta x^3 u_{xxx}|_j^n + \frac{1}{24} \Delta x^4 u_{xxx}|_j^n + \\
& 8\Delta t \Delta x^3 u_{txxx}|_j^n + 12\Delta t^2 \Delta x^2 u_{ttxx}|_j^n + 8\Delta t^3 \Delta x u_{tttx}|_j^n + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}}{2\Delta x^2} = \\
& \frac{1}{2}u_{xx}|_j^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} + \frac{1}{6}\Delta x u_{xxx}|_j^n + \frac{1}{24}\Delta x^2 u_{xx}|_j^n + \\
& 8\Delta t \Delta x^3 u_{txxx}|_j^n + 12\Delta t^2 \Delta x^2 u_{ttxx}|_j^n + 8\Delta t^3 \Delta x u_{tttx}|_j^n + \dots \\
& a^n \frac{u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}}{2\Delta x^2} = \\
& \frac{a^n}{2}u_{xx}|_j^n + a^n \frac{\Delta t}{\Delta x} + \frac{a^n}{6}\Delta x u_{xxx}|_j^n + \frac{a^n}{24}\Delta x^2 u_{xx}|_j^n + \\
& 8a^n \Delta t \Delta x^3 u_{txxx}|_j^n + 12a^n \Delta t^2 \Delta x^2 u_{ttxx}|_j^n + \\
& 8a^n \Delta t^3 \Delta x u_{tttx}|_j^n + \dots
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Selanjutnya untuk mengetahui pemotongan *error* pertama dari persamaan difusi maka substitusikan persamaan (3.19), (3.20) dan (3.21) ke dalam persamaan (3.2) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
& u_t|_j^n + \frac{1}{2}\Delta t u_{tt}|_j^n + \frac{1}{6}\Delta t^2 u_{ttt}|_j^n + \frac{1}{24}\Delta t^3 u_{tttt}|_j^n + \frac{1}{120}\Delta x^4 u_{tttt}|_j^n + \dots = \\
& \frac{a^n}{2}u_{xx}|_j^n + \frac{a^n}{24}\Delta x^2 u_{xxxx}|_j^n + \frac{a^n}{2}u_{xx}|_j^n + a^n \frac{\Delta t}{\Delta x} + \frac{a^n}{6}\Delta x u_{xxx}|_j^n + \\
& \frac{a^n}{24}\Delta x^2 u_{xx}|_j^n + 8a^n \Delta t \Delta x^3 u_{txxx}|_j^n + 12a^n \Delta t^2 \Delta x^2 u_{ttxx}|_j^n + \\
& 8a^n \Delta t^3 \Delta x u_{tttx}|_j^n + f|_j^n + \dots,
\end{aligned}$$

Persamaan tersebut dapat ditulis kembali sebagai berikut

$$\begin{aligned}
& \left( u_t - \frac{a^n}{2}u_{xx} - \frac{a^n}{2}u_{xx} - f \right) \Big|_j^n + \left( \frac{1}{2}u_{tt} - \frac{a^n}{\Delta x} - 8a^n \Delta x^3 u_{txxx} \right) \Delta t \Big|_j^n - \\
& \frac{a^n}{6}u_{xxx} \Delta x \Big|_j^n + \left( \frac{1}{6}u_{ttt} - 12a^n \Delta x^2 u_{ttxx} \right) \Delta t^2 \Big|_j^n - \\
& \frac{a^n}{12}u_{xxxx} \Delta x^2 \Big|_j^n + \dots = 0
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Suku pertama pada persamaan (3.22) adalah persamaan difusi yang telah diselesaikan. Suku kedua dan seterusnya adalah suku tambahan yang didapatkan

dari penyelesaian menggunakan persamaan beda hingga dan disebut *truncation error*. *Truncation error* atau galat pemangkasan yang didapatkan adalah

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{2} u_{tt} - \frac{a^n}{\Delta x} - 8a^n \Delta x^3 u_{txxx} \right) \Delta t \Big|_j^n - \frac{a^n}{6} u_{xxx} \Delta x \Big|_j^n + \\ & \left( \frac{1}{6} u_{ttt} - 12a^n \Delta x^2 u_{ttxx} \right) \Delta t^2 \Big|_j^n - \frac{a^n}{12} u_{xxxx} \Delta x^2 \Big|_j^n + \dots \end{aligned} \quad (3.23)$$

Persamaan (3.23) dikatakan konsisten jika

$$\lim_{(\Delta t, \Delta x) \rightarrow 0} \left( \frac{1}{2} u_{tt} - \frac{a^n}{\Delta x} - 8a^n \Delta x^3 u_{txxx} \right) \Delta t \Big|_j^n - \frac{a^n}{6} u_{xxx} \Delta x \Big|_j^n = 0.$$

Karena  $\Delta x$  dan  $\Delta t$  sangat kecil maka jumlah dari limit tersebut akan semakin kecil, karena berapapun nilai  $u_{tt}$ ,  $u_{txxx}$  dan  $u_{xxx}$  jika dikalikan dengan nilai dari  $\Delta t$  dan  $\Delta x$  akan semakin kecil. *Error* pemotongan yang dihasilkan akan menuju nol untuk  $\Delta x \rightarrow 0$  dan  $\Delta t \rightarrow 0$ . Jadi skema *Crank-Nicolson* konsisten terhadap persamaan difusi.

### 3.3 Simulasi dan Interpretasi Hasil Solusi Skema *Crank-Nicolson*

Penjelasan mengenai cara menyelesaikan persamaan difusi menggunakan skema *Crank-Nicolson* telah dibahas pada subbab sebelumnya. Untuk lebih memahami proses skema ini, akan ditunjukkan simulasi penyelesaian numerik persamaan difusi menggunakan skema *Crank-Nicolson*. Simulasi menggunakan program Matlab R2008a dan akan dilakukan interpretasi grafik terhadap hasil simulasi.

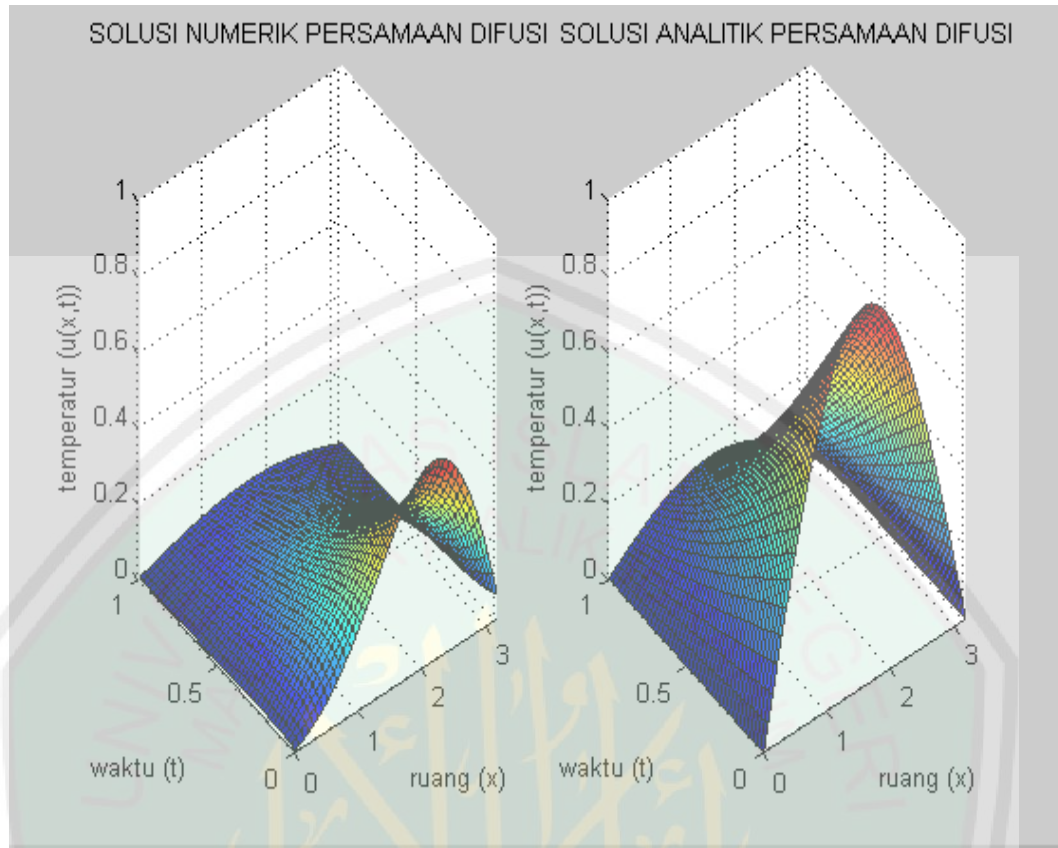
Persamaan Difusi yang akan diselesaikan adalah persamaan (2.1). Dari persamaan (2.1) didapatkan skema *Crank-Nicolson* pada persamaan (3.4). Kemudian persamaan (3.4) dilakukan iterasi dan didapatkan bentuk umum dari

persamaan (3.4) yaitu persamaan (3.5). Dari persamaan (3.5) dapat dicari solusi selesaiannya dengan menggunakan program. Dalam penyelesaiannya digunakan metode inversi dan didapatkan nilai dari  $u_j^{n+1}$ . Pemilihan nilai  $\Delta x$  dan  $\Delta t$  harus memenuhi syarat kestabilan yang telah ditentukan sebelumnya. Proses penyelesaian ini akan dilakukan secara berulang untuk mendapatkan solusi yang memenuhi batas waktu. Hasil dari  $u_j^{n+1}$  adalah matriks yang berukuran  $(M - 1) \times 1$ .

Kestabilan skema *Crank-Nicolson* didapatkan dari deret Fourier. Dengan syarat yang telah ditetapkan yaitu  $|\rho| \leq 1$ , karena jika tidak memenuhi syarat tersebut solusi dari skema *Crank-Nicolson* akan menunjukkan *error* yang semakin besar pada setiap kenaikan waktu. Hasil yang didapatkan dari deret Fourier adalah solusi persamaan difusi adalah tanpa syarat.

Konsistensi didapatkan dari ekspansi deret Taylor. Hasil yang didapatkan dari ekspansi deret Taylor dari solusi persamaan difusi menyatakan bahwa  $\Delta x \rightarrow 0$  dan  $\Delta t \rightarrow 0$ , sehingga solusi yang didapatkan sama dengan solusi eksak. Jadi pada solusi pendekatan mendekati solusi eksak, maka konsistensi terpenuhi.

Persamaan difusi (2.1) dengan kondisi batas dan kondisi awal yang telah diselesaikan secara numerik dengan skema *Crank-Nicolson*, menghasilkan grafik solusi numerik dan solusi analitik berikut:



Gambar 3.1 Grafik 3D Solusi Numerik dan Solusi Analitik Persamaan Difusi Menggunakan Skema *Crank-Nicolson*

Gambar 3.1 menunjukkan hasil simulasi tiga dimensi persamaan difusi terhadap ruang  $x$ , waktu  $t$  dan temperatur  $u(x, t)$  menggunakan skema *Crank-Nicolson* dan grafik tiga dimensi solusi analitik persamaan difusi. Pada grafik solusi numerik menunjukkan bahwa terjadi perbedaan yang signifikan dengan solusi analitik, hal tersebut dikarenakan pada solusi numerik dan solusi analitik matriks yang didapatkan tidak sama. Pada solusi numerik didapatkan matriks berukuran  $(M - 1) \times (M + 1)$  sedangkan pada solusi analitik didapatkan  $(M + 1) \times (M + 1)$ , jadi pada solusi numerik ada matriks berukuran  $2 \times (M + 1)$  yang tidak terbaca dalam solusi numerik.

Pada grafik solusi numerik diatas perubahan temperatur berjalan dari  $x = 0$  di  $t = 0$  berada pada temperatur  $u(x, t) = 0$  kemudian berjalan naik sampai pada temperatur terbesar yaitu pada  $x = 1,827$  dan  $t = 0$  dengan temperatur  $u(x, t) = 0,4855$  kemudian berjalan turun sampai pada  $x = \pi$  di  $t = 0$  dengan temperatur  $u(x, t) = 0$ . Pada grafik solusi analitik di atas perubahan temperatur berjalan secara sama yaitu dari  $x = 0$  di  $t$  berapapun berada pada temperatur  $u(x, t) = 0$  kemudian berjalan naik sampai pada temperatur terbesar yaitu pada  $x = 1,536$  dan  $t = 0$  dengan temperatur  $u(x, t) = 0,977$  kemudian berjalan turun sampai pada  $x = \pi$  di  $t = 0$  dengan temperatur  $u(x, t) = 0$ .

Perubahan temperatur pada solusi numerik dan solusi analitik bergerak secara sama. Perubahan temperatur terjadi secara signifikan yaitu pada ruang  $x = 0$  dengan temperatur yang awalnya kecil  $u(x, t) = 0$  kemudian perlahan mengalami kenaikan sampai pada ruang tengah  $x$ . Kemudian temperatur  $u(x, t)$  mengalami penurunan secara terus menerus sampai pada ruang  $x$  maksimal. Perubahan temperatur tersebut berjalan secara sama di  $t$  berapapun.

### 3.4 Istiqomah dan Iman

Solusi numerik harus memenuhi kriteria konvergen untuk memperoleh solusi yang mendekati solusi analitiknya. Kriteria konvergen adalah stabil dan konsisten. Berdasarkan hasil pembahasan di atas, penyelesaian persamaan difusi menggunakan skema *Crank-Nicolson* telah memenuhi kriteria konvergen. Hal ini menunjukkan bahwa untuk memperoleh solusi yang mendekati solusi analitiknya dibutuhkan beberapa tahapan, sebagaimana dengan meningkatkan keimanan. Kata iman sendiri berasal dari bahasa Arab yang artinya percaya. Sedangkan menurut

istilah iman adalah membenarkan dengan hati, diucapkan dengan lisan dan dimalkan dengan tindakan perbuatan. Dengan demikian, iman kepada Allah Swt. adalah membenarkan dengan hati bahwa Allah itu ada dengan segala sifat keagungan dan kesempurnaan-Nya, kemudian pengakuan itu diikrarkan dengan lisan serta dibuktikan dengan amal perbuatan secara nyata. Pada hakikatnya segala sesuatu itu membutuhkan tahapan untuk mencapai hasil yang diinginkan.

Salah satu yang dapat dilakukan adalah istiqomah. Secara istilah istiqomah berarti tegak lurus. Dalam kamus besar bahasa Indonesia istiqomah diartikan sebagai sikap teguh pendirian dan selalu konsekuen. Seseorang yang istiqomah adalah yang selalu mempertahankan keimanannya dalam situasi dan kondisi apapun. Selalu tegar menghadapi cobaan yang silih berganti dan tak mudah putus asa ataupun kecewa dalam menjalankan perintah agama. Seperti dalam surat Huud/11:112, yaitu:

ج  
فَأَسْتَقِمَّ كَمَا أُمِرْتَ وَمَنْ تَابَ مَعَكَ وَلَا تَطْغَوْا إِنَّهُ بِمَا تَعْمَلُونَ بَصِيرٌ ﴿١١٢﴾

*“Maka tetaplah kamu pada jalan yang benar, sebagaimana diperintahkan kepadamu dan (juga) orang yang telah taubat beserta kamu dan janganlah kamu melampaui batas. Sesungguhnya Dia Maha melihat apa yang kamu kerjakan” (QS.Huud/11:112).*

Ayat tersebut mengisyaratkan bahwa Rasulullah dan orang-orang yang bertaubat haruslah istiqomah. Orang beriman tanpa istiqomah dapat digambarkan sebagai orang yang telah menanam namun tidak merawat sehingga keimanannya layu, hancur diserang dosa bahkan hampir musnah. Sehingga ketika datang saatnya menghadap Allah manusia kebingungan karena tidak ada bekal pahala yang dapat dipetikinya. Seperti pada penyelesaian solusi persamaan difusi

menggunakan skema *Crank-Nicolson*, terlebih dahulu harus ditentukan apakah solusi pendekatan tersebut stabil dan konsisten. Stabil disini adalah jika *error* yang terjadi pada satu perhitungan waktu tidak menyebabkan peningkatan *error* pada perhitungan selanjutnya. Sebaliknya, jika *error* tumbuh bergantung waktu maka solusi menyimpang tidak stabil. Dalam ayat tersebut stabil direpresentasikan sebagai istiqomah apabila semakin lama seorang muslim semakin tidak istiqomah maka semakin menyimpang dari keimanannya.



## BAB IV

### PENUTUP

#### 4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan, dapat diperoleh kesimpulan berikut:

1. Penyelesaian numerik persamaan difusi menggunakan skema *Crank-Nicolson* dapat dilakukan dengan langkah-langkah yaitu melakukan diskritisasi pada persamaan difusi dengan menggunakan skema *Crank-Nicolson* untuk menghampiri solusi analitiknya, selanjutnya menentukan syarat kestabilan dan syarat konsistensi untuk menunjukkan bahwa skema yang digunakan tersebut memiliki solusi yang dapat mendekati solusi analitiknya. Setelah diperoleh syarat kestabilan dan konsistensi dari skema yang digunakan maka simulasi dari skema yang digunakan dapat dilakukan. Hasil simulasi menunjukkan bahwa penggunaan skema *Crank-Nicolson* pada persamaan difusi stabil dengan syarat tertentu.
2. Hasil diskritisasi skema *Crank-Nicolson* pada persamaan difusi stabil pada saat  $\Delta t$  dan  $\Delta x$  berapapun, karena skema *Crank-Nicolson*. Hasil diskritisasi memenuhi syarat konsistensi karena *error* pemotongannya menuju nol untuk  $\Delta x \rightarrow 0$  dan  $\Delta t \rightarrow 0$ . Jadi, hasil diskritisasi mendekati solusi analitik.
3. Pada simulasi dan interpretasi yang dilakukan pada solusi analitik dan solusi numerik menunjukkan bahwa solusi numerik merupakan solusi pendekatan dari solusi analitik. Perubahan temperatur terjadi secara sama pada solusi analitik dan solusi numerik, pada ruang  $x$  yaitu dari ruang  $x = 0$  dengan  $u(x, t) = 0$  selanjutnya naik secara terus menerus, kemudian nilai maksimal

terjadi pada titik tengah ruang  $x$  kemudian mengalami penurunan sampai terkecil pada ruang  $x = \pi$  dengan temperatur  $u(x, t) = 0$ . Sesuai dengan kondisi batas yang diberikan. Pada waktu  $t$  juga mengalami kesamaan, yaitu perubahan temperatur berjalan secara signifikan yaitu dari waktu  $t = 0$  dengan temperatur awal yang besar kemudian perlahan semakin kecil sampai pada  $t = 1$ .

#### 4.2 Saran

Penelitian selanjutnya akan lebih baik jika dilakukan penelitian tentang persamaan difusi yaitu persamaan perpindahan panas balik dengan metode-metode lain yang sekiranya lebih akurat jika dibandingkan dengan metode *Crank-Nicolson*. Selain itu, dapat dilakukan juga perbandingan orde *error* dan kestabilan dari beberapa metode numerik yang digunakan.

## DAFTAR PUSTAKA

- Almufid. 2007. *Implementasi Metode REP-IPB dalam Estimasi Error Pada Pelat Lentur dengan Elemen DKMQ*. Skripsi tidak dipublikasikan. Jakarta: Universitas Indonesia.
- As-Sa'di, S.S.B.N. 2007. *Tafsir As-Sa'di*. Jakarta: Pustaka Sahifa.
- Durmin. 2013. *Studi Perbandingan Perpindahan Panas Menggunakan Metode Beda Hingg adan Crank-Nicholson*. Skripsi tidak dipublikasikan. Surabaya: Institut Teknologi Sepuluh November.
- Djojodihardjo, H. 2000. *Metode Numerik*. Jakarta: PT Gramedia Pustaka Utama.
- Hoffman, J.D. 1992. *Numerical Methods for Engineers and Scientists Second Edition Revised and Expanded*. New York: Mc-Graw-Hill, Inc
- Le, T.M., Pham, Q.H., Dang, T.D., dan Nguyen, T.H. 2013. A Backward Parabolic Equation with a Time-Dependent Coefficient: Regularization and error estimates. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 237: 432-441.
- Ma'rifatillah. 2013. Ilmu Istiqomah dalam Al-quran dan Sunnah. (Online), (<http://islamiwiki.blogspot.com/2013/02/ilmu-istiqomah-dalam-alquran-dan-sunnah.html>), diakses 3 November 2014.
- Rasyid, H.S. 1976. *Fiqih Islam*. Jakarta: Tahiriyah Jakarta.
- Shihab, M.Q. 2002. *Tafsir Al-Mishbah Volume*. Jakarta: Lentera Hati.
- Ternat, F., Orelanna, O., dan Daripa, P. 2011. Two stable Methods with Numerical Experiments for Solving the Backward Heat Equation. *Journal of Applied Numerical Mathematics*, 61:266-284
- Triatmodjo, B. 2002. *Metode Numerik*. Yogyakarta: Beta Offset
- Zauderer, E. 2006. *Partial Differential Equation of Applied Mathematics Third Edition*. New York: John Wiley and Sons, Inc

## LAMPIRAN

### Lampiran 1. Program Persamaan Difusi menggunakan skema *Crank-Nicolson*

```
clc,clear all
format short
disp(' ');
disp(' PROGRAM SKEMA CRANK-NICHOLSON');
disp(' ');
N=input('masukkan partisi yang diinginkan = ');
T=1;
X=pi;
tic;
Dx = X/N; %partisi ruang
Dt = T/N; %partisi waktu
t=1:-Dt:0;
x=0:Dx:pi;
nx=length(x);
nt=length(t);

matsol=zeros(nx-1,nt-1);
matsel=zeros(nx-1,nt-1);

% Matrik u(x,T)
for i=1:nx-1
    V(i)=(cos(t(i))*sin(x(i)))/exp((t(i))^2+t(i)); % nilai awal
u(x,T)
end
matsol(:,nt)=V;

% Membangun matrik B
for j=1:N-1
    a=(2*t(j)+1)/(2*(Dx^2));
    b=(1/Dt)-((2*t(j)+1)/(Dx^2));
    c=(2*t(j)+1)/(2*(Dx^2));
    if j==1
        B(j,j) = b;
        B(j,j+1) = c;
    elseif j==N-1
        B(N-1,N-2) = a;
        B(N-1,N-1) = b;
    else
        B(j,j-1) = a;
        B(j,j) = b;
        B(j,j+1) = c;
    end
end

%membangun matrik A yang diinverskan
for j=1:N-1
    a=-((2*t(j+1)+1)/(2*(Dx^2)));
    b=(2*t(j+1)+1)/(Dx^2)+(1/Dt);
    c=-((2*t(j+1)+1)/(2*(Dx^2)));
    if j==1
        A(j,j) = b;
```

```

        A(j,j+1) = c;
    elseif j==N-1
        A(N-1,N-2) = a;
        A(N-1,N-1) = b;
    else
        A(j,j-1) = a;
        A(j,j) = b;
        A(j,j+1) = c;
    end
end

%batas
for j=N:-1
    matsol(1,j)=0; %batas bawah
    matsol(N+1,j)=0; %batas atas
end

%matrik yang hanya diambil dari matsol V
matV=matsol(2:N,1:N+1);

% untuk f(x,t) dan matriknya yang hanya diambil
for i=1:nx-1
    s(i)=- (5.425*(sin(t(i))*sin(x(i))/exp((t(i))^2+t(i))));
    s(i+1)=-
    (5.425*(sin(t(i+1))*sin(x(i+1))/exp((t(i+1))^2+t(i+1))));
    F(i)=(s(i)+s(i+1))/2;
end
matsel(:,N)=F;
matS=matsel(N,:);

%Solusi Crank-Nicolson
for j=N:-1:1
    matV(:,j)=A\ (B*matV(:,j+1)+matS(:,j));
end
matV

%PLOT
subplot(1,2,1)
[x1,t1]=meshgrid(x,t);
[x2,t2]=meshgrid(linspace(0,pi,N-1),t);
surf(x2',t2',matV)
xlabel('waktu (t)')
ylabel('ruang (x)')
zlabel('temperatur (u(x,t))')
grid on
title('SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN DIFUSI')
zlim([0 1])
xlim([0 pi])

%menentukan solusi eksak
for i=1:length(x)
    for j=1:length(t)
        ueksak(j,i)=((cos(t(j))*sin(x(i)))/(exp((t(j))^2+t(j))));
    end
end
end

```

```
%PLOT
subplot(1,2,2)
surf(x1,t1,ueksak)
xlabel('waktu (t)')
ylabel('ruang (x)')
zlabel('temperatur (u(x,t))')
grid on
title('SOLUSI ANALITIK PERSAMAAN DIFUSI')
zlim([0 1])
xlim([0 pi])
```

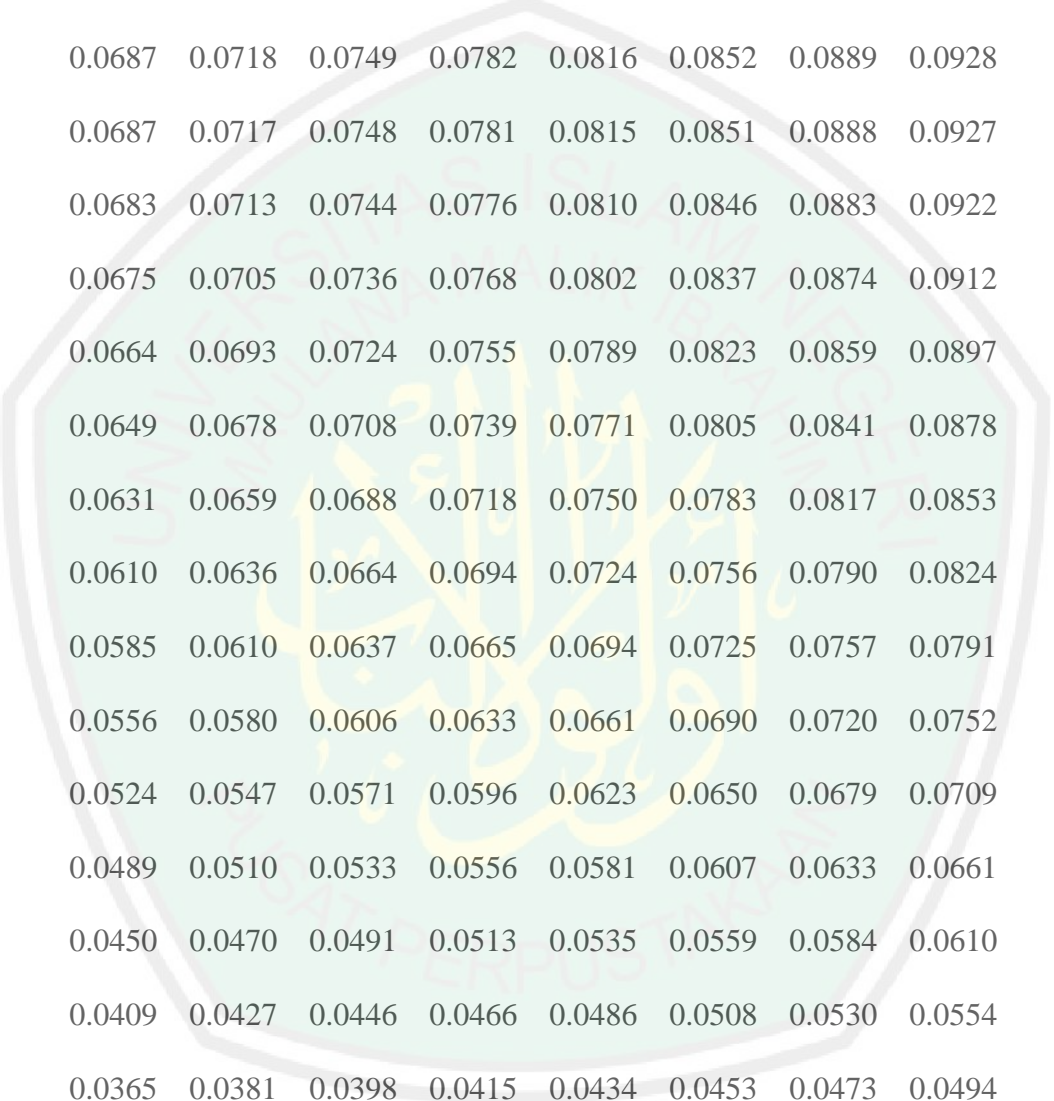


## Lampiran 2. Output Solusi Numerik

matV =

Columns 1 through 8

0.0043	0.0044	0.0046	0.0048	0.0050	0.0053	0.0055	0.0057
0.0085	0.0089	0.0092	0.0096	0.0101	0.0105	0.0110	0.0114
0.0127	0.0133	0.0138	0.0144	0.0151	0.0157	0.0164	0.0171
0.0169	0.0176	0.0184	0.0192	0.0200	0.0209	0.0218	0.0227
0.0210	0.0219	0.0229	0.0238	0.0249	0.0260	0.0271	0.0283
0.0250	0.0261	0.0273	0.0284	0.0297	0.0310	0.0323	0.0337
0.0290	0.0303	0.0316	0.0329	0.0344	0.0359	0.0374	0.0390
0.0329	0.0343	0.0358	0.0373	0.0390	0.0406	0.0424	0.0442
0.0366	0.0382	0.0399	0.0416	0.0434	0.0453	0.0472	0.0493
0.0402	0.0420	0.0438	0.0457	0.0477	0.0498	0.0519	0.0542
0.0437	0.0456	0.0476	0.0496	0.0518	0.0540	0.0564	0.0588
0.0470	0.0490	0.0512	0.0534	0.0557	0.0581	0.0607	0.0633
0.0501	0.0523	0.0546	0.0570	0.0594	0.0620	0.0647	0.0675
0.0531	0.0554	0.0578	0.0603	0.0629	0.0657	0.0685	0.0715
0.0558	0.0582	0.0608	0.0634	0.0662	0.0691	0.0721	0.0752
0.0583	0.0608	0.0635	0.0663	0.0692	0.0722	0.0753	0.0786
0.0606	0.0632	0.0660	0.0689	0.0719	0.0750	0.0783	0.0817
0.0626	0.0653	0.0682	0.0712	0.0743	0.0775	0.0809	0.0844
0.0644	0.0672	0.0701	0.0732	0.0764	0.0797	0.0832	0.0868



0.0658	0.0687	0.0717	0.0748	0.0781	0.0815	0.0851	0.0888
0.0670	0.0700	0.0730	0.0762	0.0795	0.0830	0.0866	0.0904
0.0679	0.0709	0.0740	0.0772	0.0806	0.0841	0.0878	0.0916
0.0685	0.0715	0.0746	0.0779	0.0813	0.0849	0.0886	0.0924
0.0687	0.0718	0.0749	0.0782	0.0816	0.0852	0.0889	0.0928
0.0687	0.0717	0.0748	0.0781	0.0815	0.0851	0.0888	0.0927
0.0683	0.0713	0.0744	0.0776	0.0810	0.0846	0.0883	0.0922
0.0675	0.0705	0.0736	0.0768	0.0802	0.0837	0.0874	0.0912
0.0664	0.0693	0.0724	0.0755	0.0789	0.0823	0.0859	0.0897
0.0649	0.0678	0.0708	0.0739	0.0771	0.0805	0.0841	0.0878
0.0631	0.0659	0.0688	0.0718	0.0750	0.0783	0.0817	0.0853
0.0610	0.0636	0.0664	0.0694	0.0724	0.0756	0.0790	0.0824
0.0585	0.0610	0.0637	0.0665	0.0694	0.0725	0.0757	0.0791
0.0556	0.0580	0.0606	0.0633	0.0661	0.0690	0.0720	0.0752
0.0524	0.0547	0.0571	0.0596	0.0623	0.0650	0.0679	0.0709
0.0489	0.0510	0.0533	0.0556	0.0581	0.0607	0.0633	0.0661
0.0450	0.0470	0.0491	0.0513	0.0535	0.0559	0.0584	0.0610
0.0409	0.0427	0.0446	0.0466	0.0486	0.0508	0.0530	0.0554
0.0365	0.0381	0.0398	0.0415	0.0434	0.0453	0.0473	0.0494
0.0318	0.0332	0.0347	0.0362	0.0378	0.0395	0.0412	0.0431
0.0269	0.0281	0.0293	0.0306	0.0320	0.0334	0.0349	0.0364
0.0218	0.0228	0.0238	0.0248	0.0259	0.0271	0.0283	0.0295
0.0165	0.0172	0.0180	0.0188	0.0196	0.0205	0.0214	0.0224
0.0111	0.0116	0.0121	0.0126	0.0132	0.0138	0.0144	0.0150

0.0056 0.0058 0.0061 0.0063 0.0066 0.0069 0.0072 0.0075

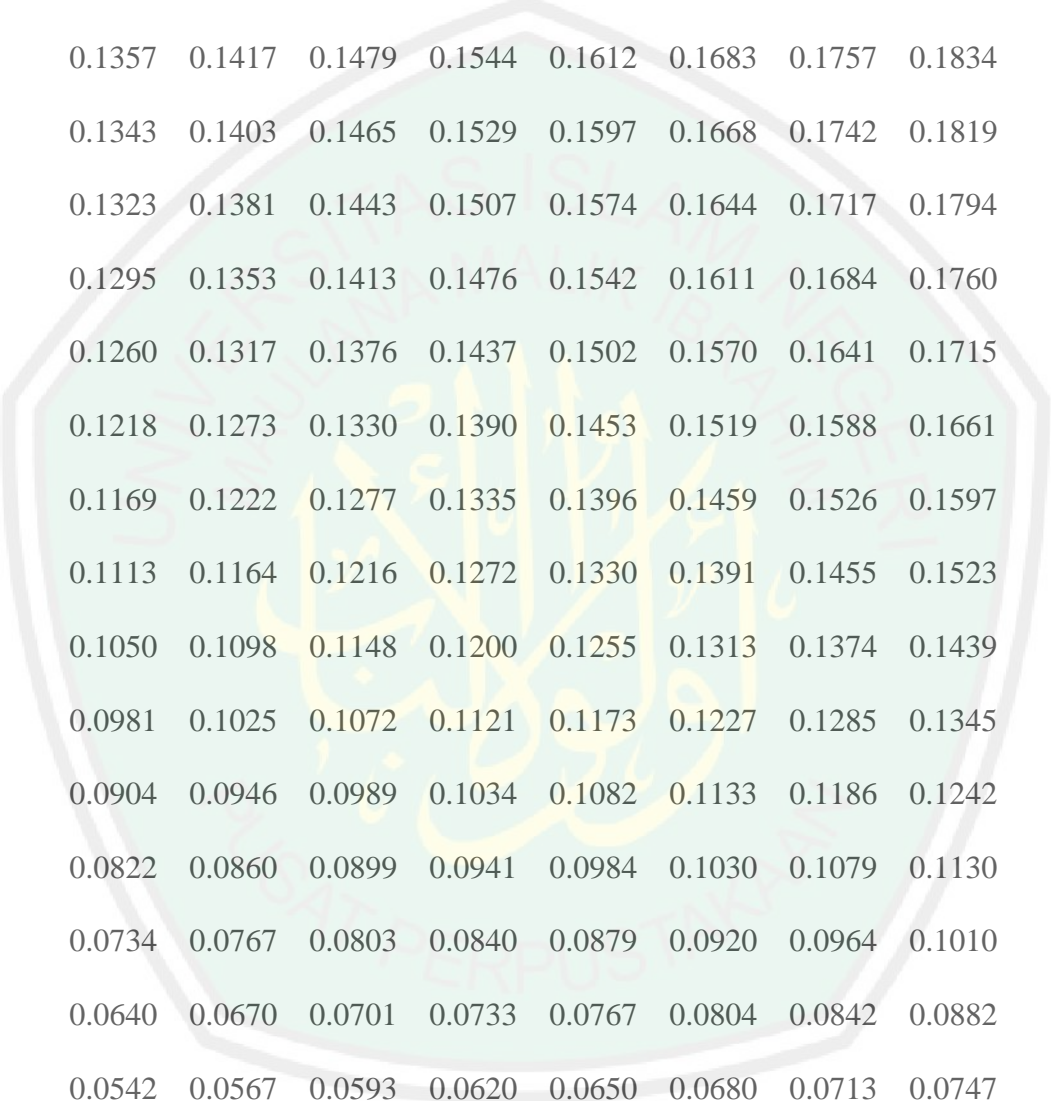
Columns 9 through 16

0.0060 0.0062 0.0065 0.0068 0.0071 0.0074 0.0077 0.0080  
 0.0119 0.0124 0.0130 0.0135 0.0141 0.0147 0.0153 0.0160  
 0.0178 0.0186 0.0194 0.0202 0.0211 0.0220 0.0229 0.0239  
 0.0237 0.0247 0.0258 0.0269 0.0280 0.0292 0.0304 0.0317  
 0.0295 0.0307 0.0321 0.0334 0.0349 0.0363 0.0379 0.0395  
 0.0352 0.0367 0.0382 0.0399 0.0416 0.0433 0.0452 0.0471  
 0.0407 0.0425 0.0443 0.0462 0.0482 0.0502 0.0523 0.0545  
 0.0461 0.0481 0.0502 0.0524 0.0546 0.0569 0.0593 0.0618  
 0.0514 0.0536 0.0559 0.0583 0.0608 0.0634 0.0661 0.0689  
 0.0565 0.0589 0.0615 0.0641 0.0668 0.0697 0.0727 0.0757  
 0.0614 0.0640 0.0668 0.0697 0.0726 0.0757 0.0790 0.0823  
 0.0660 0.0689 0.0719 0.0749 0.0782 0.0815 0.0850 0.0886  
 0.0704 0.0735 0.0767 0.0800 0.0834 0.0870 0.0907 0.0945  
 0.0746 0.0778 0.0812 0.0847 0.0883 0.0921 0.0960 0.1001  
 0.0784 0.0818 0.0854 0.0891 0.0929 0.0969 0.1010 0.1053  
 0.0820 0.0855 0.0892 0.0931 0.0971 0.1013 0.1056 0.1101  
 0.0852 0.0889 0.0927 0.0968 0.1009 0.1053 0.1098 0.1145  
 0.0881 0.0919 0.0959 0.1000 0.1044 0.1089 0.1135 0.1184  
 0.0906 0.0945 0.0986 0.1029 0.1073 0.1120 0.1168 0.1218  
 0.0927 0.0967 0.1009 0.1053 0.1099 0.1146 0.1196 0.1247

0.0944	0.0985	0.1028	0.1072	0.1119	0.1168	0.1218	0.1271
0.0956	0.0998	0.1042	0.1087	0.1134	0.1184	0.1235	0.1289
0.0965	0.1007	0.1051	0.1097	0.1145	0.1195	0.1247	0.1301
0.0969	0.1011	0.1055	0.1101	0.1150	0.1200	0.1252	0.1307
0.0968	0.1010	0.1055	0.1101	0.1149	0.1199	0.1252	0.1307
0.0962	0.1005	0.1049	0.1095	0.1143	0.1193	0.1245	0.1300
0.0952	0.0994	0.1037	0.1083	0.1131	0.1180	0.1232	0.1287
0.0937	0.0978	0.1021	0.1066	0.1113	0.1162	0.1213	0.1267
0.0916	0.0957	0.0999	0.1043	0.1089	0.1137	0.1188	0.1240
0.0891	0.0930	0.0971	0.1014	0.1059	0.1106	0.1155	0.1207
0.0861	0.0899	0.0939	0.0980	0.1024	0.1069	0.1117	0.1166
0.0825	0.0862	0.0900	0.0940	0.0982	0.1026	0.1071	0.1119
0.0785	0.0820	0.0857	0.0895	0.0934	0.0976	0.1020	0.1065
0.0740	0.0773	0.0808	0.0844	0.0881	0.0921	0.0962	0.1005
0.0691	0.0721	0.0754	0.0787	0.0822	0.0859	0.0898	0.0938
0.0637	0.0665	0.0695	0.0726	0.0758	0.0792	0.0828	0.0865
0.0578	0.0604	0.0631	0.0659	0.0689	0.0720	0.0752	0.0786
0.0516	0.0539	0.0563	0.0588	0.0615	0.0642	0.0671	0.0702
0.0450	0.0470	0.0491	0.0513	0.0536	0.0560	0.0586	0.0612
0.0381	0.0398	0.0415	0.0434	0.0454	0.0474	0.0495	0.0518
0.0308	0.0322	0.0336	0.0352	0.0367	0.0384	0.0401	0.0420
0.0234	0.0244	0.0255	0.0266	0.0278	0.0291	0.0304	0.0318
0.0157	0.0164	0.0171	0.0179	0.0187	0.0195	0.0204	0.0214
0.0079	0.0082	0.0086	0.0090	0.0094	0.0098	0.0103	0.0107

## Columns 17 through 24

0.0083	0.0087	0.0090	0.0094	0.0098	0.0101	0.0106	0.0110
0.0166	0.0173	0.0180	0.0188	0.0195	0.0203	0.0211	0.0219
0.0249	0.0259	0.0270	0.0281	0.0292	0.0304	0.0316	0.0328
0.0330	0.0344	0.0358	0.0373	0.0388	0.0403	0.0419	0.0435
0.0411	0.0428	0.0446	0.0464	0.0483	0.0502	0.0522	0.0542
0.0490	0.0511	0.0532	0.0554	0.0576	0.0599	0.0623	0.0647
0.0568	0.0592	0.0616	0.0642	0.0668	0.0694	0.0722	0.0750
0.0644	0.0671	0.0699	0.0727	0.0757	0.0787	0.0819	0.0851
0.0718	0.0748	0.0779	0.0811	0.0844	0.0878	0.0913	0.0949
0.0789	0.0822	0.0856	0.0892	0.0928	0.0965	0.1004	0.1044
0.0858	0.0894	0.0931	0.0969	0.1009	0.1050	0.1092	0.1135
0.0923	0.0962	0.1002	0.1043	0.1086	0.1131	0.1176	0.1223
0.0985	0.1027	0.1070	0.1114	0.1160	0.1207	0.1256	0.1307
0.1044	0.1088	0.1133	0.1181	0.1229	0.1280	0.1332	0.1386
0.1098	0.1145	0.1193	0.1243	0.1294	0.1348	0.1403	0.1460
0.1148	0.1197	0.1248	0.1300	0.1354	0.1410	0.1469	0.1528
0.1194	0.1245	0.1298	0.1352	0.1409	0.1468	0.1529	0.1591
0.1235	0.1288	0.1342	0.1399	0.1458	0.1519	0.1583	0.1648
0.1271	0.1325	0.1382	0.1440	0.1501	0.1565	0.1630	0.1698
0.1301	0.1357	0.1415	0.1476	0.1538	0.1604	0.1671	0.1742
0.1326	0.1383	0.1443	0.1504	0.1569	0.1636	0.1705	0.1777



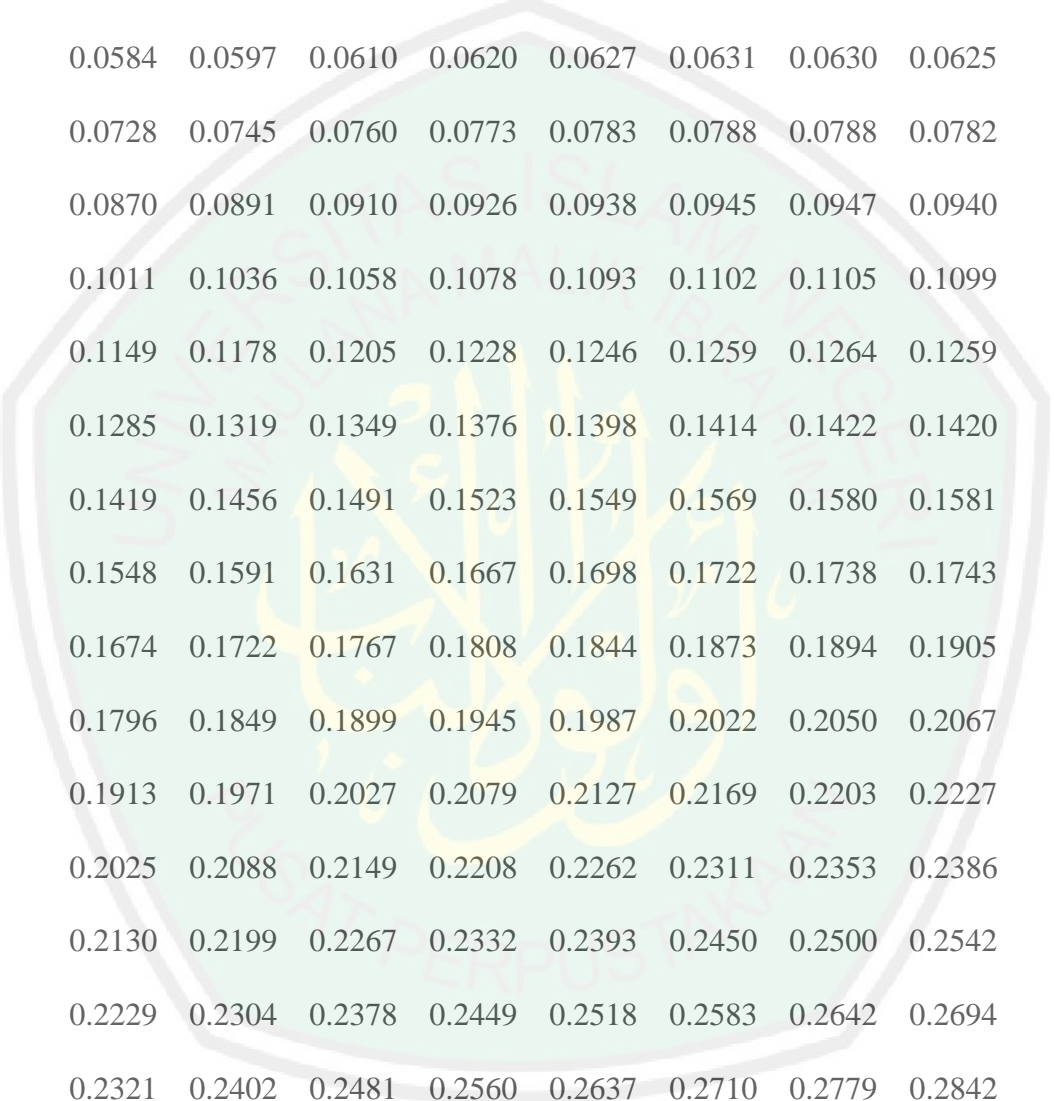
0.1345	0.1403	0.1464	0.1527	0.1592	0.1661	0.1732	0.1806
0.1358	0.1417	0.1478	0.1542	0.1609	0.1678	0.1751	0.1826
0.1364	0.1423	0.1486	0.1550	0.1618	0.1688	0.1761	0.1837
0.1364	0.1424	0.1486	0.1551	0.1619	0.1690	0.1763	0.1840
0.1357	0.1417	0.1479	0.1544	0.1612	0.1683	0.1757	0.1834
0.1343	0.1403	0.1465	0.1529	0.1597	0.1668	0.1742	0.1819
0.1323	0.1381	0.1443	0.1507	0.1574	0.1644	0.1717	0.1794
0.1295	0.1353	0.1413	0.1476	0.1542	0.1611	0.1684	0.1760
0.1260	0.1317	0.1376	0.1437	0.1502	0.1570	0.1641	0.1715
0.1218	0.1273	0.1330	0.1390	0.1453	0.1519	0.1588	0.1661
0.1169	0.1222	0.1277	0.1335	0.1396	0.1459	0.1526	0.1597
0.1113	0.1164	0.1216	0.1272	0.1330	0.1391	0.1455	0.1523
0.1050	0.1098	0.1148	0.1200	0.1255	0.1313	0.1374	0.1439
0.0981	0.1025	0.1072	0.1121	0.1173	0.1227	0.1285	0.1345
0.0904	0.0946	0.0989	0.1034	0.1082	0.1133	0.1186	0.1242
0.0822	0.0860	0.0899	0.0941	0.0984	0.1030	0.1079	0.1130
0.0734	0.0767	0.0803	0.0840	0.0879	0.0920	0.0964	0.1010
0.0640	0.0670	0.0701	0.0733	0.0767	0.0804	0.0842	0.0882
0.0542	0.0567	0.0593	0.0620	0.0650	0.0680	0.0713	0.0747
0.0439	0.0459	0.0480	0.0503	0.0527	0.0552	0.0578	0.0606
0.0333	0.0348	0.0364	0.0381	0.0399	0.0418	0.0438	0.0460
0.0223	0.0234	0.0245	0.0256	0.0268	0.0281	0.0294	0.0309
0.0112	0.0117	0.0123	0.0129	0.0135	0.0141	0.0148	0.0155

Columns 25 through 32

0.0114	0.0118	0.0122	0.0126	0.0131	0.0135	0.0139	0.0143
0.0227	0.0236	0.0244	0.0253	0.0261	0.0270	0.0278	0.0286
0.0340	0.0353	0.0365	0.0378	0.0391	0.0404	0.0416	0.0428
0.0452	0.0469	0.0486	0.0503	0.0520	0.0537	0.0553	0.0569
0.0563	0.0584	0.0605	0.0626	0.0647	0.0668	0.0689	0.0709
0.0672	0.0697	0.0722	0.0748	0.0773	0.0798	0.0823	0.0847
0.0779	0.0808	0.0837	0.0867	0.0897	0.0927	0.0956	0.0984
0.0883	0.0917	0.0950	0.0984	0.1018	0.1052	0.1086	0.1118
0.0985	0.1023	0.1060	0.1099	0.1137	0.1175	0.1213	0.1250
0.1084	0.1125	0.1167	0.1210	0.1252	0.1295	0.1337	0.1379
0.1179	0.1225	0.1271	0.1317	0.1364	0.1411	0.1458	0.1504
0.1271	0.1320	0.1370	0.1421	0.1472	0.1523	0.1574	0.1625
0.1358	0.1411	0.1465	0.1520	0.1575	0.1631	0.1687	0.1742
0.1441	0.1497	0.1555	0.1614	0.1673	0.1733	0.1794	0.1854
0.1518	0.1578	0.1640	0.1702	0.1766	0.1830	0.1895	0.1960
0.1590	0.1653	0.1718	0.1785	0.1853	0.1921	0.1991	0.2061
0.1656	0.1723	0.1791	0.1861	0.1933	0.2006	0.2080	0.2155
0.1716	0.1785	0.1857	0.1931	0.2006	0.2083	0.2162	0.2241
0.1769	0.1841	0.1916	0.1993	0.2072	0.2153	0.2236	0.2320
0.1814	0.1889	0.1967	0.2047	0.2130	0.2214	0.2301	0.2390
0.1852	0.1930	0.2010	0.2093	0.2179	0.2267	0.2358	0.2451
0.1882	0.1962	0.2044	0.2130	0.2218	0.2310	0.2404	0.2502

0.1904	0.1985	0.2070	0.2158	0.2249	0.2343	0.2441	0.2542
0.1917	0.2000	0.2086	0.2176	0.2269	0.2366	0.2467	0.2571
0.1921	0.2005	0.2092	0.2183	0.2278	0.2377	0.2481	0.2588
0.1915	0.2000	0.2088	0.2180	0.2277	0.2377	0.2483	0.2593
0.1900	0.1985	0.2073	0.2166	0.2263	0.2365	0.2472	0.2584
0.1875	0.1959	0.2048	0.2141	0.2238	0.2341	0.2448	0.2562
0.1839	0.1923	0.2011	0.2103	0.2200	0.2303	0.2411	0.2525
0.1794	0.1876	0.1963	0.2054	0.2150	0.2252	0.2359	0.2473
0.1737	0.1818	0.1903	0.1993	0.2087	0.2187	0.2294	0.2406
0.1671	0.1749	0.1832	0.1919	0.2011	0.2109	0.2213	0.2324
0.1594	0.1669	0.1749	0.1833	0.1922	0.2017	0.2118	0.2226
0.1506	0.1578	0.1654	0.1735	0.1820	0.1911	0.2008	0.2112
0.1409	0.1477	0.1548	0.1625	0.1706	0.1792	0.1884	0.1983
0.1302	0.1365	0.1431	0.1503	0.1578	0.1659	0.1746	0.1838
0.1185	0.1243	0.1304	0.1369	0.1439	0.1513	0.1593	0.1679
0.1059	0.1111	0.1166	0.1225	0.1288	0.1355	0.1428	0.1505
0.0925	0.0971	0.1020	0.1071	0.1127	0.1186	0.1250	0.1319
0.0784	0.0823	0.0864	0.0908	0.0956	0.1006	0.1061	0.1120
0.0636	0.0667	0.0701	0.0737	0.0776	0.0817	0.0862	0.0910
0.0482	0.0506	0.0532	0.0559	0.0589	0.0620	0.0654	0.0691
0.0324	0.0340	0.0358	0.0376	0.0396	0.0417	0.0440	0.0465
0.0163	0.0171	0.0180	0.0189	0.0199	0.0210	0.0221	0.0234

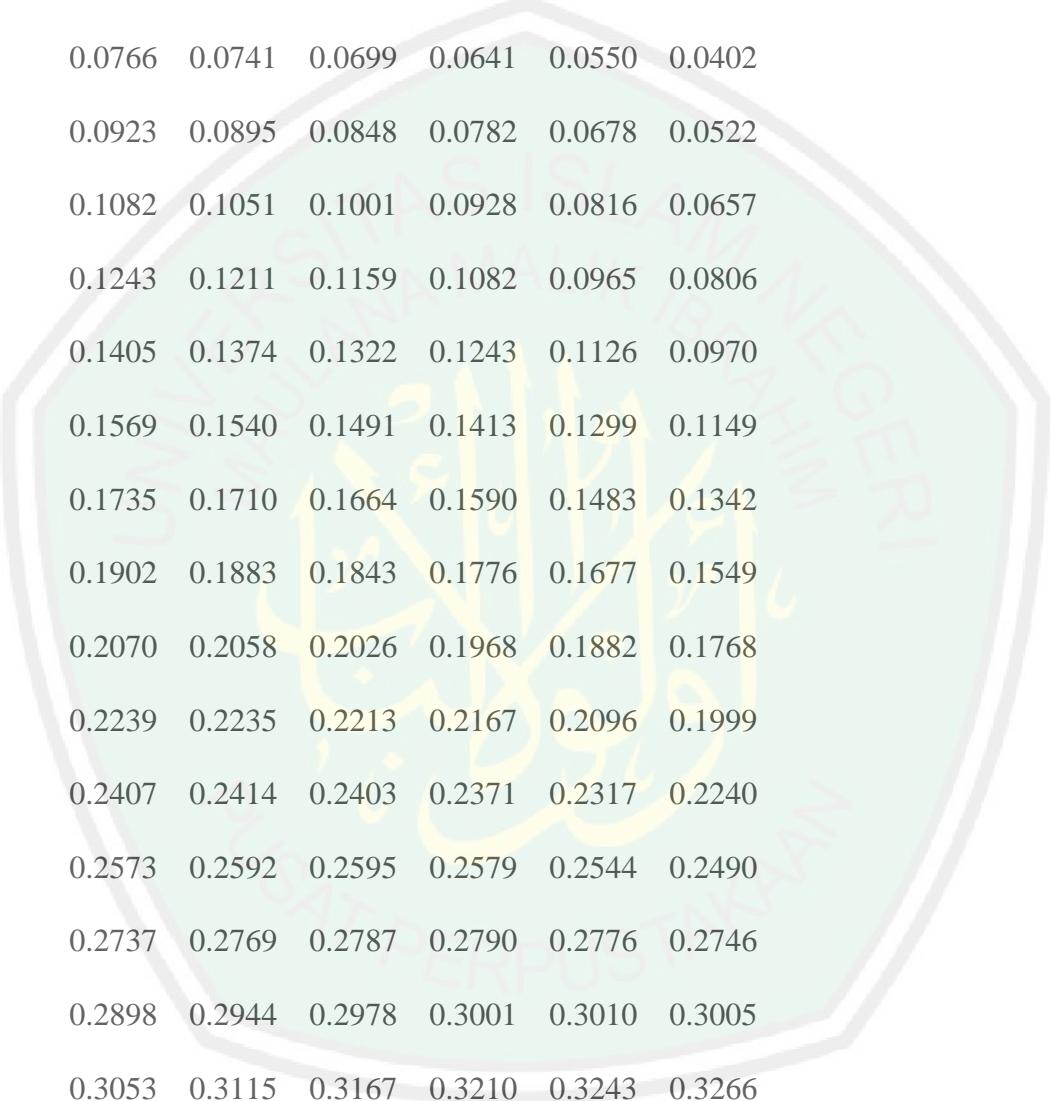
Columns 33 through 40



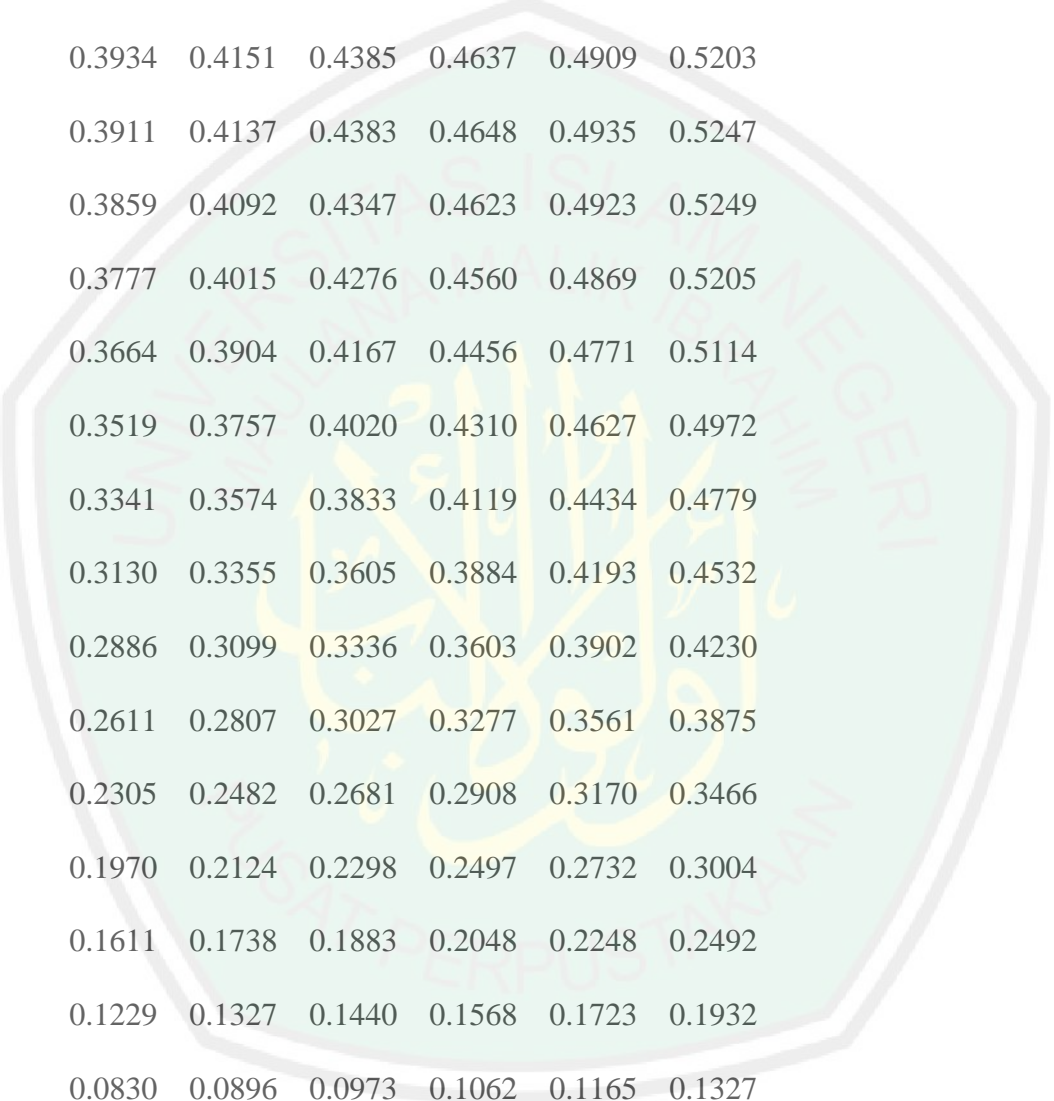
0.0147	0.0150	0.0153	0.0155	0.0158	0.0157	0.0158	0.0155
0.0293	0.0300	0.0306	0.0310	0.0314	0.0315	0.0315	0.0311
0.0439	0.0449	0.0458	0.0465	0.0470	0.0473	0.0472	0.0468
0.0584	0.0597	0.0610	0.0620	0.0627	0.0631	0.0630	0.0625
0.0728	0.0745	0.0760	0.0773	0.0783	0.0788	0.0788	0.0782
0.0870	0.0891	0.0910	0.0926	0.0938	0.0945	0.0947	0.0940
0.1011	0.1036	0.1058	0.1078	0.1093	0.1102	0.1105	0.1099
0.1149	0.1178	0.1205	0.1228	0.1246	0.1259	0.1264	0.1259
0.1285	0.1319	0.1349	0.1376	0.1398	0.1414	0.1422	0.1420
0.1419	0.1456	0.1491	0.1523	0.1549	0.1569	0.1580	0.1581
0.1548	0.1591	0.1631	0.1667	0.1698	0.1722	0.1738	0.1743
0.1674	0.1722	0.1767	0.1808	0.1844	0.1873	0.1894	0.1905
0.1796	0.1849	0.1899	0.1945	0.1987	0.2022	0.2050	0.2067
0.1913	0.1971	0.2027	0.2079	0.2127	0.2169	0.2203	0.2227
0.2025	0.2088	0.2149	0.2208	0.2262	0.2311	0.2353	0.2386
0.2130	0.2199	0.2267	0.2332	0.2393	0.2450	0.2500	0.2542
0.2229	0.2304	0.2378	0.2449	0.2518	0.2583	0.2642	0.2694
0.2321	0.2402	0.2481	0.2560	0.2637	0.2710	0.2779	0.2842
0.2405	0.2491	0.2577	0.2663	0.2748	0.2830	0.2910	0.2984
0.2480	0.2572	0.2665	0.2758	0.2851	0.2942	0.3032	0.3119
0.2546	0.2644	0.2743	0.2843	0.2944	0.3045	0.3146	0.3245
0.2602	0.2705	0.2810	0.2917	0.3026	0.3137	0.3249	0.3361
0.2647	0.2755	0.2866	0.2980	0.3097	0.3217	0.3340	0.3465

0.2680	0.2793	0.2909	0.3030	0.3155	0.3284	0.3417	0.3554
0.2701	0.2818	0.2939	0.3066	0.3198	0.3336	0.3479	0.3629
0.2708	0.2829	0.2955	0.3088	0.3227	0.3372	0.3525	0.3685
0.2702	0.2826	0.2956	0.3093	0.3238	0.3391	0.3552	0.3723
0.2681	0.2808	0.2941	0.3082	0.3231	0.3390	0.3559	0.3739
0.2646	0.2773	0.2909	0.3053	0.3206	0.3370	0.3545	0.3732
0.2594	0.2722	0.2859	0.3005	0.3160	0.3328	0.3507	0.3701
0.2526	0.2654	0.2791	0.2937	0.3094	0.3263	0.3446	0.3644
0.2442	0.2568	0.2704	0.2849	0.3006	0.3175	0.3359	0.3559
0.2341	0.2465	0.2598	0.2741	0.2895	0.3063	0.3246	0.3446
0.2224	0.2343	0.2472	0.2611	0.2762	0.2927	0.3106	0.3303
0.2089	0.2203	0.2327	0.2461	0.2606	0.2765	0.2939	0.3130
0.1938	0.2046	0.2163	0.2290	0.2428	0.2579	0.2745	0.2928
0.1771	0.1871	0.1980	0.2098	0.2227	0.2368	0.2524	0.2696
0.1589	0.1680	0.1779	0.1887	0.2005	0.2134	0.2277	0.2435
0.1393	0.1474	0.1561	0.1657	0.1762	0.1878	0.2005	0.2147
0.1183	0.1253	0.1328	0.1410	0.1501	0.1601	0.1711	0.1834
0.0962	0.1019	0.1081	0.1149	0.1223	0.1305	0.1396	0.1497
0.0731	0.0774	0.0822	0.0874	0.0931	0.0994	0.1064	0.1141
0.0492	0.0521	0.0554	0.0588	0.0627	0.0670	0.0718	0.0770
0.0247	0.0262	0.0278	0.0296	0.0316	0.0338	0.0361	0.0389

Columns 41 through 46



0.0153	0.0144	0.0139	0.0120	0.0109	0.0056
0.0305	0.0292	0.0276	0.0245	0.0214	0.0124
0.0457	0.0440	0.0414	0.0373	0.0320	0.0204
0.0611	0.0590	0.0555	0.0505	0.0431	0.0296
0.0766	0.0741	0.0699	0.0641	0.0550	0.0402
0.0923	0.0895	0.0848	0.0782	0.0678	0.0522
0.1082	0.1051	0.1001	0.0928	0.0816	0.0657
0.1243	0.1211	0.1159	0.1082	0.0965	0.0806
0.1405	0.1374	0.1322	0.1243	0.1126	0.0970
0.1569	0.1540	0.1491	0.1413	0.1299	0.1149
0.1735	0.1710	0.1664	0.1590	0.1483	0.1342
0.1902	0.1883	0.1843	0.1776	0.1677	0.1549
0.2070	0.2058	0.2026	0.1968	0.1882	0.1768
0.2239	0.2235	0.2213	0.2167	0.2096	0.1999
0.2407	0.2414	0.2403	0.2371	0.2317	0.2240
0.2573	0.2592	0.2595	0.2579	0.2544	0.2490
0.2737	0.2769	0.2787	0.2790	0.2776	0.2746
0.2898	0.2944	0.2978	0.3001	0.3010	0.3005
0.3053	0.3115	0.3167	0.3210	0.3243	0.3266
0.3202	0.3279	0.3351	0.3416	0.3474	0.3526
0.3342	0.3437	0.3528	0.3615	0.3699	0.3780
0.3473	0.3584	0.3695	0.3805	0.3915	0.4026
0.3591	0.3720	0.3851	0.3984	0.4120	0.4261
0.3696	0.3841	0.3992	0.4147	0.4309	0.4480



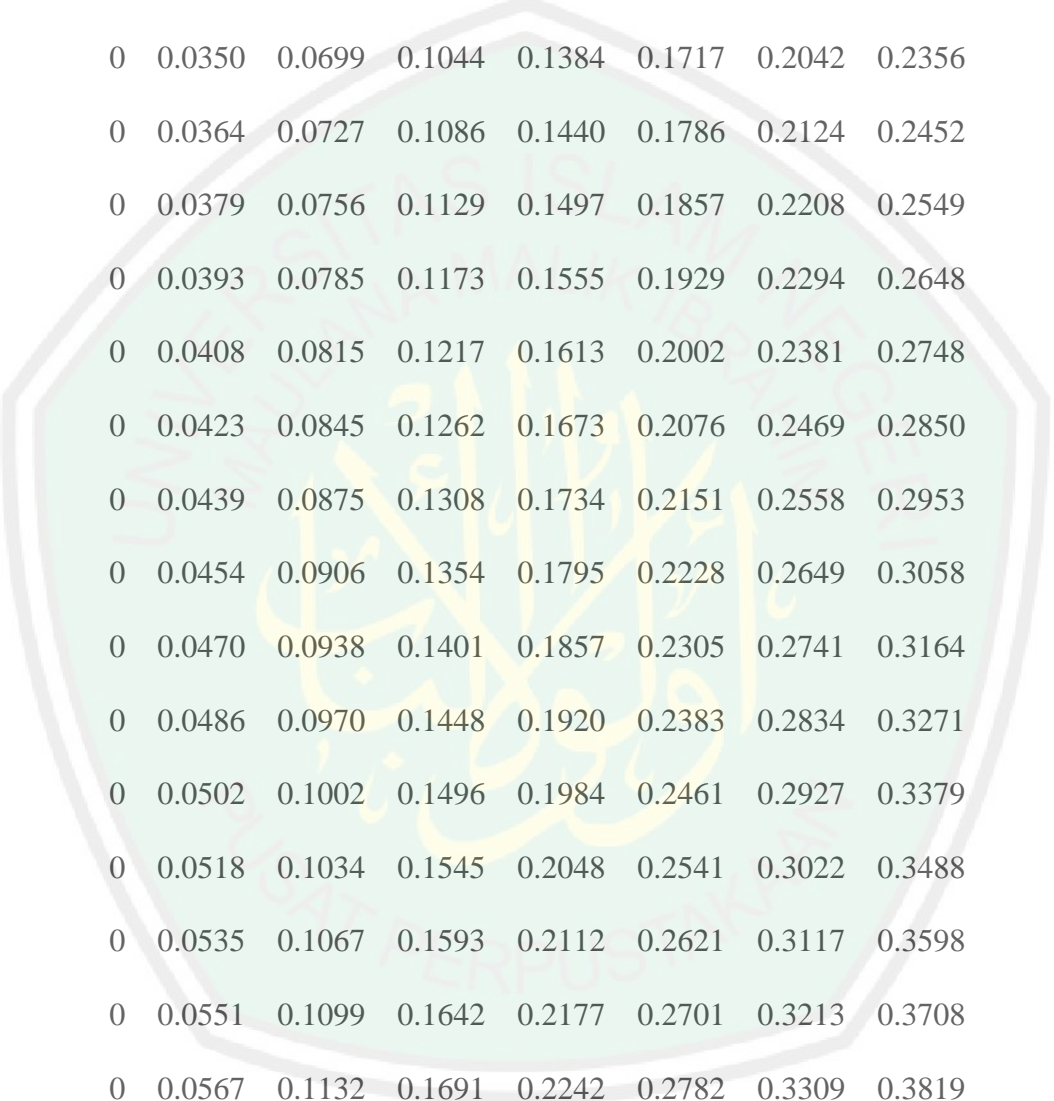
0.3784	0.3946	0.4116	0.4293	0.4480	0.4679
0.3854	0.4032	0.4220	0.4418	0.4629	0.4855
0.3904	0.4097	0.4301	0.4519	0.4752	0.5004
0.3931	0.4137	0.4357	0.4593	0.4847	0.5121
0.3934	0.4151	0.4385	0.4637	0.4909	0.5203
0.3911	0.4137	0.4383	0.4648	0.4935	0.5247
0.3859	0.4092	0.4347	0.4623	0.4923	0.5249
0.3777	0.4015	0.4276	0.4560	0.4869	0.5205
0.3664	0.3904	0.4167	0.4456	0.4771	0.5114
0.3519	0.3757	0.4020	0.4310	0.4627	0.4972
0.3341	0.3574	0.3833	0.4119	0.4434	0.4779
0.3130	0.3355	0.3605	0.3884	0.4193	0.4532
0.2886	0.3099	0.3336	0.3603	0.3902	0.4230
0.2611	0.2807	0.3027	0.3277	0.3561	0.3875
0.2305	0.2482	0.2681	0.2908	0.3170	0.3466
0.1970	0.2124	0.2298	0.2497	0.2732	0.3004
0.1611	0.1738	0.1883	0.2048	0.2248	0.2492
0.1229	0.1327	0.1440	0.1568	0.1723	0.1932
0.0830	0.0896	0.0973	0.1062	0.1165	0.1327
0.0417	0.0453	0.0489	0.0539	0.0584	0.0682

## Lampiran 3. Output Solusi Analitik

ueksak =

Columns 1 through 8

0	0.0101	0.0202	0.0302	0.0401	0.0497	0.0591	0.0682
0	0.0109	0.0217	0.0325	0.0430	0.0534	0.0635	0.0733
0	0.0117	0.0233	0.0348	0.0461	0.0573	0.0681	0.0786
0	0.0125	0.0249	0.0372	0.0494	0.0613	0.0728	0.0841
0	0.0133	0.0266	0.0398	0.0527	0.0654	0.0778	0.0898
0	0.0142	0.0284	0.0424	0.0562	0.0697	0.0829	0.0957
0	0.0151	0.0302	0.0451	0.0598	0.0742	0.0882	0.1018
0	0.0161	0.0320	0.0479	0.0635	0.0787	0.0936	0.1081
0	0.0170	0.0340	0.0507	0.0673	0.0835	0.0993	0.1146
0	0.0180	0.0360	0.0537	0.0712	0.0884	0.1051	0.1213
0	0.0190	0.0380	0.0568	0.0753	0.0934	0.1111	0.1282
0	0.0201	0.0401	0.0599	0.0794	0.0986	0.1172	0.1353
0	0.0212	0.0423	0.0632	0.0837	0.1039	0.1236	0.1426
0	0.0223	0.0445	0.0665	0.0881	0.1094	0.1301	0.1501
0	0.0235	0.0468	0.0699	0.0927	0.1150	0.1367	0.1578
0	0.0246	0.0491	0.0734	0.0973	0.1207	0.1436	0.1657
0	0.0258	0.0515	0.0770	0.1020	0.1266	0.1506	0.1738
0	0.0271	0.0540	0.0806	0.1069	0.1327	0.1578	0.1821
0	0.0283	0.0565	0.0844	0.1119	0.1388	0.1651	0.1906



0	0.0296	0.0591	0.0882	0.1170	0.1451	0.1726	0.1992
0	0.0309	0.0617	0.0921	0.1222	0.1516	0.1803	0.2081
0	0.0323	0.0644	0.0961	0.1274	0.1581	0.1881	0.2171
0	0.0336	0.0671	0.1002	0.1329	0.1648	0.1960	0.2263
0	0.0350	0.0699	0.1044	0.1384	0.1717	0.2042	0.2356
0	0.0364	0.0727	0.1086	0.1440	0.1786	0.2124	0.2452
0	0.0379	0.0756	0.1129	0.1497	0.1857	0.2208	0.2549
0	0.0393	0.0785	0.1173	0.1555	0.1929	0.2294	0.2648
0	0.0408	0.0815	0.1217	0.1613	0.2002	0.2381	0.2748
0	0.0423	0.0845	0.1262	0.1673	0.2076	0.2469	0.2850
0	0.0439	0.0875	0.1308	0.1734	0.2151	0.2558	0.2953
0	0.0454	0.0906	0.1354	0.1795	0.2228	0.2649	0.3058
0	0.0470	0.0938	0.1401	0.1857	0.2305	0.2741	0.3164
0	0.0486	0.0970	0.1448	0.1920	0.2383	0.2834	0.3271
0	0.0502	0.1002	0.1496	0.1984	0.2461	0.2927	0.3379
0	0.0518	0.1034	0.1545	0.2048	0.2541	0.3022	0.3488
0	0.0535	0.1067	0.1593	0.2112	0.2621	0.3117	0.3598
0	0.0551	0.1099	0.1642	0.2177	0.2701	0.3213	0.3708
0	0.0567	0.1132	0.1691	0.2242	0.2782	0.3309	0.3819
0	0.0584	0.1165	0.1741	0.2308	0.2863	0.3405	0.3930
0	0.0601	0.1198	0.1790	0.2373	0.2944	0.3502	0.4042
0	0.0617	0.1231	0.1839	0.2438	0.3025	0.3598	0.4153
0	0.0633	0.1264	0.1888	0.2503	0.3106	0.3694	0.4263
0	0.0650	0.1296	0.1937	0.2568	0.3186	0.3789	0.4373

0	0.0666	0.1329	0.1985	0.2631	0.3265	0.3883	0.4482
0	0.0682	0.1360	0.2032	0.2694	0.3343	0.3976	0.4589
0	0.0698	0.1392	0.2079	0.2756	0.3420	0.4067	0.4695

Columns 9 through 16

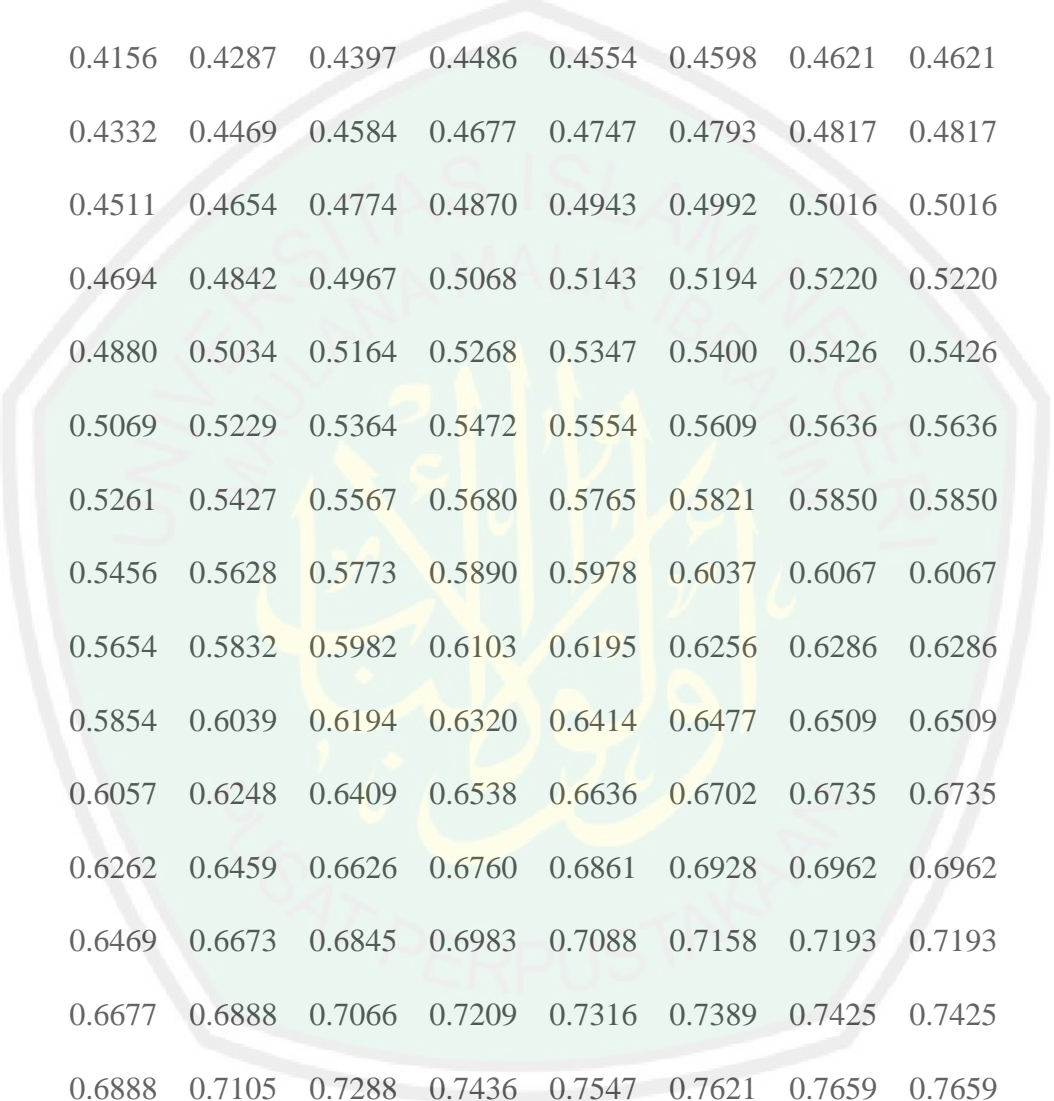
0.0770	0.0854	0.0934	0.1009	0.1080	0.1145	0.1205	0.1258
0.0827	0.0918	0.1004	0.1085	0.1160	0.1230	0.1294	0.1352
0.0887	0.0984	0.1076	0.1163	0.1244	0.1319	0.1388	0.1450
0.0949	0.1053	0.1151	0.1244	0.1331	0.1411	0.1485	0.1551
0.1013	0.1124	0.1229	0.1328	0.1421	0.1507	0.1585	0.1656
0.1080	0.1198	0.1310	0.1416	0.1515	0.1606	0.1690	0.1765
0.1149	0.1274	0.1394	0.1506	0.1611	0.1708	0.1797	0.1878
0.1220	0.1353	0.1480	0.1599	0.1711	0.1814	0.1909	0.1994
0.1293	0.1435	0.1569	0.1696	0.1814	0.1923	0.2024	0.2114
0.1369	0.1519	0.1661	0.1795	0.1920	0.2036	0.2142	0.2238
0.1447	0.1605	0.1755	0.1897	0.2029	0.2152	0.2264	0.2365
0.1527	0.1694	0.1853	0.2002	0.2142	0.2271	0.2390	0.2496
0.1610	0.1786	0.1953	0.2110	0.2258	0.2394	0.2519	0.2631
0.1695	0.1880	0.2056	0.2221	0.2376	0.2520	0.2651	0.2769
0.1782	0.1976	0.2161	0.2335	0.2498	0.2649	0.2787	0.2911
0.1871	0.2075	0.2269	0.2452	0.2623	0.2782	0.2927	0.3057
0.1962	0.2176	0.2380	0.2572	0.2751	0.2917	0.3069	0.3206
0.2055	0.2280	0.2493	0.2694	0.2882	0.3056	0.3216	0.3359

0.2151	0.2386	0.2609	0.2820	0.3016	0.3199	0.3365	0.3515
0.2249	0.2494	0.2728	0.2948	0.3153	0.3344	0.3518	0.3675
0.2348	0.2605	0.2849	0.3078	0.3293	0.3492	0.3674	0.3838
0.2450	0.2718	0.2972	0.3212	0.3436	0.3644	0.3833	0.4004
0.2554	0.2833	0.3098	0.3348	0.3582	0.3798	0.3996	0.4174
0.2660	0.2950	0.3226	0.3487	0.3730	0.3955	0.4161	0.4347
0.2768	0.3070	0.3357	0.3628	0.3881	0.4116	0.4330	0.4523
0.2877	0.3191	0.3490	0.3772	0.4035	0.4279	0.4501	0.4702
0.2989	0.3315	0.3625	0.3918	0.4191	0.4444	0.4676	0.4884
0.3102	0.3441	0.3763	0.4066	0.4350	0.4613	0.4853	0.5069
0.3217	0.3568	0.3902	0.4217	0.4511	0.4784	0.5033	0.5257
0.3333	0.3697	0.4043	0.4370	0.4675	0.4957	0.5215	0.5448
0.3451	0.3828	0.4187	0.4524	0.4840	0.5132	0.5400	0.5641
0.3571	0.3961	0.4332	0.4681	0.5008	0.5310	0.5587	0.5836
0.3692	0.4095	0.4478	0.4839	0.5177	0.5490	0.5776	0.6033
0.3814	0.4230	0.4626	0.4999	0.5348	0.5671	0.5967	0.6233
0.3937	0.4367	0.4775	0.5161	0.5521	0.5854	0.6159	0.6434
0.4061	0.4504	0.4926	0.5323	0.5695	0.6039	0.6353	0.6637
0.4186	0.4643	0.5077	0.5487	0.5870	0.6224	0.6548	0.6840
0.4311	0.4782	0.5229	0.5651	0.6045	0.6410	0.6744	0.7045
0.4436	0.4921	0.5381	0.5816	0.6222	0.6597	0.6941	0.7250
0.4562	0.5060	0.5534	0.5980	0.6398	0.6784	0.7137	0.7456
0.4687	0.5199	0.5686	0.6145	0.6574	0.6970	0.7333	0.7661
0.4812	0.5338	0.5837	0.6308	0.6749	0.7156	0.7529	0.7865

0.4936	0.5475	0.5988	0.6471	0.6923	0.7341	0.7723	0.8067
0.5059	0.5612	0.6137	0.6632	0.7095	0.7523	0.7915	0.8268
0.5180	0.5746	0.6284	0.6791	0.7265	0.7703	0.8104	0.8466
0.5299	0.5878	0.6428	0.6947	0.7431	0.7880	0.8290	0.8660

Columns 17 through 24

0.1306	0.1347	0.1382	0.1410	0.1431	0.1445	0.1452	0.1452
0.1403	0.1448	0.1485	0.1515	0.1538	0.1553	0.1560	0.1560
0.1505	0.1552	0.1592	0.1624	0.1649	0.1665	0.1673	0.1673
0.1610	0.1661	0.1703	0.1738	0.1764	0.1781	0.1790	0.1790
0.1719	0.1773	0.1819	0.1856	0.1883	0.1902	0.1911	0.1911
0.1832	0.1890	0.1938	0.1977	0.2007	0.2027	0.2037	0.2037
0.1949	0.2010	0.2062	0.2104	0.2135	0.2156	0.2167	0.2167
0.2069	0.2135	0.2190	0.2234	0.2267	0.2290	0.2301	0.2301
0.2194	0.2263	0.2321	0.2368	0.2404	0.2428	0.2439	0.2439
0.2322	0.2396	0.2457	0.2507	0.2545	0.2570	0.2582	0.2582
0.2455	0.2532	0.2597	0.2650	0.2689	0.2716	0.2729	0.2729
0.2591	0.2672	0.2741	0.2797	0.2839	0.2867	0.2881	0.2881
0.2731	0.2817	0.2889	0.2948	0.2992	0.3021	0.3036	0.3036
0.2874	0.2965	0.3041	0.3103	0.3149	0.3180	0.3196	0.3196
0.3022	0.3117	0.3197	0.3262	0.3311	0.3343	0.3360	0.3360
0.3173	0.3273	0.3357	0.3425	0.3476	0.3511	0.3528	0.3528
0.3328	0.3433	0.3521	0.3592	0.3646	0.3682	0.3700	0.3700

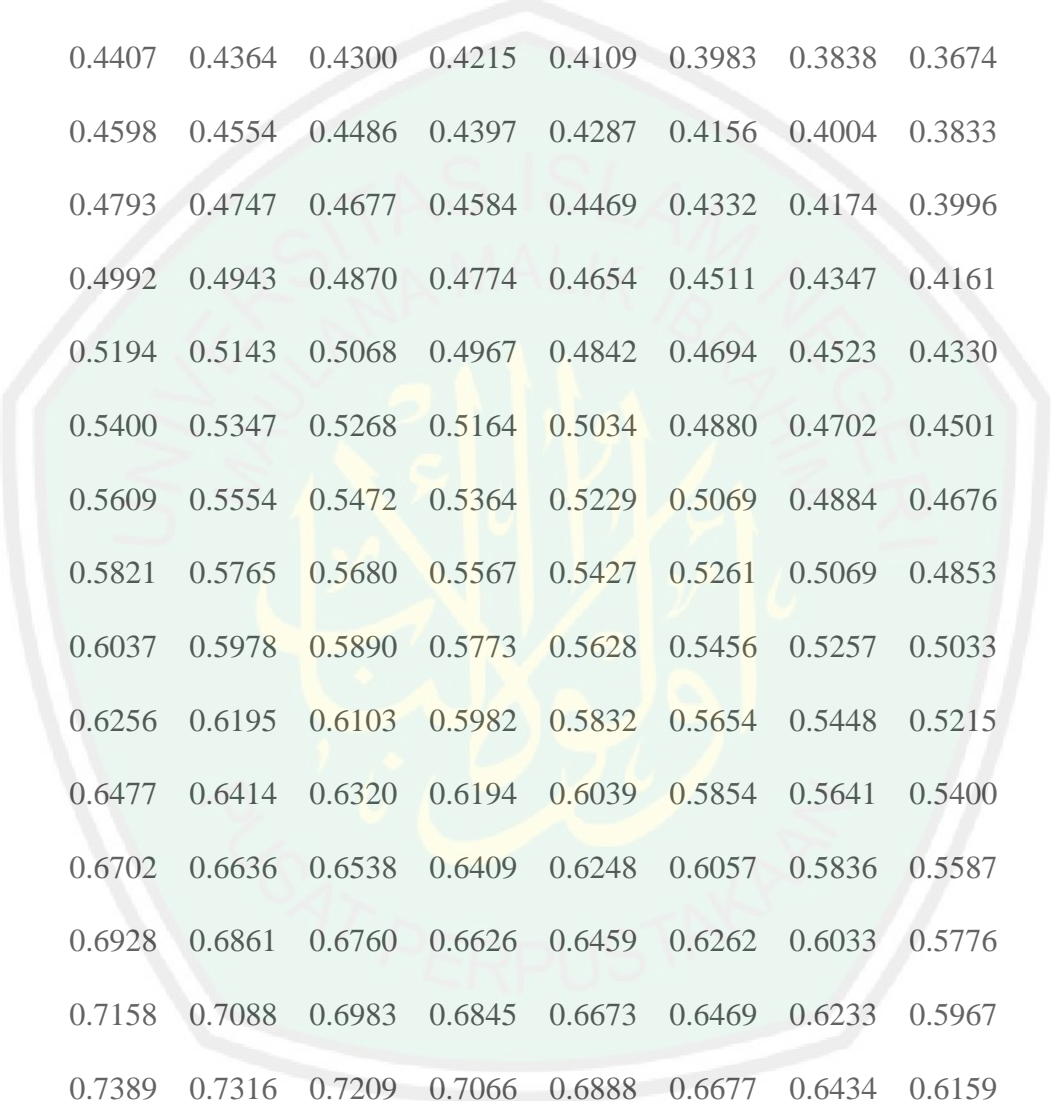


0.3486	0.3596	0.3689	0.3763	0.3820	0.3857	0.3876	0.3876
0.3648	0.3763	0.3860	0.3938	0.3997	0.4037	0.4057	0.4057
0.3814	0.3934	0.4036	0.4117	0.4179	0.4220	0.4241	0.4241
0.3983	0.4109	0.4215	0.4300	0.4364	0.4407	0.4429	0.4429
0.4156	0.4287	0.4397	0.4486	0.4554	0.4598	0.4621	0.4621
0.4332	0.4469	0.4584	0.4677	0.4747	0.4793	0.4817	0.4817
0.4511	0.4654	0.4774	0.4870	0.4943	0.4992	0.5016	0.5016
0.4694	0.4842	0.4967	0.5068	0.5143	0.5194	0.5220	0.5220
0.4880	0.5034	0.5164	0.5268	0.5347	0.5400	0.5426	0.5426
0.5069	0.5229	0.5364	0.5472	0.5554	0.5609	0.5636	0.5636
0.5261	0.5427	0.5567	0.5680	0.5765	0.5821	0.5850	0.5850
0.5456	0.5628	0.5773	0.5890	0.5978	0.6037	0.6067	0.6067
0.5654	0.5832	0.5982	0.6103	0.6195	0.6256	0.6286	0.6286
0.5854	0.6039	0.6194	0.6320	0.6414	0.6477	0.6509	0.6509
0.6057	0.6248	0.6409	0.6538	0.6636	0.6702	0.6735	0.6735
0.6262	0.6459	0.6626	0.6760	0.6861	0.6928	0.6962	0.6962
0.6469	0.6673	0.6845	0.6983	0.7088	0.7158	0.7193	0.7193
0.6677	0.6888	0.7066	0.7209	0.7316	0.7389	0.7425	0.7425
0.6888	0.7105	0.7288	0.7436	0.7547	0.7621	0.7659	0.7659
0.7099	0.7323	0.7512	0.7664	0.7779	0.7855	0.7894	0.7894
0.7312	0.7543	0.7737	0.7893	0.8011	0.8090	0.8130	0.8130
0.7525	0.7762	0.7962	0.8123	0.8245	0.8326	0.8367	0.8367
0.7738	0.7982	0.8188	0.8353	0.8478	0.8562	0.8604	0.8604
0.7950	0.8202	0.8413	0.8583	0.8711	0.8797	0.8840	0.8840

0.8162	0.8420	0.8637	0.8812	0.8943	0.9032	0.9076	0.9076
0.8373	0.8637	0.8859	0.9039	0.9174	0.9264	0.9310	0.9310
0.8581	0.8852	0.9080	0.9263	0.9402	0.9495	0.9541	0.9541
0.8786	0.9064	0.9297	0.9485	0.9627	0.9722	0.9770	0.9770
0.8988	0.9272	0.9511	0.9703	0.9848	0.9945	0.9994	0.9994

Columns 25 through 32

0.1445	0.1431	0.1410	0.1382	0.1347	0.1306	0.1258	0.1205
0.1553	0.1538	0.1515	0.1485	0.1448	0.1403	0.1352	0.1294
0.1665	0.1649	0.1624	0.1592	0.1552	0.1505	0.1450	0.1388
0.1781	0.1764	0.1738	0.1703	0.1661	0.1610	0.1551	0.1485
0.1902	0.1883	0.1856	0.1819	0.1773	0.1719	0.1656	0.1585
0.2027	0.2007	0.1977	0.1938	0.1890	0.1832	0.1765	0.1690
0.2156	0.2135	0.2104	0.2062	0.2010	0.1949	0.1878	0.1797
0.2290	0.2267	0.2234	0.2190	0.2135	0.2069	0.1994	0.1909
0.2428	0.2404	0.2368	0.2321	0.2263	0.2194	0.2114	0.2024
0.2570	0.2545	0.2507	0.2457	0.2396	0.2322	0.2238	0.2142
0.2716	0.2689	0.2650	0.2597	0.2532	0.2455	0.2365	0.2264
0.2867	0.2839	0.2797	0.2741	0.2672	0.2591	0.2496	0.2390
0.3021	0.2992	0.2948	0.2889	0.2817	0.2731	0.2631	0.2519
0.3180	0.3149	0.3103	0.3041	0.2965	0.2874	0.2769	0.2651
0.3343	0.3311	0.3262	0.3197	0.3117	0.3022	0.2911	0.2787
0.3511	0.3476	0.3425	0.3357	0.3273	0.3173	0.3057	0.2927

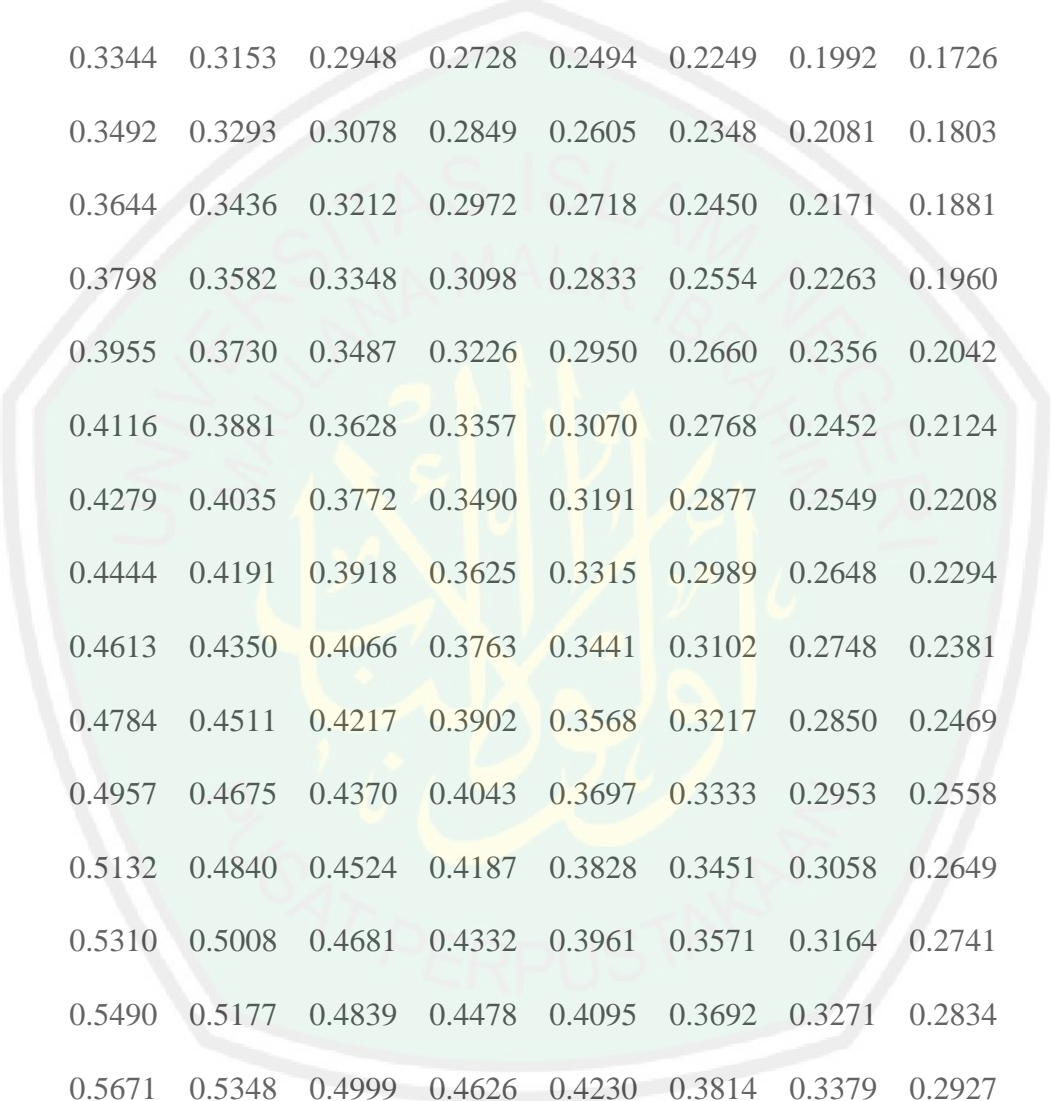


0.3682	0.3646	0.3592	0.3521	0.3433	0.3328	0.3206	0.3069
0.3857	0.3820	0.3763	0.3689	0.3596	0.3486	0.3359	0.3216
0.4037	0.3997	0.3938	0.3860	0.3763	0.3648	0.3515	0.3365
0.4220	0.4179	0.4117	0.4036	0.3934	0.3814	0.3675	0.3518
0.4407	0.4364	0.4300	0.4215	0.4109	0.3983	0.3838	0.3674
0.4598	0.4554	0.4486	0.4397	0.4287	0.4156	0.4004	0.3833
0.4793	0.4747	0.4677	0.4584	0.4469	0.4332	0.4174	0.3996
0.4992	0.4943	0.4870	0.4774	0.4654	0.4511	0.4347	0.4161
0.5194	0.5143	0.5068	0.4967	0.4842	0.4694	0.4523	0.4330
0.5400	0.5347	0.5268	0.5164	0.5034	0.4880	0.4702	0.4501
0.5609	0.5554	0.5472	0.5364	0.5229	0.5069	0.4884	0.4676
0.5821	0.5765	0.5680	0.5567	0.5427	0.5261	0.5069	0.4853
0.6037	0.5978	0.5890	0.5773	0.5628	0.5456	0.5257	0.5033
0.6256	0.6195	0.6103	0.5982	0.5832	0.5654	0.5448	0.5215
0.6477	0.6414	0.6320	0.6194	0.6039	0.5854	0.5641	0.5400
0.6702	0.6636	0.6538	0.6409	0.6248	0.6057	0.5836	0.5587
0.6928	0.6861	0.6760	0.6626	0.6459	0.6262	0.6033	0.5776
0.7158	0.7088	0.6983	0.6845	0.6673	0.6469	0.6233	0.5967
0.7389	0.7316	0.7209	0.7066	0.6888	0.6677	0.6434	0.6159
0.7621	0.7547	0.7436	0.7288	0.7105	0.6888	0.6637	0.6353
0.7855	0.7779	0.7664	0.7512	0.7323	0.7099	0.6840	0.6548
0.8090	0.8011	0.7893	0.7737	0.7543	0.7312	0.7045	0.6744
0.8326	0.8245	0.8123	0.7962	0.7762	0.7525	0.7250	0.6941
0.8562	0.8478	0.8353	0.8188	0.7982	0.7738	0.7456	0.7137

0.8797	0.8711	0.8583	0.8413	0.8202	0.7950	0.7661	0.7333
0.9032	0.8943	0.8812	0.8637	0.8420	0.8162	0.7865	0.7529
0.9264	0.9174	0.9039	0.8859	0.8637	0.8373	0.8067	0.7723
0.9495	0.9402	0.9263	0.9080	0.8852	0.8581	0.8268	0.7915
0.9722	0.9627	0.9485	0.9297	0.9064	0.8786	0.8466	0.8104
0.9945	0.9848	0.9703	0.9511	0.9272	0.8988	0.8660	0.8290

Columns 33 through 40

0.1145	0.1080	0.1009	0.0934	0.0854	0.0770	0.0682	0.0591
0.1230	0.1160	0.1085	0.1004	0.0918	0.0827	0.0733	0.0635
0.1319	0.1244	0.1163	0.1076	0.0984	0.0887	0.0786	0.0681
0.1411	0.1331	0.1244	0.1151	0.1053	0.0949	0.0841	0.0728
0.1507	0.1421	0.1328	0.1229	0.1124	0.1013	0.0898	0.0778
0.1606	0.1515	0.1416	0.1310	0.1198	0.1080	0.0957	0.0829
0.1708	0.1611	0.1506	0.1394	0.1274	0.1149	0.1018	0.0882
0.1814	0.1711	0.1599	0.1480	0.1353	0.1220	0.1081	0.0936
0.1923	0.1814	0.1696	0.1569	0.1435	0.1293	0.1146	0.0993
0.2036	0.1920	0.1795	0.1661	0.1519	0.1369	0.1213	0.1051
0.2152	0.2029	0.1897	0.1755	0.1605	0.1447	0.1282	0.1111
0.2271	0.2142	0.2002	0.1853	0.1694	0.1527	0.1353	0.1172
0.2394	0.2258	0.2110	0.1953	0.1786	0.1610	0.1426	0.1236
0.2520	0.2376	0.2221	0.2056	0.1880	0.1695	0.1501	0.1301
0.2649	0.2498	0.2335	0.2161	0.1976	0.1782	0.1578	0.1367

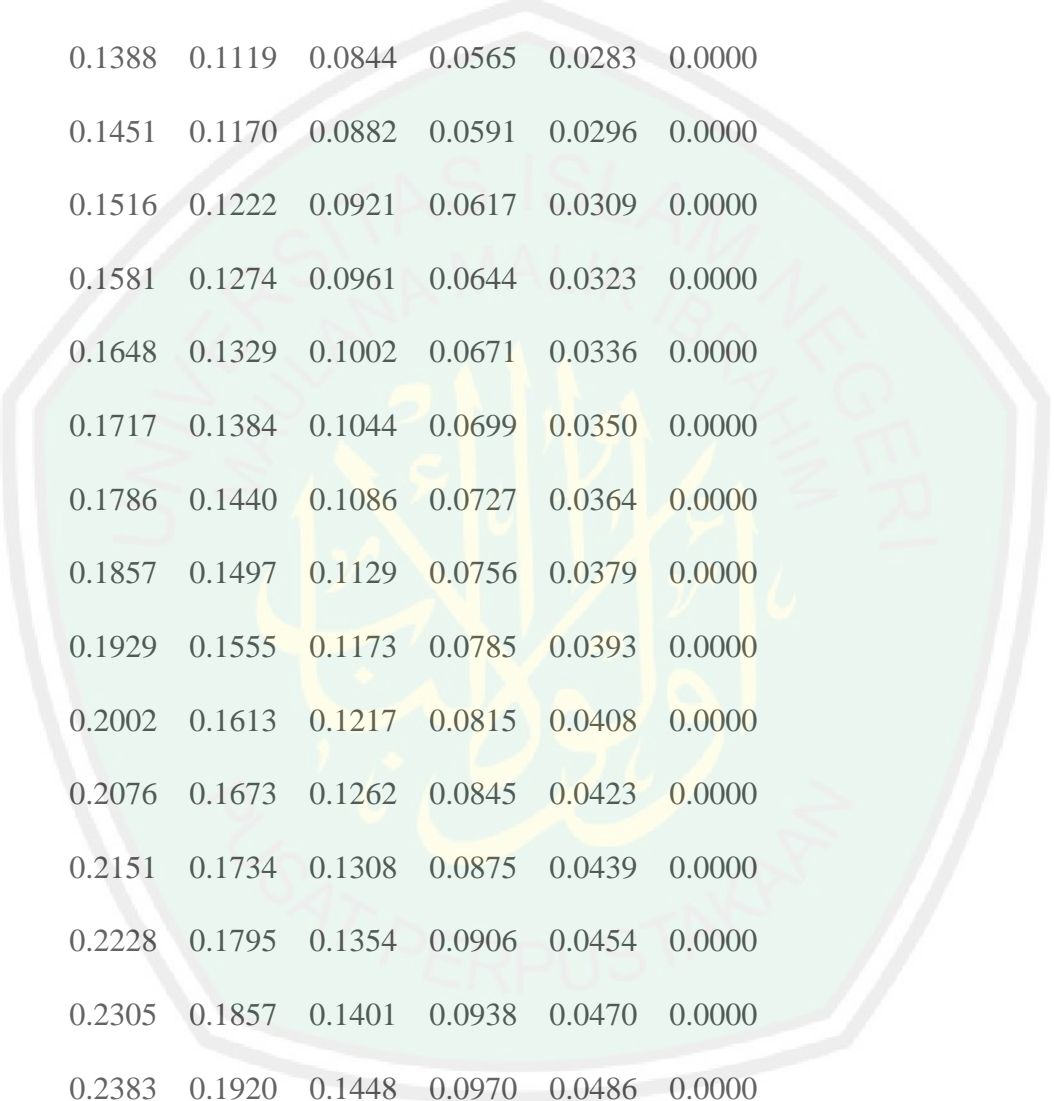


0.2782	0.2623	0.2452	0.2269	0.2075	0.1871	0.1657	0.1436
0.2917	0.2751	0.2572	0.2380	0.2176	0.1962	0.1738	0.1506
0.3056	0.2882	0.2694	0.2493	0.2280	0.2055	0.1821	0.1578
0.3199	0.3016	0.2820	0.2609	0.2386	0.2151	0.1906	0.1651
0.3344	0.3153	0.2948	0.2728	0.2494	0.2249	0.1992	0.1726
0.3492	0.3293	0.3078	0.2849	0.2605	0.2348	0.2081	0.1803
0.3644	0.3436	0.3212	0.2972	0.2718	0.2450	0.2171	0.1881
0.3798	0.3582	0.3348	0.3098	0.2833	0.2554	0.2263	0.1960
0.3955	0.3730	0.3487	0.3226	0.2950	0.2660	0.2356	0.2042
0.4116	0.3881	0.3628	0.3357	0.3070	0.2768	0.2452	0.2124
0.4279	0.4035	0.3772	0.3490	0.3191	0.2877	0.2549	0.2208
0.4444	0.4191	0.3918	0.3625	0.3315	0.2989	0.2648	0.2294
0.4613	0.4350	0.4066	0.3763	0.3441	0.3102	0.2748	0.2381
0.4784	0.4511	0.4217	0.3902	0.3568	0.3217	0.2850	0.2469
0.4957	0.4675	0.4370	0.4043	0.3697	0.3333	0.2953	0.2558
0.5132	0.4840	0.4524	0.4187	0.3828	0.3451	0.3058	0.2649
0.5310	0.5008	0.4681	0.4332	0.3961	0.3571	0.3164	0.2741
0.5490	0.5177	0.4839	0.4478	0.4095	0.3692	0.3271	0.2834
0.5671	0.5348	0.4999	0.4626	0.4230	0.3814	0.3379	0.2927
0.5854	0.5521	0.5161	0.4775	0.4367	0.3937	0.3488	0.3022
0.6039	0.5695	0.5323	0.4926	0.4504	0.4061	0.3598	0.3117
0.6224	0.5870	0.5487	0.5077	0.4643	0.4186	0.3708	0.3213
0.6410	0.6045	0.5651	0.5229	0.4782	0.4311	0.3819	0.3309
0.6597	0.6222	0.5816	0.5381	0.4921	0.4436	0.3930	0.3405

0.6784	0.6398	0.5980	0.5534	0.5060	0.4562	0.4042	0.3502
0.6970	0.6574	0.6145	0.5686	0.5199	0.4687	0.4153	0.3598
0.7156	0.6749	0.6308	0.5837	0.5338	0.4812	0.4263	0.3694
0.7341	0.6923	0.6471	0.5988	0.5475	0.4936	0.4373	0.3789
0.7523	0.7095	0.6632	0.6137	0.5612	0.5059	0.4482	0.3883
0.7703	0.7265	0.6791	0.6284	0.5746	0.5180	0.4589	0.3976
0.7880	0.7431	0.6947	0.6428	0.5878	0.5299	0.4695	0.4067

Columns 41 through 46

0.0497	0.0401	0.0302	0.0202	0.0101	0.0000
0.0534	0.0430	0.0325	0.0217	0.0109	0.0000
0.0573	0.0461	0.0348	0.0233	0.0117	0.0000
0.0613	0.0494	0.0372	0.0249	0.0125	0.0000
0.0654	0.0527	0.0398	0.0266	0.0133	0.0000
0.0697	0.0562	0.0424	0.0284	0.0142	0.0000
0.0742	0.0598	0.0451	0.0302	0.0151	0.0000
0.0787	0.0635	0.0479	0.0320	0.0161	0.0000
0.0835	0.0673	0.0507	0.0340	0.0170	0.0000
0.0884	0.0712	0.0537	0.0360	0.0180	0.0000
0.0934	0.0753	0.0568	0.0380	0.0190	0.0000
0.0986	0.0794	0.0599	0.0401	0.0201	0.0000
0.1039	0.0837	0.0632	0.0423	0.0212	0.0000
0.1094	0.0881	0.0665	0.0445	0.0223	0.0000



0.1150	0.0927	0.0699	0.0468	0.0235	0.0000
0.1207	0.0973	0.0734	0.0491	0.0246	0.0000
0.1266	0.1020	0.0770	0.0515	0.0258	0.0000
0.1327	0.1069	0.0806	0.0540	0.0271	0.0000
0.1388	0.1119	0.0844	0.0565	0.0283	0.0000
0.1451	0.1170	0.0882	0.0591	0.0296	0.0000
0.1516	0.1222	0.0921	0.0617	0.0309	0.0000
0.1581	0.1274	0.0961	0.0644	0.0323	0.0000
0.1648	0.1329	0.1002	0.0671	0.0336	0.0000
0.1717	0.1384	0.1044	0.0699	0.0350	0.0000
0.1786	0.1440	0.1086	0.0727	0.0364	0.0000
0.1857	0.1497	0.1129	0.0756	0.0379	0.0000
0.1929	0.1555	0.1173	0.0785	0.0393	0.0000
0.2002	0.1613	0.1217	0.0815	0.0408	0.0000
0.2076	0.1673	0.1262	0.0845	0.0423	0.0000
0.2151	0.1734	0.1308	0.0875	0.0439	0.0000
0.2228	0.1795	0.1354	0.0906	0.0454	0.0000
0.2305	0.1857	0.1401	0.0938	0.0470	0.0000
0.2383	0.1920	0.1448	0.0970	0.0486	0.0000
0.2461	0.1984	0.1496	0.1002	0.0502	0.0000
0.2541	0.2048	0.1545	0.1034	0.0518	0.0000
0.2621	0.2112	0.1593	0.1067	0.0535	0.0000
0.2701	0.2177	0.1642	0.1099	0.0551	0.0000
0.2782	0.2242	0.1691	0.1132	0.0567	0.0000

0.2863	0.2308	0.1741	0.1165	0.0584	0.0000
0.2944	0.2373	0.1790	0.1198	0.0601	0.0000
0.3025	0.2438	0.1839	0.1231	0.0617	0.0000
0.3106	0.2503	0.1888	0.1264	0.0633	0.0000
0.3186	0.2568	0.1937	0.1296	0.0650	0.0000
0.3265	0.2631	0.1985	0.1329	0.0666	0.0000
0.3343	0.2694	0.2032	0.1360	0.0682	0.0000
0.3420	0.2756	0.2079	0.1392	0.0698	0.0000

