

ملخص

الليبية، عقّة 2015، انخفاض نموذج الموج السطحي من خلال كاسر الأمواج على شكل الشعاع المسامي، البحث، شعبة الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجية الجامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج. المشرف الأول: محمد جمهوري الماجستير. المشرف الثاني: الدكتور عبد الشاكر، الماجستير.

الكلمات الرئيسية: المعادلات للمياه الضخلة، كاسر الأمواج المسامية.

يبحث هذا البحث عن تراجع نموذج الموج السطحي الذي يتحرك من خلال كاسر الأمواج على شكل الشعاع المسامي. الانخفاض بهذا النموذج يتم بعملية الافتراض بأن التدفق الماء على القناة بثنائية الأبعاد الذي يملك القاع غير متكافئ، وله سرعة موحدة. ثم اضطرب ذلك التدفق بوجود الشعاع المسامي في قاع القناة. ويسبب تغير سرعته وتخرج الأمواج على سطح الماء. الخطوات التي تؤدي إلى انخفاض هذا النموذج هي: خفض معادلات التحكم و السوائل الأساسية مع حدود أوضاعها. وعملية الجداول، و التوسع في السلسلة العددية، ومراجعة كل الترتيب العددي من السلسلة العددية الموجودة، و الحلّ من السلسلة العددية تنقل إلى نموذج الرياضية. ثم يجعلها على محاكاة من نموذج الأمواج المحسولة. نموذج الأمواج المحسولة عبارة عن نموذج الأمواج الخطي المماثل بمعادلات الماء (السائل) الضخلة أو ما يسمى المعادلات الخطية للماء الضخلة (س و إ)، ومدة التخمين المناسبة بطبيعة كاسر الأمواج المسامي. لذلك، الأمواج التي تمر بكاسر الأمواج ستمتص و تنخفض سرعتها.

ABSTRAK

Lailiyah, Iffatul. 2015. **Penurunan Model Gelombang Permukaan Melalui Pemecah Gelombang Berupa Balok Berpori**. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Mohammad Jamhuri, M.Si. (II) Dr. Abdussakir, M.Pd.

Kata kunci: Persamaan Air Dangkal (SWE), Pemecah Gelombang Berpori.

Penelitian ini membahas penurunan model gelombang permukaan yang merambat melalui sebuah pemecah gelombang berupa balok berpori. Penurunan model ini dilakukan dengan mengasumsikan bahwa aliran fluida berada pada saluran dua dimensi yang memiliki dasar tidak rata dan memiliki kecepatan seragam. Kemudian aliran mengalami gangguan berupa balok berpori pada dasar saluran, sehingga kecepatan aliran tersebut berubah-ubah dan menimbulkan gelombang pada permukaan fluida.

Langkah-langkah yang dilakukan dalam penurunan model ini adalah: menurunkan persamaan-persamaan pengatur atau persamaan-persamaan dasar fluida beserta kondisi-kondisi batasnya, penskalaan, ekspansi dengan deret, peninjauan tiap-tiap orde dari deret yang ada, solusi dari deret tersebut dibawa ke dalam model matematika, kemudian membuat simulasi dari model gelombang yang diperoleh. Model gelombang yang dihasilkan berupa model gelombang linier yang sama dengan persamaan air dangkal atau yang disebut *linear Shallow-Water Equations* (SWE) jika $d = 1$, dengan jangka redaman sebanding dengan karakter pemecah gelombang berpori. Oleh karena itu, gelombang yang melewati pemecah gelombang akan diserap, dan amplitudo menurun.

ABSTRACT

Lailiyah, Iffatul. 2015. **Derivation of Surface Wave Model Passing Over a Square Porous Breakwater**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) Mohammad Jamhuri, M.Si. (II) Dr. Abdussakir, M.Pd.

Keywords: Shallow Water Equations (SWE), Porous Breakwater.

This research discusses the derivation model of surface waves that propagate through a breakwater in the form of square porous. The derivation of the model is done by assumption that the fluid flows on two basic dimensions line that have uneven base and have a uniform speed. Then the flow is perturbed such as porous blocks on the basis of the line, so that the flow rate of the fluid and cause waves on the surface of the fluid.

The steps performed in the derivation of this model are: deriving government equations or basic equations of fluid along the boundary conditions, scaling, expansion of the series, a review of each order of the existing series, the solution of the series brought to in the mathematical model, then make a simulation of the wave model obtained. The model waveform generated in the form of a linear wave model is the same to the shallow water equations or the so-called linear Shallow-Water Equations (SWE) if $d = 1$, with a damping term proportional to the character of the porous breakwater. Therefore, the wave passing through the breakwater will be absorbed, and the amplitude declines.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Gelombang adalah suatu gangguan dari keadaan setimbang yang bergerak dari satu tempat ke tempat lain (Streeter & Wylie, 1985:1). Sistem gelombang mempunyai fungsi yang menggambarkan perpindahan satu partikel dalam medium. Fungsi tersebut tergantung pada posisi dan waktu (dimensi ruang dan waktu).

Gelombang air laut adalah pergerakan naik dan turunnya air dengan arah tegak lurus permukaan yang membentuk kurva atau grafik sinusoidal. Terjadinya gelombang air laut dapat disebabkan oleh adanya angin, gempa di dasar laut, pergerakan benda di permukaan, dan gaya tarik menarik antar benda dan sebagainya. Angin di atas permukaan mentransfer energinya ke dalam perairan, menyebabkan alun atau bukit–bukit yang disebut sebagai gelombang air laut.

Sebagaimana firman Allah tentang gelombang air laut dijelaskan dalam al-Quran surat ar-Ruum/30:46, yaitu:

وَمِنْ آيَاتِهِ أَنْ يُرْسِلَ الرِّيَّاحَ مُبَشِّرَاتٍ وَلِيُذِيقَكُمْ مِنْ رَحْمَتِهِ وَلِتَجْرِيَ الْفُلُكُ بِأَمْرِهِ وَلِتَبْتَغُوا مِنْ فَضْلِهِ وَلِعَلَّكُمْ تَشْكُرُونَ ﴿٤٦﴾

“dan di antara tanda-tanda kekuasaan-Nya adalah bahwa Dia mengirimkan angin sebagai pembawa berita gembira dan untuk merasakan kepadamu sebagian dari rahmat-Nya dan supaya kapal dapat berlayar dengan perintah-Nya dan (juga) supaya kamu dapat mencari karunia-Nya; mudah-mudahan kamu bersyukur” (QS. ar-Ruum/30:46).

Kata “angin” dalam hal ini secara umum yaitu angin yang bertiup dari suatu waktu ke waktu yang lainnya. Kedekatan makna “angin” dalam ayat di atas

dapat diartikan juga sebagai gelombang. Ayat di atas menjelaskan bukti-bukti yang menunjukkan ke-Esaan Allah dan yang menjadi bukti nyata di darat dan di lautan.

Sebagaimana perairan darat, perairan laut juga sangat bermanfaat bagi kehidupan manusia. Secara umum perairan laut dapat dimanfaatkan sebagai: sarana transportasi, sumber energi, serta pendidikan dan penelitian termasuk juga dalam penelitian tentang fenomena gelombang yang akan dikaji kali ini. Selain itu, Allah berfirman dalam QS. Yunus/10:101:

﴿قُلْ انظُرُوا مَاذَا فِي السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ وَمَا تُعْجِبُ الْآيَاتِ وَالنُّذُرِ عَنْ قَوْمٍ لَا يُؤْمِنُونَ﴾

“Katakanlah: "Perhatikanlah apa yang ada di langit dan di bumi. tidaklah bermanfaat tanda kekuasaan Allah dan Rasul-rasul yang memberi peringatan bagi orang-orang yang tidak beriman" (QS. Yunus/10:101).

Ayat tersebut menganjurkan manusia untuk melakukan pengkajian, penelitian, dan pengamatan tentang fenomena alam yang ada di langit dan di bumi. Dengan harapan manusia dapat mengambil manfaatnya sebagai ilmu pengetahuan agar dapat digunakan untuk kebutuhan dan kesejahteraan hidupnya. Selain itu, hal pokok yang harus diperoleh dengan mengamati tanda-tanda kekuasaan Allah tersebut, yaitu agar dapat mengambil pelajaran untuk meningkatkan keimanan dan ketakwaan diri kepada Allah Swt.

Pada dasarnya, suatu gelombang yang melewati dasar dengan kedalaman berbeda akan terpecah menjadi dua bagian yaitu gelombang transmisi dan gelombang refleksi. Banyak para ahli yang memanfaatkan fakta alam tersebut untuk berupaya mengurangi dampak kerusakan, yaitu dengan cara membuat pemecah gelombang. Pemecah gelombang ini bertujuan untuk mereduksi

amplitudo gelombang datang sehingga amplitudo gelombang yang menabrak pantai menjadi sekecil mungkin.

Pemecah gelombang juga dapat berupa sejumlah balok yang kuat dan kokoh dengan ukuran tertentu serta jarak antar balok disesuaikan dengan kebutuhan. Ketika gelombang masuk melewati sebuah balok penghalang, ada proses penyebaran gelombang bolak-balik yang berupa gelombang transmisi dan refleksi. Untuk ketinggian balok tertentu, dapat ditentukan panjang balok optimal yang dapat mereduksi amplitudo gelombang transmisi menjadi sekecil mungkin.

Balok berpori memiliki rongga yang terisi oleh air dan air tersebut mengalir di antaranya. Akibatnya melalui ruang yang ada, aliran air di dalam balok berpori mengalami hambatan. Selain itu, sepanjang batas antara lapisan berpori dan lapisan air memungkinkan terjadinya sirkulasi dari lapisan berpori ke lapisan atasnya, maupun sebaliknya. Gelombang datang dengan kecepatan tertentu melalui saluran dengan kedalaman konstan dan melalui balok berpori dengan ketinggian dan ketebalan tertentu. Hal ini mempengaruhi pola gelombang di atas media berpori (Jamhuri, dkk, 2013:18).

Wiryanto (2011:130) menurunkan model gelombang permukaan yang muncul akibat gangguan yang terjadi pada dasar saluran. Gangguan tersebut berupa pemecah gelombang berpori dengan bagian bawah saluran berbentuk datar dan padat. Model yang dihasilkan adalah pengembangan dari persamaan air dangkal atau *Shallow-water Equations* (SWE). Menurut Wiryanto, model *Shallow-water Equations* (SWE) mampu menjelaskan pengurangan amplitudo gelombang yang melewati pemecah gelombang yang berpori, energi yang dibawa oleh gelombang juga berkurang karena sebanding dengan kuadrat amplitudo.

Pada penelitian kali ini dikaji tentang perambatan suatu gelombang yang terjadi pada permukaan air yang melalui dasar saluran berupa balok berpori terendam. Dalam hal ini, diasumsikan gelombang permukaan yang dihasilkan adalah gelombang linier. Untuk menurunkan model, peneliti menyelesaikan persamaan Laplace beserta kondisi-kondisi batasnya ke dalam bentuk persamaan ketinggian permukaan pada fluida. Kemudian menyederhanakan solusi dari deret asimtotik ke dalam model matematika, serta mencari solusi dari model matematika yang dihasilkan.

Berdasarkan paparan tersebut, penelitian difokuskan untuk memodelkan gelombang pada perairan dangkal yang dihasilkan oleh aliran yang melalui sebuah pemecah gelombang berupa balok berpori, sehingga tema yang diangkat dalam penelitian ini adalah “*Penurunan Model Gelombang Permukaan Melalui Pemecah Gelombang Berupa Balok Berpori*”.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang terurai di atas, maka rumusan masalah penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana model matematika untuk perambatan gelombang yang melalui pemecah gelombang berupa balok berpori?
2. Bagaimana pengaruh pemecah gelombang terendam berupa balok berpori terhadap gelombang di permukaan air?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah tersebut, tujuan penelitian ini adalah:

1. Untuk membahas model matematika perambatan gelombang yang melalui pemecah gelombang berupa balok berpori
2. Untuk mengetahui pengaruh pemecah gelombang terendam berupa balok berpori terhadap gelombang di permukaan air.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat penelitian ini adalah:

1. Hasil yang diperoleh dari penelitian ini diharapkan dapat menjelaskan bagaimana model matematika perambatan gelombang yang melalui pemecah gelombang berupa balok berpori.
2. Penelitian ini diharapkan dapat menjadi tambahan dan wawasan pengetahuan terkait perambatan gelombang ini.

1.5 Batasan Masalah

Agar penulisan tugas akhir ini tidak meluas dan menyimpang dari pembahasan maka perlu diberikan suatu pembatasan masalah. Pembatasan masalah pada skripsi ini adalah sebagai berikut:

1. Permasalahan ini ditinjau dalam masalah dua dimensi (2-D) untuk saluran dan satu dimensi (1-D) untuk gelombang permukaannya.
2. Fluida diasumsikan ideal, yaitu tak termampatkan, tak kental, dan mempunyai kerapatan konstan.

3. Pemecah gelombang bersifat *permeable* (berpori) dengan ketinggian konstan.
4. Teori gelombang yang digunakan adalah teori gelombang nonlinear untuk mengamati perambatan gelombang pada permukaan fluida.
5. Fluida diasumsikan sebagai fluida tak berotasi.

1.6 Metode Penelitian

Langkah-langkah yang dilakukan dalam pelaksanaan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menurunkan persamaan-persamaan pengatur untuk fluida dalam media berpori dari hukum-hukum kesetimbangan yang terjadi pada media berpori.
2. Menentukan kondisi batas dinamik dan kinematik yang terjadi pada permukaan fluida, pada permukaan media berpori, dan pada dasar saluran baik untuk media fluida maupun untuk media berpori.
3. Melakukan penskalaan yang bertujuan untuk menondimensikan variabel-variabel yang digunakan.
4. Melakukan aproksimasi atau taksiran terhadap variabel-variabel yang digunakan.
5. Menyederhanakan solusi dari deret asimtotik ke dalam model matematika.
6. Membuat simulasi dari model gelombang permukaan yang diperoleh dengan memodifikasi parameter yang ada untuk melihat pengaruh dari masing-masing parameter terhadap fenomena yang terjadi.
7. Memberikan interpretasi dari hasil simulasi yang telah dibuat.

1.7 Sistematika Penulisan

Dalam penulisan skripsi ini, maka penulisan dibagi menjadi beberapa bagian sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Pada bab ini dijelaskan mengenai latar belakang masalah, perumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian, serta sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Pada bab ini dijelaskan mengenai teori-teori yang digunakan dalam penelitian ini yang meliputi: persamaan kontinuitas, persamaan momentum, persamaan Bernoulli, persamaan Laplace, masalah syarat batas, dan kajian agama tentang gelombang.

Bab III Pembahasan

Pembahasan berisi tentang penurunan persamaan pengatur beserta kondisi-kondisi batasnya, penskalaan untuk mengecilkan variabel x , t dan kecepatannya, aproksimasi atau taksiran terhadap variabel-variabel yang digunakan, penyederhanaan solusi dari deret asimtotik ke dalam model matematika, solusi dari model matematika yang dihasilkan, simulasi dari solusi yang dihasilkan, dan interpretasi dari hasil simulasi yang telah dibuat.

Bab IV Penutup

Pada bab ini berisi kesimpulan dari hasil penelitian yang telah dilakukan serta saran-saran yang berkaitan dengan permasalahan yang dikaji.

Untuk mengetahui bagaimana perilaku dari gelombang, dapat diturunkan model matematika yang merupakan representasi dari ketinggian gelombang pada permukaan. Dalam penurunan model digunakan persamaan-persamaan dasar yang berasal dari hukum-hukum kekekalan yang terjadi pada aliran fluida. Beberapa teori mendasar yang digunakan sebagai landasan dalam melakukan penelitian ini di antaranya adalah (1) persamaan kontinuitas, (2) persamaan momentum, (3) potensial kecepatan, (4) fluida dalam media berpori, (5) persamaan Laplace pada media fluida dan media berpori, (6) persamaan Bernoulli pada media fluida dan media berpori, dan (5) kondisi-kondisi batas pada permukaan, *interface*, dan dasar saluran. Untuk lebih jelasnya teori-teori mendasar tersebut akan dibahas pada bab ini.

2.1 Persamaan Kontinuitas

Salah satu penerapan konsep volume kontrol yang paling sederhana adalah penurunan persamaan kontinuitas, yaitu persamaan yang menyatakan bahwa di dalam aliran cairan termampatkan (*compressible*) jumlah aliran tiap satuan waktu adalah sama di semua penampang di sepanjang aliran. Penurunan persamaan kontinuitas dapat dilakukan dengan menerapkan “hukum kekekalan massa” pada konsep volume kontrol. Hukum kekekalan massa menyatakan bahwa massa yang masuk ke dalam sistem sama dengan massa yang keluar sistem. Hukum ini digunakan untuk menurunkan persamaan kontinuitas dengan meninjau perubahan massa yang terjadi pada elemen fluida. Dalam hal khusus, persamaan kontinuitas menghasilkan persamaan Laplace.

Hukum kekekalan massa menyatakan bahwa massa di dalam suatu sistem aliran akan kekal menurut waktu, yaitu:

$$\frac{dm}{dt} = 0$$

dimana m adalah jumlah massa di dalam sistem. Massa jenis dalam fluida dinotasikan dengan ρ yang didefinisikan sebagai massa per satuan volume, yaitu:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

sehingga

$$m = \rho V \quad (2.1)$$

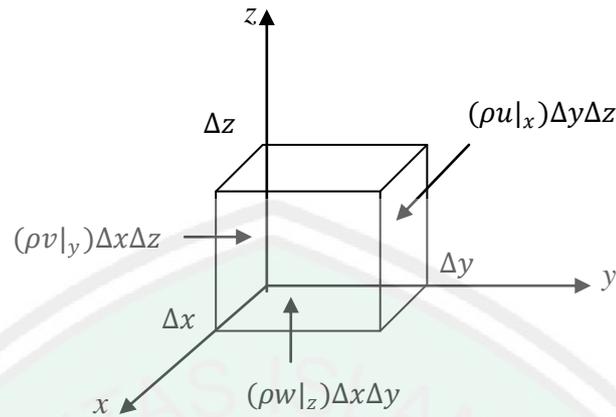
$$m = \rho(\Delta x \Delta y \Delta z)$$

dimana ρ adalah massa jenis dan V adalah volume ($\Delta x \Delta y \Delta z$) (Streeter dan Wylie, 1985:95). Perubahan massa terhadap waktu dinyatakan dalam bentuk persamaan:

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho V)$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho \Delta x \Delta y \Delta z) \quad (2.2)$$

Pada elemen volume, perubahan massa rata-rata merupakan selisih antara rata-rata massa yang masuk dan rata-rata massa yang keluar dari elemen volume tersebut, sebagaimana dinyatakan pada Gambar 2.2 berikut:



Gambar 2.2 Volume Kendali Penurunan Persamaan Kontinuitas Tiga Dimensi

Berdasarkan Gambar 2.2 tersebut, banyaknya massa yang masuk pada elemen volume per satuan waktu (melintasi bidang x) adalah $(\rho u|_x)\Delta y\Delta z$. Sedangkan banyaknya massa yang keluar melewati bidang $x + \Delta x$ yaitu $(\rho u|_{x+\Delta x})\Delta y\Delta z$, sehingga perubahan massa antara massa yang masuk dengan massa yang keluar dalam arah x adalah $(\rho u|_x)\Delta y\Delta z - (\rho u|_{x+\Delta x})\Delta y\Delta z$. Sebagai catatan u menyatakan komponen kecepatan dalam arah x .

Berlaku pula untuk banyaknya massa yang masuk dalam arah y dan arah z adalah $(\rho v|_y)\Delta x\Delta z$ dan $(\rho w|_z)\Delta x\Delta y$, dan banyaknya massa yang keluar melewati bidang $y + \Delta y$ dan melewati bidang $z + \Delta z$ adalah $(\rho v|_{y+\Delta y})\Delta x\Delta z$ dan $(\rho w|_{z+\Delta z})\Delta x\Delta y$. Sehingga perubahan massa antara massa yang masuk dengan massa yang keluar dalam arah y dan arah z adalah $(\rho v|_y)\Delta x\Delta z - (\rho v|_{y+\Delta y})\Delta x\Delta z$ dan $(\rho w|_z)\Delta x\Delta y - (\rho w|_{z+\Delta z})\Delta x\Delta y$. Sebagai catatan v menyatakan komponen kecepatan dalam arah y dan w menyatakan komponen kecepatan dalam arah z .

Perubahan massa per satuan waktu sama dengan perubahan massa dalam arah x ditambah perubahan massa dalam arah y ditambah perubahan massa dalam arah z , sehingga diperoleh persamaan kekekalan massa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z = [(\rho u|_x) \Delta y \Delta z - (\rho u|_{x+\Delta x}) \Delta y \Delta z] + [(\rho v|_y) \Delta x \Delta z - (\rho v|_{y+\Delta y}) \Delta x \Delta z] + [(\rho w|_z) \Delta x \Delta y - (\rho w|_{z+\Delta z}) \Delta x \Delta y] \quad (2.3)$$

Dengan membagi kedua ruas persamaan tersebut dengan volume $\Delta x \Delta y \Delta z$, maka akan menghasilkan persamaan berikut:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{[(\rho u)|_x - (\rho u)|_{x+\Delta x}]}{\Delta x} + \frac{[(\rho v)|_y - (\rho v)|_{y+\Delta y}]}{\Delta y} + \frac{[(\rho w)|_z - (\rho w)|_{z+\Delta z}]}{\Delta z} \quad (2.4)$$

Dengan mengambil limit volume $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ menuju ke nol, maka diperoleh:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[(\rho u)|_x - (\rho u)|_{x+\Delta x}]}{\Delta x} = -\frac{\partial \rho u}{\partial x}$$

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{[(\rho v)|_y - (\rho v)|_{y+\Delta y}]}{\Delta y} = -\frac{\partial \rho v}{\partial y}$$

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{[(\rho w)|_z - (\rho w)|_{z+\Delta z}]}{\Delta z} = -\frac{\partial \rho w}{\partial z}$$

Sehingga persamaan (2.3) dapat dituliskan sebagai:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\left(\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z}\right) \quad (2.5)$$

Untuk aliran tak mampu mampat, yaitu fluida yang mengalir tanpa mengalami perubahan volume atau massa jenis, maka kerapatan massa ρ akan konstan (yaitu semua turunan dari ρ adalah nol) di seluruh medan aliran sehingga persamaan (2.5) tereduksi menjadi persamaan:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.6)$$

Persamaan (2.6) ini disebut juga persamaan kontinuitas yang berasal dari kekekalan massa, namun massa atau kepadatan massa (ρ) dalam hal ini seperti telah menghilang dari persamaan (Munson, dkk, 2004:359).

2.2 Persamaan Momentum

Hukum kekekalan momentum menyatakan momentum yang masuk pada sistem sama dengan momentum yang keluar. Hukum kekekalan momentum ini digunakan untuk membangun neraca kesetimbangan momentum. Momentum akibat gaya-gaya yang terjadi pada sistem juga dimuat oleh neraca kesetimbangan momentum ini. Neraca ini digunakan untuk menurunkan persamaan Bernoulli dan kondisi batas dinamik aliran juga diturunkan menggunakan persamaan ini (Jamhuri, dkk, 2013:6).

Menurut Munson, dkk (2004:257) dalam fisika, momentum berkaitan dengan kuantitas gerak yang dimiliki oleh suatu benda yang bergerak yaitu kecepatan. Dalam hal ini, momentum didefinisikan sebagai hasil kali antara massa dan kecepatan benda. Secara matematis momentum dapat ditentukan dengan persamaan:

$$p = mv \quad (2.7)$$

dengan, m : massa benda (kg)

v : kecepatan benda (m/s)

p : momentum benda (kg · m/s)

karena kecepatan merupakan besaran vektor, sedangkan massa merupakan besaran skalar, maka momentum merupakan besaran vektor. Jadi momentum adalah suatu nilai dari perkalian materi yang bermassa (memiliki bobot) dengan pergerakan (kecepatan).

Karena $m = \rho V$ maka persamaan (2.7) menjadi

$$p = (\rho V)v \quad (2.8)$$

dimana V adalah volume, dan ρ adalah kerapatan massa. Dengan $V = \Delta x \Delta y \Delta z$, sehingga persamaan (2.8) menjadi:

$$p = (\rho \Delta x \Delta y \Delta z)v \quad (2.9)$$

Sehingga untuk rata-rata perubahan momentum per satuan waktu dapat dinotasikan sebagai:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt} (\rho \Delta x \Delta y \Delta z)v$$

Teorema momentum dapat diterapkan pada aliran-aliran baik yang *steady* maupun *unsteady*; berdimensi satu, dua, atau tiga; termampatkan atau tak termampatkan. Sebagaimana halnya dalam kasus partikel-partikel padat atau diskret, fluida cenderung meneruskan keadaan diamnya atau gerak serempaknya kecuali bila diganggu oleh gaya-gaya dari luar (Olson dan Wright, 1993:126).

Berdasarkan teorema momentum maka kekekalan momentum pada elemen volume dapat dinyatakan sebagai:

Perubahan momentum = rata-rata momentum masuk – rata-rata momentum keluar
+ jumlah gaya-gaya eksternal.

Gaya yang digunakan dalam hal ini adalah gaya gravitasi dan gaya tekanan.

Gaya gravitasi pada massa diferensial $\rho \Delta x \Delta y \Delta z$ di dalam volume kendali ialah:

$$F_{grav} = \rho g \Delta x \Delta y \Delta z$$

dimana g secara umum boleh mempunyai orientasi sebarang terhadap sistem koordinat yang dipakai.

Gaya tekanan fluida P didefinisikan sebagai gaya tekan yang diterima per satuan luas fluida dan dinotasikan sebagai:

$$F_{tekanan} = P|_x \Delta y$$

Dengan cara yang sama dalam memperoleh persamaan kontinuitas, maka dengan Gambar 2.2 juga dapat menghasilkan persamaan momentum, yaitu perubahan momentum untuk arah x . Momentum yang masuk bidang x adalah massa yang melintasi bidang x dan kecepatan yang melintasi bidang x .

Fluida dengan rapat massa ρ dan bergerak dengan kecepatan u melintasi bidang x maka dalam selang satuan waktu terdapat sebanyak $(\rho u|_x) \Delta y \Delta z$, sehingga momentum yang melintasi bidang x adalah $(\rho u|_x) \Delta y \Delta z \cdot u|_x$. Sedangkan momentum yang keluar bidang x adalah massa yang melintasi bidang $x + \Delta x$ dan kecepatan yang melintasinya adalah $(\rho u|_{x+\Delta x}) \Delta y \Delta z \cdot u|_{x+\Delta x}$. maka resultan dari gaya-gaya tersebut dalam arah x yaitu $[P|_x - P|_{x+\Delta x}] \Delta y \Delta z + \rho g_x \Delta y \Delta z$, dengan $P|_x$ menyatakan tekanan pada bidang x , sedangkan g_x menyatakan percepatan akibat gravitasi dalam arah x . Ekspresi yang sama dapat dituliskan untuk perubahan momentum dalam bidang lain yang dilintasi yaitu dalam arah y dan arah z .

Berdasarkan kekekalan momentum, maka untuk momentum pada arah x , y dan z dapat ditulis sebagai:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \Delta x \Delta y \Delta z u) = & [(\rho u^2|_x) \Delta y \Delta z - (\rho u^2|_{x+\Delta x}) \Delta y \Delta z] + \\ & [(\rho uv|_y) \Delta x \Delta z - (\rho uv|_{y+\Delta y}) \Delta x \Delta z] + [(\rho uw|_z) \Delta x \Delta y - \\ & (\rho uw|_{z+\Delta z}) \Delta x \Delta y] + (p|_x - p|_{x+\Delta x}) \Delta y \Delta z + \rho g(x) \Delta y \Delta z \end{aligned} \quad (2.10)$$

Jika kedua ruas dibagi dengan $\Delta x \Delta y \Delta z$, maka diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u}{\partial t} = & \left[\frac{(\rho u^2|_x) - (\rho u^2|_{x+\Delta x})}{\Delta x} \right] + \left[\frac{(\rho uv|_y) - (\rho uv|_{y+\Delta y})}{\Delta y} \right] + \\ & \left[\frac{(\rho uw|_z) - (\rho uw|_{z+\Delta z})}{\Delta z} \right] + \frac{(p|_x - p|_{x+\Delta x})}{\Delta x} + \frac{\rho g(x)}{\Delta x} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Dengan limit $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ menuju nol, sehingga:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho u) = & - \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2) - \frac{\partial}{\partial y} (\rho uv) - \frac{\partial}{\partial z} (\rho uw) - \frac{\partial P}{\partial x} + \rho g(x) \\ = & -\rho \left[\frac{\partial}{\partial x} (u^2) + \frac{\partial}{\partial y} (uv) + \frac{\partial}{\partial z} (uw) \right] - \frac{\partial P}{\partial x} + \rho g(x) \end{aligned} \quad (2.12)$$

atau

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (u^2)}{\partial x} + \frac{\partial (uv)}{\partial y} + \frac{\partial (uw)}{\partial z} \right] = - \frac{\partial P}{\partial x} + \rho g(x)$$

Bila dikalikan dengan $\frac{1}{\rho}$ sehingga menghasilkan:

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (u^2)}{\partial x} + \frac{\partial (uv)}{\partial y} + \frac{\partial (uw)}{\partial z} \right] = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + g(x) \quad (2.13)$$

Dengan cara yang sama, maka akan diperoleh kekekalan momentum pada arah y

dan arah z sebagai berikut:

$$\left[\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial (uv)}{\partial x} + \frac{\partial (v^2)}{\partial y} + \frac{\partial (vw)}{\partial z} \right] = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + g(y) \quad (2.14)$$

dan

$$\left[\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial (uw)}{\partial x} + \frac{\partial (vw)}{\partial y} + \frac{\partial (w^2)}{\partial z} \right] = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + g(z) \quad (2.15)$$

Persamaan (2.13), (2.14) dan (2.15) merupakan persamaan momentum dan persamaan-persamaan tersebut dapat ditulis dalam notasi vektor:

$$\rho \frac{\partial q}{\partial t} = -\rho(q \cdot \nabla)q - \nabla P + \rho g \quad (2.16)$$

Kemudian bagi kedua ruas persamaan (2.16) dengan ρ maka didapatkan:

$$\begin{aligned} \frac{\rho \partial q}{\rho \partial t} &= -\frac{\rho}{\rho}(q \cdot \nabla)q - \frac{1}{\rho}\nabla P + \frac{\rho}{\rho}g \\ \frac{\partial q}{\partial t} &= -(q \cdot \nabla)q - \frac{1}{\rho}\nabla P + g \end{aligned} \quad (2.17)$$

dengan $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$, $q = (u, v, w)$, karena gaya gravitasi hanya bekerja pada arah y maka $g = -\nabla g_y$. Operator gradien ∇ menyatakan diferensiasi terhadap berbagai komponen arah, sedangkan q menyatakan vektor kecepatan dalam tiga dimensi dan g merupakan percepatan akibat gravitasi.

2.3 Potensial Kecepatan

Media berpori memiliki porositas C_r . Lapisan fluida memiliki kedalaman $y = -h(x)$ dan kedalaman saluran dari permukaan hingga batas kaku sebesar $y = -d(x)$. Sehingga ketebalan media berpori yaitu $y = -d(x) + h(x)$ dengan $-d(x) > -h(x)$. Gangguan berupa gelombang dengan frekuensi ω menjalar dari kiri ke kanan (searah x positif) dari saluran. Posisi awal gangguan ditetapkan di $x = 0$ dan $0 \leq x$ sebagai domain pengamatan. Elevasi permukaan fluida setelah mendapat gangguan sepanjang $0 \leq x$ pada saat t dinotasikan sebagai $y = \eta(x, t)$. Dimana η merupakan elevasi permukaan yang belum diketahui.

Fungsi potensial ϕ dan $\bar{\phi}$ yang memenuhi

$$q = \nabla\phi \quad (2.18)$$

$$\bar{q} = C_r \nabla\bar{\phi} \quad (2.19)$$

dimana q vektor kecepatan partikel di lapisan fluida dan \bar{q} untuk lapisan berpori, sebagai medan vektor konservatif, yaitu adanya fungsi skalar ϕ dan $\bar{\phi}$ yang memenuhi persamaan (2.18) dan (2.19). Persamaan pengatur untuk permasalahan ini berupa dua persamaan Laplace yang diturunkan dari hukum kekekalan massa beserta kondisi batas di *interface*, permukaan dan dasar saluran (Jamhuri, dkk, 2013:19).

2.4 Fluida dalam Media Berpori

Pada subbab ini akan diperkenalkan karakteristik media berpori, yaitu porositas C_r . Porositas menyatakan persentase volume pori di dalam volume total V . Misalkan \bar{V} menyatakan volume yang ditempati oleh partikel padat di dalam V , maka

$$C_r = \frac{V - \bar{V}}{V} = 1 - \frac{\bar{V}}{V}$$

Jika pori-pori yang ada tersaturasi oleh fluida, maka $V_r = V - \bar{V}$ dan $C_r = \frac{V_r}{V}$. C_r bernilai antara nol dan satu. Secara fisis, porositas nol menyatakan lapisan tersebut berupa padatan dan porositas satu menyatakan lapisan berupa lapisan fluida (Jamhuri, dkk, 2013:17).

Kecepatan partikel untuk aliran irrotasional dalam media berpori dinyatakan sebagai:

$$\bar{q} = C_r \nabla\bar{\phi} \quad (2.20)$$

Dimana vektor kecepatan \bar{q} sebagai medan vektor konservatif, yaitu adanya fungsi skalar ϕ yang memenuhi persamaan (2.20). Persamaan (2.20) ini akan digunakan untuk menurunkan persamaan Bernoulli pada media berpori.

2.5 Persamaan Laplace

2.5.1 Persamaan Laplace pada Media Fluida

Aliran potensial adalah aliran nonrotasi yang komponen-komponen kecepataannya boleh diturunkan dari fungsi-fungsi potensial kecepatan. Kondisi ini berlaku untuk fluida tak dapat mampat dan karena aliran fluida tersebut nonrotasi, persamaan Bernoulli berlaku untuk medan alirannya secara keseluruhan. Aliran potensial juga terdapat dalam kondisi tiga dimensi dan aliran yang dapat mampat, tetapi hal ini tidak dibahas secara rinci. Variasi-variasi kecepatan dan tekanan untuk sebuah medan aliran dapat diketahui dari pola garis arus dan dari penerapan persamaan Bernoulli (Olson dan Wright, 1993:229).

Jika kecepatan u , v dan w tidak tergantung dari z , garis-garis arus akan terletak dalam bidang-bidang yang sejajar dengan bidang x - y dan aliran bersifat dua dimensi. Untuk aliran nonrotasi, terdapat sebuah fungsi ϕ , yang disebut potensial kecepatan. Fungsi ini sedemikian rupa sehingga komponen-komponen kecepatan u dan v dapat diperoleh dari:

$$u = -\frac{\partial\phi}{\partial x} \quad (2.21)$$

$$v = -\frac{\partial\phi}{\partial y} \quad (2.22)$$

Penggunaan diferensial parsial negatif terhadap ϕ menunjukkan bahwa aliran bergerak ke arah berkurangnya potensial. Jika fungsi potensial ini digabungkan dengan definisi untuk ζ (curl \mathbf{V}) maka didapatkan:

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \left(-\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \right) = 0 \quad (2.23)$$

Dengan demikian, kondisi nonrotasi menjamin pendefinisian potensial kecepatan. Bila dilakukan substitusi gradien potensial kecepatan yaitu persamaan (2.21) dan (2.22) untuk faktor kecepatan terhadap persamaan kontinuitas, maka akan diperoleh:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (2.24)$$

atau dalam notasi vektor

$$\nabla \cdot \nabla \phi = \nabla^2 \phi = 0$$

Persamaan (2.24) ini juga disebut sebagai persamaan potensial kecepatan yang mungkin untuk menggambarkan aliran fluida nonrotasi tertentu, dan setiap fungsi $\phi(x, y)$ yang memenuhi persamaan Laplace disebut *harmonik*. Komponen-komponen kecepatan pada aliran demikian dapat diperoleh dari persamaan u dan v . Solusi untuk persamaan Laplace (2.24) tidak terbatas, karena itu untuk mendapatkan solusi yang dikehendaki kita perlu menerapkan kondisi-kondisi batas yang sesuai (Olson dan Wright, 1993:232).

2.5.2 Persamaan Laplace pada Media Berpori

Hukum kekekalan massa juga berlaku untuk media ini. Substitusikan persamaan (2.20) pada persamaan kontinuitas (2.6), sehingga memberikan persamaan Laplace untuk media berpori yaitu:

$$\frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial y^2} = 0 \text{ untuk } -d(x) < y < -h(x) \quad (2.25)$$

yang diikuti oleh kesetimbangan flux dan tekanan di *interface*.

Kesetimbangan fluks di *interface* menyatakan kecepatan aliran fluida yang menembus *interface* dari lapisan fluida ke media berpori memberikan pengaruh sebaliknya (dari media berpori ke lapisan fluida) yang sama besar (Jamhuri, dkk, 2013:19).

2.6 Persamaan Bernoulli

Persamaan Bernoulli diturunkan dari neraca kesetimbangan momentum dan persamaan Bernoulli ini digunakan untuk memodelkan kondisi batas dinamik pada media fluida dan media berpori.

2.6.1 Persamaan Bernoulli pada Media Fluida

Menurut Munson, dkk (2004:128) persamaan Bernoulli diperoleh dengan pengintegralan persamaan gerak sepanjang arah koordinat “alamiah” dari garis arus. Penurunan persamaan Bernoulli dimulai dari persamaan Euler dalam bentuk vektor, integrasi persamaan Euler untuk aliran tetap tak termampatkan dan bebas rotasi menghasilkan suatu persamaan yang dikenal dengan “Persamaan Bernoulli”. Persamaan ini menghubungkan perubahan tinggi kecepatan, tinggi tekanan dan tinggi letak dari aliran cairan tak berkekentalan.

Menurut (Olson dan Wright, 1993:155) misalkan X , Y , Z adalah gaya-gaya yang bekerja pada volume atau massa elemen fluida per satuan massa dalam arah x , y , dan z , sehingga resultannya adalah $F = Xi + Yj + Zk$, dan vektor kecepataannya dimisalkan oleh $V = ui + vj + wk$. Gaya-gaya permukaan pada

sebuah elemen dengan sisi-sisi dx , dy , dan dz serta massa ρ, dx, dy, dz hanya ditimbulkan oleh tekanan, sehingga resultan gaya itu dalam arah x adalah:

$$X (\rho dx dy dz) - \frac{\partial P}{\partial x} dx(dy dz)$$

$$X (dx dy dz) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} dx(dy dz)$$

Ini sama dengan hasil kali antara massa dan percepatan dalam arah x , bila percepatan adalah:

$$a_x = \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}$$

Karena jumlah komponen-komponen gaya dari luar per-satuan volume sama dengan komponen percepatan:

$$X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2.26)$$

Demikian pula untuk arah-arah y dan z :

$$Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t} \quad (2.27)$$

dan

$$Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} \quad (2.28)$$

Komponen-komponen lain yang berhubungan dengan perkalian dari tiga kecepatan juga dapat dinyatakan sebagai perkalian dari vektor gradien (∇), sehingga untuk persamaan (2.26), (2.27) dan (2.28) bentuk vektornya dapat dituliskan sebagai berikut:

$$g - \frac{1}{\rho} \nabla p = (q \cdot \nabla)q + \frac{\partial q}{\partial t} \quad (2.29)$$

atau

$$\frac{\partial q}{\partial t} + q \cdot \nabla q = -\frac{1}{\rho} \nabla p - g \quad (2.30)$$

Berdasarkan definisi turunan total, maka ruas kiri persamaan (2.30) dapat dinotasikan sebagai:

$$\frac{Dq}{Dt} = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} + g \right) + F \quad (2.31)$$

dimana

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$q = \nabla \phi(x, y, z) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = (u, v, w)$$

$$g = -g \nabla y$$

Persamaan (2.31) di atas menyatakan bahwa elemen volume yang kecil bergerak dengan fluida dan dipercepat oleh gaya-gaya yang bekerja padanya. Persamaan ini merupakan persamaan gerak yang diperoleh berdasarkan hukum kesetimbangan momentum secara umum. Suku terakhir F pada persamaan tersebut ditambahkan untuk mengakomodir momentum akibat gaya yang terjadi pada sistem sesuai dengan neraca kesetimbangan momentum. Dalam hal ini digunakan $F = 0$ untuk fluida yang mengalir tanpa hambatan (Jamhuri, dkk, 2013:13).

Operator gradien ∇ menyatakan diferensiasi terhadap berbagai komponen arah, sedangkan $q = \nabla \phi$ menyatakan vektor kecepatan q sebagai medan vektor konservatif, yaitu adanya fungsi skalar ϕ .

Munson, dkk (2004:374) menyatakan perkalian vektor $u \times (v \times w) = (u \cdot w)v - (u \cdot v)w$, maka hasil kali vektor untuk $q \times (\nabla \times q)$ adalah:

$$q \times (\nabla \times q) = -(q \cdot \nabla)q + (q \cdot q)\nabla \quad (2.32)$$

atau

$$q \times (\nabla \times q) = -(q \cdot \nabla)q + \nabla \left(\frac{1}{2} |q|^2 \right)$$

(pembuktian persamaan (2.32) terdapat dalam lampiran 1).

Untuk aliran yang seragam dan fluida tak berotasi $(\nabla \times q) = 0$ maka persamaan (2.32) diperoleh:

$$q \times (0) = -(q \cdot \nabla)q + (q \cdot q)\nabla$$

$$(q \cdot q)\nabla = (q \cdot \nabla)q$$

$$\left(\frac{1}{2} |q|^2 \right) \nabla = (q \cdot \nabla)q$$

Dengan $(q \cdot \nabla)q = \left(\frac{1}{2} |q|^2 \right) \nabla$, maka persamaan (2.29) menjadi:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \nabla \left(\frac{1}{2} |q|^2 \right) = -g\nabla y - \frac{1}{\rho} \nabla p$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \phi) + \nabla \left(\frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 \right) = -g\nabla y - \frac{1}{\rho} \nabla p$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \phi) + \nabla \left(\frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 \right) + g\nabla y + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0$$

$$\nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + gy + \frac{1}{\rho} p \right) = 0 \quad (2.33)$$

Dengan mengintegalkan persamaan (2.33) terhadap variabel x , y , dan z diperoleh:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + \frac{p}{\rho} + gy = f(t) \quad (2.34)$$

Persamaan (2.34) tersebut dikenal sebagai persamaan Bernoulli dan $f(t)$ merupakan fungsi sebarang dari t akibat integrasi yang dilakukan terhadap x , y dan z . dengan menggabungkan $f(t)$ dengan $\phi - \int f(t)dt$, maka diperoleh bentuk lain dari persamaan (2.34) tersebut, yaitu:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + \frac{p}{\rho} + gy = 0 \quad (2.35)$$

Secara fisis, persamaan (2.35) menyatakan aliran fluida berubah terhadap waktu yang dinyatakan oleh suku pertama. Suku kedua menyatakan aliran fluida dipengaruhi oleh perbedaan kecepatan. Suku ketiga menyatakan aliran fluida dipengaruhi oleh perbedaan tekanan dan suku keempat menyatakan aliran dipengaruhi oleh perbedaan ketinggian (Jamhuri, dkk, 2013:14). Diasumsikan bahwa fluida tak kental dan tekanan pada permukaan sama dengan tekanan pada udara adalah konstan maka $p = 0$, sehingga persamaan Bernoulli menjadi:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + gy = 0 \quad (2.36)$$

2.6.2 Persamaan Bernoulli pada Media Berpori

Hukum kekekalan massa pada media berpori diberikan oleh persamaan Laplace berbentuk:

$$\frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial y^2} = 0 \quad (2.37)$$

gunakan persamaan (2.37) pada persamaan (2.31) dengan F merupakan gaya hambat pada media berpori. Gaya hambat ini sebanding dengan kecepatan fluida yang dinyatakan dalam bentuk $-f\omega\nabla\bar{\phi}$ dengan ω merupakan frekuensi gelombang dan f koefisien gesek pada media berpori. Hal ini diformulasikan sebagai:

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + \bar{q} \cdot \nabla \bar{q} = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} + gy \right) - f\omega\nabla\bar{\phi}$$

Dalam hal ini digunakan argumen yang serupa untuk persamaan (2.32) dan pindahkan semua suku pada satu ruas sehingga diperoleh:

$$\nabla \left(C_r \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} + \frac{1}{2} |C_r \nabla \bar{\phi}|^2 + \frac{p}{\rho} + gy + f\omega \nabla \bar{\phi} \right) = 0$$

Gunakan persamaan (2.31) dan keluarkan notasi ∇ dari setiap suku.

Kemudian integralkan persamaan yang diperoleh terhadap x , y dan z diperoleh:

$$C_r \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} + \frac{1}{2} |C_r \nabla \bar{\phi}|^2 + \frac{p}{\rho} + gy + f\omega \nabla \bar{\phi} = f(t)$$

Dimana $f(t)$ merupakan konstanta pengintegralan x dan y terhadap t . dengan menggabungkan $f(t)$ dengan $\bar{\phi}$ berbentuk $\bar{\phi} - \int f(t)dt$, maka diperoleh:

$$C_r \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} + \frac{1}{2} C_r^2 |\nabla \bar{\phi}|^2 + \frac{p}{\rho} + gy + f\omega \bar{\phi} = 0 \quad (2.38)$$

Bentuk persamaan (2.38) merupakan modifikasi persamaan Bernoulli untuk aliran fluida dalam media berpori (Jamhuri, dkk, 2013:17).

2.7 Kondisi-kondisi Batas

2.7.1 Kondisi Batas Kinematik Permukaan Bebas $y = \eta(x, t)$

Kondisi batas kinematik pada permukaan bebas $y - \eta(x, t) = 0$ diperoleh dengan cara menuliskan kondisi tersebut secara implisit yaitu $F(x, y, t) = y - \eta(x, t)$. Misalkan F merupakan permukaan bebas pada fluida dan bergerak bersama fluida. Secara matematis permukaan F dinyatakan sebagai suatu partikel yang berada pada koordinat (x, y) . Partikel tersebut tetap pada permukaan fluida, maka dapat dinyatakan dalam operator turunan total:

$$\frac{DF}{Dt} = 0$$

Nyatakan fungsi posisi untuk permukaan $y = \eta(x, t)$ sebagai $F(x, y, t) = y - \eta(x, t) = 0$, dan turunan totalnya adalah:

$$\frac{D}{Dt}F(x, y, t) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}[y - \eta(x, t)] + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x}[y - \eta(x, t)] + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y}[y - \eta(x, t)] = 0$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}\eta(x, t) - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x}\eta(x, t) + \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$$

atau

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (2.39)$$

Persamaan (2.39) tersebut merupakan kondisi batas kinematik pada permukaan bebas $y = \eta(x, t)$. Diasumsikan bahwa pengaruh aliran udara di atas air dapat diabaikan, sehingga kondisi batas kinematik tidak dipengaruhi oleh pemilihan $F(x, y, t)$ (Jamhuri, dkk, 2013:15).

2.7.2 Kondisi Batas Dinamik Permukaan Bebas $y = \eta(x, t)$

Kondisi batas dinamik pada permukaan fluida dinyatakan dalam fungsi potensial yang diperoleh dengan mengambil persamaan Bernoulli (2.35) berikut:

$$\phi_t + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + \frac{p}{\rho} + gy = 0$$

kondisi batas dinamik permukaan fluida $y = \eta(x, t)$ tekanan udara dianggap sangat kecil dan dapat diabaikan sehingga $p = 0$. Maka persamaan Bernoulli menjadi:

$$\phi_t + \frac{1}{2} (\phi_x^2 + \phi_y^2) + gy = 0 \quad (2.40)$$

Selanjutnya digunakan persamaan Bernoulli sepanjang $y = \eta(x, t)$, sehingga diperoleh:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + g\eta = 0 \quad (2.41)$$

Persamaan (2.41) ini disebut kondisi batas dinamik permukaan fluida sepanjang permukaan bebas $\eta(x, t)$.

2.7.3 Kondisi Batas Fluida di *Interface*

Misalkan v_1 menyatakan kecepatan partikel fluida dari lapisan fluida yang menembus *interface* menuju media berpori. Tuliskan fungsi posisi partikel ini di *interface* $y = -d$, yaitu $F = y + d$. Dengan melakukan turunan total pada F diperoleh:

$$\frac{D}{Dt} F(y) = v_1 \Rightarrow \bar{w} = v_2$$

dimana \bar{w} merupakan kecepatan vertikal partikel di *interface* yang menuju media berpori. Untuk menjamin hukum kekekalan massa, haruslah $v_1 = v_2$, sehingga

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = C_r \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y} \quad (2.42)$$

Persamaan (2.42) tersebut menyatakan kondisi kinematik fluida di *interface*.

Kesetimbangan tekanan di *interface* ditinjau menggunakan persamaan Bernoulli. Aliran di dalam lapisan fluida berlaku persamaan (2.35) dan untuk media berpori berlaku persamaan (2.38). Tekanan pada *interface* haruslah kontinu, sehingga suku $\frac{p}{\rho} + gy$ pada persamaan (2.35) dan (2.38) haruslah sama, sehingga diperoleh:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 = C_r \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} + \frac{1}{2} C_r^2 |\nabla \bar{\phi}|^2 + f\omega \bar{\phi} \quad (2.43)$$

Persamaan di atas merupakan kondisi dinamik aliran di *interface* (Jamhuri, dkk, 2013:20).

2.7.4 Kondisi Batas pada Dasar Saluran $y = -d(x)$

Nyatakan fungsi posisi untuk $y = -d(x)$ diperoleh dengan cara menuliskan kondisi tersebut secara implisit berikut:

$$F = y + d = 0$$

sehingga turunan total dari F tersebut yaitu:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \text{ di } y = -d(x) \quad (2.44)$$

dan

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y} = 0 \text{ di } y = -h(x) \quad (2.45)$$

yang secara fisis menyatakan tidak ada aliran yang masuk menuju dasar saluran (Jamhuri, dkk, 2013:21).

2.8 Kajian Agama tentang Gelombang

Gelombang adalah suatu gangguan dari keadaan setimbang yang bergerak dari satu tempat ke tempat lain (Streeter & Wylie, 1985:1). Sistem gelombang mempunyai fungsi gelombang yang menggambarkan perpindahan satu partikel dalam medium. Fungsi tersebut tergantung pada posisi dan waktu (dimensi ruang dan waktu).

Disebutkan dalam al-Quran tentang adanya gelombang yaitu pada surat al-Baqarah/2:164

إِنَّ فِي خَلْقِ السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ وَاخْتِلَافِ اللَّيْلِ وَالنَّهَارِ وَالْفُلْكِ الَّتِي تَجْرِي فِي الْبَحْرِ بِمَا يَنْفَعُ النَّاسَ وَمَا أَنْزَلَ اللَّهُ مِنَ السَّمَاءِ مِنْ مَاءٍ فَأَحْيَا بِهِ الْأَرْضَ بَعْدَ مَوْتِهَا وَبَثَّ فِيهَا مِنْ

كُلِّ دَابَّةٍ وَتَصْرِيفِ الرِّيَّاحِ وَالسَّحَابِ الْمُسَخَّرِ بَيْنَ السَّمَاءِ وَالْأَرْضِ لآيَاتٍ لِّقَوْمٍ

يَعْقِلُونَ ﴿١٦٤﴾

“*Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi, silih bergantinya malam dan siang, bahtera yang berlayar di laut membawa apa yang berguna bagi manusia, dan apa yang Allah turunkan dari langit berupa air, lalu dengan air itu Dia hidupan bumi sesudah mati (kering)-nya dan Dia sebarkan di bumi itu segala jenis hewan, dan pengisaran angin dan awan yang dikendalikan antara langit dan bumi; sungguh (terdapat) tanda-tanda (keesaan dan kebesaran Allah) bagi kaum yang memikirkan*” (QS. al-Baqarah/2:164).

Dan surat ar-Ruum/30:46 juga disebutkan:

وَمِنْ آيَاتِهِ أَنْ يُرْسِلَ الرِّيَّاحَ مُبَشِّرَاتٍ وَلِيُذِيقَكُمْ مِنْ رَحْمَتِهِ وَلِتَجْرِيَ الْفُلُكُ بِأَمْرِهِ وَلِتَبْتَغُوا مِنْ

فَضْلِهِ وَلِعَلَّكُمْ تَشْكُرُونَ ﴿٤٦﴾

“*Dan di antara tanda-tanda kekuasaan-Nya adalah bahwa Dia mengirimkan angin sebagai pembawa berita gembira dan untuk merasakan kepadamu sebagian dari rahmat-Nya dan supaya kapal dapat berlayar dengan perintah-Nya dan (juga) supaya kamu dapat mencari karunia-Nya; mudah-mudahan kamu bersyukur*” (QS. ar-Ruum/30:46).

Kata “angin” dalam hal ini secara umum yaitu angin yang bertiup dari suatu waktu ke yang lainnya. Angin juga bertiup membawa awan dan membawa kabar gembira akan turunnya hujan. Kedekatan makna “angin” dalam ayat di atas dapat diartikan juga sebagai gelombang. Dalam tafsir al-Maraghi ayat di atas menjelaskan bukti-bukti yang menunjukkan ke-Esaan Allah dan yang menjadi bukti nyata di darat dan di lautan. Dengan angin juga dapat membawa manfaat dan dapat membawa bencana untuk timbulnya kerusakan di daratan dan lautan, namun kerusakan tersebut juga dapat disebabkan kemusyrikan dan kedurhakaan manusia (al-Maraghi, 1992:107).

Allah senantiasa mengingatkan kepada umat manusia tentang bukti-bukti ke-EsaanNya, yaitu melalui pengiriman angin dan melalui turunnya hujan. Diingatkan-Nya bahwa dengan turunnya hujan dan berhembusnya angin itu, bumi

yang tadinya tandus akan menjadi subur, dan kapal-kapal pun dapat berlayar dengan membawa muatan yang menjadi kebutuhan pokok manusia serta menjadi keperluan hidup mereka.

Kata “بأمره” (atas perintah/izin-Nya) dalam ayat tersebut ditekankan bahwa hendaknyalah adanya hal-hal tersebut dapat mempersiapkan diri manusia untuk bersyukur kepada-Nya sebagai ungkapan rasa terima kasih atas kenikmatan-kenikmatan yang telah dikaruniakan Allah kepada manusia yang sangat berlimpah itu, dan bahwa Allah menetapkan hukum-hukum alam yang memungkinkan manusia memanfaatkan daratan dan lautan dengan segala isinya (Quraisy, 2002:84).

Allah Swt. juga berfirman dalam al-Qur'an surat Lukman/31:32 tentang adanya gelombang yaitu:

وَإِذَا غَشِيَهُمْ مَوْجٌ كَالظُّلَلِ دَعَوُا اللَّهَ مُخْلِصِينَ لَهُ الدِّينَ فَلَمَّا نَجَّاهُمْ إِلَى الْبَرِّ فَمِنْهُمْ مُّقْتَصِدٌ
وَمَا يَجْحَدُ بِآيَاتِنَا إِلَّا كُلُّ خَتَّارٍ كَفُورٍ ﴿٣٢﴾

“dan apabila mereka dilamun ombak yang besar seperti gunung, mereka menyeru Allah dengan memurnikan ketaatan kepada-Nya Maka tatkala Allah menyelamatkan mereka sampai di daratan, lalu sebagian mereka tetap menempuh jalan yang lurus. dan tidak ada yang mengingkari ayat-ayat Kami selain orang-orang yang tidak setia lagi ingkar” (QS. Lukman/31:32).

Dalam tafsir al-Qurthubi kata "الموج" yang berarti gelombang dalam hal ini diserupakan dengan "الظلل" yang berarti gunung-gunung, karena gelombang datang sedikit demi sedikit yang yang tinggi bagaikan gunung dan saling menghantam satu sama lain. Dalam ayat ini dijelaskan bahwa apabila orang-orang musyrik, yaitu mereka yang menyembah selain Allah berupa berhala-berhala, mereka diliputi oleh ombak yang tinggi bagaikan gunung dan bahaya maut

mengancam diri mereka dari segala penjuru, yaitu sewaktu mereka sedang menaiki perahu (kapal) (al-Qurthubi, 2009:159).



BAB III

PEMBAHASAN

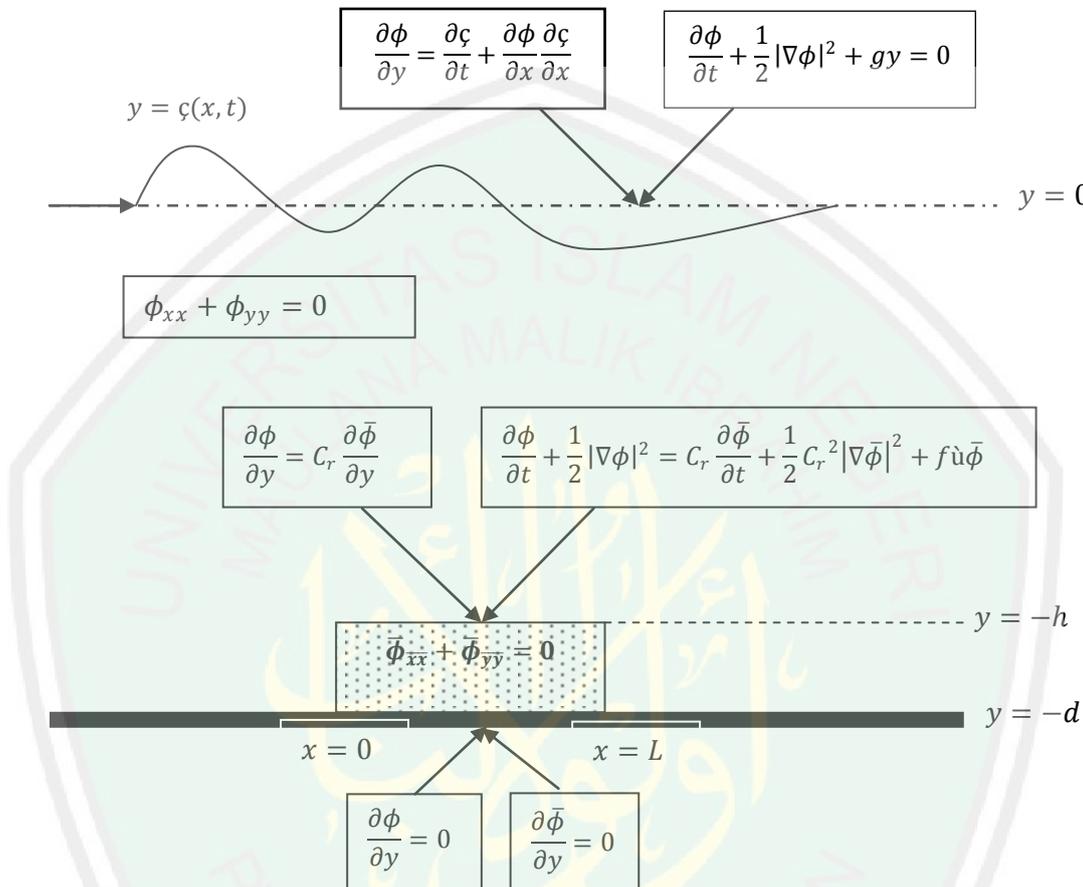
3.1 Persamaan Pengatur

Persamaan pengatur untuk aliran gelombang permukaan yang melalui balok berpori ini telah diturunkan pada bab sebelumnya yaitu pada bab II. Persamaan-persamaan pengatur tersebut di antaranya yaitu persamaan kontinuitas, persamaan momentum, potensial kecepatan, fluida dalam media berpori, persamaan Laplace pada media fluida dan media berpori, persamaan Bernoulli pada media fluida dan media berpori, beserta kondisi-kondisi batas kinematik dan dinamik pada permukaan fluida, pada *interface*, dan pada dasar saluran.

Sebelumnya telah diperoleh persamaan kontinuitas yang menghasilkan persamaan Laplace, persamaan momentum yang digunakan untuk menurunkan persamaan Bernoulli beserta kondisi batas kinematik dan dinamik pada permukaan fluida, kondisi batas kinematik dan dinamik pada *interface*, serta kondisi batas pada dasar saluran yang diilustrasikan pada Gambar 3.1.

Setelah memperoleh persamaan-persamaan pengatur beserta kondisi-kondisi batasnya selanjutnya dilakukan penskalaan yang bertujuan untuk menondimensikan variabel-variabel yang digunakan, dilakukan ekspansi dengan deret, kemudian dilakukan peninjauan tiap-tiap orde dari deret yang ada dan selanjutnya solusi dari deret tersebut dibawa ke dalam model matematika dan yang terakhir membuat simulasi dari model gelombang yang diperoleh dengan memodifikasi parameter yang ada untuk melihat pengaruh dari masing-masing

parameter terhadap fenomena yang ada, kemudian melakukan interpretasi dari hasil simulasi tersebut.



Gambar 3.1 Sketsa Aliran Gelombang Beserta Kondisi-kondisi Batasnya

Langkah selanjutnya yang dilakukan yaitu penskalaan yang akan dijelaskan pada subbab 3.2 berikut.

3.2 Penskalaan Variabel

Skala dalam hal ini didefinisikan sebagai perbandingan antara keadaan nyata dengan model atau gambarnya dan penskalaan didefinisikan sebagai mengubah ukuran baik memperbesar atau memperkecil. Pada penelitian ini penskalaan variabel bertujuan untuk menondimensikan variabel-variabel yang

digunakan. Sebelum memperoleh model gelombang, akan dilakukan penskalaan terlebih dahulu terhadap persamaan Laplace beserta kondisi batas pada permukaan fluida dan kondisi batas pada *interface*.

Lapisan fluida yang memiliki kedalaman $y = -h(x)$ dan kedalaman saluran dari permukaan hingga dasar sebesar $y = -d(x)$. Aliran fluida diasumsikan irrotasional dan untuk lapisan fluida digunakan fungsi potensial ϕ dan $\bar{\phi}$, untuk fluida dalam media berpori digunakan persamaan $\bar{\phi} = -k\left(\frac{y+p}{g\rho}\right)$; dimana p , ρ dan g menunjukkan tekanan, kepadatan, dan percepatan gravitasi. Ketebalan media berpori pada dasar saluran sebesar $y = -d(x) + h(x)$ dengan $-d(x) > -h(x)$.

Sebagaimana dalam Wiryanto (2011:137), variabel berskala yang digunakan diantaranya:

$$\bar{x} = \frac{x}{\lambda}, \quad \bar{y} = \frac{y}{h}, \quad \bar{t} = \frac{\sqrt{gh}}{\lambda} t, \quad \bar{\eta} = \frac{\eta}{a}, \quad \bar{\phi} = \frac{h}{\lambda a \sqrt{gh}} \phi,$$

$$\bar{\Phi} = \frac{h}{\lambda a \sqrt{gh}} \Phi$$

Dimana, λ dan a adalah kuantitas fisik mewakili ketinggian gelombang dan amplitudo, dengan menggunakan dua parameter kecil $\mu = \frac{h}{\lambda}$ dan $\epsilon = \frac{a}{h}$, selanjutnya dari variabel berskala tersebut akan disubstitusikan ke dalam persamaan Laplace, beserta kondisi batas kinematik dan dinamik permukaan fluida.

Pertama, dilakukan penskalaan pada persamaan Laplace:

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0 \quad (3.1)$$

Skala-skala yang digunakan diantaranya:

$$\bar{x} = \frac{x}{\lambda}, x = \lambda\bar{x}, \bar{y} = \frac{y}{h}, y = h\bar{y}, \bar{\phi} = \frac{h}{\lambda a\sqrt{gh}}\phi, \phi = \frac{\lambda a\sqrt{gh}}{h}\bar{\phi}$$

Disubstitusikan ke dalam $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$ dan $\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}$ diperoleh:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \bar{x}} \right) \text{ dan } \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \bar{y}} \right)$$

Sehingga

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\frac{\lambda a\sqrt{gh}}{h} \bar{\phi} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{\lambda} \right) = \left(\frac{\lambda a\sqrt{gh}}{h} \bar{\phi}_{\bar{x}} \right) \left(\frac{1}{\lambda} \right) = \frac{a\sqrt{gh}}{h} \bar{\phi}_{\bar{x}} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\frac{a\sqrt{gh}}{h} \bar{\phi}_{\bar{x}} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{\lambda} \right) = \left(\frac{a\sqrt{gh}}{h} \bar{\phi}_{\bar{x}\bar{x}} \right) \left(\frac{1}{\lambda} \right) \\ &= \frac{a\sqrt{gh}}{\lambda h} \bar{\phi}_{\bar{x}\bar{x}} \end{aligned} \quad (3.3)$$

dan

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\frac{\lambda a\sqrt{gh}}{h} \bar{\phi} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{h} \right) = \left(\frac{\lambda a\sqrt{gh}}{h} \bar{\phi}_{\bar{y}} \right) \left(\frac{1}{h} \right) = \frac{\lambda a\sqrt{gh}}{h^2} \bar{\phi}_{\bar{y}} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\frac{\lambda a\sqrt{gh}}{h^2} \bar{\phi}_{\bar{y}} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{h} \right) = \left(\frac{\lambda a\sqrt{gh}}{h^2} \bar{\phi}_{\bar{y}\bar{y}} \right) \left(\frac{1}{h} \right) \\ &= \frac{\lambda a\sqrt{gh}}{h^3} \bar{\phi}_{\bar{y}\bar{y}} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Persamaan (3.3) dan (3.5) disubstitusikan ke dalam persamaan (3.1)

sehingga diperoleh:

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{a\sqrt{gh}}{\lambda h} \bar{\phi}_{xx} + \frac{\lambda a\sqrt{gh}}{h^3} \bar{\phi}_{yy} &= 0 \\ \frac{1}{\lambda h} \bar{\phi}_{xx} + \frac{\lambda}{h^3} \bar{\phi}_{yy} &= 0 \\ \frac{h^2}{\lambda^2} \bar{\phi}_{xx} + \frac{\lambda h^3}{\lambda h^3} \bar{\phi}_{yy} &= 0 \\ \frac{h^2}{\lambda^2} \bar{\phi}_{xx} + \bar{\phi}_{yy} &= 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Karena $\frac{h}{\lambda} = \mu$ maka $\frac{h^2}{\lambda^2} = \mu^2$ sehingga persamaan (3.6) dapat dituliskan menjadi:

$$\mu^2 \bar{\phi}_{xx} + \bar{\phi}_{yy} = 0 \quad (3.7)$$

Kedua, penskalaan pada persamaan Laplace yang kedua:

$$\Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0 \quad (3.8)$$

Skala-skala yang digunakan adalah:

$$\bar{x} = \frac{x}{\lambda}, \quad x = \lambda \bar{x}, \quad \bar{y} = \frac{y}{h}, \quad y = h \bar{y}, \quad y = h \bar{y}, \quad \Phi = \frac{\lambda a\sqrt{gh}}{h} \bar{\Phi}$$

Disubstitusikan ke dalam $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$ dan $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}$ diperoleh:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{x}} \right) \quad \text{dan} \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{y}} \right)$$

Sehingga

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\frac{\lambda a\sqrt{gh}}{h} \bar{\Phi} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{\lambda} \right) = \left(\frac{\lambda a\sqrt{gh}}{h} \bar{\Phi}_{\bar{x}} \right) \left(\frac{1}{\lambda} \right) = \frac{a\sqrt{gh}}{h} \bar{\Phi}_{\bar{x}}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{x}} \right) \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\frac{a\sqrt{gh}}{h} \bar{\Phi}_{\bar{x}} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{\lambda} \right) = \left(\frac{a\sqrt{gh}}{h} \bar{\Phi}_{\bar{x}\bar{x}} \right) \left(\frac{1}{\lambda} \right)$$

$$= \frac{a\sqrt{gh}}{\lambda h} \bar{\Phi}_{\bar{x}\bar{x}}$$

(3.9)

dan

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi}{\partial y} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\frac{\lambda a \sqrt{gh}}{h} \bar{\Phi} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{h} \right) = \left(\frac{\lambda a \sqrt{gh}}{h} \bar{\Phi}_{\bar{y}} \right) \left(\frac{1}{h} \right) \\ &= \frac{\lambda a \sqrt{gh}}{h^2} \bar{\Phi}_{\bar{y}} \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\frac{\lambda a \sqrt{gh}}{h^2} \bar{\Phi}_{\bar{y}} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\frac{y}{h} \right) = \left(\frac{\lambda a \sqrt{gh}}{h^2} \bar{\Phi}_{\bar{y}\bar{y}} \right) \left(\frac{1}{h} \right) \\ &= \frac{\lambda a \sqrt{gh}}{h^3} \bar{\Phi}_{\bar{y}\bar{y}}\end{aligned}\quad (3.10)$$

Persamaan (3.9) dan (3.10) disubstitusikan ke dalam persamaan (3.8) sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}\Phi_{xx} + \Phi_{yy} &= 0 \\ \frac{a \sqrt{gh}}{\lambda h} \bar{\Phi}_{xx} + \frac{\lambda a \sqrt{gh}}{h^3} \bar{\Phi}_{yy} &= 0 \\ \frac{1}{\lambda h} \bar{\Phi}_{xx} + \frac{\lambda}{h^3} \bar{\Phi}_{yy} &= 0 \\ \frac{h^2}{\lambda^2} \bar{\Phi}_{xx} + \frac{\lambda h^3}{\lambda h^3} \bar{\Phi}_{yy} &= 0 \\ \frac{h^2}{\lambda^2} \bar{\Phi}_{xx} + \bar{\Phi}_{yy} &= 0\end{aligned}\quad (3.11)$$

Karena $\frac{h}{\lambda} = \mu$ maka $\frac{h^2}{\lambda^2} = \mu^2$ sehingga persamaan (3.11) dapat dituliskan menjadi:

$$\mu^2 \bar{\Phi}_{xx} + \bar{\Phi}_{yy} = 0 \quad (3.12)$$

Ketiga, penskalaan pada kondisi batas kinematik permukaan fluida.

$$\phi_y = \eta_t + \phi_x \eta_x = 0 \quad (3.13)$$

Dimana, ϕ_x dan ϕ_y sudah didapatkan yaitu $\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{a\sqrt{gh}}{h} \bar{\phi}_x$, $\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\lambda a\sqrt{gh}}{h^2} \bar{\phi}_y$ sehingga yang akan dicari adalah η_t dan η_x .

Skala-skala yang digunakan adalah $\bar{\eta} = \frac{\eta}{a}$, $\eta = a\bar{\eta}$, $\bar{x} = \frac{x}{\lambda}$, $\bar{t} = \frac{\sqrt{gh}}{\lambda} t$,

$t = \frac{\lambda}{\sqrt{gh}} \bar{t}$ akan disubstitusikan ke dalam $\frac{\partial \eta}{\partial x}$ dan $\frac{\partial \eta}{\partial t}$ diperoleh:

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}} (a\bar{\eta}) \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\frac{x}{\lambda} \right) = (a\bar{\eta}_{\bar{x}}) \left(\frac{1}{\lambda} \right) = \frac{a}{\lambda} \bar{\eta}_{\bar{x}} \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \eta}{\partial \bar{t}} \frac{\partial \bar{t}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \bar{t}} (a\bar{\eta}) \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \left(\frac{\sqrt{gh}}{\lambda} t \right) = (a\bar{\eta}_{\bar{t}}) \left(\frac{\sqrt{gh}}{\lambda} \right) = \frac{a\sqrt{gh}}{\lambda} \bar{\eta}_{\bar{t}} \quad (3.15)$$

Persamaan (3.2), (3.4), (3.14), dan (3.15) disubstitusikan ke persamaan (3.13) sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} \phi_y &= \eta_t + \phi_x \eta_x \\ \frac{\lambda a\sqrt{gh}}{h^2} \bar{\phi}_y &= \frac{a\sqrt{gh}}{\lambda} \bar{\eta}_{\bar{t}} + \left(\frac{a\sqrt{gh}}{h} \bar{\phi}_x \right) \left(\frac{a}{\lambda} \bar{\eta}_{\bar{x}} \right) \\ \frac{\lambda a\sqrt{gh}}{h^2} \bar{\phi}_y &= \frac{a\sqrt{gh}}{\lambda} \bar{\eta}_{\bar{t}} + \left(\frac{a}{\lambda} \right) \left(\frac{a\sqrt{gh}}{h} \bar{\phi}_x \right) \bar{\eta}_{\bar{x}} \\ \bar{\phi}_y &= \frac{\frac{a\sqrt{gh}}{\lambda} \bar{\eta}_{\bar{t}} + \left(\frac{a}{\lambda} \right) \left(\frac{a\sqrt{gh}}{h} \bar{\phi}_x \right) \bar{\eta}_{\bar{x}}}{\frac{\lambda a\sqrt{gh}}{h^2}} \\ \bar{\phi}_y &= \left[\frac{a\sqrt{gh}}{\lambda} \bar{\eta}_{\bar{t}} + \left(\frac{a}{\lambda} \right) \left(\frac{a\sqrt{gh}}{h} \bar{\phi}_x \right) \bar{\eta}_{\bar{x}} \right] \left(\frac{h^2}{\lambda a\sqrt{gh}} \right) \\ \bar{\phi}_y &= \frac{h^2 a\sqrt{gh}}{\lambda^2 a\sqrt{gh}} \bar{\eta}_{\bar{t}} + \frac{h^2}{\lambda a\sqrt{gh}} \left(\frac{a}{\lambda} \right) \left(\frac{a\sqrt{gh}}{h} \bar{\phi}_x \right) \bar{\eta}_{\bar{x}} \\ \bar{\phi}_y &= \frac{h^2}{\lambda^2} \bar{\eta}_{\bar{t}} + \left(\frac{a}{h} \right) \frac{h^2}{\lambda^2} \bar{\phi}_x \bar{\eta}_{\bar{x}} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Karena $\frac{h}{\lambda} = \mu$ maka $\frac{h^2}{\lambda^2} = \mu^2$ dan $\frac{a}{h} = \epsilon$ sehingga persamaan (3.16) dapat dituliskan menjadi:

$$\bar{\phi}_y = \mu^2 \bar{\eta}_{\bar{t}} + \epsilon \mu^2 \bar{\phi}_x \bar{\eta}_{\bar{x}} \quad (3.17)$$

Keempat, Penskalaan pada kondisi batas dinamik permukaan fluida.

$$\phi_t + \frac{1}{2} [(\phi_x)^2 + (\phi_y)^2] + g\eta = 0 \quad (3.18)$$

Dimana, ϕ_x dan ϕ_y sudah diketahui yakni $\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{a\sqrt{gh}}{h} \bar{\phi}_{\bar{x}}$, $\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\lambda a\sqrt{gh}}{h^2} \bar{\phi}_{\bar{y}}$ sehingga akan disubstitusikan ke dalam $(\frac{\partial \phi}{\partial x})^2$ dan $(\frac{\partial \phi}{\partial y})^2$ diperoleh:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{gh}}{h} \bar{\phi}_{\bar{x}}\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{gh}}{h} \bar{\phi}_{\bar{x}}\right) \left(\frac{a\sqrt{gh}}{h} \bar{\phi}_{\bar{x}}\right) = \frac{a^2 g}{h} \bar{\phi}_{\bar{x}}^2 \quad (3.19)$$

dan

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\lambda a\sqrt{gh}}{h^2} \bar{\phi}_{\bar{y}}\right)^2 = \left(\frac{\lambda a\sqrt{gh}}{h^2} \bar{\phi}_{\bar{y}}\right) \left(\frac{\lambda a\sqrt{gh}}{h^2} \bar{\phi}_{\bar{y}}\right) = \frac{\lambda^2 a^2 g}{h^3} \bar{\phi}_{\bar{y}}^2 \quad (3.20)$$

Skala-skala $\bar{\phi} = \frac{h}{\lambda a\sqrt{gh}} \phi$, $\phi = \frac{\lambda a\sqrt{gh}}{h} \bar{\phi}$ dan $\bar{t} = \frac{\sqrt{gh}}{\lambda} t$ disubstitusikan ke dalam $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ diperoleh:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} &= \frac{\partial \phi}{\partial \bar{t}} \frac{\partial \bar{t}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \left(\frac{\lambda a\sqrt{gh}}{h} \bar{\phi} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \left(\frac{\sqrt{gh}}{\lambda} t \right) = \left(\frac{\lambda a\sqrt{gh}}{h} \bar{\phi}_{\bar{t}} \right) \left(\frac{\sqrt{gh}}{\lambda} \right) \\ &= \frac{agh}{h} \bar{\phi}_{\bar{t}} = ag \bar{\phi}_{\bar{t}} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Substitusi persamaan (3.19), (3.20), (3.21) dan $\eta = a\bar{\eta}$ ke persamaan (3.18) sehingga:

$$\phi_t + \frac{1}{2} [(\phi_x)^2 + (\phi_y)^2] + g\eta = 0$$

$$\begin{aligned}
\frac{agh}{h} \bar{\phi}_{\bar{t}} + \frac{1}{2} \left[\frac{a^2 gh}{h^2} \bar{\phi}_{\bar{x}}^2 + \frac{\lambda^2 a^2 g}{h^3} \bar{\phi}_{\bar{y}}^2 \right] + g(a\bar{\zeta}) &= 0 \\
\frac{ah}{h} \bar{\phi}_{\bar{t}} + \frac{1}{2h} \left[\frac{ah}{h} \bar{\phi}_{\bar{x}}^2 + \frac{\ddot{e}^2 a}{h^2} \bar{\phi}_{\bar{y}}^2 \right] + a\bar{\zeta} &= 0 \\
\frac{ah}{\ddot{e}^2 h} \bar{\phi}_{\bar{t}} + \frac{1}{2h} \left[\frac{ah}{\ddot{e}^2 h} \bar{\phi}_{\bar{x}}^2 + \frac{\ddot{e}^2 a}{\ddot{e}^2 h^2} \bar{\phi}_{\bar{y}}^2 \right] + \frac{a}{\ddot{e}^2} \bar{\zeta} &= 0 \\
\frac{a}{\ddot{e}^2} \bar{\phi}_{\bar{t}} + \frac{1}{2h} \left[\frac{a}{\ddot{e}^2} \bar{\phi}_{\bar{x}}^2 + \frac{a}{h^2} \bar{\phi}_{\bar{y}}^2 \right] + \frac{a}{\ddot{e}^2} \bar{\zeta} &= 0 \\
\frac{h^2}{\ddot{e}^2} \bar{\phi}_{\bar{t}} + \frac{1}{2h} \left[\frac{h^2}{\ddot{e}^2} \bar{\phi}_{\bar{x}}^2 + \bar{\phi}_{\bar{y}}^2 \right] + \frac{h^2}{\ddot{e}^2} \bar{\zeta} &= 0
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Karena $\frac{h}{\ddot{e}} = \dot{\imath}$ maka $\frac{h^2}{\ddot{e}^2} = \dot{\imath}^2$ dan $\frac{a}{h} = \epsilon$ sehingga persamaan (3.22) dapat dituliskan menjadi:

$$\dot{\imath}^2 \bar{\phi}_{\bar{t}} + \frac{1}{2} \epsilon \left[\dot{\imath}^2 \bar{\phi}_{\bar{x}}^2 + \bar{\phi}_{\bar{y}}^2 \right] + \dot{\imath}^2 \bar{\zeta} = 0 \tag{3.23}$$

Kelima, penskalaan pada kondisi batas kaku (dasar saluran).

$$\phi_t + \frac{1}{2} \left[(\phi_x)^2 + (\phi_y)^2 \right] - \frac{g}{k} \Phi = 0 \tag{3.24}$$

Dimana $\phi_t = ag\bar{\phi}_{\bar{t}}$, $(\phi_x)^2 = \frac{a^2 g}{h} \bar{\phi}_{\bar{x}}^2$, $(\phi_y)^2 = \frac{\ddot{e}^2 a^2 g}{h^3} \bar{\phi}_{\bar{y}}^2$ dan $\Phi = \frac{\ddot{e} a \sqrt{gh}}{h} \bar{\Phi}$

disubstitusikan ke persamaan (3.24) diperoleh:

$$\begin{aligned}
\phi_t + \frac{1}{2} \left[(\phi_x)^2 + (\phi_y)^2 \right] - \frac{g}{k} \Phi &= 0 \\
ag\bar{\phi}_{\bar{t}} + \frac{1}{2} \left[\frac{a^2 g}{h} \bar{\phi}_{\bar{x}}^2 + \frac{\ddot{e}^2 a^2 g}{h^3} \bar{\phi}_{\bar{y}}^2 \right] - \frac{g}{k} \left(\frac{\ddot{e} a \sqrt{gh}}{h} \bar{\Phi} \right) &= 0 \\
ag\bar{\phi}_{\bar{t}} + \frac{1}{2h} \left[ag \bar{\phi}_{\bar{x}}^2 + \frac{\ddot{e}^2 ag}{h^2} \bar{\phi}_{\bar{y}}^2 \right] - \frac{g\ddot{e} a \sqrt{gh}}{kh} \bar{\Phi} &= 0 \\
\frac{agh}{a\sqrt{gh}} \bar{\phi}_{\bar{t}} + \frac{1}{2h} \left[\frac{agh}{a\sqrt{gh}} \bar{\phi}_{\bar{x}}^2 + \frac{\ddot{e}^2 agh}{h^2 a\sqrt{gh}} \bar{\phi}_{\bar{y}}^2 \right] - \frac{g\ddot{e}}{k} \bar{\Phi} &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{gh}{\sqrt{gh}(\sqrt{gh})} \bar{\phi}_{\bar{t}} + \frac{1}{2} \frac{a}{h} \left[\frac{gh}{\sqrt{gh}(\sqrt{gh})} \bar{\phi}_{\bar{x}}^2 + \frac{\ddot{e}^2 gh}{h^2 (\sqrt{gh}) \sqrt{gh}} \bar{\phi}_{\bar{y}}^2 \right] \\
& - \frac{g\ddot{e}}{k(\sqrt{gh})} \bar{\Phi} = 0 \\
& \bar{\phi}_{\bar{t}} + \frac{1}{2} \frac{a}{h} \left[\bar{\phi}_{\bar{x}}^2 + \frac{\ddot{e}^2}{h^2} \bar{\phi}_{\bar{y}}^2 \right] - \frac{g\ddot{e}}{k(\sqrt{gh})} \bar{\Phi} = 0 \\
& \bar{\phi}_{\bar{t}} + \frac{1}{2} \frac{a}{h} \left[\bar{\phi}_{\bar{x}}^2 + \frac{1}{\frac{h^2}{\ddot{e}^2}} \bar{\phi}_{\bar{y}}^2 \right] - \frac{1}{\frac{k(\sqrt{gh})}{g\ddot{e}}} \bar{\Phi} = 0 \tag{3.25}
\end{aligned}$$

Karena $\frac{h}{\ddot{e}} = \bar{i}$ maka $\frac{h^2}{\ddot{e}^2} = \bar{i}^2$, $\frac{a}{h} = \epsilon$ dan $\frac{k(\sqrt{gh})}{g\ddot{e}} = R$ sehingga persamaan (3.25) dapat

dituliskan menjadi:

$$\bar{\phi}_{\bar{t}} + \frac{1}{2} \frac{\epsilon}{\bar{i}^2} \left[\bar{i}^2 (\phi_x)^2 + (\phi_y)^2 \right] - \frac{1}{R} \bar{\Phi} = 0 \tag{3.26}$$

3.3 Ekspansi Deret

Pada subbab ini metode ekspansi yang digunakan adalah ekspansi asimtotik yang bertujuan untuk mencari solusi dari persamaan dengan orde yang sangat kecil, dengan mencari nilai ϕ dan Φ dari persamaan Laplace beserta kondisi batas pada dasar saluran. Dengan langkah-langkah sebagai berikut:

Tuliskan kembali persamaan Laplace (3.5) dengan kondisi batas kinematik persamaan (3.17) yaitu:

$$\bar{i}^2 \phi_{xx} + \phi_{yy} = 0 \tag{3.27}$$

$$\bar{i}^2 \zeta_t + \epsilon \bar{i}^2 \phi_x \zeta_x - \phi_y = 0 \tag{3.28}$$

Dan persamaan Laplace kedua (3.10)

$$\bar{i}^2 \Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0 \tag{3.29}$$

dengan kondisi batas persamaan

$$\Phi_y = 0 \quad (3.30)$$

Selanjutnya, dilakukan aproksimasi atau hampiran dengan menggunakan deret asimtotik, dengan fungsi potensial sebagai berikut:

$$\phi = \phi_0 + \dot{\iota}^2 \phi_1 + \dot{\iota}^4 \phi_2 + \dots \quad (3.31)$$

dan

$$\Phi = \Phi_0 + \dot{\iota}^2 \Phi_1 + \dot{\iota}^4 \Phi_2 + \dots \quad (3.32)$$

Selanjutnya persamaan (3.31) disubstitusikan ke persamaan (3.27) dan (3.28) diperoleh:

$$\dot{\iota}^2 \left[\phi_{0xx} + \dot{\iota}^2 \phi_{1xx} + \dot{\iota}^4 \phi_{2xx} + \dots \right] + \quad (3.33)$$

$$\left[\phi_{0yy} + \dot{\iota}^2 \phi_{1yy} + \dot{\iota}^4 \phi_{2yy} + \dots \right] = 0$$

$$\dot{\iota}^2 \zeta_t + \dot{\iota}^2 \epsilon \left[\phi_{0x} + \dot{\iota}^2 \phi_{1x} + \dot{\iota}^4 \phi_{2x} + \dots \right] \zeta_x \quad (3.34)$$

$$- \left[\phi_{0y} + \dot{\iota}^2 \phi_{1y} + \dot{\iota}^4 \phi_{2y} + \dots \right] = 0$$

Dan persamaan (3.32) disubstitusikan ke persamaan (3.29) dan (3.30) diperoleh:

$$\dot{\iota}^2 \left[\Phi_{0xx} + \dot{\iota}^2 \Phi_{1xx} + \dot{\iota}^4 \Phi_{2xx} + \dots \right] + \quad (3.35)$$

$$\left[\Phi_{0yy} + \dot{\iota}^2 \Phi_{1yy} + \dot{\iota}^4 \Phi_{2yy} + \dots \right] = 0$$

$$\Phi_{0y} + \dot{\iota}^2 \Phi_{1y} + \dot{\iota}^4 \Phi_{2y} + \dots = 0 \quad (3.36)$$

Persamaan-persamaan (3.33), (3.34), (3.35) dan (3.36) di atas, dapat dituliskan menjadi:

$$\phi_{0yy} + \dot{\iota}^2 \left[\phi_{0xx} + \phi_{1yy} \right] + \dot{\iota}^4 \left[\phi_{1xx} + \phi_{2yy} \right] + \dots = 0 \quad (3.37)$$

$$-\phi_{0y} + \dot{\iota}^2 \left[\zeta_t - \phi_{1y} + (\epsilon \phi_{0x}) \zeta_x \right] - \dot{\iota}^4 \left[\phi_{2y} - (\epsilon \phi_{1x}) \zeta_x \right] = 0 \quad (3.38)$$

$$\Phi_{0yy} + \dot{\iota}^2 \left[\Phi_{0xx} + \Phi_{1yy} \right] + \dot{\iota}^4 \left[\Phi_{1xx} + \Phi_{2yy} \right] = 0 \quad (3.39)$$

$$\Phi_{0y} + i^2\Phi_{1y} + i^4\Phi_{2y} + \dots = 0 \quad (3.40)$$

Sehingga untuk orde satu (orde i^0) diperoleh:

a) Persamaan Laplace:

$$\phi_{0yy}(x, y, t) = 0, \text{ pada } -h < y < 0 \quad (3.41)$$

$$\Phi_{0yy}(x, y, t) = 0, \text{ pada } -d < y < -h \quad (3.42)$$

b) Kondisi batas kinematik pada $y = \epsilon\zeta$:

$$-\phi_{0y}(x, y, t) = 0, \text{ pada } -h < y < 0 \quad (3.43)$$

c) Pada kondisi $y = -d$

$$\Phi_{0y}(x, y, t) = 0, \text{ pada } -d < y < -h \quad (3.44)$$

Untuk orde i^2 diperoleh:

a) Persamaan Laplace

$$\phi_{0xx}(x, y, t) + \phi_{1yy}(x, y, t) = 0, \text{ pada } -h < y < 0 \quad (3.45)$$

$$\Phi_{0xx}(x, y, t) + \Phi_{1yy}(x, y, t) = 0, \text{ pada } -d < y < -h \quad (3.46)$$

b) Kondisi batas kinematik pada $y = \epsilon\zeta$:

$$\zeta_t(x, y, t) - \phi_{1y}(x, y, t) = 0, \text{ pada } -h < y < 0 \quad (3.47)$$

c) Pada kondisi $y = -d$

$$\Phi_{1y}(x, y, t) = 0, \text{ pada } -d < y < -h \quad (3.48)$$

Untuk orde i^4 diperoleh:

a) Persamaan Laplace

$$\phi_{1xx}(x, y, t) + \phi_{2yy}(x, y, t) = 0, \text{ pada } -h < y < 0 \quad (3.49)$$

$$\Phi_{1xx}(x, y, t) + \Phi_{2yy}(x, y, t) = 0, \text{ pada } -d < y < -h \quad (3.50)$$

b) Kondisi batas kinematik pada $y = \epsilon\zeta$:

$$\zeta_x(x, y, t) - \phi_{2y}(x, y, t) = 0, \text{ pada } -h < y < 0 \quad (3.51)$$

c) Pada kondisi $y = -d$

$$\Phi_{2y}(x, y, t) = 0, \text{ pada } -d < y < -h \quad (3.52)$$

Selanjutnya dari orde satu akan ditentukan ϕ_0 dan Φ_0 , adapun langkah pertama yaitu integralkan persamaan (3.41) dan (3.42) terhadap:

$$\begin{aligned} \phi_{0yy}(x, y, t) &= 0 \\ \int \phi_{0yy}(x, y, t) dy &= \int 0 dy \\ \phi_{0y}(x, y, t) &= A_1 \end{aligned} \quad (3.53)$$

Karena A_1 merupakan konstanta pengintegralan terhadap y maka persamaan (3.53) dapat dituliskan menjadi:

$$\phi_{0y}(x, y, t) = A_1(x, t)$$

Selanjutnya untuk persamaan (3.42) diperoleh:

$$\begin{aligned} \Phi_{0yy}(x, y, t) &= 0 \\ \int \Phi_{0yy}(x, y, t) dy &= \int 0 dy \\ \Phi_{0y}(x, y, t) &= B_1 \end{aligned} \quad (3.54)$$

Karena B_1 merupakan konstanta pengintegralan terhadap y maka persamaan (3.54) dapat dituliskan menjadi:

$$\Phi_{0y}(x, y, t) = B_1(x, t)$$

Dengan kondisi batas pada saat $y = \epsilon\zeta$ dan $y = -d$ maka:

$$\phi_{0y}(x, \epsilon\zeta, t) = 0$$

dan

$$\Phi_{0y}(x, -d, t) = 0$$

Jika disubstitusikan $y = \epsilon\zeta$ dan $y = -d$ pada persamaan (3.53) dan (3.54) diperoleh:

$$\phi_{0y}(x, y, t) = A_1(x, t)$$

$$\Phi_{0y}(x, y, t) = B_1(x, t)$$

sehingga berakibat nilai $A_1(x, t) = 0$ dan $B_1(x, t) = 0$ sehingga persamaan (3.53) dan (3.54) menjadi:

$$\phi_{0y}(x, y, t) = 0 \quad (3.55)$$

$$\Phi_{0y}(x, y, t) = 0 \quad (3.56)$$

Selanjutnya, persamaan (3.55) dan (3.56) diintegalkan kembali terhadap y sehingga:

$$\phi_{0y}(x, y, t) = 0$$

$$\int \phi_{0y}(x, y, t) dy = \int 0 dy \quad (3.57)$$

$$\phi_0(x, y, t) = A$$

dan

$$\Phi_{0y}(x, y, t) = 0$$

$$\int \Phi_{0y}(x, y, t) dy = \int 0 dy \quad (3.58)$$

$$\Phi_0(x, y, t) = B$$

Karena A dan B merupakan konstanta pengintegralan terhadap y maka persamaan (3.57) dan (3.58) dapat dituliskan menjadi:

$$\phi_0(x, y, t) = A(x, t)$$

$$\Phi_0(x, y, t) = B(x, t)$$

Selanjutnya dari orde i^2 akan ditentukan ϕ dan Φ yang diperoleh dari persamaan (3.45) dan (3.46):

$$\phi_{0xx}(x, y, t) + \phi_{1yy}(x, y, t) = 0$$

$$\Phi_{0xx}(x, y, t) + \Phi_{1yy}(x, y, t) = 0$$

atau

$$\phi_{1yy}(x, y, t) = -\phi_{0xx}(x, y, t) \quad (3.59)$$

$$\Phi_{1yy}(x, y, t) = -\Phi_{0xx}(x, y, t) \quad (3.60)$$

Persamaan (3.57) dan (3.58) diperoleh:

$$\phi_0(x, y, t) = A(x, t)$$

$$\Phi_0(x, y, t) = B(x, t)$$

Yang dapat disubstitusikan ke persamaan (3.59) dan (3.60) diperoleh:

$$\phi_{1yy}(x, y, t) = -A_{xx}(x, t) \quad (3.61)$$

$$\Phi_{1yy}(x, y, t) = -B_{xx}(x, t) \quad (3.62)$$

Kemudian integralkan persamaan (3.61) dan (3.62) tersebut terhadap y sehingga:

$$\phi_{1yy}(x, y, t) = -A_{xx}(x, t)$$

$$\int \phi_{1yy}(x, y, t) dy = \int -A_{xx}(x, t) dy \quad (3.63)$$

$$\phi_{1y}(x, y, t) = -A_{xx}(x, t)y + A_2(x, t)$$

dan

$$\Phi_{1yy}(x, y, t) = -B_{xx}(x, t)$$

$$\int \Phi_{1yy}(x, y, t) dy = \int -B_{xx}(x, t) dy$$

$$\Phi_{1y}(x, y, t) = -B_{xx}(x, t)y + B_2(x, t) \quad (3.64)$$

Dimana $A_2(x, t)$ dan $B_2(x, t)$ merupakan konstanta pengintegralan terhadap y . dengan kondisi batas pada saat $y = \epsilon\zeta$ dan $y = -d$, dari persamaan (3.47) dan (3.48) dapat dituliskan menjadi:

$$\phi_{1y}(x, \epsilon\zeta, t) = \zeta_t(x, \epsilon\zeta, t) \quad (3.65)$$

$$\Phi_{1y}(x, -d, t) = 0 \quad (3.66)$$

Persamaan (3.63) dan (3.64) disubstitusikan ke persamaan (3.65) dan (3.66) diperoleh:

$$\begin{aligned} -A_{xx}(x, t)\epsilon\zeta + A_2(x, t) &= \zeta_t \\ A_2(x, t) &= A_{xx}(x, t)\epsilon\zeta + \zeta_t \end{aligned} \quad (3.67)$$

dan

$$\begin{aligned} -B_{xx}(x, t)(-d) + B_2(x, t) &= 0 \\ B_{xx}(x, t)d + B_2(x, t) &= 0 \\ B_2(x, t) &= -B_{xx}(x, t)d \end{aligned} \quad (3.68)$$

Sehingga persamaan (3.63) dan (3.64) menjadi:

$$\phi_{1y}(x, y, t) = -A_{xx}(x, t)y - A_{xx}(x, t)\epsilon\zeta + \zeta_t \quad (3.69)$$

dan

$$\Phi_{1y}(x, y, t) = -B_{xx}(x, t)y - B_{xx}(x, t)d \quad (3.70)$$

Untuk mencari ϕ_1 dan Φ_1 integralkan kembali persamaan (3.63) dan (3.64) sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} \int \phi_{1y}(x, y, t) dy &= \int -A_{xx}(x, t)y + A_2(x, t) dy \\ \phi_1(x, y, t) &= \int -A_{xx}(x, t)y - \epsilon\zeta A_{xx}(x, t) + \zeta_t dy \\ &= -\frac{1}{2}A_{xx}(x, t)y^2 - \epsilon\zeta A_{xx}(x, t)y - \zeta_t y + A_3(x, t) \\ &= -A_{xx}(x, t) \left(\frac{y^2 + 2\epsilon\zeta y}{2} \right) + \zeta_t y + A_3(x, t) \\ \phi_1(x, y, t) &= -\frac{1}{2}A_{xx}(x, t)(y^2 + 2\epsilon\zeta y) + \zeta_t y + A_3(x, t) \end{aligned} \quad (3.71)$$

dan

$$\begin{aligned}
 \int \Phi_{1y}(x, y, t) dy &= \int -B_{xx}(x, t)y + B_2(x, t) dy \\
 \Phi_1(x, y, t) &= \int -B_{xx}(x, t)y - dB_{xx}(x, t) dy \\
 &= -\frac{1}{2}B_{xx}(x, t)y^2 - dB_{xx}(x, t)y + B_3(x, t) \\
 &= -B_{xx}(x, t) \left(\frac{1}{2}y^2 - dy \right) + B_3(x, t) \\
 &= -B_{xx}(x, t) \left(\frac{y^2 + 2dy}{2} \right) + B_3(x, t) \\
 \Phi_1(x, y, t) &= -\frac{1}{2}B_{xx}(x, t)(y^2 + 2dy) + B_3(x, t) \tag{3.72}
 \end{aligned}$$

Dengan manipulasi aljabar, maka persamaan (3.71) dan (3.72) menjadi:

$$\begin{aligned}
 \phi_1(x, y, t) &= -\frac{1}{2}A_{xx}(x, t)(y^2 + 2\epsilon\zeta y) + \zeta_t y + A_3(x, t) \\
 &= -\frac{1}{2}A_{xx}(x, t)(y^2 + 2\epsilon\zeta y - 2\epsilon\zeta y) + \zeta_t y + \\
 &\quad (A_3(x, t) + 2\epsilon\zeta y A_{xx}(x, t)) \\
 &= -\frac{1}{2}A_{xx}(x, t)y^2 + \zeta_t y + A_4(x, t) \tag{3.73}
 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
 \Phi_1(x, y, t) &= -\frac{1}{2}B_{xx}(x, t)(y^2 + 2dy) + B_3(x, t) \\
 &= -\frac{1}{2}B_{xx}(x, t)(y^2 + 2dy + d^2) \\
 &\quad + (B_3(x, t) - d^2 B_{xx}(x, t)) \\
 &= -\frac{1}{2}B_{xx}(x, t)(y + d)^2 + B_4(x, t) \tag{3.74}
 \end{aligned}$$

Selanjutnya, substitusikan persamaan (3.57) dan (3.73) ke persamaan (3.31):

$$\phi = \phi_0 + i^2 \phi_1 + i^4 \phi_2 + \dots$$

sehingga ϕ diperoleh:

$$\phi = A(x, t) + i^2 \left[-\frac{1}{2} A_{xx}(x, t) y^2 + \zeta_t y + A_4(x, t) \right] + \mathcal{O}(i^4) \quad (3.75)$$

Dan substitusikan persamaan (3.58) dan (3.74) ke persamaan (3.32):

$$\Phi = \Phi_0 + i^2 \Phi_1 + i^4 \Phi_2 + \dots$$

sehingga Φ diperoleh:

$$\Phi = B(x, t) + i^2 \left[-\frac{1}{2} B_{xx}(x, t) (y + d)^2 + B_4(x, t) \right] + \mathcal{O}(i^4) \quad (3.76)$$

Selanjutnya, gunakan persamaan (3.23) dan (3.26) beserta kondisi batas pada *interface* yaitu persamaan:

$$\phi_y = \Phi_y \quad (3.77)$$

Karena tujuan utamanya adalah untuk mencari model gelombang permukaan, maka langkah selanjutnya adalah dari persamaan (3.75) dan (3.76) disubstitusikan pada kondisi batas dinamik permukaan fluida, yaitu persamaan (3.23) serta pada persamaan (3.77) dan (3.26), sehingga dari persamaan (3.75) dan (3.76) diperoleh nilai $\phi_x(x, y, t)$ dan $\Phi_x(x, y, t)$ sebagai berikut:

$$\phi_x(x, y, t) = A_x + i^2 \left[-\frac{1}{2} A_{xxx} y^2 + \zeta_t y + A_{4x} \right]$$

$$\Phi_x(x, y, t) = B_x + i^2 \left[-\frac{1}{2} B_{xxx} (y + d)^2 + B_{4x} \right]$$

Jika $y = 0$ maka menjadi:

$$\phi_x(x, 0, t) = A_x + i^2 [A_{4x}]$$

$$\Phi_x(x, 0, t) = B_x + \dot{\gamma}^2 \left[-\frac{1}{2} B_{xxx}(d)^2 + B_{4x} \right]$$

Jika $y = -1$ maka menjadi:

$$\phi_x(x, -1, t) = A_x + \dot{\gamma}^2 \left[-\frac{1}{2} A_{xxx} + \zeta_t + A_{4x} \right]$$

$$\Phi_x(x, -1, t) = B_x + \dot{\gamma}^2 \left[-\frac{1}{2} B_{xxx}(-1 + d)^2 + B_{4x} \right]$$

Kemudian dari persamaan (3.75) dan (3.76) juga diperoleh $\phi_y(x, y, t)$

dan $\Phi_y(x, y, t)$ sebagai berikut:

$$\phi_y(x, y, t) = \dot{\gamma}^2 [-A_{xy} + \zeta_t]$$

$$\Phi_y(x, y, t) = \dot{\gamma}^2 [-B_{xy}(y + d)]$$

Jika $y = 0$ maka menjadi:

$$\phi_y(x, 0, t) = \dot{\gamma}^2 [\zeta_t]$$

$$\Phi_y(x, 0, t) = \dot{\gamma}^2 [-B_{xy}(d)]$$

Jika $y = -1$ maka menjadi:

$$\phi_y(x, -1, t) = \dot{\gamma}^2 [A_{xy} + \zeta_t]$$

$$\Phi_y(x, -1, t) = \dot{\gamma}^2 [-B_{xy}(-1 + d)]$$

Selanjutnya dari persamaan (3.75) dan (3.76) diperoleh $\phi_t(x, y, t)$ dan

$\Phi_t(x, y, t)$ sebagai berikut:

$$\phi_t(x, y, t) = A_t + \dot{\gamma}^2 \left[-\frac{1}{2} A_{xxt}y^2 + \zeta_t y + A_{4t} \right]$$

$$\Phi_t(x, y, t) = B_t + \dot{\gamma}^2 \left[-\frac{1}{2} B_{xxt}(y + d)^2 + B_{4t} \right]$$

Jika $y = 0$ maka menjadi:

$$\phi_t(x, 0, t) = A_t + \dot{\gamma}^2 [A_{4t}]$$

$$\Phi_t(x, 0, t) = B_t + \dot{\iota}^2 \left[-\frac{1}{2} B_{xxt}(d^2) + B_{4t} \right]$$

Jika $y = -1$ maka menjadi:

$$\phi_t(x, -1, t) = A_t + \dot{\iota}^2 \left[-\frac{1}{2} A_{xxt} + \zeta_t + A_{4t} \right]$$

$$\Phi_t(x, -1, t) = B_t + \dot{\iota}^2 \left[-\frac{1}{2} B_{xxt}(-1 + d^2) + B_{4t} \right]$$

Kemudian substitusikan ϕ_x, ϕ_y, ϕ_t dan Φ_x, Φ_y, Φ_t tersebut ke dalam persamaan (3.23), (3.77) dan (3.26) sehingga menjadi:

$$\begin{aligned} \dot{\iota}^2 \phi_t + \frac{1}{2} \epsilon \left[\dot{\iota}^2 \phi_x^2 + \phi_y^2 \right] + \dot{\iota}^2 \zeta &= 0 \\ \dot{\iota}^2 \left(A_t + \dot{\iota}^2 \left[-\frac{1}{2} A_{xxt} y^2 + \zeta_t y + A_{4t} \right] \right) \\ + \frac{1}{2} \epsilon \left[\dot{\iota}^2 \left(A_x + \dot{\iota}^2 \left[-\frac{1}{2} A_{xxx} y^2 + \zeta_t y + A_{4x} \right] \right)^2 \right. \\ \left. + \left(\dot{\iota}^2 [-A_{xx} y + \zeta_t] \right)^2 \right] + \dot{\iota}^2 \zeta &= 0 \end{aligned}$$

atau dapat disederhanakan dengan mengalikan kedua ruas dengan $\frac{1}{\dot{\iota}^2}$ menjadi:

$$\begin{aligned} \left(A_t + \dot{\iota}^2 \left[-\frac{1}{2} A_{xxt} y^2 + \zeta_t y + A_{4t} \right] \right) \\ + \frac{1}{2} \epsilon \left[\left(A_x + \dot{\iota}^2 \left[-\frac{1}{2} A_{xxx} y^2 + \zeta_t y + A_{4x} \right] \right)^2 \right. \\ \left. + \left(\dot{\iota}^2 [-A_{xx} y + \zeta_t] \right)^2 \right] + \zeta &= 0 \end{aligned} \tag{3.78}$$

Kemudian persamaan (3.77) menjadi:

$$\dot{\iota}^2 [A_{xx} + \zeta_t] = \dot{\iota}^2 [-B_{xx}(-1 + d)]$$

Disederhanakan dengan mengalikan kedua ruas dengan $\frac{1}{\dot{\iota}^2}$ menjadi:

$$[A_{xx} + \zeta_t] = [-B_{xx}(-1 + d)] \quad (3.79)$$

Dan persamaan (3.26) menjadi:

$$\begin{aligned} \phi_t + \frac{1}{2} \frac{\epsilon}{i^2} [i^2 \phi_x^2 + \phi_y^2] - \frac{1}{R} \Phi = 0 \\ \left(A_t + i^2 \left[-\frac{1}{2} A_{xxt} y^2 + \zeta_t y + A_{4t} \right] \right) \\ + \frac{1}{2} \frac{\epsilon}{i^2} \left(i^2 \left(A_x + i^2 \left[-\frac{1}{2} A_{xxx} y^2 + \zeta_t y + A_{4x} \right] \right)^2 \right. \\ \left. + (i^2 [-A_{xx} y + \zeta_t])^2 \right) \\ - \frac{1}{R} \left(B + i^2 \left[-\frac{1}{2} B_{xx} (y + d)^2 + B_3 \right] \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.80)$$

Dengan asumsi bahwa $\epsilon = i^2$, maka persamaan (3.78) dan (3.80) tersebut menjadi:

$$\begin{aligned} \left(A_t + \epsilon \left[-\frac{1}{2} A_{xxt} y^2 + \zeta_t y + A_{4t} \right] \right) \\ + \frac{1}{2} \epsilon \left[\left(A_x + \epsilon \left[-\frac{1}{2} A_{xxx} y^2 + \zeta_t y + A_{4x} \right] \right)^2 \right. \\ \left. + (\epsilon [-A_{xx} y + \zeta_t])^2 \right] + \zeta = 0 \end{aligned} \quad (3.81)$$

dan

$$\begin{aligned}
& \left(A_t + \epsilon \left[-\frac{1}{2} A_{xxt} y^2 + \zeta_t y + A_{4t} \right] \right) \\
& + \frac{1}{2} \left(\epsilon \left(A_x + \epsilon \left[-\frac{1}{2} A_{xxx} y^2 + \zeta_t y + A_{4x} \right] \right)^2 \right. \\
& \left. + (\epsilon [-A_{xx} y + \zeta_t])^2 \right) \\
& - \frac{1}{R} \left(B + \epsilon \left[-\frac{1}{2} B_{xx} (y + d)^2 + B_3 \right] \right) = 0
\end{aligned} \tag{3.82}$$

Jika persamaan (3.79), (3.81), (3.82) diambil sampai orde nol saja, maka diperoleh:

$$A_{xx} + \zeta_t = (d - 1)B_{xx} \tag{3.83}$$

$$A_t + \zeta = 0 \tag{3.84}$$

$$A_t - \frac{1}{R}B = 0 \text{ atau } RA_t - B = 0 \tag{3.85}$$

Kemudian B dieliminasi dari persamaan (3.83) dan (3.85), sehingga diperoleh:

$$A_{xx} + \zeta_t = (d - 1)RA_{xxt} \tag{3.86}$$

Dalam Wiryanto (2011:139) didefinisikan kedalaman rata-rata adalah:

$$u(x, t) = \frac{1}{1 + \epsilon\zeta} \int_{-1}^{\epsilon\zeta} \phi_x \, dx \approx A_x \tag{3.87}$$

Dari persamaan tersebut maka diperoleh:

$$u = A_x$$

$$u_x = A_{xx}$$

Kemudian dari persamaan (3.84) diperoleh:

$$A_t + \zeta = 0$$

$$A_t = -\zeta \tag{3.88}$$

Jika persamaan (3.84) diturunkan terhadap x maka diperoleh:

$$A_{xt} + \zeta_x = 0 \quad (3.89)$$

Selanjutnya substitusikan persamaan (3.87) ke persamaan (3.89) sehingga diperoleh:

$$u_t + \zeta_x = 0 \quad (3.90)$$

Persamaan (3.87) dan (3.88) disubstitusikan ke persamaan (3.86) diperoleh:

$$u_t + \zeta_t = (d - 1)R\zeta_{xx} \quad (3.91)$$

dimana $\zeta(x, t)$ adalah ketinggian permukaan fluida, $u(x, t)$ kecepatan rata-rata pada aliran fluida, $(d - 1)$ adalah ketebalan media berpori, dan R adalah Reynolds number $R = \frac{k\sqrt{gh}}{g\bar{e}}$.

Persamaan (3.90) dan (3.91) merupakan model gelombang permukaan yang telah diperoleh. Persamaan (3.90) dan (3.91) tersebut sama dengan persamaan air dangkal linier atau yang disebut dengan *linear Shallow-Water Equations* (SWEs) jika $d = 1$ pada persamaan (3.91).

3.4 Simulasi dan Interpretasi Hasil

Penelitian yang telah dilakukan adalah menurunkan model linear dari perambatan gelombang permukaan yang melalui pemecah gelombang berpori. Model ini sama dengan persamaan air dangkal atau *Shallow-Water Equations* (SWEs) jika $d = 1$. Pada sub bab ini, simulasi dilakukan dengan menggunakan program MATLAB. Persamaan yang digunakan untuk simulasi dalam program tersebut yaitu persamaan (3.90) dan (3.91).

$$u_t + \zeta_x = 0$$

$$u_t + \zeta_t = (d - 1)R\zeta_{xx}$$

dengan diberikan kondisi awal $\zeta(x, 0) = \text{sech}(x)^2$.

Hasil penurunan model dan hasil simulasi yang dilakukan mampu menunjukkan terjadinya pengurangan amplitudo gelombang ketika melewati pemecah gelombang berpori. Energi yang dibawa gelombang juga berkurang, karena sebanding dengan kuadrat amplitudo. Panjang L dari pemecah gelombang berpori juga memiliki efek mengurangi amplitudo. Dari hasil simulasi juga ditemukan adanya refleksi gelombang. Terjadinya refleksi gelombang dipengaruhi karena adanya pemecah gelombang, perubahan kedalaman air serta pengaruh kondisi-kondisi batas.

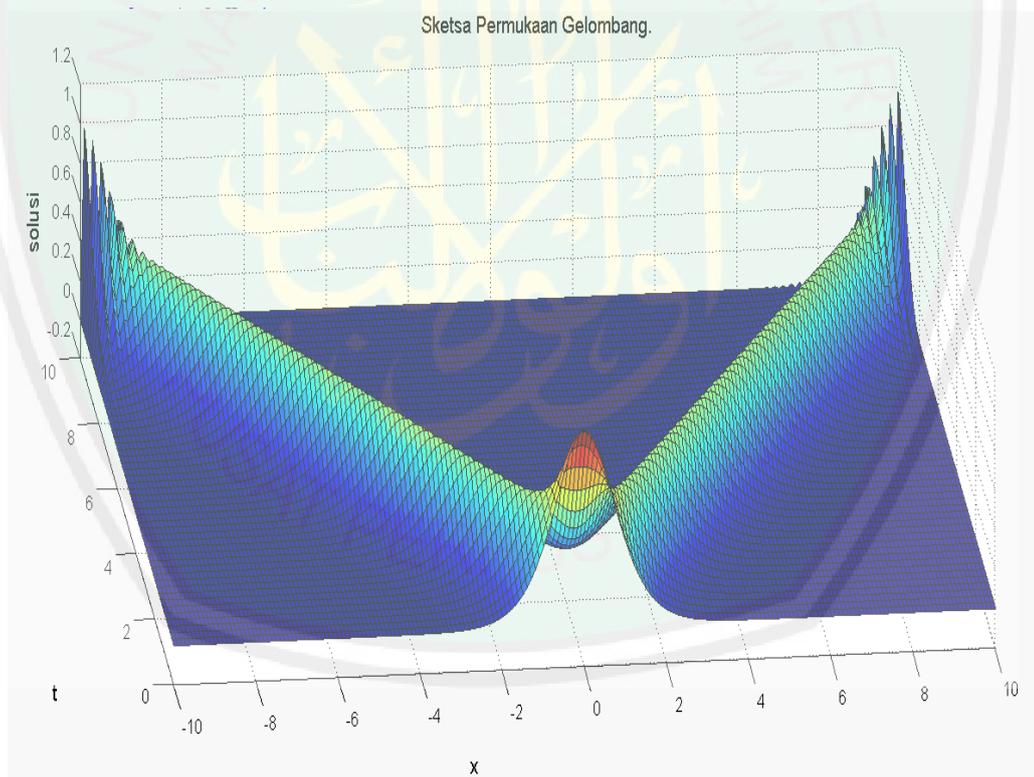
Gelombang yang direfleksikan muncul ketika gelombang tersebut masuk ke dalam bagian dimana pemecah gelombang ditempatkan, sebab kedalaman air berubah dari d ke $d - 1$. Refleksi gelombang kedua dengan amplitudo yang jauh lebih kecil bergerak mengikuti gelombang yang pertama, ini muncul setelah perubahan kedua dari kedalaman air, yaitu dari $d - 1$ ke d .

Perambatan gelombang permukaan yang melewati sebuah pemecah gelombang berpori diilustrasikan pada beberapa nilai x dan t , gelombang-gelombang bergerak ke kanan dan ke kiri berjalan melewati dasar yang rata di kedalaman $d = 1.5$, dan melewati sebuah pemecah gelombang berpori pada ketinggian 0.5 dari dasar, dengan $k = 0.3$, panjang L dari pemecah gelombang berpori yang digunakan pada simulasi adalah saat $L = 50, 60$ dan 80 di atas pemecah gelombang, dengan panjang gelombang $\lambda = 39.4$.

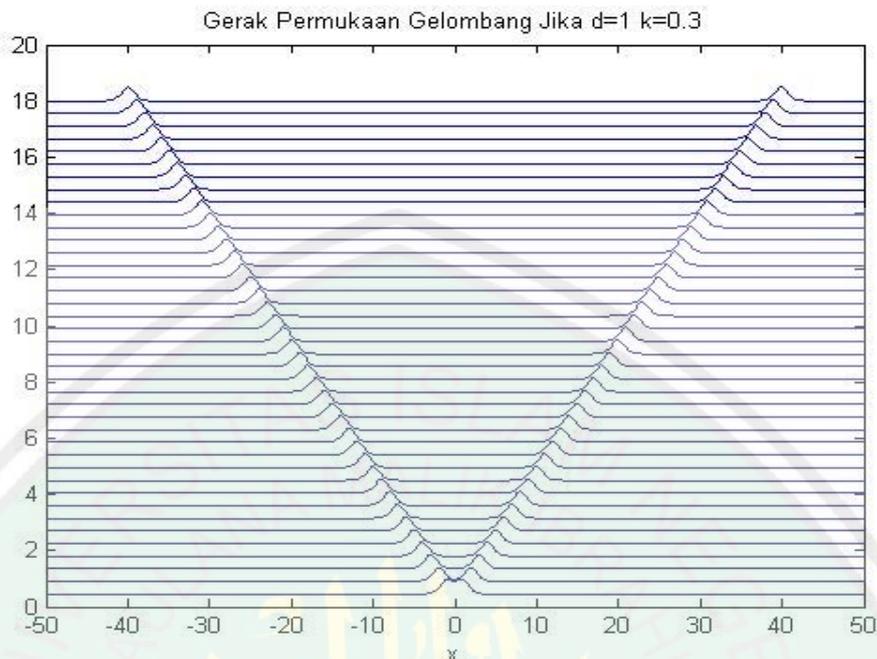
Simulasi pertama, jika $d = 1$, sehingga $d - 1 = 0$, $0 < x < L$, dengan $L = 50$, serta $0 < t < 10$ untuk gambar tiga dimensi, dan $0 < t < 50$ untuk dua dimensi, $k = 0.3$, $g = 10$ sehingga simulasi dapat dilihat pada Gambar 3.2 dan 3.3. Dengan menggunakan $\Delta x = 0.05$ dan $\Delta t = 0.025$ yang telah diberikan, pada

gambar tersebut menunjukkan bahwa ketika melewati pemecah gelombang berpori, gerak gelombang berjalan dari kiri ke kanan dan setelah melewati pemecah gelombang, gelombang tersebut terpecah menjadi dua bagian yaitu gelombang transmisi dan refleksi.

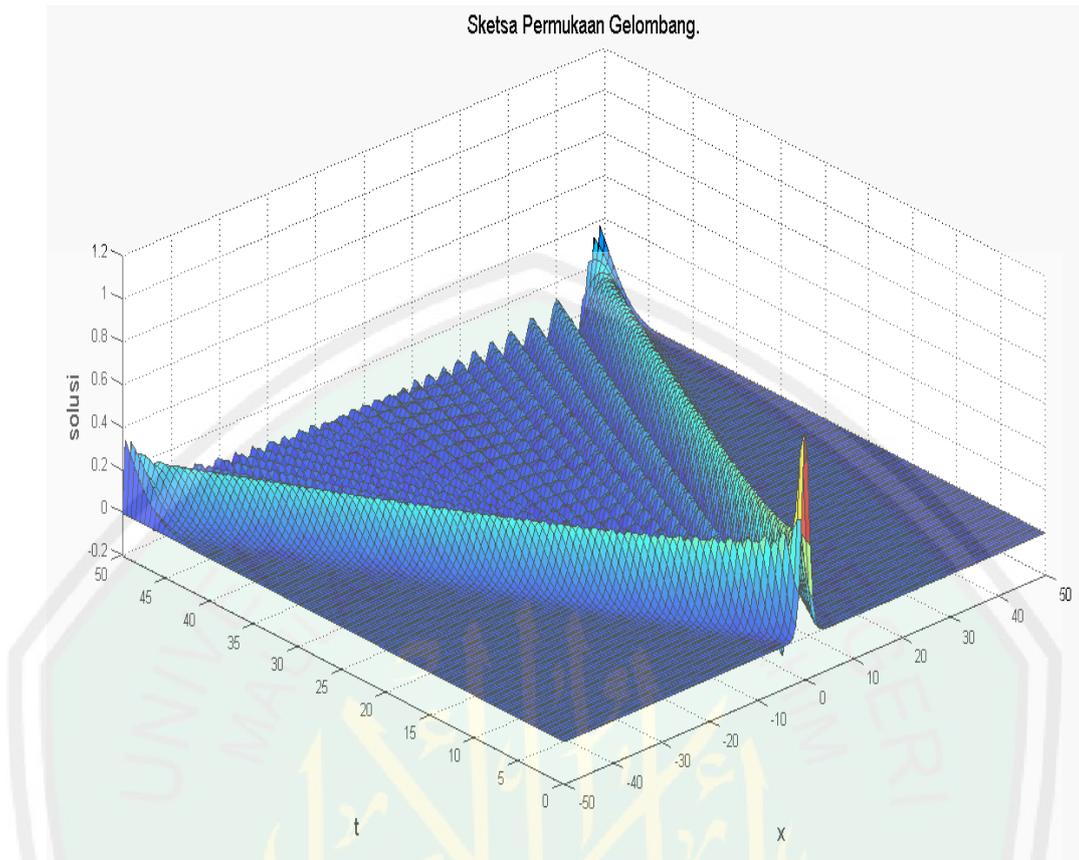
Karena $d - 1 = 0$ maka yang terjadi setelah gelombang melewati pemecah gelombang adalah tidak adanya perubahan baik itu pengurangan amplitudo gelombang, energi gelombang maupun riak-riak gelombang. Begitu juga untuk $L = 60, 80$ dan $k = 0.5$, karena berapapun nilai L dan k , jika $d = 1$ dan $d - 1 = 0$ maka akan didapatkan hasil simulasi yang sama.



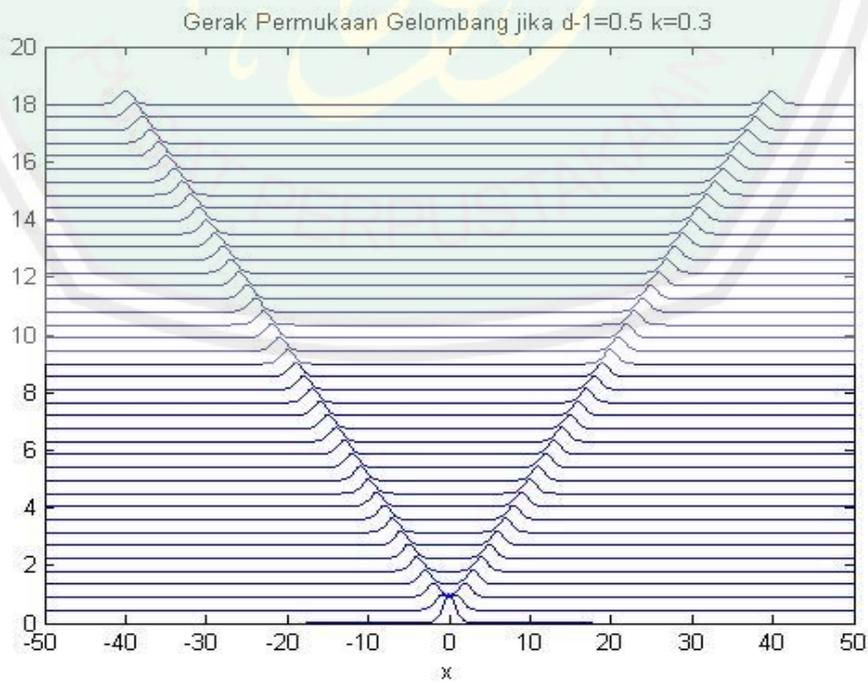
Gambar 3.2 Grafik Persamaan (3.90) dan (3.91) dalam Tiga Dimensi (3-D)



Simulasi kedua, jika $d \neq 1$ dengan $d = 1.5$, sehingga $d - 1 = 0.5$, $0 < x < L$ dengan $L = 50$, $0 < t < 50$, $k = 0.3$, $\Delta x = 0.05$ dan $\Delta t = 0.025$, pergerakan gelombang berjalan cepat, amplitudo gelombang lebih besar jika dibandingkan dengan $0 < x < L$ dengan $L = 60$ dan 80 , dan saat mengalami refleksi, refleksi gelombang yang ditimbulkan lebih tinggi namun lebih tipis dan renggang. Jika diberikan nilai $k > 0.3$, misal diberikan $k = 0.5$ maka perbedaan yang terjadi antara nilai $k = 0.3$ dengan nilai $k = 0.5$ adalah pada saat nilai $k = 0.3$ amplitudo gelombang akan lebih besar dibandingkan dengan $k = 0.5$, hal ini berlaku juga untuk $0 < x < L$, dengan $L = 60$ dan 80 . Seperti ditunjukkan pada Gambar 3.4 dan 3.5.

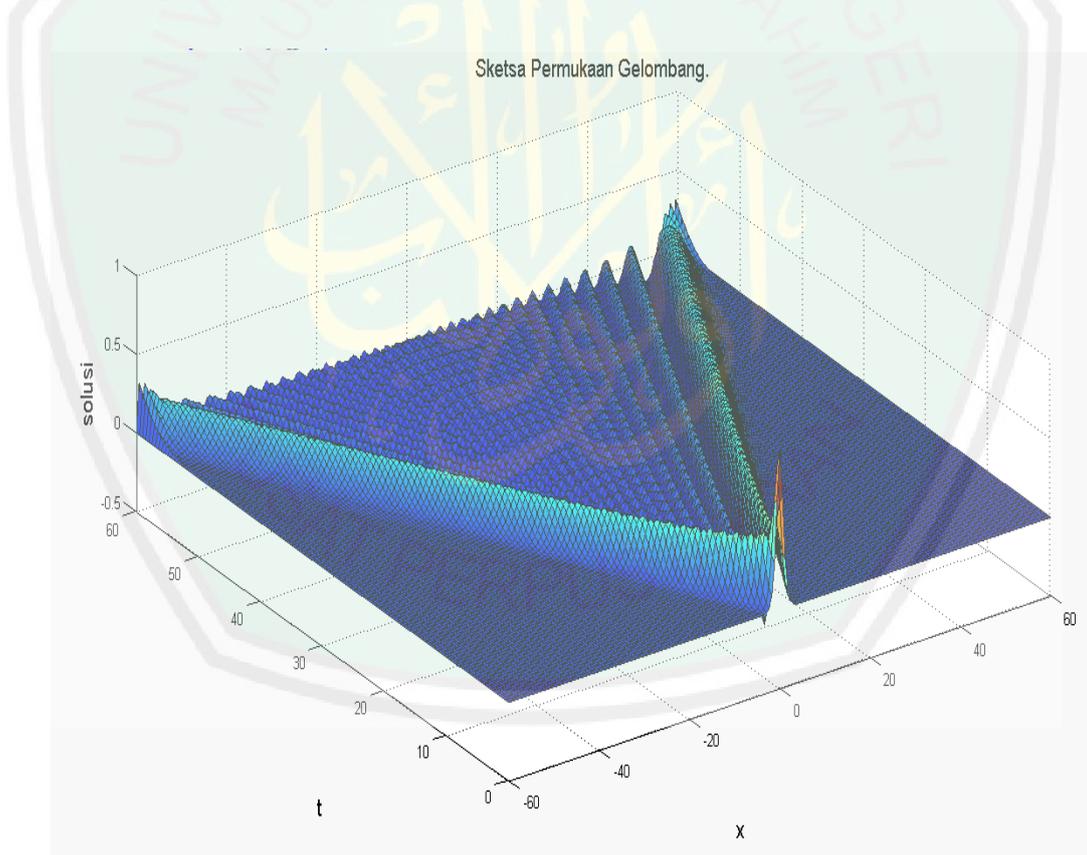


Gambar 3.4 Sketsa Permukaan Gelombang Tiga Dimensi (3-D) Persamaan (3.90) dan (3.91)
Jika $d = 1.5$, $0 < x < L$, $L = 50$

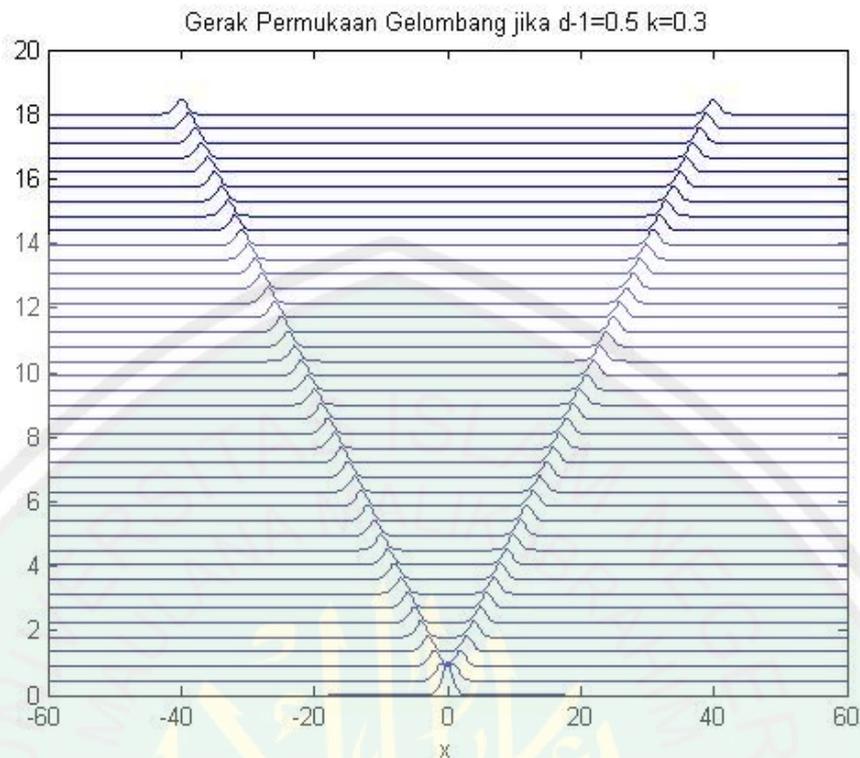


Gambar 3.5 Sketsa Permukaan Gelombang Jika $d = 1.5$ dan $0 < x < 50$

Simulasi ketiga, jika $d \neq 1$ dengan $d = 1.5$ sehingga $d - 1 = 0.5$, $0 < x < L$ dengan $L = 60$, $0 < t < 50$, $k = 0.3$, $\Delta x = 0.05$ dan $\Delta t = 0.025$, kecepatan pergerakan gelombang semakin menurun jika dibandingkan dengan ketika $0 < x < 50$ namun, berjalan lebih cepat jika dibandingkan dengan pada saat $0 < x < 80$, amplitudo gelombang semakin kecil, dan ketinggian refleksi gelombang yang ditimbulkan akibat pengaruh kondisi batas menurun jika dibandingkan dengan saat $0 < x < 50$ dan sebaliknya lebih tinggi jika dibandingkan pada saat $0 < x < 80$, refleksi yang dihasilkan lebih tebal dan padat. Seperti yang ditunjukkan pada Gambar 3.6 dan 3.7:

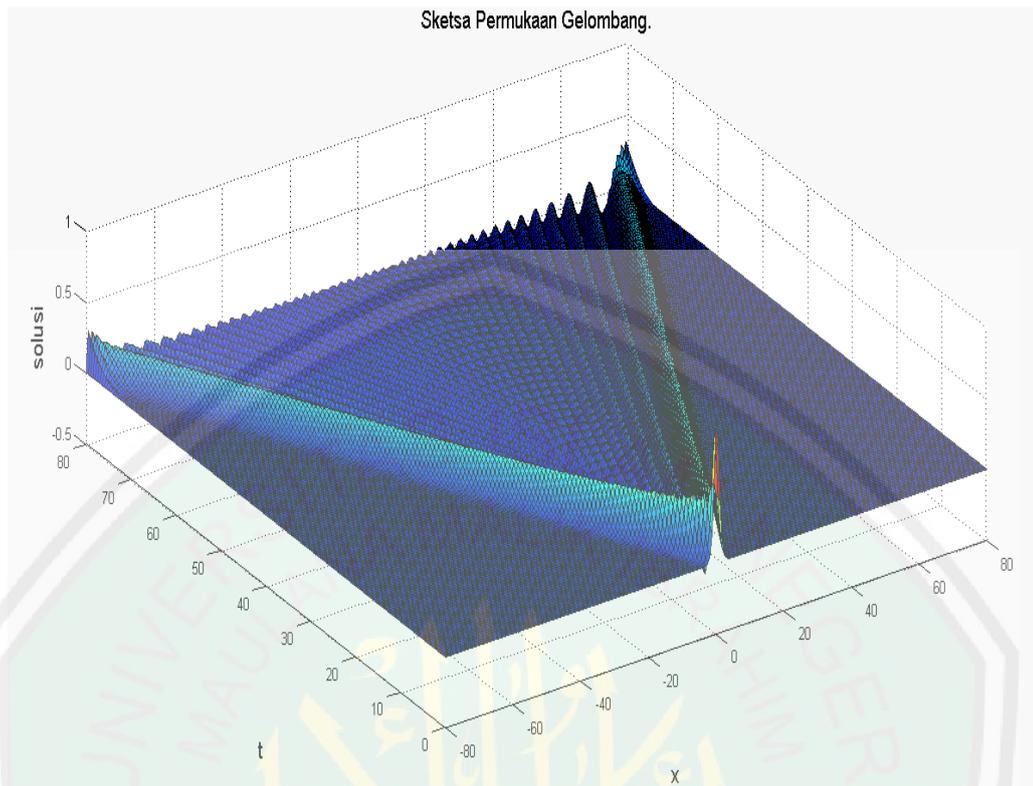


**Gambar 3.6 Sketsa Permukaan Gelombang Tiga Dimensi (3-D) Persamaan (3.90) dan (3.91)
Jika $d = 1.5$, $0 < x < L$, $L = 60$**

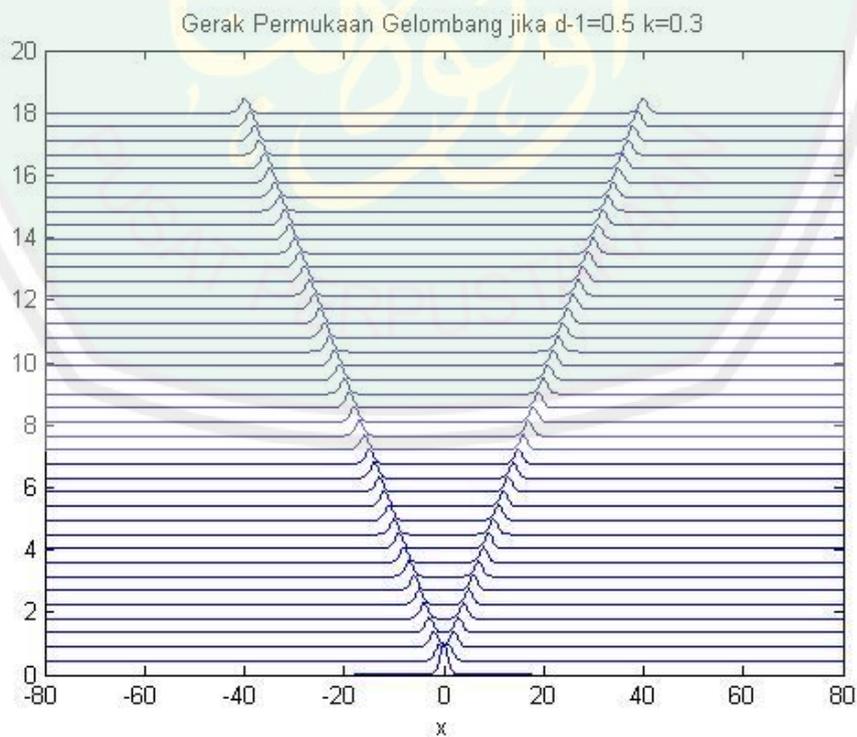


Gambar 3.7 Sketsa Permukaan Gelombang Persamaan (3.90) dan (3.91) Jika $d - 1 = 0.5$, dan $0 < x < L, L = 60$

Simulasi keempat, jika $d \neq 1$ dengan $d = 1.5$ sehingga $d - 1 = 0.5$, $0 < x < L$ dengan $L = 80$, $0 < t < 40$, $k = 0.3$, $\Delta x = 0.05$ dan $\Delta t = 0.025$, pergerakan gelombang berjalan semakin lambat jika dibandingkan dengan ketika $0 < x < 50$ dan pada saat $0 < x < 60$, amplitudo gelombang semakin kecil, dan ketinggian refleksi gelombang yang ditimbulkan akibat pengaruh kondisi batas menurun jika dibandingkan dengan saat $0 < x < 50$ dan pada saat $0 < x < 60$, namun refleksi yang dihasilkan akan lebih tebal, padat dan rapat. Seperti yang ditunjukkan pada Gambar 3.6 dan 3.7 berikut:



**Gambar 3.8 Sketsa Permukaan Gelombang Tiga Dimensi (3-D) Persamaan (3.90) dan (3.91),
Jika $d = 1.5$, $0 < x < L$, $L = 80$**



**Gambar 3.9 Sketsa Permukaan Gelombang Persamaan (3.90) dan (3.91) Jika $d = 0.5$,
dan $0 < x < L$, $L = 80$**

Pengamatan juga dilakukan dengan mengubah parameter-parameter yang ada, dari hasil analisis yang telah dilakukan dapat disimpulkan bahwa besar kecilnya x , Δx , dan Δt yang diberikan dapat mempengaruhi kecepatan pergerakan gelombang, refleksi gelombang, riak-riak gelombang yang dihasilkan serta amplitudo gelombangnya. Ketika nilai t yang diberikan semakin kecil, maka riak-riak gelombang dan amplitudo yang dihasilkan semakin kecil dan gelombang berjalan tidak sampai mengalami refleksi gelombang. Namun pada saat Δx , dan Δt yang diberikan lebih besar, maka yang terjadi adalah amplitudo gelombang lebih besar pula. Secara umum, perbedaan antara nilai $k = 0.3$ dengan nilai $k = 0.5$ adalah pada saat nilai $k = 0.3$ amplitudo gelombang akan lebih besar dibandingkan dengan $k = 0.5$.

3.5 Kajian Keagamaan

Model gelombang permukaan yang dihasilkan dalam bentuk persamaan yang mirip dengan persamaan gelombang linier atau yang disebut dengan *linear Shallow-Water Equations* (SWEs) pada persamaan (3.90) dan (3.91) adalah:

$$u_t + \zeta_x = 0$$

$$u_t + \zeta_t = (d - 1)R\zeta_{xx}$$

Persamaan (3.88) dan (3.89) tersebut diperoleh dari penurunan persamaan Laplace beserta kondisi-kondisi batas pada permukaan fluida, *interface* dan pada dasar saluran. Hal ini menunjukkan bahwa adanya model matematika terkait fenomena alam tentang gelombang permukaan.

Adanya model matematika ini, diharapkan dapat diambil pelajaran untuk meningkatkan keimanan dan ketakwaan diri kepada Allah Swt yang telah

menciptakan alam semesta ini dengan ukuran dan keteraturannya. Sebagaimana firman Allah dalam surat al-Qomar/54:49, yaitu:

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَاهُ بِقَدَرٍ ﴿٤٩﴾

“*Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran*” (QS. al-Qamar/54:49).

Secara global, ayat diatas menjelaskan bahwasanya Allah menciptakan segala sesuatu dan menentukan ukurannya sesuai dengan ketetapan, ilmu pengetahuan, dan telah ditentukan. Jadi, pada hakikatnya segala sesuatu diciptakan oleh Allah menurut ukuran yang menentukan sifat, kadar, waktu, tempat, dan kaitannya dengan segala perkara yang ada di sekitarnya serta pengaruh terhadap keberadaan alam semesta dan semua yang terjadi di alam semesta ini pastilah berdasarkan takdir Allah Swt.

Selain ayat di atas, Allah berfirman dalam al-Quran surat al-Furqaan/25:2, yaitu:

الَّذِي لَهُ مُلْكُ السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ وَلَمْ يَتَّخِذْ وَلَدًا وَلَمْ يَكُن لَّهُ شَرِيكٌ فِي الْمُلْكِ وَخَلَقَ كُلَّ شَيْءٍ فَقَدَرَهُ تَقْدِيرًا ﴿٢﴾

“*yang kepunyaan-Nya-lah kerajaan langit dan bumi, dan Dia tidak mempunyai anak, dan tidak ada sekutu baginya dalam kekuasaan(Nya), dan Dia telah menciptakan segala sesuatu, dan Dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya*” (QS. al-Furqaan/25:2).

Maksud dari kata “فقدَره تقديرا” dalam tafsir al-Qurthubi yaitu menetapkan segala sesuatu dari apa yang diciptakan-Nya sesuai dengan hikmah yang diinginkan-Nya, dan bukan karena nafsu dan kelalaian, melainkan segala sesuatu berjalan sesuai dengan ketentuan-Nya hingga hari kiamat dan setelah kiamat (al-Qurthubi, 2008:98). Dalam tafsir al-Maraghi makna dari kata tersebut adalah Allah menetapkan ukuran dengan serapi-rapinya tanpa ada celah atau

kebengkokan di dalamnya, tidak perlu ada penambahan atau pengurangan walaupun dengan alasan atau suatu hikmah atau maslahat. Semua yang Allah tentukan adalah demi kemaslahatan manusia (al-Maraghi, 1989:75).



BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Dari penelitian yang telah dilakukan dapat disimpulkan bahwa langkah-langkah untuk mendapatkan model gelombang permukaan dengan gangguan berupa balok berpori pada dasar saluran adalah: menurunkan persamaan-persamaan pengatur yang diturunkan dari hukum-hukum kesetimbangan yang terjadi pada aliran fluida, kemudian dilakukan penskalaan, aproksimasi variabel, ekspansi deret, dan menyederhanakan ke dalam model matematika.

Model gelombang yang dihasilkan berupa model gelombang linier yang sama dengan persamaan air dangkal atau yang disebut *linear Shallow-Water Equations* (SWE), dengan jangka redaman sebanding dengan karakter pemecah gelombang berpori. Oleh karena itu, gelombang yang melewati pemecah gelombang akan diserap dan amplitudo menurun. Adapun persamaan tersebut adalah sebagai berikut:

$$u_t + \eta_x = 0$$
$$u_t + \eta_t = (d - 1)R\eta_{xx}$$

dimana $\eta(x, t)$ adalah ketinggian permukaan fluida, $u(x, t)$ adalah kecepatan rata-rata pada aliran fluida, $d - 1$ adalah ketebalan media berpori, R adalah *Reynolds number* dengan $R = \frac{k\sqrt{gh}}{(g\lambda)}$.

Dari hasil analisis terhadap simulasi yang telah dilakukan dapat disimpulkan bahwa besar kecilnya x , Δx , dan Δt yang diberikan dapat mempengaruhi kecepatan pergerakan gelombang, refleksi gelombang, riak-riak

gelombang yang dihasilkan serta amplitudo gelombangnya. Ketika nilai t yang diberikan semakin kecil, maka riak-riak gelombang dan amplitudo yang dihasilkan semakin kecil dan gelombang berjalan tidak sampai mengalami refleksi gelombang. Namun pada saat Δx , dan Δt yang diberikan lebih besar, maka yang terjadi adalah amplitudo gelombang akan lebih besar pula. Secara umum, perbedaan antara nilai $k = 0.3$ dengan nilai $k = 0.5$ adalah pada saat nilai $k = 0.3$ amplitudo gelombang akan lebih besar dibandingkan dengan $k = 0.5$.

4.2 Saran

Pada penelitian ini untuk mendapatkan solusi dari model gelombang yang ada, penulis menggunakan aplikasi MATLAB *ToolBox*. Selanjutnya disarankan agar pada penelitian selanjutnya untuk mencari solusi analitik maupun numerik dari model gelombang tersebut.