

**SOLUSI NUMERIK MODEL GELOMBANG PERMUKAAN MELALUI
PEMECAH GELOMBANG BERUPA BALOK BERPORI
MENGUNAKAN METODE BEDA HINGGA SKEMA IMPLISIT
*FORWARD TIME CENTRAL SPACE***

SKRIPSI

**OLEH
ANA KHAIRUNNISA'
NIM. 12610008**



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2016**

**SOLUSI NUMERIK MODEL GELOMBANG PERMUKAAN MELALUI
PEMECAH GELOMBANG BERUPA BALOK BERPORI
MENGUNAKAN METODE BEDA HINGGA SKEMA IMPLISIT
*FORWARD TIME CENTRAL SPACE***

SKRIPSI

**Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)**

**Oleh
Ana Khairunnisa'
NIM. 12610008**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2016**

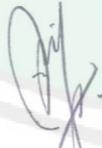
**SOLUSI NUMERIK MODEL GELOMBANG PERMUKAAN MELALUI
PEMECAH GELOMBANG BERUPA BALOK BERPORI
MENGUNAKAN METODE BEDA HINGGA SKEMA IMPLISIT
*FORWARD TIME CENTRAL SPACE***

SKRIPSI

Oleh
Ana Khairunnisa'
NIM. 12610008

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 22 Desember 2016

Pembimbing I,



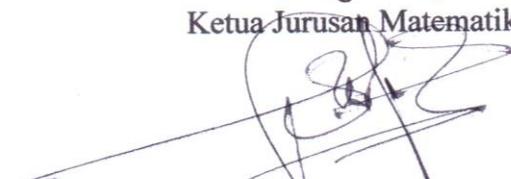
Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si
NIP. 19770521 200501 2 004

Pembimbing II,



Dr. H. Ahmad Barizi, M.A
NIP. 19731212 199803 1 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika



Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

**SOLUSI NUMERIK MODEL GELOMBANG PERMUKAAN MELALUI
PEMECAH GELOMBANG BERUPA BALOK BERPORI
MENGUNAKAN METODE BEDA HINGGA SKEMA IMPLISIT
*FORWARD TIME CENTRAL SPACE***

SKRIPSI

Oleh
Ana Khairunnisa'
NIM. 12610008

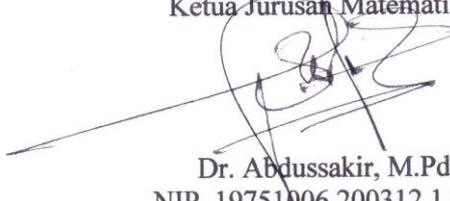
Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal 22 Desember 2016

Penguji Utama : Dr. Usman Pagalay, M.Si
Ketua Penguji : Mohammad Jamhuri, M.Si
Sekretaris Penguji : Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si
Anggota Penguji : Dr. H. Ahmad Barizi, M.A

.....
.....
.....
.....

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika


Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Ana Khairunnisa'

NIM : 12610008

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Solusi Numerik Model Gelombang Permukaan Melalui Pemecah Gelombang Berupa Balok Berpori Menggunakan Metode Beda Hingga Skema Implisit *Forward Time Central Space*.

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 15 Desember 2016
Yang membuat pernyataan,




Ana Khairunnisa'
NIM. 12610008

MOTO

“The imagination is more important than any knowledges”

(Albert Einstein)



PERSEMBAHAN

Dengan mengucapkan rasa syukur kepada Allah Swt, skripsi ini penulis persembahkan kepada:

Kedua orang tua penulis bapak Sumarto, S.Ag, M.Pd dan ibu Suhartini yang selalu menginspirasi penulis dengan kegigihan dan kesabarannya, yang selalu menyelipkan doa setiap harinya untuk penulis. Kedua saudara tersayang Rini Sumarni dan Muhammad Khairul Mun'im yang senantiasa memberikan motivasi dan semangat yang tiada tara, serta Faisal Amirullah yang selalu memberikan perhatian, kesabaran, dan semangat kepada penulis. Semoga Allah Swt selalu menyertai langkahnya dalam menggapai kesuksesan di dunia dan akhirat.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah Swt. atas rahmat, nikmat, serta karunia-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Shalawat dan salam semoga senantiasa tercurahkan kepada Rasulullah Muhammad Saw. yang telah menuntun umat manusia dari zaman jahiliyah menuju zaman ilmiah.

Selanjutnya penulis ucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu serta membimbing penulis dalam penyelesaian skripsi ini. Untuk itu penulis ucapkan banyak terima kasih terutama kepada:

1. Prof. Dr. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si, selaku dosen pembimbing yang telah sabar meluangkan waktunya untuk memberikan bimbingan, nasihat, dan arahan yang terbaik kepada penulis selama penyelesaian skripsi ini.
5. Dr. H. Ahmad Barizi, MA, selaku dosen pembimbing keagamaan yang telah memberikan saran dan membimbing penulis dalam penyelesaian skripsi ini.

6. Dr. H. Turmudi, M.Si, Ph.D, selaku dosen wali yang telah memberikan motivasi dan bimbingan selama kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
7. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
8. Kedua orang tua penulis, bapak Sumarto, S.Ag, M.Pd, dan ibu Suhartini yang selalu memberikan doa, semangat, serta motivasi kepada penulis sampai saat ini.
9. Adik M. Khoirul Mun'im, Ummi Alfiyani, dan kakak Rini Sumarni, Jamilatur Rizkiah, serta Faisal Amirullah yang selalu memberikan dukungan, motivasi, serta semangat kepada penulis.
10. Seluruh teman-teman Matematika khususnya angkatan 2012 yang telah memberikan dukungan dan semangat luar biasa bersama-sama dalam mengarungi roda pembelajaran untuk meraih mimpi.
11. Teman dan adik-adik kamar Asrama Al-Ikhsan khususnya Ziarotul Fauziyah, Hindun Wahyuni, Desiy Arifah, Eka Yuniar Rahmayani, Qurrota A'yun, Fitria, Ariati, dan Juhairiah yang telah memberi semangat, bantuan serta kasih sayangnya kepada penulis. Beserta semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu, penulis ucapkan banyak terima kasih atas bantuannya.

Semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat dan wawasan yang lebih luas bagi penulis dan pembaca. Amin.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, Desember 2016

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PENGAJUAN	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	
HALAMAN MOTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	x
DAFTAR TABEL	xii
DAFTAR GAMBAR	xiii
ABSTRAK	xiv
ABSTRACT	xv
ملخص	xvi
BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	4
1.3 Tujuan Penelitian	5
1.4 Manfaat Penelitian	5
1.5 Batasan Masalah	5
1.6 Metode Penelitian	6
1.7 Sistematika Penulisan	6
BAB II KAJIAN PUSTAKA	
2.1 Gelombang Permukaan Air dengan Hambatan	8
2.2 Penelitian Terdahulu.....	10
2.3 Deret Taylor untuk Penurunan Skema FTCS	12
2.4 Konvergensi.....	16
2.5 Kestabilan Numerik.....	16
2.6 Analisis Konsistensi	17
2.7 Gelombang dalam Perspektif Al-Quran	17

BAB III PEMBAHASAN

3.1 Diskritisasi Persamaan	21
3.2 Analisis Konvergensi	27
3.3 Kestabilan Skema Implisit FTCS.....	28
3.4 Analisis Konsistensi.....	37
3.5 Simulasi dan Interpretasi Hasil	45
3.6 Gelombang Air dalam Al-Quran dan Maknanya dalam Studi Matematis.....	53

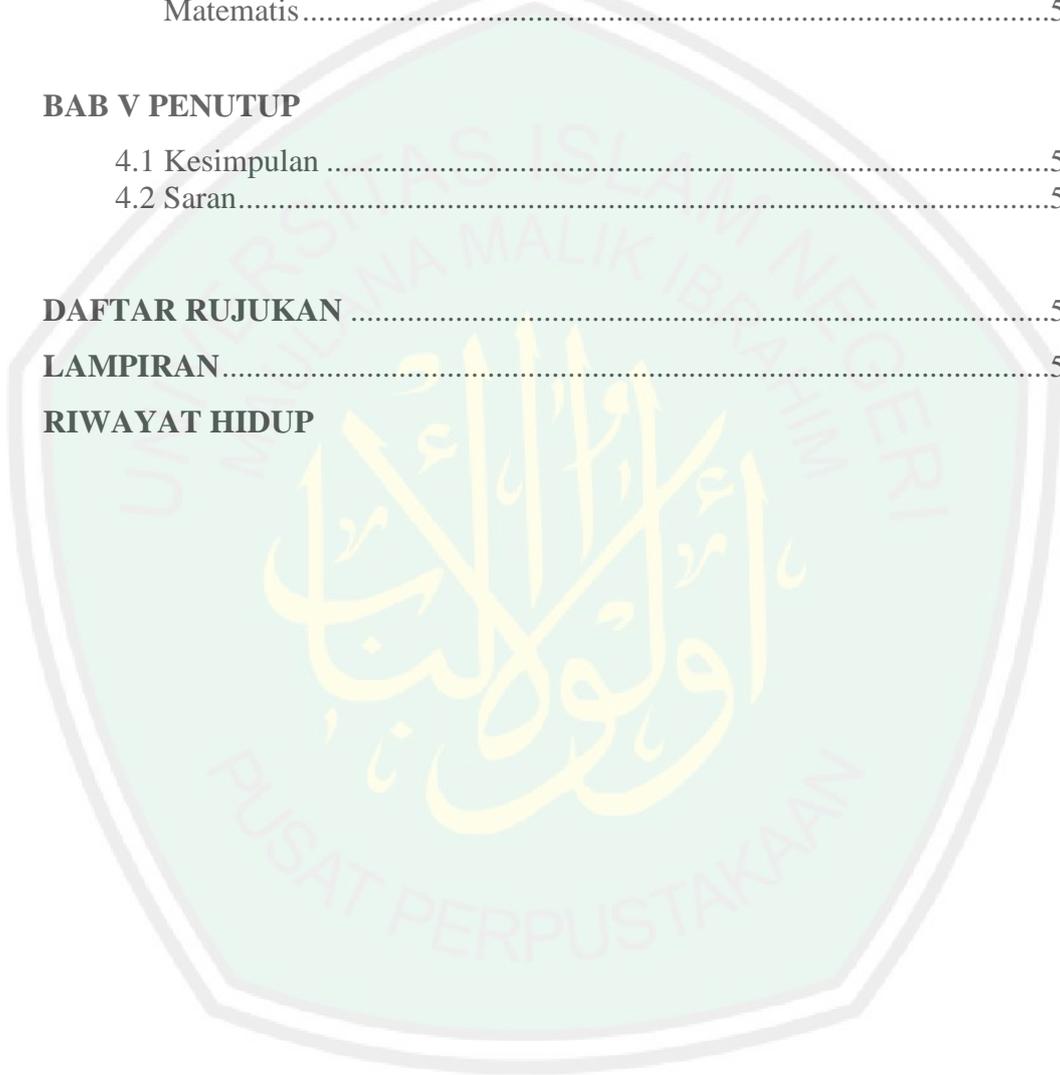
BAB V PENUTUP

4.1 Kesimpulan	57
4.2 Saran.....	57

DAFTAR RUJUKAN	58
-----------------------------	----

LAMPIRAN	59
-----------------------	----

RIWAYAT HIDUP



DAFTAR TABEL

- Tabel 3.1 Nilai *Error* Maksimum untuk $\eta(x,t)$ pada $t \in [0,30]$ dan $x \in [0,5]$ dengan $\Delta x \rightarrow 0$ dan $\Delta t = 0,0258$ 44
- Tabel 3.2 Nilai *Error* Maksimum untuk $\eta(x,t)$ pada $t \in [0,30]$ dan $x \in [0,5]$ dengan $\Delta t \rightarrow 0$ dan $\Delta x = 0,1$ 45



DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Skema Aliran Gelombang	9
Gambar 2.2	Simulasi Pemecah Gelombang	10
Gambar 2.3	Ilustrasi Gelombang Permukaan dengan Pemecah Gelombang.....	11
Gambar 3.1	Stensil Skema Implisit FTCS Persamaan (3.1a).....	23
Gambar 3.2	Stensil Skema Implisit FTCS Persamaan (3.1b).....	24
Gambar 3.3	Simulasi Gelombang Permukaan Air Melalui Pemecah Gelombang Ketika $d - 1 = 0,5, k = 0,3$	51
Gambar 3.4	Simulasi Gelombang Permukaan Air Melalui Pemecah Gelombang Ketika $d - 1 = 0,5, k = 0,5$	52

ABSTRAK

Khairunnisa', Ana. 2016. **Solusi Numerik Model Gelombang Permukaan Melalui Pemecah Gelombang Berupa Balok Berpori Menggunakan Metode Beda Hingga Skema Implisit *Forward Time Central Space***. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si (II) Dr. H. Ahmad Barizi, M.A

Kata Kunci: solusi numerik, model gelombang, metode beda hingga, skema implisit FTCS.

Penelitian ini membahas tentang solusi numerik dari model gelombang permukaan air saat melalui pemecah gelombang berupa balok berpori. Metode yang digunakan dalam mencari solusi numerik adalah metode beda hingga skema implisit *forward time central space* (FTCS) yang merupakan skema beda maju terhadap turunan pada waktu t dan beda pusat untuk turunan pada ruang x .

Langkah-langkah yang dilakukan dalam mencari solusi numerik pada penelitian ini adalah melakukan diskritisasi persamaan kemudian diskritisasi nilai awal dan kondisi batas dengan mensubstitusikan nilai t dan x sesuai syarat awal dan syarat batasnya. Selanjutnya, persamaan hasil diskritisasi diubah menjadi bentuk matriks untuk mencari nilai u dan η . Berikutnya dilakukan analisis kestabilan dan analisis konsistensi untuk mengetahui solusi yang diperoleh stabil dan konsisten sebagai syarat dari kekonvergenan solusi numerik yang digunakan. Setelah itu mensimulasikan hasil dan melakukan interpretasi grafik.

Hasil simulasi yang diperoleh menjelaskan adanya perubahan amplitudo pada gelombang permukaan air setelah melalui pemecah gelombang. Gelombang permukaan air akan diserap sehingga amplitudo mengalami penurunan sampai $\eta(x, t) = 0$. Ketika digunakan $d - 1 = 0,5$ terjadi penurunan amplitudo gelombang saat melalui pemecah gelombang. Untuk simulasi dengan amplitudo gelombang yang cukup besar, digunakan $k = 0,3$, sedangkan untuk amplitudo gelombang yang lebih kecil, dapat digunakan $k > 0,3$. Metode beda hingga skema implisit FTCS ini pun juga terbukti stabil tanpa syarat dengan orde *error* pemotongan pertama yakni Δt dan Δx^2 .

ABSTRACT

Khairunnisa', Ana. 2016. **Numerical Solution of Surface Wave Model Passing Over a Square Porous Breakwater Using Implicit Finite Difference Forward Time Central Space Method.** Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si. (II) Dr. H. Ahmad Barizi, M.A.

Keywords: numerical solution, model of waves, finite different method, implicit FTCS scheme.

This study discusses about numerical solution of water surface wave when through the breakwater from porous blocks. The method in determining numerical solution in this study is implicit finite difference method implementing *forward time central space* (FTCS) namely forward different schemes the derivative respect to time t and central different schemes the derivative respect to space x .

The steps in determining a numerical solution of this research are: discretization of equations, then discretization of initial values and boundary conditions by substituting the value of t and x corresponding initial conditions and boundary conditions. Furthermore, the results of the discretization equation is transformed into the matrix to find the value of u and η . The next step is analyzing the stability and consistency to find whether the obtained solution is stable and consistent as the terms of the convergence of the used numerical solution. After that simulating the results and interpreting graphs.

The obtained simulation results explain the reduction in the amplitude of the wave surface of the water after going through the breakwater. Waves on the surface of the water is absorbed so that the amplitude decreases to $\eta(x, t) = 0$. When $d - 1 = 0,5$ is used, a reduction in strength when wave amplitudes through the breakwater occurred. For simulation of wave with large amplitude, $k = 0,3$ is used. Whereas for smaller wave amplitude, $k > 0,3$ is used. Implicit finite difference method FTCS scheme was also proved to be unconditionally stable with first order truncation *error* is Δt and Δx^2 .

ملخص

خير النساء، أنا. 2016. حل عددي النموذج الموجة السطح اجتياز أكثر من ساحة المسامية كاسر الأمواج بطريقة الفرق المحدود الضمن *forward Time Central Space*. بحث جامعي. شعبة الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، الجامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج. المشرف: (I) آري كوسوما استوتي، الماجستير (II) الدكتور الحاج. أحمد بارزي، الماجستير.

الكلمات الرئيسية: الحل العددي، نموذج موجات، الطريقة الفرق المحدود، مخطط FTCS الضمني

تناول هذه الدراسة حول الحل العددي لموجة سطح الماء عندما عبر كاسر الأمواج من كتل مسامية. الطريقة في تحديد الحل العددي في هذه الدراسة هي طريقة الفرق المحدود الضمني تنفيذ *forward time central space* (FTCS) وهي مخططات مختلفة إلى الأمام احترام المشتقة لـ الوقت ومخططات مختلفة المركزية احترام المشتقة إلى الفضاء.

الخطوات في تحديد الحل العددي لهذا البحث هي: تفريد المعادلات، ثم تفريد من القيم الأولية وشروط الحدود عن طريق استبدال قيمة t و x الموافق الظروف الأولية وشروط الحدود. وعلاوة على ذلك، فإن نتائج المعادلة تفريد تتحول إلى مصفوفة للعثور على قيمة u و η . والخطوة التالية هي التحليل والاستقرار والثبات للعثور على ما إذا كان حل عليها مستقرة وبما تتماشى شروط التقارب بين الحل العددي المستخدمة. بعد أن محاكاة النتائج وتفسير الرسوم البيانية.

نتائج المحاكاة التي تم الحصول عليها تفسر الانخفاض في اتساع سطح موجة من المياه بعد أن يمر على كاسر الأمواج. يمتص موجات على سطح الماء بحيث يقلل من السعة إلى $\eta(x, t) = 0$ عندما يستخدم $d - 1 = 0,5$ ، انخفاض في قوة عندما وقعت سعة الموجة من خلال كاسر الأمواج. محاكاة موجة مع سعة كبيرة، أستعمل $k = 0,3$. في حين لاتساع موجة صغيرة، $k = 0,3$ يستخدم. وقد ثبت طريقة الفرق محدود مخطط FTCS الضمني أيضا أن تكون مستقرة دون قيد أو شرط مع أول خطأ أجل اقتطاع هو Δx^2 و Δt .

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Gelombang merupakan vibrasi merambat yang menjalar dalam suatu medium atau sekumpulan benda yang saling berinteraksi (Sutrisno, 1984). Contoh nyata gelombang dapat dilihat pada masalah gelombang permukaan air seperti ombak lautan di pantai. Gelombang pada permukaan air merupakan suatu proses terjadinya interaksi antara massa udara yang bergerak dan bertemu dengan lapisan permukaan air. Interaksi tersebut menghasilkan pola puncak dan lembah yang dipengaruhi oleh adanya energi dan momentum. Pada dasarnya gelombang permukaan air tidak hanya disebabkan oleh massa udara, namun gelombang ini juga bisa disebabkan oleh aktivitas-aktivitas lain yang ada pada dasar kedalaman air. Sutrisno (1984) menjelaskan, kecepatan rambatan dari gelombang permukaan air bergantung pada tegangan permukaan air, tekanan hidrostatik, kedalaman dasar, rapat masa, dan gaya berat. Gelombang yang terjadi pada permukaan air disebabkan oleh adanya beberapa hal, seperti tiupan angin atau terjadi getaran pada dasar air contohnya gelombang tsunami. Namun terbentuk dan terjadinya gelombang tersebut dengan berbagai macam sebab, menggambarkan adanya keseimbangan alam yang telah diatur sedemikian mungkin oleh Sang Pencipta.

Allah Swt. berfirman dalam al-Quran surat al-Baqarah/2:164 yaitu:

إِنَّ فِي خَلْقِ السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ وَآخْتِلَافِ اللَّيْلِ وَالنَّهَارِ وَالْفُلُوكِ الَّتِي تَجْرِي فِي الْبَحْرِ بِمَا يَنْفَعُ النَّاسَ وَمَا أَنْزَلَ اللَّهُ مِنَ السَّمَاءِ مِنْ مَّاءٍ فَأَحْيَا بِهِ الْأَرْضَ بَعْدَ مَوْتِهَا وَبَثَّ فِيهَا مِنْ كُلِّ دَابَّةٍ وَتَصْرِيفِ الرِّيْحِ وَالسَّحَابِ الْمُسَخَّرِ بَيْنَ السَّمَاءِ وَالْأَرْضِ لَآيَاتٍ لِّقَوْمٍ يَعْقِلُونَ ﴿١٦٤﴾

“Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi, silih bergantinya malam dan siang, bahtera yang berlayar di laut membawa apa yang berguna bagi manusia, dan apa yang Allah Swt. turunkan dari langit berupa air, lalu dengan air itu Allah Swt. hidupan bumi sesudah mati (kering) nya dan Allah Swt. sebarkan di bumi itu segala jenis hewan, dan pengisaran angin dan awan yang dikendalikan antara langit dan bumi; sesungguhnya (terdapat) tanda-tanda (keesaan dan kebesaran Allah Swt.) bagi kaum yang memikirkan”(QS. Al-Baqarah/2:164).

Menurut Katsir (2009) dijelaskan bahwa pada surat al-Baqarah/2:164 di atas, Allah Swt. berfirman “sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi” dengan segala macam hal yang terkandung di dalamnya merupakan satu kesatuan yang tidak dapat dipisahkan. Secara keseluruhan saling membutuhkan, dan saling melengkapi kekurangannya. Semua kejadian yang ada di alam dan apa saja yang ada di dalamnya, saling melengkapi sehingga dapat disebut alam secara keseluruhan. Hal ini merupakan bukti-bukti jelas yang menunjukkan keesaan Allah Swt.. Termasuk terjadinya gelombang pada permukaan air yang disebabkan oleh berbagai macam faktor dan masalah-masalah yang ditimbulkannya, yang merupakan satu kesatuan yang tidak dapat dipisahkan. Pada umumnya masalah yang sering terjadi pada gelombang permukaan air adalah kekuatan gelombang permukaan yang menyebabkan gelombang tersebut menjadi tidak aman karena memiliki amplitudo yang cukup besar.

Wiryanto (2010) melakukan suatu penelitian tentang bagaimana cara mengurangi kekuatan gelombang pada permukaan air laut menggunakan pemecah gelombang yang berupa balok berpori. Hal pertama yang dilakukan dalam penelitian tersebut adalah membentuk model gelombang permukaan air yang melalui pemecah gelombang berupa balok berpori. Model tersebut dibentuk dengan menggunakan persamaan-persamaan pengatur gelombang permukaan yang melalui balok berpori yaitu persamaan kontinuitas, persamaan momentum,

potensial kecepatan gelombang, fluida dalam media berpori, persamaan Laplace dan Bernoulli dalam media fluida dan media berpori, serta kondisi batas kinematik dan dinamik pada permukaan fluida. Model yang dihasilkan hampir menyerupai dengan persamaan air dangkal. Pada prosedur selanjutnya, Wiryanto (2010) mencari solusi numerik dari model yang telah terbentuk. Pemecahan dari solusi numerik pada model tersebut dilakukan dengan metode beda hingga prediktor korektor skema implisit. Hasil dari penelitian yang dilakukan menjelaskan amplitudo gelombang setelah melalui pemecah gelombang mengalami penurunan. Atenuasi atau pelemahan kekuatan gelombang tergantung pada jumlah pemecah gelombang dan ketinggian dari pemecah gelombang. Dalam penelitian ini penulis akan menggunakan kembali model Wiryanto (2010) dan selanjutnya mencari solusi numerik menggunakan metode beda hingga skema implisit *forward time central space* (FTCS).

Metode beda hingga implisit FTCS merupakan salah satu pendekatan yang dapat digunakan untuk menyelesaikan berbagai tipe persamaan diferensial. Skema FTCS merupakan pendekatan numerik beda maju terhadap waktu dan beda pusat terhadap ruang. Penyelesaian persamaan tersebut dilakukan dengan diskritisasi persamaan dengan syarat awal dan kondisi batas, kemudian menentukan kestabilan dari skema implisit FTCS. Strauss (1992) menjelaskan metode beda hingga adalah suatu metode yang didasarkan pada ekspansi deret Taylor. Salah satu pendekatan dengan metode beda hingga adalah menggunakan skema implisit. Skema implisit mempunyai kelebihan yakni skema tersebut stabil tanpa syarat. Langkah waktu Δt dapat diambil sembarang (besar) tanpa menimbulkan ketidakstabilan (Triadmodjo, 2002).

Kestabilan merupakan kondisi perlu dan cukup agar suatu persamaan menghasilkan solusi yang konvergen. Suatu sistem disebut stabil jika sistem tersebut akan tetap dalam keadaan diam atau berhenti kecuali jika dirangsang (dieksitasi oleh suatu masukan dan akan kembali dalam keadaan diam jika eksitasi tersebut dihilangkan). Sebuah skema beda hingga dikatakan stabil jika *error* yang terjadi pada satu perhitungan *time step* tidak menyebabkan peningkatan *error* pada iterasi selanjutnya. Dalam analisis numerik, analisis stabilitas *von Neumann* atau juga dikenal dengan analisis stabilitas *Fourier* adalah sebuah prosedur yang digunakan untuk memeriksa kestabilan skema beda hingga yang diaplikasikan pada persamaan diferensial parsial linier.

Dari paparan di atas, maka judul yang diangkat dalam penelitian ini adalah “Solusi Numerik Model Gelombang Permukaan Melalui Pemecah Gelombang Berupa Balok Berpori Menggunakan Metode Beda Hingga Skema Implisit *Forward Time Central Space*”.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah:

1. Bagaimana solusi numerik model gelombang permukaan melalui pemecah gelombang berupa balok berpori menggunakan metode beda hingga skema implisit FTCS?
2. Bagaimana kestabilan dari skema implisit FTCS?

1.3 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan rumusan masalah di atas, maka tujuan penelitian ini adalah:

1. Menentukan solusi numerik model gelombang permukaan melalui pemecah gelombang berupa balok berpori menggunakan metode beda hingga skema implisit FTCS.
2. Menentukan kestabilan dari skema implisit FTCS.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah memahami analisis solusi numerik model gelombang permukaan melalui pemecah gelombang berupa balok berpori menggunakan metode beda hingga skema implisit FTCS.

1.5 Batasan Masalah

Batasan masalah yang digunakan dalam penelitian ini adalah persamaan yang digunakan merupakan persamaan gelombang permukaan yang melalui pemecah gelombang berupa balok berpori, yaitu:

$$u_t + \eta_x = 0$$

$$u_t + \eta_x = (d - 1)R\eta_{xx} \quad (\text{Wiryanto, 2010}).$$

Dengan kondisi batas untuk u

$$u(0, t) = 0 \quad \text{dan} \quad u(L, t) = 0$$

kemudian untuk η

$$\eta(0, t) = 0 \quad \text{dan} \quad \eta(L, t) = 0$$

dan kondisi awal untuk u dan η adalah:

$$u(x, 0) = 0 \quad \text{dan} \quad \eta(x, 0) = \text{sech}(x)^2 \quad (\text{Lailiyah, 2015}).$$

1.6 Metode Penelitian

Dalam penelitian ini penulis menggunakan jenis penelitian kajian kepustakaan (*library research*). Langkah-langkah yang digunakan dalam menyelesaikan penelitian ini di antaranya:

1. Diberikan model gelombang permukaan melalui pemecah gelombang berupa balok berpori beserta nilai awal dan kondisi batas.
2. Melakukan diskritisasi model gelombang permukaan melalui pemecah gelombang berupa balok berpori dengan menggunakan metode beda hingga skema implisit FTCS.
3. Melakukan diskritisasi sarat awal dan kondisi batas dengan metode FTCS.
4. Menentukan kestabilan menggunakan metode *von Neumann*.
5. Menentukan analisis konsistensi untuk mencari *error* pemotongan pertama dari skema implisit FTCS.
6. Mensimulasikan hasil dari nilai η menggunakan program MATLAB serta melakukan interpretasi grafik terhadap hasil simulasi dari solusi numerik model gelombang permukaan melalui pemecah gelombang berupa balok berpori.

1.7 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan digunakan untuk mempermudah dalam memahami intisari dari penelitian ini. Sistematika yang digunakan dalam skripsi ini di antaranya:

Bab I Pendahuluan

Bagian ini berisi tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Bab ini menjelaskan tentang teori-teori yang mendukung pembahasan, yang meliputi, gelombang permukaan air dengan hambatan, penelitian terdahulu, deret Taylor untuk penurunan skema FTCS, konvergensi, kestabilan numerik, analisis konsistensi dan gelombang dalam perspektif al-Quran.

Bab III Pembahasan

Pada bab ini berisi tentang penguraian langkah-langkah yang disebut dalam metode penelitian.

Bab IV Penutup

Bab ini terdiri atas kesimpulan dan saran-saran yang berkaitan dengan permasalahan yang dikaji.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Gelombang Permukaan Air dengan Hambatan

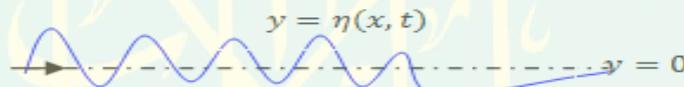
Gelombang adalah suatu vibrasi dari keadaan setimbang yang bergerak dari satu tempat ke tempat lain (Sutrisno,1984). Sistem gelombang mempunyai fungsi yang menggambarkan perpindahan satu partikel dalam medium. Fungsi tersebut tergantung pada posisi dan waktu (dimensi ruang dan waktu). Salah satu wujud gelombang yang sering ditemui adalah gelombang air laut.

Gelombang pada permukaan air laut merupakan suatu proses terjadinya interaksi antara massa udara yang bergerak dan bertemu dengan lapisan permukaan air. Interaksi tersebut menghasilkan pola puncak dan lembah yang dipengaruhi oleh adanya energi dan momentum. Pada dasarnya gelombang permukaan air tidak hanya disebabkan oleh massa udara, namun gelombang ini juga bisa disebabkan oleh aktivitas-aktivitas lain yang ada pada dasar kedalaman air (Sutrisno, 1984).

Gelombang yang terjadi di laut sebenarnya dapat dibedakan menjadi beberapa jenis atau tipe gelombang. Perbedaan jenis atau tipe gelombang ini berdasarkan gaya yang membangkitkannya. Gelombang yang terjadinya karena dibangkitkan oleh angin disebut dengan gelombang angin. Angin yang bertiup di permukaan laut selama waktu tertentu, baik angin yang bertiup ke arah darat maupun angin yang bertiup ke arah laut akan menimbulkan gelombang. Gelombang angin ini termasuk jenis gelombang pendek, karena besarnya periode gelombang ini adalah mulai beberapa detik sampai dengan beberapa menit.

Gelombang pasang surut atau yang sering disebut juga dengan gelombang pasut, merupakan gelombang yang terjadi karena disebabkan oleh gaya tarik-menarik benda-benda langit, terutama matahari dan bulan. Gelombang ini termasuk jenis gelombang panjang, karena periode gelombangnya adalah dari beberapa jam sampai dengan beberapa tahun. Gelombang tsunami adalah gelombang yang terjadi karena adanya pergerakan massa air di dasar laut, yang dapat disebabkan oleh letusan gunung berapi atau gempa yang terjadi di laut (Zakariah, 2009).

Gelombang dapat menimbulkan energi yang mampu mempengaruhi profil pantai. Selain itu gelombang juga menimbulkan arus dan transpor sedimen dalam arah tegak lurus maupun sepanjang pantai. Serta menyebabkan gaya-gaya yang bekerja pada bangunan pantai. Berikut adalah skema aliran gelombang.



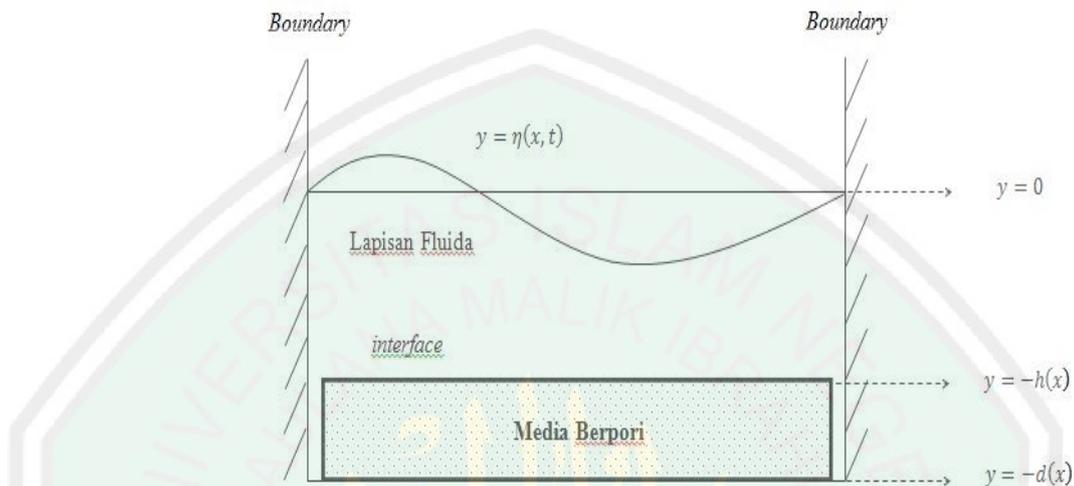
Gambar 2.1 Skema Aliran Gelombang

$\eta(x, t)$ merupakan fluktuasi permukaan air terhadap permukaan air yang diam $\eta = a \cos(kx - \sigma t)$ (Lailiyah, 2015).

Kecepatan rambat gelombang pada permukaan air banyak menimbulkan masalah yang serius. Salah satunya adalah kekuatan gelombang permukaan air dengan amplitudo yang cukup besar dapat menyebabkan gelombang menjadi tidak aman. Untuk mengantisipasi kekuatan gelombang, diletakkan suatu hambatan untuk mengurangi amplitudo dari gelombang permukaan air. Hambatan tersebut berupa pemecah gelombang.

Pemecah gelombang atau dalam bahasa Inggris *breakwater* adalah prasarana yang dibangun untuk memecahkan ombak atau gelombang air di laut dengan menyerap sebagian energi gelombang (Anas, 2014). Pemecah gelombang

digunakan untuk mengendalikan abrasi yang mengerus pantai. Dalam hal ini pemecah gelombang yang dimaksud berupa balok berpori. Bentuk dari simulasi pemecah gelombang ini dapat dilihat pada gambar berikut:



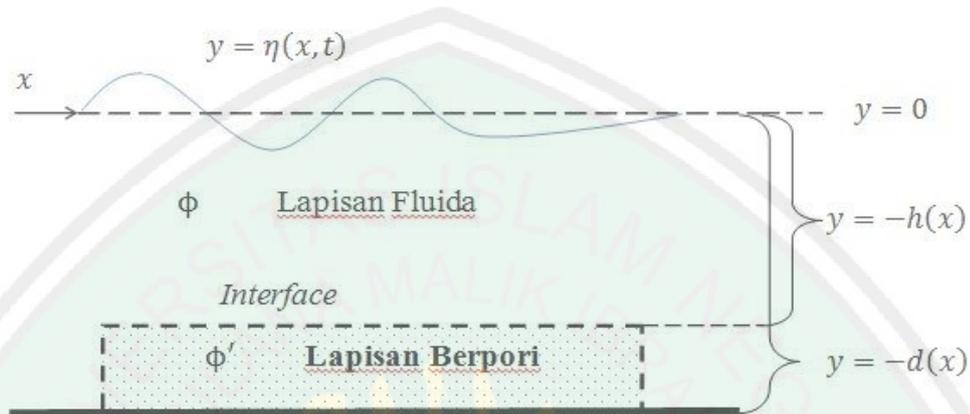
Gambar 2.2 Simulasi Pemecah Gelombang

Dari simulasi pada gambar di atas, media berpori diletakkan pada dasar saluran permukaan air. Hal ini bertujuan untuk mengurangi cepat rambat gelombang pada permukaan air. Gelombang yang melewati media berpori diserap sehingga aliran gelombang mengalami gangguan yang mempengaruhi kecepatan gelombang. Amplitudo yang ditimbulkan oleh gangguan tersebut menjadi berkurang sehingga gelombang permukaan air menjadi lebih aman.

2.2 Penelitian Terdahulu

Penelitian masalah gelombang permukaan air ini pernah dilakukan oleh Wiryanto (2010). Penelitian tersebut membahas tentang bagaimana merancang suatu pemecah gelombang untuk mengurangi kekuatan gelombang sehingga gelombang menjadi aman saat mendekati pantai. Dari penelitian yang dilakukan, diperoleh model gelombang permukaan yang melalui sebuah pemecah gelombang. Model tersebut berupa sistem persamaan diferensial parsial linier

yang dapat dikategorikan sebagai persamaan gelombang permukaan air yang melalui pemecah gelombang berupa balok berpori. Adapun rumusan dari masalah yang diteliti oleh Wiryanto (2010) diilustrasikan pada gambar berikut :



Gambar 2.3 Ilustrasi Gelombang Permukaan dengan Pemecah Gelombang

Lapisan berpori terbentang pada dasar saluran dan terendam oleh fluida yang ideal. Pori-pori pada lapisan menyerap cairan dan lapisan fluida terletak di atasnya. Lapisan berpori ditandai dengan konduktivitas hidrolis k yang merupakan kecepatan partikel fluida dalam media berpori. Lapisan fluida memiliki kedalaman $y = -h(x)$ yakni dari permukaan gelombang sampai *interface*, dan kedalaman saluran dari permukaan hingga dasar saluran sebesar $y = -d(x)$. Aliran fluida diasumsikan *irrotational* dan untuk lapisan fluida digunakan fungsi potensial ϕ , dan ϕ' untuk fluida dalam media berpori. Digunakan persamaan $\phi' = -k \left(\frac{y+p}{g\rho} \right)$, dengan p, ρ dan g menunjukkan tekanan, kepadatan dan percepatan gravitasi. Ketebalan media berpori pada dasar saluran sebesar $y = -d(x) + h(x)$ dengan $-d(x) > -h(x)$.

Adapun model persamaan gelombang permukaan air yang melalui pemecah gelombang berupa balok berpori yang digunakan adalah sebagai berikut:

$$u_t + \eta_x = 0 \quad (2.1)$$

$$\eta_t + u_x = (d - 1)R\eta_{xx} \quad (2.2)$$

Dengan kondisi awal beserta parameter-parameternya yaitu:

$$\eta(x, 0) = \operatorname{sech}(x)^2 \quad u(x, 0) = 0$$

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{\sqrt{gd}} \quad g = 10$$

$$d = 1,5 \quad k = 0,3$$

$$\lambda = 39,4 \quad R = \frac{k\sqrt{gh}}{g\lambda}$$

dengan $\eta(x, t)$ adalah ketinggian permukaan fluida, $u(x, t)$ adalah kecepatan rata-rata pada aliran fluida, R adalah bilangan *Reynold* yang menjelaskan nilai rata-rata beberapa parameter untuk transisi aliran fluida, d merupakan ketebalan media berpori, λ dan k adalah kuantitas fisik yang mewakili panjang gelombang dan amplitudo gelombang (Lailiyah, 2015).

2.3 Deret Taylor untuk Penurunan Skema FTCS

Deret Taylor merupakan dasar untuk menyelesaikan masalah dalam metode numerik, terutama penyelesaian persamaan diferensial (Triadmodjo, 2002). Chapra dan Canale (2010) menjabarkan bentuk deret Taylor untuk fungsi multivariabel sebagai berikut:

Misalkan diberikan fungsi $u(x + \Delta x, t)$, $u(x - \Delta x, t)$, $u(x, t + \Delta t)$, $u(x, t - \Delta t)$

diaproksimasi ke dalam deret Taylor di sekitar $u(x, t)$ sebagai berikut:

$$u(x + \Delta x, t) = u(x, t) + u_x(x, t) \frac{\Delta x}{1!} + u_{xx}(x, t) \frac{\Delta x^2}{2!} + u_{xxx}(x, t) \frac{\Delta x^3}{3!} \quad (2.3)$$

+ ...

$$u(x - \Delta x, t) = u(x, t) - u_x(x, t) \frac{\Delta x}{1!} + u_{xx}(x, t) \frac{\Delta x^2}{2!} - u_{xxx}(x, t) \frac{\Delta x^3}{3!} \quad (2.4)$$

+ ...

$$u(x, t + \Delta t) = u(x, t) + u_t(x, t) \frac{\Delta t}{1!} + u_{tt}(x, t) \frac{\Delta t^2}{2!} + u_{ttt}(x, t) \frac{\Delta t^3}{3!} \quad (2.5)$$

+ ...

$$u(x, t - \Delta t) = u(x, t) - u_t(x, t) \frac{\Delta t}{1!} + u_{tt}(x, t) \frac{\Delta t^2}{2!} - u_{ttt}(x, t) \frac{\Delta t^3}{3!} \quad (2.6)$$

+ ...

Turunan hampiran pertama terhadap x untuk beda maju, beda mundur dan beda pusat dapat dilakukan dengan menggunakan ekspansi deret Taylor dari persamaan (2.3), (2.4), (2.5), dan (2.6) yang dipotong sampai orde tertentu. Turunan hampiran pertama terhadap x untuk beda pusat dapat dilakukan dengan mengurangkan persamaan (2.3) dengan persamaan (2.4), yakni:

$$\begin{aligned} u(x + \Delta x, t) - u(x - \Delta x, t) = & \\ \left(u(x, t) + u_x(x, t) \frac{\Delta x}{1!} + u_{xx}(x, t) \frac{\Delta x^2}{2!} + u_{xxx}(x, t) \frac{\Delta x^3}{3!} + \dots \right) - & \\ \left(u(x, t) - u_x(x, t) \frac{\Delta x}{1!} + u_{xx}(x, t) \frac{\Delta x^2}{2!} - u_{xxx}(x, t) \frac{\Delta x^3}{3!} + \dots \right) & \end{aligned} \quad (2.7)$$

Sehingga diperoleh:

$$u(x + \Delta x, t) - u(x - \Delta x, t) = 2u_x(x, t) \frac{\Delta x}{1!} - 2u_{xxx}(x, t) \frac{\Delta x^3}{3!} + \dots \quad (2.8)$$

Maka, diperoleh turunan pertama dari persamaan (2.8) sebagai berikut:

$$u_x(x, t) = \frac{u(x + \Delta x, t) - u(x - \Delta x, t)}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x)^3 \quad (2.9)$$

dalam hal ini, $\mathcal{O}(\Delta x)^3 = 2u_{xxx}(x, t) \frac{\Delta x^3}{3!}$

Jika digunakan indeks subskrip j untuk menyatakan titik diskrit pada arah x dan superskrip n untuk menyatakan titik diskrit pada arah t , maka persamaan (2.9) dapat ditulis:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} \quad (2.10)$$

Sedangkan turunan hampiran kedua terhadap x untuk beda pusat dapat dilakukan dengan menjumlahkan persamaan (2.3) dengan persamaan (2.4), yakni:

$$\begin{aligned} u(x + \Delta x, t) + u(x - \Delta x, t) = & \\ \left(u(x, t) + u_x(x, t) \frac{\Delta x}{1!} + u_{xx}(x, t) \frac{\Delta x^2}{2!} + u_{xxx}(x, t) \frac{\Delta x^3}{3!} + \dots \right) + & \quad (2.11) \\ \left(u(x, t) - u_x(x, t) \frac{\Delta x}{1!} + u_{xx}(x, t) \frac{\Delta x^2}{2!} - u_{xxx}(x, t) \frac{\Delta x^3}{3!} + \dots \right) & \end{aligned}$$

diperoleh hasil:

$$u(x + \Delta x, t) + u(x - \Delta x, t) = 2u(x, t) - 2u_{xx}(x, t) \frac{\Delta x^2}{2!} + \dots \quad (2.12)$$

Maka, turunan kedua dari persamaan (2.12) sebagai berikut:

$$u_{xx}(x, t) = \frac{u(x + \Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x - \Delta x, t)}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x)^4 \quad (2.13)$$

Dalam hal ini, $\mathcal{O}(\Delta x)^4 = 2u_{xxxx}(x, t) \frac{\Delta x^4}{4!}$

Jika digunakan indeks subskrip j untuk menyatakan titik diskrit pada arah x dan superskrip n untuk menyatakan titik diskrit pada arah t , maka persamaan (2.13) dapat ditulis:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \quad (2.14)$$

Untuk mengetahui aproksimasi turunan pertama terhadap t untuk beda maju diperoleh dengan cara berikut ini.

Digunakan ekspansi deret Taylor dari persamaan (2.5) yang dipotong sampai orde satu, yakni:

$$u(x, t + \Delta t) = u(x, t) + u_t(x, t) \frac{\Delta t}{1!} \quad (2.15)$$

maka diperoleh turunan pertama beda maju terhadap waktu sebagai berikut:

$$u_t(x, t) = \frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t} \quad (2.16)$$

Jika digunakan indeks subskrip j untuk menyatakan titik diskrit pada arah x dan superskrip n untuk menyatakan titik diskrit pada arah t , maka persamaan (2.16) dapat ditulis:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \quad (2.17)$$

Dalam analisis numerik, metode FTCS adalah metode beda hingga yang umum digunakan pada pemecahan numerik persamaan diferensial. Metode beda hingga merupakan metode yang sering digunakan dalam menyelesaikan masalah-masalah persamaan diferensial biasa maupun persamaan diferensial parsial, yang didasarkan pada ekspansi deret Taylor (Strauss, 1992). Metode beda hingga FTCS merupakan metode yang menggunakan beda hingga maju dalam waktu dan beda hingga pusat dalam ruang. Sehingga bentuk umum dari skema FTCS adalah:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} \quad (2.18)$$

Karena dalam penelitian ini digunakan implisit FTCS, maka bentuk implisit dari skema FTCS adalah:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} = 0 \quad (2.19)$$

2.4 Konvergensi

Candra (2011) menyebutkan bahwa kesuksesan solusi numerik diukur berdasarkan kriteria konvergensi, konsistensi, serta stabilitas. Konvergensi berhubungan dengan besarnya penyimpangan solusi pendekatan oleh metode numerik terhadap solusi eksak. Kriteria konvergen dipahami sebagai kriteria dimana solusi metode numerik merupakan solusi pendekatan persamaan diferensial parsial (PDP), jika Δx dan Δt mendekati 0.

2.5 Kestabilan Numerik

Istilah stabilitas dalam perhitungan numerik memiliki pengertian bahwa jawaban yang diperoleh secara terus menerus tergantung pada data dan metode yang dipakai (Djojodihardjo, 2000). Sebuah metode dikatakan tidak stabil jika kesalahan pembulatan tumbuh makin besar akibat metode yang dipergunakan. Sebaliknya suatu metode disebut stabil jika metode tersebut akan tetap dalam keadaan diam atau berhenti kecuali jika dirangsang (dieksitasi oleh suatu fungsi masukan dan akan kembali dalam keadaan diam jika eksitasi tersebut dihilangkan).

Zauderer (2006) menyebutkan bahwa suatu permasalahan persamaan diferensial parsial dapat menjadi stabil dan tidak stabil. Suatu konsep kestabilan dan ketidakstabilan dapat diterapkan dalam skema beda hingga. Ketidakstabilan skema beda hingga menghasilkan kesalahan dalam aproksimasi numerik terhadap solusi nilai eksak dari masalah yang diberikan, sehingga solusi numerik kurang mendekati nilai analitiknya.

Dalam analisis numerik, analisis stabilitas *von Neumann* atau juga dikenal dengan analisis stabilitas *Fourier* adalah sebuah prosedur yang digunakan untuk memeriksa kestabilan skema beda hingga yang diaplikasikan pada persamaan diferensial parsial linier. Maka dapat dicari kestabilan dari persamaan beda dengan mensubstitusikan $u_j^n = \rho^n e^{iaj}$ ke dalam persamaan tersebut, yang mana superskrip i menunjukkan posisi, n menunjukkan waktu, j merupakan vektor, dan untuk semua a dalam interval $[0, 2\pi]$, dengan syarat perlu dan cukup dari stabilitas *von Neumann* adalah $|\rho| \leq 1$ (Zauderer, 2006).

2.6 Analisis Konsistensi

Candra (2011) menyatakan bahwa solusi kriteria konsistensi dengan sendirinya akan terpenuhi jika Δx dan Δt mendekati 0. Artinya skema dikatakan konsisten terhadap persamaan diferensial parsial (PDP), jika selisih antara persamaan tersebut dengan suku-suku *truncation error* pada PDP menuju nol jika lebar *grid* menuju nol. Kriteria konsistensi ini ditentukan dengan menggunakan deret Taylor.

2.7 Gelombang dalam Perspektif Al-Quran

Gelombang merupakan bentuk dari getaran yang merambat pada suatu medium. Dalam al-Quran telah disebutkan tentang gelombang, yaitu pada surat ar-Ruum/30:46 yang isinya:

وَمِنْ آيَاتِهِ أَنْ يُرْسِلَ الرِّيحَ مُبَشِّرَاتٍ لِيُذِيقَكُمْ مِنْ رَحْمَتِهِ وَلِتَجْرِيَ الْفُلُكُ بِأَمْرِهِ وَلِتَبْتَغُوا مِنْ فَضْلِهِ وَلِعَلَّكُمْ تَشْكُرُونَ ﴿٤٦﴾

“Dan di antara tanda-tanda kekuasaan-Nya adalah bahwa Allah Swt. mengirimkan angin sebagai pembawa berita gembira dan untuk merasakan kepadamu sebagian dari rahmat-Nya dan supaya kapal-kapal dapat berlayar dengan perintah-Nya dan (juga) supaya kamu juga dapat mencari karunia-Nya; mudah-mudahan kamu bersyukur”(QS. Ar-Ruum/30:46).

Secara umum kata “angin” yaitu angin yang bertiup membawa awan untuk menurunkan hujan dan meniup layar dari kapal-kapal agar dapat berlayar di lautan. Kedekatan makna “angin” dalam ayat di atas dapat diartikan juga sebagai gelombang. Dalam Shihab (2002) ayat di atas berbicara tentang angin untuk menggambarkan nikmat Allah Swt. di darat dan di laut. Angin ada yang membawa manfaat dan ada juga yang mengakibatkan bencana. Manusia juga demikian, terdapat orang kafir dengan perbuatannya yang merusak dan mengakibatkan bencana sedangkan orang mukmin dengan amal shalehnya yang mengandung kemanfaatan.

Kata “*bi amrihi*” (atas perintah/izin-Nya) ditekankan oleh ayat tersebut untuk mengingatkan manusia betapa besar nikmat Allah Swt. yang dianugerahkan kepada mereka melalui kemampuan kapal dalam mengarungi samudra serta keselamatan selama perjalanan, dan bahwa Allah Swt. menentukan hukum-hukum alam yang memungkinkan manusia memanfaatkan lautan dengan segala isinya (Shihab, 2002).

Allah Swt. juga berfirman dalam al-Quran mengenai gelombang pada surat Luqman/31:32 yaitu:

وَإِذَا غَشِيَهُمْ مَوَّجٌ كَالظُّلَلِ دَعَوْا اللَّهَ مُخْلِصِينَ لَهُ الدِّينَ فَلَمَّا نَجَّوهُمْ إِلَى الْبَرِّ فَمِنْهُمْ مُّقْتَصِدٌ وَمَا يَجْحَدُ بِآيَاتِنَا إِلَّا كُلُّ خَتَّارٍ كَفُورٍ ﴿٣٢﴾

“Dan apabila mereka dilamun ombak yang besar seperti gunung, mereka menyeru Allah Swt. dengan memurnikan ketaatan kepada-Nya maka tatkala Allah Swt. menyelamatkan mereka sampai di daratan, lalu sebagian mereka tetap

menempuh jalan yang lurus. Dan tidak ada yang mengingkari ayat-ayat Kami selain orang-orang yang tidak setia lagi ingkar”(QS. Luqman/31:32).

Dalam Al-Maraghi (1989), dijelaskan bahwa apabila orang-orang musyrik yaitu mereka yang menyembah selain Allah Swt. berupa berhala-berhala, diliputi oleh ombak yang tinggi bagaikan gunung-gunung dan maut mengancam mereka dari segala penjuru. Sewaktu mereka sedang menaiki perahu (kapal), maka mereka berdoa kepada Allah Swt. seraya mengikhlaskan ketaatan kepada-Nya dan tidak menyekutukan-Nya. Maka ketika mereka selamat dari bahaya yang mengerikan, kemudian sesampainya di daratan. Sebagian dari mereka ada yang bersikap lurus dari perkataan dan perbuatan, dan ada pula yang mengingkarinya (Al-Maraghi, 1989). Hal ini dapat diketahui bahwa ombak setinggi gunung adalah salah satu bentuk gelombang air yang sangat dahsyat, dan memiliki kekuatan yang mampu menghancurkan manusia dan seluruh kehidupannya. Sedangkan Al-Qurthubi (2009) menjelaskan bahwa gelombang diserupakan dengan “لُطْلُلٌ” yang artinya gunung-gunung, karena gelombang datang sedikit demi sedikit dan saling menghantam satu sama lain.

Tidak hanya itu, kajian tentang gelombang permukaan air juga dijelaskan dalam al-Quran surat Huud/11:41-42 yaitu:

وَقَالَ أَرْكَبُوا فِيهَا بِسْمِ اللَّهِ حَمَلَهَا وَأَمْرًا سَلِيمًا ۖ إِنَّ رَبِّي لَغَفُورٌ رَحِيمٌ ﴿٤١﴾ وَهِيَ تَجْرِي بِهِمْ فِي مَوْجٍ كَالْجِبَالِ وَنَادَى نُوحٌ ابْنَهُ وَكَانَ فِي مَعْزِلٍ يَا بُنَيَّ أَرْكَبْ مَعَنَا وَلَا تَكُنْ مَعَ الْكَافِرِينَ ﴿٤٢﴾

“Naiklah kamu sekalian ke dalamnya dengan menyebut nama Allah Swt. di waktu berlayar dan berlabuhnya. “sesungguhnya Rabb-ku benar-benar maha pengampun lagi maha penyayang”. Dan bahtera itu berlayar membawa mereka dalam gelombang laksana gunung. Dan Nuh memanggil anaknya, “Hai anakku, naiklah (ke kapal) bersama kami dan janganlah kamu berada bersama orang-orang yang kafir”(QS. Huud/11:41-42).

Dijelaskan dalam Katsir (2009) bahwa sesungguhnya Allah Swt. berfirman seraya memberi kabar tentang Nabi Nuh a.s.. Allah Swt. berfirman kepada orang-orang yang diperintahkan membawa (naik) ke dalam perahu bersamanya. Karena hal tersebut berhubungan tentang pembalasan terhadap orang-orang kafir yang akan ditenggelamkan oleh gelombang air yang sangat besar hingga mampu membawa perahu yang berlayar di atas permukaan air yang (tingginya) melebihi semua daratan di bumi dan menutupi pucak-puncak gunung. Perahu itu berlayar di atas permukaan air dengan izin Allah Swt..

Berdasarkan penjelasan tentang gelombang pada ayat-ayat yang terdapat dalam al-Quran di atas, dapat diketahui bahwa gelombang yang terjadi atas izin Allah Swt. memiliki kekuatan atau amplitudo yang sangat kuat sehingga mampu menggerakkan benda-benda yang berada pada permukaannya, dan mampu menenggelamkannya juga. Dijelaskan juga bahwa gelombang datang sedikit demi sedikit dan saling menghantam satu sama lain.

BAB III

PEMBAHASAN

Pembahasan mengenai gelombang akan dilakukan dengan mencari solusi numerik menggunakan metode beda hingga implisit FTCS. Persamaan yang digunakan adalah persamaan gelombang permukaan air yang melalui pemecah gelombang berupa balok berpori. Langkah-langkah yang diambil dalam menyelesaikan persamaan tersebut adalah mendiskritisasi persamaan dengan syarat awal dan syarat batas menggunakan skema beda maju untuk turunan terhadap waktu t dan beda pusat untuk turunan terhadap ruang x . Kemudian menguji kestabilan dari skema yang digunakan menggunakan stabilitas *von Neumann* serta mencari *error* pemotongan pertama menggunakan analisis konsistensi.

3.1 Diskritisasi Persamaan

Persamaan gelombang permukaan air yang melalui pemecah gelombang berupa balok berpori dinyatakan pada persamaan (3.1a) dan (3.1b) yaitu:

$$u_t + \eta_x = 0 \tag{3.1a}$$

$$\eta_t + u_x = (d - 1)R\eta_{xx} \tag{3.1b}$$

dengan kondisi batas untuk u

$$u(0, t) = 0$$

$$u(L, t) = 0$$

kemudian untuk η

$$\eta(0, t) = 0$$

$$\eta(L, t) = 0$$

dan kondisi awal untuk u dan η adalah:

$$u(x, 0) = 0$$

$$\eta(x, 0) = \text{sech}(x)^2 \quad (\text{Lailiyah, 2015}).$$

Dengan $R = \frac{k\sqrt{gh}}{g\lambda}$ menjelaskan bilangan *Reynold* sebagai parameter transisi aliran fluida. Nilai g , h , dan λ pada penelitian ini merujuk pada Wiryanto (2010) yakni $g = 10$, $\lambda = 39,4$, dan $k = 0,3$, sedangkan nilai d yang digunakan adalah $d - 1 = 0,5$. Selanjutnya akan dijelaskan penyelesaian diskritisasi persamaan dan nilai awal beserta kondisi batas.

Persamaan (3.1a) dan (3.1b) didiskritisasikan dengan menggunakan metode beda hingga skema implisit FTCS, sehingga diperoleh diskritisasi persamaan sebagai berikut:

Pertama. Persamaan (3.1a) menghasilkan bentuk diskrit sebagai berikut:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{\eta_{j+1}^{n+1} - \eta_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} = 0 \quad (3.2)$$

Dengan mengelompokkan waktu $n + 1$ berada di ruas kiri dan waktu n pada ruas kanan, maka menghasilkan bentuk implisit FTCS yakni:

$$\frac{u_j^{n+1}}{\Delta t} + \frac{\eta_{j+1}^{n+1} - \eta_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} = \frac{u_j^n}{\Delta t} \quad (3.3)$$

Kedua ruas pada persamaan (3.3) dikalikan dengan Δt sehingga diperoleh:

$$u_j^{n+1} + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \eta_{j+1}^{n+1} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \eta_{j-1}^{n+1} = u_j^n \quad (3.4)$$

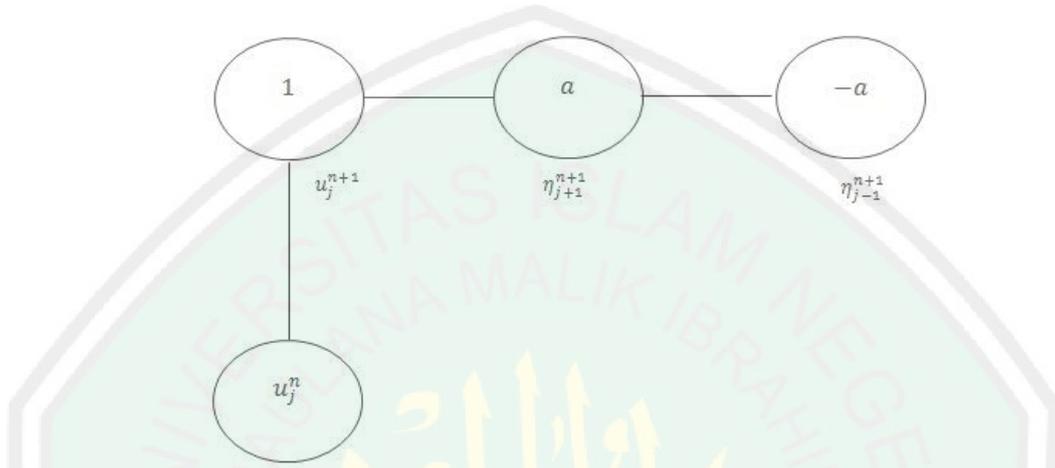
Persamaan (3.4) dapat disederhanakan menjadi persamaan berikut:

$$u_j^{n+1} + a\eta_{j+1}^{n+1} - a\eta_{j-1}^{n+1} = u_j^n \quad (3.5)$$

dengan

$$a = \frac{\Delta t}{2\Delta x} \quad (3.6)$$

Stensil bentuk diskrit dari persamaan (3.5) dengan metode implisit FTCS adalah sebagai berikut:



Gambar 3.1 Stensil Skema Implisit FTCS Persamaan (3.1a)

Kedua. Bentuk beda hingga untuk persamaan (3.1b) adalah sebagai berikut:

$$\frac{\eta_j^{n+1} - \eta_j^n}{\Delta t} + \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} = (d-1)R \left(\frac{\eta_{j+1}^{n+1} - 2\eta_j^{n+1} + \eta_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \right) \quad (3.7)$$

Dengan mengelompokkan waktu $n+1$ berada di ruas kiri dan waktu n pada ruas kanan, maka menghasilkan bentuk implisit FTCS yakni:

$$\frac{\eta_j^{n+1}}{\Delta t} + \frac{u_{j+1}^{n+1}}{2\Delta x} - \frac{u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} - \frac{(d-1)R}{\Delta x^2} (\eta_{j+1}^{n+1} - 2\eta_j^{n+1} + \eta_{j-1}^{n+1}) = \frac{\eta_j^n}{\Delta t} \quad (3.8)$$

Kedua ruas pada persamaan (3.8) dikalikan dengan Δt , maka menghasilkan persamaan:

$$\begin{aligned} \eta_j^{n+1} + \frac{\Delta t}{2\Delta x} u_{j+1}^{n+1} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} u_{j-1}^{n+1} - \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (d-1)R (\eta_{j+1}^{n+1} - 2\eta_j^{n+1} + \eta_{j-1}^{n+1}) \\ = \eta_j^n \end{aligned} \quad (3.9)$$

Sehingga bentuk sederhana dari persamaan (3.9) adalah:

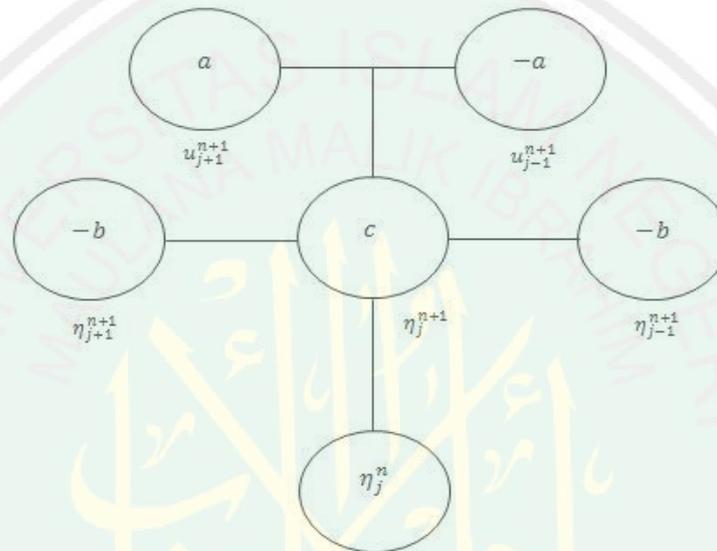
$$au_{j+1}^{n+1} - au_{j-1}^{n+1} - b\eta_{j+1}^{n+1} + (1+2b)\eta_j^{n+1} - b\eta_{j-1}^{n+1} = \eta_j^n \quad (3.10)$$

dengan

$$a = \frac{\Delta t}{2\Delta x}$$

$$b = \frac{\Delta t(d-1)R}{\Delta x^2}$$
(3.11)

Dimisalkan $(1 + 2b) = c$, maka stensil bentuk diskrit dari persamaan (3.11) dengan metode implisit FTCS adalah sebagai berikut:



Gambar 3.2 Stensil Skema Implisit FTCS Persamaan (3.1b)

Sehingga diperoleh bentuk diskrit persamaan gelombang permukaan air yang melalui pemecah gelombang berupa balok berpori pada persamaan (3.5) dan (3.10).

Hasil dari diskritisasi pada persamaan (3.5) dan (3.10) selanjutnya dimasukkan nilai awal dengan syarat:

$$u(x, 0) = u_j^1 = 0$$

$$\eta(x, 0) = \eta_j^1 = \text{sech}(x)^2$$

dan dengan kondisi batas yakni:

$$u(0, t) = 0 \rightarrow u_1^n = 0$$

$$\eta(0, t) = 0 \rightarrow \eta_1^n = 0$$

$$u(N, t) = 0 \rightarrow u_N^n = 0 \rightarrow u_6^n = 0$$

$$\eta(N, t) = 0 \rightarrow \eta_N^n = 0 \rightarrow \eta_6^n = 0$$

Substitusikan syarat awal untuk mencari nilai u dan nilai η yang belum diketahui. Nilai yang belum diketahui, akan dicari menggunakan nilai yang sudah diketahui sebelumnya. Karena suku dengan indeks terkecil adalah u_{j-1}^{n+1} maka $\forall n = 1, 2, 3, \dots, N - 1$ serta $\forall j = 2, 3, \dots, N - 1$. Untuk indeks j dimulai dari 2, karena jika dimulai dari 1 maka suku terkecil tersebut akan menjadi u_0^{n+1} . Hal ini akan memunculkan nilai di luar domain.

Oleh karena itu, dilakukan iterasi untuk $n = 1$, dan $j = 2, 3, \dots, N - 1$. Dimisalkan $N = 6$. Ketika $j = 2$, diperoleh bentuk persamaan (3.5) dan (3.10) sebagai berikut:

$$u_2^2 + a\eta_3^2 - a\eta_1^2 = u_2^1 \quad (3.12)$$

$$au_3^2 - au_1^2 - b\eta_3^2 + c\eta_2^2 - b\eta_1^2 = \eta_2^1 \quad (3.13)$$

Namun muncul masalah baru yaitu nilai u_1^2 dan η_1^2 merupakan nilai yang terdapat pada batas kiri, dikarenakan kondisi pada batas kiri sudah diketahui melalui proses diskritisasi kondisi batas. Maka hasil iterasi dari persamaan (3.12) dan (3.13) menjadi:

$$u_2^2 + a\eta_3^2 = u_2^1 + a\eta_1^2 \quad (3.14)$$

$$au_3^2 - b\eta_3^2 + c\eta_2^2 = au_1^2 + b\eta_1^2 + \eta_2^1 \quad (3.15)$$

Ketika $j = 3$, pada persamaan (3.5) dan persamaan (3.10) diperoleh:

$$u_3^2 + a\eta_4^2 - a\eta_2^2 = u_3^1 \quad (3.16)$$

$$au_4^2 - au_2^2 - b\eta_4^2 + c\eta_3^2 - b\eta_2^2 = \eta_3^1 \quad (3.17)$$

Ketika $j = 4$, pada persamaan (3.5) dan persamaan (3.10) diperoleh:

$$u_4^2 + a\eta_5^2 - a\eta_3^2 = u_4^1 \quad (3.18)$$

$$au_5^2 - au_3^2 - b\eta_5^2 + c\eta_4^2 - b\eta_3^2 = \eta_4^1 \quad (3.19)$$

Ketika $j = 5$, pada persamaan (3.5) dan persamaan (3.10) diperoleh:

$$u_5^2 + a\eta_6^2 - a\eta_4^2 = u_5^1 \quad (3.20)$$

$$au_6^2 - au_4^2 - b\eta_6^2 + c\eta_5^2 - b\eta_4^2 = \eta_5^1 \quad (3.21)$$

Namun kembali muncul masalah baru yaitu nilai u_6^2 dan η_6^2 merupakan nilai yang terdapat pada batas kanan, dikarenakan kondisi pada batas kanan juga sudah diketahui melalui proses diskritisasi kondisi batas. Maka hasil iterasi dari persamaan (3.20) dan (3.21) menjadi:

$$u_5^2 - a\eta_4^2 = u_5^1 - a\eta_6^2 \quad (3.22)$$

$$au_4^2 + c\eta_5^2 - b\eta_4^2 = -au_6^2 + \eta_5^1 + b\eta_6^2 \quad (3.23)$$

Sehingga dari persamaan (3.14), (3.15), (3.16), (3.17), (3.18), (3.19), (3.22), dan (3.23) jika diubah ke dalam bentuk persamaan matriks, diperoleh:

$$AX = B \quad (3.24)$$

dengan

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -a & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -a & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & c & -b & 0 & 0 \\ -a & 0 & a & 0 & -b & c & -b & 0 \\ 0 & -a & 0 & a & 0 & -b & c & -b \\ 0 & 0 & -a & 0 & 0 & 0 & -b & c \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} u_2^2 \\ u_3^2 \\ u_4^2 \\ u_5^2 \\ \eta_2^2 \\ \eta_3^2 \\ \eta_4^2 \\ \eta_5^2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} u_2^1 + a\eta_1^2 \\ u_3^1 \\ u_4^1 \\ u_5^1 - a\eta_6^2 \\ au_1^2 + b\eta_1^2 + \eta_2^1 \\ \eta_3^1 \\ \eta_4^1 \\ -au_6^2 + \eta_5^1 + b\eta_6^2 \end{bmatrix}$$

Karena nilai yang akan dicari berada pada matriks X , maka kedua ruas dikalikan dengan A^{-1} sehingga persamaan (3.24) menjadi:

$$(A^{-1}A)X = A^{-1}B \quad (3.25)$$

Diketahui bahwa $A^{-1}A = I$, maka:

$$X = A^{-1}B \quad (3.26)$$

Selanjutnya penyelesaian dilakukan menggunakan bantuan program MATLAB untuk memudahkan perhitungan.

3.2 Analisis Konvergensi

Dalam suatu teorema ekuivalensi *Lax Wendroff* menyatakan bahwa untuk suatu masalah nilai awal yang *well posed*, dan jika suatu persamaan konsistensi dan stabil, maka persamaan tersebut konvergen. Sehingga dapat disimpulkan bahwa kriteria konvergensi dengan sendirinya akan terpenuhi, jika dalam skema yang digunakan stabil dan konsisten. Dalam hal ini akan digunakan analisis stabilitas *von Neumann* yang mana syarat kestabilannya adalah $|\rho| \leq 1$. Oleh karena itu jika skema yang digunakan stabil dan konsisten maka konvergensi dari skema tersebut akan terpenuhi.

3.3 Kestabilan Skema Implisit FTCS

Sistem persamaan diskrit dengan skema implisit FTCS dibangun oleh persamaan (3.1a) dan persamaan (3.1b) yaitu terbentuk pada persamaan (3.5) dan (3.10) dengan bentuk:

$$u_j^{n+1} + a\eta_{j+1}^{n+1} - a\eta_{j-1}^{n+1} = u_j^n$$

$$au_{j+1}^{n+1} - au_{j-1}^{n+1} - b\eta_{j+1}^{n+1} + (2b + 1)\eta_j^{n+1} - b\eta_{j-1}^{n+1} = \eta_j^n$$

Analisis kestabilan untuk persamaan (3.5) dan (3.10) dikerjakan menggunakan asumsi:

$$u_j^n = \rho^n e^{i\alpha j} \quad \forall i = \sqrt{-1} \quad (3.27)$$

$$\eta_j^n = q^n e^{i\alpha j} \quad (3.28)$$

Sehingga persamaan (3.5) dan (3.10) dapat dinyatakan kembali sebagai berikut:

$$\rho^{n+1} e^{i\alpha j} + a q^{n+1} e^{i\alpha(j+1)} - a q^{n+1} e^{i\alpha(j-1)} = \rho^n e^{i\alpha j} \quad (3.29)$$

$$a \rho^{n+1} e^{i\alpha(j+1)} - a \rho^{n+1} e^{i\alpha(j-1)} - b q^{n+1} e^{i\alpha(j+1)} + (1 + 2b) q^{n+1} e^{i\alpha j} - b q^{n+1} e^{i\alpha(j-1)} = q^n e^{i\alpha j} \quad (3.30)$$

dengan bentuk sederhana:

$$\rho^{n+1} e^{i\alpha j} + a q^{n+1} (e^{i\alpha(j+1)} - e^{i\alpha(j-1)}) = \rho^n e^{i\alpha j} \quad (3.31)$$

$$a \rho^{n+1} (e^{i\alpha(j+1)} - e^{i\alpha(j-1)}) - b q^{n+1} (e^{i\alpha(j+1)} + e^{i\alpha(j-1)}) + (1 + 2b) q^{n+1} e^{i\alpha j} = q^n e^{i\alpha j} \quad (3.32)$$

Kedua ruas persamaan (3.31) dan (3.32) dibagi dengan faktor $e^{i\alpha j}$, maka diperoleh:

$$\rho^{n+1} + a q^{n+1} (e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}) = \rho^n \quad (3.33)$$

$$a \rho^{n+1} (e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}) - b q^{n+1} (e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}) + (1 + 2b) q^{n+1} = q^n \quad (3.34)$$

Karena $e^{\pm i\alpha} = \cos \alpha \pm i \sin \alpha$, maka persamaan (3.33) dan (3.34) dapat ditulis kembali sebagai berikut:

$$\rho^{n+1} + a q^{n+1}((\cos \alpha + i \sin \alpha) - (\cos \alpha - i \sin \alpha)) = \rho^n \quad (3.35)$$

$$a \rho^{n+1}((\cos \alpha + i \sin \alpha) - (\cos \alpha - i \sin \alpha)) -$$

$$b q^{n+1}((\cos \alpha + i \sin \alpha) + (\cos \alpha - i \sin \alpha)) + (1 + 2b)q^{n+1} = q^n \quad (3.36)$$

Dari persamaan (3.35) dan (3.36) diperoleh hasil:

$$\rho^{n+1} + a q^{n+1} (2i \sin \alpha) = \rho^n \quad (3.37)$$

$$a \rho^{n+1}(2i \sin \alpha) - b q^{n+1}(2 \cos \alpha) + (1 + 2b)q^{n+1} = q^n \quad (3.38)$$

dengan bentuk sederhana dari persamaan (3.37) dan (3.38) adalah sebagai berikut:

$$\rho^{n+1} + q^{n+1} (i 2a \sin \alpha) = \rho^n \quad (3.39)$$

$$\rho^{n+1}(i 2a \sin \alpha) - q^{n+1}(2b \cos \alpha - 2b - 1) = q^n \quad (3.40)$$

Jika dimisalkan

$$i 2a \sin \alpha = x \quad (3.41)$$

$$2b \cos \alpha - 2b - 1 = y \quad (3.42)$$

maka diperoleh:

$$\rho^{n+1} + q^{n+1}(x) = \rho^n \quad (3.43)$$

$$\rho^{n+1}(x) - q^{n+1}(y) = q^n \quad (3.44)$$

Selanjutnya persamaan (3.43) dan (3.44) diubah ke dalam bentuk matriks sehingga menjadi:

$$\begin{bmatrix} 1 & x \\ x & -y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho^{n+1} \\ q^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho^n \\ q^n \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

Dengan mendefinisikan

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x \\ x & -y \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

maka persamaan (3.46) menjadi:

$$A \begin{bmatrix} \rho^{n+1} \\ q^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho^n \\ q^n \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

Dengan mengalikan A^{-1} di kedua ruas, maka:

$$A^{-1} A \begin{bmatrix} \rho^{n+1} \\ q^{n+1} \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} \rho^n \\ q^n \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

Karena $A^{-1} A = 1$, maka persamaan (3.48) menjadi:

$$\begin{bmatrix} \rho^{n+1} \\ q^{n+1} \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} \rho^n \\ q^n \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

Sehingga untuk

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\text{adj } A) \quad (3.50)$$

dengan

$$\det A = |A| = -y - x^2 \quad (3.51)$$

diperoleh:

$$A^{-1} = \frac{1}{-y - x^2} \begin{bmatrix} -y & -x \\ -x & 1 \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

Sehingga

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-y}{-y - x^2} & \frac{-x}{-y - x^2} \\ \frac{-x}{-y - x^2} & \frac{1}{-y - x^2} \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

Berdasarkan uraian di atas, skema tersebut akan stabil jika:

$$\|A^{-1}\| \leq 1 \quad (3.54)$$

Sehingga untuk mencari nilai eigen dari A^{-1} didefinisikan:

$$|\lambda I - A^{-1}| = \left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{-y}{-y - x^2} & \frac{-x}{-y - x^2} \\ \frac{-x}{-y - x^2} & \frac{1}{-y - x^2} \end{bmatrix} \right| \quad (3.55)$$

Maka persamaan (3.55) menjadi:

$$|\lambda I - A^{-1}| = \left| \begin{bmatrix} \left(\frac{-y}{-y-x^2}\right) - \lambda & \frac{-x}{-y-x^2} \\ \frac{-x}{-y-x^2} & \left(\frac{1}{-y-x^2}\right) - \lambda \end{bmatrix} \right| \quad (3.56)$$

Selanjutnya persamaan (3.56) diselesaikan sehingga menjadi:

$$|\lambda I - A^{-1}| = \lambda^2 - \lambda \left(\frac{1}{-y-x^2}\right) + \lambda \left(\frac{y}{-y-x^2}\right) - \left(\frac{y}{y^2-2yx^2+x^4}\right) - \left(\frac{x^2}{y^2-2yx^2+x^4}\right) \quad (3.57)$$

dengan bentuk sederhana:

$$|\lambda I - A^{-1}| = \lambda^2 + \left(\frac{y-1}{-y-x^2}\right)\lambda + \frac{1}{-y-x^2} \quad (3.58)$$

Nilai eigen diperoleh dengan menyelesaikan:

$$\lambda^2 + \left(\frac{y-1}{-y-x^2}\right)\lambda + \frac{1}{-y-x^2} = 0 \quad (3.59)$$

Misalkan persamaan karakteristik pada persamaan (3.59) sebagai berikut:

$$A\lambda^2 + B\lambda + \Gamma = 0 \quad (3.60)$$

dengan

$$A = 1 \quad (3.61)$$

$$B = \left(\frac{y-1}{-y-x^2}\right) \quad (3.62)$$

$$\Gamma = \left(\frac{1}{-y-x^2}\right) \quad (3.63)$$

Sehingga solusi yang diperoleh dengan menggunakan rumus *abc* adalah:

$$\lambda_1 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4A\Gamma}}{2A} \quad (3.64)$$

dan

$$\lambda_2 = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4A\Gamma}}{2A} \quad (3.65)$$

Untuk mempermudah perhitungan, terlebih dahulu dilakukan substitusi persamaan (3.41) dan (3.42) ke dalam persamaan (3.62) dan (3.63) untuk memperoleh nilai B dan Γ , sehingga diperoleh:

$$B = \left(\frac{2b \cos \alpha - 2b - 1 - 1}{-2b \cos \alpha + 2b + 1 - (i 2a \sin \alpha)^2} \right) \quad (3.66)$$

$$\Gamma = \left(\frac{1}{-2b \cos \alpha + 2b + 1 - (i 2a \sin \alpha)^2} \right) \quad (3.67)$$

Maka, nilai dari λ_1 dan λ_2 yakni:

$$\lambda_1 = \frac{-\left(\frac{2b \cos \alpha - 2b - 1 - 1}{-2b \cos \alpha + 2b + 1 - (i 2a \sin \alpha)^2}\right) + \sqrt{\left(\frac{2b \cos \alpha - 2b - 1 - 1}{-2b \cos \alpha + 2b + 1 - (i 2a \sin \alpha)^2}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{-2b \cos \alpha + 2b + 1 - (i 2a \sin \alpha)^2}\right)}}{2} \quad (3.68)$$

dan

$$\lambda_2 = \frac{-\left(\frac{2b \cos \alpha - 2b - 1 - 1}{-2b \cos \alpha + 2b + 1 - (i 2a \sin \alpha)^2}\right) - \sqrt{\left(\frac{2b \cos \alpha - 2b - 1 - 1}{-2b \cos \alpha + 2b + 1 - (i 2a \sin \alpha)^2}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{-2b \cos \alpha + 2b + 1 - (i 2a \sin \alpha)^2}\right)}}{2} \quad (3.69)$$

Karena terdapat nilai $\cos \alpha$, maka terlebih dahulu nilai $\cos \alpha$ diubah ke dalam bentuk $\sin \alpha$ agar perhitungan selanjutnya lebih mudah diselesaikan, sehingga diperoleh:

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \quad (3.70)$$

Kemudian substitusikan persamaan (3.70) ke dalam persamaan (3.68) dan (3.69) sehingga diperoleh:

$$\lambda_1 = \frac{-\left(\frac{2b(\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}) - 2b - 1 - 1}{-2b(\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}) + 2b + 1 - (i^2 4a^2 \sin^2 \alpha)}\right) + \sqrt{\left(\frac{2b(\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}) - 2b - 1 - 1}{-2b(\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}) + 2b + 1 - (i^2 4a^2 \sin^2 \alpha)}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{-2b(\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}) + 2b + 1 - (i^2 4a^2 \sin^2 \alpha)}\right)}}{2} \quad (3.71)$$

dan

$$\lambda_2 = \frac{-\left(\frac{2b(\sqrt{1-\sin^2\alpha})-2b-1-1}{-2b(\sqrt{1-\sin^2\alpha})+2b+1-(i^2 4a^2 \sin^2\alpha)}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{2b(\sqrt{1-\sin^2\alpha})-2b-1-1}{-2b(\sqrt{1-\sin^2\alpha})+2b+1-(i^2 4a^2 \sin^2\alpha)}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{-2b(\sqrt{1-\sin^2\alpha})+2b+1-(i^2 4a^2 \sin^2\alpha)}\right)}}{2} \quad (3.72)$$

Persamaan (3.71) dan (3.72) dikatakan stabil jika:

$$|\lambda_1| \leq 1 \quad \text{dan} \quad |\lambda_2| \leq 1 \quad (3.73)$$

Selanjutnya untuk persamaan (3.73) dapat dilakukan analisis dua masalah, yakni λ_1 dan λ_2 dengan dua kasus yang sama untuk kemungkinan kriteria dari kestabilan. Berikut adalah pemaparannya.

Masalah I. Untuk λ_1

Karena nilai $\sin^2 a \in [0, 1]$

Kasus 1. Ketika $\sin^2 a$ diambil pada nilai minimumnya, yakni $\sin^2 a = 0$ maka:

$$\lambda_1 = \frac{-\left(\frac{2b(\sqrt{1-0})-2b-1-1}{-2b(\sqrt{1-0})+2b+1-(i^2 4a^2 0)}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{2b(\sqrt{1-0})-2b-1-1}{-2b(\sqrt{1-0})+2b+1-(i^2 4a^2 0)}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{-2b(\sqrt{1-0})+2b+1-(i^2 4a^2 0)}\right)}}{2} \quad (3.74)$$

diperoleh:

$$\lambda_1 = \frac{\left(\frac{2}{1}\right) + \sqrt{\left(\frac{-2}{1}\right)^2 - \left(\frac{4}{1}\right)}}{2} \quad (3.75)$$

dengan hasil:

$$\lambda_1 = 1 \rightarrow |\lambda_1| = 1 \leq 1 \quad (3.76)$$

Kasus 2. Ketika $\sin^2 a$ diambil pada nilai maksimumnya, yakni $\sin^2 a = 1$ maka:

$$\lambda_1 = \frac{-\left(\frac{2b(\sqrt{1-1})-2b-1-1}{-2b(\sqrt{1-1})+2b+1-(i^2 4a^2 1)}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{2b(\sqrt{1-1})-2b-1-1}{-2b(\sqrt{1-1})+2b+1-(i^2 4a^2 1)}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{-2b(\sqrt{1-1})+2b+1-(i^2 4a^2 1)}\right)}}{2} \quad (3.77)$$

diperoleh:

$$\lambda_1 = \frac{\left(\frac{2b+2}{2b+1-(i^2 4a^2 1)}\right) + \sqrt{\left(\frac{-2b-2}{2b+1-(i^2 4a^2 1)}\right)^2 - \left(\frac{4}{2b+1-(i^2 4a^2 1)}\right)}}{2} \quad (3.78)$$

dengan nilai dari $a = \frac{\Delta t}{2\Delta x} = 0,1291$ dan $b = 0,0031$, sehingga:

$$\lambda_1 = \frac{\left(\frac{2(0,0031)+2}{2(0,0031)+1-(i^2 4(0,1291)^2 1)}\right) + \sqrt{\left(\frac{-2(0,0031)-2}{2(0,0031)+1-(i^2 4(0,1291)^2 1)}\right)^2 - \left(\frac{4}{2(0,0031)+1-(i^2 4(0,1291)^2 1)}\right)}}{2} \quad (3.79)$$

disederhanakan menjadi:

$$\lambda_1 = \frac{(1,8699424544) + \sqrt{-0,2316422956}}{2} \quad (3.80)$$

dan diperoleh hasil:

$$\lambda_1 = 0,9349 + 0,2065i \quad (3.81)$$

Karena pada persamaan (3.81) terdapat bilangan kompleks, maka untuk menghilangkan i digunakan perhitungan modulus sebagai berikut:

Misal:

$$0,9349 + 0,2065i = Z \quad (3.82)$$

konjugat dari Z adalah:

$$\bar{Z} = 0,9349 - 0,2065i \quad (3.83)$$

sehingga modulus dari Z adalah:

$$|Z| = Z\bar{Z} \quad (3.84)$$

$$|Z| = (0,9349 + 0,2065i)(0,9349 - 0,2065i) \quad (3.85)$$

$$|Z| = 0,8740 - 0,1931i + 0,1931i - 0,0426i^2 \quad (3.86)$$

Karena $i^2 = -1$, maka:

$$|Z| = 0,8740 - 0,0426(-1) \quad (3.87)$$

sehingga diperoleh modulus Z adalah:

$$|Z| = 0,9166 \quad (3.88)$$

Karena Z merupakan permisalan dari λ_1 dan modulus dari Z merupakan hasil dari menghilangkan variabel i , artinya:

$$\lambda_1 = 0,9349 + 0,2065i \rightarrow |\lambda_1| = 0,9166 \quad (3.89)$$

Sehingga:

$$|\lambda_1| = 0,9166 \leq 1$$

Dapat disimpulkan bahwa $|\lambda_1| \leq 1$ selalu stabil tanpa syarat. Artinya jika dimasukkan sembarang nilai pada parameter-parameternya, maka skema tersebut akan stabil tanpa syarat apapun.

Masalah 2. Untuk λ_2

Kasus 1. Ketika $\sin^2 a$ diambil pada nilai minimumnya, yakni $\sin^2 a = 0$ maka:

$$\lambda_2 = \frac{-\left(\frac{2b(\sqrt{1-0}) - 2b - 1 - 1}{-2b(\sqrt{1-0}) + 2b + 1 - (i^2 4a^2 0)}\right) - \sqrt{\left(\frac{2b(\sqrt{1-0}) - 2b - 1 - 1}{-2b(\sqrt{1-0}) + 2b + 1 - (i^2 4a^2 0)}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{-2b(\sqrt{1-0}) + 2b + 1 - (i^2 4a^2 0)}\right)}}{2} \quad (3.90)$$

diperoleh:

$$\lambda_2 = \frac{\left(\frac{2}{1}\right) - \sqrt{\left(\frac{-2}{1}\right)^2 - \left(\frac{4}{1}\right)}}{2} \quad (3.91)$$

dengan hasil:

$$\lambda_2 = 1 \rightarrow |\lambda_2| = 1 \leq 1 \quad (3.92)$$

Kasus 2. Ketika $\sin^2 a$ diambil pada nilai maksimumnya, yakni $\sin^2 a = 1$ maka:

$$\lambda_2 = \frac{-\left(\frac{2b(\sqrt{1-1}) - 2b - 1 - 1}{-2b(\sqrt{1-1}) + 2b + 1 - (i^2 4a^2 1)}\right) - \sqrt{\left(\frac{2b(\sqrt{1-1}) - 2b - 1 - 1}{-2b(\sqrt{1-1}) + 2b + 1 - (i^2 4a^2 1)}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{-2b(\sqrt{1-1}) + 2b + 1 - (i^2 4a^2 1)}\right)}}{2} \quad (3.93)$$

diperoleh:

$$\lambda_2 = \frac{\left(\frac{2b + 2}{2b + 1 - (i^2 4a^2 1)}\right) - \sqrt{\left(\frac{-2b - 2}{2b + 1 - (i^2 4a^2 1)}\right)^2 - \left(\frac{4}{2b + 1 - (i^2 4a^2 1)}\right)}}{2} \quad (3.94)$$

dengan nilai dari $a = \frac{\Delta t}{2\Delta x} = 0,1291$ dan $b = 0,0031$, sehingga:

$$\lambda_2 = \frac{\left(\frac{2(0,0031) + 2}{2(0,0031) + 1 - (i^2 4(0,1291)^2 1)}\right) - \sqrt{\left(\frac{-2(0,0031) - 2}{2(0,0031) + 1 - (i^2 4(0,1291)^2 1)}\right)^2 - \left(\frac{4}{2(0,0031) + 1 - (i^2 4(0,1291)^2 1)}\right)}}{2} \quad (3.95)$$

disederhanakan menjadi:

$$\lambda_2 = \frac{(1,8699424544) - \sqrt{-0,2316422956}}{2} \quad (3.96)$$

dan diperoleh hasil:

$$\lambda_2 = 0,9349 - 0,2065i \quad (3.97)$$

Karena pada persamaan (3.97) juga terdapat bilangan kompleks, maka dengan menggunakan cara yang sama dalam menghilangkan i , diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\lambda_2 = 0,9166 \rightarrow |\lambda_2| = 0,9166 \leq 1 \quad (2.98)$$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa $|\lambda_2| \leq 1$ juga selalu stabil tanpa syarat.

Artinya jika dimasukkan sembarang nilai pada parameter-parameternya, maka skema tersebut akan stabil tanpa syarat apapun.

3.4 Analisis Konsistensi

Konsistensi metode beda hingga skema implisit dapat dicari dengan menggunakan ekspansi deret Taylor yang disubstitusikan ke dalam persamaan (3.5) dan (3.10). Ekspansi deret Taylor yang digunakan dalam persamaan (3.5) dan (3.10) yaitu:

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \Delta t u_t|_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt}|_j^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 u_{ttt}|_j^n + \dots \quad (3.99)$$

$$\begin{aligned} u_{j+1}^{n+1} &= u_j^n + \Delta t u_t|_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt}|_j^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 u_{ttt}|_j^n + \Delta x u_x|_j^n + \frac{1}{2} \Delta x^2 u_{xx}|_j^n \\ &\quad + \frac{1}{6} \Delta x^3 u_{xxx}|_j^n + \Delta x \Delta t u_{xt}|_j^n + \frac{3}{6} \Delta x^2 \Delta t u_{xxt}|_j^n \\ &\quad + \frac{3}{6} \Delta x \Delta t^2 u_{xtt}|_j^n + \dots \end{aligned} \quad (3.100)$$

$$\begin{aligned} u_{j-1}^{n+1} &= u_j^n + \Delta t u_t|_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt}|_j^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 u_{ttt}|_j^n + (-\Delta x) u_x|_j^n \\ &\quad + \frac{1}{2} (-\Delta x)^2 u_{xx}|_j^n + \frac{1}{6} (-\Delta x)^3 u_{xxx}|_j^n + (-\Delta x) \Delta t u_{xt}|_j^n \\ &\quad + \frac{3}{6} (-\Delta x)^2 \Delta t u_{xxt}|_j^n + \frac{3}{6} (-\Delta x) \Delta t^2 u_{xtt}|_j^n + \dots \end{aligned}$$

sehingga u_{j-1}^{n+1} menjadi:

$$\begin{aligned} &= u_j^n + \Delta t u_t|_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt}|_j^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 u_{ttt}|_j^n - \Delta x u_x|_j^n \\ &\quad + \frac{1}{2} \Delta x^2 u_{xx}|_j^n - \frac{1}{6} \Delta x^3 u_{xxx}|_j^n - \Delta x \Delta t u_{xt}|_j^n + \frac{3}{6} \Delta x^2 \Delta t u_{xxt}|_j^n \\ &\quad - \frac{3}{6} \Delta x \Delta t^2 u_{xtt}|_j^n + \dots \end{aligned} \quad (3.101)$$

$$\eta_j^{n+1} = \eta_j^n + \Delta t \eta_t|_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 \eta_{tt}|_j^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 \eta_{ttt}|_j^n + \dots \quad (3.102)$$

$$\begin{aligned} \eta_{j+1}^{n+1} = & \eta_j^n + \Delta t \eta_t|_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 \eta_{tt}|_j^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 \eta_{ttt}|_j^n + \Delta x \eta_x|_j^n + \frac{1}{2} \Delta x^2 \eta_{xx}|_j^n \\ & + \frac{1}{6} \Delta x^3 \eta_{xxx}|_j^n + \Delta x \Delta t \eta_{xt}|_j^n + \frac{3}{6} \Delta x^2 \Delta t \eta_{xxt}|_j^n \end{aligned} \quad (3.103)$$

$$+ \frac{3}{6} \Delta x \Delta t^2 \eta_{xtt}|_j^n + \dots$$

$$\begin{aligned} \eta_{j-1}^{n+1} = & \eta_j^n + \Delta t \eta_t|_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 \eta_{tt}|_j^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 \eta_{ttt}|_j^n + (-\Delta x) \eta_x|_j^n \\ & + \frac{1}{2} (-\Delta x)^2 \eta_{xx}|_j^n + \frac{1}{6} (-\Delta x)^3 \eta_{xxx}|_j^n + (-\Delta x) \Delta t \eta_{xt}|_j^n \\ & + \frac{3}{6} (-\Delta x)^2 \Delta t \eta_{xxt}|_j^n + \frac{3}{6} (-\Delta x) \Delta t^2 \eta_{xtt}|_j^n + \dots \end{aligned}$$

Sehingga η_{j-1}^{n+1} menjadi:

$$\begin{aligned} = & \eta_j^n + \Delta t \eta_t|_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 \eta_{tt}|_j^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 \eta_{ttt}|_j^n - \Delta x \eta_x|_j^n \\ & + \frac{1}{2} \Delta x^2 \eta_{xx}|_j^n - \frac{1}{6} \Delta x^3 \eta_{xxx}|_j^n - \Delta x \Delta t \eta_{xt}|_j^n + \frac{3}{6} \Delta x^2 \Delta t \eta_{xxt}|_j^n \\ & - \frac{3}{6} \Delta x \Delta t^2 \eta_{xtt}|_j^n + \dots \end{aligned} \quad (3.104)$$

Perhitungan pertama dilakukan pada persamaan (3.5) dengan melakukan penyederhanaan pada persamaan (3.103) dan (3.104) sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\eta_{j+1}^{n+1} - \eta_{j-1}^{n+1} &= \left(\eta_j^n + \Delta t \eta_t|_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 \eta_{tt}|_j^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 \eta_{ttt}|_j^n + \Delta x \eta_x|_j^n \right. \\
&\quad + \frac{1}{2} \Delta x^2 \eta_{xx}|_j^n + \frac{1}{6} \Delta x^3 \eta_{xxx}|_j^n + \Delta x \Delta t \eta_{xt}|_j^n \\
&\quad \left. + \frac{3}{6} \Delta x^2 \Delta t \eta_{xxt}|_j^n + \frac{3}{6} \Delta x \Delta t^2 \eta_{xtt}|_j^n + \dots \right) \\
&\quad - \left(\eta_j^n + \Delta t \eta_t|_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 \eta_{tt}|_j^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 \eta_{ttt}|_j^n - \Delta x \eta_x|_j^n \right. \\
&\quad + \frac{1}{2} \Delta x^2 \eta_{xx}|_j^n - \frac{1}{6} \Delta x^3 \eta_{xxx}|_j^n - \Delta x \Delta t \eta_{xt}|_j^n \\
&\quad \left. + \frac{3}{6} \Delta x^2 \Delta t \eta_{xxt}|_j^n - \frac{3}{6} \Delta x \Delta t^2 \eta_{xtt}|_j^n + \dots \right) \\
&= 2\Delta x \eta_x|_j^n + \frac{2}{6} \Delta x^3 \eta_{xxx}|_j^n + 2\Delta x \Delta t \eta_{xt}|_j^n \\
&\quad + \frac{6}{6} \Delta x \Delta t^2 \eta_{xtt}|_j^n + \dots
\end{aligned} \tag{3.105}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.99) dan (3.105) ke dalam persamaan (3.5), diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
&\left(u_j^n + \Delta t u_t|_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt}|_j^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 u_{ttt}|_j^n + \dots \right) + \\
&a \left(2\Delta x \eta_x|_j^n + \frac{2}{6} \Delta x^3 \eta_{xxx}|_j^n + 2\Delta x \Delta t \eta_{xt}|_j^n + \frac{6}{6} \Delta x \Delta t^2 \eta_{xtt}|_j^n + \dots \right) \\
&= u_j^n
\end{aligned} \tag{3.106}$$

Karena nilai $a = \frac{\Delta t}{2\Delta x}$, maka ketika disubstitusikan ke dalam persamaan (3.106) diperoleh:

$$\begin{aligned}
& u_j^n + \Delta t u_t|_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt}|_j^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 u_{ttt}|_j^n + \Delta t \eta_x|_j^n + \frac{1}{6} \Delta x^2 \Delta t \eta_{xxx}|_j^n \\
& + \Delta t^2 \eta_{xt}|_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^3 \eta_{xtt}|_j^n + \dots = u_j^n
\end{aligned} \tag{3.107}$$

Bentuk persamaan (3.107) dapat disederhanakan menjadi persamaan berikut:

$$\begin{aligned}
& (u_t + \eta_x)|_j^n + \left(\frac{1}{2} u_{tt} + \eta_{xt} \right)|_j^n \Delta t + \left(\frac{1}{6} u_{ttt} + \frac{1}{2} \eta_{xtt} \right)|_j^n \Delta t^2 \\
& + \frac{1}{6} \eta_{xxx}|_j^n \Delta x^2 + \frac{1}{120} \eta_{xxxx}|_j^n \Delta x^4 + \frac{1}{6} \eta_{xxx}|_j^n \Delta x^2 \Delta t \\
& + \frac{1}{12} \eta_{xxxt}|_j^n \Delta x^2 \Delta t^2 \dots = 0
\end{aligned} \tag{3.108}$$

Dari persamaan (3.108) dapat diketahui bahwa *error* pemotongan yang dihasilkan memiliki orde $(\Delta t, \Delta x^2)$, dan *error* pemotongan pertama dari persamaan (3.108) adalah:

$$(u_t + \eta_x)|_j^n + \left(\frac{1}{2} u_{tt} + \eta_{xt} \right)|_j^n \Delta t + \frac{1}{6} \eta_{xxx}|_j^n \Delta x^2 = 0 \tag{3.109}$$

Persamaan (3.109) dikatakan konsisten jika:

$$\lim_{(\Delta x, \Delta t) \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} u_{tt} + \eta_{xt} \right)|_j^n \Delta t + \frac{1}{6} \eta_{xxx}|_j^n \Delta x^2 = 0 \tag{3.110}$$

Jika Δx dan Δt sangat kecil maka jumlah dari limit tersebut akan semakin kecil, karena berapapun nilai u_{tt} , η_{xt} , dan η_{xxx} jika dikalikan dengan nilai Δx dan Δt akan ikut mengecil, sehingga *error* pemotongannya akan menjadi nol.

Kemudian untuk perhitungan kedua dilakukan pada persamaan (3.10) dengan melakukan penyederhanaan pada persamaan (3.100), (3.101), (3.103) dan (3.104) sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1} &= \left(u_j^n + \Delta t u_t|_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt}|_j^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 u_{ttt}|_j^n + \Delta x u_x|_j^n \right. \\
&\quad + \frac{1}{2} \Delta x^2 u_{xx}|_j^n + \frac{1}{6} \Delta x^3 u_{xxx}|_j^n + \Delta x \Delta t u_{xt}|_j^n \\
&\quad \left. + \frac{3}{6} \Delta x^2 \Delta t u_{xxt}|_j^n + \frac{3}{6} \Delta x \Delta t^2 u_{xtt}|_j^n + \dots \right) \\
&\quad - \left(u_j^n + \Delta t u_t|_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt}|_j^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 u_{ttt}|_j^n - \Delta x u_x|_j^n \right. \\
&\quad + \frac{1}{2} \Delta x^2 u_{xx}|_j^n - \frac{1}{6} \Delta x^3 u_{xxx}|_j^n - \Delta x \Delta t u_{xt}|_j^n \\
&\quad \left. + \frac{3}{6} \Delta x^2 \Delta t u_{xxt}|_j^n - \frac{3}{6} \Delta x \Delta x^2 u_{xtt}|_j^n + \dots \right) \\
&= 2 \Delta x u_x|_j^n + \frac{2}{6} \Delta x^3 u_{xxx}|_j^n + 2 \Delta x \Delta t u_{xt}|_j^n \\
&\quad + \frac{6}{6} \Delta x \Delta t^2 u_{xtt}|_j^n + \dots
\end{aligned} \tag{3.111}$$

$$\begin{aligned}
\eta_{j+1}^{n+1} + \eta_{j-1}^{n+1} &= \left(\eta_j^n + \Delta t \eta_t|_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 \eta_{tt}|_j^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 \eta_{ttt}|_j^n + \Delta x \eta_x|_j^n \right. \\
&\quad + \frac{1}{2} \Delta x^2 \eta_{xx}|_j^n + \frac{1}{6} \Delta x^3 \eta_{xxx}|_j^n + \Delta x \Delta t \eta_{xt}|_j^n \\
&\quad \left. + \frac{3}{6} \Delta x^2 \Delta t \eta_{xxt}|_j^n + \frac{3}{6} \Delta x \Delta t^2 \eta_{xtt}|_j^n + \dots \right) \\
&\quad + \left(\eta_j^n + \Delta t \eta_t|_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 \eta_{tt}|_j^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 \eta_{ttt}|_j^n - \Delta x \eta_x|_j^n \right. \\
&\quad + \frac{1}{2} \Delta x^2 \eta_{xx}|_j^n - \frac{1}{6} \Delta x^3 \eta_{xxx}|_j^n - \Delta x \Delta t \eta_{xt}|_j^n \\
&\quad \left. + \frac{3}{6} \Delta x^2 \Delta t \eta_{xxt}|_j^n - \frac{3}{6} \Delta x \Delta t^2 \eta_{xtt}|_j^n + \dots \right)
\end{aligned} \tag{3.112}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\eta_j^n + 2\Delta t \eta_t|_j^n + \frac{2}{2}\Delta t^2 \eta_{tt}|_j^n + \frac{2}{6}\Delta t^3 \eta_{ttt}|_j^n \\
&\quad + \frac{2}{2}\Delta x^2 \eta_{xx}|_j^n + \frac{6}{6}\Delta x^2 \Delta t \eta_{xxt}|_j^n + \dots
\end{aligned}$$

Sehingga untuk mengetahui pemotongan pertama dari persamaan (3.10), maka dengan mensubstitusikan persamaan (3.102), (3.111), dan (3.112) ke dalam persamaan (3.10) diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
&a \left(2\Delta x u_x|_j^n + \frac{2}{6}\Delta x^3 u_{xxx}|_j^n + 2\Delta x \Delta t u_{xt}|_j^n + \frac{6}{6}\Delta x \Delta t^2 u_{xtt}|_j^n + \dots \right) \\
&\quad - b \left(2\eta_j^n + 2\Delta t \eta_t|_j^n + \frac{2}{2}\Delta t^2 \eta_{tt}|_j^n + \frac{2}{6}\Delta t^3 \eta_{ttt}|_j^n \right. \\
&\quad \left. + \frac{2}{2}\Delta x^2 \eta_{xx}|_j^n + \frac{6}{6}\Delta x^2 \Delta t \eta_{xxt}|_j^n + \dots \right) \tag{3.113} \\
&\quad + \left((1 + 2b) \left(\eta_j^n + \Delta t \eta_t|_j^n + \frac{1}{2}\Delta t^2 \eta_{tt}|_j^n \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{6}\Delta t^3 \eta_{ttt}|_j^n + \dots \right) \right) = \eta_j^n
\end{aligned}$$

Karena nilai $a = \frac{\Delta t}{2\Delta x}$ dan $b = \frac{\Delta t(d-1)R}{\Delta x^2}$, maka ketika disubstitusikan ke dalam persamaan (3.113) diperoleh:

$$\begin{aligned}
&\Delta t u_x|_j^n + \frac{1}{6}\Delta x^2 \Delta t u_{xxx}|_j^n + \Delta t^2 u_{xt}|_j^n + \frac{1}{2}\Delta t^3 u_{xtt}|_j^n \\
&\quad - \Delta t(d-1)R \eta_{xx}|_j^n - \Delta t^2(d-1)R \eta_{xxt}|_j^n + \eta_j^n \tag{3.114} \\
&\quad + \Delta t \eta_t|_j^n + \frac{1}{2}\Delta t^2 \eta_{tt}|_j^n + \frac{1}{6}\Delta t^3 \eta_{ttt}|_j^n + \dots = u_j^n
\end{aligned}$$

Bentuk persamaan (3.114) dapat disederhanakan menjadi persamaan berikut:

$$\begin{aligned}
& (u_x + \eta_t - (d-1)R\eta_{xx})|_j^n + \left(u_{xt} + \frac{1}{2}\eta_{tt} - (d-1)R\eta_{xxt}\right)|_j^n \Delta t \\
& + \left(\frac{1}{2}u_{xtt} + \frac{1}{6}\eta_{ttt} - \frac{1}{2}(d-1)R\eta_{xxtt}\right)|_j^n \Delta t^2 \\
& + \left(\frac{1}{6}u_{xxx} - \frac{1}{12}(d-1)R\eta_{xxx}\right)|_j^n \Delta x^2 \\
& + \frac{1}{120}u_{xxxx}|_j^n \Delta x^4 \\
& + \left(\frac{1}{6}u_{xxxt} - \frac{1}{12}(d-1)R\eta_{xxxt}\right)|_j^n \Delta x^2 \Delta t \\
& + \frac{1}{12}u_{xxxtt}|_j^n \Delta x^2 \Delta t^2 + \dots = 0
\end{aligned} \tag{3.115}$$

Dari persamaan (3.114) dapat diketahui bahwa *error* pemotongan yang dihasilkan mempunyai orde $(\Delta t, \Delta x^2)$. Sehingga *error* pemotongan pertama pada persamaan (3.112) adalah:

$$\begin{aligned}
& (u_x + \eta_t - (d-1)R\eta_{xx})|_j^n + \left(u_{xt} + \frac{1}{2}\eta_{tt} - (d-1)R\eta_{xxt}\right)|_j^n \Delta t \\
& + \left(\frac{1}{6}u_{xxx} - \frac{1}{2}(d-1)R\eta_{xxx}\right)|_j^n \Delta x^2
\end{aligned} \tag{3.116}$$

Persamaan (3.116) dikatakan konsisten jika:

$$\begin{aligned}
& \lim_{(\Delta x, \Delta t) \rightarrow 0} \left(u_{xt} + \frac{1}{2}\eta_{tt} - (d-1)R\eta_{xxt}\right)|_j^n \Delta t \\
& + \left(\frac{1}{6}u_{xxx} - \frac{1}{2}(d-1)R\eta_{xxx}\right)|_j^n \Delta x^2 = 0
\end{aligned} \tag{3.115}$$

Jika Δx dan Δt sangat kecil maka jumlah dari limit tersebut akan semakin kecil, karena berapapun nilai u_{xt} , u_{xxx} , η_{tt} , η_{xxt} , dan η_{xxx} jika dikalikan dengan

nilai Δx dan Δt akan ikut mengecil, sehingga *error* pemotongannya akan menjadi nol.

Untuk memperjelas keterangan di atas, dapat dilihat pada tabel di bawah ini:

Tabel 3.1 Nilai *Error* Maksimum untuk $\eta(x, t)$ pada $t \in [0, 30]$ dan $x \in [0, 5]$ dengan $\Delta x \rightarrow 0$ dan $\Delta t = 0,0258$

Δx	Waktu (t)					
	5	10	15	20	25	30
0,1	0,6271	0,3648	0,3016	0,2845	0,2185	0,2350
0,5	3,1355	1,8240	1,5080	1,4225	1,0925	1,1750
0,15	0,9407	0,5472	0,4524	0,4268	0,3278	0,3525

Perhitungan *error* ini dikerjakan dengan formula $|\eta_j^{n+1} - \eta_j^n|$, di mana nilai η_j^{n+1} adalah nilai $\eta(x, t)$ yang ditampilkan pada iterasi skema FTCS untuk suatu Δx dan η_j^n adalah nilai $\eta(x, t)$ yang ditampilkan oleh MATLAB untuk suatu Δx . Selanjutnya selisih nilai $|\eta_j^{n+1} - \eta_j^n|$ ditampilkan di setiap titik diskrit x pada interval waktu $t \in [0, 30]$. Dari prosedur ini disimpulkan bahwa untuk $\Delta t = 0,0258$ memiliki *error* yang paling kecil di setiap waktu jika dibandingkan dengan Δt yang lain. Selanjutnya untuk cuplikan $\Delta t \in [0,5, 0,1]$ maka dapat dihitung bahwa nilai $\left(\frac{0,6271}{3,1355}\right)^2 = 0,04$ ekuivalen dengan $\left(\frac{0,1}{0,5}\right)^2$. Hal ini menunjukkan bahwa prosedur iterasi dengan skema FTCS memenuhi kriteria Δx^2 .

Selanjutnya untuk analisis *error* pada suatu Δt pada $t \in [0, 30]$ merujuk pada tabel berikut:

Tabel 3.2 Nilai *Error* Maksimum untuk $\eta(x, t)$ pada $t \in [0, 30]$ dan $x \in [0, 5]$ dengan $\Delta t \rightarrow 0$ dan $\Delta x = 0,1$

Δt	Waktu (t)					
	5	10	15	20	25	30
0,025	0,6446	0,3590	0,3206	0,2842	0,2218	0,2424
0,25	6,4460	3,5900	3,2060	2,8420	2,2180	2,4240
0,02	0,5157	0,2872	0,2565	0,2274	0,1774	0,1939

Secara analog, perhitungan *error* ini juga dikerjakan dengan formula $|\eta_j^{n+1} - \eta_j^n|$, di mana nilai η_j^{n+1} adalah nilai $\eta(x, t)$ yang ditampilkan pada iterasi skema FTCS untuk suatu Δt dan η_j^n adalah nilai $\eta(x, t)$ yang ditampilkan oleh MATLAB untuk suatu Δx . Selanjutnya selisih nilai $|\eta_j^{n+1} - \eta_j^n|$ ditampilkan di setiap titik diskrit x pada interval waktu $t \in [0, 30]$. Dari prosedur ini disimpulkan bahwa untuk $\Delta t = 0,02$ memiliki *error* yang paling kecil di setiap waktu jika dibandingkan dengan Δt yang lain. Selanjutnya untuk cuplikan $\Delta t \in [0,25, 0,02]$ maka dapat dihitung bahwa nilai $\frac{3,5900}{0,2872} = 12,5$ ekuivalen dengan $\frac{0,25}{0,02}$. Hal ini menunjukkan bahwa prosedur iterasi dengan skema FTCS memenuhi kriteria Δt .

3.5 Simulasi dan Interpretasi Hasil

Simulasi dan interpretasi yang dilakukan pada subbab ini menggunakan hasil diskrit pada persamaan (3.5) dan (3.10) dengan menggunakan kondisi awal, kondisi batas, dan parameter sebagai berikut:

$$u_j^1 = 0 \quad \eta_j^1 = \text{sech}(x)^2$$

$$u_1^n = 0 \quad \eta_1^n = 0$$

$$u_N^n = 0 \quad \eta_N^n = 0$$

$$\Delta x = 0,1 \quad \Delta t = 0,0258$$

Sebagai contoh, digunakan iterasi dari $j = 2$ sampai $j = 6$, untuk $n = 1$ sehingga diperoleh nilai-nilai parameter sebagai berikut:

1. Untuk $j = 2$ diperoleh:

$$u_j^{n+1} + a\eta_{j+1}^{n+1} - a\eta_{j-1}^{n+1} = u_j^n$$

$$\rightarrow u_2^2 + a\eta_3^2 = 0$$

$$au_{j+1}^{n+1} - au_{j-1}^{n+1} - b\eta_{j+1}^{n+1} + c\eta_j^{n+1} - b\eta_{j-1}^{n+1} = \eta_j^n$$

$$\rightarrow au_3^2 - b\eta_3^2 + c\eta_2^2 = \text{sech}(x)^2$$

2. Untuk $j = 3$ diperoleh:

$$u_3^2 + a\eta_4^2 - a\eta_2^2 = 0$$

$$au_4^2 - au_2^2 - b\eta_4^2 + c\eta_3^2 - b\eta_2^2 = \text{sech}(x)^2$$

Dengan menggunakan cara yang sama dapat diperoleh nilai-nilai untuk $j = 4$ dan $j = 5$.

3. Untuk $j = 6$ diperoleh:

$$u_6^2 - a\eta_5^2 = 0$$

$$-au_5^2 + c\eta_6^2 - b\eta_5^2 = \text{sech}(x)^2$$

Nilai-nilai tersebut dimasukkan ke dalam persamaan (3.5) dan (3.10) sehingga:

Untuk $j = 2$ berlaku untuk persamaan batas kiri, baik pada u maupun pada η , sehingga untuk persamaan (3.5) dan (3.10) menjadi:

$$u_2^2 + (0,1291)\eta_3^2 = 0$$

$$(0,1291)u_3^2 - (0,0031)\eta_3^2 + (1,0062)\eta_2^2 = \text{sech}(x)^2$$

Untuk $j = 3$ sampai $j = 5$ berlaku untuk persamaan (3.5) sehingga menjadi:

$$j = 3 \rightarrow u_3^2 + (0,1291)\eta_4^2 - (0,1291)\eta_2^2 = 0$$

$$j = 4 \rightarrow u_4^2 + (0,1291)\eta_5^2 - (0,1291)\eta_3^2 = 0$$

$$j = 5 \rightarrow u_5^2 + (0,1291)\eta_6^2 - (0,1291)\eta_4^2 = 0$$

Untuk $j = 3$ sampai $n = 5$ juga berlaku pada persamaan (3.10) sehingga menjadi:

$$j = 3 \rightarrow (0,1291)u_4^2 - (0,1291)u_2^2 - (0,0031)\eta_4^2 + (1,0062)\eta_3^2 - (0,0031)\eta_2^2 \\ = \operatorname{sech}(x)^2$$

$$j = 4 \rightarrow (0,1291)u_5^2 - (0,1291)u_3^2 - (0,0031)\eta_5^2 + (1,0062)\eta_4^2 - (0,0031)\eta_3^2 \\ = \operatorname{sech}(x)^2$$

$$j = 5 \rightarrow (0,1291)u_6^2 - (0,1291)u_4^2 - (0,0031)\eta_6^2 + (1,0062)\eta_5^2 - (0,0031)\eta_4^2 \\ = \operatorname{sech}(x)^2$$

Untuk $j = 6$ berlaku untuk persamaan batas kanan baik untuk u maupun η , sehingga untuk persamaan (3.5) dan (3.10) menjadi:

$$u_6^2 - (0,1291)\eta_5^2 = 0 \\ -(0,1291)u_5^2 + (1,0062)\eta_6^2 - (0,0031)\eta_5^2 = \operatorname{sech}(x)^2$$

Kemudian dikelompokkan persamaan-persamaan di atas sehingga menjadi seperti berikut:

$$u_2^2 + (0,1291)\eta_3^2 = 0 \\ u_3^2 - (0,1291)\eta_2^2 + (0,1291)\eta_4^2 = 0 \\ u_4^2 - (0,1291)\eta_3^2 + (0,1291)\eta_5^2 = 0 \\ u_5^2 - (0,1291)\eta_4^2 + (0,1291)\eta_6^2 = 0 \\ u_6^2 - (0,1291)\eta_5^2 = 0 \\ (0,1291)u_3^2 + (1,0062)\eta_2^2 - (0,0031)\eta_3^2 = \operatorname{sech}(x)^2 \\ -(0,1291)u_2^2 + (0,1291)u_4^2 - (0,0031)\eta_2^2 + (1,0062)\eta_3^2 - (0,0031)\eta_4^2 \\ = \operatorname{sech}(x)^2 \\ -(0,1291)u_3^2 + (0,1291)u_5^2 - (0,0031)\eta_3^2 + (1,0062)\eta_4^2 - (0,0031)\eta_5^2 \\ = \operatorname{sech}(x)^2$$

$$\begin{aligned}
 & -(0,1291)u_4^2 + (0,1291)u_6^2 - (0,0031)\eta_4^2 + (1,0062)\eta_5^2 - (0,0031)\eta_6^2 \\
 & = \operatorname{sech}(x)^2 \\
 & -(0,1291)u_5^2 + (1,0062)\eta_6^2 - (0,0031)\eta_5^2 = \operatorname{sech}(x)^2
 \end{aligned}$$

Persamaan-persamaan di atas diubah ke dalam bentuk matriks sehingga menjadi:

$$A = \begin{bmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1291 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -0,1291 & 0 & 0,1291 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -0,1291 & 0 & 0,1291 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -0,1291 & 0 & 0,1291 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -0,1291 & 0 \\
 -0,1291 & 0,1291 & 0 & 0 & 0 & 1,0062 & -0,0031 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -0,1291 & 0,1291 & 0 & 0 & -0,0031 & 1,0062 & -0,0031 & 0 & 0 \\
 0 & -0,1291 & 0 & 0,1291 & 0 & 0 & -0,0031 & 1,0062 & -0,0031 & 0 \\
 0 & 0 & -0,1291 & 0 & 0,1291 & 0 & 0 & -0,0031 & 1,0062 & -0,0031 \\
 0 & 0 & 0 & -0,1291 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,0031 & 1,0062
 \end{bmatrix}$$

dengan matriks B dan X menjadi:

$$X = \begin{bmatrix}
 u_2^2 \\
 u_3^2 \\
 u_4^2 \\
 u_5^2 \\
 u_6^2 \\
 \eta_2^2 \\
 \eta_3^2 \\
 \eta_4^2 \\
 \eta_5^2 \\
 \eta_6^2
 \end{bmatrix}
 \quad
 B = \begin{bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 \operatorname{sech}(x)^2 \\
 \operatorname{sech}(x)^2 \\
 \operatorname{sech}(x)^2 \\
 \operatorname{sech}(x)^2 \\
 \operatorname{sech}(x)^2
 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya nilai matriks X dicari dengan menggunakan persamaan berikut ini:

$$X = A^{-1}B$$

Untuk memudahkan perhitungan dalam menyelesaikan persamaan di atas, maka

digunakan bantuan program MATLAB, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
 u_2^2 &= -0,2229 & \eta_2^2 &= 0,9062 \\
 u_3^2 &= -0,1563 & \eta_3^2 &= 0,9376 \\
 u_4^2 &= -0,2294 & \eta_4^2 &= 0,8469 \\
 u_5^2 &= -0,1745 & \eta_5^2 &= 0,8614 \\
 u_6^2 &= 0,0094 & \eta_6^2 &= 0,8635
 \end{aligned}$$

Selanjutnya untuk $n = 2$ dengan $j = 2$ sampai $j = 6$, dengan menggunakan cara yang sama, maka akan diperoleh persamaan-persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 u_2^3 + (0,1291)\eta_3^3 &= u_2^2 \\
 u_3^3 - (0,1291)\eta_2^3 + (0,1291)\eta_4^3 &= u_3^2 \\
 u_4^3 - (0,1291)\eta_3^3 + (0,1291)\eta_5^3 &= u_4^2 \\
 u_5^3 - (0,1291)\eta_4^3 + (0,1291)\eta_6^3 &= u_5^2 \\
 u_6^3 - (0,1291)\eta_5^3 &= u_6^2 \\
 (0,1291)u_3^3 + (1,0062)\eta_2^3 - (0,0031)\eta_3^3 &= \eta_2^2 \\
 -(0,1291)u_2^3 + (0,1291)u_4^3 - (0,0031)\eta_2^3 + (1,0062)\eta_3^3 - (0,0031)\eta_4^3 &= \eta_3^2 \\
 -(0,1291)u_3^3 + (0,1291)u_5^3 - (0,0031)\eta_3^3 + (1,0062)\eta_4^3 - (0,0031)\eta_5^3 &= \eta_4^2 \\
 -(0,1291)u_4^3 + (0,1291)u_6^3 - (0,0031)\eta_4^3 + (1,0062)\eta_5^3 - (0,0031)\eta_6^3 &= \eta_5^2 \\
 -(0,1291)u_5^3 + (1,0062)\eta_6^3 - (0,0031)\eta_5^3 &= \eta_6^2
 \end{aligned}$$

Persamaan-persamaan di atas diubah ke dalam bentuk matriks sehingga menjadi:

$$A = \begin{bmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1291 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -0,1291 & 0 & 0,1291 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -0,1291 & 0 & 0,1291 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -0,1291 & 0 & 0,1291 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -0,1291 & 0 \\
 0 & 0,1291 & 0 & 0 & 0 & 1,0062 & -0,0031 & 0 & 0 & 0 \\
 -0,1291 & 0 & 0,1291 & 0 & 0 & -0,0031 & 1,0062 & -0,0031 & 0 & 0 \\
 0 & -0,1291 & 0 & 0,1291 & 0 & 0 & -0,0031 & 1,0062 & -0,0031 & 0 \\
 0 & 0 & -0,1291 & 0 & 0,1291 & 0 & 0 & -0,0031 & 1,0062 & -0,0031 \\
 0 & 0 & 0 & -0,1291 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,0031 & 1,0062
 \end{bmatrix}$$

dengan matriks B dan X menjadi:

$$X = \begin{bmatrix} u_2^3 \\ u_3^3 \\ u_4^3 \\ u_5^3 \\ u_6^3 \\ \eta_2^3 \\ \eta_3^3 \\ \eta_4^3 \\ \eta_5^3 \\ \eta_6^3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -0,2229 \\ -0,1563 \\ -0,2294 \\ -0,1745 \\ 0,0094 \\ 0,9062 \\ 0,9376 \\ 0,8469 \\ 0,8614 \\ 0,8635 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya nilai matriks X dicari dengan menggunakan persamaan berikut ini:

$$X = A^{-1}B$$

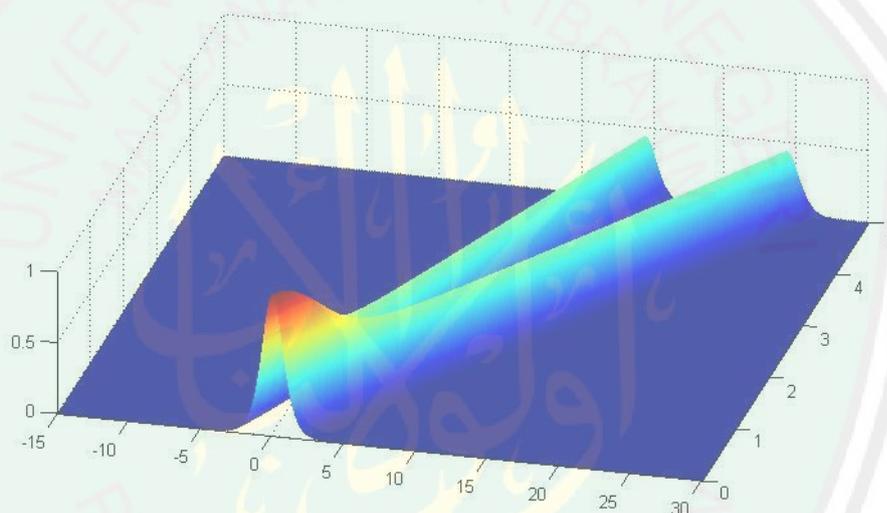
Untuk memudahkan perhitungan dalam menyelesaikan persamaan di atas, maka digunakan bantuan program MATLAB, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} u_2^3 &= -0,3418 & \eta_2^3 &= 0,9223 \\ u_3^3 &= -0,1471 & \eta_3^3 &= 0,9212 \\ u_4^3 &= -0,2162 & \eta_4^3 &= 0,8503 \\ u_5^3 &= -0,1730 & \eta_5^3 &= 0,8188 \\ u_6^3 &= 0,1151 & \eta_6^3 &= 0,8385 \end{aligned}$$

Untuk lebih memahami proses skema tersebut, pada subbab ini akan dijelaskan tentang simulasi hasil dari nilai η menggunakan program MATLAB. Hasil simulasi yang dilakukan mampu menjelaskan terjadinya penurunan amplitudo dari gelombang permukaan air saat melewati pemecah gelombang. Energi yang dibawa oleh gelombang menjadi berkurang karena sebanding dengan kuadrat amplitudo. Panjang dari pemecah gelombang juga memiliki pengaruh dalam mengurangi amplitudo.

Pada bagian ini hanya mensimulasikan ketika gelombang permukaan air melewati pemecah gelombang. Perambatan gelombang yang melalui pemecah gelombang diilustrasikan pada beberapa nilai x dan t . Gelombang-gelombang bergerak melewati dasar yang rata di kedalaman $d = 1,5$ dengan panjang gelombang $\lambda = 39,4$ dan melewati pemecah gelombang berupa balok berpori.

Simulasi pertama dilakukan dengan parameter $\Delta x = 0,1$, $\Delta t = 0,0258$, $k = 0,3$, $h = 1$, dan $d = 1,5$.

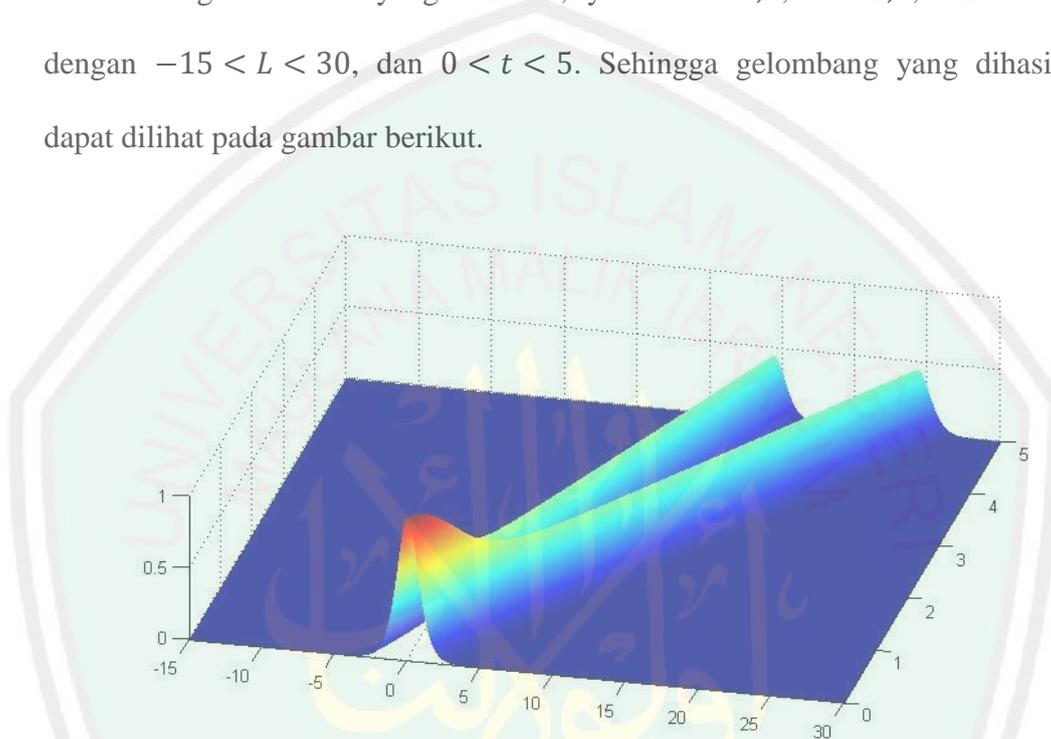


Gambar 3.3 Simulasi Gelombang Permukaan Air Melalui Pemecah Gelombang Ketika $d - 1 = 0,5$, $k = 0,3$

Dari Gambar 3.3 tersebut dapat dilihat bahwa terdapat perubahan pada amplitudo gelombang saat melalui pemecah gelombang. Amplitudo gelombang mengalami penurunan disebabkan oleh media berpori yang menyerap kekuatan gelombang. Gelombang berjalan dari $x = 0$ sampai $x = 30$ menjauhi pemecah gelombang dengan mengurangi sedikit demi sedikit kecepatan rambat dari gelombang pada permukaan air. Semakin lama, kecepatan gelombang semakin berkurang hingga mencapai $\eta(x, 0) = 0$. Pada saat nilai $k = 0,3$ amplitudo dari

gelombang yang terjadi cukup besar. Hal ini berlaku juga untuk berapapun panjang L .

Simulasi kedua dilakukan dengan menggunakan parameter yang sama namun dengan nilai k yang berbeda, yakni $k = 0,5$, $d = 1,5$, $-L < x < L$, dengan $-15 < L < 30$, dan $0 < t < 5$. Sehingga gelombang yang dihasilkan dapat dilihat pada gambar berikut.



Gambar 3.4 Simulasi Gelombang Permukaan Air Melalui Pemecah Gelombang
Ketika $d - 1 = 0,5$, $k = 0,5$

Pada Gambar 3.4 dapat dilihat bahwa terjadi perubahan pada amplitudo gelombang. Sama halnya pada Gambar 3.3 yang membedakan hanya terdapat pada parameter $k = 0,5$. Amplitudo yang dihasilkan dari gelombang yang terjadi lebih kecil. Hal ini berlaku juga untuk berapapun panjang L .

Pengamatan juga dilakukan dengan mengubah parameter-parameter yang ada. Dari hasil analisis yang telah dilakukan, dapat disimpulkan bahwa besar kecilnya x , Δx , dan Δt yang diberikan dapat mempengaruhi kecepatan pergerakan gelombang, refleksi gelombang, riak-riak gelombang yang dihasilkan, serta amplitudo gelombang. Ketika nilai t yang diberikan semakin kecil, maka riak-riak

gelombang dan amplitudo yang dihasilkan semakin kecil. Namun pada saat Δx , dan Δt yang diberikan lebih besar, maka yang terjadi adalah amplitudo gelombang akan lebih besar. Berapapun parameter dari Δx dan Δt , tetap akan menghasilkan simulasi gelombang yang stabil.

3.6 Gelombang Air dalam Al-Quran dan Maknanya dalam Studi Matematis

Gelombang air merupakan proses terjadinya interaksi antara massa udara yang bergerak dan bertemu dengan lapisan permukaan air yang menghasilkan pola puncak dan lembah. Dalam al-Quran ada beberapa ayat yang menyebutkan tentang gelombang. Salah satunya terdapat pada surat Huud/11:42 yaitu:

وَهِيَ تَجْرِي بِهِمْ فِي مَوْجٍ كَالْجِبَالِ وَنَادَى نُوحٌ ابْنَهُ وَكَانَ فِي مَعْزِلٍ ... ﴿٤٢﴾

“Dan bahtera itu berlayar membawa mereka dalam gelombang laksana gunung, ...” (QS. Huud/11:42)

Gelombang yang dimaksud di atas adalah merupakan gelombang air yang memiliki amplitudo yang sangat besar yang diibaratkan setinggi gunung sehingga mampu meluluhlantahkan bumi beserta isinya atas izin Allah Swt.. Terjadinya gelombang pada permukaan air banyak dipengaruhi oleh berbagai macam sebab. Dengan berbagai macam sebab tersebut, terkadang gelombang pada permukaan air yang dihasilkan memiliki kekuatan atau amplitudo yang cukup besar. Sehingga dalam mengantisipasi kekuatan gelombang yang demikian, dilakukan penelitian untuk mengurangi kekuatan gelombang dengan membuat media berpori sebagai pemecah gelombang. Hasil yang diperoleh ketika gelombang melalui media berpori adalah terjadi pengurangan amplitudo pada gelombang sehingga gelombang menjadi aman. Adapun model matematika tentang perambatan

gelombang permukaan air yang melalui hambatan berupa balok berpori yakni sebagai berikut:

$$u_t + \eta_x = 0$$

$$\eta_t + u_x = (d - 1)R\eta_{xx}$$

Adanya model matematika ini, diharapkan dapat diambil pelajaran untuk meningkatkan keimanan dan ketakwaan diri kepada Allah Swt. yang telah menciptakan alam dengan ukuran dan keteraturannya. Sebagaimana firman Allah Swt. dalam al-Quran surat al-Qamar/54:49, yaitu:

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَاهُ بِقَدَرٍ ﴿٤٩﴾

“*sesungguhnya kami menciptakan sesuatu menurut ukurannya*”(QS. Al-Qamar/25:2).

Secara global ayat di atas menjelaskan bahwasanya Allah Swt. menciptakan segala sesuatu dan menentukan ukuran sesuai dengan ketetapan, ilmu pengetahuan, dan telah ditentukan. Maka pada hakikatnya segala sesuatu diciptakan oleh Allah Swt. sesuai dengan ukuran yang menentukan kadar, sifat, waktu, tempat dan berkaitan dengan segala perkara yang ada disekitarnya. Serta pengaruh terhadap keberadaan alam semesta dan semua hal yang terjadi di alam semesta ini pastilah berdasarkan takdir Allah Swt.. Salah satu contohnya adalah terbentuknya model perambatan gelombang pada permukaan air melalui pemecah gelombang berupa berpori dapat dicari solusi numeriknya dengan berbagai macam ketentuan dan langkah-langkah yang ada.

Solusi model gelombang permukaan air melalui pemecah gelombang dapat diselesaikan menggunakan metode beda hingga skema implisit FTCS. Hal ini menunjukkan bahwa semua permasalahan dapat diselesaikan sekalipun melalui beberapa kesulitan.

Allah Swt. berfirman dalam al-Quran surat ath-Thalaaq/7:65 yaitu:

... سَيَجْعَلُ اللَّهُ بَعْدَ عُسْرٍ يُسْرًا ﴿٦٥﴾

“... Allah Swt. kelak akan memberikan kelapangan sesudah kesempitan”(QS. Ath-Thalaaq/7:65)

Pada hakikatnya semua kemudahan akan terwujud jika Allah Swt. menghendaki. Allah Swt. memberikan kemudahan bagi ummatnya yang bersungguh-sungguh dan berusaha ketika dihadapi dalam suatu masalah, baik itu dalam kehidupan sehari-hari maupun dalam bidang matematika. Hal ini ditunjukkan pada proses penyelesaian solusi numerik model gelombang permukaan yang diberikan kemudahan setelah mengalami banyak kesulitan dalam menyelesaikannya. Sehingga penelitian ini dapat diselesaikan dengan baik dan benar.

Dalam menyelesaikan persamaan tersebut terdapat banyak metode dan tahapan yang harus dikerjakan untuk mendapatkan hasil yang tepat dalam perhitungan secara matematis. Dalam islam dijelaskan bahwa dalam menyelesaikan suatu masalah memiliki banyak cara atau metode, sebagaimana firman Allah Swt. dalam al-Quran surat al-Ankabut/29:69 yaitu:

وَالَّذِينَ جَاهَدُوا فِينَا لَنَهْدِيَنَّهُمْ سُبُلَنَا ۚ وَإِنَّ اللَّهَ لَمَعَ الْمُحْسِنِينَ ﴿٦٩﴾

“dan orang-orang yang berjihad untuk (mencari keridhaan) kami, benar-benar akan kami tunjukkan kepada mereka jalan-jalan kami. dan Sesungguhnya Allah Swt. benar-benar beserta orang-orang yang berbuat baik” (QS. Al-Ankabut/29:69).

Dari ayat tersebut menunjukkan bahwa Allah Swt. telah menegaskan kepada manusia bahwa dalam mencari suatu penyelesaian terdapat banyak jalan, yang berarti banyak cara ataupun metode-metode. Seperti halnya dalam bidang ilmu matematika, untuk menyelesaikan solusi numerik model gelombang

permukaan melalui pemecah gelombang, salah satu metode yang dapat digunakan adalah metode beda hingga dengan skema implisit FTCS. Dalam menyelesaikan persamaan tersebut terdapat beberapa tahapan yang harus dikerjakan agar diperoleh hasil yang tepat. Tahapan-tahapan tersebut di antaranya yaitu mendiskritkan persamaan menjadi persamaan baru, menentukan kestabilan dan konsistensi dari skema yang digunakan, kemudian dilakukan simulasi dan menginterpretasikan hasil dari simulasi. Sebagaimana dalam al-Quran surat al-Shaff/61:4 yaitu:

إِنَّ اللَّهَ يُحِبُّ الَّذِينَ يُقَاتِلُونَ فِي سَبِيلِهِ صَفًّا كَأَنَّهُمْ بُنْيَانٌ مَّرصُومٌ ﴿٤﴾

“sesungguhnya Allah Swt. menyukai orang-orang yang berperang di jalan-Nya dalam barisan yang teratur seakan-akan mereka seperti suatu bangunan yang tersusun kokoh (QS. Al-Shaff/61:4)”.

Ayat tersebut menjelaskan bahwa Allah Swt. menghendaki untuk menyelesaikan suatu permasalahan dengan teratur. Oleh karenanya dalam proses mengerjakan langkah demi langkah harus teliti, cermat, dan sesuai dengan tahapan-tahapan yang harus dikerjakan. Sehingga diperoleh hasil yang tepat seperti yang telah ditunjukkan pada simulasi gelombang permukaan melalui pemecah gelombang berupa balok berpori dengan menggunakan program MATLAB.

BAB IV PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Dari hasil pembahasan pada bab sebelumnya, dapat diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Solusi numerik untuk model gelombang permukaan yang melalui hambatan berupa balok berpori diselesaikan dengan skema implisit FTCS, dengan bentuk diskrit dari skema yang digunakan yakni:

$$u_j^{n+1} + a(\eta_{j+1}^{n+1} - \eta_{j-1}^{n+1}) = u_j^n$$

$$a(u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}) - b(\eta_{j+1}^{n+1} + \eta_{j-1}^{n+1}) + (1 + 2b)\eta_j^{n+1} = \eta_j^n$$

dengan $a = \frac{\Delta t}{2\Delta x}$ dan $b = \frac{\Delta t(d-1)R}{\Delta x^2}$ serta pertumbuhan *error* dari metode implisit FTCS memiliki orde Δt dan Δx^2 yang dapat dibuktikan pada Tabel 3.1 dan Tabel 3.2.

2. Kestabilan dari metode beda hingga skema implisit FTCS dinyatakan stabil tanpa syarat dengan berapapun nilai parameter Δx dan Δt yang akan digunakan.

4.2 Saran

Bagi penelitian selanjutnya disarankan untuk mencari solusi analitik ataupun mencari solusi numerik model gelombang permukaan yang melalui pemecah gelombang berupa balok berpori menggunakan metode yang berbeda.

DAFTAR RUJUKAN

- Al-Maraghi, A. 1989. *Tafsir Al Maraghi*. Semarang: CV. Toha Putra.
- Al-Qurthubi, I. 2009. *Tafsir Al Qurthubi [14]*. Jakarta: Pustaka Azzam.
- Anas, M. 2014. *Studi Pemecah Gelombang Balok Beton Berpori Susun Seri*. Tugas Akhir tidak untuk dipublikasikan. Makasar: UNHAS Makasar.
- Candra, R. 2011. *Analisis Stabilitas Metode Forward Time Central Space dan Lax Wendroff pada Simulasi Penyelesaian Persamaan Adveksi*. Skripsi tidak dipublikasikan. Medan: Universitas Sumatera Utara.
- Chapra, S & Canale, R. 2010. *Numerical Methods for Engineers*. New York: Mc.Graw-Hill.
- Djojodihardjo, H. 2000. *Metode Numerik*. Jakarta: Gramedia.
- Katsir, I. 2009. *Tafsir Ibnu Katsir Jilid 4*. Jakarta: Pustaka Imam Asy-Syafi'i.
- Lailiyah, I. 2015. *Penurunan Model Gelombang Permukaan melalui Pemecah Gelombang Berupa Balok Berpori*. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
- Shihab, M. 2002. *Tafsir Al Misbah*. Jakarta: Lentera Hati.
- Strauss, W. 1992. *Partial Differential Equations and Introduction*. New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Sutrisno. 1984. *Fisika Dasar Gelombang dan Optik*. Bandung: ITB.
- Triadmodjo, B. 2002. *Metode Numerik Dilengkapi dengan Program Komputer*. Yogyakarta: Beta Offset.
- Wiryanto, L. 2010. Wave Propagation Passing Over a Submerged Porous Breakwater. *J Eng Math*, (70):129-136.
- Zakariah, A. 2009. *Teori Gelombang Amplitudo Kecil dan Peramalan Gelombang*. Lampung: Jurusan Teknik Sipil Fakultas Teknik Universitas Lampung.
- Zauderer, E. 2006. *Partial Differential Equation of Applied Mathematics Third Edition*. New York: John Wiley & Sons, Inc.

LAMPIRAN

Lampiran 1. Perhitungan analisis konsistensi untuk persamaan (3.5).

Dengan bentuk persamaan :

$$u_j^{n+1} + a(\eta_{j+1}^{n+1} - \eta_{j-1}^{n+1}) = u_j^n$$

Ekspansi Deret Taylor untuk persamaan di atas yakni:

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n + \Delta t u_t|_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt}|_j^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 u_{ttt}|_j^n + \frac{1}{24} \Delta t^4 u_{tttt}|_j^n \\ &\quad + \frac{1}{120} \Delta t^5 u_{ttttt}|_j^n + \dots \\ \eta_{j+1}^{n+1} &= \eta_j^n + \Delta t \eta_t|_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 \eta_{tt}|_j^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 \eta_{ttt}|_j^n + \frac{1}{24} \Delta t^4 \eta_{tttt}|_j^n + \frac{1}{120} \Delta t^5 \eta_{ttttt}|_j^n \\ &\quad + \Delta x \eta_x|_j^n + \frac{1}{2} \Delta x^2 \eta_{xx}|_j^n + \frac{1}{6} \Delta x^3 \eta_{xxx}|_j^n + \frac{1}{24} \Delta x^4 \eta_{xxxx}|_j^n \\ &\quad + \frac{1}{120} \Delta x^5 \eta_{xxxxx}|_j^n + \Delta x \Delta t \eta_{xt}|_j^n + \frac{3}{6} \Delta x^2 \Delta t \eta_{xxt}|_j^n + \frac{3}{6} \Delta x \Delta t^2 \eta_{xtt}|_j^n \\ &\quad + \frac{4}{24} \Delta x^3 \Delta t \eta_{xxxxt}|_j^n + \frac{6}{24} \Delta x^2 \Delta t^2 \eta_{xxxtt}|_j^n + \frac{4}{24} \Delta x \Delta t^3 \eta_{xttt}|_j^n \\ &\quad + \frac{1}{24} \Delta x^4 \Delta t \eta_{xxxxxt}|_j^n + \frac{1}{12} \Delta x^3 \Delta t^2 \eta_{xxxxtt}|_j^n + \frac{1}{12} \Delta x^2 \Delta t^3 \eta_{xxxttt}|_j^n \\ &\quad + \frac{1}{24} \Delta x \Delta t^4 \eta_{xtttt}|_j^n + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta_{j-1}^{n+1} = & \eta_j^n + \Delta t \eta_{t|_j}^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 \eta_{tt}^n \Big|_j + \frac{1}{6} \Delta t^3 \eta_{ttt}^n \Big|_j + \frac{1}{24} \Delta t^4 \eta_{tttt}^n \Big|_j + \frac{1}{120} \Delta t^5 \eta_{ttttt}^n \Big|_j \\
& - \Delta x \eta_{x|_j}^n + \frac{1}{2} \Delta x^2 \eta_{xx}^n \Big|_j - \frac{1}{6} \Delta x^3 \eta_{xxx}^n \Big|_j + \frac{1}{24} \Delta x^4 \eta_{xxxx}^n \Big|_j \\
& - \frac{1}{120} \Delta x^5 \eta_{xxxxx}^n \Big|_j - \Delta x \Delta t \eta_{xt}^n \Big|_j + \frac{3}{6} \Delta x^2 \Delta t \eta_{xxt}^n \Big|_j - \frac{3}{6} \Delta x \Delta t^2 \eta_{xtt}^n \Big|_j \\
& - \frac{4}{24} \Delta x^3 \Delta t \eta_{xxxt}^n \Big|_j + \frac{6}{24} \Delta x^2 \Delta t^2 \eta_{xxtt}^n \Big|_j - \frac{4}{24} \Delta x \Delta t^3 \eta_{xttt}^n \Big|_j \\
& + \frac{1}{24} \Delta x^4 \Delta t \eta_{xxxxt}^n \Big|_j - \frac{1}{12} \Delta x^3 \Delta t^2 \eta_{xxxtt}^n \Big|_j + \frac{1}{12} \Delta x^2 \Delta t^3 \eta_{xxttt}^n \Big|_j \\
& - \frac{1}{24} \Delta x \Delta t^4 \eta_{xtttt}^n \Big|_j + \dots
\end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned}
\eta_{j+1}^{n+1} - \eta_{j-1}^{n+1} = & 2\Delta x \eta_{x|_j}^n + \frac{2}{6} \Delta x^3 \eta_{xxx}^n \Big|_j + \frac{2}{120} \Delta x^5 \eta_{xxxxx}^n \Big|_j + 2\Delta x \Delta t \eta_{xt}^n \Big|_j \\
& + \frac{6}{6} \Delta x \Delta t^2 \eta_{xtt}^n \Big|_j + \frac{8}{24} \Delta x^3 \Delta t \eta_{xxxt}^n \Big|_j + \frac{8}{24} \Delta x \Delta t^3 \eta_{xttt}^n \Big|_j \\
& + \frac{2}{12} \Delta x^3 \Delta t^2 \eta_{xxxtt}^n \Big|_j + \frac{2}{24} \Delta x \Delta t^4 \eta_{xtttt}^n \Big|_j + \dots
\end{aligned}$$

Karena $\eta_{j+1}^{n+1} - \eta_{j-1}^{n+1}$ dikalikan dengan a , dimana $a = \frac{\Delta t}{2\Delta x}$ sehingga:

$$a(\eta_{j+1}^{n+1} - \eta_{j-1}^{n+1}) =$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\Delta t}{2\Delta x}\right) 2\Delta x \eta_x \Big|_j^n + \left(\frac{\Delta t}{2\Delta x}\right) \frac{2}{6} \Delta x^3 \eta_{xxx} \Big|_j^n + \left(\frac{\Delta t}{2\Delta x}\right) \frac{2}{120} \Delta x^5 \eta_{xxxxx} \Big|_j^n \\ & + \left(\frac{\Delta t}{2\Delta x}\right) 2\Delta x \Delta t \eta_{xt} \Big|_j^n + \left(\frac{\Delta t}{2\Delta x}\right) \frac{6}{6} \Delta x \Delta t^2 \eta_{xtt} \Big|_j^n \\ & + \left(\frac{\Delta t}{2\Delta x}\right) \frac{8}{24} \Delta x^3 \Delta t \eta_{xxxxt} \Big|_j^n + \left(\frac{\Delta t}{2\Delta x}\right) \frac{8}{24} \Delta x \Delta t^3 \eta_{xttt} \Big|_j^n \\ & + \left(\frac{\Delta t}{2\Delta x}\right) \frac{2}{12} \Delta x^3 \Delta t^2 \eta_{xxxxtt} \Big|_j^n + \left(\frac{\Delta t}{2\Delta x}\right) \frac{2}{24} \Delta x \Delta t^4 \eta_{xtttt} \Big|_j^n + \dots \end{aligned}$$

$$a(\eta_{j+1}^{n+1} - \eta_{j-1}^{n+1}) =$$

$$\begin{aligned} & \Delta t \eta_x \Big|_j^n + \Delta t^2 \eta_{xt} \Big|_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^3 \eta_{xtt} \Big|_j^n + \frac{4}{24} \Delta t^4 \eta_{xttt} \Big|_j^n + \frac{1}{24} \Delta t^5 \eta_{xtttt} \Big|_j^n \\ & + \frac{1}{6} \Delta x^2 \Delta t \eta_{xxx} \Big|_j^n + \frac{4}{24} \Delta x^2 \Delta t^2 \eta_{xxxxt} \Big|_j^n + \frac{1}{12} \Delta x^2 \Delta t^3 \eta_{xxxxtt} \Big|_j^n \\ & + \frac{1}{120} \Delta x^4 \Delta t \eta_{xxxxx} \Big|_j^n + \dots \end{aligned}$$

Sehingga ketika disubstitusikan ke dalam persamaan

$$u_j^{n+1} + a(\eta_{j+1}^{n+1} - \eta_{j-1}^{n+1}) = u_j^n$$

Diperoleh:

$$\begin{aligned} & \left(u_j^n + \Delta t u_t \Big|_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt} \Big|_j^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 u_{ttt} \Big|_j^n + \frac{1}{24} \Delta t^4 u_{tttt} \Big|_j^n + \frac{1}{120} \Delta t^5 u_{ttttt} \Big|_j^n + \dots \right) \\ & + \left(\Delta t \eta_x \Big|_j^n + \Delta t^2 \eta_{xt} \Big|_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^3 \eta_{xtt} \Big|_j^n + \frac{4}{24} \Delta t^4 \eta_{xttt} \Big|_j^n \right. \\ & + \frac{1}{24} \Delta t^5 \eta_{xtttt} \Big|_j^n + \frac{1}{6} \Delta x^2 \Delta t \eta_{xxx} \Big|_j^n + \frac{4}{24} \Delta x^2 \Delta t^2 \eta_{xxxxt} \Big|_j^n \\ & \left. + \frac{1}{12} \Delta x^2 \Delta t^3 \eta_{xxxxtt} \Big|_j^n + \frac{1}{120} \Delta x^4 \Delta t \eta_{xxxxx} \Big|_j^n + \dots \right) = u_j^n \end{aligned}$$

Sehingga:

$$\begin{aligned}
& \Delta t u_t|_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt}|_j^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 u_{ttt}|_j^n + \frac{1}{24} \Delta t^4 u_{tttt}|_j^n + \frac{1}{120} \Delta t^5 u_{ttttt}|_j^n + \Delta t \eta_x|_j^n \\
& + \Delta t^2 \eta_{xt}|_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^3 \eta_{xtt}|_j^n + \frac{4}{24} \Delta t^4 \eta_{xttt}|_j^n + \frac{1}{24} \Delta t^5 \eta_{xtttt}|_j^n \\
& + \frac{1}{6} \Delta x^2 \Delta t \eta_{xxx}|_j^n + \frac{4}{24} \Delta x^2 \Delta t^2 \eta_{xxxxt}|_j^n + \frac{1}{12} \Delta x^2 \Delta t^3 \eta_{xxxxtt}|_j^n \\
& + \frac{1}{120} \Delta x^4 \Delta t \eta_{xxxxx}|_j^n + \dots = 0
\end{aligned}$$

Kemudian, kelompokkan persamaan di atas untuk mempermudah perhitungan

$$\begin{aligned}
& (u_t + \eta_x)|_j^n \Delta t + \left(\frac{1}{2} u_{tt} + \eta_{xt} \right)|_j^n \Delta t^2 + \left(\frac{1}{6} u_{ttt} + \frac{1}{2} \eta_{xtt} \right)|_j^n \Delta t^3 \\
& + \left(\frac{1}{24} u_{tttt} + \frac{1}{6} \eta_{xttt} \right)|_j^n \Delta t^4 + \left(\frac{1}{120} u_{ttttt} + \frac{1}{24} \eta_{xxxxt} \right)|_j^n \Delta t^5 \\
& + \frac{1}{6} \eta_{xxx}|_j^n \Delta x^2 \Delta t + \frac{1}{6} \eta_{xxxxt}|_j^n \Delta x^2 \Delta t^2 + \frac{1}{12} \eta_{xxxxtt}|_j^n \Delta x^2 \Delta t^3 \\
& + \frac{1}{120} \eta_{xxxxx}|_j^n \Delta x^4 \Delta t + \dots = 0
\end{aligned}$$

Selanjutnya adalah bagi persamaan di atas dengan Δt , dan diperoleh:

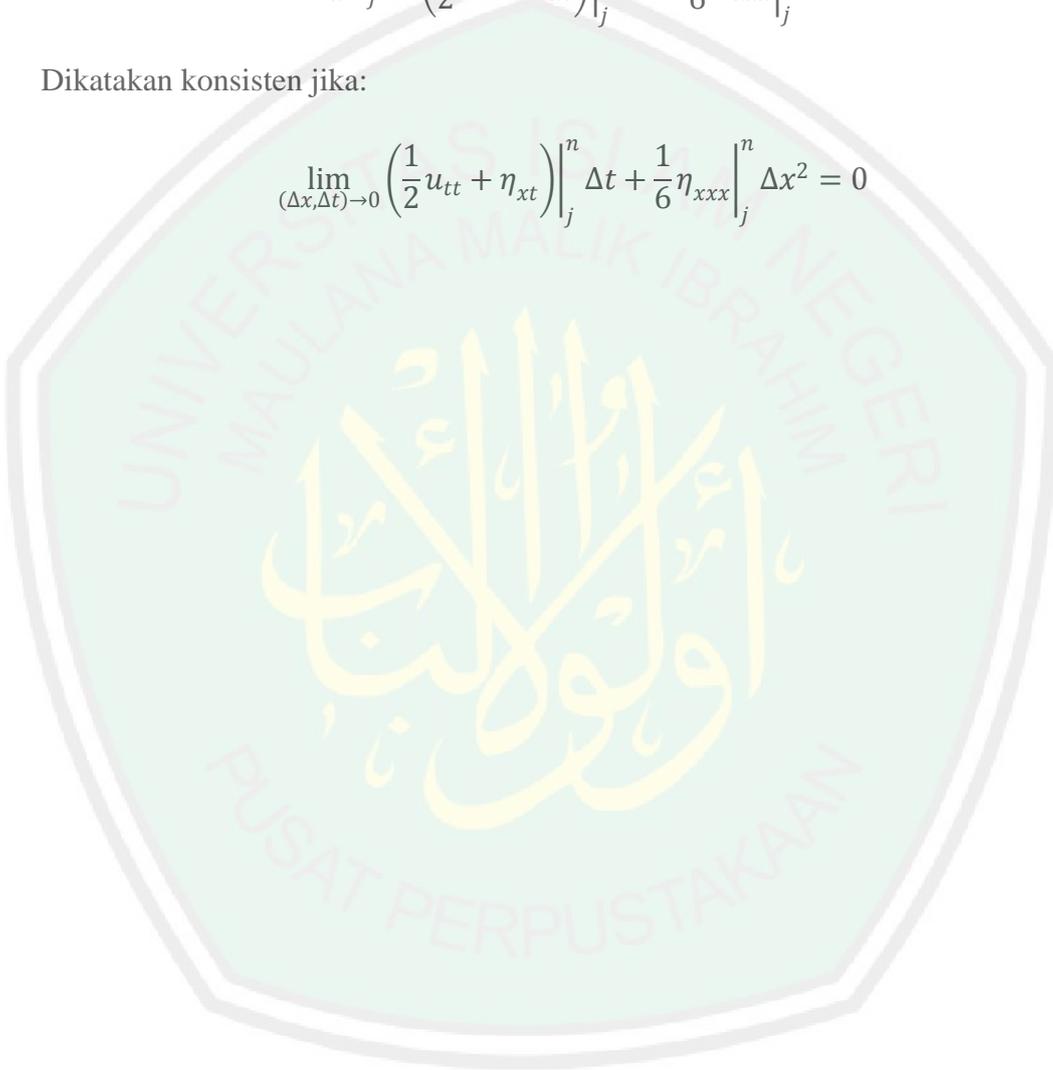
$$\begin{aligned}
& (u_t + \eta_x)|_j^n + \left(\frac{1}{2} u_{tt} + \eta_{xt} \right)|_j^n \Delta t + \left(\frac{1}{6} u_{ttt} + \frac{1}{2} \eta_{xtt} \right)|_j^n \Delta t^2 \\
& + \left(\frac{1}{24} u_{tttt} + \frac{1}{6} \eta_{xttt} \right)|_j^n \Delta t^3 + \left(\frac{1}{120} u_{ttttt} + \frac{1}{24} \eta_{xxxxt} \right)|_j^n \Delta t^4 \\
& + \frac{1}{6} \eta_{xxx}|_j^n \Delta x^2 + \frac{1}{6} \eta_{xxxxt}|_j^n \Delta x^2 \Delta t + \frac{1}{12} \eta_{xxxxtt}|_j^n \Delta x^2 \Delta t^2 \\
& + \frac{1}{120} \eta_{xxxxx}|_j^n \Delta x^4 + \dots =
\end{aligned}$$

Karena metode beda hingga dalam menyelesaikan solusi numerik adalah metode beda hingga FTCS, dengan orde $(\Delta t, \Delta x^2)$ Maka, *error* pemotongan pertama diperoleh:

$$(u_t + \eta_x)|_j^n + \left(\frac{1}{2}u_{tt} + \eta_{xt}\right)|_j^n \Delta t + \frac{1}{6}\eta_{xxx}|_j^n \Delta x^2 = 0$$

Dikatakan konsisten jika:

$$\lim_{(\Delta x, \Delta t) \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2}u_{tt} + \eta_{xt}\right)|_j^n \Delta t + \frac{1}{6}\eta_{xxx}|_j^n \Delta x^2 = 0$$



Lampiran 2. Perhitungan analisis konsistensi untuk persamaan (3.10).

Dengan bentuk persamaan:

$$a(u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}) - b(\eta_{j+1}^{n+1} + \eta_{j-1}^{n+1}) + (1 + 2b)\eta_j^{n+1} = \eta_j^n$$

Ekspansi deret Taylor untuk persamaan di atas yakni:

$$\begin{aligned} u_{j+1}^{n+1} = & u_j^n + \Delta t u_t|_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt}|_j^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 u_{ttt}|_j^n + \frac{1}{24} \Delta t^4 u_{tttt}|_j^n + \frac{1}{120} \Delta t^5 u_{ttttt}|_j^n \\ & + \Delta x u_x|_j^n + \frac{1}{2} \Delta x^2 u_{xx}|_j^n + \frac{1}{6} \Delta x^3 u_{xxx}|_j^n + \frac{1}{24} \Delta x^4 u_{xxxx}|_j^n \\ & + \frac{1}{120} \Delta x^5 u_{xxxxx}|_j^n + \Delta x \Delta t u_{xt}|_j^n + \frac{3}{6} \Delta x^2 \Delta t u_{xxt}|_j^n \\ & + \frac{3}{6} \Delta x \Delta t^2 u_{xtt}|_j^n + \frac{4}{24} \Delta x^3 \Delta t u_{xxxxt}|_j^n + \frac{6}{24} \Delta x^2 \Delta t^2 u_{xxxt}|_j^n \\ & + \frac{4}{24} \Delta x \Delta t^3 u_{xttt}|_j^n + \frac{1}{24} \Delta x^4 \Delta t u_{xxxxxt}|_j^n + \frac{1}{12} \Delta x^3 \Delta t^2 u_{xxxxt}|_j^n \\ & + \frac{1}{12} \Delta x^2 \Delta t^3 u_{xtttt}|_j^n + \frac{1}{24} \Delta x \Delta t^4 u_{xtttt}|_j^n + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{j-1}^{n+1} = & u_j^n + \Delta t u_t|_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt}|_j^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 u_{ttt}|_j^n + \frac{1}{24} \Delta t^4 u_{tttt}|_j^n + \frac{1}{120} \Delta t^5 u_{ttttt}|_j^n \\ & - \Delta x u_x|_j^n + \frac{1}{2} \Delta x^2 u_{xx}|_j^n - \frac{1}{6} \Delta x^3 u_{xxx}|_j^n + \frac{1}{24} \Delta x^4 u_{xxxx}|_j^n \\ & - \frac{1}{120} \Delta x^5 u_{xxxxx}|_j^n - \Delta x \Delta t u_{xt}|_j^n + \frac{3}{6} \Delta x^2 \Delta t u_{xxt}|_j^n \\ & - \frac{3}{6} \Delta x \Delta t^2 u_{xtt}|_j^n - \frac{4}{24} \Delta x^3 \Delta t u_{xxxxt}|_j^n + \frac{6}{24} \Delta x^2 \Delta t^2 u_{xxxt}|_j^n \\ & - \frac{4}{24} \Delta x \Delta t^3 u_{xttt}|_j^n + \frac{1}{24} \Delta x^4 \Delta t u_{xxxxxt}|_j^n - \frac{1}{12} \Delta x^3 \Delta t^2 u_{xxxxt}|_j^n \\ & + \frac{1}{12} \Delta x^2 \Delta t^3 u_{xtttt}|_j^n - \frac{1}{24} \Delta x \Delta t^4 u_{xtttt}|_j^n + \end{aligned}$$

$$\eta_j^{n+1} = \eta_j^n + \Delta t \eta_t|_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 \eta_{tt}|_j^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 \eta_{ttt}|_j^n + \frac{1}{24} \Delta t^4 \eta_{tttt}|_j^n + \frac{1}{120} \Delta t^5 \eta_{ttttt}|_j^n$$

+ ...

$$\eta_{j+1}^{n+1} = \eta_j^n + \Delta t \eta_t|_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 \eta_{tt}|_j^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 \eta_{ttt}|_j^n + \frac{1}{24} \Delta t^4 \eta_{tttt}|_j^n + \frac{1}{120} \Delta t^5 \eta_{ttttt}|_j^n$$

$$+ \Delta x \eta_x|_j^n + \frac{1}{2} \Delta x^2 \eta_{xx}|_j^n + \frac{1}{6} \Delta x^3 \eta_{xxx}|_j^n + \frac{1}{24} \Delta x^4 \eta_{xxxx}|_j^n$$

$$+ \frac{1}{120} \Delta x^5 \eta_{xxxxx}|_j^n + \Delta x \Delta t \eta_{xt}|_j^n + \frac{3}{6} \Delta x^2 \Delta t \eta_{xxt}|_j^n + \frac{3}{6} \Delta x \Delta t^2 \eta_{xtt}|_j^n$$

$$+ \frac{4}{24} \Delta x^3 \Delta t \eta_{xxxt}|_j^n + \frac{6}{24} \Delta x^2 \Delta t^2 \eta_{xxtt}|_j^n + \frac{4}{24} \Delta x \Delta t^3 \eta_{xttt}|_j^n$$

$$+ \frac{1}{24} \Delta x^4 \Delta t \eta_{xxxxt}|_j^n + \frac{1}{12} \Delta x^3 \Delta t^2 \eta_{xxxtt}|_j^n + \frac{1}{12} \Delta x^2 \Delta t^3 \eta_{xxttt}|_j^n$$

$$+ \frac{1}{24} \Delta x \Delta t^4 \eta_{xtttt}|_j^n + \dots$$

$$\eta_{j-1}^{n+1} = \eta_j^n + \Delta t \eta_t|_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 \eta_{tt}|_j^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 \eta_{ttt}|_j^n + \frac{1}{24} \Delta t^4 \eta_{tttt}|_j^n + \frac{1}{120} \Delta t^5 \eta_{ttttt}|_j^n$$

$$- \Delta x \eta_x|_j^n + \frac{1}{2} \Delta x^2 \eta_{xx}|_j^n - \frac{1}{6} \Delta x^3 \eta_{xxx}|_j^n + \frac{1}{24} \Delta x^4 \eta_{xxxx}|_j^n$$

$$- \frac{1}{120} \Delta x^5 \eta_{xxxxx}|_j^n - \Delta x \Delta t \eta_{xt}|_j^n + \frac{3}{6} \Delta x^2 \Delta t \eta_{xxt}|_j^n - \frac{3}{6} \Delta x \Delta t^2 \eta_{xtt}|_j^n$$

$$- \frac{4}{24} \Delta x^3 \Delta t \eta_{xxxt}|_j^n + \frac{6}{24} \Delta x^2 \Delta t^2 \eta_{xxtt}|_j^n - \frac{4}{24} \Delta x \Delta t^3 \eta_{xttt}|_j^n$$

$$+ \frac{1}{24} \Delta x^4 \Delta t \eta_{xxxxt}|_j^n - \frac{1}{12} \Delta x^3 \Delta t^2 \eta_{xxxtt}|_j^n + \frac{1}{12} \Delta x^2 \Delta t^3 \eta_{xxttt}|_j^n$$

$$- \frac{1}{24} \Delta x \Delta t^4 \eta_{xtttt}|_j^n + \dots$$

dengan

$$\begin{aligned}
u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1} &= 2\Delta x u_x|_j^n + \frac{2}{6}\Delta x^3 u_{xxx}|_j^n + \frac{2}{120}\Delta x^5 u_{xxxxx}|_j^n + 2\Delta x\Delta t u_{xt}|_j^n \\
&+ \frac{6}{6}\Delta x\Delta t^2 u_{xtt}|_j^n + \frac{8}{24}\Delta x^3\Delta t u_{xxxxt}|_j^n + \frac{8}{24}\Delta x\Delta t^3 u_{xttt}|_j^n \\
&+ \frac{2}{12}\Delta x^3\Delta t^2 u_{xxxxtt}|_j^n + \frac{2}{24}\Delta x\Delta t^4 u_{xtttt}|_j^n + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta_{j+1}^{n+1} + \eta_{j-1}^{n+1} &= 2\eta_j^n + 2\Delta t \eta_t|_j^n + \frac{2}{2}\Delta t^2 \eta_{tt}|_j^n + \frac{2}{6}\Delta t^3 \eta_{ttt}|_j^n + \frac{2}{24}\Delta t^4 \eta_{tttt}|_j^n \\
&+ \frac{2}{120}\Delta t^5 \eta_{ttttt}|_j^n + \frac{2}{2}\Delta x^2 \eta_{xx}|_j^n + \frac{2}{24}\Delta x^4 \eta_{xxxx}|_j^n + \frac{6}{6}\Delta x^2\Delta t \eta_{xxt}|_j^n \\
&+ \frac{12}{24}\Delta x^2\Delta t^2 \eta_{xxtt}|_j^n + \frac{2}{24}\Delta x^4\Delta t \eta_{xxxxt}|_j^n + \frac{2}{12}\Delta x^2\Delta t^3 \eta_{xxttt}|_j^n + \dots
\end{aligned}$$

Case I

Karena $u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}$ dikalikan dengan a , dimana $a = \frac{\Delta t}{2\Delta x}$ sehingga:

$$a(u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}) =$$

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\Delta t}{2\Delta x}\right) 2\Delta x u_x|_j^n + \left(\frac{\Delta t}{2\Delta x}\right) \frac{2}{6}\Delta x^3 u_{xxx}|_j^n + \left(\frac{\Delta t}{2\Delta x}\right) \frac{2}{120}\Delta x^5 u_{xxxxx}|_j^n \\
&+ \left(\frac{\Delta t}{2\Delta x}\right) 2\Delta x\Delta t u_{xt}|_j^n + \left(\frac{\Delta t}{2\Delta x}\right) \frac{6}{6}\Delta x\Delta t^2 u_{xtt}|_j^n \\
&+ \left(\frac{\Delta t}{2\Delta x}\right) \frac{8}{24}\Delta x^3\Delta t u_{xxxxt}|_j^n + \left(\frac{\Delta t}{2\Delta x}\right) \frac{8}{24}\Delta x\Delta t^3 u_{xttt}|_j^n \\
&+ \left(\frac{\Delta t}{2\Delta x}\right) \frac{2}{12}\Delta x^3\Delta t^2 u_{xxxxtt}|_j^n + \left(\frac{\Delta t}{2\Delta x}\right) \frac{2}{24}\Delta x\Delta t^4 u_{xtttt}|_j^n + \dots
\end{aligned}$$

$$a(u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}) =$$

$$\begin{aligned} & \Delta t u_x|_j^n + \Delta t^2 u_{xt}|_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^3 u_{xtt}|_j^n + \frac{4}{24} \Delta t^4 u_{xttt}|_j^n + \frac{1}{24} \Delta t^5 u_{xtttt}|_j^n \\ & + \frac{1}{6} \Delta x^2 \Delta t u_{xxx}|_j^n + \frac{4}{24} \Delta x^2 \Delta t^2 u_{xxxxt}|_j^n + \frac{1}{12} \Delta x^2 \Delta t^3 u_{xxxxtt}|_j^n \\ & + \frac{1}{120} \Delta x^4 \Delta t u_{xxxxx}|_j^n + \dots \end{aligned}$$

Case II

Karena $\eta_{j+1}^{n+1} + \eta_{j-1}^{n+1}$ dikalikan dengan b , dengan $b = \frac{\Delta t(d-1)R}{\Delta x^2}$, diperoleh:

$$\begin{aligned} & b(\eta_{j+1}^{n+1} + \eta_{j-1}^{n+1}) = \\ & 2 \left(\frac{\Delta t(d-1)R}{\Delta x^2} \right) \eta_j^n + 2 \left(\frac{\Delta t(d-1)R}{\Delta x^2} \right) \Delta t \eta_t|_j^n + 2 \left(\frac{\Delta t(d-1)R}{\Delta x^2} \right) \Delta t^2 \eta_{tt}|_j^n \\ & + \frac{2}{6} \left(\frac{\Delta t(d-1)R}{\Delta x^2} \right) \Delta t^3 \eta_{ttt}|_j^n + \frac{2}{24} \left(\frac{\Delta t(d-1)R}{\Delta x^2} \right) \Delta t^4 \eta_{tttt}|_j^n \\ & + \frac{2}{120} \left(\frac{\Delta t(d-1)R}{\Delta x^2} \right) \Delta t^5 \eta_{ttttt}|_j^n + \frac{2}{2} \left(\frac{\Delta t(d-1)R}{\Delta x^2} \right) \Delta x^2 \eta_{xx}|_j^n \\ & + \frac{2}{24} \left(\frac{\Delta t(d-1)R}{\Delta x^2} \right) \Delta x^4 \eta_{xxxx}|_j^n + \frac{6}{6} \left(\frac{\Delta t(d-1)R}{\Delta x^2} \right) \Delta x^2 \Delta t \eta_{xxt}|_j^n \\ & + \frac{12}{24} \left(\frac{\Delta t(d-1)R}{\Delta x^2} \right) \Delta x^2 \Delta t^2 \eta_{xxtt}|_j^n \\ & + \frac{2}{24} \left(\frac{\Delta t(d-1)R}{\Delta x^2} \right) \Delta x^4 \Delta t \eta_{xxxxt}|_j^n \\ & + \frac{2}{12} \left(\frac{\Delta t(d-1)R}{\Delta x^2} \right) \Delta x^2 \Delta t^3 \eta_{xxttt}|_j^n + \dots \end{aligned}$$

$$b(\eta_{j+1}^{n+1} + \eta_{j-1}^{n+1}) =$$

$$\begin{aligned}
 & 2 \left(\frac{\Delta t(d-1)R}{\Delta x^2} \right) \eta \Big|_j^n + 2 \left(\frac{\Delta t^2(d-1)R}{\Delta x^2} \right) \eta_t \Big|_j^n + \left(\frac{\Delta t^3(d-1)R}{\Delta x^2} \right) \eta_{tt} \Big|_j^n \\
 & + \frac{1}{3} \left(\frac{\Delta t^4(d-1)R}{\Delta x^2} \right) \eta_{ttt} \Big|_j^n + \frac{1}{12} \left(\frac{\Delta t^5(d-1)R}{\Delta x^2} \right) \eta_{tttt} \Big|_j^n \\
 & + \frac{1}{60} \left(\frac{\Delta t^6(d-1)R}{\Delta x^2} \right) \eta_{ttttt} \Big|_j^n + (\Delta t(d-1)R) \eta_{xx} \Big|_j^n \\
 & + \frac{1}{12} (\Delta x^2 \Delta t(d-1)R) \eta_{xxxx} \Big|_j^n + (\Delta t^2(d-1)R) \eta_{xxt} \Big|_j^n \\
 & + \frac{1}{2} (\Delta t^3(d-1)R) \eta_{xxtt} \Big|_j^n + \frac{1}{12} (\Delta x^2 \Delta t^2(d-1)R) \eta_{xxxxt} \Big|_j^n \\
 & + \frac{1}{6} (t^4(d-1)R) \eta_{xxttt} \Big|_j^n + \dots
 \end{aligned}$$

Case III

Karena η_j^{n+1} dikalikan dengan $(1 + 2b)$, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
 (1 + 2b)\eta_j^{n+1} &= \left(1 + 2 \left(\frac{\Delta t(d-1)R}{\Delta x^2} \right) \right) \left(\eta_j^n + \Delta t \eta_t \Big|_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 \eta_{tt} \Big|_j^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 \eta_{ttt} \Big|_j^n \right. \\
 & \left. + \frac{1}{24} \Delta t^4 \eta_{tttt} \Big|_j^n + \frac{1}{120} \Delta t^5 \eta_{ttttt} \Big|_j^n + \dots \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (1 + 2b)\eta_j^{n+1} &= u_j^n + \Delta t \eta_t \Big|_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 \eta_{tt} \Big|_j^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 \eta_{ttt} \Big|_j^n + \frac{1}{24} \Delta t^4 \eta_{tttt} \Big|_j^n \\
 & + \frac{1}{120} \Delta t^5 \eta_{ttttt} \Big|_j^n + 2 \left(\frac{\Delta t(d-1)R}{\Delta x^2} \right) u \Big|_j^n + 2 \left(\frac{\Delta t(d-1)R}{\Delta x^2} \right) \Delta t \eta_t \Big|_j^n \\
 & + 2 \left(\frac{\Delta t(d-1)R}{\Delta x^2} \right) \frac{1}{2} \Delta t^2 \eta_{tt} \Big|_j^n + 2 \left(\frac{\Delta t(d-1)R}{\Delta x^2} \right) \frac{1}{6} \Delta t^3 \eta_{ttt} \Big|_j^n \\
 & + 2 \left(\frac{\Delta t(d-1)R}{\Delta x^2} \right) \frac{1}{24} \Delta t^4 \eta_{tttt} \Big|_j^n + 2 \left(\frac{\Delta t(d-1)R}{\Delta x^2} \right) \frac{1}{120} \Delta t^5 \eta_{ttttt} \Big|_j^n \\
 & + \dots
 \end{aligned}$$

Sehingga:

$$\begin{aligned}
 (1 + 2b)\eta_j^{n+1} &= u_j^n + \Delta t \eta_t \Big|_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 \eta_{tt} \Big|_j^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 \eta_{ttt} \Big|_j^n + \frac{1}{24} \Delta t^4 \eta_{tttt} \Big|_j^n \\
 &+ \frac{1}{120} \Delta t^5 \eta_{ttttt} \Big|_j^n + 2 \left(\frac{\Delta t (d-1)R}{\Delta x^2} \right) u \Big|_j^n + 2 \left(\frac{\Delta t^2 (d-1)R}{\Delta x^2} \right) \eta_t \Big|_j^n \\
 &+ \left(\frac{\Delta t^3 (d-1)R}{\Delta x^2} \right) \eta_{tt} \Big|_j^n + \frac{1}{3} \left(\frac{\Delta t^4 (d-1)R}{\Delta x^2} \right) \eta_{ttt} \Big|_j^n \\
 &+ \frac{1}{12} \left(\frac{\Delta t^5 (d-1)R}{\Delta x^2} \right) \eta_{tttt} \Big|_j^n + \frac{1}{60} \left(\frac{\Delta t^6 (d-1)R}{\Delta x^2} \right) \eta_{ttttt} \Big|_j^n + \dots
 \end{aligned}$$

Selanjutnya adalah substitusikan hasil dari *case I*, *II*, dan *III* ke dalam persamaan

$$a(u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}) - b(\eta_{j+1}^{n+1} + \eta_{j-1}^{n+1}) + (1 + 2b)\eta_j^{n+1} = \eta_j^n$$

Sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
& \left(\Delta t u_x|_j^n + \Delta t^2 u_{xt}|_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^3 u_{xtt}|_j^n + \frac{4}{24} \Delta t^4 u_{xttt}|_j^n + \frac{1}{24} \Delta t^5 u_{xtttt}|_j^n \right. \\
& \quad + \frac{1}{6} \Delta x^2 \Delta t u_{xxx}|_j^n + \frac{4}{24} \Delta x^2 \Delta t^2 u_{xxxxt}|_j^n + \frac{1}{12} \Delta x^2 \Delta t^3 u_{xxxxtt}|_j^n \\
& \quad \left. + \frac{1}{120} \Delta x^4 \Delta t u_{xxxxx}|_j^n + \dots \right) \\
& - \left(2 \left(\frac{\Delta t(d-1)R}{\Delta x^2} \right) \eta|_j^n + 2 \left(\frac{\Delta t^2(d-1)R}{\Delta x^2} \right) \eta_t|_j^n \right. \\
& \quad + \left(\frac{\Delta t^3(d-1)R}{\Delta x^2} \right) \eta_{tt}|_j^n + \frac{1}{3} \left(\frac{\Delta t^4(d-1)R}{\Delta x^2} \right) \eta_{ttt}|_j^n \\
& \quad + \frac{1}{12} \left(\frac{\Delta t^5(d-1)R}{\Delta x^2} \right) \eta_{tttt}|_j^n + \frac{1}{60} \left(\frac{\Delta t^6(d-1)R}{\Delta x^2} \right) \eta_{ttttt}|_j^n \\
& \quad + (\Delta t(d-1)R) \eta_{xx}|_j^n + \frac{1}{12} (\Delta x^2 \Delta t(d-1)R) \eta_{xxxx}|_j^n \\
& \quad + (\Delta t^2(d-1)R) \eta_{xxt}|_j^n + \frac{1}{2} (\Delta t^3(d-1)R) \eta_{xxtt}|_j^n \\
& \quad + \frac{1}{12} (\Delta x^2 \Delta t^2(d-1)R) \eta_{xxxxt}|_j^n + \frac{1}{6} (t^4(d-1)R) \eta_{xxttt}|_j^n + \dots \Big) \\
& + \left(\eta_j^n + \Delta t \eta_t|_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 \eta_{tt}|_j^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 \eta_{ttt}|_j^n + \frac{1}{24} \Delta t^4 \eta_{tttt}|_j^n \right. \\
& \quad + \frac{1}{120} \Delta t^5 \eta_{ttttt}|_j^n + 2 \left(\frac{\Delta t(d-1)R}{\Delta x^2} \right) \eta|_j^n + 2 \left(\frac{\Delta t^2(d-1)R}{\Delta x^2} \right) \eta_t|_j^n \\
& \quad + \left(\frac{\Delta t^3(d-1)R}{\Delta x^2} \right) \eta_{tt}|_j^n + \frac{1}{3} \left(\frac{\Delta t^4(d-1)R}{\Delta x^2} \right) \eta_{ttt}|_j^n \\
& \quad \left. + \frac{1}{12} \left(\frac{\Delta t^5(d-1)R}{\Delta x^2} \right) \eta_{tttt}|_j^n + \frac{1}{60} \left(\frac{\Delta t^6(d-1)R}{\Delta x^2} \right) \eta_{ttttt}|_j^n + \dots \right) \\
& = \eta_j^n
\end{aligned}$$

Dengan bentuk sederhana

$$\begin{aligned}
& \Delta t u_x|_j^n + \Delta t^2 u_{xt}|_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^3 u_{xtt}|_j^n + \frac{4}{24} \Delta t^4 u_{xttt}|_j^n + \frac{1}{24} \Delta t^5 u_{xtttt}|_j^n \\
& + \frac{1}{6} \Delta x^2 \Delta t u_{xxx}|_j^n + \frac{4}{24} \Delta x^2 \Delta t^2 u_{xxxxt}|_j^n + \frac{1}{12} \Delta x^2 \Delta t^3 u_{xxxxtt}|_j^n \\
& + \frac{1}{120} \Delta x^4 \Delta t u_{xxxxx}|_j^n - (\Delta t(d-1)R) \eta_{xx}|_j^n \\
& - \frac{1}{12} (\Delta x^2 \Delta t(d-1)R) \eta_{xxx}|_j^n - (\Delta t^2(d-1)R) \eta_{xxt}|_j^n \\
& - \frac{1}{2} (\Delta t^3(d-1)R) \eta_{xxtt}|_j^n - \frac{1}{12} (\Delta x^2 \Delta t^2(d-1)R) \eta_{xxxxt}|_j^n \\
& - \frac{1}{6} (t^4(d-1)R) \eta_{xxttt}|_j^n + \eta_j^n + \Delta t \eta_t|_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 \eta_{tt}|_j^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 \eta_{ttt}|_j^n \\
& + \frac{1}{24} \Delta t^4 \eta_{tttt}|_j^n + \frac{1}{120} \Delta t^5 \eta_{ttttt}|_j^n + \dots = \eta_j^n
\end{aligned}$$

Kelompokkan persamaan dengan nilai Δt dan Δx yang sama untuk mempermudah perhitungan, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
& \Delta t u_x|_j^n + \Delta t \eta_t|_j^n - (\Delta t(d-1)R)\eta_{xx}|_j^n + \Delta t^2 u_{xt}|_j^n + \frac{1}{2}\Delta t^2 \eta_{tt}|_j^n \\
& - (\Delta t^2(d-1)R)\eta_{xxt}|_j^n + \frac{1}{2}\Delta t^3 u_{xtt}|_j^n + \frac{1}{6}\Delta t^3 \eta_{ttt}|_j^n \\
& - \frac{1}{2}(\Delta t^3(d-1)R)\eta_{xxtt}|_j^n + \frac{4}{24}\Delta t^4 u_{xttt}|_j^n + \frac{1}{24}\Delta t^4 \eta_{tttt}|_j^n \\
& - \frac{1}{6}(\Delta t^4(d-1)R)\eta_{xxttt}|_j^n + \frac{1}{24}\Delta t^5 u_{xtttt}|_j^n + \frac{1}{120}\Delta t^5 \eta_{ttttt}|_j^n \\
& + \frac{1}{6}\Delta x^2 \Delta t u_{xxx}|_j^n - \frac{1}{12}(\Delta x^2 \Delta t(d-1)R)\eta_{xxxx}|_j^n \\
& + \frac{4}{24}\Delta x^2 \Delta t^2 u_{xxxt}|_j^n - \frac{1}{12}(\Delta x^2 \Delta t^2(d-1)R)\eta_{xxxxt}|_j^n \\
& + \frac{1}{12}\Delta x^2 \Delta t^3 u_{xxxxt}|_j^n + \frac{1}{120}\Delta x^4 \Delta t u_{xxxxx}|_j^n + \dots = \eta_j^n - \eta_j^n
\end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned}
& (u_x + \eta_t - (d-1)R\eta_{xx}) \Big|_j^n \Delta t + \left(u_{xt} + \frac{1}{2} \eta_{tt} - (d-1)R\eta_{xxt} \right) \Big|_j^n \Delta t^2 \\
& + \left(\frac{1}{2} u_{xtt} + \frac{1}{6} \eta_{ttt} - \frac{1}{2} (d-1)R \eta_{xxtt} \right) \Big|_j^n \Delta t^3 \\
& + \left(\frac{1}{6} u_{xttt} + \frac{1}{24} \eta_{tttt} - \frac{1}{6} (d-1)R \eta_{xxttt} \right) \Big|_j^n \Delta t^4 \\
& + \left(\frac{1}{24} u_{xtttt} + \frac{1}{120} \eta_{ttttt} \right) \Big|_j^n \Delta t^5 \\
& + \left(\frac{1}{6} u_{xxx} - \frac{1}{12} (d-1)R \eta_{xxxx} \right) \Big|_j^n \Delta x^2 \Delta t \\
& + \left(\frac{1}{6} u_{xxxt} - \frac{1}{12} (d-1)R \eta_{xxxxt} \right) \Big|_j^n \Delta x^2 \Delta t^2 + \frac{1}{12} u_{xxxtt} \Big|_j^n \Delta x^2 \Delta t^3 \\
& + \frac{1}{120} u_{xxxxx} \Big|_j^n \Delta x^4 \Delta t + \dots = 0
\end{aligned}$$

Selanjutnya adalah bagi persamaan di atas dengan Δt , dan diperoleh:

$$\begin{aligned}
& (u_x + \eta_t - (d-1)R\eta_{xx}) \Big|_j^n + \left(u_{xt} + \frac{1}{2} \eta_{tt} - (d-1)R\eta_{xxt} \right) \Big|_j^n \Delta t \\
& + \left(\frac{1}{2} u_{xtt} + \frac{1}{6} \eta_{ttt} - \frac{1}{2} (d-1)R\eta_{xxtt} \right) \Big|_j^n \Delta t^2 \\
& + \left(\frac{1}{6} u_{xttt} + \frac{1}{24} \eta_{tttt} - \frac{1}{6} (d-1)R\eta_{xxttt} \right) \Big|_j^n \Delta t^3 \\
& + \left(\frac{1}{24} u_{xtttt} + \frac{1}{120} \eta_{ttttt} \right) \Big|_j^n \Delta t^4 \\
& + \left(\frac{1}{6} u_{xxx} - \frac{1}{12} (d-1)R\eta_{xxxx} \right) \Big|_j^n \Delta x^2 \\
& + \left(\frac{1}{6} u_{xxxxt} - \frac{1}{12} (d-1)R\eta_{xxxxxt} \right) \Big|_j^n \Delta x^2 \Delta t + \frac{1}{12} u_{xxxxt} \Big|_j^n \Delta x^2 \Delta t^2 \\
& + \frac{1}{120} u_{xxxxx} \Big|_j^n \Delta x^4 + \dots = 0
\end{aligned}$$

Karena metode beda hingga dalam menyelesaikan solusi numerik adalah metode beda hingga FTCS, dengan orde $(\Delta t, \Delta x^2)$ Maka, *error* pemotongan pertama diperoleh:

$$\begin{aligned}
& (u_x + \eta_t - (d-1)R\eta_{xx}) \Big|_j^n + \left(u_{xt} + \frac{1}{2} \eta_{tt} - (d-1)R\eta_{xxt} \right) \Big|_j^n \Delta t \\
& + \left(\frac{1}{6} u_{xxx} - \frac{1}{12} (d-1)R\eta_{xxxx} \right) \Big|_j^n \Delta x^2 = 0
\end{aligned}$$

Dikatakan konsisten jika:

$$\begin{aligned}
& \lim_{(\Delta x, \Delta t) \rightarrow 0} \left(u_{xt} + \frac{1}{2} \eta_{tt} - (d-1)R\eta_{xxt} \right) \Big|_j^n \Delta t + \left(\frac{1}{6} u_{xxx} - \frac{1}{12} (d-1)R\eta_{xxxx} \right) \Big|_j^n \Delta x^2 \\
& = 0
\end{aligned}$$

Lampiran 3. Script M-file gerak permukaan gelombang Jika $d - 1 = 0,5$ dan $k = 0,3$.

```

clc,clear all
% clf

% dt=0.1;
% dx=0.025;
% h=1;
% dt=0.5;
% dx=1;
dx=0.1;
g=10;
d=1.5;
dt=dx/(sqrt(g*d));
k=0.3;
h=1;
% lambda=39.4;
t=0:dt:5;
x=-15:dx:30;
% d=1.5;
% g=10;
% k=0.5;
lamda=39.4;
R=(k*sqrt(g*h))/(g*lamda);

M=length(x);
N=length(t);

u=zeros(M,N);
eta=zeros(M,N);

% kondisi awal
u(:,1)=0;
eta(:,1)=sech(x).^2;
% eta(:,1)=sin(x).^2;

% kondisi batas
u(1,:)=0;
eta(1,:)=0;
u(M,:)=0;
eta(M,:)=0;

a1=zeros(M-2,M-2);
a2=zeros(M-2,M-2);
b1=zeros(M-2,M-2);
b2=zeros(M-2,M-2);
B=zeros(2*(M-2),1);
X=zeros(2*M,2*N);

for n=1:N-1
    for j=2:M-2

```

```

a=dt/(2*dx);
b=(dt*(d-1)*R)/(dx^2);
c=1+2*b;
if n==1
g1=u(j,1)+ a*eta(j-1,2);
g2=u(j,1);
g3=u(j,1)- a*eta(j+1,2);
g4=a*u(j-1,2)+b*eta(j-1,2)+eta(j,1);
g5=eta(j,1);
g6=-a*u(j+1,n+1)+b*eta(j+1,2)+eta(j,1);
else
g1=u(j,n)+a*eta(j-1,n+1);
g2=u(j,n);
g3=u(j,n)- a*eta(j+1,n+1);
g4=a*u(j-1,n+1)+b*eta(j-1,n+1)+eta(j,n);
g5=eta(j,n);
g6=-a*u(j+1,n+1)+eta(j+1,n+1)+eta(j,n);
end

a1(1,1)=1;
a1(j,j)=1;

a2(j,j-1)=-a;
a2(j-1,j)=a;

b1(j,j-1)=-a;
b1(j-1,j)=a;

b2(1,1)=c;
b2(j,j)=c;
b2(j,j-1)=-b;
b2(j-1,j)=-b;

B(1,1)=g1;
B(j,1)=g2;
B(M-2,1)=g3;
B(M-1,1)=g4;
B(j+(M-2),1)=g5;
B(2*(M-2),1)=g6;
end
A=[a1,a2;b1,b2];

X=A\B;

u(2:M-1,n+1) = X(1:M-2);
eta(2:M-1,n+1) = X(M-1:2*(M-2));

% plot(x,eta(:,n+1),'b')
% ylim([0 1])
% grid on
% pause(0.1)

end

```

```

plot(x,eta(:,1),'b')
xlim([x(1) x(end)])
hold on
pause(0.01)

k = 0;
plot(x,eta(:,1)+k*0.004,'b');
for n=1:length(t);
    if mod(n,25)==0;
        k = k+1;
        plot(x,eta(:,n+1)+k*0.07,'b');
        xlim([x(1) x(end)]);
        ylim([0 1]);
        pause(0.01);
    end
end

xlabel('space-x')
ylabel('\eta(x,t)')

figure(2)
surf(x,t,eta')

shading interp
colormap(jet)

m = length(x);
s = length(t);

for n=1:length(t)-1
    errMax(n) = max(abs(eta(:,n+1)-eta(:,n)));
    errR(n) = errMax(n)/max(abs(eta(:,n+1)));
end

figure(3), clf

subplot(2,1,1),plot(t(1:s-1),errMax,'r','linewidth',2), ylim([0 1])
xlabel('times (t)')
ylabel('error Hampiran(\mu)')

subplot(2,1,2),plot(t(1:s-1),errR,'r','linewidth',2), ylim([0 1])
xlabel('times (t)')
ylabel('error Relatif Hampiran(\mu)')

```

Lampiran 4. Script M-file gerak permukaan gelombang Jika $d - 1 = 0,5$ dan $k = 0,5$.

```

clc,clear all
% clf

% dt=0.1;
% dx=0.025;
% h=1;
% dt=0.5;
% dx=1;
dx=0.1;
g=10;
d=1.5;
dt=dx/(sqrt(g*d));
k=0.5;
h=1;
% lambda=39.4;
t=0:dt:5;
x=-15:dx:30;
% d=1.5;
% g=10;
% k=0.5;
lamda=39.4;
R=(k*sqrt(g*h))/(g*lamda);

M=length(x);
N=length(t);

u=zeros(M,N);
eta=zeros(M,N);

% kondisi awal
u(:,1)=0;
eta(:,1)=sech(x).^2;
% eta(:,1)=sin(x).^2;

% kondisi batas
u(1,:)=0;
eta(1,:)=0;
u(M,:)=0;
eta(M,:)=0;

a1=zeros(M-2,M-2);
a2=zeros(M-2,M-2);
b1=zeros(M-2,M-2);
b2=zeros(M-2,M-2);
B=zeros(2*(M-2),1);
X=zeros(2*M,2*N);

for n=1:N-1
    for j=2:M-2

```

```

a=dt/(2*dx);
b=(dt*(d-1)*R)/(dx^2);
c=1+2*b;
if n==1
g1=u(j,1)+ a*eta(j-1,2);
g2=u(j,1);
g3=u(j,1)- a*eta(j+1,2);
g4=a*u(j-1,2)+b*eta(j-1,2)+eta(j,1);
g5=eta(j,1);
g6=-a*u(j+1,n+1)+b*eta(j+1,2)+eta(j,1);
else
g1=u(j,n)+a*eta(j-1,n+1);
g2=u(j,n);
g3=u(j,n)- a*eta(j+1,n+1);
g4=a*u(j-1,n+1)+b*eta(j-1,n+1)+eta(j,n);
g5=eta(j,n);
g6=-a*u(j+1,n+1)+eta(j+1,n+1)+eta(j,n);
end

a1(1,1)=1;
a1(j,j)=1;

a2(j,j-1)=-a;
a2(j-1,j)=a;

b1(j,j-1)=-a;
b1(j-1,j)=a;

b2(1,1)=c;
b2(j,j)=c;
b2(j,j-1)=-b;
b2(j-1,j)=-b;

B(1,1)=g1;
B(j,1)=g2;
B(M-2,1)=g3;
B(M-1,1)=g4;
B(j+(M-2),1)=g5;
B(2*(M-2),1)=g6;
end
A=[a1,a2;b1,b2];

X=A\B;

u(2:M-1,n+1) = X(1:M-2);
eta(2:M-1,n+1) = X(M-1:2*(M-2));

% plot(x,eta(:,n+1),'b')
% ylim([0 1])
% grid on
% pause(0.1)

end

```

```

plot(x,eta(:,1),'b')
xlim([x(1) x(end)])
hold on
pause(0.01)

k = 0;
plot(x,eta(:,1)+k*0.004,'b');
for n=1:length(t);
    if mod(n,25)==0;
        k = k+1;
        plot(x,eta(:,n+1)+k*0.07,'b');
        xlim([x(1) x(end)]);
        ylim([0 1]);
        pause(0.01);
    end
end

xlabel('space-x')
ylabel('\eta(x,t)')

figure(2)
surf(x,t,eta')

shading interp
colormap(jet)

m = length(x);
s = length(t);

for n=1:length(t)-1
    errMax(n) = max(abs(eta(:,n+1)-eta(:,n)));
    errR(n) = errMax(n)/max(abs(eta(:,n+1)));
end

figure(3), clf

subplot(2,1,1),plot(t(1:s-1),errMax,'r','linewidth',2), ylim([0 1])
xlabel('times (t)')
ylabel('error Hampiran(\mu)')

subplot(2,1,2),plot(t(1:s-1),errR,'r','linewidth',2), ylim([0 1])
xlabel('times (t)')
ylabel('error Relatif Hampiran(\mu)')

```

RIWAYAT HIDUP



Ana Khairunnisa', lahir di Kabupaten Probolinggo Jawa Timur pada tanggal 11 Juli 1994. Nama panggilannya adalah Ana, tinggal di Dusun Krajan, RT 003, RW 002, Desa Sumber Centeng Kecamatan Kotaanyar Kabupaten Probolinggo. Anak kedua dari tiga bersaudara pasangan bapak Sumarto, S.Ag, M.Pd dan ibu Suhartini.

Pendidikan dasar ditempuh di MI Raudlatus Shalihin Sumber Centeng dan lulus pada tahun 2006. Setelah itu melanjutkan ke SMP Negeri 1 Paiton dan lulus tahun 2009. Kemudian melanjutkan pendidikan ke SMA Negeri 1 Paiton dan lulus tahun 2012. Selanjutnya, pada tahun 2012 menempuh kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang mengambil Jurusan Matematika.



**KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933**

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Ana Khairunnisa'
NIM : 12610008
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi : Solusi Numerik Model Gelombang Permukaan Melalui Pemecah Gelombang Berupa Balok Berpori Menggunakan Metode Beda Hingga Skema Implisit *Forward Time Central Space*
Pembimbing I : Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si
Pembimbing II : Dr. H. Ahmad Barizi, M.A

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	22 April 2016	Konsultasi Bab I dan Bab II	1.
2.	25 April 2016	Revisi Bab I	2.
3.	27 Mei 2016	ACC Bab I	3.
4.	3 Juni 2016	Konsultasi Bab II	4.
5.	20 Juni 2016	Revisi Bab II	5.
6.	15 Juli 2016	ACC Bab II	6.
7.	15 Agustus 2016	Konsultasi Bab III	7.
8.	26 September 2016	Konsultasi Kajian Keagamaan	8.
9.	3 Oktober 2016	Revisi Kajian Keagamaan	9.
10.	28 Oktober 2016	Revisi Bab III	10.
11.	1 Desember 2016	Konsultasi Kajian Keagamaan	11.
12.	7 Desember 2016	Revisi Kajian Keagamaan	12.
13.	9 Desember 2016	Konsultasi Abstrak dan Bab IV	13.
14.	14 Desember 2016	ACC Keseluruhan Kajian Keagamaan	14.
15.	14 Desember 2016	ACC Keseluruhan	15.

Malang, 14 Desember 2016
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001