# *SPECTRUM* GRAF KOMPLIT ($K_n$)

**dengan n $\geq$ 2 dan n $\in \mathbb{N}$**

**SKRIPSI**

**Oleh:**
**MUHAMMAD HARIS KURNIAWAN**
**NIM. 05510014**

**JURUSAN MATEMATIKA**
**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**
**UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MULANA MALIK IBRAHIM**
**MALANG**
**2009**

**_SPECTRUM_ GRAF KOMPLIT ($K_n$)**
**dengan n $\geq$ 2 dan n $\in \mathbb{N}$**

**SKRIPSI**

**Diajukan Kepada:**
**Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang**
**Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam**
**Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)**

**Oleh:**
**MUHAMMAD HARIS KURNIAWAN**
**NIM: 05510014**

**JURUSAN MATEMATIKA**
**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**
**UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MAULANA MALIK IBRAHIM**
**MALANG**
**2009**

**_SPECTRUM_ GRAF KOMPLIT ($K_n$)**
**dengan n $\geq$ 2 dan n $\in \mathbb{N}$**

**SKRIPSI**

**Oleh:**
**MUHAMMAD HARIS KURNIAWAN**
**NIM. 05510014**

**Telah Disetujui untuk Diuji**

**Malang, 7 November 2009**

| | |
|---|---|
| **Dosen Pembimbing I,** | **Dosen Pembimbing II,** |
| **Abdussakir, M.Pd** | **Dr. Ahmad Barizi, M.A** |
| **NIP. 19751006 200312 1 001** | **NIP. 1973 1212 199803 1 001** |

**Mengetahui,**

**Ketua Jurusan Matematika**

**Abdussakir, M.Pd**

**NIP. 19751006 200312 1 001**

**_SPECTRUM_ GRAF KOMPLIT ($K_n$)**
**dengan n $\geq$ 2 dan n $\in \mathbb{N}$**

**SKRIPSI**

**Oleh:**
**MUHAMMAD HARIS KURNIAWAN**
**NIM. 05510014**

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal:

25 November 2009

| **Susunan Dewan Penguji:** | | **Tanda Tangan** |
|---|---|---|
| 1. **Penguji Utama** | : **Dr. Makbul Muksar, M.Si**<br>**NIP 19681103 199203 1 002** | ( ) |
| 2. **Ketua** | : **Wahyu H. Irawan, M.Pd**<br>**NIP. 19710420 200003 1 003** | ( ) |
| 3. **Sekretaris** | : **Abdussakir, M.Pd**<br>**NIP. 19751006 200312 1 001** | ( ) |
| 4. **Anggota** | : **Dr. Ahmad Barizi, M.A**<br>**NIP. 1973 1212 199803 1 001** | ( ) |

**Mengetahui dan Mengesahkan,**
**Ketua Jurusan Matematika**

**Abdussakir, M.Pd**
**NIP. 19751006 200312 1 001**

**PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN**

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : MUHAMMAD HARIS KURNIAWAN

NIM : 05510014

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan hasil tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri.

Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 7 November 2009

Yang membuat pernyataan

Muhammad Haris Kurniawan

NIM. 05510014

# MOTTO

Ketahuilah, apapun yang menjadikanmu tergetar,

itulah Yang Terbaik untukmu! Dan karena itulah,

Qalbu seorang pecinta-Nya lebih besar daripada

Singgasana-Nya.

**(Jalaludin Rumi)**

Orang yang berhasil di dunia

adalah orang yang bangkit

dan mencari keadaan yang mereka inginkan,

dan kalau mereka tak menemukannya

mereka akan menciptakannya

**(George Bernard Shaw)**

# PERSEMBAHAN

Karya Kecil ini kupersembahkan teruntuk :

**Ayah dan ibu tercinta:**

Bapak Chudlori dan Ibu Muhlishotin yang tanpa lelah memberikan dorongan moral, spiritual, finansial dan tak henti-hentinya mencurahkan kasih sayangnya.

**Adik-adikku Tersayang:**

Muhammad Azhar Hamdani dan Dhea Arifatul Aliya, kejarlah cita-cita kalian sampai kalian meraihnya..!!

**"SENYUM DAN KEBAHAGIAAN KALIAN ADALAH TUJUAN HIDUPKU"**

Imarotul muhibbah

Yang selalu memberikan semangat, motivasi, dan inspirasi dalam penyelesaian skripsi ini.

## KATA PENGANTAR

بسم الله الرحمن الرحيم

***Assalamu'alaikum Wr.Wb.***

Puji syukur ke hadirat Allah SWT, karena atas taufik dan hidayah-Nya penulisan skripsi yang berjudul " *Spectrum* Graf Komplit ($K_n$) dengan n $\geq 2$ dan n $\in \mathbb{N}$" dapat diselesaikan. Sholawat serta salam semoga tetap tercurahkan kepada Nabi Muhammad Saw. yang telah mengantarkan umat manusia dari zaman kebodohan menuju zaman yang terang benderang, yaitu agama Islam.

Dalam penyusunan skripsi ini, penulis tidak dapat menyelesaikan sendiri tanpa bantuan dari berbagai pihak, untuk itu penulis mengucapkan rasa hormat dan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Prof. Dr. Imam Suprayogo, selaku Rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Dr. Sutiman Bambang Sumitro, SU., D.Sc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang. sekaligus dosen pembimbing yang senantiasa sabar memberi arahan dan bimbingan dalam penyusunan skripsi ini.
4. Dr. Ahmad Barizi M.A, selaku dosen pembimbing agama yang telah membimbing dan memberikan penjelasan dalam penyusunan skripsi ini.

5. Seluruh dosen dan staf Fakultas Sains dan Teknologi yang telah memberikan ilmunya selama ini dan memberi motivasi agar penulis dapat menyelesaikan studi dengan baik.
6. Bapak dan Ibu tercinta dan seluruh keluarga, yang selalu memberikan semangat dan motivasi baik moril maupun spirituil dalam mendidik dan membimbing penulis hingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
7. Adik-adikku yang telah semangat dan motivasi dalam proses penyusunan skripsi ini
8. Teman-teman Mahasiswa Jurusan Matematika angkatan 2005 Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang Khususnya Donny, Chamim, Eko, Umar, Dinul, Ima, Nilna, Imam Fachruddin yang telah banyak memberikan dukungan dalam penelitian dan penyusunan skripsi ini.
9. Semua pihak yang telah membantu penulis, yang tidak dapat disebutkan satu persatu.

Penulis berdo'a semoga bantuan yang telah diberikan dicatat sebagai amal baik oleh Allah SWT dan mendapatkan balasan yang setimpal. Penulis berharap, semoga skripsi ini bermanfaat. Amin.

Malang, 7 November 2009

Penulis

## DAFTAR ISI

# DAFTAR TABEL

# DAFTAR GAMBAR

## ABSTRAK

Kurniawan, Muhammad Haris. 2009. ***Spectrum* Graf Komplit ($K_n$) dengan n $\geq 2$ dan n $\in \mathbb{N}$.** Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Abdussakir, M.Pd. (II) Dr. Ahmad Barizi, M.A.

**Kata Kunci**: graf komplit, matriks adjacency, nilai eigen, vector eigen, dan spectrum

Salah satu permasalahan dalam topik graf adalah menentukan spectrum suatu graf. Spectrum graf G adalah himpunan dari bilangan – bilangan yang mana elemennya terdiri dari nilai – nilai eigen dan dimensi ruang vektor eigen dari matriks adjacency graf G. Jika nilai-nilai eigen dari matrik adjacency graf G adalah $\lambda_0 > \lambda_1 > \ldots > \lambda_{s-1}$, dan dimensi ruang vektor eigennya adalah $m(\lambda_0), m(\lambda_1), \ldots, m(\lambda_{s-1})$ , *spectrum* dapat kita tulis

$$specG = \begin{bmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \ldots & \lambda_{s-1} \\ m(\lambda_0) & m(\lambda_1) & \ldots & m(\lambda_{s-1}) \end{bmatrix}$$

Penelitian ini dilakukan dengan tujuan untuk menentukan bentuk umum spectrum graf komplit ($K_n$) dengan n $\geq 2$ dan n $\in \mathbb{N}$. Metode penelitian dalam skripsi ini adalah metode penelitian pustaka (*library research*). Langkah-langkah penelitian sebagai berikut: (1) Menggambar graf ($K_n$) dimana $n \geq 2$ dan $n \in \mathbb{N}$; (2) Menentukan matriks adjacency pada graf komplit ($K_n$); (3) Menentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks adjacency dari graf komplit ($K_n$); (4) Melihat pola spectrum graf komplit ($K_n$) sederhana. Kemudian merumuskan teorema yang dilengkapi dengan bukti-bukti.

Berdasarkan hasil pembahasan dapat diperoleh bahwa bentuk umum spectrum graf komplit ($K_n$) dengan n $\geq 2$ dan n $\in \mathbb{N}$ adalah

$$\text{Spec } (K_n) = \begin{bmatrix} (n-1) & -1 \\ 1 & (n-1) \end{bmatrix}$$

# BAB I

# PENDAHULUAN

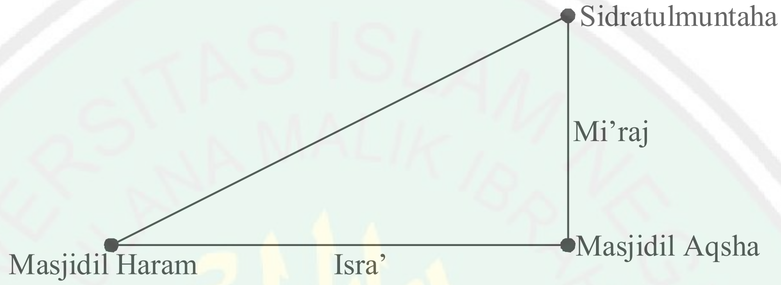
## 1.1 Latar Belakang

Al-Qur'an sebagai firman Allah Swt. yang diturunkan kepada umat Muhammad Saw. mengandung berbagai macam ilmu-ilmu yang berguna bagi kehidupan umat manusia, salah satunya adalah ilmu matematika. Sebagai contoh hukum mawaris yang menerangkan aturan pembagian warisan yang terdapat dalam surat An-Nisa' ayat 11 yang menerangkan bagian yang harus diperoleh seorang anak laki-laki yaitu dua kali anak perempuan. Dari sini dapat dilihat suatu perhitungan yang dalam ilmu matematika disebut dengan operasi perkalian.

Secara umum beberapa konsep dari disiplin ilmu telah dijelaskan dalam Al-Quran. Salah satu konsep dari disiplin ilmu matematika yang terdapat dalam Al-Qur'an adalah masalah teori graf. *Graf* $G$ didefinisikan sebagai pasangan $(V, E)$ dengan $V$ adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut *titik*, dan $E$ adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di $V$ yang disebut *sisi* (Miller, 2000:165). Banyaknya unsur di $V$ disebut *order* dari $G$ dan dilambangkan dengan $p(G)$, dan banyaknya unsur di $E$ disebut ukuran dari $G$ dan dilambangkan dengan $q(G)$. Jika graf yang dibicarakan hanya graf $G$, maka order dan ukuran dari $G$ cukup masing-masing ditulis $p$ dan $q$ (Chartrand dan Leniak, 1986:4).

Dalam Islam banyak sekali ajaran atau amalan yang dapat direpresentasikan dalam teori graf. Seperti peristiwa Isra' Mi'raj, peristiwa Tawaf dan Sa'i ketika melaksanakan ibadah haji, peristiwa shalat dan masih banyak lagi.

Isra’ adalah perjalanan Nabi Muhammad dari Masjidil Haram di Mekah ke Masjidil Aqsha di Palestina. Sementara itu, Mi’raj adalah perjalanan Nabi Muhammad dari Masjidil Aqsha di Planet Bumi ke Sidratulmuntaha. Terkait dengan dua peristiwa di atas, maka dua kejadian ini dapat digambarkan sebagai berikut:




Gambar 1.1 Representasi Isra’ dan Mi’raj dalam Bentuk Graf

Pada Gambar 1.1 terlihat bahwa ada tiga titik yang dihubungkan oleh tiga sisi, artinya tiap titik sebagai tempat kejadian ketika Isra’ dan Mi’raj berlangsung yaitu Masjidil Haram, Masjidil Aqsha, dan Sidratulmuntaha. Tiga sisi diartikan sebagai proses perjalanan Nabi Muhammad yaitu Isra’ (dari Masjidil Haram ke Masjidil Aqsha) dan Mi’raj (dari Masjidil Aqsha ke Sidratulmuntaha).

Allah berfirman dalam surat Al-Isra’ ayat 1, yang berbunyi:

سُبۡحَٰنَ ٱلَّذِيٓ أَسۡرَىٰ بِعَبۡدِهِۦ لَيۡلٗا مِّنَ ٱلۡمَسۡجِدِ ٱلۡحَرَامِ إِلَى ٱلۡمَسۡجِدِ
ٱلۡأَقۡصَا ٱلَّذِي بَٰرَكۡنَا حَوۡلَهُۥ لِنُرِيَهُۥ مِنۡ ءَايَٰتِنَآۚ إِنَّهُۥ هُوَ ٱلسَّمِيعُ ٱلۡبَصِيرُ ١

Artinya: ”*Maha Suci Allah, yang Telah memperjalankan hamba-Nya pada suatu malam dari Al Masjidil Haram ke Al Masjidil Aqsha yang Telah kami berkahi sekelilingnya agar kami perlihatkan kepadanya sebagian dari tanda-tanda (kebesaran) kami. Sesungguhnya dia adalah Maha mendengar lagi Maha Mengetahui*.”

Isra' dan Mi'raj merupakan kejadian yang mengagumkan, dimana Nabi hanya memerlukan waktu semalam saja untuk melakukan perjalana dari Masjidil Haram di Makkah menuju ke Masjidil Aqsha di Palestina dan dilanjutkan ke Sidratulmuntaha. Padahal, jika dipikirkan secara rasional kejadian itu sangatlah tidak mungkin.

Menurut catatan sejarah, teori graf pertama kali digunakan oleh seorang ahli matematika dari Swiss yang bernama Euler untuk mereperesentasikan Jembatan Konigsberg, dan menyelesaikan permasalahan jembatan tersebut. Konigsberg adalah sebuah kota di sebelah timur Prussia (Jerman sekarang) dimana terdapat sungai Pregel dan merupakan tempat tinggal Duke of Prussia pada abad ke-16 (tahun 1736). Kota tersebut saat ini bernama Kaliningrad, dan merupakan pusat ekonomi dan industri utama di Russia Barat. Sungai Pregel membagi kota menjadi 4 daratan dengan mengalir mengitari pulau Kneiphof lalu bercabang menjadi dua anak sungai. Pada abad ke-18 dibangunlah tujuh jembatan yang menghubungkan keempat daratan tersebut. Pada hari Minggu, masyarakat Konigsberg biasanya berjalan-jalan dari daratan satu ke daratan lainnya melalui jembatan tersebut. Mereka berpikir apakah mungkin untuk berjalan menyeberangi ketujuh jembatan tanpa melalui jembatan yang sama dari suatu daratan dan kembali ke tempat semula. Masalah ini pertama kali dipecahkan oleh Leonhard Euler. Solusi Euler merepresentasikan masalah ini ke dalam graf dengan keempat daratan sebagai titik (*vertex*) dan ketujuh jembatan sebagai sisi (*edge*).

Dengan graf tersebut, Euler berhasil menemukan jawaban kenapa orang-orang tidak dapat melalui ketujuh jembatan tersebut masing-msing sekali dan kembali ke tempat semula. Jawaban yang ditemukan Euler adalah karena tidak semua titik pada graf tersebut berderajat genap.

Matriks adjaency adalah salah satu permasalahan yang dibahas dalam teori graf. Misalkan G adalah graf dengan titik-titik $v_1, v_2, \ldots, v_n$ (n berhingga). Matriks hubung graf G adalah matriks $A = (a_{ij})$ dengan $a_{ij}$ menyatakan banyaknya garis yang menghubungkan titik $v_i$ dengan $v_j$ ; $i, j = 1,2, \ldots, n$. Karena banyak garis yang menghubungkan titik $v_i$ dengan $v_j$ selalu sama dengan jumlah garis yang menghubungkan $v_j$ dengan $v_i$ maka jelas bahwa matriks adjacency selalu merupakan matriks yang simetris $(a_{ij} = a_{ji}\ \forall i, j)$. Secara matematika dapat dinyatakan

$$A(G) - \begin{cases} a_{ij} = 1 \text{ , jika ada sisi dari titik } v_i \text{ ke titik } v_j \\ a_{ij} = 0 \text{ , jika tidak ada sisi dari titik } v_i \text{ ke titik } v_j \end{cases}$$

(Jong Jek Siang,2002:233)

Dalam teori graf, bahasan mengenai spectrum dari suatu graf merupakan bahasan yang masih jarang. Graf komplit $(K_n)$ akan diketahui spectrumnya dengan cara merepresentasikan graf tersebut dalam matriks, kemudian setelah didapatkan matriksnya akan ditentukan nilai eigen dari matriks tersebut dan nilai eigen juga berfungsi untuk menentukan vektor eigen dari matriks tersebut. Hubungan nilai eigen dan dimensi ruang vektor eigen kemudian direpresentasikan dalam bentuk matriks yang disebut dengan spectrum dari graf komplit $(K_n)$.

Oleh sebab itu, dalam penelitian ini penulis tertarik untuk meneliti mengenai spectrum graf komplit $(K_n)$ yang dikemas dalam judul penelitian : "***Spectrum Graf Komplit*** **$(K_n)$ *dengan* $n \geq 2$ *dan* $n \in \mathbb{N}$".**

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, maka rumusan masalah dalam penulisan skripsi ini adalah bagaimana menentukan *spectrum graf komplit* $(K_n)$ *dengan* $n \geq 2$ *dan* $n \in \mathbb{N}$".

## 1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan penulisan skripsi ini adalah menjelaskan cara menentukan *spectrum graf komplit* $(K_n)$ *dengan* $n \geq 2$ *dan* $n \in \mathbb{N}$".

## 1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penulisan skripsi ini adalah:

1. Bagi peneliti, sebagai tambahan informasi dan wawasan pengetahuan mengenai *spectrum graf komplit* $(K_n)$ *dengan* $n \geq 2$ *dan* $n \in \mathbb{N}$".
2. Bagi pemerhati matematika, sebagai tambahan pengetahuan bidang matematika, khususnya Teori Graf mengenai *spectrum graf komplit* $(K_n)$.
3. Bagi lembaga UIN Malang, untuk bahan kepustakaan yang dijadikan sarana pengembangan wawasan keilmuan khususnya di Jurusan Matematika untuk mata kuliah Teori Graf.

## 1.5 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam skripsi ini adalah metode penelitian pustaka (*Library research*), yaitu dengan mengumpulkan data dan informasi dari berbagai sumber seperti buku, jurnal, atau makalah-makalah. Penelitian dilakukan dengan melakukan kajian terhadap buku-buku teori graf dan jurnal-jurnal atau makalah-makalah yang memuat topik tentang *spectrum* graf. Langkah selanjutnya adalah menentukan spectrum digraf dari beberapa contoh graf komplit $(K_n)$ dengan $n \geq 2$ dan $n \in \mathbb{N}$.

Adapun langkah-langkah yang digunakan oleh peneliti dalam membahas penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mencari literatur utama yang dijadikan acuan dalam pembahasan ini.
2. Mengumpulkan berbagai literatur pendukung, baik yang bersumber dari buku, jurnal, artikel, diktat kuliah, internet, dan lainnya yang berhubungan dengan permasalahan yang akan dibahas dalam penelitian ini.
3. Memahami dan mempelajari konsep *spectrum graf.*
4. Menerapkan konsep tersebut, yaitu:
   a) Menentukan *matriks adjacency* dari graf komplit $(K_n)$.
   *b)* Mencari *nilai eigen, vektor eigen* dan *spectrum* dari matriks *adjacency graf komplit* $(K_n)$.
   c) Merumuskan teorema.
   d) Membuktikan teorema.

## 1.6 Sistematika Penulisan

Untuk mempermudah dalam memahami skripsi ini secara keseluruhan maka penulis menggunakan sistematika penulisan yang terdiri dari 4 bab dan masing-masing akan dijelaskan sebagai berikut :

BAB I. PENDAHULUAN

Dalam bab ini dijelaskan latar belakang masalah, permasalahan, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II. KAJIAN PUSTAKA

Bagian ini terdiri atas konsep-konsep (teori-teori) yang mendukung bagian pembahasan. Konsep-konsep tersebut antara lain membahas tentang pengertian graf, derajat titik, adjacent dan incidenct, graf komplit, matriks, matriks adjacency dan matriks incidency, *spectrum* graf, operasi matriks, determinant, nilai eigen dan vektor eigen dan representasi graf dalam Islam.

BAB III. PEMBAHASAN

Dalam bab ini dipaparkan penentuan *spectrum graf komplit* $(K_n)$ *dengan* $n \geq 2$ $dan$ $n \in \mathbb{N}$".

BAB IV. PENUTUP

Dalam bab ini dikemukakan kesimpulan akhir penelitian dan beberapa saran.

# BAB II

# KAJIAN PUSTAKA

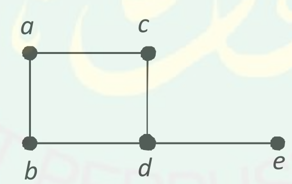
## 2.1 Graf

### 2.1.1 Definisi Graf

Graf $G$ adalah pasangan himpunan ($V$, $E$) dengan $V$ adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari obyek-obyek yang disebut sebagai titik dan $E$ adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di $V$ yang disebut sebagai sisi. Himpunan titik di $G$ dinotasikan dengan $V(G)$ dan himpunan sisi dinotasikan dengan $E(G)$. Sedangkan banyaknya unsur di $V(G)$ disebut order dari $G$ dan dilambangkan dengan $p(G)$ dan banyaknya unsur di $E(G)$ disebut ukuran dari $G$ dan dilambangkan dengan $q(G)$. Jika graf yang dibicarakan hanya graf $G$, maka order dan ukuran dari $G$ tersebut cukup ditulis dengan $p$ dan $q$ (Chartrand dan Lesniak, 1986: 4).

**Contoh:**

$G$ :




Gambar 2.1 Graf $G$.

Dari Gambar 2.1. graf $G$ mempunyai 5 titik sehingga order $G$ adalah $p = 5$. Graf $G$ mempunyai 5 sisi sehingga ukuran graf $G$ adalah $q = 5$ dengan

$$V(G) = \{a, b, c, d, e\}$$

$$E(G) = \{(a,b), (a,c), (b,d), (c,d), (d,e)\}.$$

Graf G dapat juga ditulis dengan

$V(G) = \{a, b, c, d, e\}$

$E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$

untuk

$e_1 = (a, b)$

$e_2 = (a, c)$

$e_3 = (b, d)$

$e_4 = (c, d)$

$e_5 = (d, e)$

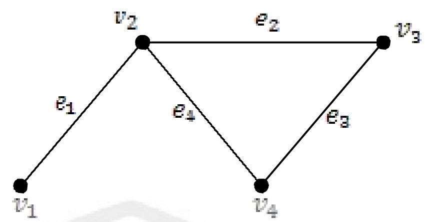
### 2.1.2 Terhubung Langsung (*Adjacent*) dan Terkait Langsung (*Incident*)

**Terhubung Langsung (*adjacent*)**

Chartrand dan Lensiak (1986: 4) menyatakan sisi $e = (u, v)$ dikatakan menghubungkan titik u dan v, jika $e = (u, v)$ adalah sisi graf G, maka u dan v disebut terhubung langsung (*adjacent*).

**Terkait Langsung (*incident*)**

Jika sisi $e = (u, v)$ akan ditulis $e = uv$, maka u dan e serta v dan e disebut terkait lansung (*incident*) (Chartrand dan Lesniak, 1986: 4). Pada Gambar 2.3 titik $v_3$ adjacent dengan titik $v_2$ dan $v_4$, tetapi tidak adjacent dengan titik $v_1$. Sisi $e_4$ incident dengan titik $v_4$ dan $v_2$, tetapi tidak incident dengan titik $v_1$.

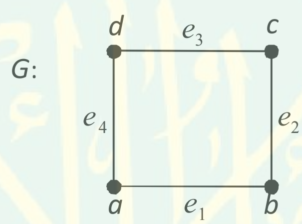



Gambar 2.2 Graf untuk Mengilustrasikan *Adjacent* dan *Incident*

**Contoh:**

Perhatikan graf $G$ yang memuat

$V(G) = \{a, b, c, d, e\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ berikut:




Gambar 2.3 Graf $G$.

Dari Gambar 2.3 tersebut, titik $a$ dan $e_1$ serta $e_1$ dan $b$ adalah *incident* (terkait langsung) dan titik $a$ dan $b$ adalah *adjacent* (terhubung langsung).

Dalam Islam, definisi *adjacent* dan incident dapat digunakan untuk menggambarkan peristiwa Sa'i dalam ibadah haji. Dalam Al-Quran dijelaskan dalam surat Al-Baqarah ayat 158 yang berbunyi:

إِنَّ ٱلصَّفَا وَٱلْمَرْوَةَ مِن شَعَآئِرِ ٱللَّهِ ۖ فَمَنْ حَجَّ ٱلْبَيْتَ أَوِ ٱعْتَمَرَ فَلَا جُنَاحَ عَلَيْهِ أَن يَطَّوَّفَ بِهِمَا ۚ وَمَن تَطَوَّعَ خَيْرًا فَإِنَّ ٱللَّهَ شَاكِرٌ عَلِيمٌ ﴿١٥٨﴾

*Artinya: "Sesungguhnya Shafaa dan Marwa adalah sebahagian dari syi'ar Allah. Maka barangsiapa yang beribadah haji ke Baitullah atau berumrah, Maka tidak ada dosa baginya mengerjakan sa'i antara keduanya. dan barangsiapa yang mengerjakan suatu kebajikan dengan kerelaan hati. Maka Sesungguhnya Allah Maha Mensyukuri kebaikan lagi Maha Mengetahui". (Qs. Al-Baqarah: 158)*

Sa'i merupakan salah satu rukun haji dan umroh, dilakukan setelah selesai melakukan thawaf. Sa'i adalah lari kecil-kecil yang dilakukan antara bukit Shafa dan Marwa. Terkait dengan kejadian di atas, maka kejadian tersebut dapat direpresentasikan pada graf yang terdiri dari 2 titik dan 1 sisi.

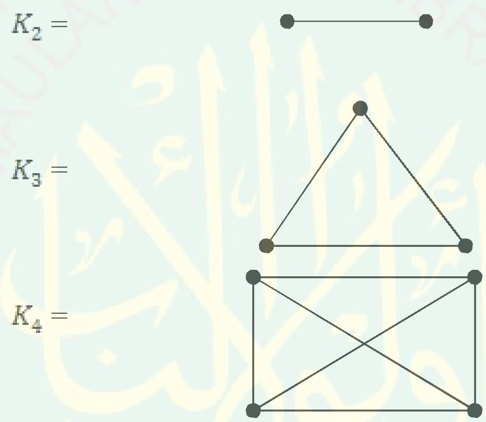

Gambar 2.4 Representasi Graf Terhadap Ibadah Sa'i

Dari Gambar 2.4 di atas merupakan salah satu contoh dari bentuk graf komplit yaitu graf yang memiliki dua titik dan satu sisi. Titik-titiknya adalah bukit shafa dan marwa sedangkan sisinya adalah perjalanan sa'i itu sendiri. Jadi bukit shafa dengan perjalan sa'i (sisi) adalah *incident* sedangkan bukit Shafa dan bukit Marwa adalah *adjacent*.

### 2.1.3 Graf komplit

Graf komplit (*Complete Graph*) adalah graf dengan dua titik yang berbeda saling *adjacent*. Graf komplit dengan $n$ titik dinyatakan dengan $K_n$ (Chartrand dan Lesniak, 1986: 9).

Contoh:




Gambar 2.5 Graf Komplit

dari Gambar 2.5. $K_2$, $K_3$, $K_4$ adalah graf komplit karena tiap titik dalam graf tersebut selalu *adjecent* dengan semua titik yang lain.

Dalam Islam, definisi graf komplit dapat direpresentasikan untuk menggambarkan hubugan antara ibadah shalat yang menjadi kewajiban bagi umat Islam. Shalat mempunyai kedudukan yang amat penting dalam Islam dan merupakan pondasi yang kokoh bagi tegaknya agama Islam. Ibadah shalat dalam Islam sangat penting, sehingga shalat harus dilakukan pada waktunya, dimanapun, dan bagaimanapun keadaan seorang muslim yang mukalaf. Shalat wajib disebut juga shalat *maktubah* atau shalat *mafrudhah*, mulai diperlakukan pada malam Isra' tahun 621 M. Shalat wajib ddilaksanakan lima kali sehari semalam, yaitu pada waktu: *Dzuhur, Ashar, Magrib, Isya', dan Shubuh*. Shalat wajib yang mula-mula dilakukan Rasulullah SAW. adalah shalat Dzuhur pada esoknya malam Isra' tersebut (Depag RI, 1988:833 ).

Allah berfirman dalam Al-Qur'an surat Al- Nisa' ayat 103:

فَإِذَا قَضَيْتُمُ ٱلصَّلَوٰةَ فَٱذْكُرُوا۟ ٱللَّهَ قِيَـٰمًا وَقُعُودًا وَعَلَىٰ جُنُوبِكُمْ ۚ فَإِذَا ٱطْمَأْنَنتُمْ فَأَقِيمُوا۟ ٱلصَّلَوٰةَ ۚ إِنَّ ٱلصَّلَوٰةَ كَانَتْ عَلَى ٱلْمُؤْمِنِينَ كِتَـٰبًا مَّوْقُوتًا ﴿١٠٣﴾

*Artinya:"Maka apabila kamu telah menyelesaika shalat(mu), ingatlah Allah di waktu duduk dan di waktu berbaring. Kemudian apabila kamu telah merasa aman, maka dirikanlah shalat itu (sebagaimana biasa). Sesungguhnya shalat itu adalah kewajiban yang ditentukan waktunya atas orang-orang yang beriman".*

Dalam ayat tersebut dijelaskan bahwa waktu-waktu shalat telah ditentukan waktunya dan telah menjadi suatu ketetapan, baik itu shalat fardhu maupun shalat sunnah. Shalat lima waktu yang diwajibkan dalam sehari (isya', subuh, dhuhur, ashar dan maghrib) merupakan shalat yang wajib ditunaikan dan tidak boleh ditinggalkan. Waktu pelaksanaan antara satu waktu shalat fardhu berbeda dengan empat waktu shalat yang lain dan telah ditetapkan oleh Allah SWT. Akan tetapi, kelima waktu shalat tersebut saling mengikat dan tidak diperbolehkan hanya melaksanakan satu shalat saja.

Perintah shalat lima waktu bagi umat muslim diterima oleh Rasulullah langsung dari Allah di malam Mi'raj. Pada ayat di atas terdapat kata "*kitaaban maukuuta*" yang berarti "*kewajiban yang telah ditentukan waktunya*" bermakna bahwa kewajiban shalat mempunyai waktu tertentu untuk dilaksanakan tidak mendahului dan juga tidak mengakhirkannya (Al-Jaziri.2007:480).

Rasulullah bersabda:

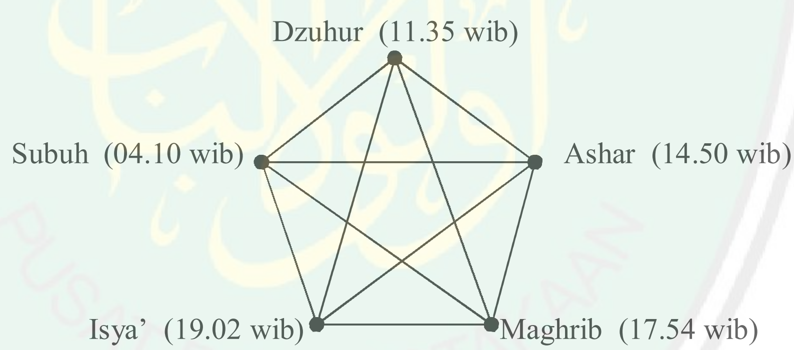
1. *"Waktu shalat subuh dari terbit fajar selama belum terbit matahari"*(H.R. Bukhori) .
2. *"Waktu dzuhur ialah apabila telah tergelincir matahari hingga terjadilah bayangan seseorang itu sama dengan panjangnya selama belum lagi datang waktu ashar"*(H.R. Muslim).
3. *"Ashar waktunya sebelum terbenam matahari"* (H.R. Bukhori).
4. *"Maghrib waktunya sebelum hilang syafaq, yaitu cahaya matahari sesudah terbenamnya yang kita lihat mula-mula merah sesudah merah hilang datang cahaya putih"* (H.R. Bukhori).
5. *"Waktu 'isya hingga separuh malam"* (H.R. Bukhori).

(Siddik.1980:82-83)

Dari hadits-hadits di atas terlihat bahwa shalat terikat dengan waktu yaitu harus dikerjakan tepat pada waktunya, tidak dapat dilaksanakan mendahului dan juga mengakhirinya. Bila seseorang membaca Al-Qur'an dan mencermati ayat-ayatnya, maka ia akan tahu bahwa shalat telah diwajibkan atas umat-umat terdahulu.

Terfokusnya perintah shalat, baik kepada umat-umat terdahulu maupun umat sekarang, disebabkan oleh pentingnya kewajiban shalat ini dibanding kewajiban-kewajiban lain. Dalam arti, penting di sisi Allah dan penting bagi hambanya. Begitu perhatiannya Islam terhadap shalat, sehingga manusia diperintahkan untuk selalu mengerjakan shalat dalam segala keadaan.

Shalat dapat direpresentasikan dalam suatu graf komplit $K_5$ menunjukkan lima titik yang dapat diartikan sebagai waktu-waktu shalat yang saling berhubungan satu dengan yang lain.




Gambar 2.6 Representasi Graf terhadap Waktu-Waktu Shalat

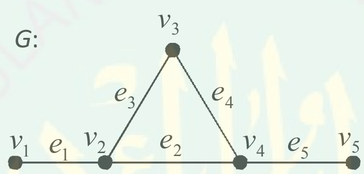
### 2.1.4 Derajat Titik

Derajat titik v pada graf G adalah banyaknya sisi dari graf G yang *incident* dengan v. Derajat titik v pada graf G dinotasikan dengan $deg_G(v)$ atau secara sederhana dapat juga dinotasikan dengan $deg\ (v)$ (Chartrand dan Lensiak, 1986: 7).

Titik yang berderajat genap sering disebut *titik genap* (*even vertices*) dan titik yang berderajat ganjil disebut *titik ganjil* (*odd vertices*). Titik yang berderajat nol disebut *isolated vertices* dan titik yang berderajat satu disebut *titik ujung* (*end vertices*) (Chartrand dan Leniak, 1986:7).

**Contoh:**

Perhatikan graf $G$ berikut yang mempunyai himpunan titik $V(G)=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$ dan himpunan sisi $E(G)=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5\}$




Gambar 2.7 Graf *G*.

Berdasarkan Gambar 2.7, diperolah bahwa:

$\deg(v_1)=1$

$\deg(v_2)=3$

$\deg(v_3)=2$

$\deg(v_4)=3$

$\deg(v_5)=1$

Titik $v_2$ dan $v_4$ adalah titik ganjil, titik $v_3$ adalah titik genap, titik $v_1$ dan $v_3$ adalah titik ujung. Hubungan antara jumlah derajat semua titik dalam suatu graf $G$ dengan banyak sisi, yaitu $q$, adalah

$$\sum_{v\in G}\deg(v) = 2q.$$

Hal ini dinyatakan dalam teorema berikut:

**Teorema 1**

Jika $G$ graf dengan $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_P\}$

maka $\sum_{i=1}^{p} \deg(v_i) = 2q$ (Chartrand dan Lesniak, 1986: 7).

**Bukti:**

Setiap sisi adalah terkait langsung dengan 2 titik. Jika setiap derajat titik dijumlahkan, maka setiap sisi dihitung dua kali.

**Corollary 1**.

Pada sebarang graf, jumlah derajat titik ganjil adalah genap.

**Bukti:**

Misalkan graf $G$ dengan size $q$, dan misalkan $W$ himpunan yang memuat titik ganjil pada $G$ serta $U$ himpunan yang memuat titik genap di $G$. Dari teorema 1 maka diperoleh:

$$\sum_{v \in v(\mathrm{G})} \deg(v) = \sum_{v \in \mathrm{W}} \deg(v) + \sum_{v \in \mathrm{U}} \deg(v) = 2q$$

Dengan demikian karena $\sum_{v \in U} \deg(v)$ genap, maka $\sum_{v \in W} \deg(v)$ juga genap.

## 2.2 Matriks

### 2.2.1 Definisi matriks

Sebuah matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan entri dalam matriks.

Ukuran matriks dijelaskan dengan menyatakan banyaknya baris (garis horisontal) dan banyaknya kolom (garis vertikal) yang terdapat dalam matriks tersebut.

Contoh:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad [2 \;\; 1 \;\; 0], \quad \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & \pi & e \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad [4]$$

Matriks pertama pada contoh di atas mempunyai 3 baris dan 2 kolom sehingga ukurannya adalah 3 kali 2 (yang ditulis $3 \times 2$). Angka pertama selalu menunjukkan banyaknya baris dan angka kedua menunjukkan banyaknya kolom. Jadi, matriks selebihnya dalam contoh di atas berturut-turut mempunyai ukuran $1 \times 3, 3 \times 3, 2 \times 1$, dan $1 \times 1$. (Anton,1997:22)

### 2.2.2 Matriks Adjacency

Misalkan G adalah graf dengan titik-titik $v_1, v_2, \dots, v_n$ (n berhingga). Matriks adjacency graf G adalah matriks $A = (a_{ij})$ dengan $a_{ij}$ menyatakan banyaknya sisi yang menghubungkan titik $v_i$ dengan $v_j$ ; $i, j = 1,2, \dots, n$. Karena banyaknya garis yang menghubungkan titik $v_i$ dengan $v_j$ selalu sama dengan banyaknya garis yang menghubungkan $v_j$ dengan $v_i$ maka jelas bahwa matriks hubung selalu merupakan matriks yang simetris $(a_{ij} = a_{ji} \; \forall i, j)$.(Jong Jek Siang,2002:233)

### 2.2.3 Spectrum dari Matriks Adjacency

Misalkan $\lambda_1$, $\lambda_2$, …, $\lambda_n$ adalah nilai – nilai eigen berbeda dari matrik adjacent graf $G$ dan $m(\lambda_1)$, $m(\lambda_2), \dots, m(\lambda_n)$ adalah banyaknya basis untuk ruang vektor eigen masing – masing $\lambda_n$, maka matrik berordo (2 *x n*) yang memuat $\lambda_1$, $\lambda_2$, …, $\lambda_n$ pada baris pertama dan $m(\lambda_1)$, $m(\lambda_2)$,…, $m(\lambda_n)$ pada baris kedua disebut *spectrum* graf *G* dan dinotasikan dengan Spec$(G)$ [6]. Jadi, spectrum graf *G* dapat ditulis

$$\text{Spec}(G) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ m(\lambda_1) & m(\lambda_2) & \dots & m(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

(Biggs,1973:9)

### 2.2.4 Operasi Matriks

Jika A dan B adalah sebarang dua matriks yang ukurannya sama, maka jumlah A+B adalah matriks yang diperoleh dengan menambahkan bersama-sama entri yang bersesuaian dalam kedua matriks tersebut. Matriks-matriks yang ukurannya berbeda tidak bisa ditambahkan. (Anton,1997:23)

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 7 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

Maka A+B adalah:

$$A + B = \begin{bmatrix} 2+(-4) & 1+3 & 0+5 \\ -1+2 & 0+2 & 2+0 \\ 4+3 & -2+2 & 7+(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \\ 7 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 2-(-4) & 1-3 & 0-5 \\ -1-2 & 0-2 & 2-0 \\ 4-3 & -2-2 & 7-(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -5 \\ -3 & -2 & 2 \\ 1 & -4 & 11 \end{bmatrix}$$

Jika A adalah suatu matriks dan $c$ adalah suatu scalar, maka hasil kali (product) $c$A adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan masing-masing entri dari A oleh $c$. (Anton,1997:24)

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Maka 2A adalah:

$$2A = 2\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 4 & 2 \times 2 \\ 2 \times 1 & 2 \times 3 \\ 2 \times -1 & 2 \times 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 6 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Jika A adalah matriks $m \times r$ dan B adalah matriks $r \times n$, maka hasilkali AB adalah matriks $m \times n$ yang entri-entrinya ditentukan sebagai berikut. Untuk mencari entri dalam baris $i$ dan kolom $j$ dari AB, pilih baris $i$ dari matriks A dan kolom $j$ dari matriks B. kalikan entri-entri yang bersesuaian dari baris dan kolom tersebut bersama-sama dan kemudian tambahkanlah hasil kali yang dihasilkan. (Anton,1997:25)

**Sifat-Sifat Operasi Matriks**

$A + B = B + A$

$A + (B + C) = (A + B) + C$

$k(A + B) = kA + kB$

$A(B + C) = AB + AC$

$(A + B)C = AC + BC$

$A(BC) = (AB)C$

**Pada umumnya**

$AB \neq BA$

$AB = 0$ tidak berakibat $A = 0$ atau $B = 0$

$AB = AC$ tidak berakibat $B = C$ (Gazali.2005:15).

### 2.2.5 Determinan

Jika A adalah suatu matriks $n \times n$, maka anakmatriks (*submatriks*) berukuran $(n-1) \times (n-1)$ yang diperoleh dari A dengan menghapus baris ke-*i* dan kolom ke-*j* dimanakan MINOR UNSUR (*i,j*) dari matriks A dan dilambangkan dengan $M_{i,j}$ atau $M_{i,j}(A)$.

Jika $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$, maka

$M_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$, sedangkan

$M_{34} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}$, dan

$M_{22}\left(M_{11}(A)\right) = \begin{bmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$

**Definisi:** Jika matriks A berukuran $n \times n$, determinant matriks A didefinisikan sebagai

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(\;\;1)^{1+j} \det\left(M_{1j}\right) \tag{2.1}$$

Dan

$$det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (2.2)$$

Jika definisi di atas diterapkan ke matriks A yang berukuran $3 \times 3$, maka akan diperoleh, denga menggunakan persamaan 2.1,

$$\det(A) = det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1}\det(M_{11}) + a_{12}(-1)^{1+2}\det(M_{12}) + a_{13}(-1)^{1+3}\det(M_{13})$$

$$= a_{11}\, det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{12}\, det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13}\, det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix},$$ dan

selanjutnya dari persamaan 2.2 diperoleh rumus

$$\det(A) = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \quad (2.3)$$

yang terdiri dari enam suku. (Charles G. Cullen,1993:106-107).

Contoh: Hitunglah $\det(B) = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

$$\det(B) = -3\, det \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} + 2\, det \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} + 0\, det \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} - 2\, det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= -3\left(1\, det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} - 0\, det \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - 1\, det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\right) + 2\left(2\, det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} - 0\, det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - 1\, det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\right) + 0 - 2\left(2\, det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} - 1\, det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} + 0\, det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$= -3[(1+6) - 0 - (0-1)] + 2[2(1+6) - 0 — 3 - 2) + 0 -$
$2[2(0-1) — 3 - 2 + 0]$
$= -24 + 38 - 6 = 8$

### 2.2.6 Nilai Eigen Dan Vektor Eigen

**Definisi.** Jika A adalah matriks $n \times n$, maka vektor taknol x di dalam $R^n$ dinamakan ***vektor eigen (eigenvektor)*** dari A jika Ax adalah kelipatan skalar dari x; yakni,

$\boldsymbol{Ax = \lambda x}$

untuk suatu scalar $\lambda$. Skalar $\lambda$ dinamakan ***nilai eigen (eigenvektor)*** dari A dan x dikatakan ***vektor eigen yang bersesuaian*** dengan $\lambda$.

Untuk mencari nilai eigen matriks A yang berukuran $n \times n$ maka kita menuliskan kembali $Ax = \lambda x$ sebagai

$Ax = \lambda Ix$

atau secara ekuivalen

$(\lambda I - A)x = 0$

supaya $\lambda$ menjadi nilai eigen, maka harus ada pemecahan taknol dari persamaan ini. Akan tetapi persamaan di atas akan mempunyai pemecahan taknol jika dan hanya jika

$det(\lambda I - A) = 0$

ini dinamakan persamaan karakteristik A dan skalar yang memenuhi persamaan ini adalah nilai eigen dari A. Bila diperluas, maka determinan $det(\lambda I - A)$ adalah variabel $\lambda$ yang dinamakan polinom karakteristik dari A (Anton,1997:277-278).

# BAB III

# PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas mengenai *spectrum* dari graf komplit ($K_n$) dengan $n \geq 2$ dan $n \in \mathbb{N}$. Adapun langkah-langkah menentukan *spectrum* dari graf komplit ($K_n$) dengan $n \geq 2$ dan $n \in \mathbb{N}$ adalah sebagai berikut:

1) Menggambar graf komplit ($K_n$) dimana $n \geq 2$ dan $n \in \mathbb{N}$.
2) Menentukan matriks adjacency pada graf komplit ($K_n$).
3) Mencari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks adjacency dari graf komplit ($K_n$).
4) Melihat pola *spectrum* dari graf komplit ($K_n$).
5) Merumuskan pola ke dalam teorema.
6) Membuktilan teorema.

## 3.1 *Spectrum* dari Graf Komplit ($K_2$)

Untuk graf komplit $K_2$ dapat digambarkan grafnya seperti Gambar 3.1 berikut

$K_2$ :


Gambar 3.1 Graf Komplit $K_2$

Pada graf komplit $K_2$ menghasilkan matriks adjacency sebagai berikut

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} v_1 & v_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks adjacency maka akan dicari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks-matriks tersebut, yaitu dengan menggunakan persamaan

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix}\right) = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

Jadi didapatkan nilai eigen bagi $A$ adalah $\lambda = 1$ dan $\lambda = -1$

Setelah mendapatkan nilai eigen maka selanjutnya akan dicari vektor eigen, yaitu:

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Disubstitusikan nilai eigen $\lambda = 1$ dan $\lambda = -1$ ke dalam persamaan di atas.

Untuk $\lambda = 1$ maka vektor eigennya adalah:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Maka didapatkan

$$-k + l = 0$$

$$k - l = 0$$

$$k = l$$

Misal $l = s$

diperoleh bahwa solusi umum bagi $(A - (1)I)X - 0$ adalah

$$s_1 = \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ s \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jadi basis untuk ruang vektor eigennya sebanyak 1.

Untuk $\lambda = -1$ maka vektor eigennya adalah:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Maka didapatkan

$k + l = 0$

$k = -l$

Misal $l = s$

diperoleh bahwa solusi umum bagi $(A - (-1)I)X = 0$ adalah

$$s_2 = \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ -s \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Jadi basis untuk ruang vektor eigennya sebanyak 1.

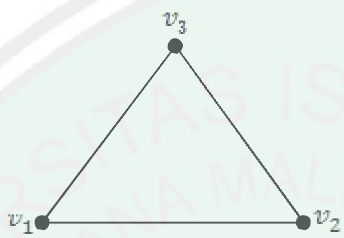
Jadi untuk $\lambda = 1$ terdapat satu basis ruang vektor eigen , dan untuk $\lambda = -1$ juga terdapat satu basis ruang vektor eigen , maka *spectrum* graf komplit $K_2$ adalah

$$\textbf{Spect } (\boldsymbol{K_2}) = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

### 3.2 *Spectrum* dari Graf Komplit ($K_3$)

Untuk graf komplit $K_3$ yang dapat digambarkan grafnya seperti Gambar 3.2 berikut

$K_3$ :




Gambar 3.2 Graf Komplit $K_3$

Pada graf komplit $K_3$ menghasilkan matriks adjacency sebagai berikut

$$A = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} \begin{matrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \\ 1 & 1 \end{matrix}$$

$$= -\lambda^3 + 1 + 1 + \lambda + \lambda + \lambda$$

$= -\lambda^3 + 3\lambda + 2$

$= (\lambda - 2)(\lambda + 1)(\lambda + 1)$

Jadi didapatkan nilai eigen bagi $K_3$ adalah $\lambda = 2$ dan $\lambda = -1$

Setelah mendapatkan nilai eigen maka selanjutnya akan dicari vektor eigen, yaitu:

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ l \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Disubstitusikan nilai eigen $\lambda = 2$ dan $\lambda = -1$ ke dalam persamaan di atas. Pada graf komplit $K_3$ menghasilkan matriks adjacency $3 \times 3$ sehingga untuk menentukan vektor eigen maka matriks di atas akan direduksi menjadi bentuk eselon tereduksi baris

Untuk $= 2$ , maka

$$[A - \lambda I|0] = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ menukar baris pertama dengan baris ketiga

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ -1 kali baris pertama dan ditambahkan pada baris kedua

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$ 2 kali baris pertama dan ditambahkan pada baris ketiga

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$ $-\frac{1}{3}$ kali baris kedua

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ -3 kali baris kedua dan ditambahkan pada baris ketiga

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ -1 kali baris kedua dan ditambahkan pada baris pertama

Dengan mereduksi matriks di atas menjadi bentuk eselon tereduksi baris, maka didapatkan

i. $k - m = 0;$ sehingga $k = m$

ii. $l - m = 0;$ sehingga $l = m$

Dari (ii) maka (i) didapatkan

$$k = l = m$$

Misal $m - s$

diperoleh bahwa solusi umum bagi $(A - (2)I)X = 0$ adalah

$$s_1 = \begin{bmatrix} k \\ l \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ s \\ s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jadi basis untuk ruang vektor eigennya sebanyak 1.

Untuk $\lambda = -1$, dengan menggunakan Operasi Baris Elementer (OBE) maka didapatkan

$$[A - \lambda_2 I|0] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ -1 kali baris pertama dan ditambahkan pada baris kedua

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ -1 kali baris pertama dan ditambahkan pada baris ketiga

Dengan mereduksi matriks di atas menjadi bentuk eselon tereduksi baris, maka didapatkan

$$k + l + m = 0$$

$$k = -l - m$$

Misal $l = s$ dan $m = t$

diperoleh bahwa solusi umum bagi $(A \quad ( \quad 1)I)X = 0$ adalah

$$s_2 = \begin{bmatrix} k \\ l \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s-t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jadi basis untuk ruang vektor eigennya sebanyak 2.

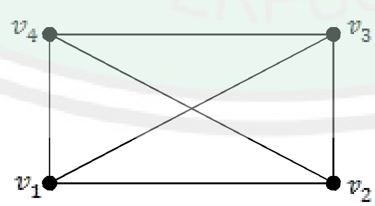
Jadi untuk $\lambda = 2$ terdapat satu basis ruang vektor eigen , dan untuk $\lambda = -1$ terdapat dua basis ruang vektor eigen , jadi *spectrum* graf komplit $K_3$ adalah

$$\textbf{Spect}(K_3) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

### 3.3 *Spectrum* dari Graf Komplit ($K_4$)

Untuk graf komplit $K_4$ yang dapat digambarkan grafnya seperti Gambar 3.3 berikut

$K_4$ :




Gambar 3.3: Graf Komplit $K_4$

Pada graf komplit $K_4$ menghasilkan matriks adjacency sebagai berikut

$$A = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -\lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -\lambda \end{bmatrix}\right) = (-\lambda)\det\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} -$$

$$(1)\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} + (1)\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} - (1)\det\begin{bmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= (-\lambda)\left((-\lambda)\det\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} - (1)\det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} + (1)\det\begin{bmatrix} 1 & -\lambda \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$-(1)\left((1)\det\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} - (1)\det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} + (1)\det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$+(1)\left((1)\det\begin{bmatrix}-\lambda & 1\\ 1 & -\lambda\end{bmatrix}-(1)\det\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -\lambda\end{bmatrix}+(1)\det\begin{bmatrix}1 & -\lambda\\ 1 & 1\end{bmatrix}\right)$$

$$-(1)\left((1)\det\begin{bmatrix}1 & -\lambda\\ 1 & 1\end{bmatrix}-(-\lambda)\det\begin{bmatrix}1 & -\lambda\\ 1 & 1\end{bmatrix}+(1)\det\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\right)$$

$= \lambda^4 - 6\lambda^2 - 8\lambda - 3$

$= (\lambda - 3)(\lambda + 1)(\lambda + 1)(\lambda + 1)$

Jadi didapatkan nilai eigen bagi $K_4$ adalah $= 3$ , dan $\lambda = -1$

Setelah mendapatkan nilai eigen maka akan dicari vektor eigennya, yaitu:

$$\begin{bmatrix}-\lambda & 1 & 1 & 1\\ 1 & -\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1 & -\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1 & -\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k\\ l\\ m\\ n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

Disubstitusikan nilai $\lambda = 3$ dan $\lambda = -1$ ke dalam persamaan di atas. Pada graf komplit $K_4$ menghasilkan matriks adjacency $4 \times 4$ sehingga untuk menentukan vektor eigen maka matriks di atas akan direduksi menjadi bentuk eselon tereduksi baris

Untuk $\lambda = 3$, maka

$$[A - \lambda\ I \mid 0] = \begin{bmatrix}-3 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & -3 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -3 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & -3 & 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & -3 & 0\\ 1 & -3 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -3 & 1 & 0\\ -3 & 1 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$ Menukar baris pertama dengan baris keempat

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & -3 & 0\\ 0 & -4 & 0 & 4 & 0\\ 1 & 1 & -3 & 1 & 0\\ -3 & 1 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$ -1 kali baris pertama dan ditambahkan pada baris kedua

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ -1 kali baris pertama dan ditambahkan pada baris ketiga

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & -8 & 0 \end{bmatrix}$$ 3 kali baris pertama dan ditambahkan pada baris keempat

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & -8 & 0 \end{bmatrix}$$ $-\frac{1}{4}$ kali baris kedua

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & -8 & 0 \end{bmatrix}$$ $-\frac{1}{4}$ kali baris ketiga

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$ -4 kali baris kedua dan ditambahkan pada baris keempat

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ -4 kali baris ketiga dan ditambahkan pada baris keempat

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ -1 kali baris kedua dan ditambahkan pada baris pertama

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ -1 kali baris ketiga dan ditambahkan pada baris pertama

Dengan mereduksi matriks di atas menjadi bentuk eselon tereduksi baris, maka didapatkan

i. $k - n = 0$; sehingga $k = n$

ii. $l - n = 0$ ; sehingga $l = n$

iii. $m - n = 0$; sehingga $m = n$

Dari (i), (ii), dan (iii) maka diperoleh

$k = l = m = n$

Misal $n = s$, maka diperoleh bahwa solusi umum bagi $(A - (3)I)X = 0$ adalah

$$s_1 = \begin{bmatrix} k \\ l \\ m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ s \\ s \\ s \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jadi basis untuk ruang vektor eigennya sebanyak 1

Untuk $\lambda = -1$, dengan menggunakan Operasi Baris Elementer (OBE) maka didapatkan

$$[A - \lambda\ I \mid 0] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ -1 kali baris pertama dan ditambahkan pada baris kedua,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ -1 kali baris pertama dan ditambahkan pada baris ketiga

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ -1 kali baris pertama dan ditambahkan pada baris keempat

Dengan mereduksi matriks di atas menjadi bentuk eselon tereduksi baris, maka didapatkan

$$k + l + m + n = 0$$

$$k = -l - m - n$$

Misal $l = s, m = t$ dan $n = u$, maka diperoleh bahwa solusi umum bagi $(A - (-1)I)X = 0$ adalah

$$s_1 = \begin{bmatrix} k \\ l \\ m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s - t - u \\ s \\ t \\ u \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

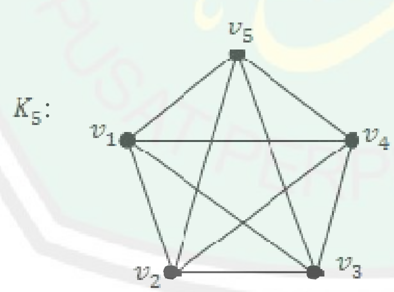
Jadi basis untuk ruang vektor eigennya sebanyak 3

Jadi untuk $\lambda = 3$ terdapat satu basis ruang vektor eigen , dan untuk $\lambda = -1$ terdapat tiga basis ruang vektor eigen , jadi *spectrum* graf komplit $K_4$ adalah

$$\textbf{Spect}(K_4) = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

### 3.4 *Spectrum* dari Graf Komplit ($K_5$)

Untuk graf komplit $K_5$ yang dapat digambarkan grafnya seperti Gambar 3.4 berikut




Gambar 3.4: Graf Komplit $(K_5)$

Pada graf komplit $K_5$ menghasilkan matriks adjacency sebagai berikut

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -\lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -\lambda \end{bmatrix}\right)$$

$$= (-\lambda)\left(\det\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -\lambda \end{bmatrix}\right) - (1)\left(\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -\lambda \end{bmatrix}\right)$$

$$+(1)\left(\det\begin{bmatrix}1 & -\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1 & -\lambda\end{bmatrix}\right)-(1)\left(\det\begin{bmatrix}1 & -\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1 & -\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & -\lambda\end{bmatrix}\right)$$

$$+(1)\left(\det\begin{bmatrix}1 & -\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1 & -\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1 & -\lambda\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\right)$$

$$=(-\lambda)\left(\begin{matrix}(-\lambda)\det\begin{bmatrix}-\lambda & 1 & 1\\ 1 & -\lambda & 1\\ 1 & 1 & -\lambda\end{bmatrix}-(1)\det\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -\lambda & 1\\ 1 & 1 & -\lambda\end{bmatrix}\\ +(1)\det\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -\lambda & 1\\ 1 & 1 & -\lambda\end{bmatrix}-(1)\det\begin{bmatrix}1 & -\lambda & 1\\ 1 & 1 & -\lambda\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\end{matrix}\right)$$

$$-(1)\left(\begin{matrix}(1)\det\begin{bmatrix}-\lambda & 1 & 1\\ 1 & -\lambda & 1\\ 1 & 1 & -\lambda\end{bmatrix}-(1)\det\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -\lambda & 1\\ 1 & 1 & -\lambda\end{bmatrix}\\ +(1)\det\begin{bmatrix}1 & -\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -\lambda\end{bmatrix}-(1)\det\begin{bmatrix}1 & -\lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\end{matrix}\right)$$

$$+(1)\left(\begin{matrix}(1)\det\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -\lambda & 1\\ 1 & 1 & -\lambda\end{bmatrix}-(-\lambda)\det\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -\lambda & 1\\ 1 & 1 & -\lambda\end{bmatrix}\\ +(1)\det\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -\lambda\end{bmatrix}-(1)\det\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -\lambda\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\end{matrix}\right)$$

$$-(1)\left(\begin{matrix}(1)\det\begin{bmatrix}1 & -\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -\lambda\end{bmatrix}-(-\lambda)\det\begin{bmatrix}1 & -\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -\lambda\end{bmatrix}\\ +(1)\det\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -\lambda\end{bmatrix}-(1)\det\begin{bmatrix}1 & 1 & -\lambda\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\end{matrix}\right)$$

$$+(1)\left(\begin{matrix}(1)\det\begin{bmatrix}1 & -\lambda & 1\\ 1 & 1 & -\lambda\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}-(-\lambda)\det\begin{bmatrix}1 & -\lambda & 1\\ 1 & 1 & -\lambda\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\\ +(1)\det\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -\lambda\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}-(1)\det\begin{bmatrix}1 & 1 & -\lambda\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\end{matrix}\right)$$

$$= (-\lambda)\left(\begin{array}{l}
(-\lambda)\left((-\lambda)\det\begin{bmatrix}-\lambda & 1\\ 1 & -\lambda\end{bmatrix} - (1)\det\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -\lambda\end{bmatrix} + (1)\det\begin{bmatrix}1 & -\lambda\\ 1 & 1\end{bmatrix}\right)\\
-(1)\left((1)\det\begin{bmatrix}-\lambda & 1\\ 1 & -\lambda\end{bmatrix} - (1)\det\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -\lambda\end{bmatrix} + (1)\det\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\right)\\
+(1)\left((1)\det\begin{bmatrix}-\lambda & 1\\ 1 & -\lambda\end{bmatrix} - (1)\det\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -\lambda\end{bmatrix} + (1)\det\begin{bmatrix}1 & -\lambda\\ 1 & 1\end{bmatrix}\right)\\
-(1)\left((1)\det\begin{bmatrix}1 & -\lambda\\ 1 & 1\end{bmatrix} - (-\lambda)\det\begin{bmatrix}1 & -\lambda\\ 1 & 1\end{bmatrix} + (1)\det\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\right)
\end{array}\right)$$

$$-(1)\left(\begin{array}{l}
(1)\left((-\lambda)\det\begin{bmatrix}-\lambda & 1\\ 1 & -\lambda\end{bmatrix} - (1)\det\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -\lambda\end{bmatrix} + (1)\det\begin{bmatrix}1 & -\lambda\\ 1 & 1\end{bmatrix}\right)\\
-(1)\left((1)\det\begin{bmatrix}-\lambda & 1\\ 1 & -\lambda\end{bmatrix} - (1)\det\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -\lambda\end{bmatrix} + (1)\det\begin{bmatrix}1 & -\lambda\\ 1 & 1\end{bmatrix}\right)\\
+(1)\left((1)\det\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -\lambda\end{bmatrix} - (-\lambda)\det\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -\lambda\end{bmatrix} + (1)\det\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\right)\\
-(1)\left((1)\det\begin{bmatrix}1 & -\lambda\\ 1 & 1\end{bmatrix} - (-\lambda)\det\begin{bmatrix}1 & -\lambda\\ 1 & 1\end{bmatrix} + (1)\det\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\right)
\end{array}\right)$$

$$+(1)\left(\begin{array}{l}
(1)\left((1)\det\begin{bmatrix}-\lambda & 1\\ 1 & -\lambda\end{bmatrix} - (1)\det\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -\lambda\end{bmatrix} + (1)\det\begin{bmatrix}1 & -\lambda\\ 1 & 1\end{bmatrix}\right)\\
-(-\lambda)\left((1)\det\begin{bmatrix}-\lambda & 1\\ 1 & -\lambda\end{bmatrix} - (1)\det\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -\lambda\end{bmatrix} + (1)\det\begin{bmatrix}1 & -\lambda\\ 1 & 1\end{bmatrix}\right)\\
+(1)\left((1)\det\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -\lambda\end{bmatrix} - (1)\det\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -\lambda\end{bmatrix} + (1)\det\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\right)\\
-(1)\left((1)\det\begin{bmatrix}1 & -\lambda\\ 1 & 1\end{bmatrix} - (1)\det\begin{bmatrix}1 & -\lambda\\ 1 & 1\end{bmatrix} + (1)\det\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\right)
\end{array}\right)$$

$$-(1)\left(\begin{array}{l}
(1)\left((1)\det\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -\lambda\end{bmatrix} - (-\lambda)\det\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -\lambda\end{bmatrix} + (1)\det\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\right)\\
-(-\lambda)\left((1)\det\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -\lambda\end{bmatrix} - (-\lambda)\det\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -\lambda\end{bmatrix} + (1)\det\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\right)\\
+(1)\left((1)\det\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -\lambda\end{bmatrix} - (1)\det\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -\lambda\end{bmatrix} + (1)\det\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\right)\\
-(1)\left((1)\det\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix} - (1)\det\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix} + (-\lambda)\det\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\right)
\end{array}\right)$$

$$
+(1)\left(\begin{array}{c}
(1)\left((1)\det\begin{bmatrix}1 & -\lambda\\ 1 & 1\end{bmatrix}-(-\lambda)\det\begin{bmatrix}1 & -\lambda\\ 1 & 1\end{bmatrix}+(1)\det\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\right)\\
-(-\lambda)\left((1)\det\begin{bmatrix}1 & -\lambda\\ 1 & 1\end{bmatrix}-(-\lambda)\det\begin{bmatrix}1 & -\lambda\\ 1 & 1\end{bmatrix}+(1)\det\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\right)\\
+(1)\left((1)\det\begin{bmatrix}1 & -\lambda\\ 1 & 1\end{bmatrix}-(1)\det\begin{bmatrix}1 & -\lambda\\ 1 & 1\end{bmatrix}+(1)\det\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\right)\\
-(1)\left((1)\det\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}-(1)\det\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}+(-\lambda)\det\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\right)
\end{array}\right)
$$

$$
-(-\lambda)\left(\begin{array}{c}
(-\lambda)\left((-\lambda)(\lambda^2-1)-(1)(-\lambda-1)+(1)(1+\lambda)\right)\\
-(1)\left((1)(\lambda^2-1)-(1)(-\lambda-1)+(1)(1-1)\right)\\
+(1)\left((1)(\lambda^2-1)-(1)(-\lambda-1)+(1)(1+\lambda)\right)\\
-(1)\left((1)(1+\lambda)-(-\lambda)(1+\lambda)+(1)(1-1)\right)
\end{array}\right)
$$

$$
-(1)\left(\begin{array}{c}
(1)\left((-\lambda)(\lambda^2-1)-(1)(-\lambda-1)+(1)(1+\lambda)\right)\\
-(1)\left((1)(\lambda^2-1)-(1)(-\lambda-1)+(1)(1+\lambda)\right)\\
+(1)\left((1)(-\lambda-1)-(-\lambda)(-\lambda-1)+(1)(1-1)\right)\\
-(1)\left((1)(1+\lambda)-(-\lambda)(1+\lambda)+(1)(1-1)\right)
\end{array}\right)
$$

$$
+(1)\left(\begin{array}{c}
(1)\left((1)(\lambda^2-1)-(1)(-\lambda-1)+(1)(1+\lambda)\right)\\
-(-\lambda)\left((1)(\lambda^2-1)-(1)(-\lambda-1)+(1)(1+\lambda)\right)\\
+(1)\left((1)(-\lambda-1)-(1)(-\lambda-1)+(1)(1-1)\right)\\
-(1)\left((1)(1+\lambda)-(1)(1+\lambda)+(1)(1-1)\right)
\end{array}\right)
$$

$$
-(1)\left(\begin{array}{c}
(1)\left((1)(-\lambda-1)-(-\lambda)(-\lambda-1)+(1)(1-1)\right)\\
-(-\lambda)\left((1)(-\lambda-1)-(-\lambda)(-\lambda-1)+(1)(1-1)\right)\\
+(1)\left((1)(-\lambda-1)-(1)(-\lambda-1)+(1)(1-1)\right)\\
-(1)\left((1)(1-1)-(1)(1-1)+(-\lambda)(1-1)\right)
\end{array}\right)
$$

$$
+(1)\left(\begin{array}{c}
(1)\left((1)(1+\lambda)-(-\lambda)(1+\lambda)+(1)(1-1)\right)\\
-(-\lambda)\left((1)(1+\lambda)-(-\lambda)(1+\lambda)+(1)(1-1)\right)\\
+(1)\left((1)(1+\lambda)-(1)(1+\lambda)+(1)(1-1)\right)\\
-(1)\left((1)(1-1)-(1)(1-1)+(-\lambda)(1-1)\right)
\end{array}\right)
$$

$$
=(-\lambda)((-\lambda)(-\lambda^3+\lambda+\lambda+1+1+\lambda)-(1)(\lambda^2-1+\lambda+1+1-1)
$$

$$
+(1)(\lambda^2-1+\lambda+1+1+\lambda)-(1)(1+\lambda+\lambda+\lambda^2+1-1))
$$

$$-(1)((1)(-\lambda^3+\lambda+\lambda+1+1+\lambda)-(1)(\lambda^2-1+\lambda+1+1+\lambda)$$

$$+(1)(-\lambda-1+(\lambda^2+\lambda)+1-1)-(1)(1+\lambda+\lambda+\lambda^2+1-1))$$

$$+(1)((1)(\lambda^2-1+\lambda+1+1+\lambda)—\lambda(\lambda^2-1+\lambda+1+1+\lambda)$$

$$+(1)(-\lambda-1+\lambda+1+1-1)-(1)(1+\lambda-1-\lambda+1-1))$$

$$-(1)((1)(-\lambda-1-\lambda^2-\lambda+1-1)—\lambda(-\lambda-1-\lambda^2-\lambda+1-1)$$

$$+(1)(-\lambda-1+\lambda+1+1-1)-(1)(1-1-1+1-\lambda+\lambda))$$

$$+(1)((1)(1+\lambda+\lambda+\lambda^2+1-1)—\lambda(1+\lambda+\lambda+\lambda^2+1-1)$$

$$+(1)(1+\lambda-1-\lambda+1-1)-(1)(1-1-1+1-\lambda+\lambda))$$

$$--\lambda(\lambda^4-6\lambda^2-8\lambda-3)-(1)(-\lambda^3-3\lambda^2-3\lambda-1)+$$

$$(\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+1)-(1)(-\lambda^3-3\lambda^2-3\lambda-1)+(\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+1)$$

$$=-\lambda^5+6\lambda^3+8\lambda^2+3\lambda+\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+1+\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+1$$

$$+\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+1+\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+1$$

$$=-\lambda^5+10\lambda^3+20\lambda^2+15\lambda+4$$

$$-(\lambda-4)(\lambda+1)(\lambda+1)(\lambda+1)(\lambda+1)$$

Jadi didapatkan nilai eigen bagi $K_5$ adalah $=4$ , dan $\lambda=-1$

Setelah mendapatkan nilai eigen maka akan dicari vektor eigennya, yaitu:

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ l \\ m \\ n \\ o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dibstitusikan nilai $\lambda=4$ dan $\lambda=-1$ ke dalam persamaan di atas. Pada graf komplit $K_5$ menghasilkan matriks adjacency $5\times5$ sehingga untuk menentukan vektor eigen maka matriks di atas akan direduksi menjadi bentuk eselon tereduksi baris

Untuk $\lambda = 4$, maka

$$[A - \lambda 1\ I \mid 0] = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ Menukar baris pertama dengan baris kelima

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ -1 kali baris pertama dan ditambahkan pada baris kedua

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ -1 kali baris pertama dan ditambahkan pada baris ketiga

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 5 & 0 \\ -4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ -1 kali baris pertama dan ditambahkan pada baris keempat

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 5 & -15 & 0 \end{bmatrix}$$ 4 kali baris pertama dan ditambahkan pada baris kelima

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 5 & -15 & 0 \end{bmatrix}$$ $-\frac{1}{5}$ kali baris kedua, ketiga dan keempat

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & -10 & 0 \end{bmatrix}$$ -5 kali baris kedua dan ditambahkan pada baris kelima

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$ -5 kali baris ketiga dan ditambahkan pada baris kelima

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ -5 kali baris keempat dan ditambahkan pada baris kelima

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ -1 kali baris kedua dan ditambahkan pada baris pertama

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ -1 kali baris ketiga dan ditambahkan pada baris pertama

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ -1 kali baris keempat dan ditambahkan pada baris pertama

Dengan mereduksi matriks di atas menjadi bentuk eselon tereduksi baris, maka didapatkan

i. $k - o = 0$ ; sehingga $k = o$

ii. $l - o = 0$ ; sehingga $l = o$

iii. $m - o = 0$ ;sehingga $m = o$

iv. $n - o = 0$ ; sehingga $n = o$

Dari (i), (ii), (iii) dan (iv) maka diperoleh

$k = l = m = n = o$

Misal $o = s$, maka diperoleh bahwa solusi umum bagi $(A - (4)I)X = 0$ adalah

$$s_1 = \begin{bmatrix} k \\ l \\ m \\ n \\ o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ s \\ s \\ s \\ s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jadi basis untuk ruang vektor eigennya sebanyak 1.

Untuk $\lambda = -1$, dengan menggunakan Operasi Baris Elementer (OBE) maka didapatkan

$$[A - \lambda_1 I|0] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ -1 kali baris pertama dan ditambahkan pada baris kedua

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ -1 kali baris pertama dan ditambahkan pada baris ketiga

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ -1 kali baris pertama dan ditambahkan pada baris keempat

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

-1 kali baris pertama dan ditambahkan pada baris kelima

Dengan mereduksi matriks di atas menjadi bentuk eselon tereduksi baris, maka didapatkan $v + w + x + y + z = 0$

$$v = -w - x - y - z$$

Misal $w = r, x = s, y = t$ dan $z = u$, maka diperoleh bahwa solusi umum bagi $(A - (-1)I)X = 0$ adalah

$$s_2 = \begin{bmatrix} v \\ w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -w - x - y - z \\ w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r - s - t - u \\ r \\ s \\ t \\ u \end{bmatrix}$$

$$= r\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jadi basis untuk ruang vektor eigennya sebanyak 4.

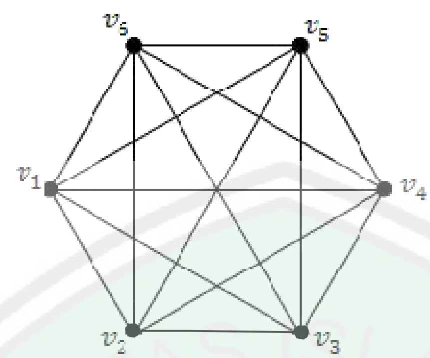
Jadi untuk $\lambda = 3$ terdapat satu basis ruang vektor eigen , dan untuk $\lambda = -1$ terdapat empat basis vektor eigen, jadi *spectrum* graf komplit $K_5$ adalah

$$\textbf{Spect}(K_5) = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

### 3.5 *Spectrum* dari Graf Komplit ($K_6$)

Untuk graf komplit $K_6$ yang dapat digambarkan grafnya seperti Gambar 3.5 berikut

$K_6$ :




Gambar 3.5. Garf Komplit $(K_6)$

Pada graf komplit $K_6$ menghasilkan matriks adjacency sebagai berikut

$$A= \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$A - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix}0&1&1&1&1&1\\1&0&1&1&1&1\\1&1&0&1&1&1\\1&1&1&0&1&1\\1&1&1&1&0&1\\1&1&1&1&1&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda&0&0&0&0&0\\0&\lambda&0&0&0&0\\0&0&\lambda&0&0&0\\0&0&0&\lambda&0&0\\0&0&0&0&\lambda&0\\0&0&0&0&0&\lambda\end{bmatrix}\right)=0.$$

$$det\left(\begin{bmatrix}-\lambda&1&1&1&1&1\\1&-\lambda&1&1&1&1\\1&1&-\lambda&1&1&1\\1&1&1&-\lambda&1&1\\1&1&1&1&-\lambda&1\\1&1&1&1&1&-\lambda\end{bmatrix}\right)$$

$= \lambda^6 - 15\lambda^4 - 40\lambda^3 - 45\lambda^2 - 24\lambda - 5$

$= (\lambda - 5)(\lambda + 1)(\lambda + 1)(\lambda + 1)(\lambda + 1)(\lambda + 1)$

Jadi didapatkan nilai eigen bagi $K_6$ adalah $= 5$ , dan $\lambda = -1$

Setelah mendapatkan nilai eigen maka akan dicari vektor eigennya, yaitu:

$$\begin{bmatrix}-\lambda&1&1&1&1&1\\1&-\lambda&1&1&1&1\\1&1&-\lambda&1&1&1\\1&1&1&-\lambda&1&1\\1&1&1&1&-\lambda&1\\1&1&1&1&1&-\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\\d\\e\\f\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Disubstitusikan nilai $\lambda = 5$ dan $\lambda = -1$ ke dalam persamaan di atas. Pada graf komplit $K_6$ menghasilkan matriks adjacency $6 \times 6$ sehingga untuk menentukan vektor eigen maka matriks di atas akan direduksi menjadi bentuk eselon tereduksi baris

Untuk $\lambda - 5$, maka

$$[A - \lambda I|0] = \begin{bmatrix}-5&1&1&1&1&1&0\\1&-5&1&1&1&1&0\\1&1&-5&1&1&1&0\\1&1&1&-5&1&1&0\\1&1&1&1&-5&1&0\\1&1&1&1&1&1&0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -5 & 0 \\ 1 & -5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -5 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -5 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -5 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Menukar letak baris pertama dan baris keenam

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & -5 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -5 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -5 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

-1 kali baris pertama dan ditambahkan pada baris kedua

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -5 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -5 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

-1 kali baris pertama dan ditambahkan pada baris ketiga

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -5 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

-1 kali baris pertama dan ditambahkan pada baris keempat

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 6 & 0 \\ -5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

-1 kali baris pertama dan ditambahkan pada baris kelima

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 6 & 6 & -24 & 0 \end{bmatrix}$$

5 kali baris pertama dan ditambahkan pada baris keenam

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 6 & 6 & -24 & 0 \end{bmatrix}$$

$-\frac{1}{5}$ kali baris kedua, ketiga, keempat dan kelima

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 6 & -18 & 0 \end{bmatrix}$$

-6 kali baris kedua dan ditambahkan pada baris keenam

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 6 & -12 & 0 \end{bmatrix}$$

-6 kali baris ketiga dan ditambahkan pada baris keenam

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$

-6 kali baris keempat dan ditambahkan pada baris keenam

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

-6 kali baris kelima dan ditambahkan pada baris keenam

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

-1 kali baris kedua dan ditambahkan pada baris petama

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

-1 kali baris ketiga dan ditambahkan pada baris petama

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

-1 kali baris keempat dan ditambahkan pada baris petama

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

-1 kali baris kelima dan ditambahkan pada baris petama

Dengan mereduksi matriks di atas menjadi bentuk eselon tereduksi baris, maka didapatkan

i. $k - p = 0$ ; sehingga $k = p$

ii. $l - p = 0$ ; sehingga $l = p$

iii. $m - p = 0$ ; sehingga $m = p$

iv. $n - p = 0$ ; sehingga $n = p$

v. $o - p = 0$ ; sehingga $o = p$

Dari (i), (ii), (iii), (iv) dan (v) didapatkan

$k = l = m = n = o = p$

Misal $p = s$, maka diperoleh bahwa solusi umum bagi $(A - (5)I)X = 0$ adalah

$$s_1 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ s \\ s \\ s \\ s \\ s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jadi basis untuk ruang vektor eigennya sebanyak 1.

Untuk $\lambda = -1$, dengan menggunakan Operasi Baris Elementer (OBE) maka didapatkan

$$[A - \lambda\, I \,|\, 0] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ -1 kali baris pertama dan ditambahkan pada baris kedua

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ -1 kali baris pertama dan ditambahkan pada baris ketiga

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ -1 kali baris pertama dan ditambahkan pada baris keempat

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ -1 kali baris pertama dan ditambahkan pada baris kelima

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ -1 kali baris pertama dan ditambahkan pada baris keenam

Dengan mereduksi matriks di atas menjadi bentuk eselon tereduksi baris, maka didapatkan

$$k + l + m + n + o + p = 0$$

$$k = -l - m - n - o - p$$

Misal $l = r, m = s, n = t, o = u,$ dan $p = v$, maka diperoleh bahwa solusi umum bagi $(A - (-1)I)X = 0$ adalah

$$s_2 = \begin{bmatrix} k \\ l \\ m \\ n \\ o \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l - m - n - o - p \\ l \\ m \\ n \\ o \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r - s - t - u - v \\ r \\ s \\ t \\ u \\ v \end{bmatrix}$$

$$= r\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + u\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + v\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jadi basis untuk ruang vektor eigennya sebanyak 5.

Jadi untuk $\lambda = 5$ terdapat satu basis ruang vektor eigen , dan untuk $\lambda = -1$ terdapat lima basis ruang vektor eigen , jadi *spectrum* graf komplit $K_5$ adalah

$$\textbf{Spect}(K_6) = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan data di atas yaitu *spectrum* dari graf komplit $(K_n)$ dimana $n \geq 2$ dan $n \in \mathbb{N}$, maka diperoleh tabel sebagai berikut

Tabel 3.1 *Spectrum* Graf Komplit $(K_n)$ dengan $n \geq 2$ dan $n \in \mathbb{N}$

| No | Graf Komplit $(K_n)$ | Spec $(K_n)$ |
|---|---|---|
| 1 | $K_2$ | $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ |
| 2 | $K_3$ | $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ |
| 3 | $K_4$ | $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ |
| 4 | $K_5$ | $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ |
| 5 | $K_6$ | $\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ |

Dari tabel di atas terlihat bahwa pola *spectrum* graf komplit $(K_n)$ adalah

$$\text{Spec } (K_n) = \begin{bmatrix} (n-1) & -1 \\ 1 & (n-1) \end{bmatrix}$$

**Teorema:**

Misal $K_n$ graf komplit order n, maka *spectrum* graf komplit $(K_n)$ adalah

$$\text{Spec } (K_n) = \begin{bmatrix} (n-1) & -1 \\ 1 & (n-1) \end{bmatrix}$$

**Bukti:**

Misal $K_n$ adalah graf komplit order n, maka

Matriks adjacency dari graf komplit $(K_n)$

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & \cdots & v_n \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_n \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Dari matriks adjacency di atas, maka akan dicari nilai eigennya:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -\lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

Melalui operasi baris elementer, matriks $\det(A - \lambda I)$ direduksi menjadi matriks segitiga atas diperoleh,

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \frac{(-1)(-\lambda)(\lambda^2-1)}{\lambda^2} & \frac{1}{\lambda} & \frac{1}{\lambda} & \frac{1}{\lambda} & \cdots & \frac{1}{\lambda} \\ 0 & 0 & \frac{(-1)(-\lambda)(\lambda^2-2)}{(\lambda^2-1)} & \frac{\lambda}{(\lambda^2-1)} & \frac{\lambda}{(\lambda^2-1)} & \cdots & \frac{\lambda}{(\lambda^2-1)} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(-1)(-\lambda)(\lambda^2-3)}{(\lambda^2-2)} & \frac{\lambda}{(\lambda^2-2)} & \cdots & \frac{\lambda}{(\lambda^2-2)} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{(-1)(-\lambda)(\lambda^2-4)}{(\lambda^2-3)} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 & \ddots & \frac{\lambda}{(\lambda^2-(n-2))} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{(-1)(-\lambda)(\lambda^2-n)}{(\lambda^2-(n-1))} \end{pmatrix}$$

$\det(A-\lambda I)$ tidak lain adalah hasil perkalian diagonal matrik segitiga atas tersebut. Jadi

$\det(A-\lambda I) = (\lambda-(n-1))(\lambda+1)^{n-1}$

Karena, $\det(A) = 0$, maka

$(\lambda-(n-1))(\lambda+1)^{n-1}$

Sehingga didapatkan $\lambda = (n-1)$ atau $\lambda = -1$

Akan dibuktikan untuk $\lambda = (n-1)$ akan didapatkan banyaknya basis ruang vektor eigen adalah 1.

untuk $\lambda = (n-1)$ akan didapatkan

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} (n-1) & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & (n-1) & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & (n-1) & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & (n-1) \end{bmatrix}$$

Akan ditunjukkan vektor eigen untuk $\lambda = (n-1)$

$(A - \lambda I)x = 0$

$$= \begin{bmatrix} (n-1) & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & (n-1) & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & (n-1) & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & (n-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{(n-1)} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dengan mereduksi matriks di atas menjadi bentuk eselon tereduksi baris, maka didapatkan

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{(n-1)} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kemudian didapatkan

i. $x_1 = x_n$

ii. $x_2 = x_n$

iii. $\vdots = x_n$

iv. $x_{(n-1)} = x_n$

Sehingga dari i, ii,iii, dan iv diperoleh

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_{(n-1)} = x_n$$

Misal $x_n = s$ maka vektor eigennya adalah

$$S_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{(n-1)} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ s \\ \vdots \\ s \\ s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jadi didapatkan banyaknya basis ruang vektor eigen untuk $\lambda = (n-1)$ adalah 1

Akan dibuktikan untuk $\lambda = -1$ akan didapatkan banyaknya basis ruang vektor eigen adalah $(n-1)$.

Untuk $\lambda = -1$ akan didapatkan

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Untuk $\lambda = -1$ akan didapatkan

$(A - \lambda I)x = 0$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{(n-1)} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dengan mereduksi matriks di atas menjadi bentuk eselon tereduksi baris, maka didapatkan

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{(n-1)} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kemudian didapatkan

$x_1 + x_2 + \cdots + x_{(n-1)} + x_n = 0$

$x_1 = -x_2 - x_2 - \cdots - x_{(n-1)} - x_n$

maka vektor eigennya adalah

$$S_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{(n-1)} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 - x_2 - \cdots - x_{(n-1)} - x_n \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{(n-1)} \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$= x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + x_{(n-1)} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_n \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jadi didapatkan banyaknya basis ruang vektor eigen untuk $\lambda = -1$ adalah $(n-1)$

**Jadi terbukti bahwa Spec** $(\boldsymbol{K_n}) = \begin{bmatrix} (\boldsymbol{n-1}) & \boldsymbol{-1} \\ \boldsymbol{1} & (\boldsymbol{n-1}) \end{bmatrix}$

# BAB IV

# PENUTUP

## 4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan pada Bab III, maka dapat diambil kesimpulan, antara lain:

1. *Spectrum* graf komplit $(K_2)$ adalah

$$\text{Spec } (K_2) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2. *Spectrum* graf komplit $(K_3)$ adalah

$$\text{Spec } (K_3) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

3. *Spectrum* graf komplit $(K_4)$ adalah

$$\text{Spec } (K_4) = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

4. *Spectrum* graf komplit $(K_5)$ adalah

$$\text{Spec } (K_5) = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

5. *Spectrum* graf komplit $(K_6)$ adalah

$$\text{Spec } (K_6) = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan hasil penentuan *spectrum* graf komplit $(K_n)$ dengan $n \geq 2$ dan $n \in \mathbb{N}$, maka dapat disimpulkan bahwa bentuk umum *spectrum* graf komplit $(K_n)$ dengan $n \geq 2$ dan $n \in \mathbb{N}$ adalah:

$$\text{Spec } (K_n) = \begin{bmatrix} (n-1) & -1 \\ 1 & (n-1) \end{bmatrix}$$

## 4.2 Saran

Masih banyak jenis graf yang dapat dicari pola spectrumnya sehingga dapat ditentukan bentuk umum spectrumnya. Untuk penelitian selanjutnya dapat melanjutkan penelitian mengenai spectrum dari jenis-jenis graf yang lainnya.

## DAFTAR PUSTAKA


Al-Jazairi, Abu Bakar Jabir. 2007. *Tafsir Al-Qur'an Al-Aisar, Surat Ali 'Imron-Al-An'aam*. Jakarta: Darus Sunnah Press

Anton, Howard. 1997. *Aljabar Linear Elementer*, Jakarta: Erlangga

Anton, Howard. 2000. *Dasar-dasar Aljabar Linear jilid I*. Jakarta: CV Rajawali

Assauri, Sofyan. 1980. *Aljabar Linear Dasar Ekonometri jilid II*. Jakarta: CV Rajawali

Biggs, Norman. 1974. *Algebraic Graph Theory*, Cambride: Cambride University Press

Chartrand, Gery and Lesniak, Linda. 1986. *Graphs and Digraphs Second Edition*. California: a Division of Wadsworth, Inc.

Cullen, Charles G. 1993. *Aljabar Linear dan Penerapannya*, Jakarta: Gramedia Pustaka Utama

Gazali, Wikaria. 2005. *Matriks dan Transformasi Linear*. Jogjakarta: Graha Ilmu

Lipschutz, S. 2002. Seri *Penyelesaian Soal-soal Schaum Matematika Diskrit*, Jakarta: Salemba

Rachim, Abdul. Dkk. 1985. *Syariat Islam Tafsir Ayat-Ayat Ibadah*. jakarta: Rajawali Pers

Rahman, Afzalur. 1992. *Al-Qur'an Sumber Ilmu Pengetahuan*. Jakarta: Rineka Cipta

Siang, Jong Jek. 2002. *Matematika Diskrit dan Aplikasinya pada Ilmu Computer*. Jogjakarta: ANDI Jogjakarta

Siddik, Abdullah. 1980. *Asas-Asas Hukum Islam*. Jakarta: Widjaya

DEPARTEMEN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang (0341)551345
Fax. (0341)572533

**BUKTI KONSULTASI SKRIPSI**

Nama : Muhammad Haris Kurniawan
NIM : 05510014
Fakultas/ jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul skripsi : Spectrum Graf Komplit $(K_n)$ dengan n $\geq 2$ dan n $\in \mathbb{N}$
Pembimbing I : Abdussakir, M.Pd
Pembimbing II : Dr. Ahmad Barizi, M.A

| No | Tanggal | HAL | Tanda Tangan | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 Mei 2009 | Konsultasi Masalah | 1. | |
| 2 | 27 Agustus 2009 | Konsultasi BAB III | | 2. |
| 3 | 5 September 2009 | Revisi BAB III | 3. | |
| 4 | 14 September 2009 | Konsultasi BAB III | | 4. |
| 5 | 15 Oktober 2009 | Konsultasi BAB I, II, III | 5. | |
| 6 | 22 Oktober 2009 | Revisi BAB I, II | | 6. |
| 7 | 25 Oktober 2009 | Konsultasi BAB III | 7. | |
| 8 | 28 Oktober 2009 | Konsultasi Agama BAB I,II | | 8. |
| 9 | 28 Oktober 2009 | Revisi BAB III | 9. | |
| 10 | 7 November 2009 | Revisi Agama BAB I,II,III | | 10. |

Malang, 7 November 2009
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

<u>Abdussakir M.Pd.</u>
NIP. 19751006 200312 1 001