

**SOLUSI PERSAMAAN KESEIMBANGAN MASSA REAKTOR
MENGUNAKAN METODE PEMISAHAN VARIABEL**

SKRIPSI

**OLEH
MOH. SYAIFUL ARIF
NIM. 11610049**



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2015**

**SOLUSI PERSAMAAN KESEIMBANGAN MASSA REAKTOR
MENGUNAKAN METODE PEMISAHAN VARIABEL**

SKRIPSI

**Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)**

**Oleh
Moh. Syaiful Arif
NIM. 11610049**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2015**

**SOLUSI PERSAMAAN KESEIMBANGAN MASSA REAKTOR
MENGUNAKAN METODE PEMISAHAN VARIABEL**

SKRIPSI

Oleh
Moh. Syaiful Arif
NIM. 11610049

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 11 Juni 2015

Pembimbing I,

Pembimbing II,

Mohammad Jamhuri, M.Si
NIP. 19810502 200501 1 004

Ach. Nashichuddin, M.A
NIP. 19730705 200003 1 002

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

**SOLUSI PERSAMAAN KESEIMBANGAN MASSA REAKTOR
MENGUNAKAN METODE PEMISAHAN VARIABEL**

SKRIPSI

**Oleh
Moh. Syaiful Arif
NIM. 11610049**

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal 25 Juni 2015

Penguji Utama : Ari Kusumastuti, S.Si., M.Pd

Ketua Penguji : Hairur Rahman, M.Si

Sekretaris Penguji : Mohammad Jamhuri, M.Si

Anggota Penguji : Ach. Nashichuddin, M.A

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Moh. Syaiful Arif
NIM : 11610049
Jurusan : Matematika
Fakultas : Sains dan Teknologi
Judul Skripsi : Solusi Persamaan Keseimbangan Massa Reaktor
Menggunakan Metode Pemisahan Variabel

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

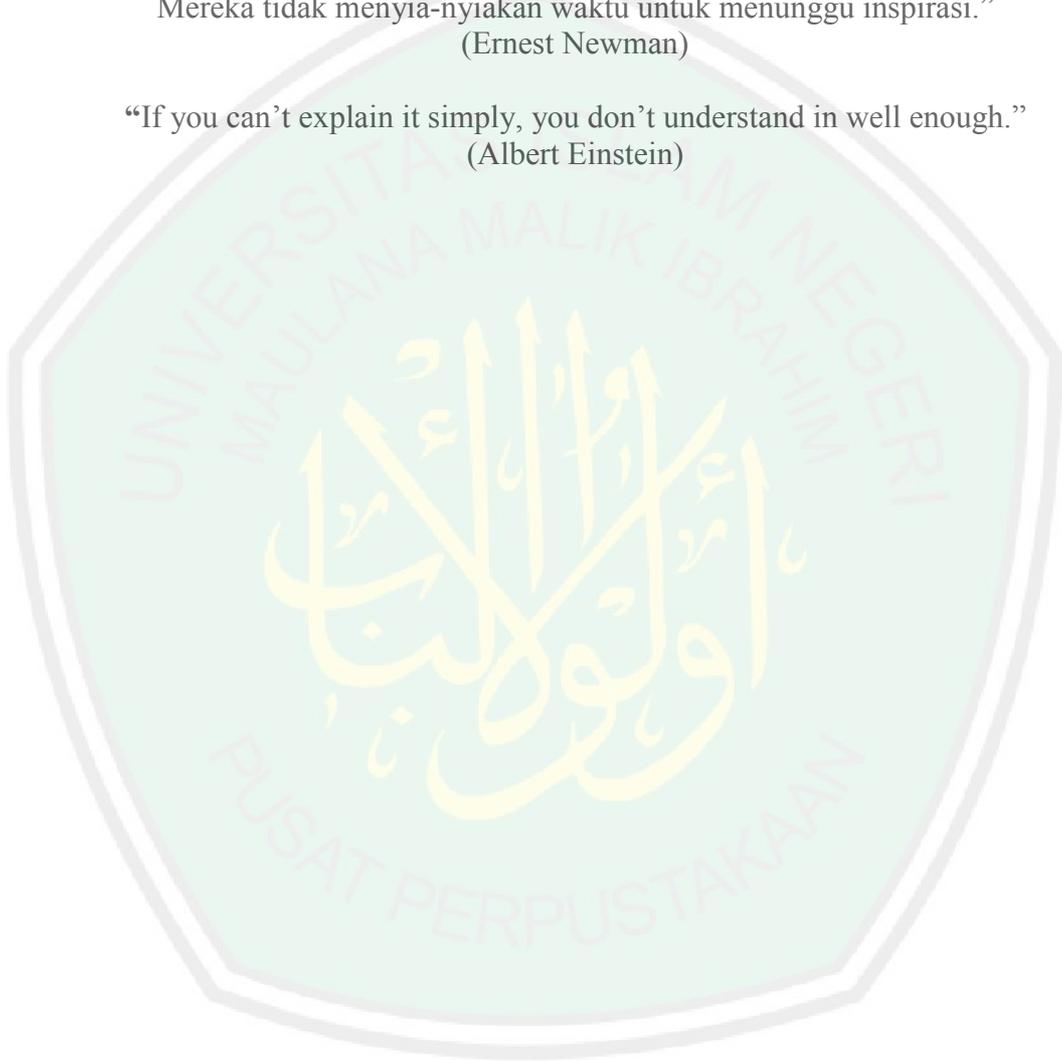
Malang, 11 Juni 2015
Yang Membuat Pernyataan,

Moh. Syaiful Arif
NIM. 11610049

MOTO

“Orang-orang hebat di bidang apapun, bukan baru bekerja karena mereka terinspirasi, namun mereka menjadi terinspirasi karena mereka lebih suka bekerja. Mereka tidak menyia-nyiakan waktu untuk menunggu inspirasi.”
(Ernest Newman)

“If you can't explain it simply, you don't understand it well enough.”
(Albert Einstein)



HALAMAN PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Kedua orang tua tercinta Bapak Su'amar, S.Ag dan Ibu Fatmawati, adik tersayang Nur Fahmi Maulidi, Lathifatul Azzah, Muhammad Zaky Irfani, serta seluruh keluarga yang selalu memberikan semangat, doa, dan dukungan kepada penulis.



KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Alhamdulillah rabbi'l'alamin, puji dan syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah Swt. atas limpahan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Pada kesempatan ini, penulis menyampaikan ucapan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu dalam menyelesaikan skripsi ini. Ucapan terima kasih ini penulis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Raharjo, M.Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Hj. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Mohammad Jamhuri, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang telah memberikan nasihat, bimbingan, dan berbagai pengetahuan kepada penulis.
5. Ach. Nasichuddin, M.A, selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan nasihat, arahan, dan bimbingan kepada penulis.
6. Ari Kusumastuti, S.Si., M.Pd, selaku dosen wali yang telah memberi nasihat selama perkuliahan.

7. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen, terima kasih atas segala ilmu dan bimbingan yang telah diberikan selama perkuliahan.
8. Kedua orang tua tercinta, serta seluruh keluarga yang selalu memberikan doa, semangat, dan motivasi kepada penulis sampai saat ini.
9. Seluruh teman-teman di Jurusan Matematika angkatan 2011, terutama A. Kholid Nadhori, Imam Mufid, M. Irfan, Hilwin Nisa', Zukhrufun Nadhifa, Dia Kusumawati, Fitriatuz Zakiyah, Lia Izzatun, Eny M., Aminatus Zuhria, Venny R., M. Gaddafi, Jadi Taqwa, Choirul Umam, M. Afifuddin, Amita Pradana P., dan M. Hasbi, terima kasih atas segala doa, motivasi, serta berbagai pengalaman berharga yang telah dijalani bersama sampai saat ini.
10. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik moril maupun materiil.

Semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi para pembaca, khususnya bagi penulis secara pribadi. *Amin Ya Rabbal'alamin.*

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, Juni 2015

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PENGANTAR	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	
HALAMAN MOTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	x
DAFTAR GAMBAR	xii
DAFTAR SIMBOL	xiii
DAFTAR LAMPIRAN	xiv
ABSTRAK	xv
ABSTRACT	xvi
ملخص	xvii
 BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	4
1.3 Tujuan Penelitian.....	4
1.4 Manfaat Penelitian.....	4
1.5 Batasan Masalah.....	5
1.6 Metode Penelitian.....	5
1.7 Sistematika Penulisan.....	6
 BAB II KAJIAN PUSTAKA	
2.1 Persamaan Keseimbangan Massa Reaktor.....	8
2.2 Klasifikasi Persamaan Diferensial.....	11
2.2.1 Persamaan Diferensial Biasa.....	12
2.2.2 Persamaan Diferensial Parsial.....	24
2.3 Masalah Kondisi Awal dan Kondisi Batas.....	25
2.3.1 Kondisi Batas Homogen dan Kondisi Batas Tak Homogen.....	26
2.4 Metode Pemisahan Variabel.....	27
2.5 Deret Fourier.....	29
2.6 Perintah Al-Quran Untuk Mengamati Alam.....	33

BAB III PEMBAHASAN

3.1 Solusi Persamaan Keseimbangan Massa Reaktor	38
3.1.1 Solusi Persamaan Keseimbangan Massa Reaktor pada Kondisi <i>Steady-state</i>	40
3.1.2 Solusi Transformasi Persamaan Keseimbangan Massa Reaktor	46
3.2 Simulasi Penyelesaian Persamaan Keseimbangan Massa Reaktor	67
3.3 Solusi Persamaan Keseimbangan Massa Reaktor dalam Pandangan Islam	77

BAB IV PENUTUP

4.1 Kesimpulan.....	80
4.2 Saran.....	82

DAFTAR PUSTAKA	83
-----------------------------	----

LAMPIRAN-LAMPIRAN

RIWAYAT HIDUP

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Reaktor Bentuk Silindris dengan Satu Titik Masuk dan Satu Titik Keluar	9
Gambar 3.1 Perubahan Konsentrasi Massa Zat di dalam Reaktor pada Kondisi $U^2 + 4D\gamma > 0$ dengan Memperlambat Penyebaran Zat	68
Gambar 3.2 Perubahan Konsentrasi Massa Zat di dalam Reaktor pada Kondisi $U^2 + 4D\gamma > 0$ dengan Mempercepat Penyebaran Zat.....	69
Gambar 3.3 Perubahan Konsentrasi Massa Zat pada Kondisi $U^2 + 4D\gamma > 0$ dengan Memperbesar Koefisien Reaksi Zat	71
Gambar 3.4 Perubahan Konsentrasi Massa Zat pada Kondisi $U^2 + 4D\gamma > 0$ dengan Menaikkan Kecepatan Zat di dalam Reaktor	72
Gambar 3.5 Pengaruh Lama Proses Reaksi Terhadap Perubahan Konsentrasi Massa Zat di dalam Reaktor pada Kondisi $U^2 + 4D\gamma > 0$	73
Gambar 3.6 Grafik Tiga Dimensi Perubahan Konsentrasi Massa Zat Selama Kurun Waktu 15 Detik pada Kondisi $U^2 + 4D\gamma > 0$	74
Gambar 3.7 Perubahan Konsentrasi Massa Zat di dalam Reaktor pada Kondisi $U^2 + 4D\gamma = 0$	75
Gambar 3.8 Perubahan Konsentrasi Massa Zat di dalam Reaktor pada Kondisi $U^2 + 4D\gamma < 0$	76

DAFTAR SIMBOL

SIMBOL	KETERANGAN
$C(x, t)$: Konsentrasi massa zat yang bergantung pada variabel x dan t , yaitu solusi persamaan keseimbangan massa reaktor pada kondisi <i>non steady-state</i> yang mempunyai kondisi batas tak homogen
$C(x)$: Solusi persamaan keseimbangan massa reaktor pada kondisi <i>steady-state</i>
$V(x, t)$: Solusi dari persamaan baru, yaitu solusi transformasi persamaan keseimbangan massa reaktor yang mempunyai kondisi batas homogen
t	: Menyatakan waktu
x	: Panjang Reaktor
D	: Koefisien penyebaran zat
U	: Kecepatan zat yang mengalir di dalam reaktor
γ	: Koefisien reaksi
C_{in}	: Zat yang mengalir masuk ke dalam reaktor pada tingkat konstan
d	: Operator dari turunan fungsi yang mempunyai satu variabel
∂	: Operator dari turunan fungsi yang mempunyai lebih dari satu variabel
$\frac{\partial C(x, t)}{\partial t}$: Turunan parsial fungsi C terhadap variabel t
$X(x)$: Fungsi eigen yang memuat variabel x
$T(t)$: Fungsi eigen yang memuat variabel t
λ	: Nilai eigen atau konstanta pemisahan

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1 Menentukan Transformasi Persamaan Keseimbangan Massa Reaktor seperti pada Persamaan (3.11)	85
Lampiran 2 Menentukan Kondisi Batas $V(0, t)$ dan $V(l, t)$ seperti pada Persamaan (3.12)	88
Lampiran 3 Pembuktian Persamaan (3.29) Memenuhi Persamaan Keseimbangan Massa Reaktor	91
Lampiran 4 Pembuktian Pemilihan $\lambda > 0$ tidak Memenuhi Transformasi Persamaan Keseimbangan Massa Reaktor	92
Lampiran 5 Pembuktian Persamaan (3.38) Memenuhi Persamaan Keseimbangan Massa Reaktor	95
Lampiran 6 Pembuktian Persamaan (3.39) Memenuhi Persamaan Keseimbangan Massa Reaktor	96
Lampiran 7 Pembuktian Persamaan (3.40) Memenuhi Persamaan Keseimbangan Massa Reaktor	97
Lampiran 8 Pembuktian Persamaan (3.38) Memenuhi Kondisi Batas (3.2).....	99
Lampiran 9 Pembuktian Persamaan (3.39) Memenuhi Kondisi Batas (3.2).....	101
Lampiran 10 Pembuktian Persamaan (3.40) Memenuhi Kondisi Batas (3.2).....	102
Lampiran 11 Pembuktian Persamaan (3.38) Memenuhi Kondisi Awal (3.2).....	103
Lampiran 12 Pembuktian Persamaan (3.39) Memenuhi Kondisi Awal (3.2).....	105
Lampiran 13 Pembuktian Persamaan (3.40) Memenuhi Kondisi Awal (3.2).....	106
Lampiran 14 Tabel Perubahan Konsentrasi Massa Zat di dalam Reaktor pada Kondisi $U^2 + 4D\gamma > 0$	107
Lampiran 15 Program untuk Menampilkan Grafik Solusi Persamaan Keseimbangan Massa Reaktor	109
Lampiran 16 Program untuk Menampilkan Grafik Tiga Dimensi Perubahan Konsentrasi Massa Zat di dalam Reaktor Selama Kurun Waktu 15 Detik Seperti pada Gambar 3.6.....	112

ABSTRAK

Arif, Moh. Syaiful. 2015. **Solusi Persamaan Keseimbangan Massa Reaktor Menggunakan Metode Pemisahan Variabel**. Tugas akhir/skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Mohammad Jamhuri, M.Si. (II) Ach. Nasichuddin, M.A.

Kata Kunci: kondisi batas homogen, kondisi batas tak homogen, metode pemisahan variabel

Persamaan keseimbangan massa reaktor menyatakan perubahan konsentrasi massa zat yang masuk dan keluar pada sistem tertutup. Persamaan ini mempunyai kondisi batas tak homogen, yaitu kondisi pada saat zat masuk pada reaktor (C_{in}) dan kondisi pada saat zat keluar dari reaktor (C_{out}). Pada penelitian ini, konsentrasi massa zat yang dihasilkan setelah proses reaksi di dalam reaktor adalah nol, atau $C_{out} = 0$. Pada kondisi batas tak homogen, dengan menggunakan metode pemisahan variabel, terdapat kendala untuk menyelesaikan persamaan tersebut. Sehingga perlu dilakukan transformasi terlebih dahulu. Transformasi dilakukan dengan tujuan untuk mengubah kondisi batas yang awalnya tak homogen menjadi kondisi batas yang homogen, sehingga metode pemisahan variabel dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial yang mempunyai kondisi batas homogen.

Hasil analisis dapat diperoleh: semakin cepat zat yang menyebar pada reaktor, maka semakin sedikit jumlah konsentrasi massa zat yang mengalami perubahan; semakin besar koefisien reaksi zat dalam reaktor, maka semakin banyak jumlah konsentrasi massa zat yang mengalami perubahan di sepanjang reaktor.

ABSTRACT

Arif, Moh. Syaiful. 2015. **The Solution of Mass Balance of Reactor Equation by Using Method of Separation of Variables.** Thesis. Mathematics Department, Science and Technology Faculty, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Supervisors: (I) Mohammad Jamhuri, M.Si. (II) Ach. Nasichuddin, M.A.

Keyword: homogeneous boundary condition, inhomogeneous boundary condition, method of separation of variables

Mass balance of reactor equation express the change of mass concentration of substances in and out of the closed system. This equation has inhomogeneous boundary conditions, that is the conditions at the time of its entry to the reactor (C_{in}) and the conditions under which the substance out of the reactor (C_{out}). In this study, the mass concentration of substances produced after the reaction in the reactor is zero, or $C_{out} = 0$. In the inhomogeneous boundary conditions, using the method of separation of variables, there are obstacles to solve the equation. So we need to transform it first. Transformation is done with the aim to change the conditions which originally inhomogeneous boundary into a homogeneous boundary condition, so the method of separation of variables can be used to solve partial differential equations that have a homogeneous boundary conditions.

The results can be obtained: the faster a substance that spreads to the reactor, the less amount of mass concentration of substances that undergo a change; the greater the reaction coefficient of a substances in the reactor, the more the number of mass concentration of substances that are change along reactor.

ملخص

عارف، موه. سيفل. ٢٠١٥. الحل لتوازن الشامل من معادلة المفاعل باستخرا م طريقة فصل المتغيرات. البعث الجامعي. الشعبة الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، الجامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج. المشرف: (١) محمد جمهوري، الماجستير. (٢) أحمد ناصح الدين، الماجستير

الكلمات الرئيسية: طريقة فصل المتغيرات، شروط الحدود غير متجانسة، شروط الحدود متجانسة

توازن الشامل من معادلة مفاعل تعبر عن تغيير كثافة من المواد داخل وخارج نظام مغلق. هذه المعادلة لديها شروط الحدود غير متجانسة، أي الشروط في وقت دخولها للمفاعل (C_{in}) وشروط التي خارج من مفاعل (C_{out}). في هذه الدراسة، كثافة الشامل من المواد المنتجة بعد رد الفعل في المفاعل هو صفر، أو (C_{out}). في شروط الحدود غير متجانسة، وذلك باستخدام طريقة فصل المتغيرات، هناك عقبات في حل المعادلة. لذلك نحن بحاجة إلى التحول أولاً. يتم التحول بهدف تغيير شروط الحدود التي متجانسة أصلاً في حالة الحدود متجانسة، وبالتالي فإن طريقة فصل المتغيرات يمكن أن تستخدم في حل المعادلات التفاضلية الجزئية التي لديها الشروط الحدية متجانسة. النتائج التي تم الحصول عليها: أسرع المادة التي ينتشر إلى المفاعل، فأقل كمية من كثافة من المواد التي قاست للتغيير؛ كلما زاد معامل كتلة من المواد التي تتفاعل في المفاعل، وكلما زاد عدد من كثافة من المواد التي هي عرضة للتغيير.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan salah satu cabang ilmu pengetahuan yang memformulasikan suatu kejadian atau fenomena kehidupan, dengan tujuan untuk mempermudah proses analisis permasalahan yang terjadi. Fenomena yang terjadi dalam kehidupan dapat mencakup beberapa aspek, baik kejadian yang berlangsung dalam kehidupan manusia maupun fenomena yang terjadi karena ketentuan alam, atau sering disebut dengan hukum alam.

Hukum alam sangat berkaitan dengan hukum kekekalan massa. Hukum kekekalan massa juga dikenal sebagai hukum Lomonosov-Lavasier. Hukum kekekalan massa merupakan suatu hukum yang menyatakan massa pada suatu sistem tertutup tidak akan berubah meskipun terjadi berbagai macam reaksi didalam sistem tersebut. Tempat atau alat yang digunakan selama proses reaksi disebut reaktor (Barnes dan Fulford, 2009:10).

Hukum kekekalan massa umumnya digunakan pada bidang kimia industri. Hukum kekekalan massa dapat dinyatakan sebagai keseimbangan massa zat yang masuk dan keluar dari sistem tertutup (reaktor). Keseimbangan massa pada reaktor terjadi apabila akumulasi massa zat di dalam reaktor sama dengan selisih antara massa zat yang masuk dengan massa zat yang keluar serta massa yang dihasilkan di dalam sistem tertutup. Kondisi tersebut, dalam ilmu matematika diformulasikan menjadi bentuk persamaan diferensial parsial linier yang disebut dengan persamaan keseimbangan massa reaktor (Caldwell, 2004:39). Sehingga

untuk menganalisis permasalahan tersebut, cukup dengan cara mencari solusi dari persamaan keseimbangan massa reaktor.

Pentingnya menganalisis suatu permasalahan juga dijelaskan dalam firman Allah Swt. surat Yunus/10:101, yaitu:

قُلْ أَنْظَرُوا مَاذَا فِي السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ وَمَا تُغْنِي الْآيَاتُ وَالنُّذُرُ عَنْ قَوْمٍ لَا يُؤْمِنُونَ ﴿١٠١﴾

Katakanlah: "Perhatikanlah apa yang ada di langit dan di bumi. tidaklah bermanfaat tanda kekuasaan Allah dan rasul-rasul yang memberi peringatan bagi orang-orang yang tidak beriman" (QS. Yunus/10:101).

Firman Allah Swt. pada ayat di atas menjelaskan tentang pentingnya mengamati alam. Manusia dianjurkan untuk melakukan penelitian dan pengkajian terhadap fenomena alam sekitar, baik yang ada di langit maupun di bumi. Dengan dilakukannya penelitian dan pengkajian, maka dapat terbentuk berbagai disiplin ilmu. Terbentuknya berbagai disiplin ilmu dapat dijadikan sebagai alat untuk menganalisis suatu permasalahan yang ada di alam sekitar, sehingga dapat diperoleh penyelesaian dari permasalahan tersebut.

Salah satu cara memahami proses reaksi zat pada suatu reaktor seperti yang diperintahkan dalam al-Quran surat Yunus/10:101, yaitu dengan menganalisis hasil penyelesaian persamaan keseimbangan massa reaktor. Caldwell (2004:42) telah membahas solusi persamaan keseimbangan massa pada suatu reaktor. Akan tetapi, pembahasan tersebut hanya memandang persamaan pada kondisi *steady-state* saja, yaitu kondisi pada saat laju perubahan konsentrasi massa zat tidak dipengaruhi oleh perubahan waktu.

Penelitian terkait keseimbangan massa reaktor juga dilakukan oleh Najafi dan Hajinezhad (2008:2611-2618) yang membahas solusi numerik persamaan keseimbangan massa reaktor menggunakan metode beda hingga pada kondisi *non steady-state*, yaitu kondisi ketika laju perubahan konsentrasi massa zat masih dipengaruhi oleh perubahan waktu. Namun, dalam penelitian Najafi dan Hajinezhad tidak digunakan kondisi batas untuk menyelesaikan persamaan tersebut.

Mutholi'ah (2008:1-5) juga melakukan penelitian mengenai solusi numerik persamaan keseimbangan massa reaktor. Penelitian tersebut membahas tentang penyelesaian persamaan keseimbangan massa reaktor menggunakan metode beda hingga skema implisit dan Crank-Nicholson. Akan tetapi, dalam penelitian Mutholi'ah tidak dijelaskan syarat kestabilan dari metode yang digunakan. Sehingga tidak dapat dijamin penyelesaian yang stabil pada waktu tertentu.

Penyelesaian persamaan diferensial parsial secara analitik sangat diperlukan untuk memperoleh solusi yang tetap, meskipun dengan perubahan waktu yang cukup besar. Salah satu metode yang digunakan untuk memperoleh solusi persamaan diferensial parsial adalah metode pemisahan variabel. Metode ini dilakukan dengan cara memisahkan masing-masing variabel *independent* (berpengaruh) dengan suatu fungsi dan konstanta pemisahan, atau disebut dengan fungsi eigen dan nilai eigen (Strauss, 1992:84). Kemudian dengan menggunakan kondisi batas homogen, masing-masing fungsi eigen dan nilai eigen dapat ditentukan.

Akan tetapi, pada kondisi batas tak homogen terdapat kendala untuk menentukan fungsi eigen dan nilai eigen, dengan demikian perlu dilakukan transformasi yang bertujuan untuk mengubah kondisi batas tak homogen menjadi kondisi batas homogen. Sehingga fungsi yang sudah dipisahkan dapat diselesaikan secara terpisah. Oleh karena itu, penelitian ini bermaksud menentukan solusi analitik persamaan keseimbangan massa reaktor yang dipengaruhi oleh perubahan waktu (*non steady-state*) dengan kondisi batas tak homogen menggunakan metode pemisahan variabel.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah bagaimana cara menentukan solusi persamaan keseimbangan massa reaktor menggunakan metode pemisahan variabel?

1.3 Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk memperoleh solusi persamaan keseimbangan massa reaktor menggunakan metode pemisahan variabel.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini yaitu:

1. Hasil yang diperoleh dari penelitian ini dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan terkait dengan keseimbangan massa pada suatu reaktor.
2. Sebagai kajian teori yang dapat dikembangkan untuk penelitian lebih lanjut.

1.5 Batasan Masalah

Pada penelitian ini, persamaan keseimbangan massa reaktor yang akan diselesaikan adalah

$$\frac{\partial C(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C(x, t)}{\partial x^2} - U \frac{\partial C(x, t)}{\partial x} - \gamma C(x, t)$$

dengan kondisi awal homogen dan kondisi batas tak homogen seperti berikut.

$$C(x, 0) = 0, \quad 0 < x < l$$

$$C(0, t) = C_{in}, \quad C(L, t) = 0, \quad t > 0$$

1.6 Metode Penelitian

Metode dalam penelitian ini menggunakan pendekatan penelitian kepustakaan (*library research*), yaitu melakukan penelaahan beberapa kajian teori maupun literatur yang telah dipublikasikan, yang sesuai dengan topik pembahasan. Adapun langkah-langkah yang digunakan dalam penelitian ini yaitu:

1. Menentukan persamaan keseimbangan massa reaktor beserta kondisi batas yang digunakan.
2. Solusi persamaan keseimbangan massa reaktor ditransformasi menjadi $C(x, t) = V(x, t) + C(x)$.
3. Mencari $C(x)$, yaitu solusi persamaan keseimbangan massa reaktor pada kondisi laju perubahan konsentrasi tidak dipengaruhi oleh perubahan waktu (*steady-state*), yang mempunyai kondisi batas tak homogen.
4. Mensubstitusikan poin tiga dan dua pada persamaan keseimbangan massa reaktor sehingga diperoleh persamaan baru, yang tidak lain persamaan baru tersebut merupakan transformasi persamaan keseimbangan massa reaktor, atau dapat ditulis seperti berikut.

$$V_t(x, t) - DV_{xx}(x, t) + UV_x(x, t) + \gamma V(x, t) = 0$$

Kemudian mensubstitusikan kondisi awal dan kondisi batas (poin satu dan tiga) pada poin dua, sehingga diperoleh kondisi awal V tak homogen dan kondisi batas V homogen.

5. Mencari $V(x, t)$, yaitu solusi dari persamaan baru.
6. Memisalkan $V(x, t) = X(x)T(t)$ sebagai solusi dari persamaan baru.
7. Mensubstitusikan setiap turunan pada poin enam ke dalam persamaan baru pada poin empat. Kemudian masing-masing fungsi eigen diselesaikan secara terpisah.
8. Menggunakan kondisi awal tak homogen dan kondisi batas homogen (poin empat) pada masing-masing fungsi yang telah diselesaikan, sehingga dapat diperoleh penyelesaian $V(x, t)$.
9. Mensubstitusikan masing-masing penyelesaian $V(x, t)$ dan $C(x)$ pada poin dua, sehingga dapat diperoleh solusi analitik persamaan keseimbangan massa reaktor.
10. Mensimulasikan penyelesaian persamaan keseimbangan massa reaktor.

1.7 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan ini digunakan untuk mempermudah dalam memahami dan menyusun laporan penelitian. Adapun sistematika penulisan dalam penelitian ini yaitu:

Bab I Pendahuluan

Pada bab ini menjelaskan latar belakang penelitian, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, ruang lingkup yang diteliti, serta metode penelitian dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Bab ini menjelaskan tentang gambaran umum dari teori yang mendasari pembahasan, yaitu teori terkait persamaan keseimbangan massa reaktor, klasifikasi persamaan diferensial, kondisi awal dan kondisi batas, metode pemisahan variabel, deret Fourier, dan ayat al-Quran yang mendasari tentang perintah mengamati alam.

Bab III Pembahasan

Pada bab ini menjelaskan solusi persamaan keseimbangan massa reaktor yang mempunyai kondisi awal homogen dan kondisi batas tak homogen menggunakan metode pemisahan variabel, serta mensimulasikan hasil penyelesaian.

Bab IV Penutup

Pada bab ini menjelaskan intisari dari hasil penelitian yang berupa kesimpulan dari pembahasan, serta dilengkapi dengan saran yang berkaitan dengan penelitian ini.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Keseimbangan Massa Reaktor

Keseimbangan massa selalu berkaitan dengan hukum kekekalan massa. Hukum kekekalan massa dikenal juga sebagai hukum Lomonosov-Lavasier. Hukum kekekalan massa adalah suatu hukum yang menyatakan massa pada suatu sistem tertutup tidak akan berubah meskipun terjadi berbagai macam reaksi di dalam sistem tersebut. Kuantitas massa tidak dapat berubah jika tidak ditambahkan atau dilepaskan secara sengaja. Tempat atau alat yang digunakan selama proses reaksi disebut reaktor (Barnes dan Fulford, 2009:10).

Misalkan terdapat zat pada suatu ruangan tertutup, suatu massa zat dikatakan seimbang apabila banyaknya massa yang berubah terhadap waktu sama dengan banyaknya massa yang masuk ke dalam ruangan, dikurangi dengan banyaknya massa yang keluar dari ruangan (Barnes dan Fulford, 2009:11). Prinsip tersebut dinyatakan sebagai keseimbangan massa yang menerangkan semua sumber dan akumulasi material yang masuk dan keluar dari suatu sistem tertutup. Selama periode tertentu, prinsip ini dapat digambarkan seperti berikut.

$$\left[\begin{array}{c} \text{Rata-rata} \\ \text{akumulasi} \\ \text{massa zat di} \\ \text{dalam sistem} \\ \text{tertutup} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \text{Rata-rata} \\ \text{massa zat} \\ \text{yang masuk} \\ \text{ke dalam} \\ \text{sistem} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \text{Rata-rata} \\ \text{massa zat} \\ \text{yang keluar} \\ \text{dari sistem} \\ \text{tertutup} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Rata-rata} \\ \text{pertambahan} \\ \text{massa di} \\ \text{dalam sistem} \\ \text{tertutup} \end{array} \right]$$

atau secara sederhana dapat dinyatakan dengan

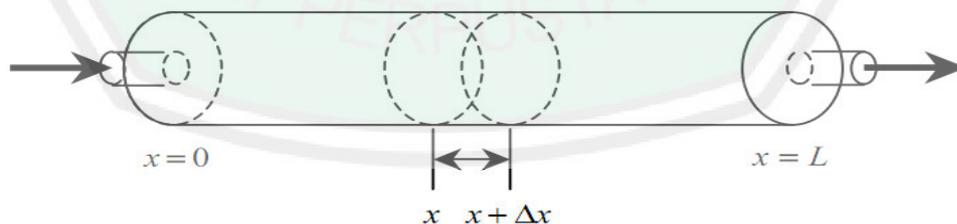
$$\text{Akumulasi} = \text{input} - \text{output}$$

Selama periode tertentu, apabila rata-rata massa zat yang masuk ke dalam sistem tertutup (*input*) lebih besar dari pada rata-rata massa zat yang keluar dari sistem tertutup (*output*), maka massa yang ada dalam sistem tertutup tersebut meningkat. Sedangkan apabila massa yang keluar lebih besar dari pada massa yang masuk, maka massa yang ada dalam sistem tersebut berkurang. Selanjutnya apabila massa yang masuk sama dengan massa yang keluar, maka akumulasi massa di dalam sistem tidak berubah. Kondisi tersebut seperti halnya proses reaksi zat pada suatu reaktor sampai kondisi menjadi stabil, yang dapat dinyatakan sebagai

$$\text{Aliran masuk} = \text{Aliran keluar}$$

(Caldwell, 2004:40).

Teori terkait dengan kekekalan massa dijadikan sebagai dasar kajian untuk menentukan konsentrasi massa zat pada suatu sistem tertutup (reaktor). Aliran masuk dan aliran keluar suatu zat dijadikan sebagai variabel dan parameter yang dapat diukur. Reaktor yang digunakan pada kondisi ini yaitu reaktor berbentuk silindris atau pipa seperti gambar di bawah ini:



Gambar 2.1 Reaktor Bentuk Silindris dengan Satu Titik Masuk dan Satu Titik Keluar

Gambar 2.1 menunjukkan sebuah reaktor berbentuk silindris atau berbentuk pipa dengan satu jalan masuk dan satu jalan keluar. Apabila selama proses reaksi diasumsikan zat bergerak secara vertikal dan ke samping (artinya zat

tersebut tidak bergerak memutar), maka keseimbangan massa pada sistem tertutup tersebut dapat ditunjukkan pada sebuah persamaan dengan pendekatan Δx (Caldwell, 2004:138).

Caldwell (2004,138) menyebutkan bahwa untuk memformulasikan sebuah model keseimbangan massa pada suatu reaktor, dapat dilihat beberapa asumsi sebagai berikut:

1. Zat yang dijadikan model adalah subjek untuk menghilangkan orde pertama.
2. Di dalam sistem tertutup, zat bergerak secara vertikal dan ke samping.
3. Penyebaran zat dalam sistem tertutup (reaktor) tidak mempengaruhi aliran zat yang keluar.
4. Kondisi awal pada waktu $t = 0$, reaktor dipenuhi dengan air yang tidak mengandung zat kimia.
5. Pada saat awal waktu $t = 0$, zat mengalir masuk ke dalam aliran reaktor pada tingkat konstan C_{in} .

Apabila Δx dan Δt mendekati nilai nol, serta dengan menggunakan asumsi satu dan dua, maka persamaan keseimbangan massa reaktor yang bergantung pada perubahan waktu dinyatakan seperti berikut (Caldwell, 2004:138).

$$\frac{\partial C(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C(x, t)}{\partial x^2} - U \frac{\partial C(x, t)}{\partial x} - \gamma C(x, t), \quad 0 < x < l \quad (2.1)$$

Asumsi model pada nomor tiga menunjukkan aliran zat yang keluar dari reaktor tidak dipengaruhi dengan penyebaran zat pada sistem tertutup, sehingga kondisi awal dan kondisi batas yang digunakan yaitu

$$\begin{cases} C(x, 0) = 0, & 0 < x < l \\ C(0, t) = C_{in}, & C(l, t) = 0, \quad t > 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

Parameter pada persamaan (2.1) dan (2.2) yaitu:

C : menyatakan konsentrasi massa zat.

t : adalah waktu.

x : merupakan panjang benda padat pada reaktor.

D : adalah koefisien penyebaran zat.

U : menyatakan kecepatan zat yang mengalir di dalam reaktor.

γ : adalah koefisien reaksi.

C_{in} : zat yang mengalir masuk ke dalam aliran reaktor pada tingkat konstan.

2.2 Klasifikasi Persamaan Diferensial

Suatu persamaan yang menyatakan relasi fungsi, yang mempunyai satu variabel *independent* dengan turunan fungsi terhadap variabel tersebut, maka persamaan tersebut disebut dengan persamaan diferensial biasa (*ordinary differential equation*). Sedangkan persamaan yang menyatakan relasi fungsi, yang mempunyai lebih dari satu variabel *independent* dengan turunan parsial dari masing-masing variabel tersebut, maka persamaan tersebut disebut dengan persamaan diferensial parsial (*partial differential equation*) (Boyce dan DiPrima, 2009:19).

Untuk membedakan antara persamaan diferensial biasa dengan persamaan diferensial parsial, Boyce dan DiPrima (2009:19) menggunakan notasi d sebagai operator persamaan diferensial biasa, sebaliknya digunakan notasi ∂ sebagai operator persamaan diferensial parsial.

2.2.1 Persamaan Diferensial Biasa

Dari penjelasan di atas, persamaan diferensial biasa merupakan suatu persamaan yang menyatakan relasi fungsi, yang mempunyai satu peubah dengan turunan fungsi terhadap peubah tersebut. Sehingga turunan fungsi dinotasikan dengan suatu operator d . Misalkan terdapat suatu fungsi $f(x)$, maka turunan dari fungsi $f(x)$ terhadap variabel x dapat dinotasikan dengan $\frac{df(x)}{dx}$.

Agarwal dan O'Regan (2009:1) menyebutkan bahwa turunan suatu fungsi $f(x)$ terhadap variabel x dinotasikan dengan $\frac{df(x)}{dx}$ atau dinotasikan dengan $f'(x)$. Purcell dan Varberg (1987a:115) menyebutkan bahwa turunan dari suatu fungsi pada titik c dapat dinyatakan seperti definisi berikut.

Definisi 2.1 Turunan fungsi f adalah fungsi lain f' , yang nilainya pada sebarang bilangan c adalah

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

dengan limitnya memang ada.

Perkalian dua fungsi yang berbeda dapat diturunkan sesuai dengan teorema di bawah ini (Purcell dan Varberg, 1987a:126).

Teorema 2.1 Andaikan f dan g adalah dua fungsi yang dapat didiferensialkan, maka $(f \cdot g)'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$, atau

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)\frac{dg(x)}{dx} + g(x)\frac{df(x)}{dx}$$

Bukti: Andaikan $F(x) = f(x)g(x)$, maka dengan menggunakan definisi 2.1 dapat diperoleh

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

Karena $F(x) = f(x)g(x)$, maka persamaan tersebut dapat ditulis kembali menjadi

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

Dikarenakan nilai dari $-f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) = 0$, maka persamaan tersebut dapat diuraikan menjadi

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x)] + [f(x+h)g(x) - f(x)g(x)]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[f(x+h) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x) \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} g(x) \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \end{aligned}$$

Kemudian dengan menggunakan definisi 2.1, maka persamaan tersebut dapat ditulis seperti berikut.

$$F'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

Operator turunan dari persamaan tersebut dapat juga dinotasikan seperti berikut.

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x) \frac{dg(x)}{dx} + g(x) \frac{df(x)}{dx}$$

Dengan demikian, perkalian dua fungsi yang berbeda dapat diturunkan dengan cara seperti pada teorema 2.1.

Purcell dan Varberg (1987b:433) menyebutkan bahwa suatu persamaan yang memuat satu atau beberapa turunan diferensialnya, khususnya persamaan berbentuk

$$F(x, y, y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n)}) = 0$$

dengan $y^{(n)}$ menyatakan turunan y terhadap x yang ke- n , maka persamaan tersebut disebut dengan persamaan diferensial biasa berorde n . Notasi $y^{(n)}$ dapat ditulis juga dengan $\frac{d^n y}{(dx)^n}$. Oleh karena itu, orde suatu persamaan diferensial dapat diketahui melalui pangkat tertinggi dari turunannya.

Suatu persamaan diferensial biasa disebut linier apabila terdapat suatu operator diferensial L yang diterapkan pada fungsi f . Operator linier didefinisikan untuk setiap fungsi f , g , dan konstanta c , sehingga berlaku

$$L(f + g) = Lf + Lg, \quad L(cf) = cLf$$

maka operator diferensial L disebut sebagai operator linier (Purcell dan Varberg, 1987b:434).

Agarwal dan O'Regan (2009:1) menyebutkan bahwa bentuk umum dari persamaan diferensial biasa orde satu adalah

$$\frac{dy(x)}{dx} + p(x)y(x) = q(x)$$

Dari pengertian operator linier di atas, maka persamaan tersebut merupakan persamaan diferensial biasa linier orde satu, dengan $p(x)$ adalah fungsi yang linier. Apabila $q(x) \neq 0$ maka disebut persamaan diferensial tak homogen. Sedangkan apabila $q(x) = 0$ maka disebut persamaan diferensial yang homogen. Apabila $q(x) = 0$, maka solusinya dapat diselesaikan dengan cara memisahkan antara fungsi $p(x)$ dan $y(x)$ (Boyce dan DiPrima, 2009:31).

Sedangkan apabila $q(x) \neq 0$, artinya fungsi $q(x)$ memuat variabel x , maka solusinya tidak dapat dipisahkan seperti pada kasus homogen. Sehingga

untuk menyelesaikanya digunakan metode faktor integral (Boyce dan DiPrima, 2009:31).

Teorema 2.2 Misalkan terdapat suatu persamaan diferensial biasa orde satu seperti berikut.

$$\frac{dy(x)}{dx} + p(x)y(x) = q(x)$$

Maka persamaan tersebut dapat diselesaikan dengan menggunakan faktor integral. Penyelesaiannya dilakukan dengan cara mengalikan persamaan tersebut dengan faktor integral $\mu(x)$, dengan $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$ (Boyce dan DiPrima, 2009:32).

Bukti: untuk membuktikan teorema 2.2, maka perlu ditunjukkan bahwa faktor integralnya yaitu $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$. Diketahui persamaanya yaitu

$$\frac{dy(x)}{dx} + p(x)y(x) = q(x) \quad (2.3)$$

Pada persamaan (2.3), apabila kedua ruas kiri dan kanan dikalikan dengan $\mu(x)$, maka persamaan tersebut menjadi

$$\mu(x) \frac{dy(x)}{dx} + \mu(x)p(x)y(x) = \mu(x)q(x) \quad (2.4)$$

Dikarenakan fungsi $y(x)$ masih belum diketahui, maka dapat dipilih $\mu(x)$ dengan memandang ruas kiri dari persamaan (2.4). Kemudian dengan menggunakan teorema 2.1, maka dapat diperoleh

$$\frac{d}{dx} [\mu(x)y(x)] = \mu(x) \frac{dy(x)}{dx} + y(x) \frac{d\mu(x)}{dx} \quad (2.5)$$

Karena $\mu(x)$ yang dipilih dengan memandang ruas kiri dari persamaan (2.4), sehingga dari ruas kiri persamaan (2.4) dan ruas kanan persamaan (2.5) dapat diperoleh

$$\mu(x) \frac{dy(x)}{dx} + \mu(x)p(x)y(x) = \mu(x) \frac{dy(x)}{dx} + y(x) \frac{d\mu(x)}{dx}$$

Dari persamaan di atas, dapat diperoleh suatu kesamaan

$$y(x) \frac{d\mu(x)}{dx} = \mu(x)p(x)y(x)$$

Kemudian kedua ruas dari persamaan tersebut dibagi dengan $y(x)$, maka dapat diperoleh

$$\frac{d\mu(x)}{dx} = \mu(x)p(x)$$

Apabila kedua ruas dikalikan dengan $\frac{dx}{\mu(x)}$, kemudian dengan mengintegrasikan ruas kiri dan kanan, maka persamaan tersebut menjadi

$$\int \frac{1}{\mu(x)} d\mu(x) = \int p(x) dx$$

$$\ln|\mu(x)| = \int p(x) dx$$

$$\mu(x) = e^{\int p(x) dx}$$

Dengan demikian, nilai dari faktor integral dapat ditentukan dengan cara seperti pada teorema 2.2. Selanjutnya, kedua ruas persamaan yang akan diselesaikan dikalikan dengan faktor integral seperti berikut.

$$\mu(x) \frac{dy(x)}{dx} + \mu(x)p(x)y(x) = \mu(x)q(x)$$

$$e^{\int p(x) dx} \frac{dy(x)}{dx} + e^{\int p(x) dx} p(x)y(x) = e^{\int p(x) dx} q(x)$$

Persamaan tersebut dapat disederhanakan menjadi

$$\frac{d}{dx} (y(x)e^{\int p(x) dx}) = q(x)e^{\int p(x) dx}$$

Purcell dan Varberg (1987b:434) menyebutkan bahwa dengan mengintegrasikan kedua ruas persamaan di atas, maka solusi persamaan diferensial biasa orde satu dapat ditulis menjadi

$$y(x) = e^{\int p(x)dx} \int (q(x)e^{\int p(x)dx}) dx$$

Sedangkan Boyce dan DiPrima (2009:138) menyebutkan bahwa bentuk umum dari persamaan diferensial biasa orde dua adalah

$$p(x) \frac{d^2 y(x)}{(dx)^2} + q(x) \frac{dy(x)}{dx} + r(x)y(x) = g(x)$$

Pada persamaan tersebut, apabila $p(x) = 0$ maka tidak dapat diklasifikasikan sebagai persamaan diferensial biasa orde dua, sehingga $p(x) \neq 0$. Apabila $g(x) = 0$, maka disebut sebagai persamaan diferensial homogen orde dua. Sehingga bentuk umum dari persamaan diferensial biasa homogen orde dua yaitu

$$p(x) \frac{d^2 y(x)}{(dx)^2} + q(x) \frac{dy(x)}{dx} + r(x)y(x) = 0$$

Agarwal dan O'Regan (2009:3) menyebutkan bahwa, apabila $p(x)$, $q(x)$, dan $r(x)$ adalah suatu konstanta yang tidak sama dengan nol, kemudian kedua ruas dibagi dengan $p(x)$, maka bentuk umum dari persamaan diferensial homogen orde dua dapat juga ditulis

$$\frac{d^2 y(x)}{(dx)^2} + a(x) \frac{dy(x)}{dx} + b(x)y(x) = 0$$

atau

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0$$

dengan $a(x) = \frac{q(x)}{p(x)}$, $b(x) = \frac{r(x)}{p(x)}$.

Pada persamaan di atas, apabila $a(x)$ dan $b(x)$ adalah suatu konstanta yang tidak sama dengan nol, atau ditulis

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0 \quad (2.6)$$

maka solusinya mempunyai dua penyelesaian $u_1(x)$ dan $u_2(x)$ yang saling bebas satu sama lain (Purcell dan Varberg, 1987b:441). Dari kelinieran operator diferensial $\frac{d^2}{(dx)^2} + a \frac{d}{dx} + b$, maka

$$C_1 u_1(x) + C_2 u_2(x)$$

merupakan suatu penyelesaian.

Purcell dan Varberg (1987b:441) menyebutkan bahwa, penyelesaian persamaan diferensial homogen orde dua (2.6) membutuhkan persamaan bantu atau disebut juga dengan persamaan karakteristik, seperti teorema berikut.

Teorema 2.3 $y(x) = e^{rx}$ merupakan solusi dari persamaan (2.6), apabila r juga merupakan solusi dari persamaan karakteristik seperti di bawah ini.

$$r^2 + ar + b = 0 \quad (2.7)$$

Bukti: Asumsikan $y(x) = e^{rx}$ merupakan solusi dari persamaan (2.6), berdasarkan definisi operator diferensial linier, maka persamaan (2.6) dapat diubah menjadi bentuk operator diferensial seperti persamaan berikut.

$$\left(\frac{d^2}{(dx)^2} + a \frac{d}{dx} + b \right) y(x) = 0$$

dikarenakan $y(x) = e^{rx}$, maka persamaan tersebut menjadi

$$\left(\frac{d^2}{(dx)^2} + a \frac{d}{dx} + b \right) e^{rx} = 0$$

$$\frac{d^2(e^{rx})}{(dx)^2} + a \frac{d(e^{rx})}{dx} + be^{rx} = 0$$

$$r^2 e^{rx} + a r e^{rx} + b e^{rx} = 0$$

$$e^{rx}(r^2 + ar + b) = 0$$

Persamaan tersebut dapat dipenuhi apabila $e^{rx} = 0$ atau $(r^2 + ar + b) = 0$.

Andaikan yang dipilih adalah $e^{rx} = 0$ maka berakibat solusi dari persamaan (2.6)

adalah nol, sehingga $e^{rx} \neq 0$. Karena e^{rx} tidak sama dengan nol, maka persamaan tersebut akan bernilai nol apabila

$$(r^2 + ar + b) = 0$$

Persamaan di atas disebut dengan persamaan karakteristik. Sehingga persamaan karakteristik hanya dapat terpenuhi apabila r adalah akar-akar dari persamaan tersebut. Dengan demikian terbukti $y(x) = e^{rx}$ merupakan solusi dari persamaan (2.6), apabila r merupakan akar-akar dari persamaan (2.7).

Persamaan karakteristik (2.7) merupakan persamaan kuadrat, sehingga persamaan karakteristik tersebut mempunyai akar-akar real yang berbeda, akar-akar yang sama (kembar), atau mempunyai akar-akar kompleks seperti teorema di bawah ini (Agarwal dan O'Regan, 2009:3).

Teorema 2.4 Jika r_1 dan r_2 adalah bilangan real berbeda yang merupakan akar-akar dari persamaan karakteristik (2.7), maka e^{r_1x} dan e^{r_2x} adalah dua solusi dari persamaan (2.6), maka solusinya ditulis seperti berikut.

$$y(x) = C_1 e^{r_1x} + C_2 e^{r_2x}$$

Bukti: Andaikan $r_1 \neq r_2$, dengan $r_1 = r$ dan $r_2 = -r$, berdasarkan teorema 2.3, maka persamaan diferensial linier homogen orde dua yang persamaan karakteristiknya mempunyai akar-akar $\pm r$ dapat dipenuhi apabila persamaan diferensial (2.3) berbentuk

$$y''(x) + r^2y(x) = 0$$

Operator diferensial dari persamaan tersebut dapat ditulis menjadi

$$\frac{d^2}{(dx)^2} + r^2 \frac{dy(x)}{dx} = 0$$

$$\left(\frac{d^2}{(dx)^2} + r^2 \frac{d}{dx} \right) y(x) = 0$$

Sehingga operator diferensial tersebut dapat difaktorkan menjadi

$$\left(\frac{d}{dx} + r\right)\left(\frac{d}{dx} - r\right)y(x) = 0$$

Misalkan $\left(\frac{d}{dx} - r\right)y(x) = B$, maka persamaan tersebut dapat direduksi menjadi dua persamaan diferensial biasa orde satu seperti berikut.

$$\left(\frac{d}{dx} + r\right)B = 0 \quad (2.8)$$

dan

$$\left(\frac{d}{dx} - r\right)y(x) = B \quad (2.9)$$

Dengan demikian, perlu diselesaikan persamaan (2.8) untuk memperoleh penyelesaian persamaan (2.9). Persamaan (2.8) merupakan persamaan diferensial homogen orde satu, persamaan (2.8) dapat ditulis menjadi

$$\frac{dB}{dx} + rB = 0$$

$$\frac{dB}{B} = -r dx$$

Kemudian dengan mengintegrasikan kedua ruas kiri dan kanan, maka solusinya dapat diperoleh

$$B = C_2 e^{-rx}$$

Selanjutnya, dengan mensubstitusikan $B = C_2 e^{-rx}$ pada persamaan (2.9), maka persamaan diferensialnya yaitu

$$\frac{dy(x)}{dx} - ry(x) = C_2 e^{-rx}$$

Persamaan tersebut merupakan persamaan diferensial tak homogen orde satu. Berdasarkan teorema 2.2 dengan menggunakan faktor integral, maka $y(x)$ dapat diperoleh

$$y(x) = C_1 e^{rx} + C_2 e^{-rx}$$

Karena $r_1 = r$ dan $r_2 = -r$, maka solusinya dapat ditulis menjadi

$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

Dengan demikian terbukti bahwa persamaan diferensial yang persamaannya karakteristiknya mempunyai akar-akar real berbeda, maka solusinya seperti pada teorema 2.4.

Teorema 2.5 Jika $r_1 = r_2 = r$ merupakan akar-akar kembar dari persamaan karakteristik (2.7), maka e^{rx} adalah solusi dari persamaan (2.6), sehingga solusinya yaitu

$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 x e^{r_2 x}$$

Bukti: Andaikan $y(x) = u(x)e^{rx}$ adalah solusi dari persamaan (2.6), maka dengan mensubstitusikan $y(x) = u(x)e^{rx}$ pada persamaan (2.6) dapat diperoleh $(u''(x)e^{rx} + 2ru'(x)e^{rx} + r^2u(x)e^{rx}) + a(u'(x)e^{rx} + ru(x)e^{rx}) \dots$

$$+bu(x)e^{rx} = 0$$

Persamaan tersebut dapat disederhanakan menjadi

$$e^{rx}(u''(x) + (2r + a)u'(x) + (r^2 + ar + b)u(x)) = 0$$

Kemudian kedua ruas dibagi dengan e^{rx} , maka diperoleh

$$u''(x) + (2r + a)u'(x) + (r^2 + ar + b)u(x) = 0$$

Karena r adalah akar-akar yang kembar, maka persamaan tersebut dapat dipenuhi apabila $(r^2 + ar + b) = 0$ dan $(2r + a) = 0$, sehingga diperoleh

$$u''(x) = 0$$

Operator diferensial dari persamaan tersebut dapat ditulis dalam bentuk

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{du(x)}{dx} \right) = 0$$

Selanjutnya, dengan mengintegrasikan kedua ruas kiri dan kanan terhadap x , maka dapat diperoleh

$$\int d\left(\frac{du(x)}{dx}\right) = \int 0 dx$$

$$\frac{du(x)}{dx} = C_2$$

Persamaan tersebut merupakan persamaan diferensial orde satu, sehingga solusi $u(x)$ adalah

$$u(x) = C_1 + C_2x$$

Karena $u(x) = C_1 + C_2x$, maka solusi $y(x)$ dapat diperoleh

$$y(x) = (C_1 + C_2x)e^{rx}$$

$$y(x) = C_1e^{rx} + C_2xe^{rx}$$

Sehingga terbukti bahwa persamaan diferensial yang persamaannya karakteristiknya mempunyai akar-akar kembar, maka solusinya seperti pada teorema 2.5.

Teorema 2.6 Jika r_1 dan r_2 merupakan akar-akar kompleks dari persamaan karakteristik (2.7), dengan $r_1 = \alpha + iv$, $r_2 = \alpha - iv$ dan $i = \sqrt{-1}$, maka solusi dari persamaan (2.6) dapat diperoleh seperti berikut.

$$y(x) = e^{\alpha x}(C_1 \cos(vx) + C_2 \sin(vx))$$

Bukti: Andaikan $r_1 = \alpha + iv$ dan $r_2 = \alpha - iv$ adalah akar-akar dari persamaan karakteristik (2.7), sehingga berdasarkan teorema 2.4, solusinya yaitu

$$y(x) = C_3e^{(\alpha+iv)x} + C_4e^{(\alpha-iv)x}$$

dikarenakan $e^{(\alpha \pm iv)x} = e^{\alpha x}(\cos(vx) \pm \sin(vx))$, maka persamaan di atas dapat diubah menjadi

$$y(x) = e^{\alpha x}(C_1 \cos(vx) + C_2 \sin(vx))$$

Dengan demikian, terbukti bahwa persamaan diferensial yang persamaan karakteristiknya mempunyai akar-akar kompleks, maka solusinya seperti pada teorema (2.6).

Teorema 2.7 Andaikan $u = u(x)$ dan $v = v(x)$, maka integral parsial perkalian fungsi u dan v dapat dinyatakan seperti berikut.

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

Bukti: Andaikan $u = u(x)$ dan $v = v(x)$, dengan menggunakan teorema 2.1, diketahui bahwa turunan dari perkalian dua fungsi $u(x)$ dan $v(x)$ adalah

$$\frac{d}{dx}[u(x)v(x)] = u(x)v'(x) + v(x)u'(x)$$

$$d[u(x)v(x)] = u(x)v'(x)dx + v(x)u'(x)dx$$

Selanjutnya, dengan mengintegrasikan kedua ruas persamaan tersebut, maka dapat diperoleh

$$u(x)v(x) = \int u(x)v'(x)dx + \int v(x)u'(x)dx$$

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$$

Karena $dv = v'(x)dx$ dan $du = u'(x)dx$, maka persamaan terakhir dapat ditulis sebagai berikut.

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

2.2.2 Persamaan Diferensial Parsial

Persamaan diferensial parsial merupakan suatu persamaan yang menyatakan relasi antara suatu fungsi *dependent* (variabel yang dipengaruhi) dengan variabel *independent* (variabel yang mempengaruhi) yang lebih dari satu variabel, serta turunan parsialnya (Pinsky, 2003). Boyce dan DiPrima (2009:19)

menggunakan notasi ∂ sebagai operator persamaan diferensial parsial. Suatu fungsi C yang memuat dua peubah x dan t , apabila diturunkan terhadap variabel x dinotasikan dengan $\frac{\partial C(x,t)}{\partial x}$. Sedangkan turunan kedua fungsi C terhadap variabel x dinotasikan dengan $\frac{\partial^2 C(x,t)}{(\partial x)^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial C(x,t)}{\partial x} \right)$.

Untuk menyederhanakan penulisan, turunan parsial dapat dinotasikan $\frac{\partial C(x,t)}{\partial x} = C_x(x,t)$, $\frac{\partial^2 C(x,t)}{(\partial x)^2} = C_{xx}(x,t)$, dan seterusnya (Strauss, 1992:1). Persamaan diferensial parsial selalu berhubungan dengan variabel *independent*, variabel *dependent*, dan turunan parsialnya, atau dapat dituliskan seperti persamaan berikut.

$$F(x, t, C(x, t), C_x(x, t), C_{xx}(x, t), C_t(x, t)) = 0$$

Persamaan tersebut merupakan bentuk umum persamaan diferensial parsial orde dua yang mempunyai dua variabel *independent*. Orde suatu persamaan diferensial parsial dapat diketahui dari pangkat tertinggi turunan parsialnya. Oleh karena itu, persamaan (2.1) merupakan persamaan diferensial parsial orde dua dan termasuk juga diklasifikasikan sebagai persamaan diferensial parsial linier.

Suatu persamaan diferensial parsial disebut linier apabila terdapat suatu operator diferensial \mathcal{L} yang diterapkan pada fungsi C . Operator linier didefinisikan untuk setiap fungsi C , V , dan konstanta k , berlaku

$$\mathcal{L}(C + V) = \mathcal{L}C + \mathcal{L}V, \quad \mathcal{L}(kC) = k\mathcal{L}C$$

sehingga operator diferensial \mathcal{L} disebut sebagai operator linier (Pinsky, 2003:2). Operator linier dapat juga dituliskan seperti persamaan berikut.

$$\mathcal{L}C = g \tag{2.10}$$

Pada persamaan (2.10), apabila $g = 0$ maka disebut sebagai persamaan diferensial parsial linier homogen. Sedangkan apabila $g \neq 0$, maka disebut sebagai persamaan diferensial parsial linier tak homogen.

Persamaan keseimbangan massa reaktor pada persamaan (2.1) merupakan persamaan diferensial parsial linier homogen, dikarenakan untuk setiap operator diferensial $\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial t} - D \frac{\partial^2}{\partial x^2} + U \frac{\partial}{\partial x} + \gamma$, persamaan tersebut dapat dinyatakan dengan,

$$\begin{aligned} \frac{\partial C(x, t)}{\partial t} &= D \frac{\partial^2 C(x, t)}{\partial x^2} - U \frac{\partial C(x, t)}{\partial x} - \gamma C(x, t) \\ \frac{\partial C(x, t)}{\partial t} - D \frac{\partial^2 C(x, t)}{\partial x^2} + U \frac{\partial C(x, t)}{\partial x} + \gamma C(x, t) &= 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - D \frac{\partial^2}{\partial x^2} + U \frac{\partial}{\partial x} + \gamma \right) C(x, t) &= 0 \\ \mathcal{L}C(x, t) &= 0 \end{aligned}$$

Dengan demikian, persamaan keseimbangan massa reaktor yang ditunjukkan pada persamaan (2.1) merupakan persamaan diferensial parsial linier.

2.3 Masalah Kondisi Awal dan Kondisi Batas

Persamaan diferensial parsial mempunyai lebih dari satu penyelesaian. Dengan demikian, perlu adanya kondisi yang diformulasikan, sehingga persamaan tersebut memiliki solusi yang tunggal (*unique*) (Strauss, 1992:20). Terdapat dua macam kondisi yang digunakan, yaitu kondisi awal dan kondisi batas. Kondisi awal digunakan untuk menentukan solusi pada waktu pertama atau pada saat $t = 0$.

$$C(x, t) = \psi(x)$$

dengan $\psi(x)$ merupakan posisi awal x pada saat $t = 0$. Dikarenakan fungsi $\psi(x)$ menunjukkan posisi awal x , maka $\psi(x)$ dapat bernilai konstanta ataupun fungsi yang dipengaruhi variabel x .

Pada permasalahan tertentu, terdapat daerah (*domain*) x yang menjadikan persamaan diferensial tersebut menjadi valid. *Domain* x terletak pada interval $0 < x < l$, sehingga permasalahan kondisi batas pada daerah x hanya pada titik $x = 0$ dan $x = l$. Adapun kondisi batas yang umum digunakan yaitu:

1. Kondisi batas *Dirichlet*: $C(0, t) = g(t)$ dan $C(l, t) = h(t)$
2. Kondisi batas *Neumann*: $C_x(0, t) = g(t)$ dan $C_x(l, t) = h(t)$
3. Kondisi batas *Robin*: $C_x(0, t) - a_0 C(0, t) = g(t)$ dan $C_x(l, t) + a_1 C(l, t) = h(t)$, dengan a_0 dan a_1 merupakan suatu konstanta

(Strauss, 1992:84).

Sehingga kondisi batas persamaan keseimbangan massa reaktor yang ditunjukkan pada persamaan (2.2) merupakan kondisi batas *Dirichlet*. Pada masalah kondisi batas, terdapat dua klasifikasi yang paling penting untuk diperhatikan dalam menyelesaikan suatu permasalahan diferensial parsial, yaitu kondisi batas homogen dan kondisi batas tak homogen.

2.3.1 Kondisi Batas Homogen dan Kondisi Batas Tak Homogen

Misalkan $C(x, t)$ adalah solusi dari suatu persamaan diferensial parsial pada batas $0 < x < l$, kondisi batas pada saat $x = 0$ dan $x = l$ dituliskan seperti persamaan berikut.

$$C(0, t) = g(t) \quad (2.11)$$

$$C(l, t) = h(t) \quad (2.12)$$

Persamaan (2.11) dan (2.12) merupakan contoh kondisi batas *Dirichlet*. Apabila $g(t) = 0$ dan $h(t) = 0$ maka disebut sebagai kondisi batas homogen (Pinsky, 2003:110).

Sedangkan apabila $g(t) \neq 0$ atau $h(t) \neq 0$, maka disebut sebagai kondisi batas tak homogen (Pinsky, 2003:121). Sehingga $g(t)$ dapat bernilai konstanta yang tidak nol, ataupun sebuah fungsi yang dipengaruhi oleh variabel t . Oleh karena itu, kondisi awal persamaan keseimbangan massa reaktor yang ditunjukkan pada persamaan (2.2) merupakan kondisi awal homogen, sedangkan kondisi batas yang digunakan adalah kondisi batas tak homogen.

2.4 Metode Pemisahan Variabel

Salah satu metode yang digunakan untuk memperoleh solusi persamaan diferensial parsial linier adalah metode pemisahan variabel. Metode ini dilakukan dengan cara memisahkan antara fungsi variabel *indendent* (berpengaruh) satu dengan fungsi variabel *independent* yang lain. Sehingga fungsi yang sudah dipisahkan, dapat diselesaikan dalam bentuk persamaan diferensial biasa. Misalkan $C(x, t) = X(x)T(t)$ adalah solusi dari suatu persamaan diferensial parsial, maka masing-masing $X(x)$ dan $T(t)$ merupakan fungsi yang memuat variabel *independent* (Pinsky, 2003:10). Sehingga kedua fungsi tersebut dapat dipisahkan dengan konstanta pemisahan dan diselesaikan secara terpisah menjadi bentuk persamaan diferensial biasa. Masing-masing fungsi dan konstanta pemisahan disebut sebagai fungsi eigen dan nilai eigen (Strauss, 1992:84).

Agarwal dan O'Regan (2009:227) menyebutkan bahwa $X(x)$ merupakan fungsi eigen yang memuat variabel x , sedangkan $T(t)$ adalah fungsi eigen yang

memuat variabel t . Kemudian dengan mensubstitusikan masing-masing fungsi eigen pada persamaan diferensial parsial yang akan diselesaikan, maka masing-masing fungsi eigen dapat diselesaikan secara terpisah.

Pada kondisi batas homogen, untuk menentukan nilai eigen dapat dilakukan dengan cara mensubstitusikan kondisi batas pada masing-masing fungsi yang sudah diselesaikan secara terpisah (Srauss, 1992:85). Sedangkan pada kondisi batas tak homogen terdapat kendala untuk menentukan masing-masing nilai eigen dan fungsi eigen.

Pinsky (2003:122) menyebutkan, penyelesaian persamaan diferensial parsial dengan kondisi batas tak homogen dapat dilakukan dengan cara mentransformasikan kondisi batas yang awalnya tak homogen diubah menjadi homogen. Misalkan $u(x, t)$ adalah solusi dari persamaan diferensial parsial yang mempunyai kondisi batas tak homogen, maka langkah-langkah yang dilakukan untuk menyelesaikan persamaan tersebut yaitu:

1. Mentransformasikan solusi persamaan diferensial parsial menjadi

$$u(x, t) = V(x, t) + u(x)$$

dengan $u(x)$ merupakan solusi persamaan pada kondisi *steady-state*. Kondisi batas yang digunakan $u(0)$ dan $u(l)$ adalah kondisi batas tak homogen seperti kondisi batas $u(0, t)$ dan $u(l, t)$, sehingga kondisi batas V merupakan kondisi batas homogen. Sehingga dapat dijamin transformasi tersebut merupakan solusi dari persamaan diferensial yang mempunyai kondisi batas tak homogen.

2. Menentukan $u(x)$, yaitu solusi persamaan keseimbangan massa reaktor pada kondisi tidak dipengaruhi perubahan waktu (*steady-state*).

3. Menentukan $V(x, t)$, yaitu solusi dari persamaan setelah ditransformasikan. Kemudian persamaan diferensial $V(x, t)$ dapat diperoleh dengan cara mensubstitusikan transformasi pada persamaan awal, sehingga dapat diperoleh persamaan baru. Selanjutnya dengan menggunakan metode pemisahan variabel, persamaan baru tersebut dapat diselesaikan (Pinsky, 2003:123).

Dengan demikian, untuk menentukan solusi persamaan keseimbangan massa reaktor dengan kondisi batas tak homogen yang ditunjukkan pada persamaan (2.1) dan (2.2), dapat dilakukan dengan cara mentransformasikan kondisi batas (2.2) yang awalnya tak homogen diubah menjadi kondisi batas homogen seperti langkah di atas. Transformasi dilakukan dengan tujuan untuk menentukan masing-masing nilai eigen dan fungsi eigen.

2.5 Deret Fourier

Strauss (1992:104) menyebutkan bahwa, misalkan terdapat domain x pada suatu interval $0 < x < l$, sedemikian sehingga terdapat suatu deret sinus yang konvergen menuju suatu fungsi $\phi(x)$ yang didefinisikan seperti persamaan berikut.

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad (2.13)$$

dengan A_n adalah koefisien dari deret sinus, sedangkan $\phi(x)$ adalah suatu fungsi tertentu. Misalkan terdapat dua bilangan bulat n dan m sedemikian sehingga $n \neq m$, maka dengan menggunakan identitas trigonometri, suatu integral sinus

pada interval $0 < x < l$ yang mempunyai dua sudut berbeda dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \int_0^l \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) dx &= \int_0^l \frac{1}{2} \left(\cos\left(\frac{n\pi x}{l} - \frac{m\pi x}{l}\right) - \cos\left(\frac{n\pi x}{l} + \frac{m\pi x}{l}\right) \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l \left(\cos\left(\frac{(n-m)\pi x}{l}\right) - \cos\left(\frac{(n+m)\pi x}{l}\right) \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\sin\left(\frac{(n-m)\pi x}{l}\right) \frac{l}{(n-m)\pi} \right]_0^l \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[\sin\left(\frac{(n+m)\pi x}{l}\right) \frac{l}{(n+m)\pi} \right]_0^l \end{aligned}$$

Kemudian dengan memasukkan batas interval $x = 0$ sampai dengan $x = l$, maka persamaan tersebut dapat diperoleh

$$\begin{aligned} \int_0^l \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) dx &= \frac{1}{2} \frac{l}{(n-m)\pi} \sin\left(\frac{(n-m)\pi l}{l}\right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{l}{(n+m)\pi} \sin\left(\frac{(n+m)\pi l}{l}\right) \\ \int_0^l \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) dx &= \frac{1}{2} \frac{l}{(n-m)\pi} \sin((n-m)\pi) \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{l}{(n+m)\pi} \sin((n+m)\pi) \end{aligned}$$

Dikarenakan nilai dari $\sin(\pi) = 0$, maka untuk setiap kelipatan π nilai dari $\sin((n \pm m)\pi) = 0$. Dengan demikian, persamaan tersebut dapat ditulis kembali seperti berikut.

$$\int_0^l \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) dx = 0, \quad \forall n \neq m \quad (2.14)$$

Sedangkan untuk dua bilangan bulat n dan m sedemikian sehingga $n = m$, maka suatu integral sinus pada interval $0 < x < l$ yang mempunyai dua sudut sama dapat dinyatakan dengan,

$$\int_0^l \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) dx = \int_0^l \left(\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right)^2 dx$$

Kemudian dengan menggunakan identitas trigonometri, maka fungsi $\left(\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right)^2$ dapat diubah menjadi

$$\begin{aligned} \int_0^l \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) dx &= \int_0^l \frac{1}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{2n\pi x}{l}\right)\right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l \left(1 - \cos\left(\frac{2n\pi x}{l}\right)\right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[x - \frac{l}{2n\pi} \sin\left(\frac{2n\pi x}{l}\right) \right]_0^l \end{aligned}$$

Selanjutnya, dengan memasukkan batas interval $x = 0$ sampai dengan $x = l$, maka persamaan tersebut dapat diperoleh

$$\begin{aligned} \int_0^l \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) dx &= \frac{1}{2} \left(l - \frac{l}{2n\pi} \sin\left(\frac{2n\pi l}{l}\right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(l - \frac{l}{2n\pi} \sin(2n\pi) \right) \end{aligned}$$

Diketahui nilai dari $\sin(\pi) = 0$, maka setiap kelipatan π , nilai dari $\sin(2n\pi) = 0$.

Dengan demikian persamaan tersebut dapat ditulis menjadi

$$\int_0^l \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) dx = \frac{1}{2} l, \quad \forall n = m \quad (2.15)$$

Selanjutnya, untuk menentukan koefisien dari deret sinus, maka kedua ruas kiri dan kanan pada persamaan (2.13) dikalikan dengan $\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)$, kemudian

diintegrasikan terhadap variabel x pada interval $0 < x < l$, sehingga persamaan (2.13) menjadi

$$\int_0^l \phi(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) dx = \int_0^l \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) dx$$

$$\int_0^l \phi(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^l \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) dx \quad (2.16)$$

Apabila dipilih $n \neq m$, maka berlaku persamaan (2.14), sehingga berakibat koefisien deret sinus pada persamaan (2.16) adalah nol atau $A_n = 0$. Dengan demikian nilai n dan m yang dipilih adalah $n = m$. Pada saat $n = m$ persamaan (2.16) menjadi

$$\int_0^l \phi(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) dx = A_m \int_0^l \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) dx$$

$$\int_0^l \phi(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) dx = A_m \int_0^l \left(\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)\right)^2 dx$$

Dikarenakan $n = m$, maka persamaan tersebut dapat ditulis kembali menjadi

$$\int_0^l \phi(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = A_n \int_0^l \left(\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right)^2 dx$$

Karena nilai n dan m yang dipilih adalah $n = m$, maka berlaku persamaan (2.15), sehingga dapat diperoleh

$$\int_0^l \phi(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = A_n \frac{l}{2}$$

Apabila kedua sisi kanan dan kiri dikalikan dengan $\frac{2}{l}$, maka nilai A_n adalah

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \phi(x) \sin\frac{n\pi x}{l} dx \quad (2.17)$$

(Strauss, 1992:104).

2.6 Perintah Al-Quran Untuk Mengamati Alam

Pentingnya mengamati alam sekitar dijelaskan dalam firman Allah Swt. surat al-Baqarah/2:164, yaitu:

إِنَّ فِي خَلْقِ السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ وَاخْتِلَافِ اللَّيْلِ وَالنَّهَارِ وَالْفُلْكِ الَّتِي تَجْرِي فِي الْبَحْرِ بِمَا يَنْفَعُ النَّاسَ وَمَا أَنْزَلَ اللَّهُ مِنَ السَّمَاءِ مِنْ مَّاءٍ فَأَحْيَا بِهِ الْأَرْضَ بَعْدَ مَوْتِهَا وَبَثَّ فِيهَا مِنْ كُلِّ دَابَّةٍ وَتَصْرِيفِ الرِّيْحِ وَالسَّحَابِ الْمُسَخَّرِ بَيْنَ السَّمَاءِ وَالْأَرْضِ لَآيَاتٍ لِقَوْمٍ يَعْقِلُونَ ﴿١٦٤﴾

“Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi, silih bergantinya malam dan siang, bahtera yang berlayar di laut membawa apa yang berguna bagi manusia, dan apa yang Allah turunkan dari langit berupa air, lalu dengan air itu dia hiduapkan bumi sesudah mati (kering)-nya dan dia sebarkan di bumi itu segala jenis hewan, dan pengisaran angin dan awan yang dikendalikan antara langit dan bumi; sungguh (terdapat) tanda-tanda (keesaan dan kebesaran Allah) bagi kaum yang memikirkan” (QS. al-Baqarah/2:164).

Dalam tafsir Ibnu Katsir juz 2, dijelaskan bahwa pada ayat di atas Allah Swt. berfirman, “Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi yang dapat dilihat sekarang ketinggian, keindahannya, keluasannya, bintang-bintangnya yang beredar, yang tetap, serta perputarannya, gunung-gunungnya, lautnya, padang saharanya, hutan belantaranya, pergantian siang dan malam hari secara silih berganti tanpa ada keterlambatan sedikit pun, serta segala sesuatu yang ada padanya berupa berbagai macam manfaat (Ad-Dimasyqi, 2000a:74).

Adapun yang menjadi sebab turunya ayat di atas, yaitu untuk menunjukkan kepada orang-orang kafir Quraisy bahwa Allah adalah Tuhan yang maha Esa, dan Allah adalah Tuhan segala sesuatu serta yang menciptakan sesuatu. Pada saat tersebut, orang-orang musyrik menginginkan Nabi Muhammad Saw.

menunjukkan bukti dari kekuasaan dan keesaan Allah, maka turunlah surat al-Baqarah/2:164 (Ad-Dimasyqi, 2000a:80).

Pada akhir ayat sebelumnya menjelaskan tentang keesaan Allah Swt. sedangkan ayat ini mengemukakan dalil tentang eksistensi dan keesaan Allah Swt. Eksistensi menjelaskan tentang bukti keberadaan Allah Swt. Sehingga keberadaan Allah Swt. dapat dibuktikan melalui ciptaan Allah Swt. baik yang ada di langit dan bumi seperti yang dijelaskan pada ayat tersebut (Ass-Syirazi, 1992:442).

Dengan demikian, ayat tersebut menerangkan tentang bukti kekuasaan Allah Swt. melalui ciptaan yang ada di langit dan di bumi. Firman Allah di atas, memerintahkan setiap manusia agar memikirkan tanda-tanda keesaan dan kebesaran Allah Swt. sehingga dapat diketahui bahwa Allah Swt. adalah Dzat yang Maha Esa dan Allah Swt. adalah Tuhan segala sesuatu, serta yang menciptakan segala sesuatu.

Dari penjelasan di atas, dapat diketahui bahwa tanda-tanda kekuasaan Allah Swt. diperlihatkan bagi orang-orang yang memikirkan ciptaan Allah Swt. di alam semesta, sebagaimana dalam firman Allah Swt. surat Ali Imran/3:190-191.

إِنَّ فِي خَلْقِ السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ وَأَخْتِلَافِ اللَّيْلِ وَالنَّهَارِ لَآيَاتٍ لِّأُولِي الْأَلْبَابِ ﴿١٩٠﴾
 الَّذِينَ يَذْكُرُونَ اللَّهَ قِيَمًا وَقُعُودًا وَعَلَىٰ جُنُوبِهِمْ وَيَتَفَكَّرُونَ فِي خَلْقِ السَّمَوَاتِ
 وَالْأَرْضِ رَبَّنَا مَا خَلَقْتَ هَذَا بَطِيلاً سُبْحَانَكَ فَقِنَا عَذَابَ النَّارِ ﴿١٩١﴾

“Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi, dan silih bergantinya malam dan siang terdapat tanda-tanda bagi orang-orang yang berakal, (yaitu) orang-orang yang mengingat Allah sambil berdiri atau duduk atau dalam keadan berbaring dan mereka memikirkan tentang penciptaan langit dan bumi (seraya berkata): "Ya Tuhan kami, tiadalah Engkau menciptakan Ini dengan sia-sia,

Maha Suci Engkau, Maka peliharalah kami dari siksa neraka” (QS. Ali Imran/3:190-191).

Dalam tafsir Ibnu Katsir juz 4, diterangkan bahwa dalam ketinggian, keluasannya, setiap hamparannya, kepadatannya serta tata letaknya, dan semua yang ada pada keduanya berupa tanda-tanda yang dapat disaksikan, bintang-bintang yang beredar dan yang tetap, lautan, gunung-gunung dan padang pasir, serta berbagai macam manfaat yang beraneka warna, serta silih bergantinya malam dan siang. Semuanya berjalan berdasarkan pengaturan dari Allah Swt. yang Maha Perkasa lagi Maha Mengetahui, yang ditunjukkan sebagai tanda-tanda bagi orang-orang yang berakal (Ad-Dimasyqi, 2000b:356). Orang berakal di sini, yaitu orang-orang yang mempunyai akal sempurna serta memiliki kecerdasan, karena hanya dengan akal yang sempurna, seseorang dapat mengetahui segala sesuatu dengan hakikatnya masing-masing secara jelas.

Di dalam penciptaan langit dan bumi serta segala keajaiban yang ada pada keduanya dan berbagai perbedaan siang dan malam dari segi datang dan perginya maupun dari segi lebih dan kurang temponya, semua itu merupakan bukti-bukti yang menunjukkan kekuasaan Allah Swt. bagi *ulil albab*, yaitu orang-orang yang senantiasa mengingat Allah Swt. baik dalam keadaan berdiri, duduk, maupun berbaring. *Ulil albab* juga diartikan sebagai orang-orang yang berfikir tentang penciptaan langit dan bumi untuk mendapatkan bukti atas kekuasaan Allah Swt. Dengan demikian, setiap yang diciptakan Allah Swt. merupakan suatu perkara yang tidak sia-sia. Melainkan sebagai bukti atas kesempurnaan kekuasaan Allah Swt. (Ad-Dimasyqi, 2000b:356).

Sedangkan Abu Ja'far berpendapat bahwa Allah Swt. menerangkan tanda-tanda kekuasaan-Nya kepada kaum kafir Makkah karena sebelumnya mereka

telah meminta bukti kepada Nabi Muhammad Saw. atas apa yang beliau katakan. Maka Allah Swt. berfirman, “Wahai manusia, merenung dan ambillah pelajaran. Sesungguhnya apa yang ada di langit dan di bumi, semuanya ada pelajaran dan tanda-tanda kekuasaan-Ku, siapa saja diantara kalian yang memiliki akal, pasti tahu bahwa menyatakan kekafiran kepada-Ku dan menyatakan yang lain sebagai yang kaya adalah sebuah kedustaan” (Ath-Thabari, 2008:304). Dengan demikian, semua yang diciptakan Allah Swt. baik yang ada di langit maupun di bumi, semua itu benar-benar merupakan bukti keesaan Allah Swt. bagi *ulil albab*. Maksud dari *ulil albab* disini, yaitu orang-orang yang mempunyai akal. Sedangkan ciri-ciri orang yang berakal yaitu orang-orang yang mengingat Allah Swt. dengan melaksanakan sholat secara berdiri, duduk, maupun berbaring. Disamping itu, *ulil albab* selalu berfikir tentang keajaiban penciptaan langit dan bumi (Ath-Thabari, 2008:305).

Dalam penghujung surat Ali Imran/3:190-191, Allah Swt. memerintahkan untuk memperhatikan dan mencari bukti-bukti keberadaan Allah Swt. melalui tanda-tanda kekuasaan Allah Swt., sehingga keimanan umat ini bersandar kepada bukti yang meyakinkan atas kebenaran dan kekuasaan Allah Swt., bukan keimanan yang dibangun berdasarkan *taqlid* semata (Ath-Thabari, 2008:307).

Dengan demikian, baik dalam surat al-Baqarah/2:164 maupun surat Ali Imran/3:190-191, Allah Swt. memerintahkan kepada manusia untuk memikirkan segala ciptaan Allah Swt. di alam semesta. Adapun untuk memikirkan tanda-tanda kekuasaan Allah Swt. dapat dilakukan dengan cara melakukan pengkajian dan penelitian tentang ciptaan Allah Swt. Salah satunya yaitu melakukan penelitian dan pengkajian fenomena alam sekitar. Hal tersebut sebagaimana dalam firman

Allah Swt. surat Yunus/10:101 yang menjelaskan bahwa manusia dianjurkan untuk melakukan penelitian dan pengkajian tentang fenomena alam sekitar.

Setelah Allah Swt. menyampaikan kisah beberapa nabi dan rasul pada ayat sebelumnya, agar dapat menjadi pelajaran, i'tibar dan hiburan bagi Rasulullah, karena gangguan dan siksaan yang dilancarkan orang kafir terhadap beliau, maka pada ayat ini Allah Swt. mengingatkan kepada orang-orang musyrik agar mereka memperhatikan kerajaan langit dan bumi. Dengan demikian mereka mengetahui bahwa alam ini tidak diciptakan dengan sia-sia, melainkan diciptakan dengan tujuan untuk mengetahui Allah Swt. melalui tanda-tanda kekuasaan Allah Swt. (Asy-Shabuny, 2000:395).

Dengan demikian, Allah Swt. menunjukkan tanda-tanda kekuasaan kepada manusia yang menggunakan akalnya untuk memimikirkan segala ciptaan Allah Swt. baik dengan cara meneliti, mengkaji, maupun dengan cara yang lain. Dengan dilakukannya penelitian dan pengkajian, manusia dapat membentuk berbagai disiplin ilmu yang dijadikan sebagai alat untuk menganalisis suatu permasalahan yang ada di alam sekitar, sehingga dapat diperoleh solusi dari permasalahan tersebut. Karena dengan adanya solusi, manusia dapat mengetahui rahmat Allah Swt. yang telah diberikan kepada mereka melalui semua ciptaan Allah Swt. Sehingga manusia selalu bersyukur atas apa yang telah diberikan Allah Swt., karena semua yang diberikan Allah Swt. tidak ada yang sia-sia.

BAB III PEMBAHASAN

3.1 Solusi Persamaan Keseimbangan Massa Reaktor

Persamaan keseimbangan massa reaktor menyatakan laju perubahan konsentrasi massa zat yang dipengaruhi oleh perubahan waktu pada suatu reaktor, atau dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$\frac{\partial C(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C(x, t)}{\partial x^2} - U \frac{\partial C(x, t)}{\partial x} - \gamma C(x, t), \quad 0 < x < l \quad (3.1)$$

dengan kondisi awal homogen dan kondisi batas tak homogen yang digunakan yaitu

$$\begin{cases} C(x, 0) = 0, & 0 < x < l \\ C(0, t) = C_{in}, & t > 0 \\ C(l, t) = 0, & t > 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

Pada persamaan tersebut (3.1) dan (3.2), C_{in} menyatakan jumlah massa zat yang masuk pada suatu reaktor dengan satuan mol/m^3 , artinya $C_{in} \neq 0$. Sedangkan D menyatakan koefisien penyebaran zat dengan satuan m^2/det , U menyatakan kecepatan fluida yang mengalir dalam reaktor dengan satuan m/det , dan γ menyatakan koefisien reaksi dengan satuan mol/det .

Solusi persamaan keseimbangan massa reaktor dapat diperoleh dengan menggunakan metode pemisahan variabel, yaitu dengan cara memisahkan antara masing-masing variabel *independent* (berpengaruh) dengan suatu fungsi dan konstanta pemisahan, atau disebut dengan fungsi eigen dan nilai eigen. Metode ini dilakukan dengan cara memisahkan masing-masing variabel *independent* dengan suatu fungsi eigen dan nilai eigen, kemudian dengan menggunakan kondisi batas

yang sudah ditentukan, masing-masing nilai eigen dan fungsi eigen dapat diperoleh.

Pada kondisi batas homogen, nilai eigen dapat diperoleh dengan cara mensubstitusikan setiap kondisi batas pada masing-masing solusi yang sudah dipisahkan. Akan tetapi sebaliknya, terdapat kendala untuk memperoleh nilai eigen pada kondisi batas tak homogen. Dengan demikian, untuk menentukan solusi persamaan keseimbangan massa reaktor yang mempunyai kondisi batas tak homogen (3.2), dapat dilakukan dengan cara mentransformasikan kondisi batas (3.2) yang awalnya tak homogen diubah menjadi kondisi batas homogen.

Seperti yang telah dijelaskan pada bab dua, maka solusi dari persamaan keseimbangan massa reaktor ditransformasikan menjadi

$$C(x, t) = V(x, t) + C(x) \quad (3.3)$$

Pada persamaan (3.3), $C(x, t)$ merupakan solusi dari persamaan keseimbangan massa reaktor dengan kondisi batas tak homogen. Transformasi tersebut bertujuan untuk mengubah kondisi batas yang awalnya tak homogen menjadi kondisi batas homogen. Dari persamaan (3.2), dapat diketahui bahwa kondisi batas yang digunakan $C(0, t)$ dan $C(l, t)$ adalah kondisi batas tak homogen. Fungsi $C(x)$ merupakan suatu fungsi yang hanya bergantung pada variabel x saja. Apabila fungsi $C(x)$ bergantung pada variabel x dan t , maka pada saat $x = 0$ dan $x = l$, kondisi batas $C(0)$ dan $C(l)$ memuat variabel t , sehingga mengakibatkan kondisi batas V tidak homogen. Oleh karena itu, fungsi $C(x)$ hanya memuat variabel x saja.

Dengan demikian, $C(x)$ merupakan solusi persamaan keseimbangan massa reaktor pada kondisi laju perubahan konsentrasi massa zat tidak dipengaruhi oleh

perubahan waktu (*steady-state*). Kondisi batas yang digunakan $C(0)$ dan $C(l)$ adalah kondisi batas tak homogen seperti pada kondisi batas $C(0, t)$ dan $C(l, t)$. Sedangkan $V(x, t)$ merupakan solusi dari persamaan keseimbangan massa reaktor setelah ditransformasikan. Dikarenakan kondisi batas yang digunakan $C(0)$ dan $C(l)$ sama dengan kondisi batas $C(0, t)$ dan $C(l, t)$, yaitu kondisi batas tak homogen, maka kondisi batas $V(0, t)$ dan $V(l, t)$ adalah kondisi batas yang homogen. Sehingga $V(x, t)$ merupakan solusi transformasi yang mempunyai kondisi batas homogen. Selanjutnya, untuk mengetahui persamaan diferensial dari $V(x, t)$, maka persamaan (3.3) disubstitusikan pada persamaan keseimbangan massa reaktor.

Dari penjelasan tersebut, karena kondisi batas $V(0, t)$ dan $V(l, t)$ adalah kondisi batas homogen, sedangkan kondisi batas $C(0)$ dan $C(l)$ adalah kondisi batas tak homogen, maka dapat dijamin bahwa transformasi (3.3) merupakan solusi dari persamaan keseimbangan massa reaktor yang mempunyai kondisi batas tak homogen. Dengan demikian, untuk memperoleh solusi transformasi persamaan keseimbangan massa reaktor (3.3), maka ditentukan solusi persamaan keseimbangan massa reaktor pada kondisi *steady-state* ($C(x)$) dan solusi transformasi persamaan keseimbangan massa reaktor ($V(x, t)$).

3.1.1 Solusi Persamaan Keseimbangan Massa Reaktor pada Kondisi *Steady-state*

Dari penjelasan sebelumnya, diketahui bahwa $C(x)$ merupakan solusi persamaan keseimbangan reaktor pada kondisi *steady-state*. Dikarenakan kondisi *steady-state* adalah kondisi pada saat laju perubahan konsentrasi massa zat tidak dipengaruhi oleh perubahan waktu, maka perubahan konsentrasi massa zat

terhadap waktu sama dengan nol. Sehingga persamaan (3.1) hanya memuat satu variabel *independent* saja. Dengan demikian, persamaan keseimbangan massa reaktor pada kondisi *steady-state* tidak dapat diklasifikasikan sebagai persamaan diferensial parsial, sebaliknya dapat diklasifikasikan sebagai persamaan diferensial biasa. Berdasarkan klasifikasi notasi persamaan diferensial biasa seperti yang telah dijelaskan pada bab dua, maka operator ∂ pada persamaan (3.1) diubah menjadi operator d , atau dapat ditulis seperti berikut.

$$0 = D \frac{d^2 C(x)}{dx^2} - U \frac{dC(x)}{dx} - \gamma C(x) \quad (3.4)$$

Dari penjelasan di atas, kondisi batas yang digunakan pada $C(0)$ dan $C(l)$ adalah kondisi batas tak homogen sama seperti persamaan (3.2), atau ditulis seperti berikut.

$$C(0) = C_{in}, \quad C(l) = 0 \quad (3.5)$$

Dengan demikian, persamaan (3.5) merupakan kondisi batas yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan (3.4), sehingga solusi $C(x)$ dapat diperoleh dengan cara menyelesaikan persamaan (3.4) yang mempunyai kondisi batas (3.5). Persamaan (3.4) merupakan persamaan diferensial homogen orde dua. Berdasarkan teorema 2.3, persamaan (3.4) mempunyai persamaan karakteristik

$$Dr^2 - Ur - \gamma = 0 \quad (3.6)$$

Persamaan (3.6) merupakan bentuk umum dari persamaan kuadrat, sehingga persamaan tersebut dapat difaktorkan menjadi

$$\left(r - \frac{U - \sqrt{U^2 + 4D\gamma}}{2D} \right) \left(r - \frac{U + \sqrt{U^2 + 4D\gamma}}{2D} \right) = 0$$

Dengan demikian, persamaan (3.6) dapat dipenuhi apabila akar-akarnya adalah

$$r_1 = \frac{U - \sqrt{U^2 + 4D\gamma}}{2D} \text{ dan } r_2 = \frac{U + \sqrt{U^2 + 4D\gamma}}{2D}.$$

Setelah diperoleh bentuk umum dari akar-akar persamaan (3.6), maka persamaan karakteristik tersebut mempunyai akar-akar real berbeda, akar-akar kembar, atau akar-akar kompleks. Sehingga solusi $C(x)$ dapat diperoleh sebagai berikut:

a. Akar-akar Real Berbeda

Persamaan karakteristik (3.6) mempunyai akar-akar real berbeda apabila nilai $U^2 + 4D\gamma > 0$. Sehingga akar-akarnya menjadi

$$r_{1,2} = \frac{U \pm \sqrt{U^2 + 4D\gamma}}{2D}$$

Berdasarkan teorema 2.4, maka solusi $C(x)$ yang persamaan karakteristiknya mempunyai akar-akar real berbeda dapat diperoleh seperti berikut.

$$C(x) = k_1 e^{\left(\frac{U + \sqrt{U^2 + 4D\gamma}}{2D}\right)x} + k_2 e^{\left(\frac{U - \sqrt{U^2 + 4D\gamma}}{2D}\right)x} \quad (3.7)$$

Untuk menentukan nilai k_1 dan k_2 , digunakan kondisi batas (3.5) pada persamaan (3.7), sehingga pada saat $x = 0$ dapat diperoleh

$$C(0) = k_1 e^0 + k_2 e^0$$

$$C_{in} = k_1 + k_2$$

$$k_1 = C_{in} - k_2$$

Karena $k_1 = C_{in} - k_2$, maka pada saat $x = l$ dapat diperoleh

$$C(l) = (C_{in} - k_2) e^{\left(\frac{U + \sqrt{U^2 + 4D\gamma}}{2D}\right)l} + k_2 e^{\left(\frac{U - \sqrt{U^2 + 4D\gamma}}{2D}\right)l}$$

$$0 = (C_{in} - k_2) e^{\left(\frac{U + \sqrt{U^2 + 4D\gamma}}{2D}\right)l} + k_2 e^{\left(\frac{U - \sqrt{U^2 + 4D\gamma}}{2D}\right)l}$$

$$0 = C_{in} e^{\left(\frac{U+\sqrt{U^2+4D\gamma}}{2D}\right)l} + k_2 \left(e^{\left(\frac{U-\sqrt{U^2+4D\gamma}}{2D}\right)l} - e^{\left(\frac{U+\sqrt{U^2+4D\gamma}}{2D}\right)l} \right)$$

sehingga nilai k_2 adalah

$$k_2 = \frac{-C_{in} e^{\left(\frac{U+\sqrt{U^2+4D\gamma}}{2D}\right)l}}{\left(e^{\left(\frac{U-\sqrt{U^2+4D\gamma}}{2D}\right)l} - e^{\left(\frac{U+\sqrt{U^2+4D\gamma}}{2D}\right)l} \right)}$$

sedangkan nilai k_1 adalah

$$k_1 = C_{in} - \frac{-C_{in} e^{\left(\frac{U+\sqrt{U^2+4D\gamma}}{2D}\right)l}}{\left(e^{\left(\frac{U-\sqrt{U^2+4D\gamma}}{2D}\right)l} - e^{\left(\frac{U+\sqrt{U^2+4D\gamma}}{2D}\right)l} \right)}$$

Dengan demikian, nilai k_1 dapat disederhanakan menjadi

$$k_1 = \frac{C_{in} e^{\left(\frac{U-\sqrt{U^2+4D\gamma}}{2D}\right)l}}{\left(e^{\left(\frac{U-\sqrt{U^2+4D\gamma}}{2D}\right)l} - e^{\left(\frac{U+\sqrt{U^2+4D\gamma}}{2D}\right)l} \right)}$$

b. Akar-akar Kembar

Persamaan karakteristik (3.6) mempunyai akar-akar kembar apabila nilai $U^2 + 4D\gamma = 0$. Nilai $U^2 + 4D\gamma$ akan bernilai nol apabila $U^2 = -4D\gamma$, sehingga akar-akarnya menjadi

$$r_{1,2} = \frac{U}{2D}$$

Berdasarkan teorema 2.5, maka solusi $C(x)$ yang persamaan karakteristiknya mempunyai akar-akar kembar yaitu

$$C(x) = k_3 e^{\frac{U}{2D}x} + k_4 x e^{\frac{U}{2D}x} \quad (3.8)$$

Untuk menentukan nilai k_3 dan k_4 , digunakan kondisi batas (3.5) pada persamaan (3.8), sehingga pada saat $x = 0$ dapat diperoleh

$$C(0) = k_3 e^0$$

$$C_{in} = k_3$$

Karena $k_3 = C_{in}$, maka pada saat $x = l$ dapat diperoleh

$$C(l) = C_{in} e^{\frac{U}{2D}l} + k_4 l e^{\frac{U}{2D}l}$$

$$0 = C_{in} e^{\frac{U}{2D}l} + k_4 l e^{\frac{U}{2D}l}$$

Dengan demikian, nilai k_4 dapat diperoleh seperti berikut.

$$k_4 = \frac{-C_{in} e^{\frac{U}{2D}l}}{l e^{\frac{U}{2D}l}}$$

Nilai k_4 dapat disederhanakan menjadi

$$k_4 = \frac{-C_{in}}{l}$$

Selanjutnya, dengan mensubstitusikan kembali nilai $k_3 = C_{in}$ dan $k_4 = \frac{-C_{in}}{l}$ pada persamaan (3.8), maka solusi $C(x)$ dapat ditulis kembali menjadi seperti berikut.

$$C(x) = C_{in} e^{\frac{U}{2D}x} - \frac{C_{in}}{l} x e^{\frac{U}{2D}x} \quad (3.9)$$

c. Akar-akar Kompleks

Persamaan karakteristik (3.6) mempunyai akar-akar kompleks apabila nilai $U^2 + 4D\gamma < 0$. Dikarenakan nilai U^2 selalu positif, maka $U^2 + 4D\gamma = -|U^2 + 4D\gamma|$ dapat menjamin $U^2 + 4D\gamma$ nilainya selalu negatif. Dengan demikian, akar-akar kompleks konjugatnya menjadi

$$r_{1,2} = \frac{U \pm \sqrt{-|U^2 + 4D\gamma|}}{2D}$$

$$r_{1,2} = \frac{U \pm i\sqrt{|U^2 + 4D\gamma|}}{2D}.$$

Berdasarkan teorema 2.6, maka solusi $C(x)$ yang persamaan karakteristiknya mempunyai akar-akar kompleks yaitu

$$C(x) = e^{\frac{U}{2D}x} \left(k_5 \cos \left(\frac{\sqrt{|U^2 + 4D\gamma|}}{2D} x \right) + k_6 \sin \left(\frac{\sqrt{|U^2 + 4D\gamma|}}{2D} x \right) \right) \quad (3.10)$$

Untuk menentukan nilai k_5 dan k_6 , digunakan kondisi batas (3.5) pada persamaan (3.10). Sehingga pada saat $x = 0$ dapat diperoleh

$$C(0) = e^0(k_5 + 0)$$

$$C_{in} = k_5$$

Karena $k_5 = C_{in}$, maka pada saat $x = l$ dapat diperoleh

$$C(l) = e^{\frac{U}{2D}l} \left(C_{in} \cos \left(\frac{\sqrt{|U^2 + 4D\gamma|}}{2D} l \right) + k_6 \sin \left(\frac{\sqrt{|U^2 + 4D\gamma|}}{2D} l \right) \right)$$

$$0 = e^{\frac{U}{2D}l} \left(C_{in} \cos \left(\frac{\sqrt{|U^2 + 4D\gamma|}}{2D} l \right) + k_6 \sin \left(\frac{\sqrt{|U^2 + 4D\gamma|}}{2D} l \right) \right)$$

$$0 = C_{in} \cos \left(\frac{\sqrt{|U^2 + 4D\gamma|}}{2D} l \right) + k_6 \sin \left(\frac{\sqrt{|U^2 + 4D\gamma|}}{2D} l \right)$$

Sehingga dapat diperoleh nilai k_6 yaitu

$$k_6 = - \frac{C_{in} \cos \left(\frac{\sqrt{|U^2 + 4D\gamma|}}{2D} l \right)}{\sin \left(\frac{\sqrt{|U^2 + 4D\gamma|}}{2D} l \right)}$$

Dengan demikian, nilai k_6 dapat disederhanakan menjadi

$$k_6 = -C_{in} \cot \left(\frac{\sqrt{|U^2 + 4D\gamma|}}{2D} l \right)$$

Setelah diperoleh solusi persamaan keseimbangan massa reaktor pada kondisi *steady-state*, maka langkah selanjutnya menentukan solusi transformasi persamaan keseimbangan massa reaktor.

3.1.2 Solusi Transformasi Persamaan Keseimbangan Massa Reaktor

Dari penjelasan pada bab sebelumnya, diketahui bahwa $V(x, t)$ merupakan solusi transformasi persamaan keseimbangan massa reaktor. Setelah $C(x)$ diperoleh, maka langkah selanjutnya yaitu menentukan $V(x, t)$. Untuk menentukan $V(x, t)$, perlu diketahui terlebih dahulu persamaan diferensialnya. Diketahui persamaan keseimbangan massa reaktor (3.1) merupakan persamaan yang terdiri dari turunan parsial fungsi $C(x, t)$. Dikarenakan persamaan (3.3) juga memuat fungsi $V(x, t)$, maka untuk menjamin persamaan diferensial $V(x, t)$ memenuhi persamaan keseimbangan massa reaktor, dapat dilakukan dengan cara mensubstitusikan persamaan (3.3) pada persamaan (3.1) sehingga dapat diperoleh persamaan baru.

Berdasarkan Lampiran 1, dengan mensubstitusikan persamaan (3.3) pada persamaan (3.1), diperoleh transformasi persamaan keseimbangan massa reaktor seperti berikut.

$$V_t(x, t) = DV_{xx}(x, t) - UV_x(x, t) - \gamma V(x, t) \quad (3.11)$$

Selanjutnya, untuk menentukan kondisi batas $V(0, t)$ dan $V(l, t)$ dapat diperoleh dengan cara mensubstitusikan kondisi batas $C(0) = C_{in}$ dan $C(l) = 0$, serta kondisi batas (3.2) pada persamaan (3.3). Berdasarkan Lampiran 2, maka kondisi batas $V(0, t)$ dan $V(l, t)$ adalah kondisi batas homogen seperti persamaan berikut.

$$V(0, t) = 0, \quad V(l, t) = 0 \quad (3.12)$$

Kondisi awal $V(x, 0)$ dapat diperoleh dengan cara mensubstitusikan kondisi awal (3.2) pada persamaan (3.3). Sehingga kondisi pada saat $t = 0$ diperoleh

$$C(x, 0) = V(x, 0) + C(x)$$

$$V(x, 0) = C(x, 0) - C(x)$$

Dari kondisi awal (3.2) diketahui $C(x, 0) = 0$, sehingga kondisi awalnya dapat diperoleh

$$V(x, 0) = -C(x) \quad (3.13)$$

Langkah selanjutnya, $V(x, t)$ dapat diperoleh dengan cara menyelesaikan persamaan (3.11). Persamaan (3.11) dapat diklasifikasikan sebagai persamaan diferensial parsial homogen orde dua. Dikarenakan persamaan (3.11) mempunyai kondisi batas homogen, maka untuk menyelesaikanya dapat digunakan metode pemisahan variabel, sehingga dimisalkan

$$V(x, t) = T(t)X(x) \quad (3.14)$$

sebagai solusi dari persamaan (3.11). Fungsi $X(x)$ merupakan fungsi eigen yang memuat variabel x , sedangkan fungsi $T(t)$ adalah fungsi eigen yang memuat variabel t .

Dikarenakan fungsi V memuat dua variabel x dan t , maka berdasarkan notasi persamaan diferensial parsial, penulisan turunan fungsi V terhadap variabel t dinotasikan dengan $\frac{\partial V(x,t)}{\partial t}$ atau dapat ditulis $V_t(x, t)$, dan seterusnya. Karena fungsi X hanya memuat variabel x dan fungsi T hanya memuat variabel t saja, maka berdasarkan teorema 2.1, masing-masing turunan dari persamaan (3.16) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$V_t(x, t) = T'(t)X(x) \quad (3.15)$$

$$V_x(x, t) = T(t)X'(x) \quad (3.16)$$

$$V_{xx}(x, t) = T(t)X''(x) \quad (3.17)$$

Selanjutnya, dengan mensubstitusikan persamaan (3.14) sampai dengan (3.17) pada persamaan (3.11), maka dapat diperoleh

$$T'(t)X(x) = DT(t)X''(x) - UT(t)X'(x) - \gamma T(t)X(x)$$

Kemudian kedua ruas kiri dan kanan dibagi dengan $T(t)X(x)$, sehingga dapat diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{T'(t)}{T(t)} &= D \frac{X''(x)}{X(x)} - U \frac{X'(x)}{X(x)} - \gamma \\ \frac{T'(t)}{T(t)} + \gamma &= D \frac{X''(x)}{X(x)} - U \frac{X'(x)}{X(x)} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Pada persamaan (3.18), ruas kiri hanya bergantung pada variabel t , sedangkan ruas kanan hanya bergantung pada variabel x . Sehingga kondisi tersebut hanya dapat dipenuhi apabila kedua ruas bernilai konstanta yang tidak bergantung pada variabel t dan x . Misalkan konstanta yang dimaksud adalah λ , maka persamaan (3.18) dapat ditulis menjadi

$$\frac{T'(t)}{T(t)} + \gamma = D \frac{X''(x)}{X(x)} - U \frac{X'(x)}{X(x)} = \lambda$$

Dari penjelasan pada bab dua, dapat diketahui bahwa λ merupakan konstanta pemisahan atau dapat juga disebut dengan nilai eigen. Dengan demikian, masing-masing fungsi $X(x)$ dan $T(t)$ dapat diselesaikan secara terpisah seperti berikut.

$$D \frac{X''(x)}{X(x)} - U \frac{X'(x)}{X(x)} = \lambda$$

$$DX''(x) - UX'(x) - \lambda X(x) = 0 \quad (3.19)$$

dan

$$\frac{T'(t)}{T(t)} + \gamma = \lambda$$

$$T'(t) - (\lambda - \gamma)T(t) = 0 \quad (3.20)$$

Persamaan (3.19) merupakan persamaan diferensial biasa homogen orde dua, sedangkan persamaan (3.20) merupakan persamaan diferensial biasa homogen orde satu. Dikarenakan λ adalah suatu konstanta, maka λ dapat bernilai nol, positif, atau negatif, secara terurut dinotasikan dengan $\lambda = 0$, $\lambda > 0$, atau $\lambda < 0$. Sehingga untuk menentukan solusi dari persamaan (3.19) dan (3.20), ditentukan terlebih dahulu nilai λ yang memenuhi kedua fungsi eigen $X(x)$ dan $T(t)$. Untuk $\lambda = 0$, maka persamaan (3.19) menjadi

$$DX''(x) - UX'(x) = 0 \quad (3.21)$$

Berdasarkan teorema 2.3, persamaan (3.21) mempunyai persamaan karakteristik

$$Dr^2 - Ur = 0$$

Persamaan tersebut merupakan bentuk umum dari persamaan kuadrat, sehingga persamaan tersebut dapat dipenuhi apabila akar-akarnya adalah $r_1 = 0$ dan $r_2 = \frac{U}{D}$. Dengan demikian, persamaan karakteristik tersebut mempunyai akar-akar real berbeda. Berdasarkan teorema 2.4, solusi persamaan (3.21) yaitu

$$X(x) = m_1 e^0 + m_2 e^{\frac{U}{D}x}$$

$$X(x) = m_1 + m_2 e^{\frac{U}{D}x} \quad (3.22)$$

Dengan menggunakan kondisi batas homogen (3.12) pada persamaan (3.22), maka pada saat $x = 0$ diperoleh

$$X(0) = m_1 + m_2 e^0$$

$$0 = m_1 + m_2$$

$$m_1 = -m_2$$

Karena $m_1 = -m_2$, maka pada saat $x = l$ dapat diperoleh

$$X(l) = -m_2 + m_2 e^{\frac{U}{D}l}$$

$$0 = \left(-1 + e^{\frac{U}{D}l}\right) m_2$$

Pada kondisi tersebut, terdapat dua kemungkinan yang dapat dipenuhi, yaitu nilai $m_2 = 0$ atau $\left(-1 + e^{\frac{U}{D}l}\right) = 0$. Kedua kondisi tersebut hanya dapat dipenuhi apabila nilai $l = 0$. Dari kedua kondisi tersebut dapat diketahui untuk $\lambda = 0$ mengakibatkan solusi $X(x)$ pada persamaan (3.22) adalah nol (*trivial solution*).

Selanjutnya, untuk $\lambda > 0$ dimisalkan $\lambda = \beta^2$, maka persamaan (3.19) menjadi seperti berikut.

$$DX''(x) - UX'(x) - \beta^2 X(x) = 0 \quad (3.23)$$

Berdasarkan teorema 2.3, persamaan (3.23) mempunyai persamaan karakteristik seperti berikut.

$$Dr^2 - Ur - \beta^2 = 0$$

Persamaan tersebut merupakan bentuk umum dari persamaan kuadrat, sehingga persamaan tersebut dapat dipenuhi apabila akar-akarnya adalah $r_1 = \frac{U + \sqrt{U^2 + 4D\beta^2}}{2D}$

dan $r_2 = \frac{U - \sqrt{U^2 + 4D\beta^2}}{2D}$. Karena nilai U^2 dan β^2 selalu bernilai positif, maka $U^2 + 4D\beta^2$ bernilai positif apabila $D > 0$ dan $U^2 > -4|D|\beta^2$. Berdasarkan teorema 2.4, maka solusi $X(x)$ pada kondisi $U^2 + 4D\beta^2 > 0$ yaitu

$$X(x) = m_3 e^{\left(\frac{U + \sqrt{U^2 + 4|D|\beta^2}}{2D}\right)x} + m_4 e^{\left(\frac{U - \sqrt{U^2 + 4|D|\beta^2}}{2D}\right)x} \quad (3.24)$$

Kemudian dengan menggunakan kondisi batas homogen (3.12) pada persamaan (3.24), maka pada saat $x = 0$ diperoleh:

$$X(0) = m_3 e^0 + m_4 e^0$$

Diketahui kondisi batas $X(0) = 0$, sehingga persamaan tersebut menjadi

$$0 = m_3 + m_4$$

$$m_3 = -m_4$$

Karena $m_3 = -m_4$, maka kondisi pada saat $x = l$ dapat diperoleh

$$X(l) = -m_4 e^{\left(\frac{U + \sqrt{U^2 + 4|D|\beta^2}}{2D}\right)l} + m_4 e^{\left(\frac{U + \sqrt{U^2 + 4|D|\beta^2}}{2D}\right)l}$$

$$0 = m_4 \left(-e^{\left(\frac{U + \sqrt{U^2 + 4|D|\beta^2}}{2D}\right)l} + e^{\left(\frac{U + \sqrt{U^2 + 4|D|\beta^2}}{2D}\right)l} \right)$$

Pada kondisi tersebut, terdapat dua kemungkinan yang dapat dipenuhi, yaitu nilai

$$m_4 = 0 \text{ atau } -e^{\left(\frac{U + \sqrt{U^2 + 4|D|\beta^2}}{2D}\right)l} + e^{\left(\frac{U + \sqrt{U^2 + 4|D|\beta^2}}{2D}\right)l} = 0. \text{ Andaikan } m_4 \neq 0, \text{ maka}$$

kondisi tersebut hanya dapat terpenuhi apabila nilai $l = 0$. Dengan demikian solusi $X(x)$ hanya pada interval $0 < x < 0$, sehingga dapat diperoleh solusi $X(x)$ adalah nol. Dengan demikian pengandaian salah, sehingga $m_4 = 0$. Dari kedua kondisi tersebut, dapat diketahui bahwa solusi $X(x)$ pada persamaan (3.24) adalah nol (*trivial solution*). Selanjutnya berdasarkan Lampiran 4, dapat diketahui apabila $U^2 + 4D\beta^2 = 0$, maka dapat diperoleh solusi $X(x)$ adalah nol (*trivial solution*), sedangkan apabila $U^2 + 4D\beta^2 < 0$ mengakibatkan nilai eigen $\lambda > 0$ tidak memenuhi kedua fungsi eigen $X(x)$ dan $T(t)$. Dengan demikian, nilai eigen yang positif atau $\lambda > 0$ tidak memenuhi kedua fungsi eigen.

Untuk $\lambda < 0$ dimisalkan $\lambda = -\beta^2$, maka persamaan (3.19) menjadi seperti berikut.

$$DX''(x) - UX'(x) + \beta^2 X(x) = 0 \quad (3.25)$$

Berdasarkan teorema 2.3, persamaan (3.25) mempunyai persamaan karakteristik

$$Dr^2 - Ur + \beta^2 = 0$$

Persamaan tersebut merupakan bentuk umum dari persamaan kuadrat, sehingga

persamaan tersebut dapat dipenuhi apabila akar-akarnya adalah $r_1 = \frac{U + \sqrt{U^2 - 4D\beta^2}}{2D}$

dan $r_2 = \frac{U - \sqrt{U^2 - 4D\beta^2}}{2D}$. Apabila $U^2 + 4D\beta^2 > 0$, maka seperti persamaan (3.24)

dapat diperoleh solusi $X(x)$ adalah nol (*trivial solution*). Apabila $U^2 + 4D\beta^2 = 0$, maka seperti pada Lampiran 4, dapat diperoleh solusi $X(x)$ juga nol (*trivial solution*).

Selanjutnya, karena U^2 dan β^2 selalu bernilai positif, maka kondisi $U^2 - 4D\beta^2$ bernilai negatif apabila $D > 0$ dan $U^2 < 4|D|\beta^2$. Dengan demikian, $U^2 - 4D\beta^2 = -(4|D|\beta^2 - U^2)$ dapat menjamin nilai $U^2 - 4D\beta^2 < 0$. Sehingga akar-akar persamaan tersebut menjadi $r_{1,2} = \frac{U \pm \sqrt{-(4|D|\beta^2 - U^2)}}{2D} = \frac{U \pm i\sqrt{(4|D|\beta^2 - U^2)}}{2D}$.

Berdasarkan teorema 2.6, maka solusi $X(x)$ pada kondisi $U^2 - 4D\beta^2 < 0$ yaitu

$$\begin{aligned} X(x) = & m_5 e^{\frac{U}{2D}x} \cos\left(\frac{\sqrt{(4|D|\beta^2 - U^2)}}{2D}x\right) \dots \\ & + m_6 e^{\frac{U}{2D}x} \sin\left(\frac{\sqrt{(4|D|\beta^2 - U^2)}}{2D}x\right) \end{aligned} \quad (3.26)$$

Kemudian dengan menggunakan kondisi batas homogen (3.12) pada persamaan

(3.26), maka pada saat $x = 0$ diperoleh

$$X(0) = m_5 e^0 \cos(0) + m_6 e^0 \sin(0)$$

$$0 = m_5$$

Karena $m_5 = 0$, maka kondisi pada saat $x = l$ dapat diperoleh

$$X(l) = m_6 e^{\frac{U}{2D}l} \sin\left(\frac{\sqrt{(4|D|\beta^2 - U^2)}}{2D}l\right)$$

$$0 = m_6 e^{\frac{U}{2D}l} \sin\left(\frac{\sqrt{(4|D|\beta^2 - U^2)}}{2D}l\right)$$

Kemudian kedua ruas kiri dan kanan pada persamaan tersebut dibagi dengan $e^{\frac{U}{2D}l}$, maka diperoleh

$$0 = m_6 \sin\left(\frac{\sqrt{(4|D|\beta^2 - U^2)}}{2D}l\right)$$

Kondisi tersebut dapat dipenuhi apabila nilai $m_6 = 0$ atau $\sin\left(\frac{\sqrt{(4|D|\beta^2 - U^2)}}{2D}l\right) =$

0. Andaikan dipilih $m_6 = 0$, maka solusinya adalah nol. sehingga yang memenuhi adalah $m_6 \neq 0$ dan

$$\sin\left(\frac{\sqrt{(4|D|\beta^2 - U^2)}}{2D}l\right) = 0$$

Fungsi $\sin\left(\frac{\sqrt{(4|D|\beta^2 - U^2)}}{2D}l\right)$ akan bernilai nol apabila $\frac{\sqrt{(4|D|\beta^2 - U^2)}}{2D}l = n\pi$, untuk n

menuju tak hingga ($n = 1, 2, 3, \dots$). Dengan demikian diperoleh

$$\frac{\sqrt{(4|D|\beta^2 - U^2)}}{2D}l = n\pi$$

$$\sqrt{(4|D|\beta^2 - U^2)} = \frac{2n\pi D}{l}$$

$$4|D|\beta^2 = \left(\frac{2n\pi D}{l}\right)^2 + U^2$$

Dari persamaan di atas, maka nilai β disederhanakan menjadi

$$\beta = \sqrt{\frac{(2n\pi D)^2 + U^2 l^2}{4|D|l^2}}$$

Dengan demikian, dapat diperoleh $m_6 \neq 0$, $m_5 = 0$, dan $\beta = \sqrt{\frac{(2n\pi D)^2 + U^2 l^2}{4|D|l^2}}$.

Kemudian dengan mensubstitusikan masing-masing nilai tersebut pada persamaan (3.26), maka dapat diperoleh

$$\begin{aligned} X(x) &= m_6 e^{\frac{U}{2D}x} \sin\left(\frac{\sqrt{\left(4|D|\left(\frac{(2n\pi D)^2 + U^2 l^2}{4|D|l^2}\right) - U^2\right)}}{2D}x\right) \\ &= m_6 e^{\frac{U}{2D}x} \sin\left(\frac{\sqrt{\left(\frac{(2n\pi D)^2}{l^2} + U^2\right) - U^2}}{2D}x\right) \end{aligned}$$

Solusi $X(x)$ dapat disederhanakan menjadi

$$X(x) = m_6 e^{\frac{U}{2D}x} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad (3.27)$$

Langkah selanjutnya mencari solusi $T(t)$ dengan cara menyelesaikan persamaan (3.20). Dikarenakan konstanta yang memenuhi fungsi eigen $X(x)$ adalah $\lambda = -\beta^2$, maka persamaan (3.20) menjadi seperti berikut.

$$T'(t) - (-\beta^2 - \gamma)T(t) = 0$$

Berdasarkan definisi terkait penulisan operator diferensial biasa, maka persamaan tersebut dapat ditulis menjadi

$$\frac{dT(t)}{dt} + (\beta^2 + \gamma)T(t) = 0$$

$$\frac{dT(t)}{dt} = -(\beta^2 + \gamma)T(t)$$

Selanjutnya kedua ruas dari persamaan tersebut dikalikan dengan $\frac{dt}{T(t)}$, kemudian dengan mengintegrasikan kedua ruas kiri dan kanan, maka dapat diperoleh

$$\int \frac{dT(t)}{T(t)} = \int -(\beta^2 + \gamma)dt$$

$$\ln(T(t)) = -(\beta^2 + \gamma)t + m_7$$

$$T(t) = e^{-(\beta^2 + \gamma)t + m_7}$$

dengan memisalkan konstanta $m_8 = e^{m_7}$, maka persamaan tersebut menjadi

$$T(t) = m_8 e^{-(\beta^2 + \gamma)t}$$

Dikarenakan $\beta = \sqrt{\frac{(2n\pi D)^2 + U^2 l^2}{4|D|l^2}}$, maka solusinya adalah

$$T(t) = m_8 e^{-\left(\frac{(2n\pi D)^2 + U^2 l^2}{4|D|l^2} + \gamma\right)t} \quad (3.28)$$

Setelah solusi $X(x)$ dan $T(t)$ diperoleh, maka solusi $V(x, t)$ dapat diperoleh dengan mensubstitusikan masing-masing persamaan (3.27) dan (3.28) pada persamaan (3.14). Karena solusi $X(x)$ dan $T(t)$ bergantung pada nilai n , maka solusi $V(x, t)$ juga bergantung pada nilai n atau ditulis $V_n(x, t)$. Selain itu, terdapat juga konstanta yang bergantung pada banyaknya n . Sehingga solusinya dapat diperoleh seperti berikut.

$$V_n(x, t) = E_n e^{-\left(\frac{(2n\pi D)^2 + U^2 l^2}{4|D|l^2} + \gamma\right)t} e^{\frac{U}{2D}x} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad \forall E_n = m_8 m_6$$

Untuk setiap n menuju tak hingga ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$), maka terdapat suatu konstanta E_n yang selalu berubah-ubah mengikuti banyaknya n . Dikarenakan jumlah dari solusi juga merupakan solusi, maka $V_n(x, t)$ juga merupakan solusi dari persamaan (3.13). Sehingga solusi $V(x, t)$ dapat ditulis menjadi

$$V(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n e^{-\left(\frac{(2n\pi D)^2 + U^2 l^2}{4|D|l^2} + \gamma\right)t} e^{\frac{U}{2D}x} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

E_n merupakan suatu nilai yang dapat diperoleh dengan cara mensubstitusikan kondisi awal pada saat $t = 0$. Dari persamaan tersebut, dapat diketahui pada saat $n = 0$, mengakibatkan nilai dari $\sin(0) = 0$, sehingga solusi $V(x, t) = 0$. Dengan

demikian, pada saat $n = 0$ nilai E_0 tidak mempengaruhi hasil dari penjumlahannya, maka solusinya diperoleh

$$V(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n e^{-\left(\frac{(2n\pi D)^2 + U^2 l^2}{4|D|l^2} + \gamma\right)t} e^{\frac{U}{2D}x} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad (3.29)$$

Dari persamaan (3.29), dapat diketahui bahwa solusi $V(x, t)$ memuat suatu konstanta E_n , yang nilainya berubah-ubah bergantung pada nilai n . Kemudian untuk menentukan nilai dari E_n pada persamaan (3.29), maka digunakan kondisi awal pada saat $t = 0$. Dengan demikian diperoleh

$$V(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n e^0 e^{\frac{U}{2D}x} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

$$V(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n e^{\frac{U}{2D}x} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Selanjutnya, dengan mensubstitusikan kondisi awal (3.13) pada persamaan di atas, maka dapat diperoleh

$$-C(x) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n e^{\frac{U}{2D}x} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad (3.30)$$

Apabila kedua ruas kiri dan kanan dikalikan dengan $e^{-\left(\frac{U}{2D}x\right)}$, maka persamaan (3.30) dapat disederhanakan menjadi

$$-C(x) e^{-\left(\frac{U}{2D}x\right)} = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Pada persamaan di atas, berdasarkan definisi deret Fourier dapat diketahui bahwa E_n merupakan koefisien deret Fourier. Kemudian dengan cara yang sama seperti pada persamaan (2.13) sampai dengan persamaan (2.17), maka nilai E_n dapat diperoleh dengan cara seperti berikut.

$$E_n = \frac{2}{l} \int_0^l -C(x) e^{-\left(\frac{U}{2D}x\right)} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx$$

$$E_n = -\frac{2}{l} \int_0^l C(x) e^{-\left(\frac{U}{2D}x\right)} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \quad (3.31)$$

Diketahui masing-masing persamaan (3.7), (3.9), dan (3.10) merupakan solusi $C(x)$. Sehingga untuk menentukan nilai E_n dapat dilakukan dengan cara mensubstitusikan masing-masing persamaan (3.7), (3.9) dan (3.10) pada persamaan (3.31).

Pertama, dengan mensubstitusikan persamaan (3.7) pada persamaan (3.31), maka persamaan (3.31) pada kondisi $U^2 + 4D\gamma > 0$ diperoleh

$$E_n = -\frac{2}{l} \int_0^l \left(k_1 e^{\left(\frac{U+\sqrt{U^2+4D\gamma}}{2D}\right)x} + k_2 e^{\left(\frac{U-\sqrt{U^2+4D\gamma}}{2D}\right)x} \right) e^{-\left(\frac{U}{2D}x\right)} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx$$

$$= -\frac{2}{l} \int_0^l \left(k_1 e^{\left(\frac{\sqrt{U^2+4D\gamma}}{2D}\right)x} + k_2 e^{\left(\frac{-\sqrt{U^2+4D\gamma}}{2D}\right)x} \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx$$

untuk menyederhanakan penulisan, dimisalkan $A_1 = \frac{\sqrt{U^2+4D\gamma}}{2D}$, sehingga persamaan tersebut menjadi

$$E_n = \frac{2}{l} \int_0^l (k_1 e^{A_1 x} + k_2 e^{-A_1 x}) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx$$

$$E_n = -\frac{2}{l} k_1 \int_0^l e^{A_1 x} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx - \frac{2}{l} k_2 \int_0^l e^{-A_1 x} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \quad (3.32)$$

Sehingga integral dari masing-masing fungsi tersebut dapat dihitung secara terpisah dengan cara mencari $\int_0^l e^{-A_1 x} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx$ terlebih dahulu. Berdasarkan teorema 2.7, maka integral parsial dari kedua fungsi tersebut adalah

$$\int_0^l e^{-A_1 x} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = - \left[\frac{le^{-A_1 x} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}{n\pi} \right]_0^l - \frac{lA_1}{n\pi} \int_0^l e^{-A_1 x} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx$$

Dari persamaan tersebut, dapat diketahui bahwa hasil integral parsial dari perkalian fungsi sinus dengan fungsi eksponen masih terdapat integral parsial perkalian fungsi cosinus dan eksponen, sehingga perlu diintegrasikan kembali sampai hasil integralnya kembali ke bentuk integral parsial fungsi sinus dengan fungsi eksponen seperti berikut.

$$\int_0^l e^{-A_1 x} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = - \left[\frac{le^{-A_1 x} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}{n\pi} \right]_0^l - \left[\frac{l^2 A_1 e^{-A_1 x} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}{(n\pi)^2} \right]_0^l \dots$$

$$- \frac{(lA_1)^2}{(n\pi)^2} \int_0^l e^{-A_1 x} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx$$

Kemudian dengan mengumpulkan setiap suku yang memuat integral, maka diperoleh

$$\left(1 + \frac{(lA_1)^2}{(n\pi)^2}\right) \int_0^l e^{-A_1 x} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = - \left[\frac{le^{-A_1 x} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}{n\pi} \right]_0^l \dots$$

$$- \left[\frac{l^2 A_1 e^{-A_1 x} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}{(n\pi)^2} \right]_0^l$$

$$\left(\frac{(n\pi)^2 + (lA_1)^2}{(n\pi)^2}\right) \int_0^l e^{-A_1 x} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = - \left[\frac{le^{-A_1 x} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}{n\pi} \right]_0^l \dots$$

$$- \left[\frac{l^2 A_1 e^{-A_1 x} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}{(n\pi)^2} \right]_0^l$$

Apabila kedua ruas kiri dan kanan dikalikan dengan $\frac{(n\pi)^2}{(n\pi)^2 + (lA_1)^2}$, maka persamaan tersebut dapat disederhanakan menjadi

$$\int_0^l e^{-A_1 x} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = \left[\frac{-l(n\pi)e^{-A_1 x} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) - l^2 A_1 e^{-A_1 x} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}{(n\pi)^2 + (lA_1)^2} \right]_0^l$$

Kemudian dengan memasukkan batas interval $x = 0$ sampai dengan $x = l$, maka dapat diperoleh

$$\int_0^l e^{-A_1 x} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = \frac{-l(n\pi)e^{-A_1 l} \cos(n\pi) - l^2 A_1 e^{-A_1 l} \sin(n\pi)}{(n\pi)^2 + (lA_1)^2} \dots (3.33)$$

$$+ \frac{l(n\pi)}{(n\pi)^2 + (lA_1)^2}$$

selanjutnya dicari $\int_0^l e^{A_1 x} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx$. Berdasarkan teorema 2.7, maka integral parsial dari kedua fungsi tersebut adalah

$$\int_0^l e^{A_1 x} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = - \left[\frac{le^{A_1 x} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}{n\pi} \right]_0^l + \frac{lA_1}{n\pi} \int_0^l e^{A_1 x} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx$$

Dari persamaan tersebut, dapat diketahui bahwa hasil integral parsial dari perkalian fungsi sinus dengan fungsi eksponen masih terdapat integral parsial perkalian fungsi cosinus dan eksponen, sehingga perlu diintegrasikan kembali, sampai hasil integralnya kembali ke bentuk integral parsial fungsi sinus dengan fungsi eksponen. Kemudian dengan cara yang sama, maka masing-masing suku yang memuat integral dikumpulkan seperti berikut.

$$\left(\frac{(n\pi)^2 + (lA_1)^2}{(n\pi)^2}\right) \int_0^l e^{A_1 x} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = - \left[\frac{l e^{A_1 x} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}{n\pi} \right]_0^l \dots$$

$$+ \left[\frac{l^2 A_1}{(n\pi)^2} e^{-A_1 x} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right]_0^l$$

Apabila kedua ruas kiri dan kanan dikalikan dengan $\frac{(n\pi)^2}{(n\pi)^2 + (lA_1)^2}$, maka persamaan tersebut dapat disederhanakan menjadi

$$\int_0^l e^{A_1 x} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = \left[\frac{-l(n\pi) e^{A_1 x} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + A_1 e^{A_1 x} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}{(n\pi)^2 + (lA_1)^2} \right]_0^l$$

Kemudian dengan memasukkan batas interval $x = 0$ sampai dengan $x = l$, maka dapat diperoleh

$$\int_0^l e^{A_1 x} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = \frac{-l(n\pi) e^{A_1 l} \cos(n\pi) + l^2 A_1 e^{A_1 l} \sin(n\pi)}{(n\pi)^2 + (lA_1)^2} \dots \quad (3.34)$$

$$+ \frac{l(n\pi)}{(n\pi)^2 + (lA_1)^2}$$

Selanjutnya, dengan mensubstitusikan masing-masing integral (3.33) dan (3.34) pada persamaan (3.32), maka dapat diperoleh

$$E_n = -\frac{2}{l} k_1 \left(\frac{-l(n\pi) e^{A_1 l} \cos(n\pi) + l^2 A_1 e^{A_1 l} \sin(n\pi)}{(n\pi)^2 + (lA_1)^2} + \frac{l(n\pi)}{(n\pi)^2 + (lA_1)^2} \right) \dots$$

$$- \frac{2}{l} k_2 \left(\frac{-l(n\pi) e^{-A_1 l} \cos(n\pi) - l^2 A_1 e^{-A_1 l} \sin(n\pi)}{(n\pi)^2 + (lA_1)^2} + \frac{l(n\pi)}{(n\pi)^2 + (lA_1)^2} \right)$$

Dikarenakan nilai dari $\sin(n\pi) = 0$, maka persamaan tersebut dapat disederhanakan menjadi

$$E_n = \frac{2n\pi \left(k_1 (e^{A_1 l} \cos(n\pi) - 1) + k_2 (e^{-A_1 l} \cos(n\pi) - 1) \right)}{(n\pi)^2 + (lA_1)^2}$$

Kedua, dengan mensubstitusikan persamaan (3.9) pada persamaan (3.31), maka persamaan (3.31) pada kondisi $U^2 + 4D\gamma = 0$ dapat diperoleh

$$\begin{aligned} E_n &= -\frac{2}{l} \int_0^l \left(C_{in} e^{\frac{U}{2D}x} - \frac{C_{in}}{l} x e^{\frac{U}{2D}x} \right) e^{-\left(\frac{U}{2D}x\right)} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \\ &= -\frac{2}{l} \int_0^l \left(C_{in} - \frac{C_{in}}{l} x \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \end{aligned}$$

integral tersebut dapat dijabarkan menjadi

$$\begin{aligned} E_n &= -\frac{2}{l} C_{in} \int_0^l \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx + \frac{2C_{in}}{l^2} \int_0^l x \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \\ &= \frac{2}{l} C_{in} \left[\frac{l \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}{n\pi} \right]_0^l - \frac{2C_{in}}{l^2} \left(\left[\frac{lx \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}{n\pi} \right]_0^l - \frac{l}{n\pi} \int_0^l \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \right) \\ &= \frac{2}{l} C_{in} \left[\frac{l \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}{n\pi} \right]_0^l - \frac{2C_{in}}{l^2} \left(\left[\frac{lx \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}{n\pi} \right]_0^l - \left[\frac{l^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}{(n\pi)^2} \right]_0^l \right) \end{aligned}$$

Kemudian dengan memasukkan batas interval $x = 0$ sampai dengan $x = l$, maka dapat diperoleh

$$E_n = \frac{2}{l} C_{in} \left(\frac{l \cos(n\pi)}{n\pi} - \frac{l}{n\pi} \right) - \frac{2C_{in}}{l^2} \left(\frac{l^2 \cos(n\pi)}{n\pi} - \frac{l^2 \sin(n\pi)}{(n\pi)^2} \right)$$

Dikarenakan nilai $\sin(n\pi) = 0$, maka nilai E_n dapat disederhanakan menjadi seperti berikut.

$$E_n = -\frac{2C_{in}}{n\pi}$$

Langkah selanjutnya, dengan mensubstitusikan persamaan (3.10) pada persamaan (3.31), maka persamaan (3.31) pada kondisi $U^2 + 4D\gamma < 0$ dapat diperoleh

$$\begin{aligned}
E_n &= -\frac{2}{l} \int_0^l \left(k_5 e^{\frac{U}{2D}x} \cos\left(\frac{\sqrt{|U^2 + 4D\gamma|}}{2D} x\right) \right) e^{-\left(\frac{U}{2D}x\right)} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \dots \\
&\quad - \frac{2}{l} \int_0^l \left(k_6 e^{\frac{U}{2D}x} \cos\left(\frac{\sqrt{|U^2 + 4D\gamma|}}{2D} x\right) \right) e^{-\left(\frac{U}{2D}x\right)} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \\
&= -\frac{2}{l} \int_0^l k_5 \cos\left(\frac{\sqrt{|U^2 + 4D\gamma|}}{2D} x\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \dots \\
&\quad - \frac{2}{l} \int_0^l k_6 \cos\left(\frac{\sqrt{|U^2 + 4D\gamma|}}{2D} x\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx
\end{aligned}$$

untuk menyederhanakan penulisan, dimisalkan $A_2 = \frac{\sqrt{|U^2 + 4D\gamma|}}{2D}$, maka persamaan tersebut menjadi

$$E_n = -\frac{2}{l} k_5 \int_0^l \cos(A_2 x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx - \frac{2}{l} k_6 \int_0^l \sin(A_2 x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \quad (3.35)$$

Sehingga integral dari masing-masing fungsi tersebut dapat dihitung secara terpisah, dengan cara mencari $\int_0^l \cos(A_2 x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx$ terlebih dahulu, dengan menggunakan identitas trigonometri, perkalian sinus dan cosinus yang mempunyai dua sudut yang berbeda dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\int_0^l \cos(A_2 x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx &= \int_0^l \frac{1}{2} \left(\sin\left(A_2 x + \frac{n\pi x}{l}\right) - \sin\left(A_2 x - \frac{n\pi x}{l}\right) \right) dx \\
&= \int_0^l \frac{1}{2} \left(\sin\left(\frac{(A_2 l + n\pi)x}{l}\right) - \sin\left(\frac{(A_2 l - n\pi)x}{l}\right) \right) dx \\
&= -\frac{1}{2} \left[\frac{l}{(A_2 l + n\pi)} \cos\left(\frac{(A_2 l + n\pi)x}{l}\right) \right]_0^l \dots \\
&\quad + \frac{1}{2} \left[\frac{l}{(A_2 l - n\pi)} \cos\left(\frac{(A_2 l - n\pi)x}{l}\right) \right]_0^l
\end{aligned}$$

Kemudian dengan memasukkan batas interval $x = 0$ sampai dengan $x = l$, maka persamaan tersebut dapat disederhanakan menjadi

$$\int_0^l \cos(A_2 x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = -\frac{l}{2(A_2 l + n\pi)} (\cos(A_2 l + n\pi) - 1) \dots \quad (3.36)$$

$$+ \frac{l}{2(A_2 l - n\pi)} (\cos(A_2 l - n\pi) - 1)$$

Selanjutnya dicari $\int_0^l \sin(A_2 x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx$, dengan menggunakan identitas trigonometri, maka integral sinus yang mempunyai dua sudut berbeda dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\int_0^l \sin(A_2 x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = \int_0^l \frac{1}{2} \left(\cos\left(A_2 x - \frac{n\pi x}{l}\right) - \cos\left(A_2 x + \frac{n\pi x}{l}\right) \right) dx$$

$$= \int_0^l \frac{1}{2} \left(\cos\left(\frac{(A_2 l - n\pi)x}{l}\right) - \cos\left(\frac{(A_2 l + n\pi)x}{l}\right) \right) dx$$

$$= -\frac{1}{2} \left[\frac{l}{(A_2 l - n\pi)} \sin\left(\frac{(A_2 l - n\pi)x}{l}\right) \right]_0^l \dots$$

$$- \frac{1}{2} \left[\frac{l}{(A_2 l + n\pi)} \sin\left(\frac{(A_2 l + n\pi)x}{l}\right) \right]_0^l$$

Kemudian dengan memasukkan batas interval $x = 0$ sampai dengan $x = l$, maka persamaan tersebut dapat disederhanakan menjadi

$$\int_0^l \sin(A_2 x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = \frac{l}{2} \left(\frac{(\sin(A_2 l - n\pi))}{(A_2 l - n\pi)} - \frac{(\sin(A_2 l + n\pi))}{(A_2 l + n\pi)} \right) \quad (3.37)$$

Masing-masing integral (3.36) dan (3.37) disubstitusikan pada persamaan (3.35), maka dapat diperoleh

$$E_n = \frac{k_5((\cos(A_2 l + n\pi) - 1)) + k_6(\sin(A_2 l + n\pi))}{(A_2 l + n\pi)} \dots$$

$$- \frac{k_5((\cos(A_2 l - n\pi) - 1)) + k_6(\sin(A_2 l - n\pi))}{(A_2 l - n\pi)}$$

Setelah diperoleh $C(x)$ dan $V(x,t)$ pada subbab 3.1.1 dan 3.1.2, maka langkah selanjutnya yaitu menentukan $C(x,t)$. Untuk menentukan $C(x,t)$, dapat dilakukan dengan cara mensubstitusikan kembali masing-masing solusi $C(x)$ dan $V(x,t)$ pada persamaan (3.3). Pada subbab sebelumnya, diketahui bahwa masing-masing solusi $C(x)$ mempunyai bentuk yang berbeda sesuai dengan akar-akar persamaan karakteristiknya. Dengan demikian, solusi $C(x,t)$ dapat diperoleh sebagai berikut:

- a. Apabila nilai $U^2 + 4D\gamma > 0$, maka solusi persamaan keseimbangan massa reaktor yaitu

$$C(x,t) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} E_n e^{-\left(\frac{(2n\pi D)^2 + U^2 l^2}{4|D|l^2} + \gamma\right)t} e^{\frac{U}{2D}x} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right) \dots \quad (3.38)$$

$$+ k_1 e^{\left(\frac{U + \sqrt{U^2 + 4D\gamma}}{2D}\right)x} + k_2 e^{\left(\frac{U - \sqrt{U^2 + 4D\gamma}}{2D}\right)x}$$

$$\text{dengan } E_n = \frac{2n\pi(k_1(e^{A_1 l} \cos(n\pi) - 1) + k_2(e^{-A_1 l} \cos(n\pi) - 1))}{(n\pi)^2 + (A_1)^2}, \quad A_1 = \frac{\sqrt{U^2 + 4D\gamma}}{2D},$$

$$\text{serta } k_1 = \frac{C_{in} e^{\left(\frac{U - \sqrt{U^2 + 4D\gamma}}{2D}\right)l}}{\left(e^{\left(\frac{U - \sqrt{U^2 + 4D\gamma}}{2D}\right)l} - e^{\left(\frac{U + \sqrt{U^2 + 4D\gamma}}{2D}\right)l} \right)},$$

$$\text{dan } k_2 = \frac{-C_{in} e^{\left(\frac{U + \sqrt{U^2 + 4D\gamma}}{2D}\right)l}}{\left(e^{\left(\frac{U - \sqrt{U^2 + 4D\gamma}}{2D}\right)l} - e^{\left(\frac{U + \sqrt{U^2 + 4D\gamma}}{2D}\right)l} \right)}.$$

- b. Apabila nilai $U^2 + 4D\gamma = 0$, maka solusi persamaan keseimbangan massa reaktor yaitu

$$C(x, t) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} E_n e^{-\left(\frac{(2n\pi D)^2 + U^2 l^2}{4|D|l^2} + \gamma\right)t} e^{\frac{U}{2D}x} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right) \dots \quad (3.39)$$

$$+ C_{in} e^{\frac{U}{2D}x} - \frac{C_{in}}{l} x e^{\frac{U}{2D}x}$$

dengan $E_n = -\frac{2C_{in}}{n\pi}$.

- c. Apabila nilai $U^2 + 4D\gamma < 0$, maka solusi persamaan keseimbangan massa reaktor yaitu:

$$C(x, t) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} E_n e^{-\left(\frac{(2n\pi D)^2 + U^2 l^2}{4|D|l^2} + \gamma\right)t} e^{\frac{U}{2D}x} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right) \dots \quad (3.40)$$

$$+ e^{\frac{U}{2D}x} \left(k_5 \cos\left(\frac{\sqrt{|U^2 + 4D\gamma|}}{2D} x\right) + k_6 \sin\left(\frac{\sqrt{|U^2 + 4D\gamma|}}{2D} x\right) \right)$$

dengan

$$E_n = \frac{k_5((\cos(A_2 l + n\pi) - 1)) + k_6(\sin(A_2 l + n\pi))}{(A_2 l + n\pi)} - \frac{k_5((\cos(A_2 l - n\pi) - 1)) + k_6(\sin(A_2 l - n\pi))}{(A_2 l - n\pi)},$$

serta $A_2 = \frac{\sqrt{|U^2 + 4D\gamma|}}{2D}$, $k_5 = C_{in}$, dan $k_6 = -C_{in} \cot\left(\frac{\sqrt{|U^2 + 4D\gamma|}}{2D} l\right)$.

Untuk mengetahui bahwa persamaan (3.38), (3.39), dan (3.40) merupakan solusi dari persamaan keseimbangan massa reaktor yang mempunyai kondisi awal homogen dan kondisi batas tak homogen (3.2), maka perlu dilakukan analisis terlebih dahulu.

Pertama, diketahui persamaan keseimbangan massa reaktor (3.1) terdiri dari fungsi $C(x, t)$ serta turunan parsial $C(x, t)$. Persamaan keseimbangan massa reaktor merupakan persamaan diferensial parsial homogen. Sehingga untuk menjamin bahwa persamaan (3.38), (3.39), dan (3.40) merupakan solusi dari persamaan keseimbangan massa reaktor, maka masing-masing persamaan (3.38), (3.39), dan (3.40) disubstitusikan pada persamaan (3.1), apabila hasilnya adalah

nol, maka masing-masing persamaan tersebut merupakan solusi dari persamaan (3.1). Berdasarkan Lampiran 5, 6, dan 7, dengan mensubstitusikan masing-masing persamaan (3.38), (3.39), dan (3.40) pada persamaan (3.1), maka dapat diketahui bahwa masing-masing persamaan (3.38), (3.39), dan (3.40) merupakan solusi dari persamaan keseimbangan massa reaktor.

Selanjutnya, diketahui kondisi batas yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan keseimbangan massa reaktor adalah kondisi batas tak homogen, dengan $C(0, t) = C_{in}$ dan $C(l, t) = 0$. Dengan demikian perlu dianalisis pada saat $x = 0$ dan $x = l$ persamaan (3.38), (3.39), dan (3.40) memenuhi kondisi tersebut. Berdasarkan Lampiran 8, 9, dan 10, maka dapat diketahui bahwa masing-masing persamaan (3.38), (3.39), dan (3.40) memenuhi kondisi batas (3.2).

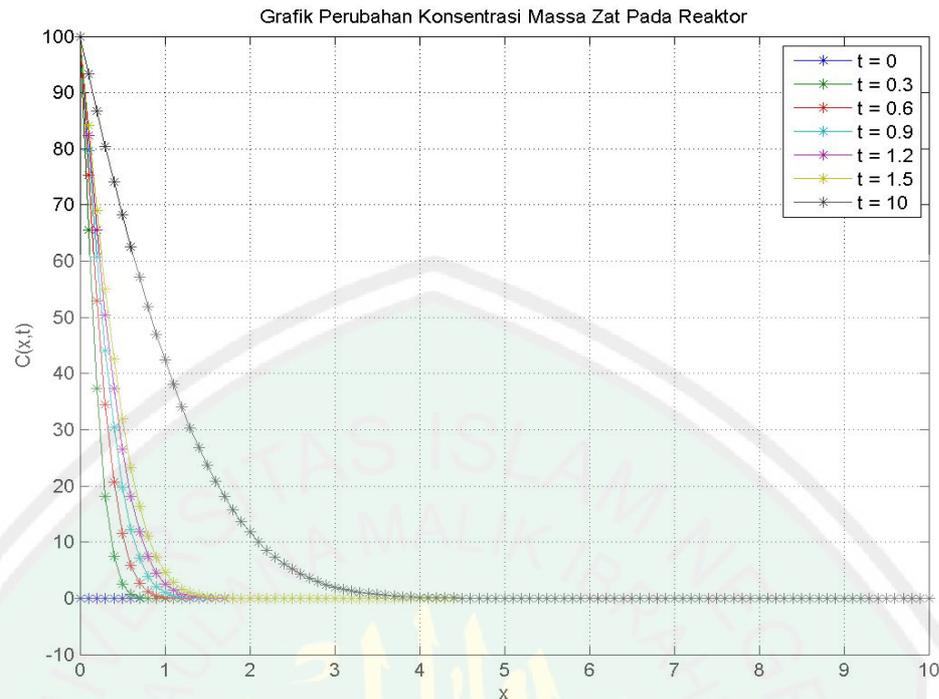
Diketahui juga kondisi awal yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan keseimbangan massa reaktor adalah kondisi awal homogen, yaitu $C(x, 0) = 0$. Dengan demikian perlu dianalisis pada saat $t = 0$ persamaan (3.38), (3.39), dan (3.40) memenuhi kondisi tersebut. Berdasarkan Lampiran 11, 12, dan 13, maka dapat diketahui bahwa masing-masing persamaan (3.38), (3.39), dan (3.40) memenuhi kondisi awal (3.2).

Berdasarkan ketiga kondisi di atas, maka dapat dijamin bahwa persamaan (3.38), (3.39) dan (3.40) merupakan solusi persamaan keseimbangan massa reaktor (3.1) yang mempunyai kondisi awal homogen dan kondisi batas tak homogen (3.2).

3.2 Simulasi Penyelesaian Persamaan Keseimbangan Massa Reaktor

Persamaan keseimbangan massa reaktor merupakan suatu persamaan yang menyatakan jumlah perubahan konsentrasi massa zat yang dipengaruhi oleh perubahan waktu pada suatu sistem tertutup atau reaktor. Kondisi batas (3.2) di atas, menunjukkan bahwa jumlah konsentrasi massa zat yang masuk pada reaktor mengalami proses reaksi, sehingga jumlah konsentrasi massa zat yang keluar dari reaktor berkurang sampai konsentrasinya bernilai nol, atau lebih tepatnya jumlah konsentrasi yang dihasilkan (*output*) sama dengan nol. Dengan demikian, untuk mengetahui jumlah konsentrasi massa zat yang berubah dalam kurun waktu tertentu, maka dapat dilakukan dengan cara menghitung jumlah konsentrasi massa zat melalui solusi persamaan keseimbangan massa reaktor yang telah diperoleh seperti pada subbab sebelumnya.

Dengan demikian untuk mengetahui perubahan massa zat pada suatu reaktor, terlebih dahulu ditentukan masing-masing parameternya. Misalkan masing-masing parameternya ditentukan seperti berikut: $C_{in} = 100 \text{ mol/m}^3$, dengan koefisien penyebaran zat $D = 0,083 \text{ m}^2/\text{det}$, kecepatan fluida yang mengalir pada suatu reaktor $U = 0,008 \text{ m/det}$, dan koefisien massa zat yang bereaksi pada suatu reaktor $\gamma = 0,018 \text{ mol/det}$, akibatnya $U^2 + 4D\gamma > 0$, maka solusi yang digunakan adalah solusi yang persamaan karakteristiknya mempunyai akar-akar real berbeda (3.59). Sehingga perubahan jumlah massa zat pada reaktor sepanjang $x = [0, 10]$ dapat dilihat seperti gambar di bawah ini.



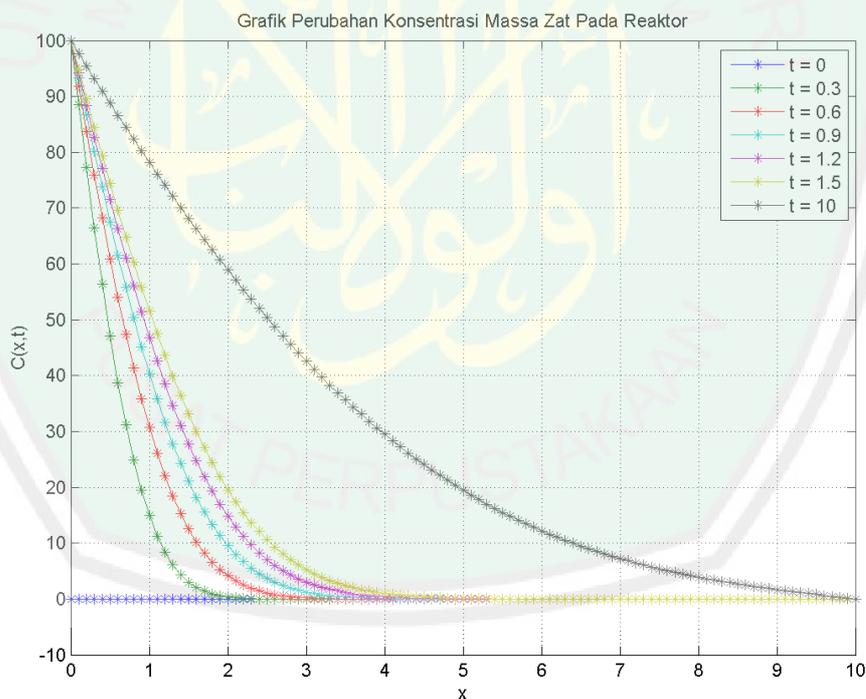
Gambar 3.1 Perubahan Konsentrasi Massa Zat di dalam Reaktor pada Kondisi $U^2 + 4D\gamma > 0$ dengan Memperlambat Penyebaran Zat

Pada Gambar 3.1, dapat dilihat bahwa jumlah konsentrasi massa zat yang masuk pada reaktor sebesar 100 mol/m^3 , sedangkan jumlah konsentrasi massa zat yang keluar dari reaktor (*output*) adalah nol. Pada waktu 0,3 detik, konsentrasi yang awalnya masuk sebesar 100 mol/m^3 mengalami penurunan. Hal ini dikarenakan, massa zat di dalam reaktor mengalami reaksi kimia. Sehingga dapat dilihat bahwa reaktor dengan panjang satu meter saja konsentrasinya menurun menjadi nol.

Pada waktu 0,6 detik, penurunan konsentrasi zat lebih lambat dari pada waktu sebelumnya, meskipun konsentrasi zat yang keluar dari reaktor sama pada waktu 0,3 detik. Hal ini dikarenakan sisa konsentrasi massa zat yang bereaksi pada waktu sebelumnya, yang masih melekat pada reaktor bereaksi terhadap konsentrasi zat yang masuk pada waktu selanjutnya. Dengan koefisien penyebaran zat sebesar $0,083 \text{ m}^2/\text{det}$, artinya penyebaran zat yang melewati benda padat

yang ada pada reaktor lebih lambat, sehingga mengakibatkan zat dapat bereaksi lebih lama di dalam reaktor. Karena semakin lama proses reaksi kimia maka konsentrasi massa zat yang mengalami perubahan semakin banyak. Hal ini ditunjukkan pada waktu 10 detik, zat yang berada pada reaktor sepanjang satu meter mengalami penurunan konsentrasi menjadi kurang lebih 42 mol/m^3 .

Dengan demikian, penurunan konsentrasi zat semakin banyak seiring bertambahnya waktu sampai mencapai kondisi *steady-state*, artinya perubahannya tetap. Selanjutnya, dengan parameter yang sama seperti Gambar 3.1, akan tetapi koefisien penyebaran zat dinaikkan menjadi $D = 0,8 \text{ m}^2/\text{det}$, maka perubahan konsentrasi massa zat dapat dilihat seperti gambar di bawah ini.



Gambar 3.2 Perubahan Konsentrasi Massa Zat di dalam Reaktor pada Kondisi $U^2 + 4D\gamma > 0$ dengan Mempercepat Penyebaran Zat

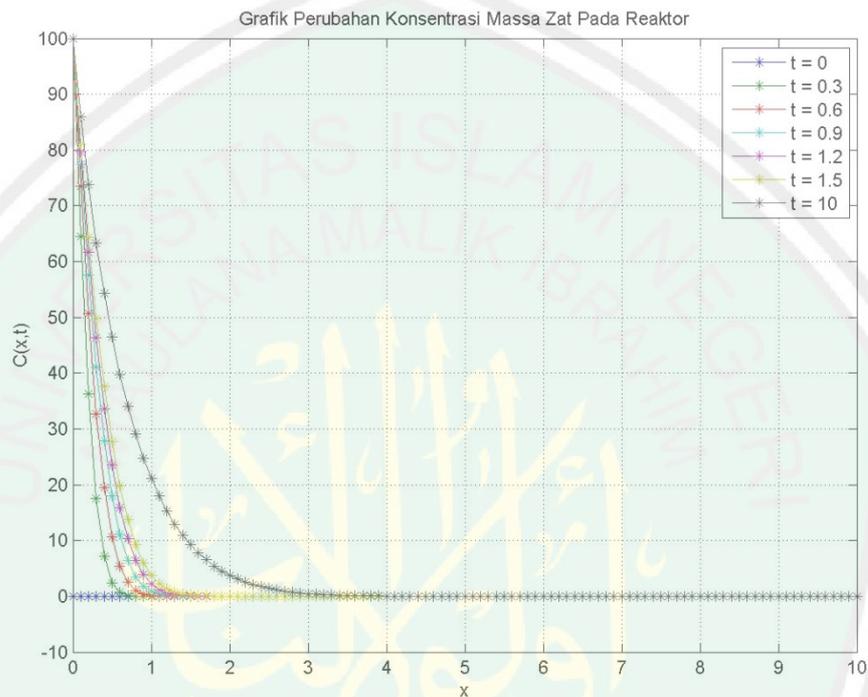
Pada Gambar 3.2, dapat dilihat bahwa jumlah konsentrasi massa zat yang masuk pada reaktor sebesar 100 mol/m^3 , sedangkan jumlah konsentrasi massa zat yang keluar dari reaktor adalah nol. Pada kasus ini, proses penurunan

konsentrasi massa zat membutuhkan jarak yang lebih panjang dari pada kasus sebelumnya. Hal ini dapat dilihat pada waktu 0,3 detik, membutuhkan jarak dua meter untuk menurunkan jumlah konsentrasi massa zat menjadi nol. Jarak tersebut lebih panjang satu meter dari jarak pada kasus sebelumnya. Begitu juga pada waktu 0,6 detik, membutuhkan jarak kurang lebih dua setengah meter untuk menurunkan konsentrasi massa zat menjadi nol. Jarak tersebut lebih panjang satu meter dari pada jarak pada kasus pertama, dengan waktu yang sama.

Dengan koefisien penyebaran zat sebesar $0,8 \text{ m}^2/\text{det}$, artinya penyebaran zat yang melewati benda padat yang ada pada reaktor lebih cepat dari pada kasus pertama, sehingga mengakibatkan zat bereaksi lebih cepat di dalam reaktor. Semakin cepat proses reaksi kimia maka konsentrasi massa zat yang mengalami perubahan semakin sedikit. Hal ini ditunjukkan pada waktu 10 detik, zat yang berada pada reaktor sepanjang satu meter mengalami penurunan konsentrasi menjadi kurang lebih 79 mol/m^3 . Padahal pada kasus pertama, dengan waktu dan jarak yang sama, konsentrasi zat mengalami penurunan menjadi kurang lebih 42 mol/m^3 . Selisih ini menunjukkan bahwa semakin cepat zat yang menyebar pada reaktor maka semakin sedikit konsentrasi zat yang berubah.

Dengan demikian, semakin besar koefisien penyebaran zat, maka semakin cepat zat yang menyebar pada reaktor, sehingga mengakibatkan proses reaksi kimia terlalu cepat. Proses reaksi kimia yang terlalu cepat mengakibatkan perubahan konsentrasi massa zat membutuhkan jarak yang lebih panjang. Hal ini dikarenakan semakin lama proses reaksi kimia, maka semakin banyak konsentrasi massa zat yang mengalami perubahan. Oleh karena itu, agar penentuan panjang reaktor lebih efisien, maka koefisien penyebaran zat harus diperkecil.

Selanjutnya, dengan parameter yang sama seperti Gambar 3.1, akan tetapi koefisien massa zat yang bereaksi pada suatu reaktor dinaikkan menjadi $\gamma = 0,2 \text{ mol/det}$, maka perubahan konsentrasi massa zat dengan parameter tersebut, dapat dilihat seperti gambar berikut ini.



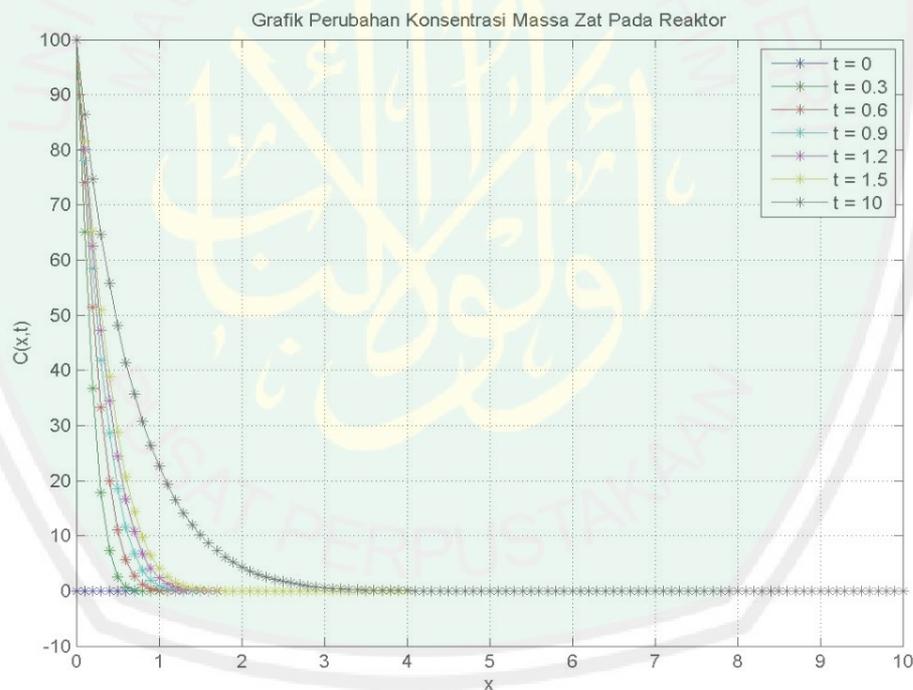
Gambar 3.3 Perubahan Konsentrasi Massa Zat pada Kondisi $U^2 + 4D\gamma > 0$ dengan Memperbesar Koefisien Reaksi Zat

Pada Gambar 3.3, dapat dilihat pada waktu 0,3 detik, membutuhkan jarak yang lebih pendek dari pada kasus pertama dan kedua. Untuk lebih jelasnya, dapat dilihat pada waktu 10 detik membutuhkan jarak tiga meter untuk menurunkan konsentrasi zat yang awalnya masuk sebesar 100 mol/m^3 menjadi nol. Jarak yang dibutuhkan pada kasus ini lebih pendek setengah meter dari pada kasus pertama serta lebih pendek kurang lebih 6,5 meter dari pada kasus kedua.

Dengan demikian, semakin besar koefisien massa zat yang bereaksi pada suatu reaktor, maka semakin banyak konsentrasi massa zat yang berubah di sepanjang reaktor, artinya panjang yang dibutuhkan reaktor lebih efisien selama

proses reaksi zat. Sebaliknya, semakin kecil koefisien reaksi kimia, maka perubahan konsentrasi massa zat di sepanjang reaktor membutuhkan jarak yang lebih panjang. Oleh karena itu, agar konsentrasi massa zat semakin banyak mengalami perubahan, maka koefisien massa zat yang bereaksi pada suatu reaktor harus diperbesar.

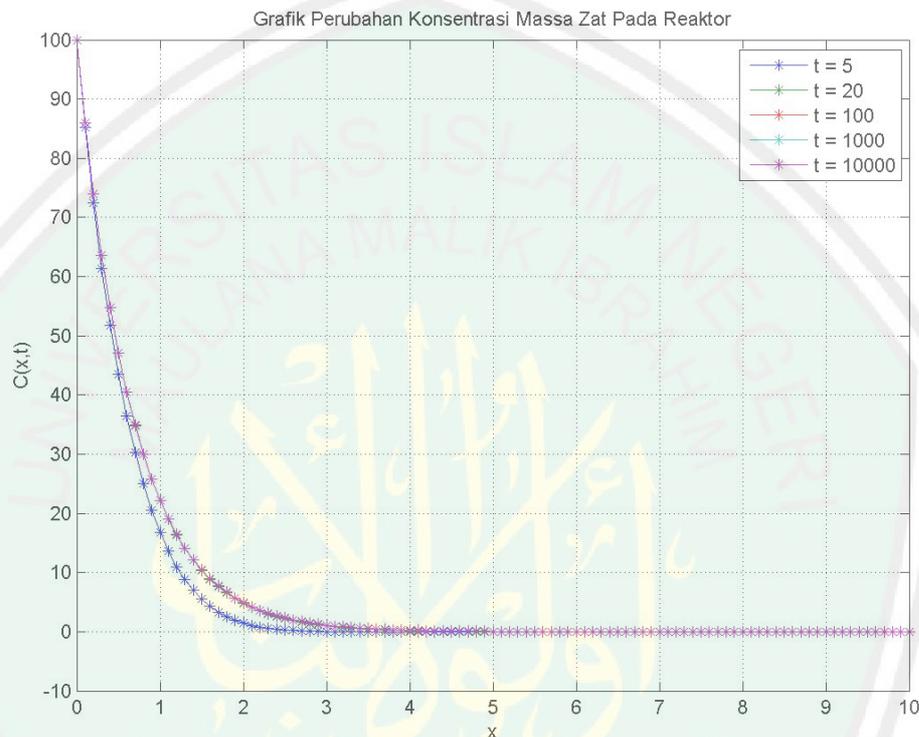
Selanjutnya, dengan parameter yang sama seperti Gambar 3.1, akan tetapi kecepatan fluida yang mengalir pada suatu reaktor diperbesar menjadi $U = 0,02 \text{ m/det}$, maka perubahan konsentrasi massa zat dengan parameter tersebut, dapat dilihat seperti gambar di bawah ini.



Gambar 3.4 Perubahan Konsentrasi Massa Zat pada Kondisi $U^2 + 4D\gamma > 0$ dengan Menaikkan Kecepatan Zat di dalam Reaktor

Dari Gambar 3.4 di atas, dengan kecepatan zat yang mengalir masuk ke dalam reaktor sebesar $0,02 \text{ m/det}$, artinya zat yang mengalir di sepanjang reaktor lebih cepat dari pada kasus sebelumnya. Sehingga waktu yang dibutuhkan zat untuk keluar dari reaktor tersebut lebih singkat.

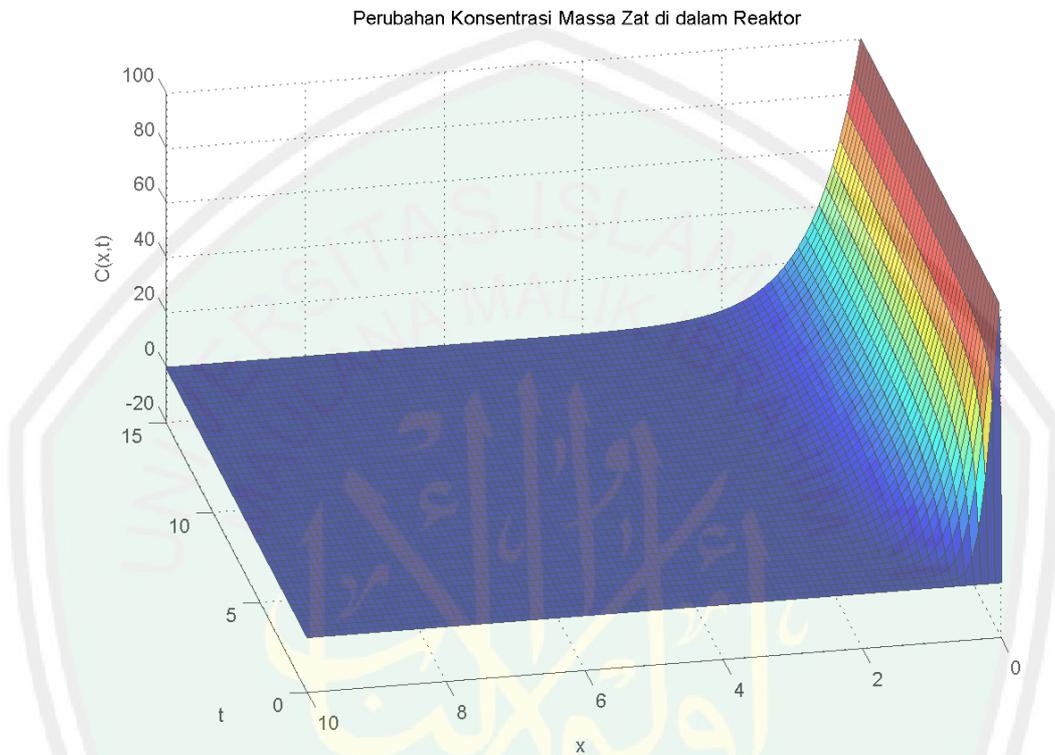
Selanjutnya, dengan menggunakan kondisi pada kasus kedua dan kasus ketiga, yaitu $D = 0,083 \text{ m}^2/\text{det}$ dan $\gamma = 0,2 \text{ mol}/\text{det}$, serta dengan memperbesar perubahan waktu, maka perubahan konsentrasi massa zat semakin mencapai kondisi *steady-state* seperti gambar berikut.



Gambar 3.5 Pengaruh Lama Proses Reaksi Terhadap Perubahan Konsentrasi Massa Zat di dalam Reaktor pada Kondisi $U^2 + 4D\gamma > 0$

Dari Gambar 3.5 di atas, dapat diketahui bahwa pada waktu 20 detik, perubahan konsentrasi massa zat hampir mendekati kondisi *steady-state*. Sedangkan pada waktu 100, 1000, dan 10000 detik, perubahan konsentrasi massa zat dalam kondisi *steady-state*, artinya pada waktu tersebut perubahan konsentrasinya tetap. Jadi, semakin lama proses reaksi, maka perubahan konsentrasi massa zat semakin tetap. Kondisi tersebut dapat dituliskan secara matematis $C(x, 100) = C(x, 1000) = C(x, 10000)$. Untuk lebih jelasnya, kondisi tersebut dapat dilihat pada Lampiran 14.

Perubahan massa zat dengan parameter yang sama seperti pada kasus nomor lima selama kurun waktu 15 detik, dapat dilihat melalui grafik tiga dimensi seperti berikut ini.

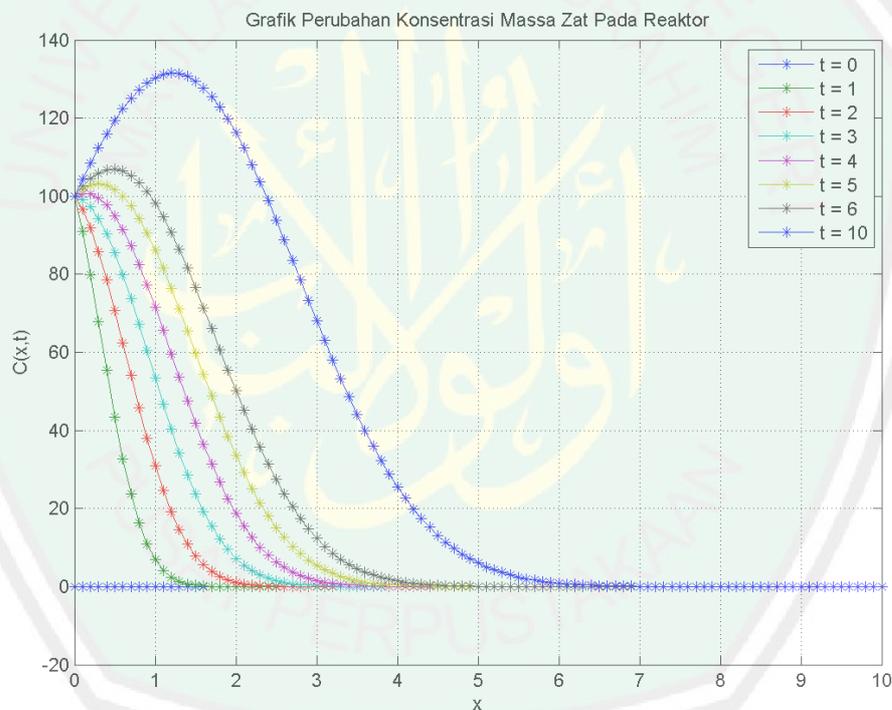


Gambar 3.6 Grafik Tiga Dimensi Perubahan Konsentrasi Massa Zat Selama Kurun Waktu 15 Detik pada Kondisi $U^2 + 4D\gamma > 0$

Gambar 3.6 merupakan grafik tiga dimensi yang menyatakan perubahan konsentrasi massa zat sepanjang reaktor (x) selama kurun waktu (t) 15 detik. Berdasarkan Gambar 3.6, dapat diketahui bahwa reaktor dengan panjang 10 meter, mempunyai titik masuk yang ditunjukkan pada sumbu x pada bagian kanan grafik. Sedangkan titik keluar reaktor ditunjukkan pada sumbu x pada bagian kiri grafik. Sumbu t pada Gambar 3.6, menyatakan perubahan waktu, sumbu $C(x, t)$ menyatakan perubahan konsentrasi massa zat di dalam reaktor selama kurun waktu 15 detik. Dengan demikian, perubahan massa dari waktu nol sampai

dengan 15 detik, dapat dilihat melalui Gambar 3.6, yang jumlah konsentrasi massa zat awalnya 100 mol/m^3 mengalami perubahan menjadi nol.

Kemudian dengan menggunakan parameter $C_{in} = 100 \text{ mol/m}^3$, koefisien penyebaran zat $D = 0,1 \text{ m}^2/\text{det}$, kecepatan fluida yang mengalir pada suatu reaktor $U = 0,2 \text{ m/det}$, dan koefisien reaksi $\gamma = -0,1 \text{ mol/det}$, akibatnya $U^2 + 4D\gamma = 0$, maka solusi yang digunakan adalah solusi yang persamaan karakteristiknya mempunyai akar-akar kembar (3.60). Sehingga perubahan jumlah massa zat di sepanjang reaktor dapat dilihat seperti gambar berikut.

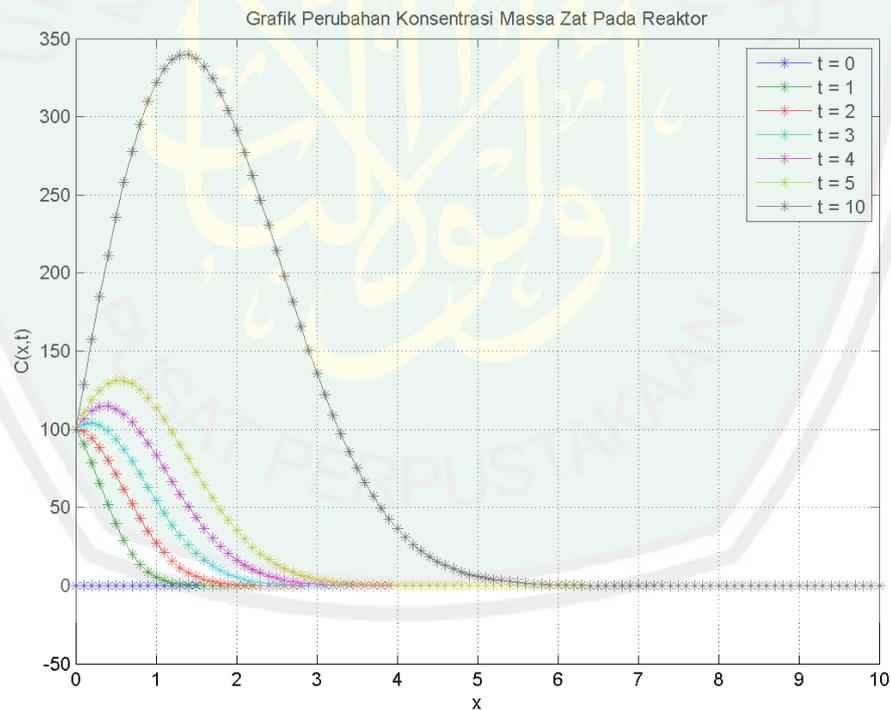


Gambar 3.7 Perubahan Konsentrasi Massa Zat di dalam Reaktor pada Kondisi $U^2 + 4D\gamma = 0$

Dari gambar 3.7 dapat diketahui bahwa selama waktu empat detik, jumlah konsentrasi massa zat mengalami penurunan dan tidak pernah melebihi jumlah konsentrasi massa zat yang masuk pada reaktor (C_{in}). Sedangkan pada waktu lebih dari empat detik, jumlah konsentrasi mula-mula mengalami kenaikan melebihi jumlah konsentrasi yang masuk pada reaktor, akan tetapi setelah

mengalami proses reaksi, jumlah konsentrasi massa zat mengalami penurunan. Dengan demikian, apabila parameter dipilih sedemikian sehingga $U^2 + 4D\gamma = 0$, maka membutuhkan waktu lebih lama untuk mencapai kondisi *steady-state*.

Kemudian dengan menggunakan parameter $C_{in} = 100 \text{ mol/m}^3$, koefisien penyebaran zat $D = 0,1 \text{ m}^2/\text{det}$, kecepatan fluida yang mengalir pada suatu reaktor $U = 0,1 \text{ m/det}$, dan koefisien reaksi $\gamma = -0,3 \text{ mol/det}$, akibatnya $U^2 + 4D\gamma < 0$, maka solusi yang digunakan adalah solusi yang persamaannya karakteristiknya mempunyai akar-akar kembar (3.61). Sehingga perubahan jumlah massa zat pada reaktor sepanjang reaktor dapat dilihat seperti gambar berikut.



Gambar 3.8 Perubahan Konsentrasi Massa Zat di dalam Reaktor pada Kondisi $U^2 + 4D < 0$

Pada gambar 3.8, dapat diketahui bahwa selama waktu dua detik, jumlah konsentrasi massa zat mengalami penurunan dan tidak pernah melebihi jumlah konsentrasi massa zat yang masuk pada reaktor (C_{in}). Sedangkan pada waktu

lebih dari dua detik, jumlah konsentrasi mula-mula mengalami kenaikan melebihi jumlah konsentrasi yang masuk pada reaktor, akan tetapi setelah mengalami proses reaksi, jumlah konsentrasi massa zat mengalami penurunan. Dengan demikian, apabila parameter dipilih sedemikian sehingga $U^2 + 4D\gamma < 0$, maka membutuhkan waktu paling lama untuk mencapai kondisi *steady-state*.

Berdasarkan kedelapan kasus di atas, dapat diketahui bahwa parameter U hanya berpengaruh pada kecepatan zat yang mengalir pada suatu reaktor. Semakin besar U maka semakin cepat zat mengalir pada reaktor. Sedangkan parameter C_{in} tidak mempengaruhi kecepatan aliran fluida sepanjang reaktor.

Dengan demikian, pemilihan parameter yang sedemikian sehingga $U^2 + 4D\gamma > 0$, paling efisien digunakan untuk menyelesaikan permasalahan terkait perubahan konsentrasi massa zat pada suatu reaktor. Dari penjelasan sebelumnya, diketahui bahwa persamaan keseimbangan massa reaktor umumnya digunakan pada bidang kimia industri. Sehingga untuk menentukan panjang reaktor yang lebih efisien, maka dapat dianalisis dengan ketentuan setiap parameter seperti yang telah dijelaskan sebelumnya. Sehingga dengan adanya Solusi persamaan keseimbangan massa reaktor, dapat dijadikan sebagai acuan untuk menyelesaikan permasalahan terkait keseimbangan massa zat pada suatu ruangan tertutup atau reaktor.

3.3 Solusi Persamaan Keseimbangan Massa Reaktor dalam Pandangan Islam

Persamaan keseimbangan massa reaktor merupakan formulasi dari permasalahan keseimbangan massa zat pada suatu reaktor. Persamaan keseimbangan massa reaktor merupakan suatu persamaan yang menyatakan

jumlah perubahan konsentrasi massa zat yang dipengaruhi oleh perubahan waktu pada suatu sistem tertutup atau reaktor. Pada bab sebelumnya dijelaskan bahwa perubahan konsentrasi massa zat termasuk dalam kategori fenomena alam. Perubahan massa pada suatu reaktor terjadi karena adanya proses reaksi kimia di dalam suatu ruangan tertutup. Sehingga formulasi tersebut bertujuan untuk mempermudah proses analisis terkait fenomena alam tersebut.

Al-Quran menyebutkan beberapa fenomena alam yang terjadi di alam sekitar sebagai bukti atas kekuasaan Allah Swt. yang maha menciptakan sesuatu. Seperti yang telah dijelaskan pada surat al-Baqarah/2:164 dan Ali Imran/3:190-191 pada bab sebelumnya, bahwa semua yang ada di langit dan di bumi, baik berupa sesuatu yang dapat dirasakan dengan panca indra ataupun berupa proses alam, semuanya merupakan tanda-tanda kekuasaan Allah Swt. Akan tetapi al-Quran tidak menjelaskan secara detail bagaimana proses tersebut terjadi.

Seperti halnya perubahan konsentrasi massa zat yang awalnya masuk pada reaktor sebesar 100 mol/m^3 , kemudian karena adanya proses reaksi kimia jumlah konsentrasi massa zat yang keluar dari reaktor mengalami penurunan menjadi nol. Proses perubahan tersebut tidak pernah dijelaskan dalam al-Quran. Begitu juga hal yang dapat mempengaruhi cepat atau lambatnya perubahan massa tidak dijelaskan dalam al-Quran. Akan tetapi, setelah dilakukan penelitian dan pengkajian pada subbab sebelumnya, maka dapat diperoleh solusi dari persamaan keseimbangan massa reaktor, yang dijadikan sebagai alat untuk mengetahui proses perubahan massa zat pada reaktor. Berdasarkan hasil analisis, maka dapat diketahui banyaknya massa zat yang berkurang dalam kurun waktu tertentu, serta beberapa pemilihan parameter yang sesuai dengan kondisi pada penjelasan

sebelumnya, yang dapat dijadikan sebagai acuan untuk memperoleh hasil yang lebih efisien.

Karena persamaan keseimbangan massa reaktor merupakan formulasi dari fenomena alam, maka dengan menganalisis solusi persamaan tersebut sudah mewakili proses pengamatan alam. Hal tersebut sebagaimana dijelaskan Allah Swt. dalam QS. Yunus/10:101, bahwa manusia dianjurkan untuk melakukan penelitian dan pengkajian tentang fenomena alam sekitar. Dengan dilakukannya penelitian dan pengkajian, manusia dapat membentuk berbagai disiplin ilmu yang dijadikan sebagai alat untuk menganalisis suatu permasalahan yang ada di alam sekitar, sehingga didapatkan solusi penyelesaian dari permasalahan tersebut. Karena dengan adanya solusi, manusia dapat mengetahui rahmat Allah Swt. yang telah diberikan kepada mereka melalui semua ciptaan Allah Swt. Dengan demikian, manusia selalu bersyukur atas apa yang telah diberikan Allah, karena semua yang diberikan Allah Swt. tidak ada yang sia-sia.

Setelah mengetahui kebenaran tentang semua fenomena alam yang diciptakan Allah Swt. tidaklah sia-sia, melainkan ditujukan bagi setiap umat manusia yang mau menggali informasi lebih dalam, maka keimanan dan ketakwaan seseorang akan semakin meningkat.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan, maka solusi dari persamaan keseimbangan massa reaktor yang mempunyai kondisi dengan kondisi awal homogen dan kondisi batas tak homogen (3.2) adalah :

a. Akar-akar Real Berbeda

$$C(x, t) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} E_n e^{-\left(\frac{(2n\pi D)^2 + U^2 l^2}{4|D|l^2} + \gamma\right)t} e^{\frac{U}{2D}x} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right) + k_1 e^{\left(\frac{U + \sqrt{U^2 + 4D\gamma}}{2D}\right)x} \dots$$

$$+ k_2 e^{\left(\frac{U - \sqrt{U^2 + 4D\gamma}}{2D}\right)x}$$

dengan

$$E_n = \frac{2n\pi(k_1(e^{A_1 l} \cos(n\pi) - 1) + k_2(e^{-A_1 l} \cos(n\pi) - 1))}{(n\pi)^2 + (A_1)^2}, \quad A_1 = \frac{\sqrt{U^2 + 4D\gamma}}{2D},$$

serta

$$k_1 = \frac{C_{in} e^{\left(\frac{U - \sqrt{U^2 + 4D\gamma}}{2D}\right)l}}{\left(e^{\left(\frac{U - \sqrt{U^2 + 4D\gamma}}{2D}\right)l} - e^{\left(\frac{U + \sqrt{U^2 + 4D\gamma}}{2D}\right)l} \right)}, \quad \text{dan} \quad k_2 = \frac{-C_{in} e^{\left(\frac{U + \sqrt{U^2 + 4D\gamma}}{2D}\right)l}}{\left(e^{\left(\frac{U - \sqrt{U^2 + 4D\gamma}}{2D}\right)l} - e^{\left(\frac{U + \sqrt{U^2 + 4D\gamma}}{2D}\right)l} \right)}$$

b. Akar-akar Kembar

$$C(x, t) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} E_n e^{-\left(\frac{(2n\pi D)^2 + U^2 l^2}{4|D|l^2} + \gamma\right)t} e^{\frac{U}{2D}x} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right) + C_{in} e^{\frac{U}{2D}x} - \frac{C_{in}}{l} x e^{\frac{U}{2D}x}$$

dengan $E_n = -\frac{2C_{in}}{n\pi}$.

c. Akar-akar Kompleks

$$C(x, t) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} E_n e^{-\left(\frac{(2n\pi D)^2 + U^2 l^2}{4|D|l^2} + \gamma\right)t} e^{\frac{U}{2D}x} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right) \dots$$

$$+ e^{\frac{U}{2D}x} \left(k_5 \cos\left(\frac{\sqrt{|U^2 + 4D\gamma|}}{2D}x\right) + k_6 \sin\left(\frac{\sqrt{|U^2 + 4D\gamma|}}{2D}x\right) \right)$$

dengan

$$E_n = \frac{k_5((\cos(A_2 l + n\pi) - 1)) + k_6(\sin(A_2 l + n\pi))}{(A_2 l + n\pi)} - \frac{k_5((\cos(A_2 l - n\pi) - 1)) + k_6(\sin(A_2 l - n\pi))}{(A_2 l - n\pi)}$$

serta $A_2 = \frac{\sqrt{|U^2 + 4D\gamma|}}{2D}$, $k_5 = C_{in}$, dan $k_6 = -C_{in} \cot\left(\frac{\sqrt{|U^2 + 4D\gamma|}}{2D}l\right)$.

Dari hasil analisis, dapat diketahui bahwa pemilihan parameter yang sedemikian sehingga $U^2 + 4D\gamma > 0$, paling efisien digunakan untuk menyelesaikan permasalahan terkait perubahan konsentrasi massa zat pada suatu reaktor. Sehingga dapat disimpulkan bahwa:

1. Semakin kecil koefisien penyebaran zat (D), maka semakin lambat penyebaran zat, sehingga semakin banyak konsentrasi massa zat yang mengalami perubahan di sepanjang reaktor, serta semakin pendek jarak yang dibutuhkan untuk proses reaksi zat.
2. Semakin besar koefisien reaksi zat (γ), maka semakin banyak konsentrasi massa zat yang mengalami perubahan di sepanjang reaktor karena tingginya reaksi kimia, artinya panjang yang dibutuhkan reaktor lebih efisien selama proses reaksi zat.
3. Semakin besar U maka semakin cepat zat mengalir pada reaktor.
4. Semakin lama waktu yang diperlukan selama proses reaksi, maka perubahan konsentrasinya semakin tetap atau menuju kondisi *steady-state*.

4.2 Saran

Penelitian ini difokuskan pada solusi persamaan keseimbangan massa reaktor menggunakan metode pemisahan variabel, dengan jumlah konsentrasi massa zat yang masuk pada reaktor sebesar $C(0, t) = C_{in}$ sedangkan jumlah konsentrasi massa zat yang dihasilkan (*output*) adalah $C(l, t) = 0$. Bagi penelitian selanjutnya, disarankan untuk melanjutkan solusi persamaan keseimbangan massa reaktor menggunakan metode yang berbeda dengan jumlah konsentrasi massa yang dihasilkan tidak nol, atau $C(l, t) = C_{out}$.



DAFTAR PUSTAKA

- Ad-Dimasyqi, A. F. 2000a. *At-Tafsir Al-Qur'an Al-Adzim, Juz 2*. Terjemahan Bahrun Abu Bakar, dkk. Bandung: Percetakan Sinar Baru Algensindo Offset Bandung.
- Ad-Dimasyqi, A. F. 2000b. *At-Tafsir Al-Qur'an Al-Adzim, Juz 4*. Terjemahan Bahrun Abu Bakar, dkk. Bandung: Percetakan Sinar Baru Algensindo Offset Bandung.
- Agarwal, R. P., dan O'Regan, D. 2009. *Ordinary and Partial Differential Equation With Special Functions, Fourier Series, and Boundary Value Problems*. New York: Springer Science + Business Media.
- Ash-Shabuny, M. A. 2000. *Qabas min Nuril Al-Qur'an*. Terjemahan Kathur Suhardi. Jakarta: Pustaka Al-Kautsar.
- Asy-Syirazi, N. M. 1992. *Al-Amtsal fi Tafsir Kitab Allah al-Munzal, Jilid 1*. Terjemahan Ahmad Sobandi, dkk. Jakarta: Gerbang Ilmu Press.
- Ath-Thabari, A. J. M. B. J. 2008. *Jami' Al Bayan An Ta'wil Ayi Al Qur'an*. Terjemahan Akhmad Affandi. Jakarta: Pustaka Azzam.
- Barnes, B., dan Fulford, G. R. 2009. *Mathematical Modelling with Case Studies A Differential Equation Approach Using Maple and Matlab Second Edition*. London: CRC Press.
- Boyce, W. E., dan DiPrima, R. C. 2009. *Elementarry Differential Equation and Boundary Value Problem Ninth Edition*. New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Caldwell, J. 2004. *Mathematical Modelling Case Studies and Projects*. New York: Kluwer Academic Publishers.
- Mutholi'ah, E. 2008. *Analisis Perbandingan Metode Beda Hingga Skema Implisit Dan Crank-Nicholson pada Penyelesaian Persamaan Diferensial Parsial*. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
- Najafi, H. S., dan Hajinezhad, H. 2008. Solving One-Dimensional Advection-Dispersion with Reaction Using Some Finite-Difference Methods. *Applied Mathematical Sciences*, 53(2):2611-2618.
- Pinsky, M. A. 2003. *Partial Differential Equation and Boundary-Value Problem With Application Third Edition*. Rhode Island: Waveland Press.
- Purcell, E. J., dan Varberg, D. 1987a. *Calculus With Analytic Geometri 5th Edition, Jilid 1*. Terjemahan Nyoman Susila, dkk. Bandung: Erlangga.

Purcell, E. J., dan Varberg, D. 1987b. *Calculus With Analytic Geometry 5th Edition, Jilid 2*. Terjemahan Nyoman Susila, dkk. Bandung: Erlangga.

Strauss, W. A. (1992). *Partial Differensial Equation An Introduction*. New York: John Wiley & Sons.Inc.



Lampiran 1: Menentukan Transformasi Persamaan Keseimbangan Massa Reaktor seperti pada Persamaan (3.11)

Diketahui $V(x, t)$ merupakan solusi transformasi persamaan keseimbangan massa reaktor, sehingga persamaan diferensial $V(x, t)$ merupakan transformasi persamaan keseimbangan massa reaktor. Pada subbab 3.1.1, diketahui bahwa solusi $C(x)$ bergantung pada akar-akar karakteristiknya. Dengan demikian, persamaan diferensial $V(x, t)$ dapat diperoleh dengan cara mensubstitusikan masing-masing persamaan (3.7), (3.9) dan (3.10) pada persamaan (3.3), kemudian persamaan (3.3) disubstitusikan pada persamaan keseimbangan massa reaktor (3.1).

Apabila nilai $U^2 + 4D\gamma > 0$, maka solusi $C(x)$ yang digunakan seperti pada persamaan (3.7). Sehingga dengan mensubstitusikan persamaan (3.7) pada (3.3) dapat diperoleh

$$C(x, t) = V(x, t) + k_1 e^{\left(\frac{U + \sqrt{U^2 + 4D\gamma}}{2D}\right)x} + k_2 e^{\left(\frac{U - \sqrt{U^2 + 4D\gamma}}{2D}\right)x} \quad (1)$$

Kemudian dengan mensubstitusikan persamaan (1) pada persamaan keseimbangan massa reaktor (3.1), maka transformasi persamaan keseimbangan massa reaktor dapat diperoleh seperti berikut:

$$\begin{aligned} V_t(x, t) = & DV_{xx}(x, t) - UV_x(x, t) - \gamma V(x, t) \dots \\ & + \left(D \left(\frac{U + \sqrt{U^2 + 4D\gamma}}{2D} \right)^2 - U \left(\frac{U + \sqrt{U^2 + 4D\gamma}}{2D} \right) - \gamma \right) k_1 e^{\left(\frac{U + \sqrt{U^2 + 4D\gamma}}{2D}\right)x} \dots \\ & + \left(D \left(\frac{U - \sqrt{U^2 + 4D\gamma}}{2D} \right)^2 - U \left(\frac{U - \sqrt{U^2 + 4D\gamma}}{2D} \right) - \gamma \right) k_2 e^{\left(\frac{U - \sqrt{U^2 + 4D\gamma}}{2D}\right)x} \end{aligned}$$

Persamaan tersebut dapat disederhanakan menjadi

$$V_t(x, t) = DV_{xx}(x, t) - UV_x(x, t) - \gamma V(x, t) + (0) + (0)$$

$$V_t(x, t) = DV_{xx}(x, t) - UV_x(x, t) - \gamma V(x, t) \quad (2)$$

Apabila nilai $U^2 + 4D\gamma = 0$, maka solusi $C(x)$ yang digunakan seperti pada persamaan (3.9). Sehingga dengan mensubstitusikan persamaan (3.9) pada (3.3) dapat diperoleh

$$C(x, t) = V(x, t) + C_{in}e^{\frac{U}{2D}x} - \frac{C_{in}}{l}xe^{\frac{U}{2D}x} \quad (3)$$

Kemudian dengan mensubstitusikan persamaan (3) pada persamaan keseimbangan massa reaktor (3.1), maka transformasi persamaan keseimbangan massa reaktor dapat diperoleh seperti berikut:

$$V_t(x, t) = DV_{xx}(x, t) - UV_x(x, t) - \gamma V(x, t) \dots$$

$$+ \frac{e^{\frac{U}{2D}x} \left(C_{in}(U^2 + 4D\gamma) - \frac{C_{in}}{l}(U^2 + 4D\gamma)x \right)}{4D}$$

Karena nilai $U^2 + 4D\gamma = 0$, maka dapat diperoleh

$$V_t(x, t) = DV_{xx}(x, t) - UV_x(x, t) - \gamma V(x, t) + \frac{e^{\frac{U}{2D}x}(0 + 0)}{4D}$$

$$V_t(x, t) = DV_{xx}(x, t) - UV_x(x, t) - \gamma V(x, t) \quad (4)$$

Apabila nilai $U^2 + 4D\gamma < 0$, maka solusi $C(x)$ yang digunakan seperti pada persamaan (3.10). Sehingga dengan mensubstitusikan persamaan (3.10) pada (3.3) dapat diperoleh

$$C(x, t) = V(x, t) + k_5 e^{\frac{U}{2D}x} \cos\left(\frac{\sqrt{|U^2 + 4D\gamma|}}{2D}x\right) \quad (5)$$

$$+ k_6 e^{\frac{U}{2D}x} \sin\left(\frac{\sqrt{|U^2 + 4D\gamma|}}{2D}x\right)$$

Kemudian dengan mensubstitusikan persamaan (5) pada persamaan keseimbangan massa reaktor (3.1), maka transformasi persamaan keseimbangan massa reaktor dapat diperoleh seperti berikut.

$$V_t(x, t) = DV_{xx}(x, t) - UV_x(x, t) - \gamma V(x, t) \dots$$

$$\frac{e^{\frac{U}{2D}x} \left(k_5 \cos \left(\frac{\sqrt{|U^2 + 4D\gamma|}}{2D} x \right) (|U^2 + 4D\gamma| - |U^2 + 4D\gamma|) \right)}{4D} \dots$$

$$\frac{e^{\frac{U}{2D}x} \left(\sin \left(\frac{\sqrt{|U^2 + 4D\gamma|}}{2D} x \right) (|U^2 + 4D\gamma| - |U^2 + 4D\gamma|) \right)}{4D}$$

Dengan demikian, persamaan diatas dapat disederhanakan menjadi seperti berikut:

$$V_t(x, t) = DV_{xx}(x, t) - UV_x(x, t) - \gamma V(x, t) \quad (6)$$

Karena persamaan (2), (4) dan (6) mempunyai bentuk persamaan diferensial yang sama, maka bentuk umum persamaan diferensial $V(x, t)$ adalah

$$V_t(x, t) = DV_{xx}(x, t) - UV_x(x, t) - \gamma V(x, t)$$

Lampiran 2: Menentukan Kondisi Batas $V(0, t)$ dan $V(l, t)$ seperti pada Persamaan (3.12)

Apabila nilai $U^2 + 4D\gamma > 0$, maka untuk menentukan kondisi batas $V(0, t)$ dan $V(l, t)$ dapat dilakukan dengan mensubstitusikan kondisi batas (3.2) pada persamaan (1), sehingga kondisi batas V pada saat $x = 0$ adalah

$$C(0, t) = V(0, t) + k_1 e^0 + k_2 e^0$$

$$V(0, t) = C(0, t) - (k_1 + k_2)$$

Karena nilai $C(0, t) = C_{in}$, kemudian substitusikan masing-masing nilai k_1 dan k_2 pada persamaan di atas, maka dapat diperoleh

$$V(0, t) = C_{in} - \left(C_{in} \frac{\left(e^{\left(\frac{U - \sqrt{U^2 + 4D\gamma}}{2D} \right) l} - e^{\left(\frac{U + \sqrt{U^2 + 4D\gamma}}{2D} \right) l} \right)}{\left(e^{\left(\frac{U - \sqrt{U^2 + 4D\gamma}}{2D} \right) l} - e^{\left(\frac{U + \sqrt{U^2 + 4D\gamma}}{2D} \right) l} \right)} \right)$$

$$= 0$$

Sedangkan pada saat $x = l$ diperoleh

$$C(l, t) = V(l, t) + k_1 e^{\left(\frac{U + \sqrt{U^2 + 4D\gamma}}{2D} \right) l} + k_2 e^{\left(\frac{U - \sqrt{U^2 + 4D\gamma}}{2D} \right) l}$$

$$V(l, t) = C(l, t) - \left(k_1 e^{\left(\frac{U + \sqrt{U^2 + 4D\gamma}}{2D} \right) l} + k_2 e^{\left(\frac{U - \sqrt{U^2 + 4D\gamma}}{2D} \right) l} \right)$$

diketahui nilai $C(l, t) = 0$, kemudian dengan mensubstitusikan masing-masing nilai k_1 dan k_2 , maka dapat diperoleh

$$V(l, t) = -C_{in} \left(\frac{\left(e^{\left(\frac{U - \sqrt{U^2 + 4D\gamma}}{2D} \right) l} e^{\left(\frac{U + \sqrt{U^2 + 4D\gamma}}{2D} \right) l} - e^{\left(\frac{U + \sqrt{U^2 + 4D\gamma}}{2D} \right) l} e^{\left(\frac{U - \sqrt{U^2 + 4D\gamma}}{2D} \right) l} \right)}{\left(e^{\left(\frac{U - \sqrt{U^2 + 4D\gamma}}{2D} \right) l} - e^{\left(\frac{U + \sqrt{U^2 + 4D\gamma}}{2D} \right) l} \right)} \right)$$

$$V(l, t) = 0$$

Dengan demikian, kondisi batas V pada saat $U^2 + 4D\gamma > 0$ adalah kondisi batas homogen seperti berikut.

$$V(0, t) = 0, \quad V(l, t) = 0 \quad (7)$$

Apabila nilai $U^2 + 4D\gamma = 0$, maka untuk menentukan kondisi batas $V(0, t)$ dan $V(l, t)$ dapat dilakukan dengan mensubstitusikan kondisi batas (3.2) pada persamaan (4), sehingga kondisi batas V pada saat $x = 0$ adalah

$$C(0, t) = V(0, t) + C_{in}e^0 - \frac{C_{in}}{l}(0)e^0$$

dengan cara yang sama seperti kasus $U^2 + 4D\gamma > 0$, maka kondisi batas $V(0, t)$ dapat diperoleh

$$V(0, t) = 0$$

Sedangkan pada saat $x = l$ diperoleh

$$C(l, t) = V(l, t) + \left(C_{in}e^{\frac{U}{2D}l} - \frac{C_{in}}{l}(l)e^{\frac{U}{2D}l} \right)$$

dengan cara yang sama seperti kasus $U^2 + 4D\gamma > 0$, maka kondisi batas $V(l, t)$ dapat diperoleh

$$V(l, t) = 0$$

Dengan demikian, kondisi batas V pada saat $U^2 + 4D\gamma = 0$ adalah kondisi batas homogen seperti berikut.

$$V(0, t) = 0, \quad V(l, t) = 0 \quad (8)$$

Apabila nilai $U^2 + 4D\gamma < 0$, maka untuk menentukan kondisi batas $V(0, t)$ dan $V(l, t)$ dapat dilakukan dengan mensubstitusikan kondisi batas (3.2) pada persamaan (6). Sehingga, dengan cara yang sama seperti kasus sebelumnya,

kondisi batas V pada saat $U^2 + 4D\gamma < 0$ adalah kondisi batas homogen seperti berikut.

$$V(0, t) = 0, \quad V(l, t) = 0 \quad (9)$$

Diketahui masing-masing kondisi batas (7), (8) dan (9) adalah kondisi batas homogen, sehingga kondisi batas kondisi batas V pada saat $U^2 + 4D\gamma > 0$, $U^2 + 4D\gamma = 0$, atau $U^2 + 4D\gamma < 0$ adalah kondisi batas homogen seperti berikut.

$$V(0, t) = 0, \quad V(l, t) = 0$$



Lampiran 3: Pembuktian Persamaan (3.29) Memenuhi Transformasi Persamaan Keseimbangan Massa Reaktor

Untuk membuktikan persamaan (3.29) memenuhi transformasi persamaan keseimbangan massa reaktor, maka substitusikan persamaan (3.29) pada persamaan (3.11). Apabila hasil turunan parsialnya adalah nol maka persamaan (3.29) memenuhi transformasi persamaan keseimbangan massa reaktor. Untuk membuktikannya, digunakan program *maple v.15* sebagai berikut.

```

> restart;
> beta := sqrt( ((2*n*Pi*D)^2 + U^2*L^2) / (4*abs(D)*L^2) );
                                     beta := 1/2 * sqrt( (4*n^2*Pi^2*D^2 + U^2*L^2) / |D|*L^2 )
> V := E[n] * exp(-(beta^2 + gamma)*t) * exp(U/(2*D)*x) * sin(n*Pi/L*x);
                                     V := E_n * e^(- (1/4 * (4*n^2*Pi^2*D^2 + U^2*L^2) / |D|*L^2 + gamma) * t) * e^(1/2 * U*x/D) * sin(n*Pi*x/L)
> subs(abs(D) = D, simplify((diff(V,t) - D*diff(V,x^2) + U*diff(V,x) + gamma*V)))
                                     0

```

Karena hasil turunan parsialnya adalah nol, maka persamaan (3.29) memenuhi transformasi persamaan keseimbangan massa reaktor (3.11).

Lampiran 4: Pembuktian Pemilihan $\lambda > 0$ tidak Memenuhi Transformasi Persamaan Keseimbangan Massa Reaktor

Apabila $U^2 + 4D\beta^2 = 0$, berdasarkan teorema 2.5 solusi $X(x)$ pada persamaan (3.23) adalah

$$X(x) = m_{13}e^{\frac{U}{2D}x} + m_{14}xe^{\frac{U}{2D}x} \quad (10)$$

Kemudian dengan menggunakan kondisi batas homogen (3.12) pada persamaan (10), maka pada saat $x = 0$ diperoleh

$$X(0) = m_{13}e^0 + m_{14}(0)e^0$$

$$0 = m_{13}$$

dengan cara yang sama seperti pada kasus (3.27), maka dapat diperoleh nilai $m_{13} = 0$ dan $m_{14} = 0$. Dengan demikian, untuk $\lambda > 0$, solusi $X(x)$ yang persamaan karakteristiknya mempunyai akar-akar kembar adalah nol (*trivial solution*).

Karena nilai U^2 dan β^2 selalu positif, maka nilai $U^2 + 4D\beta^2 < 0$ apabila $D < 0$ dan $U^2 < 4|D|\beta^2$. Dengan demikian, $4|D|\beta^2$ lebih besar dari pada U^2 . Sehingga untuk menjamin nilai $4|D|\beta^2 - U^2$ selalu negatif, maka akar-akarnya menjadi $r_{1,2} = \frac{U \pm \sqrt{-(4|D|\beta^2 - U^2)}}{2D} = \frac{U \pm i\sqrt{(4|D|\beta^2 - U^2)}}{2D}$. Sehingga solusi $X(x)$ pada kondisi $U^2 + 4D\beta^2 < 0$ dapat diperoleh

$$X(x) = m_{14}e^{\frac{U}{2D}x} \cos\left(\frac{\sqrt{(4|D|\beta^2 - U^2)}}{2D}x\right) \dots$$

$$+ m_{15}e^{\frac{U}{2D}x} \sin\left(\frac{\sqrt{(4|D|\beta^2 - U^2)}}{2D}x\right)$$

Kemudian dengan cara yang sama seperti persamaan (3.26) dapat diperoleh

$$X(x) = m_{15} e^{\frac{U}{2D}x} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Dikarenakan nilai konstanta adalah $\lambda = \beta^2$, maka persamaan (3.20) diubah menjadi

$$T'(t) - (\beta^2 - \gamma)T(t) = 0$$

dengan cara yang sama seperti penyelesaian persamaan (3.28), maka solusi persamaan tersebut yaitu

$$T(t) = m_{16} e^{\left(\frac{(2n\pi D)^2 + U^2 l^2}{4|D|l^2} - \gamma\right)t}$$

Kemudian dengan cara yang sama seperti penyelesaian persamaan (3.29), maka solusi $V(x, t)$ diperoleh

$$V(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n e^{\left(\frac{(2n\pi D)^2 + U^2 l^2}{4|D|l^2} - \gamma\right)t} e^{\frac{U}{2D}x} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad (11)$$

Dengan demikian persamaan (11) merupakan solusi $V(x, t)$ yang dapat diperoleh apabila nilai eigenya positif atau ditulis $\lambda > 0$. Dikarenakan masing-masing persamaan (3.19) dan (3.20) penyelesaiannya dipisahkan menggunakan nilai eigen (λ), maka nilai eigen harus memenuhi kedua persamaan tersebut.

```

> restart;
> beta := sqrt\left(\frac{((2 \cdot n \cdot \text{Pi} \cdot D)^2 + U^2 \cdot l^2)}{4 \cdot \text{abs}(D) \cdot l^2}\right);
                                     \beta := \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4 n^2 \pi^2 D^2 + U^2 l^2}{|D| l^2}}
> V := E[n] \cdot \exp\left(\left(\beta^2 - \text{gamma}\right) \cdot t\right) \cdot \exp\left(\frac{U}{2 \cdot D} \cdot x\right) \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \text{Pi}}{l} \cdot x\right);
                                     V := E_n e^{\left(\frac{1}{4} \frac{4 n^2 \pi^2 D^2 + U^2 l^2}{|D| l^2} - \gamma\right)t} e^{\frac{1}{2} \frac{Ux}{D}} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)
> subs(abs(D) = D, simplify((diff(V, t) - D \cdot diff(V, x) + U \cdot diff(V, x) + gamma \cdot V)))
                                     \frac{1}{4} \frac{E_n e^{\frac{1}{4} \frac{4 t D^3 n^2 \pi^2 + t D U^2 l^2 - 4 t D^2 \gamma l^2 + 2 U x D l^2}{D^2 l^2}} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) (8 D^3 n^2 \pi^2 + 2 D U^2 l^2)}{D^2 l^2}

```

Dari hasil program *maple*, dikarenakan hasil turunan parsialnya tidak sama dengan nol, maka dapat diketahui persamaan (11) bukan solusi dari transformasi

persamaan keseimbangan massa reaktor, hal ini dikarenakan nilai eigen yang positif ($\lambda > 0$) tidak memenuhi kedua fungsi eigen $X(x)$ dan $T(t)$. Dengan demikian, pemilihan $\lambda > 0$ mengakibatkan solusi $V(x, t)$ tidak memenuhi transformasi persamaan keseimbangan massa reaktor.



Lampiran 5: Pembuktian Persamaan (3.38) Memenuhi Persamaan Keseimbangan Massa Reaktor

Untuk membuktikan persamaan (3.38) memenuhi persamaan keseimbangan massa reaktor, maka substitusikan persamaan (3.38) pada persamaan (3.1), apabila hasil turunan parsialnya adalah nol maka persamaan (3.38) merupakan solusi persamaan keseimbangan massa reaktor. Untuk membuktikanya digunakan program *maple v.15* seperti berikut.

```

> restart;
> C := (E[n] * exp(-((2*n*Pi*D)^2 + U^2 * l^2) / (4 * abs(D) * l^2) + gamma) * t) * exp(U / (2 * D) * x) * sin(n * Pi / l * x) + k[1] * exp(((U + sqrt(U^2 + 4 * D * gamma)) / (2 * D)) * x) + k[2] * exp(((U - sqrt(U^2 + 4 * D * gamma)) / (2 * D)) * x);
C := E_n * e^(-((1/4) * (4 * n^2 * Pi^2 * D^2 + U^2 * l^2) / (D * l^2) + gamma) * t) * e^(1/2 * U / D * x) * sin(n * Pi * x / l) + k_1 * e^(1/2 * (U + sqrt(U^2 + 4 * D * gamma)) / D * x) + k_2 * e^(1/2 * (U - sqrt(U^2 + 4 * D * gamma)) / D * x)

```

Kemudian dengan mensubstitusikan persamaan (3.38) pada persamaan persamaan keseimbangan massa reaktor, maka diperoleh

```

> subs(abs(D) = D, simplify(diff(C, t) - D * diff(C, x^2) + U * diff(C, x) + gamma * C));
0

```

Karena hasil turunan parsialnya adalah nol, maka persamaan (3.38) memenuhi persamaan keseimbangan massa reaktor.

Lampiran 6: Pembuktian Persamaan (3.39) Memenuhi Persamaan Keseimbangan Massa Reaktor

Untuk membuktikan persamaan (3.39) memenuhi persamaan keseimbangan massa reaktor, maka substitusikan persamaan (3.39) pada persamaan (3.1), apabila hasil turunan parsialnya adalah nol maka persamaan (3.39) merupakan solusi persamaan keseimbangan massa reaktor. Untuk membuktikanya digunakan program *maple v.15* seperti berikut.

```

> restart;
> C := (E[n] exp(-((2*n*Pi*D)^2 + U^2*l^2)/(4*abs(D)*l^2) + gamma)*t) * exp(U/(2*D)*x) * sin(n*Pi/l*x) + Cin * exp(U/(2*D)*x) - Cin/l * x * exp(U/(2*D)*x);
C := E_n * e^(-1/4 * (4*n^2*Pi^2*D^2 + U^2*l^2)/|D|*l^2 + gamma)*t * e^(1/2 * Ux/D) * sin(n*Pi*x/l) + Cin * e^(1/2 * Ux/D) - Cin*x*e^(1/2 * Ux/D)

```

Kemudian dengan mensubstitusikan persamaan (3.39) pada persamaan persamaan keseimbangan massa reaktor, maka diperoleh

```

> a := simplify(diff(C, t) - D*diff(C, x^2) + U*diff(C, x) + gamma*C);
a := 1/4 * 1/|D|*l^2 * (e^(1/2 * Ux/D) * (-4*E_n * e^(-1/4 * (4*n^2*Pi^2*D^2 + U^2*l^2 + 4*gamma*|D|*l^2)*t) * sin(n*Pi*x/l) * D^3 * n^2 * Pi^2 - E_n * e^(-1/4 * (4*n^2*Pi^2*D^2 + U^2*l^2 + 4*gamma*|D|*l^2)*t) * sin(n*Pi*x/l) * D * U^2 * l^2
+ |D| * E_n * e^(-1/4 * (4*n^2*Pi^2*D^2 + U^2*l^2 + 4*gamma*|D|*l^2)*t) * U^2 * sin(n*Pi*x/l)^2 + 4*|D| * E_n * e^(-1/4 * (4*n^2*Pi^2*D^2 + U^2*l^2 + 4*gamma*|D|*l^2)*t) * sin(n*Pi*x/l) * n^2 * Pi^2 * D^2 + |D| * Cin * U^2 * l^2 - |D| * Cin * x * U^2 * l^2
+ 4*gamma*|D|*l^2 * D * Cin - 4*gamma*|D| * D * Cin * x)

```

Diketahui bahwa persamaan karakteristik (3.6) mempunyai akar-akar kembar apabila $U^2 + 4D\gamma = 0$. Kondisi tersebut dapat dipenuhi apabila $U^2 = -4D\gamma$.

Sehingga persamaan tersebut dapat disederhanakan menjadi

```

> subs([abs(D) = D, U^2 = -4*D*gamma], a);
0

```

Karena hasil turunan parsialnya adalah nol, maka persamaan (3.39) memenuhi persamaan keseimbangan massa reaktor.

Lampiran 7: Pembuktian Persamaan (3.40) Memenuhi Persamaan Keseimbangan Massa Reaktor

Untuk membuktikan persamaan (3.40) memenuhi persamaan keseimbangan massa reaktor, maka substitusikan persamaan (3.40) pada persamaan (3.1), apabila hasil turunan parsialnya adalah nol maka persamaan (3.40) merupakan solusi persamaan keseimbangan massa reaktor. Untuk membuktikanya digunakan program *maple v.15* seperti berikut.

```
> restart;
> C := (E[n] exp(-((2*n*Pi*D)^2 + U^2*l^2)/(4*abs(D)*l^2) + gamma)*t) exp(U/(2*D)*x) sin(n*Pi/l*x) + exp(U/(2*D)*x) * (k[5] * cos(sqrt(abs(U^2 + 4*(D*gamma)))/2/D*x) + k[6] * sin(sqrt(abs(U^2 + 4*(D*gamma)))/2/D*x));
C := E_n * e^(-((1/4)*(4*n^2*Pi^2*D^2 + U^2*l^2)/(D*l^2) + gamma)*t) * e^(U/(2*D)*x) * sin(n*Pi*x/l) + e^(U/(2*D)*x) * (k5*cos(1/2*sqrt(|U^2 + 4*D*gamma|)*x/D) + k6*sin(1/2*sqrt(|U^2 + 4*D*gamma|)*x/D))
```

Kemudian dengan mensubstitusikan persamaan (3.40) pada persamaan keseimbangan massa reaktor, maka diperoleh

```
> a := subs(abs(D)=D, simplify(diff(C, t) - D*diff(C, x$2) + U*diff(C, x) + gamma*C));
a := -1/4 * 1/D^2 * l^2 * (e^(U/(2*D)*x) * (-D*U^2*l^2*k5*cos(1/2*sqrt(|U^2 + 4*D*gamma|)*x/D) - D*U^2*l^2*k6*sin(1/2*sqrt(|U^2 + 4*D*gamma|)*x/D) - D*(U^2 + 4*D*gamma)*l^2*k5*cos(1/2*sqrt(|U^2 + 4*D*gamma|)*x/D) - D*(U^2 + 4*D*gamma)*l^2*k6*sin(1/2*sqrt(|U^2 + 4*D*gamma|)*x/D) - 4*gamma*D^2*l^2*k5*cos(1/2*sqrt(|U^2 + 4*D*gamma|)*x/D) - 4*gamma*D^2*l^2*k6*sin(1/2*sqrt(|U^2 + 4*D*gamma|)*x/D)))
```

Pada persamaan tersebut, karena nilai $U^2 + 4D\gamma$ dimutlakkan, maka program maple tidak bisa menyederhanakan secara langsung. Pada hasil program maple di atas, diketahui $a = C_t(x, t) - DC_{xx}(x, t) + UC_x(x, t) + \gamma C(x, t)$, sehingga hasil turunan parsial tersebut dapat disederhanakan menjadi

$$a = -\frac{e^{\frac{U}{2D}x}}{4D^2l^2} k_5 \cos\left(\frac{\sqrt{|U^2 + 4D\gamma|}}{2D} x\right) (-D(U^2l^2 + 4\gamma Dl^2) - D|U^2 + 4D\gamma|) \dots$$

$$-\frac{e^{\frac{U}{2D}x}}{4D^2l^2} k_6 \sin\left(\frac{\sqrt{|U^2 + 4D\gamma|}}{2D} x\right) (-D(U^2l^2 + 4\gamma Dl^2) - D|U^2 + 4D\gamma|)$$

Diketahui bahwa persamaan karakteristik (3.6) mempunyai akar-akar kompleks apabila $U^2 + 4D\gamma < 0$. Untuk menjamin nilai $U^2 + 4D\gamma$ selalu negatif, maka $U^2 + 4D\gamma = -|U^2 + 4D\gamma|$. Sehingga hasil di atas, dapat disederhanakan kembali menjadi

$$\begin{aligned} a &= -\frac{e^{\frac{U}{2D}x}}{4D^2l^2} k_5 \cos\left(\frac{\sqrt{|U^2 + 4D\gamma|}}{2D} x\right) (D(|U^2 + 4D\gamma|) - D|U^2 + 4D\gamma|) \dots \\ &\quad - \frac{e^{\frac{U}{2D}x}}{4D^2l^2} k_6 \sin\left(\frac{\sqrt{|U^2 + 4D\gamma|}}{2D} x\right) (D(|U^2 + 4D\gamma|) - D|U^2 + 4D\gamma|) \\ &= -\frac{e^{\frac{U}{2D}x}}{4D^2l^2} k_5 \cos\left(\frac{\sqrt{|U^2 + 4D\gamma|}}{2D} x\right) (0) - \frac{e^{\frac{U}{2D}x}}{4D^2l^2} k_6 \sin\left(\frac{\sqrt{|U^2 + 4D\gamma|}}{2D} x\right) (0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Karena $a = C_t(x, t) - DC_{xx}(x, t) + UC_x(x, t) + \gamma C(x, t) = 0$, maka dapat diperoleh

$$C_t(x, t) - DC_{xx}(x, t) + UC_x(x, t) + \gamma C(x, t) = 0$$

Karena hasil turunan parsialnya adalah nol, maka persamaan (3.40) memenuhi persamaan keseimbangan massa reaktor.

Lampiran 8: Pembuktian Persamaan (3.38) Memenuhi Kondisi Batas (3.2)

Untuk membuktikan persamaan (3.38) memenuhi kondisi batas (3.2), maka perlu dimasukkan nilai $x = 0$ dan $x = l$ pada persamaan tersebut. Sehingga pada saat $x = 0$ persamaan (3.38) menjadi seperti berikut.

$$C(0, t) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} E_n e^{-\left(\frac{U^2 l^2 - (2n\pi D)^2}{4|D|l^2} + \gamma\right)t} e^0 \sin(0) \right) + k_1 e^0 + k_2 e^0$$

Diketahui nilai $\sin(0) = 0$, maka persamaan tersebut dapat disederhanakan menjadi

$$C(0, t) = k_1 + k_2$$

Karena

nilai

$$k_1 = \frac{C_{in} e^{\left(\frac{U - \sqrt{U^2 + 4D\gamma}}{2D}\right)l}}{\left(e^{\left(\frac{U - \sqrt{U^2 + 4D\gamma}}{2D}\right)l} - e^{\left(\frac{U + \sqrt{U^2 + 4D\gamma}}{2D}\right)l} \right)}$$

dan

$$k_2 = \frac{-C_{in} e^{\left(\frac{U + \sqrt{U^2 + 4D\gamma}}{2D}\right)l}}{\left(e^{\left(\frac{U - \sqrt{U^2 + 4D\gamma}}{2D}\right)l} - e^{\left(\frac{U + \sqrt{U^2 + 4D\gamma}}{2D}\right)l} \right)},$$

maka persamaan tersebut dapat

disederhanakan menjadi

$$C(0, t) = C_{in}$$

Sedangkan pada saat $x = l$ diperoleh

$$C(l, t) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} E_n e^{-\left(\frac{U^2 l^2 - (2n\pi D)^2}{4|D|l^2} + \gamma\right)t} e^{\frac{U}{2D}l} \sin(n\pi) \right) + k_1 e^{\left(\frac{U + \sqrt{U^2 + 4D\gamma}}{2D}\right)l} + k_2 e^{\left(\frac{U - \sqrt{U^2 + 4D\gamma}}{2D}\right)l}$$

Karena nilai dari $\sin(n\pi) = 0$, kemudian substitusikan nilai k_1 dan k_2 , maka persamaan tersebut dapat disederhanakan menjadi

$$C(l, t) = \frac{C_{in} \left(e^{\left(\frac{U - \sqrt{U^2 + 4D\gamma}}{2D}\right)l} e^{\left(\frac{U + \sqrt{U^2 + 4D\gamma}}{2D}\right)l} - e^{\left(\frac{U + \sqrt{U^2 + 4D\gamma}}{2D}\right)l} e^{\left(\frac{U - \sqrt{U^2 + 4D\gamma}}{2D}\right)l} \right)}{\left(e^{\left(\frac{U - \sqrt{U^2 + 4D\gamma}}{2D}\right)l} - e^{\left(\frac{U + \sqrt{U^2 + 4D\gamma}}{2D}\right)l} \right)}$$

$$C(l, t) = 0$$

Dengan demikian, persamaan (3.38) merupakan solusi dari persamaan keseimbangan massa reaktor yang memenuhi kondisi batas (3.2).

Program *maple* untuk membuktikan persamaan (3.38) memenuhi kondisi batas (3.2), seperti berikut.

```

> restart;
> k[1] := \frac{C_{in} \exp\left(\left(\frac{U - \sqrt{U^2 + 4 \cdot D \cdot \gamma}}{2 \cdot D}\right) \cdot l\right)}{\left(\exp\left(\left(\frac{U - \sqrt{U^2 + 4 \cdot D \cdot \gamma}}{2 \cdot D}\right) \cdot l\right) - \exp\left(\left(\frac{U + \sqrt{U^2 + 4 \cdot D \cdot \gamma}}{2 \cdot D}\right) \cdot l\right)\right)};
> k[2] := \frac{-C_{in} \exp\left(\left(\frac{U + \sqrt{U^2 + 4 \cdot D \cdot \gamma}}{2 \cdot D}\right) \cdot l\right)}{\left(\exp\left(\left(\frac{U - \sqrt{U^2 + 4 \cdot D \cdot \gamma}}{2 \cdot D}\right) \cdot l\right) - \exp\left(\left(\frac{U + \sqrt{U^2 + 4 \cdot D \cdot \gamma}}{2 \cdot D}\right) \cdot l\right)\right)};
>
> C := \left(E[n] \cdot \exp\left(-\left(\frac{(2 \cdot n \cdot \text{Pi} \cdot D)^2 + U^2 \cdot t^2}{4 \cdot \text{abs}(D) \cdot t^2} + \gamma\right) \cdot t\right) \cdot \exp\left(\frac{U}{2 \cdot D} \cdot x\right) \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \text{Pi}}{l} \cdot x\right)\right) + k[1] \cdot \exp\left(\left(\frac{U + \sqrt{U^2 + 4 \cdot D \cdot \gamma}}{2 \cdot D}\right) \cdot x\right) + k[2] \cdot \exp\left(\left(\frac{U - \sqrt{U^2 + 4 \cdot D \cdot \gamma}}{2 \cdot D}\right) \cdot x\right);
>
> Cek Kondisi Batas C(0,t) dan C(l,t)
>
> simplify(simplify(subs(x = 0, C)));
Cin
> simplify(subs([n = 0, x = l], C));
0

```

Lampiran 9: Pembuktian Persamaan (3.39) Memenuhi Kondisi Batas (3.2)

Untuk membuktikan persamaan (3.39) memenuhi kondisi batas (3.2), maka perlu dimasukkan nilai $x = 0$ dan $x = l$ pada persamaan tersebut. Sehingga pada saat $x = 0$ persamaan (3.39) menjadi seperti berikut.

$$C(0, t) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} E_n e^{-\left(\frac{U^2 l^2 - (2n\pi D)^2}{4Dl^2} + \gamma\right)t} e^0 \sin(0) \right) + C_{in} e^0 - \frac{C_{in}}{l} (0) e^0$$

Karena nilai $\sin(0) = 0$, maka persamaan tersebut dapat disederhanakan menjadi

$$C(0, t) = C_{in}$$

Sedangkan pada saat $x = l$ diperoleh

$$C(l, t) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} E_n e^{-\left(\frac{U^2 l^2 - (2n\pi D)^2}{4Dl^2} + \gamma\right)t} e^{\frac{U}{2D}l} \sin(n\pi) \right) + C_{in} e^{\frac{U}{2D}l} - C_{in} e^{\frac{U}{2D}x}$$

$$C(l, t) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} E_n e^{-\left(\frac{U^2 l^2 - (2n\pi D)^2}{4Dl^2} + \gamma\right)t} e^{\frac{U}{2D}l} \sin(n\pi) \right)$$

Karena nilai dari $\sin(n\pi) = 0$, maka persamaan tersebut dapat disederhanakan menjadi

$$C(l, t) = 0$$

Dengan demikian, persamaan (3.39) merupakan solusi dari persamaan keseimbangan massa reaktor yang memenuhi kondisi batas (3.2).

Dengan cara yang sama seperti pada Lampiran 8, maka program *maple* untuk membuktikan persamaan (3.39) memenuhi kondisi batas (3.2) adalah

```

> restart;
> C := (E[n] exp(-((2*n*Pi*D)^2 + U^2*l^2)/(4*abs(D)*l^2) + gamma)*t) exp(U/(2*D)*x) sin(n*Pi*x) + Cin exp(U/(2*D)*x) - Cin/l*x exp(U/(2*D)*x);
Cek Kondisi Batas C(0,t) dan C(l,t)

> simplify(simplify(subs(x=0, C)));
Cin

> simplify(subs([n=0, x=l], C));
0
    
```

Lampiran 10: Pembuktian Persamaan (3.40) Memenuhi Kondisi Batas (3.2)

Untuk membuktikan bahwa persamaan (3.40) memenuhi kondisi batas (3.2), maka perlu dimasukkan nilai $x = 0$ dan $x = l$ pada persamaan tersebut. Sehingga pada saat $x = 0$ persamaan (3.40) menjadi seperti berikut:

$$C(0, t) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} E_n e^{-\left(\frac{U^2 l^2 - (2n\pi D)^2}{4|D|l^2} + \gamma\right)t} e^0 \sin(0) \right) + k_5 e^0 \cos(0) + k_6 e^0 \sin(0)$$

Karena nilai $\sin(0) = 0$, dan $k_5 = C_{in}$, maka persamaan tersebut dapat disederhanakan menjadi

$$C(0, t) = C_{in}$$

Sedangkan pada saat $x = l$ diperoleh

$$C(l, t) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} E_n e^{-\left(\frac{U^2 l^2 - (2n\pi D)^2}{4|D|l^2} + \gamma\right)t} e^{\frac{U}{2D}l} \sin(n\pi) \right) \dots$$

$$+ k_5 e^{\frac{U}{2D}l} \cos\left(\frac{\sqrt{|U^2 + 4D\gamma|}}{2D}l\right) + k_6 e^{\frac{U}{2D}l} \sin\left(\frac{\sqrt{|U^2 + 4D\gamma|}}{2D}l\right)$$

Karena nilai dari $\sin(n\pi) = 0$, $k_5 = C_{in}$, dan $k_6 = -C_{in} \cot\left(\frac{\sqrt{|U^2 + 4D\gamma|}}{2D}l\right)$, maka persamaan tersebut dapat disederhanakan menjadi

$$C(l, t) = 0$$

Dengan demikian, persamaan (3.40) merupakan solusi dari persamaan keseimbangan massa reaktor yang memenuhi kondisi batas (3.2).

Lampiran 11: Pembuktian Persamaan (3.38) Memenuhi Kondisi Awal (3.2)

Untuk membuktikan persamaan (3.38) memenuhi kondisi awal (3.2), maka perlu dimasukkan nilai $t = 0$ pada persamaan tersebut. Sehingga pada saat $t = 0$ persamaan (3.38) menjadi seperti berikut.

$$\begin{aligned} C(x, 0) &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} E_n e^0 e^{\frac{U}{2D}x} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right) + k_1 e^{\left(\frac{U+\sqrt{U^2+4D\gamma}}{2D}\right)x} + k_2 e^{\left(\frac{U-\sqrt{U^2+4D\gamma}}{2D}\right)x} \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} E_n e^{\frac{U}{2D}x} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right) + k_1 e^{\left(\frac{U+\sqrt{U^2+4D\gamma}}{2D}\right)x} + k_2 e^{\left(\frac{U-\sqrt{U^2+4D\gamma}}{2D}\right)x} \end{aligned}$$

Pada persamaan tersebut, E_n merupakan suatu konstanta yang nilainya ditentukan dengan menggunakan ekspansi deret Fourier. Berdasarkan persamaan (3.30), dapat diketahui bahwa fungsi $-C(x)$ diekspansikan menggunakan deret Fourier seperti berikut.

$$\sum_{n=1}^{\infty} E_n e^{\frac{U}{2D}x} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = -C(x)$$

karena persamaan (3.38) merupakan solusi persamaan keseimbangan massa reaktor pada kondisi $U^2 + 4D\gamma > 0$, maka solusi $C(x)$ yang digunakan adalah

$$C(x) = k_1 e^{\left(\frac{U+\sqrt{U^2+4D\gamma}}{2D}\right)x} + k_2 e^{\left(\frac{U-\sqrt{U^2+4D\gamma}}{2D}\right)x}.$$

Sehingga ekspansi deret Fourier menjadi

$$\sum_{n=1}^{\infty} E_n e^{\frac{U}{2D}x} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = -k_1 e^{\left(\frac{U+\sqrt{U^2+4D\gamma}}{2D}\right)x} - k_2 e^{\left(\frac{U-\sqrt{U^2+4D\gamma}}{2D}\right)x}$$

Dengan demikian, kondisi awal $C(x, 0)$ dapat diperoleh

$$\begin{aligned}
C(x, 0) &= -k_1 e^{\left(\frac{U+\sqrt{U^2+4D\gamma}}{2D}\right)x} - k_2 e^{\left(\frac{U-\sqrt{U^2+4D\gamma}}{2D}\right)x} + k_1 e^{\left(\frac{U+\sqrt{U^2+4D\gamma}}{2D}\right)x} \dots \\
&\quad + k_2 e^{\left(\frac{U-\sqrt{U^2+4D\gamma}}{2D}\right)x} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Dengan demikian, dapat dijamin persamaan (3.38) merupakan solusi persamaan keseimbangan massa reaktor yang memenuhi kondisi awal (3.2).



Lampiran 12: Pembuktian Persamaan (3.39) Memenuhi Kondisi Awal (3.2)

Untuk membuktikan persamaan (3.39) memenuhi kondisi awal (3.2), maka perlu dimasukkan nilai $t = 0$ pada persamaan tersebut. Sehingga pada saat $t = 0$ persamaan (3.39) menjadi

$$\begin{aligned} C(x, 0) &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} E_n e^0 e^{\frac{U}{2D}x} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right) + C_{in} e^{\frac{U}{2D}x} - \frac{C_{in}}{l} x e^{\frac{U}{2D}x} \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} E_n e^{\frac{U}{2D}x} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right) + C_{in} e^{\frac{U}{2D}x} - \frac{C_{in}}{l} x e^{\frac{U}{2D}x} \end{aligned}$$

dengan cara yang sama seperti Lampiran 11, maka berdasarkan persamaan (3.30), dapat diketahui bahwa fungsi $-C_{in} e^{\frac{U}{2D}x} + \frac{C_{in}}{l} x e^{\frac{U}{2D}x}$ diekspansikan menggunakan deret Fourier seperti berikut.

$$\sum_{n=1}^{\infty} E_n e^{\frac{U}{2D}x} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = -C_{in} e^{\frac{U}{2D}x} + \frac{C_{in}}{l} x e^{\frac{U}{2D}x}$$

Dengan demikian, kondisi awal $C(x, 0)$ dapat diperoleh

$$\begin{aligned} C(x, 0) &= -C_{in} e^{\frac{U}{2D}x} + \frac{C_{in}}{l} x e^{\frac{U}{2D}x} + C_{in} e^{\frac{U}{2D}x} - \frac{C_{in}}{l} x e^{\frac{U}{2D}x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Dengan demikian, dapat dijamin persamaan (3.39) merupakan solusi persamaan keseimbangan massa reaktor yang memenuhi kondisi awal (3.2).

Lampiran 13: Pembuktian Persamaan (3.40) Memenuhi Kondisi Awal (3.2)

Untuk membuktikan persamaan (3.40) memenuhi kondisi awal (3.2), maka perlu dimasukkan nilai $t = 0$ pada persamaan tersebut. Sehingga pada saat $t = 0$ persamaan (3.40) menjadi

$$\begin{aligned} C(x, 0) &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} E_n e^0 e^{\frac{U}{2D}x} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right) + k_5 e^{\frac{U}{2D}x} \cos\left(\frac{\sqrt{|U^2 + 4D\gamma|}}{2D}x\right) \dots \\ &\quad + k_6 e^{\frac{U}{2D}x} \sin\left(\frac{\sqrt{|U^2 + 4D\gamma|}}{2D}x\right) \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} E_n e^{\frac{U}{2D}x} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right) + k_5 e^{\frac{U}{2D}x} \cos\left(\frac{\sqrt{|U^2 + 4D\gamma|}}{2D}x\right) \\ &\quad + k_6 e^{\frac{U}{2D}x} \sin\left(\frac{\sqrt{|U^2 + 4D\gamma|}}{2D}x\right) \end{aligned}$$

dengan cara yang sama seperti Lampiran 11 dan 12, maka kondisi awal $C(x, 0)$ dapat diperoleh seperti berikut.

$$\begin{aligned} C(x, 0) &= \left(-e^{\frac{U}{2D}x} k_5 \cos\left(\frac{\sqrt{|U^2 + 4D\gamma|}}{2D}x\right) + e^{\frac{U}{2D}x} k_5 \cos\left(\frac{\sqrt{|U^2 + 4D\gamma|}}{2D}x\right) \right) \dots \\ &\quad + \left(-e^{\frac{U}{2D}x} k_6 \sin\left(\frac{\sqrt{|U^2 + 4D\gamma|}}{2D}x\right) + e^{\frac{U}{2D}x} k_6 \sin\left(\frac{\sqrt{|U^2 + 4D\gamma|}}{2D}x\right) \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Dengan demikian, dapat dijamin persamaan (3.40) merupakan solusi persamaan keseimbangan massa reaktor yang memenuhi kondisi awal (3.2).

Lampiran 14: Tabel Perubahan Konsentrasi Massa Zat di dalam Reaktor pada Kondisi $U^2 + 4D\gamma > 0$

x	$C(x, 5)$	$C(x, 20)$	$C(x, 100)$	$C(x, 1000)$	$C(x, 1000)$
0	100	100	100	100	100
0,2	90,0717	90,5686	90,5729	90,5729	90,5729
0,4	81,0363	82,0256	82,0343	82,0343	82,0343
0,6	72,8153	74,2875	74,3005	74,3005	74,3005
0,8	65,3378	67,2783	67,2956	67,2956	67,2956
1	58,5401	60,9293	60,9508	60,9508	60,9508
1,2	52,3642	55,1783	55,204	55,204	55,204
1,4	46,7578	49,969	49,9987	49,9987	49,9987
1,6	41,6733	45,2503	45,2839	45,2839	45,2839
1,8	37,0676	40,9759	41,0133	41,0133	41,0133
2	32,901	37,104	37,145	37,145	37,145
2,2	29,1374	33,5967	33,6412	33,6412	33,6412
2,4	25,7435	30,4196	30,4673	30,4673	30,4673
2,6	22,6887	27,5415	27,5924	27,5924	27,5924
2,8	19,9448	24,9343	24,9881	24,9881	24,9881
3	17,4855	22,5724	22,6289	22,6289	22,6289
3,2	15,2866	20,4328	20,4917	20,4917	20,4917
3,4	13,3255	18,4944	18,5556	18,5556	18,5556
3,6	11,5812	16,7383	16,8014	16,8014	16,8014
3,8	10,0341	15,1472	15,2121	15,2121	15,2121
4	8,6661	13,7056	13,772	13,772	13,772
4,2	7,4601	12,3993	12,4669	12,4669	12,4669
4,4	6,4005	11,2157	11,2842	11,2842	11,2842
4,6	5,4725	10,1429	10,2121	10,2121	10,2121
4,8	4,6627	9,1706	9,2402	9,2402	9,2402
5	3,9586	8,2892	8,3589	8,3589	8,3589
5,2	3,3485	7,4901	7,5596	7,5596	7,5596
5,4	2,822	6,7653	6,8345	6,8345	6,8345
5,6	2,3693	6,1079	6,1763	6,1763	6,1763
5,8	1,9817	5,5113	5,5787	5,5787	5,5787
6	1,651	4,9696	5,0359	5,0359	5,0359
6,2	1,3701	4,4776	4,5423	4,5423	4,5423
6,4	1,1324	4,0303	4,0933	4,0933	4,0933
6,6	0,9322	3,6234	3,6844	3,6844	3,6844
6,8	0,7643	3,2528	3,3116	3,3116	3,3116
7	0,624	2,9149	2,9712	2,9712	2,9712
7,2	0,5073	2,6063	2,6599	2,6599	2,6599
7,4	0,4106	2,3239	2,3747	2,3747	2,3747

7,6	0,3309	2,065	2,1126	2,1126	2,1126
7,8	0,2654	1,8268	1,8712	1,8712	1,8712
8	0,2118	1,6071	1,6481	1,6481	1,6481
8,2	0,168	1,4037	1,441	1,441	1,441
8,4	0,1324	1,2144	1,248	1,248	1,248
8,6	0,1035	1,0373	1,067	1,067	1,067
8,8	0,08	0,8707	0,8964	0,8964	0,8964
9	0,0607	0,7128	0,7344	0,7344	0,7344
9,2	0,0449	0,5621	0,5795	0,5795	0,5795
9,4	0,0316	0,4169	0,4301	0,4301	0,4301
9,6	0,0201	0,2758	0,2846	0,2846	0,2846
9,8	0,0098	0,1373	0,1417	0,1417	0,1417
10	0	0	0	0	0

Dari hasil perhitungan menggunakan program matlab pada data di atas, dapat diketahui bahwa pada saat $t = 100$, $t = 100$, dan $t = 10.000$ jumlah konsentrasi massa zat yang berubah di sepanjang reaktor adalah sama, artinya perubahannya tetap. Dengan demikian, semakin lama proses reaksi, maka perubahan konsentrasinya semakin tetap atau sudah mencapai kondisi *steady-state*.

Lampiran 15: Program untuk Menampilkan Grafik Solusi Persamaan Keseimbangan Massa Reaktor

```

% % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % %
%
%   Solusi Persamaan Keseimbangan Massa Reaktor   %
%           Oleh                                     %
%           Moh. Syaiful Arif                       %
%           Mahasiswa Jurusan Matematika           %
%           Fakultas Sains dan Teknologi           %
%           UIN Maulana Malik Ibrahim Malang       %
%           11 Juni 2015                           %
% % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % %

clc,clear

% Menentukan Parameter Persamaan Keseimbangna Massa
Reaktor
D=0.083;      % Koefisien Penyebaran Zat ( $D$ )
U=0.008;      % Kecepatan Zat yang Mengalir dalam
Reaktor ( $U$ )
gamma=0.018;  % Koefisien Reaksi ( $\gamma$ )
Cin=100;      % Banyaknya Konsentrasi Zat yang Masuk
dalam Reaktor  $C_{in}$ 

% Menentukan Panjang Reaktor
l = 10;
x = 0:0.1:1;
% Menentukan Waktu yang diperlukan Selama Proses Reaksi
t=0:0.3:1.5;
t = [t 10];

% Solusi Persamaan Keseimbangan Massa Reaktor
A1=sqrt (U^2+(4*D*gamma) ) / (2*D) ;
k1 = (Cin*exp ( (U/ (2*D) ) -A1) *1) ) / (exp ( (U/ (2*D) ) -A1) *1) -
exp ( (U/ (2*D) ) +A1) *1) ) ;
k2=(-Cin*exp ( (U/ (2*D) ) +A1) *1) ) / (exp ( (U/ (2*D) ) -A1) *1) -
exp ( (U/ (2*D) ) +A1) *1) ) ;
A2=sqrt (abs (U^2+(4*D*gamma) ) ) / (2*D) ;
k5=Cin;
k6=-Cin*cot (A2*1) ;

C=zeros (length (x) , length (t) ) ;

for j=2:length (t)
    for i = 1:length (x)
        jml=0;
        for n =1:150

```

```

beta=sqrt(((2*n*pi*D)^2+(U^2*l^2))...
          /(4*D*(l^2)));
if (U^2+(4*D*gamma))>0
    En=(2*n*pi)*(k1*(exp(A1*l)*cos(n*pi)-1)...
              +k2*(exp(-A1*l)*cos(n*pi)-1))...
        /((A1*l)^2+(n*pi)^2);
elseif (U^2+(4*D*gamma))==0
    En=-(2*Cin)/(n*pi);
elseif (U^2+(4*D*gamma))<0
    En=((k5*(cos(A2*l+n*pi)-1)...
        +k6*(sin(A2*l+n*pi)))/(A2*l+n*pi))...
        -((k5*(cos(A2*l-n*pi)-1)...
        +k6*(sin(A2*l-n*pi)))/(A2*l-n*pi));
end

V=En*exp(-(beta^2+gamma)*t(j))...
  *exp((U/(2*D))*x(i))*sin((n*pi*x(i))/l);
jml=V+jml;

end

if (U^2+(4*D*gamma))>0

    W(i)=(k1*exp(((U/(2*D))+A1)*x(i))...
          +(k2*exp(((U/(2*D))-A1)*x(i))));
elseif (U^2+(4*D*gamma))==0
    W(i)=(Cin*exp((U/(2*D))*x(i))...
          -((Cin*x(i)*exp((U/(2*D))*x(i)))/l);
elseif (U^2+(4*D*gamma))<0

    W(i)=exp((U/(2*D))*x(i))*(k5*cos(A2*x(i))...
          +k6*sin(A2*x(i)));
end

C(i,j) = jml+W(i);
end

end

% Menampilkan Grafik Solusi Persamaan Keseimbangan
Massa Reaktor
plot(x,C,'-*')
ylim([-10 Cin])
title('Grafik Perubahan Konsentrasi Massa Zat Pada
Reaktor')
xlabel('x')
ylabel('C(x,t)')
grid on
legend({'t = ',num2str(t(1))},{'t = ',num2str(t(2))},

```

```

['t = ', num2str(t(3))], ['t = ', num2str(t(4))], ...
['t = ', num2str(t(5))], ['t = ', num2str(t(6))], ...
['t = ', num2str(t(7))]]);

```

```

% Menyimpan Hasil tampilan Grafik Solusi
print('gambar_1', '-dpng')

```

Keterangan :

Untuk menampilkan Gambar 3.2 sampai dengan Gambar 3.5, maka parameter U , D , γ , dan Cin pada program di atas, disesuaikan dengan parameter yang digunakan. Kemudian untuk menampilkan Gambar 3.7, maka digunakan parameter seperti berikut:

```

D=0.1;      % Koefisien Penyebaran Zat ( $D$ )
U=0.2;      % Kecepatan Zat yang Mengalir dalam Reaktor
              ( $U$ )
gamma=-0.1; % Koefisien Reaksi ( $\gamma$ )

```

sedangkan untuk menampilkan Gambar 3.8, maka digunakan parameter seperti berikut:

```

D=0.1;      % Koefisien Penyebaran Zat
U=0.1;      % Kecepatan Zat yang Mengalir dalam Reaktor
gamma=-0.3; % Koefisien Reaksi ( $\gamma$ )

```

Lampiran 16:Program untuk Menampilkan Grafik Tiga Dimensi Perubahan Konsentrasi Massa Zat di dalam Reaktor Selama Kurun Waktu 15 Detik Seperti pada Gambar 3.6

```

% % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % %
%
%   Solusi Persamaan Keseimbangan Massa Reaktor   %
%           Oleh                                     %
%           Moh. Syaiful Arif                       %
%           Mahasiswa Jurusan Matematika           %
%           Fakultas Sains dan Teknologi           %
%           UIN Maulana Malik Ibrahim Malang       %
%           11 Juni 2015                           %
% % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % % %
clc,clear

% Menentukan Parameter Persamaan Keseimbangan Massa
Reaktor
D=0.083;      % Koefisien Penyebaran Zat ( $D$ )
U=0.008;     % Kecepatan Zat yang Mengalir dalam
Reaktor ( $U$ )
gamma=0.2;   % Koefisien Reaksi ( $\gamma$ )
Cin=100;    % Banyaknya Konsentrasi Zat yang Masuk
dalam Reaktor  $C_{in}$ 

% Menentukan Panjang Reaktor
l = 10;
x = 0:0.1:1;
% Menentukan Waktu yang diperlukan Selama Proses Reaksi
t=0:0.3:15;

% Solusi Persamaan Keseimbangan Massa Reaktor
% Solusi Persamaan Keseimbangan Massa Reaktor
A1=sqrt (U^2+(4*D*gamma)) / (2*D);
k1 =(Cin*exp(((U/(2*D))-A1)*l)) / (exp(((U/(2*D))-A1)*l) -
exp(((U/(2*D))+A1)*l));
k2=(-Cin*exp(((U/(2*D))+A1)*l)) / (exp(((U/(2*D))-A1)*l) -
exp(((U/(2*D))+A1)*l));
A2=sqrt (abs (U^2+(4*D*gamma)) ) / (2*D);
k5=Cin;
k6=-Cin*cot (A2*l);

C=zeros (length (x), length (t));

for j=2:length (t)
    for i = 1:length (x)
        jml=0;

```

```

for n =1:150
beta=sqrt(((2*n*pi*D)^2+(U^2*l^2))...
          /(4*D*(l^2)));
if (U^2+(4*D*gamma))>0
    En=(2*n*pi)*(k1*(exp(A1*l)*cos(n*pi)-1)...
              +k2*(exp(-A1*l)*cos(n*pi)-1))...
        /((A1*l)^2+(n*pi)^2);
elseif (U^2+(4*D*gamma))==0
    En=-(2*Cin)/(n*pi);
elseif (U^2+(4*D*gamma))<0
    En=((k5*(cos(A2*l+n*pi)-1)...
        +k6*(sin(A2*l+n*pi)))/(A2*l+n*pi))...
        -((k5*(cos(A2*l-n*pi)-1)...
        +k6*(sin(A2*l-n*pi)))/(A2*l-n*pi));
end

V=En*exp(-(beta^2+gamma)*t(j))...
    *exp((U/(2*D))*x(i))*sin((n*pi*x(i))/l);
jml=V+jml;

end
if (U^2+(4*D*gamma))>0
    W(i)=(k1*exp(((U/(2*D))+A1)*x(i))...
          +k2*exp(((U/(2*D))-A1)*x(i)));
elseif (U^2+(4*D*gamma))==0
    W(i)=(Cin*exp((U/(2*D))*x(i))...
          -((Cin*x(i)*exp((U/(2*D))*x(i)))/l);
elseif (U^2+(4*D*gamma))<0
    W(i)=exp((U/(2*D))*x(i))*(k5*cos(A2*x(i))...
          +k6*sin(A2*x(i)));
end

C(i,j) = jml+W(i);
end

end

% Menampilkan Grafik Tiga Dimensi Solusi Persamaan
% Keseimbangan Massa Reaktor
surf(t,x,C)
title('Perubahan Konsentrasi Massa Zat di dalam
      Reaktor')
xlabel('t')
ylabel('x')
zlabel('C(x,t)')

% Menyimpan Hasil tampilan Grafik Solusi
print('gambar_1','-dpng')

```

RIWAYAT HIDUP

Moh. Syaiful Arif, lahir di Kabupaten Lamongan pada tanggal 11 Juli 1992, biasa dipanggil Arif, tinggal di Desa Tejoasri RT.002 RW.004 Kecamatan Laren Kabupaten Lamongan. Anak pertama dari Bapak Su'amar, S.Ag dan Ibu Fatmawati.

Pendidikan dasarnya ditempuh di MI Hidayatut Tholibin dan lulus pada tahun 2004, setelah itu dia melanjutkan pendidikan di MTS Almuslimun Kawistolegi Lamongan dan lulus pada tahun 2007. Kemudian dia melanjutkan pendidikan di SMK NU 1 Karanggeneng Lamongan dan lulus pada tahun 2010. Kemudian dia bekerja di perusahaan PT Satria Niaga Utama Gresik sebagai koordinator di bagian *cleaning conveyor* dari pelabuhan menuju gudang penyimpanan selama tujuh bulan. Kemudian pada tahun 2011, dia menempuh kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang dan mengambil Jurusan Matematika.

Selama menjadi mahasiswa, dia berperan aktif di Himpunan Mahasiswa Jurusan (HMJ) Matematika dalam rangka mengembangkan kompetensi akademiknya. Selain itu, dia juga menjadi asisten laboratorium dalam rangka mengembangkan keilmuannya.



**KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933**

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Moh. Syaiful Arif
NIM : 11610049
Fakultas/ Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Solusi Persamaan Keseimbangan Massa Reaktor
Menggunakan Metode Pemisahan Variabel
Pembimbing I : Mohammad Jamhuri, M.Si
Pembimbing II : Ach. Nashichuddin, M.A

No	Tanggal	Materi Konsultasi	Tanda Tangan
1	31 Maret 2015	Konsultasi Bab I dan II	1.
2	09 April 2015	Revisi Bab I dan II	2.
3	20 April 2015	Konsultasi Bab III	3.
4	30 April 2015	Konsultasi Agama Bab I dan II	4.
5	12 Mei 2015	Revisi Bab I, II, III	5.
6	13 Mei 2015	ACC Agama Bab I dan II	6.
7	29 Mei 2015	ACC Bab I, II, III	7.
8	03 Juni 2015	Konsultasi Agama Bab III	8.
9	08 Juni 2015	Konsultasi Bab IV	9.
10	11 Juni 2015	ACC Keseluruhan	10.
11	11 Juni 2015	ACC Agama Keseluruhan	11.

Malang, 11 Juni 2015
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001