ANALISIS METODE BEDA HINGGA CRANK-NICHOLSON DENGAN TRANSFORMASI PEUBAH PADA PERHITUNGAN HARGA OPSI ASIA

SKRIPSI

OLEH
DIAH PRAMINIA
NIM. 11610061

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2015

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ANALISIS METODE BEDA HINGGA CRANK-NICHOLSON DENGAN TRANSFORMASI PEUBAH PADA PERHITUNGAN HARGA OPSI ASIA

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh
Diah Praminia
NIM. 11610061

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2015

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ANALISIS METODE BEDA HINGGA CRANK-NICHOLSON DENGAN TRANSFORMASI PEUBAH PADA PERHITUNGAN HARGA OPSI ASIA

SKRIPSI

Oleh
Diah Praminia
NIM. 11610061

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 12 Mei 2015

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Abdul Aziz, M.Si	H. Wahyu H. Irawan, M. Pd
NIP. 19760318 200604 1 002	NIP. 19710420 200003 1 003

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ANALISIS METODE BEDA HINGGA CRANK-NICHOLSON DENGAN TRANSFORMASI PEUBAH PADA PERHITUNGAN HARGA OPSI ASIA

SKRIPSI

Oleh
Diah Praminia
NIM. 11610061

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal 29 Juni 2015

Penguji Utama	:	Dr. Sri Harini, M.Si	.....
Ketua Penguji	:	Drs. H. Turmudi, M.Si	.....
Sekretaris Penguji	:	Abdul Aziz, M.Si	.....
Anggota Penguji	:	H. Wahyu H. Irawan, M.Pd	.....

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP.19751006 200312 1 001

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Diah Praminia
NIM	: 11610061
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	: Analisis Metode Beda Hingga Crank-Nicholson dengan Transformasi Peubah pada Perhitungan Harga Opsi Asia

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima saksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 29 Juni 2015
Yang membuat pernyataan,

Diah Praminia
NIM. 11610061

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

MOTO

HIDUP ADALAH PERJUANGAN, TETAP BERJALAN LURUS DAN TIDAK MENOLEH APALAGI BERBALIK

WHAT SO EVER THEY SAY, IT'S ME

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Ayahanda Ahmad Sadin, Ibunda Sumarni, serta kakak-kakak tercinta Ahmad Ridho, Ahmad Mulyadi Ridho, Maimuna, Umi Kulsum, Usman Efendi, Umi Habibah, serta adik-adik tercinta yang selalu memberikan semangat serta doa kepada penulis, dan Kyai Slamet Burhanuddin yang selalu memberikan dukungan kepada penulis.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Segala puji bagi Allah Swt. atas rahmat, taufik serta hidayah-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis banyak mendapatkan bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Untuk itu ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan yang setinggi-tingginya penulis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Abdul Aziz, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, motivasi, dan berbagi pengalaman yang berharga kepada penulis.
5. H. Wahyu H. Irawan, M.Pd, selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan dan berbagi ilmunya kepada penulis.
6. Wahyudi, S.Si yang telah banyak membantu penulis dalam menyelesaikan penelitian ini.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

7. Segenap civitas akademika Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen, terima kasih atas segala ilmu dan bimbinganya.
8. Bapak dan Ibu yang selalu memberikan doa, semangat, serta motivasi kepada penulis sampai saat ini.
9. Seluruh teman-teman di Jurusan Matematika angkatan 2011, terutama Winda Apriliani, Alifaturrohmah, Anis Mukhibatul Badi', Moh. Afifuddin, Mochammad Irfan, dan M. Gaddafi yang telah banyak membantu selama masa perkuliahan.
10. Seluruh keluarga besar Pondok Pesantren Darul Ulum Al-Fadholi yang telah memberikan pengalaman yang berharga kepada penulis.
11. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik moral maupun material.

Akhirnya penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat bagi penulis dan pembaca.

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Malang, Juni 2015

Penulis

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL

HALAMAN PENGAJUAN

HALAMAN PERSETUJUAN

HALAMAN PENGESAHAN

HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

HALAMAN MOTO

HALAMAN PERSEMBAHAN

KATA PENGANTAR viii

DAFTAR ISI x

DAFTAR GAMBAR xii

DAFTAR SIMBOL xiii

ABSTRAK... xv

ABSTRACT. xvi

مخلص..... xvii

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang 1
1.2 Rumusan Masalah 5
1.3 Tujuan Penelitian 5
1.4 Definisi Operasional 6
1.5 Manfaat Penelitian 7
1.6 Batasan Masalah 7
1.7 Sistematika Penulisan 8

BAB II KAJIAN PUSTAKA

2.1 Deret Taylor 9
2.2 Aproksimasi Metode Beda Hingga 12
2.3 Opsi 15
2.4 Tipe-Tipe Opsi 18
2.5 Tipe Opsi Asia 18
2.6 Model *Black-Scholes* 19
2.7 Metode Beda Hingga Crank-Nicholson 21
2.8 Proses Stokastik 26
2.9 Gerak Brown 26
2.10 *Itô Process* 27
2.11 Perkalian *Itô Process* 28

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

2.12 Proses Harga Saham 28
2.13 Syarat Batas dan Nilai Awal 29
2.14 Matriks Tridiagonal 30
2.15 *Khiyar* dalam Jual Beli 31

BAB III METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian 33
3.2 Sumber Data 33
3.3 Langkah-langkah Penelitian 33

BAB IV PEMBAHASAN

4.1 Transformasi Peubah 36
4.2 Metode Beda Hingga Crank-Nicholson dengan Trasformasi Peubah 39
4.3 Solusi Matriks 42
4.4 Simulasi Komputasi 50
4.4.1 Algoritma untuk Menghitung Harga Opsi Asia 50
4.4.2 Perhitungan Harga Opsi Eropa 51
4.4.3 Perhitungan Harga Opsi Asia 59
4.5 Hikmah *Khiyar* dalam Jual Beli 62

BAB V PENUTUP

5.1 Kesimpulan 36
5.2 Saran 39

DAFTAR PUSTAKA 65

LAMPIRAN-LAMPIRAN

RIWAYAT HIDUP

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Skema Beda Hingga Crank-Nicholson 24
Gambar 2.2 Grafik Simulasi Metode Beda Hingga Crank-Nicholson Opsi *Call* Asia dengan $N = 128$ 25
Gambar 2.3 Grafik Simulasi Metode Beda Hingga Crank-Nicholson Opsi *Put* Asia dengan $N = 128$ 25
Gambar 4.1 Skema Crank-Nicholson 42
Gambar 4.2 Pergerakan Harga Saham 43
Gambar 4.3 *Grid* Beda Hingga 47
Gambar 4.4 Skema Crank-Nicholson pada Satu Tahap 48
Gambar 4.5 Grafik Simulasi Metode Beda Hingga Crank-Nicholson dengan Transformasi Peubah Opsi *Call* Eropa dengan $N = 64$ 52
Gambar 4.6 Grafik Simulasi Error Metode Beda Hingga Crank-Nicholson dengan Transformasi Peubah Opsi *Call* Eropa dengan $N = 64$ 53
Gambar 4.7 Grafik Simulasi Metode Beda Hingga Crank-Nicholson dengan Transformasi Peubah Opsi *Call* Eropa dengan $N = 128$ 54
Gambar 4.8 Grafik Simulasi Error Metode Beda Hingga Crank-Nicholson dengan Transformasi Peubah Opsi *Call* Eropa dengan $N = 128$ 54
Gambar 4.9 Grafik Simulasi Metode Beda Hingga Crank-Nicholson dengan Transformasi Peubah Opsi *Put* Eropa dengan $N = 64$ 55
Gambar 4.10 Grafik Simulasi Error Metode Beda Hingga Crank-Nicholson dengan Transformasi Peubah Opsi *Put* Eropa dengan $N = 64$ 56
Gambar 4.11 Grafik Simulasi Metode Beda Hingga Crank-Nicholson dengan Transformasi Peubah Opsi *Put* Eropa dengan $N = 128$ 57
Gambar 4.12 Grafik Simulasi Error Metode Beda Hingga Crank-Nicholson dengan Transformasi Peubah Opsi *Put* Eropa dengan $N = 128$ 58
Gambar 4.13 Grafik Perbandingan Simulasi Metode Beda Hingga Crank-Nicholson dan Beda Hingga Crank-Nicholson dengan Transformasi Peubah Opsi *Call* Asia 60
Gambar 4.14 Grafik Perbandingan Simulasi Metode Beda Hingga Crank-Nicholson dan Beda Hingga Crank-Nicholson dengan Transformasi Peubah Opsi *Put* Asia 61

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

DAFTAR SIMBOL

S	: Harga Saham
K	: Harga Ketentuan
T	: Waktu Jatuh Tempo
t	: Waktu Eksekusi
r	: Tingkat Suku Bunga Bebas Resiko
σ	: Volatilitas Harga Saham
N	: Banyaknya Partisi Harga Saham
M	: Banyaknya Partisi Waktu
n	: Banyaknya Kemungkinan Harga Saham
V	: Harga Opsi
W	: Transformasi Peubah dari V
τ	: Tranformasi Peubah dari t
y	: Transformasi Peubah dari S
i	: Partisi Waktu
j	: Partisi Harga Saham
C	: Harga Opsi *Call*
P	: Harga Opsi *Put*
$\bar{S}$	: Rata-rata Aritmatika Harga Saham Opsi Asia
$f(x_i)$	: Fungsi f di titik x_i
$f', f'', \ldots, f^n$	: Turunan Pertama, Kedua Sampai Turunan ke-n
$f(x+\Delta x)$	: Fungsi dengan Variabel Bergeser ke Depan Sebesar Δx

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$f(x-\Delta x)$	: Fungsi dengan Variabel Bergeser ke Belakang Sebesar Δx
$e^{-r\Delta t}$	: Nilai Diskonto
$S(t_i)$	: Harga Saham pada Saat t_i
ΔS	: Jarak atau Selisih pada Harga Saham
Δt	: Jarak atau Selisih pada Waktu
$V(S,t)$	: Harga Opsi yang Bergantung pada Harga Saham dan Waktu
$W(y,\tau)$	: Transformasi Peubah dari $V(S,t)$
a,b	: Konstanta
Matriks A	: Matriks Tridiagonal dengan W_j^i
Matriks B	: Matriks Tridiagonal dengan W_j^{i+1}
α,β,γ	: Konstanta Matriks A
$\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\gamma}$	: Konstanta Matriks B

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ABSTRAK

Praminia, Diah. 2015. **Analisis Metode Beda Hingga Crank-Nicholson dengan Transformasi Peubah pada Perhitungan Harga Opsi Asia.** Skripsi Jurusan Matematika. Fakultas Sains dan Teknologi. Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing(I) Abdul Aziz, M.Si. (II) Wahyu H. Irawan, M.Pd.

Kata Kunci: Opsi, *Black-Scholes*, Crank-Nicholson, Transformasi Peubah

Opsi dalam dunia keuangan adalah sebuah kontrak untuk membeli atau menjual suatu aset dengan harga tertentu dan dalam jangka waktu tertentu. Opsi dibedakan menjadi dua, yaitu opsi *call* dan opsi *put*. Kontrak finansial untuk membeli opsi dengan harga tertentu disebut opsi *call*. Sedangkan untuk menjual opsi dengan harga tertentu disebut opsi *put*. Ada dua macam opsi berdasarkan waktu pelaksanaannya, yaitu opsi Eropa dan opsi Amerika. Opsi Eropa adalah opsi yang dilaksanakan hanya pada waktu jatuh tempo saja. Sedangkan opsi Amerika adalah opsi yang dilaksanakan kapan saja hingga waktu jatuh tempo. Sedangkan opsi yang dapat berlaku seperti keduanya disebut opsi Asia. Aset dasar opsi yang digunakan dalam penelitian ini berupa opsi saham.

Tujuan penelitian ini adalah untuk menganalisis metode beda hingga Crank-Nicholson dengan transformasi peubah pada perhitungan harga opsi Asia. Metode penelitian dari penelitian ini adalah mentransformasikan harga saham S menjadi $\ln S$ pada metode beda hingga Crank-Nicholson menggunakan persamaan *Black-Scholes*, dan disimulasikan dengan menggunakan program matlab R2010a, kemudian membandingkan metode beda hingga Crank-Nicholson menggunakan transformasi peubah dengan metode beda hingga Crank-Nicholson tanpa menggunakan transformasi peubah.

Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa metode beda hingga Crank-Nicholson dengan transfomasi peubah dapat digunkan untuk menghitung opsi Asia dan hasil perhitungan metode beda hingga Crank-Nicholson dengan transformasi peubah lebih efektif daripada metode beda hingga Crank-Nicholson tanpa transfomasi peubah karena metode ini memberikan hasil yang lebih optimal. Pada opsi Asia menghilangkan kemungkinan seseorang dicurangi oleh pemanipulasian harga aset sehingga terhindar dari kerugian, seperti halnya opsi Asia, hikmah khiyar dalam jual beli yaitu menghindari penipuan dan penyesalan bagi penjual dan pembeli. Seorang pembeli atau penjual dapat meneruskan atau membatalkan suatu perjanjian jual beli selama jangka waktu yang telah ditentukan.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ABSTRACT

Praminia, Diah. 2015. **Analysis of Crank-Nicholson Finite Different Method with Transformation of Variable on Asian Option Price Calculation**. Department of Mathematics Faculty of Science and Technology, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Supervisor (I) Abdul Aziz, M.Si. (II) Wahyu H. Irawan, M.Pd.

Keywords: Option, Black-Scholes, Crank-Nicholson, Transformation of Variable

The options in the world of finance is a contract to buy or sell an asset with a certain price and with a certain period. Options come in two varieties, calls and puts. A financial contract to buy option at a specific price is called a call and to sell option at a specific price is called a put. There are two kinds of options based on the use of time, these are European options and American options. European options are options exercised only at expiration date. While the American option is an option that is exercised every when till expiration date. options that can behave as both are called Asian options. Basic asset of the option that was used in this research is stock options

The purpose of the research is to analyze Crank-Nicolson finite different method with transformation of variable on Asian option price calculation. The research-method from the research are transform the variable finance S to variable $\ln S$ on Crank-Nicolson finite different method use Black-Scholes formula, and the result is simulated use Matlab R2010a program, to know the efficient of this method, then compare the Crank-Nicolson finite different method use transformation of variable with Crank-Nicolson finite different method without use transformation of variable

The result of the research shows that Crank-Nicolson method with transformation of variable is can be used to calculate Asian and the calculation of Crank-Nicolson finite different method use transformation of variable is more effective than Crank-Nicolson finite different method without transformation of variable. because this method gives results which are more optimal.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ملخص

برامينيا, دياه. 2015. **تحليل أسلوب مختلف المحدودة الساعد-نيكلسون مع تحول متغير على حساب سعر الخيار الآسيوي**. قسم الرياضيات في كلية العلوم والتكنولوجيا. الدولة الإسلامية من جامعة مولانا إبراهيم مالك مالانغ. المشرف(1) عبد العزيزالما جستير (2) وحيوهينكي ايراوان الما جستير.

الكلمات الرئيسية: الخيار، بلاك-شولز، الساعد-نيكلسون، تحول متغير

الخيارات الموجودة في عالم المال عقد شراء أو بيع أحد أصول بسعر معين وخلال فترة زمنية معينة. تميز في خيارين، هما خيارات المكالمات ووضع الخيارات. عقد المالي لشراء خيارات بسعر بعض خيارات استدعاء ما يسمى. أما بالنسبة لبيع هذا الخيار مع الخيار سعر معين يسمى وضع. هناك نوعان من خيارات استناداً إلى الوقت لتنفيذه، أي الخيار الأوروبي والخيار الأمريكي. الخيار الأوروبي هو الخيار الذي يمارس فقط في وقت انتهاء الصلاحية فقط. في حين أن الخيار الأمريكي هو الخيار الذي يمارس في أي وقت حتى تاريخ الاستحقاق. بينما الخيارات التي يمكن أن تتصرف كما تسمى كل الخيارات. الأصول الأساسية للخيار الذي تم استخدامه في هذا البحث في شكل خيارات الأسهم.

والغرض من هذا البحث تحليل أساليب مختلفة حتى الساعد-نيكلسون مع تحول المتغيرات في حساب سعر الخيار. أسلوب بينيلتيان للبحوث هو تحويل سعر الأسهم S يكون $\ln S$ على أساليب مختلفة للساعد-نيكولسون المستخدمة في معادلة بلاك-شولز، والمحاكاة باستخدام برنامج matlab R2010a، ثم قارن بين الأساليب المختلفة حتى استخدام الساعد-نيكولسون تحولاً متغيرات مع أساليب مختلفة للساعد-نيكولسون دون استخدام تحويل المتغيرات.

نتائج هذه الدراسة تشير إلى أن أسلوباً مختلفاً للساعد-نيكلسون مع تحولات المتغيرات التي يمكن استخدامها لحساب خيار آسيا ونتيجة الحساب أساليب مختلفة حتى الساعد-نيكلسون مع تحول المتغيرات أكثر فعالية من أسلوباً مختلفاً للساعد-نيكولسون دون تحويلات المتغيرات لأن هذا الأسلوب يعطي نتائج والتي أكثر الأمثل.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Deret Taylor

Andaikan f dan semua turunannya, $f', f'', f''', \ldots$, kontinu di dalam selang $[a, b]$. Misalkan $x_0 \in [a, b]$, maka untuk nilai-nilai x di sekitar x_0 dan $x \in [a, b]$, $f(x)$ dapat diperluas (diekspansi) ke dalam deret Taylor berikut.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^m}{m!} f^{m}(x_0) + \ldots \tag{2.1}$$

Munir (2010) menyatakan bahwa persamaan (2.1) merupakan penjumlahan dari suku-suku (*term*) yang disebut deret. Perhatikanlah bahwa deret Taylor ini panjangnya tidak berhingga sehingga untuk memudahkan penulisan suku-suku selanjutnya menggunakan tanda elipsis (...). Jika dimisalkan $(x - x_0) = h$, maka $f(x)$ dapat juga ditulis sebagai

$$f(x) = f(x_0) + \frac{h}{1!} f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \cdots + \frac{h^m}{m!} f^{(m)}(x_0) + \cdots \tag{2.2}$$

Nugroho (2009) menyatakan bahwa suatu teori sederhana mengenai hampiran numerik untuk turunan dapat diperoleh melalui ekspansi deret Taylor dari $f(x+h)$ di sekitar x yaitu

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \cdots + \frac{h^m}{m!} f^{(m)}(x) + \cdots \tag{2.3}$$

Djojodiharjo (2000) menyatakan bahwa bila persamaan (2.3) dipangkas setelah suku turunan pertama, maka akan diperoleh bentuk

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + O(h) \tag{2.4}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Persamaan (2.4) dapat digunakan untuk meramalkan nilai turunan f di $x_0 \rightarrow f'(x_0)$

$$f'(x) = \underbrace{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{\text{pendekatan orde pertama}} + \underbrace{\frac{O(h^2)}{h}}_{\text{galat pemangkasan}} \tag{2.5}$$

Dengan demikian turunan suatu fungsi $f(x)$ untuk beda maju pada $x = x_0$ didefinisikan sebagai

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{2.6}$$

Djojodiharjo (2000) menyatakan bahwa deret Taylor dapat diekspansikan ke belakang untuk menghitung nilai turunan fungsi $f(x)$ berdasarkan nilainya pada titik yang diketahui.

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{f''(x)h^2}{2} - \ldots. \tag{2.7}$$

Bila persamaan (2.7) dipangkas setelah turunan yang pertama dan disusun kembali, maka diperoleh beda mundur

$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \tag{2.8}$$

Djojodiharjo (2000) menyatakan bahwa cara ketiga untuk menghitung turunan pertama adalah dengan mengurangkan rumus beda ke belakang (2.7) dari rumus beda hingga ke depan berdasarkan ekspansi deret Taylor persamaan (2.3). Dengan demikian dihasilkan

$$f(x+h) - f(x-h) = 2f'(x)h + \frac{f'''(x)h^3}{3} + \ldots \tag{2.9}$$

Dari persamaan (2.9) diperoleh

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{f^{m}(x)h^2}{6} + \cdots \tag{2.10}$$

atau

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - O(h^2) \tag{2.11}$$

atau

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \tag{2.12}$$

Untuk memperkirakan turunan kedua $f(x)$ pada $x = x_0$ adalah dengan mengulangi prosedur untuk memperoleh turunan pertama, tetapi dengan menggunakan $f'(x)$ sebagai fungsi awal.

$$f''(x) \approx \frac{f'\left(x+\frac{h}{2}\right) - f'\left(x-\frac{h}{2}\right)}{h} \tag{2.13}$$

Dengan menggunakan persamaan (2.12), maka diperoleh

$$f'\left(x+\frac{h}{2}\right) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{2.14}$$

$$f'\left(x-\frac{h}{2}\right) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \tag{2.15}$$

Kemudian mensubstitusikan persamaan (2.14) dan (2.15) ke dalam persamaan (2.13) diperoleh

$$f''(x) \approx \frac{\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{f(x) - f(x-h)}{h}}{h}$$

$$\approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h} \times \frac{1}{h}$$

$$\approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \tag{2.16}$$

Persamaan (2.16) merupakan persamaan turunan kedua aproksimasi dengan deret Taylor.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

2.2 Aproksimasi Metode Beda Hingga

Salah satu metode numerik untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial adalah metode beda hingga. Metode beda hingga adalah suatu metode numerik untuk menyelesaikan suatu persamaan diferensial dengan mengaproksimasi turunan-turunan persamaan tersebut menjadi sistem persamaan linier (Sasongko, 2010). Metode beda hingga dalam penelitian ini adalah metode beda hingga Crank-Nicholson.

Wahyudi (2014) menyatakan bahwa gagasan yang mendasari metode beda hingga adalah menggantikan turunan parsial yang didapatkan dari ekspansi deret Taylor. Diasumsikan bahwa $V(t,S)$ dinyatakan oleh $V_{i,j}$, ekspansi deret Taylor untuk $V(t,S+\Delta S)$ dan $V(t,S-\Delta S)$ adalah sebagai berikut.

$$V(t,S+\Delta S) = V(t,S) + \frac{\partial V}{\partial S}\Delta S + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\Delta S^2 + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 V}{\partial S^3}\Delta S^3 + O(\Delta S^4) \quad (2.17)$$

$$V(t,S-\Delta S) = V(t,S) - \frac{\partial V}{\partial S}\Delta S + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\Delta S^2 - \frac{1}{6}\frac{\partial^3 V}{\partial S^3}\Delta S^3 + O(\Delta S^4) \quad (2.18)$$

Dengan menggunakan persamaan (2.17) diperoleh persamaan beda maju, yaitu

$$V(t,S+\Delta S) = V(t,S) + \frac{\partial V}{\partial S}\Delta S + O(\Delta S^2)$$

$$V(t,S+\Delta S) - V(t,S) = \frac{\partial V}{\partial S}\Delta S + O(\Delta S^2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial S}\Delta S \approx V(t,S+\Delta S) - V(t,S)$$

$$\frac{\partial V}{\partial S} \approx \frac{V(t,S+\Delta S) - V(t,S)}{\Delta S} \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial V}{\partial S} \approx \frac{V_{j+1}^{i} - V_{j}^{i}}{\Delta S} \quad (2.20)$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Sedangkan dengan menggunakan persamaan (2.18) diperoleh persamaan beda mundur, yaitu

$$V(t,S-\Delta S)=V(t,S)-\frac{\partial V}{\partial S}\Delta S+O\left(\Delta S^2\right)$$

$$V(t,S)-V(t,S-\Delta S)=\frac{\partial V}{\partial S}\Delta S+O\left(\Delta S^2\right)$$

$$\frac{\partial V}{\partial S}\Delta S\approx V(t,S)-V(t,S-\Delta S)$$

$$\frac{\partial V}{\partial S}\approx\frac{V(t,S)-V(t,S-\Delta S)}{\Delta S} \tag{2.21}$$

$$\approx\frac{V_j^i-V_{j-1}^i}{\Delta S} \tag{2.22}$$

Hasil pengurangan persamaan (2.19) dari (2.21) diperoleh persamaan beda pusat, yaitu

$$V(t,S+\Delta S)-V(t,S-\Delta S)=V(t,S)+\frac{\partial V}{\partial S}\Delta S-\left(V(t,S)-\frac{\partial V}{\partial S}\Delta S\right)+O(\Delta S^2)$$

$$=V(t,S)+\frac{\partial V}{\partial S}\Delta S-V(t,S)+\frac{\partial V}{\partial S}\Delta S+O\left(\Delta S^2\right)$$

$$=\frac{\partial V}{\partial S}2\Delta S+O\left(\Delta S^2\right)$$

$$\approx\frac{\partial V}{\partial S}2\Delta S$$

$$\frac{\partial V}{\partial S}\approx\frac{V(t,S+\Delta S)-V(t,S-\Delta S)}{2\Delta S}$$

$$\approx\frac{V_{j+1}^i-V_{j-1}^i}{2\Delta S} \tag{2.23}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Untuk memperoleh turunan kedua $V(t,S)$ yaitu dengan mengulangi prosedur untuk memperoleh turunan pertama, tetapi dengan menggunakan $\frac{\partial V}{\partial S}$ sebagai fungsi awal, yaitu:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \approx \frac{V'(S+\frac{\Delta S}{2}) - V'(S-\frac{\Delta S}{2})}{\Delta S}$$

Dengan menggunakan persamaan (2.19) dan (2.21), maka diperoleh

$$\frac{\partial V(S+\frac{\Delta S}{2})}{\partial S} \approx \frac{V(t,S+\frac{\Delta S}{2}) - V(t,S)}{\Delta S}$$

$$\frac{\partial V(S-\frac{\Delta S}{2})}{\partial S} \approx \frac{V(t,S) - V(t,S-\Delta S)}{\Delta S}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \approx \frac{\frac{V(t,S+\Delta S) - V(t,S)}{\Delta S} - \left(\frac{V(t,S) - V(t,S-\Delta S)}{\Delta S}\right)}{\Delta S}$$

$$\approx \left(\frac{V(t,S+\Delta S) - 2V(t,S) + V(t,S-\Delta S)}{\Delta S}\right) \times \frac{1}{\Delta S}$$

$$\approx \left(\frac{V(t,S+\Delta S) - 2V(t,S) + V(t,S-\Delta S)}{\Delta S^2}\right)$$

$$\approx \frac{V^i_{j+1} - 2V^i_j + V^i_{j-1}}{\Delta S^2} \tag{2.24}$$

Ekspansi deret Taylor untuk $V(t+\Delta t,S)$ dan $V(t-\Delta t,S)$ adalah sebagai berikut

$$V(t+\Delta t,S) = V(t,S) + \frac{\partial V}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\Delta t^2 + O(\Delta t^3) \tag{2.25}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$V\left(t-\Delta t,S\right)=V\left(t,S\right)-\frac{\partial V}{\partial t}\Delta t+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\Delta t^2-O\left(\Delta t^3\right) \tag{2.26}$$

Dengan menggunakan persamaan (2.25) diperoleh persamaan beda maju, yaitu

$$V\left(t+\Delta t,S\right)=V\left(t,S\right)+\frac{\partial V}{\partial t}\Delta t+O\left(\Delta t^2\right) \tag{2.27}$$

$$V\left(t+\Delta t,S\right)-V\left(t,S\right)=\frac{\partial V}{\partial t}\Delta t+O\left(\Delta t^2\right)$$

$$V\left(t+\Delta t,S\right)-V\left(t,S\right)\approx\frac{\partial V}{\partial t}\Delta t \tag{2.28}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}\approx\frac{V\left(t+\Delta t,S\right)-V\left(t,S\right)}{\Delta t}$$

$$\approx\frac{V_j^{i+1}-V_j^{i}}{\Delta t} \tag{2.29}$$

Dengan menggunakan persamaan (2.26) diperoleh persamaan beda mundur, yaitu

$$V\left(t-\Delta t,S\right)=V\left(t,S\right)-\frac{\partial V}{\partial t}\Delta t+O\left(\Delta t^2\right) \tag{2.30}$$

$$V(t-\Delta t,S)-V(t,S)=-\frac{\partial V}{\partial t}\Delta t+O(\Delta t^2)$$

$$\approx-\frac{\partial V}{\partial t}\Delta t$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}\approx\frac{V(t,S)-V(t-\Delta t,S)}{\Delta t}$$

$$\approx\frac{V_j^{i}-V_j^{i-1}}{\Delta t} \tag{2.31}$$

2.3 Opsi

Opsi (*option*) adalah sebuah kontrak hak (bukan kewajiban) kepada pemegangnya (pembelinya) untuk membeli atau menjual kembali pada penjual kontrak opsi dengan harga yang sudah tertentu dan waktu jatuh tempo tertentu

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

sesuai persepakatan kedua belak pihak yaitu pembeli kontrak dan penjual kontrak (Widoatmodjo, 2005).

Banyak instrument opsi dalam perdagangan investasi seperti beberapa instumen berikut yaitu berupa saham, obligasi, *property*, valuta asing, komoditas, indeks saham, dan lain-lain. Salah satu *instrument derivative* di pasar modal, ada beberapa *underlying asset* atau aset yang dapat dijadikan dasar opsi tersebut, yaitu saham. Opsi saham adalah salah satu jenis kontrak opsi yang menggunakan saham sebagai aset yang mendasari (*underlying asset*) dan nilainya diturunkan dari nilai dan karakteristik saham yang mendasarinya (Suherdi, 2010).

Harga pasar opsi sangat berpengaruh dan dikembangkan terus untuk mengetahui metode perhitungannya karena sangat berguna untuk pengambilan keputusan bagi pembeli kontrak opsi untuk membeli atau menjual kembali opsi kepada kontrak opsi sehingga keuntungan didapat bukan kerugian. Harga pasar opsi dapat diperkirakan karena harga opsi terpengaruhi oleh beberapa aspek yaitu harga pasar saham, harga jatuh tempo, waktu jatuh tempo, tingkat suku bunga resiko dan varian. Aspek tersebut adalah aspek dari metode *Black-Scholes* (Widoatmodjo, 2005).

Kontrak opsi saham (KOS) adalah efek yang memuat hak beli (*call option*) atau hak jual (*put option*) atas *underlying stock* berupa saham perusahaan tercatat yang menjadi dasar perdagangan seri KOS dalam jumlah dan *strike price* tertentu serta berlaku dalam periode tertentu. *Strike price* adalah harga yang ditetapkan bursa efek untuk setiap seri KOS sebagai acuan pelaksanaan. Kontrak opsi saham dapat diperjualbelikan, tetapi yang dapat diperjualbelikan hanyalah hak jual maupun hak beli (Haymans, 2011).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Opsi dibedakan menjadi dua yaitu, *call option* dan *put option*. *Call option* merupakan kontrak *financial* yang memberikan pemiliknya hak, tetapi bukan kewajiban untuk membeli saham yang mendasarinya. Satu kontrak *call option* sama dengan pembeli (*taker*) membeli 100 lembar saham pada suatu saham tertentu dengan jangka waktu yang telah ditetapkan. Jika pembeli (*taker*) ingin *options*-nya untuk membeli 200 lembar saham, *taken* harus membeli dua kontrak *call option*. Penjual *call option* atau *call writer* akan mendapatkan bayaran di muka untuk menyediakan kesempatan untuk pembeli *call* atau *call buyer* untuk membeli saham yang mendasarinya atas ketentuan yang telah disetujui jika *call buyer* ingin melakukannya. *Call buyer* dapat mengeksekusi atau *exercise* kontrak *call option*, sehingga mereka dapat membeli saham dengan harga yang lebih murah atau mereka dapat menjual langsung kontrak *call option*-nya setelah mendapatkan keuntungan atas kenaikan saham yang mendasarinya tanpa harus meng-*exercise* kontrak tersebut menjadi saham sebelum tenggang waktunya (*expiration date*) habis. Sedangkan *put option* merupakan kontrak *financial* yang memberikan pemiliknya (*owner*) hak, tetapi bukan kewajiban, untuk menjual (*put*) saham yang mendasarinya pada harga yang telah ditentukan. Pembeli (*buyer*) *put option* harus meng-*exercise option*-nya pada harga eksekusi (*exercise price*) tertentu selama jangka waktu yang telah ditentukan atau kontrak *put option*-nya akan menjadi sia-sia (*worthless*). *Put option* adalah *instrument financial* yang sebelum masa jatuh temponya (*expiration date*) dapat dijual untuk mendapatkan keuntungan jika tidak ingin *option*-nya di-*exercise* menjadi saham yang mendasarinya. *Put option* mendapatkan nilainya seiring penurunan harga pada saham yang mendasarinya.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

2.4 Tipe-Tipe Opsi

Opsi juga dapat dibedakan menurut pelaksanaannya dan penggunaan hak yaitu *American style option* dan *European style option* atau sering disebut opsi Amerika dan opsi Eropa. Opsi-opsi ini bukanlah dipengaruhi oleh tempat pembeliannya tetapi dipengaruhi dalam penggunaan haknya untuk mengambil keputusan menjual atau membeli. *American style option* atau opsi Amerika adalah opsi yang dalam penggunaan haknya dapat di-*exercise* setiap saat selama periode opsi tersebut sedangkan *European style option* atau opsi Eropa adalah opsi yang dalam penggunaan haknya dapat di-*exercise* hanya di akhir periode saja (Haymans, 2011).

Muniroh (2008) menyatakan bahwa opsi Asia merupakan opsi yang dapat berlaku seperti opsi Eropa atau opsi Amerika. Hal yang membedakan opsi Asia dengan opsi Eropa dan opsi Amerika adalah harga pada saat pelaksanaan opsi. Harga saham yang digunakan sebagai acuan dalam opsi Asia adalah rata-rata harga saham pada waktu T.

2.5 Tipe Opsi Asia

Opsi Asia adalah suatu opsi yang *strike price*-nya bergantung pada rata-rata harga saham pada suatu selang periode tertentu. Opsi ini banyak digemari orang karena menghilangkan kemungkinan si pemegang dicurangi oleh pemanipulasian harga aset pada saat-saat akhir menjelang *maturity* (Seydel, 2009).

Seydel (2009) menyatakan bahwa ada beberapa cara bagaimana rata-rata nilai dari S_t dapat dibentuk. Jika harga S_t diamati pada waktu diskrit contoh ti,

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

mengatakan *equidistantly* dengan interval waktu $\Delta t = \frac{T}{N}$. Sehingga rata-rata aritmetika (*mean arithmetics*):

$$\bar{S} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} S_i \tag{2.32}$$

Higham (2004) menyatakan bahwa jika hasil observasi sampel dalam periode $0 \leq t \leq T$, sehingga opsi Asia adalah rata-rata perkembangan harga saham $\bar{S}$ fungsi hasil dari opsi tipe Asia didefinisikan sebagai:

$$\begin{aligned} &\left(\bar{S} - k\right)^{+} \text{ harga rata-rata } \textit{call} \\ &\left(k - \bar{S}\right)^{+} \text{ harga rata-rata } \textit{put} \end{aligned} \tag{2.33}$$

Payoff pada persamaan (2.33) adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} V_M &= \max\left(\bar{S} - k, 0\right) \text{ untuk nilai opsi } \textit{call} \\ V_M &= \max\left(k - \bar{S}, 0\right) \text{ untuk nilai opsi } \textit{put} \end{aligned} \tag{2.34}$$

2.6 Model *Black-Scholes*

Dikembangkan oleh Myron Scholes dan Fischer Black pada tahun 1973 dan model ini cukup dipakai dalam penentuan nilai opsi dikarenakan mudah diterima pada bagian keuangan dengan pemakaiannya hanya untuk menentukan nilai opsi Eropa saat hari terakhir (*expiration date*) dan punya kelemahan yakni model ini berlaku pada saham yang tidak memberikan dividen saat masih berlakunya waktu opsi. Terdapat beberapa asumsi pada model *Black-Scholes* di antaranya:

1. Opsi uang dijadikan acuan ialah opsi Eropa, berlaku saat waktu habis.
2. Valatilitas (variansi harga) bersifat konstan selama usia opsi diketahui pasti.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

3. Saham yang dipakai tidak dividen.
4. Pajak dan biaya transaksi diabaikan (Tjandra, 2012).

Tjandra (2012) menyatakan bahwa model *Black-Scholes* merupakan model untuk penilaian opsi yaitu opsi *call* dan opsi *put* yang telah banyak diterima di masyarakat keuangan. Rumus yang digunakan tidak begitu kompleks bahkan sudah tersedia pada kalkulator dan komputer. Model *Black-Scholes* menjadi patokan untuk menghitung bursa pergerakan saham. Model ini sangat berpengaruh dalam hal investasi seperti saham. Model *Black-Scholes* dalam menilai opsi *call* dan opsi *put* yang tidak membayangkan dividen, menggunakan lima variabel, sebagai berikut:

1. Harga saham (S)
2. *Strike price* (K)
3. *Expiration date* (t)
4. Tingkat suku bunga (r)
5. Volatilitas harga saham (σ).

Harga opsi yang dihasilkan oleh perhitungan model *Black-Scholes* adalah harga yang *fair* sehingga jika harga suatu opsi berbeda dengan harga tersebut maka akan ada kemungkinan untuk mendapatkan laba arbritase bebas resiko dengan cara mengambil posisi yang berlawanan terhadap saham yang dijadikan patokan. Misalkan ada sebuah opsi *call* yang diperdagangkan dengan harga yang lebih tinggi dari harga yang dihasilkan model *Black-Scholes* maka seorang arbritrator akan menjual opsi *call* tersebut dan kemudian membeli saham. Sebaliknya, jika harga opsi *call* lebih rendah dari harga yang dihasilkan dari model *Black-Scholes* maka

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

investor dapat membeli opsi *call* dan menjual sejumlah saham yang dijadikan patokan (Suherdi, 2010).

Hull (2003) menyatakan bahwa model persamaan diferensial *Black-Scholes* yang digunakan untuk menentukan harga opsi yaitu:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \tag{2.35}$$

2.7 Metode Beda Hingga Crank-Nicholson

Misalkan $V(S,t)$ menyatakan harga opsi, peubah yang nilai V adalah S dan t dimana S menyatakan harga saham dan t menyatakan waktu berlakunya opsi. Selanjutnya nilai dari opsi pada waktu t_i ketika harga saham S_j dinyatakan oleh:

$$V_j^i = V(j\Delta S, i\Delta t) = V(S_j, t_i) = V(S,t)$$

dengan $j = 1,2,\dots,M-1$ dan $i = N-1,\dots,2,1,0$

Tjandra (2012) menyatakan bahwa Crank John dan Phyllips Nicholson adalah penemu dan yang mengembangkan metode ini pada pertengahan abad ke-20, metode ini merupakan metode yang dikembangkan dari metode eksplisit dan metode implisit. Hull (2003) menyatakan bahwa metode beda hingga Crank-Nicholson adalah rata-rata dari metode beda hingga eksplisit dan implisit. Menurut Wahyudi (2014) rata-rata dari kedua metode beda hingga tersebut, yaitu

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{V_j^{i+1} - V_j^i}{\Delta t} + O(\Delta t^2) \tag{2.36}$$

$$\approx \frac{V_j^{i+1} - V_j^i}{\Delta t} \tag{2.37}$$

$$\frac{\partial V}{\partial S} = \frac{1}{2}\left(\frac{V_j^i}{\Delta S} + \frac{V_j^{i+1}}{\Delta S}\right) + O(\Delta S)$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{V_{j+1}^{i} - V_{j-1}^{i}}{2\Delta S} + \frac{V_{j+1}^{i+1} - V_{j-1}^{i+1}}{2\Delta S}\right) + O(\Delta S) \quad (2.38)$$

$$\approx \frac{1}{2}\left(\frac{V_{j+1}^{i} - V_{j-1}^{i}}{2\Delta S} + \frac{V_{j+1}^{i+1} - V_{j-1}^{i+1}}{2\Delta S}\right) \quad (2.39)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 V_j^i}{\partial S^2} + \frac{\partial^2 V_j^{i+1}}{\partial S^2}\right) + O(\Delta S^2)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{V_{j-1}^{i} - 2V_j^i + V_{j+1}^{i}}{\Delta S^2} + \frac{V_{j-1}^{i+1} - 2V_j^{i+1} + V_{j+1}^{i+1}}{\Delta S^2}\right) + O(\Delta S^2) \quad (2.40)$$

$$\approx \frac{1}{2}\left(\frac{V_{j-1}^{i} - 2V_j^i + V_{j+1}^{i}}{\Delta S^2} + \frac{V_{j-1}^{i+1} - 2V_j^{i+1} + V_{j+1}^{i+1}}{\Delta S^2}\right) \quad (2.41)$$

Kemudian mensubstitusikan persamaan (2.37), (2.39), dan (2.41) ke dalam persamaan (2.35), maka diperoleh:

$$r\left(\frac{1}{2}\left(V_j^{i+1} + V_j^i\right)\right) = rS\left(\frac{1}{2}\left(\frac{V_{j+1}^{i+1} - V_{j-1}^{i+1}}{2\Delta S} + \frac{V_{j+1}^{i} - V_{j-1}^{i}}{2\Delta S}\right)\right) + \frac{V_j^{i+1} - V_j^i}{\Delta t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\left(\frac{1}{2}\left(\frac{V_{j-1}^{i+1} - 2V_j^{i+1} + V_{j+1}^{i+1}}{\Delta S^2} + \frac{V_{j-1}^{i} - 2V_j^{i} + V_{j+1}^{i}}{\Delta S^2}\right)\right)$$

$$\frac{1}{2}r\left(V_j^{i+1} + V_j^i\right) = rS\left(\frac{1}{2}\left(\frac{V_{j+1}^{i+1} - V_{j-1}^{i+1}}{2\Delta S} + \frac{V_{j+1}^{i} - V_{j-1}^{i}}{2\Delta S}\right)\right) + \frac{V_j^{i+1} - V_j^i}{\Delta t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\left(\frac{1}{2}\left(\frac{V_{j-1}^{i+1} - 2V_j^{i+1} + V_{j+1}^{i+1}}{\Delta S^2} + \frac{V_{j-1}^{i} - 2V_j^{i} + V_{j+1}^{i}}{\Delta S^2}\right)\right)$$

$$\frac{r}{2}\left(V_j^{i+1} + V_j^i\right) = \frac{rS}{2}\left(\frac{V_{j+1}^{i+1} - V_{j-1}^{i+1}}{2\Delta S} + \frac{V_{j+1}^{i} - V_{j-1}^{i}}{2\Delta S}\right) + \frac{V_j^{i+1} - V_j^i}{\Delta t} + \frac{\sigma^2 S^2}{4}\left(\frac{V_{j-1}^{i} - 2V_j^{i} + V_{j+1}^{i}}{\Delta S^2} + \frac{V_{j-1}^{i+1} - 2V_j^{i+1} + V_{j+1}^{i+1}}{\Delta S^2}\right)$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\frac{r}{2}\left(V_j^{i+1}+V_j^i\right)=\frac{rS}{4\Delta S}\left(V_{j+1}^i-V_{j-1}^i+V_{j+1}^{i+1}-V_{j-1}^{i+1}\right)+\frac{1}{\Delta t}\left(V_j^{i+1}-V_j^i\right)+\frac{\sigma^2S^2}{4\Delta S^2}\left(V_{j-1}^i-2V_j^i+V_{j+1}^i+V_{j-1}^{i+1}-2V_j^{i+1}+V_{j+1}^{i+1}\right) \tag{2.42}$$

Sehingga persamaan (2.42) menjadi

$$\left(\frac{\sigma^2S^2}{4\Delta S^2}-\frac{rS}{4\Delta S}\right)V_{j-1}^{i+1}+\left(\frac{1}{\Delta t}-\frac{r}{2}-\frac{\sigma^2S^2}{2\Delta S^2}\right)V_j^{i+1}+\left(\frac{\sigma^2S^2}{4\Delta S^2}+\frac{rj}{4\Delta S}\right)V_{j+1}^{i+1}=\left(\frac{rS}{4\Delta S^2}-\frac{\sigma^2S^2}{4\Delta S}\right)V_{j-1}^i+\left(\frac{1}{\Delta t}+\frac{r}{2}+\frac{\sigma^2S^2}{2\Delta S^2}\right)V_j^i+\left(-\frac{rS}{4\Delta S^2}-\frac{\sigma^2S^2}{4\Delta S}\right)V_{j+1}^i \tag{2.43}$$

Kemudian kedua ruas dikalikan dengan Δt, maka diperoleh

$$\left(\frac{\sigma^2S^2\Delta t}{4\Delta S^2}-\frac{rS\Delta t}{4\Delta S}\right)V_{j-1}^{i+1}+\left(1-\frac{r\Delta t}{2}-\frac{\sigma^2S^2\Delta t}{2\Delta S^2}\right)V_j^{i+1}+\left(\frac{\sigma^2S^2\Delta t}{4\Delta S^2}+\frac{rS\Delta t}{4\Delta S}\right)V_{j+1}^{i+1}=\left(-\frac{\sigma^2S^2\Delta t}{4\Delta S^2}+\frac{rS\Delta t}{4\Delta S}\right)V_{j-1}^i+\left(1+\frac{r\Delta t}{2}+\frac{\sigma^2S^2\Delta t}{2\Delta S^2}\right)V_j^i+\left(-\frac{\sigma^2S^2\Delta t}{4\Delta S^2}-\frac{rS\Delta t}{4\Delta S}\right)V_{j+1}^i \tag{2.44}$$

Substitusikan $S=j\Delta S$, maka persamaan (2.44) menjadi

$$\left(-\frac{\sigma^2j^2\Delta S^2\Delta t}{4\Delta S^2}+\frac{rj\Delta S\Delta t}{4\Delta S}\right)V_{j-1}^i+\left(1+\frac{r\Delta t}{2}+\frac{\sigma^2j^2\Delta S^2\Delta t}{2\Delta S^2}\right)V_j^i+\left(-\frac{\sigma^2j^2\Delta S^2\Delta t}{4\Delta S^2}-\frac{rj\Delta S\Delta t}{4\Delta S}\right)V_{j+1}^i=\left(\frac{\sigma^2j^2\Delta S^2\Delta t}{4\Delta S^2}-\frac{rj\Delta S\Delta t}{4\Delta S}\right)V_{j-1}^{i+1}+\left(1-\frac{r\Delta t}{2}-\frac{\sigma^2j^2\Delta S^2\Delta t}{2\Delta S^2}\right)V_j^{i+1}+\left(\frac{\sigma^2j^2\Delta S^2\Delta t}{4\Delta S^2}+\frac{rj\Delta S\Delta t}{4\Delta S}\right)V_{j+1}^{i+1} \tag{2.45}$$

Sehingga persamaan (2.45) menjadi

$$\left(-\frac{\sigma^2j^2\Delta t}{4}+\frac{rj\Delta t}{4}\right)V_{j-1}^i+\left(1+\frac{r\Delta t}{2}+\frac{\sigma^2j^2\Delta t}{2}\right)V_j^i+\left(-\frac{\sigma^2j^2\Delta t}{4}-\frac{rj\Delta t}{4}\right)V_{j+1}^i=\left(\frac{\sigma^2j^2\Delta t}{4}-\frac{rj\Delta t}{4}\right)V_{j-1}^{i+1}+\left(1-\frac{r\Delta t}{2}-\frac{\sigma^2j^2\Delta t}{2}\right)V_j^{i+1}+\left(\frac{\sigma^2j^2\Delta t}{4}+\frac{rj\Delta t}{4}\right)V_{j+1}^{i+1} \tag{2.46}$$

Persamaan (2.46) dapat disederhanakan menjadi:

$$a_jV_{j-1}^i+b_jV_j^i+c_jV_{j+1}^i=\bar{a}_jV_{j-1}^{i+1}+\bar{b}_jV_j^{i+1}+\bar{c}_jV_{j+1}^{i+1} \tag{2.47}$$

untuk i = 0, 1, ..., N-1 dan j = 1, 2, ..., M-1, dengan

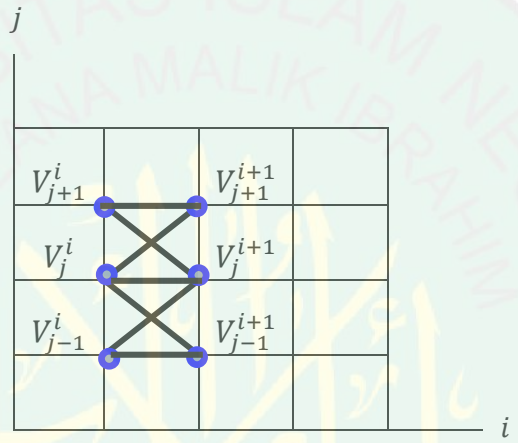
CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$a_j = -\frac{\sigma^2 j^2 \Delta t}{4} + \frac{rj\Delta t}{4} \qquad \bar{a}_j = \frac{\sigma^2 j^2 \Delta t}{4} - \frac{rj\Delta t}{4}$$

$$b_j = 1 + \frac{r\Delta t}{2} + \frac{\sigma^2 j^2 \Delta t}{2} \qquad \bar{b}_j = 1 - \frac{r\Delta t}{2} - \frac{\sigma^2 j^2 \Delta t}{2}$$

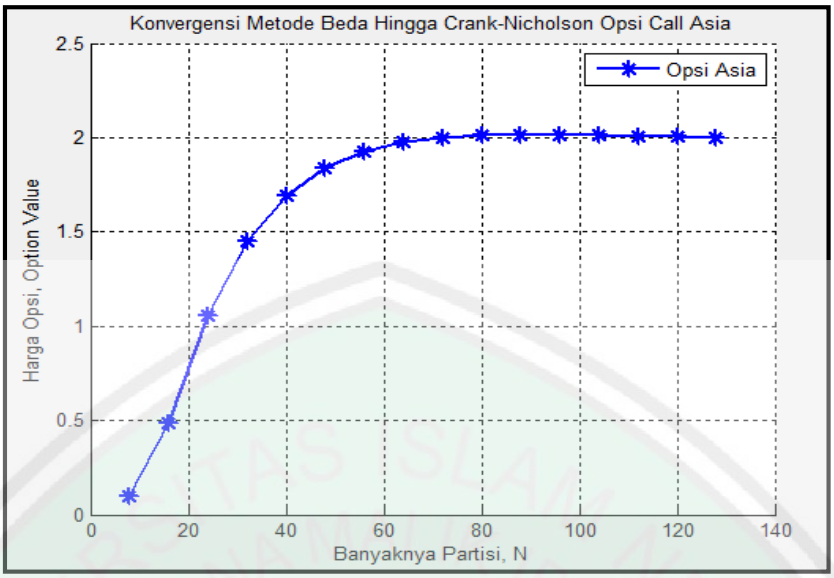
$$c_j = -\frac{\sigma^2 j^2 \Delta t}{4} - \frac{rj\Delta t}{4} \qquad \bar{c}_j = \frac{\sigma^2 j^2 \Delta t}{4} + \frac{rj\Delta t}{4}$$

Skema metode beda hingga Crank-Nicholson dapat digambarkan sebagai berikut



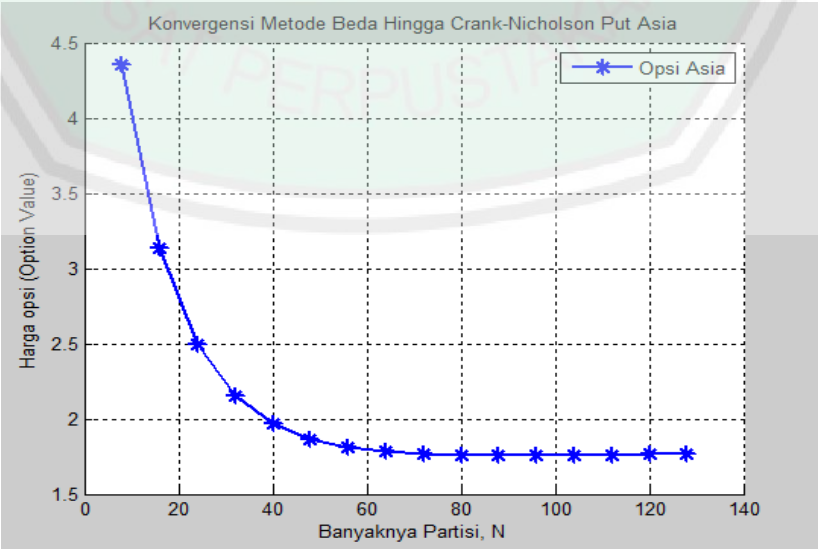
Gambar 2.1 Skema Beda Hingga Crank-Nicholson

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG



Gambar 2.2 Grafik Simulasi Metode Beda Hingga Crank-Nicholson Opsi *Call* Asia dengan N = 128 (Wahyudi, 2014)

Grafik pada Gambar 2.2 menunjukkan pergerakan harga opsi *call* Asia menggunakan metode beda hingga Crank-Nicholson dengan partisi waktu N = 128. Untuk mengetahui kebenaran suatu harga opsi Asia dapat dilihat dari kekonvergenan pergerakan harga opsi Asia itu sendiri. Semakin partisi waktu N diperbanyak maka harga opsi *call* Asia akan konvergen ke suatu titik dalam kasus ini yaitu 1,9988 (satuan mata uang) (Wahyudi, 2014).



Gambar 2.3 Grafik Simulasi Metode Beda Hingga Crank-Nicholson Opsi *Call* Asia dengan N = 128 (Wahyudi, 2014)

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Grafik pada Gambar 2.3 menunjukkan pergerakan harga opsi *put* Asia menggunakan metode beda hingga Crank-Nicholson dengan partisi waktu $N = 128$. Untuk mengetahui kebenaran suatu harga opsi Asia dapat dilihat dari kekonvergenan pergerakan harga opsi Asia. Semakin partisi waktu N diperbanyak maka harga opsi *put* Asia akan konvergen ke suatu titik dalam kasus ini yaitu 1,7684 (satuan mata uang) (Wahyudi, 2014).

2.8 Proses Stokastik

Proses stokastik $X = \{X(t), t \in T\}$ adalah suatu koleksi (himpunan) dari peubah acak. Untuk setiap t pada himpunan indeks T, $X(t)$ adalah suatu peubah acak dan t sering diinterpretasikan sebagai waktu (Ross, 1996).

Nilai yang mungkin dari *X(t)* disebut *state*. Himpunan nilai yang mungkin dari *X(t)* adalah *state space*. Berdasarkan *state space*-nya, proses stokastik dapat dibedakan menjadi *state space* diskrit dan *state space* kontinu. Karena harga saham adalah variabel *random* yang pergerakannya tidak diketahui secara pasti, maka dapat dikatakan bahwa pergerakan harga saham merupakan sebuah proses stokastik (Khuriyanti, 2009).

2.9 Gerak Brown

Khuriyanti (2009) menyatakan bahwa gerak *Brown* dengan variansi σ^2 merupakan proses stokastik $\{W(t); t \geq 0\}$ dengan sifat-sifat sebagai berikut:

1. Setiap kenaikan $W(s+t) - W(s)$ adalah berdistribusi normal dengan *mean* 0 dan variansi $\sigma^2 t$.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

2. Untuk setiap pasang interval waktu yang saling lepas $(u,v],(w,y]$ dengan $0 \le u < v \le w < y$, maka kenaikan $W(y)-W(w)$ dan $W(v)-W(u)$ adalah variabel *random* yang independen.
3. $W(t)$ kontinu sebagai fungsi dari *t* dan $W(0)=0$.

2.10 *Itô Process*

Niwiga (2005) menyatakan proses stokastik $X=\{X(t);t\ge 0\}$ yang memiliki selesaian

$$X = X_0 + \int_0^t a(X_s,t)\,ds + \int_0^t b(X_s,t)\,dW_s \tag{2.48}$$

disebut *Itô process*. Hull (2003) menyatakan bahwa *Itô process* adalah proses Wiener dengan *a* dan *b* menyatakan suatu fungsi dari peubah acak *X* dan waktu *t*. secara aljabar *Itô process* dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$dX_t = a(X_t,t)\,dt + b(X_t,t)\,dW_t \tag{2.49}$$

dengan $a(X_t,t)$ adalah bentuk *drift*, $b(X_t,t)$ adalah bentuk difusi dan W_s adalah proses *Wiener*.

Khuriyanti (2009) menyatakan bahwa proses *Wiener* disebut juga proses gerak *Brown* standar, yaitu jika $\{W(t)\,|\,0\le t\le\infty\}$ dengan variansi σ^2, maka $\left\{B(t)=\frac{1}{\sigma}W(t);0\le t\le\infty\right\}$ adalah gerak *Brown* dengan variansi 1.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

2.11 Perkalian *Itô Process*

Kwok (1998) menyatakan bahwa untuk $E\left(\left(dW\right)^2\right)=dt$, $\mathrm{var}\left(\left(dW\right)^2\right)=O\left(dt\right)$, $E\left(dtdW\right)=0$, dan $\mathrm{var}\left(dtdW\right)=O\left(dt\right)$. Misalkan syarat-syarat order $O\left(dt\right)$ yang diperlakukan = 0, maka dapat diamati bahwa $\left(dW\right)^2$ dan $dtdW$ adalah bebas stokastik, karena variansi dari keduanya adalah 0.

Oleh karena itu $\left(dW\right)^2=dt$ dan $dtdW=0$ tidak hanya pada ekspektasi tetapi juga pada eksaknya. Untuk dt bernilai sangat kecil, maka $\lim_{t\to 0} dt=0$ (Wilmott, dkk., 1995).

2.12 Proses Harga Saham

Tsay (2010) menyatakan bahwa harga saham merupakan variabel stokastik, karena harga saham ditentukan oleh variabel lain yaitu waktu. Harga saham dapat dipengaruhi oleh faktor-faktor yang tidak dapat ditentukan secara pasti. Faktor-faktor ini dipandang sebagai komponen stokastik yang tidak dapat ditentukan sebelumnya. Oleh karena itu, perubahan harga saham dapat dipandang sebagai persamaan diferensial stokastik berikut

$$dS_t=\mu S_t dt+\sigma S_t \tag{2.50}$$

dengan μ dan σ sebagai konstan. Persamaan (2.50) ini juga dikenal sebagai model pergerakan harga saham.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Selanjutnya, dari Lemma It$\hat{o}$, diketahui bahwa sebuah fungsi F dari S dan t akan mengikuti proses

$$dF = \left\{ \frac{\partial F}{\partial S_t} \mu S_t + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S_t^{\,2}} \sigma^2 S_t^{\,2} \right\} dt + \frac{\partial F}{\partial S_t} \sigma dW_t \tag{2.51}$$

dengan σ adalah volatilitas saham dan μ merupakan ekspektasi dari *return.* Solusi dari persamaan (2.51) adalah

$$S(t) = S(0) e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W(t)} \tag{2.52}$$

Dengan proses *Wiener*, diperoleh $W(t) = \xi\sqrt{t}$ untuk ξ adalah bilangan acak dari distribusi normal baku. Sehingga persamaan (2.52) menjadi

$$S(t) = S(0) e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma\xi\sqrt{t}} \tag{2.53}$$

Seydel (2009) menyatakan bahwa untuk memodelkan opsi, tingkat keuntungan μ diganti dengan tingkat suku bunga bebas resiko r, sehingg $\mu = r$. Sehingga persamaan (2.53) menjadi:

$$S(t) = S(0) e^{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma\xi\sqrt{t}} \tag{2.54}$$

2.13 Syarat Batas dan Nilai Awal

Higham (2004) menyatakan bahwa nilai opsi *call* dinotasikan dengan $C(t, S)$, yaitu:

$$C(t, S) = \max\left(S_j - K, 0\right) \tag{2.55}$$

dengan syarat batas, yaitu:

$$C(t, 0) = 0, \text{ untuk semua } t \tag{2.56}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$C(t,S) = Ke^{-r\Delta t}, \text{ untuk } S \to \infty$$

Sedangkan nilai opsi *put* dinotasikan dengan $P(S,t)$, yaitu:

$$P(t,S) = \max(K - S_j, 0) \tag{2.57}$$

dengan syarat batas, yaitu:

$$\begin{aligned} P(t,0) &= Ke^{-r\Delta t}, \text{ untuk semua } t \\ P(t,S) &= 0, \text{ untuk } S \to \infty \end{aligned} \tag{2.58}$$

Untuk nilai V, diperoleh dari syarat batas persamaan (2.56) atau (2.58) dan nilai awal persamaan (2.55) dan (2.57).

2.14 Matriks Tridiagonal

Siregar (2014) menyatakan bahwa matriks adalah suatu jajaran bilangan (yang biasanya disebut *unsure* atau elemen) yang disusun dalam bentuk baris dan kolom hingga berbentuk persegi panjang. Syarat suatu matriks adalah sebagai berikut:

1. Berbentuk persegi panjang dan ditempatkan dalam kurung biasa atau siku.
2. Unsur-unsur yang terdiri atas bilangan-bilangan.
3. Mempunyai baris dan kolom.

Budi (2009) menyatakan bahwa matriks bujur sangkar banyak digunakan di dalam penyelesaian sistem persamaan linier. Di dalam sistem tersebut, jumlah persamaan (baris) dan jumlah bilangan tak diketahui (kolom) harus sama untuk mendapatkan penyelesaian tunggal. Ada beberapa bentuk matriks bujur sangkar, diantaranya adalah matriks tridiagonal, yaitu matriks yang mempunyai elemen sama dengan nol, kecuali pada diagonal utama, satu diagonal atas, dan satu diagonal bawah, seperti bentuk sebagai berikut:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{13} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Matriks $A \in M_n(F)$ dikatakan tidak singular (*nonsingular*) atau invertibel (*invertible*) jika terdapat suatu matriks $B \in Mn(F)$ yang berlaku

$$AB = In = BA$$

Suatu matriks B dengan sifat seperti di atas disebut invers dari A dan dinotasikan A^{-1}. Jika A tidak mempunyai invers maka A dikatakan *singular*. Suatu matriks A mempunyai invers atau tidak mempunyai invers dapat dilakukan dengan memperlihatkan determinan dari matriks A tersebut tidak nol. Dengan kata lain $\det(A) \neq 0$ berarti matriks A invertibel (Budi, 2009).

Siregar (2014) menyatakan bahwa jika A adalah suatu matriks $n \times n$ yang invertibel (dapat dibalik/memiliki invers), maka untuk setiap matriks B dengan ukuran $n \times 1$, sistem persamaan $AX = B$ tepat mempunyai satu penyelesaian yaitu $X = A^{-1}B$. Jika A dan B adalah matriks-matriks persegi berukuran sama, jika AB invertibel, maka A dan B juga pasti invertibel.

2.15 *Khiyar* dalam Jual Beli

Dalam praktik jual beli ada kalanya terjadi penyesalan diantara pihak penjual dan pembeli disebabkan kurang hati-hati, tergesa-gesa, penipuan atau faktor lainnya. Mengingat prinsip berlakunya jual beli adalah atas dasar suka sama suka, maka syariat Islam memberikan hak pilih antara menggagalkan atau melangsungkan jual beli. Hak pilih ini dikenal dengan *khiyar*. *Khiyar* dalam jual beli termasuk dari keindahan Islam. Karena terkadang terjadi jual beli secara mendadak tanpa berpikir dan merenungkan harga dan manfaat barang yang dibeli

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Sahrani dan Abdullah (2011) menyatakan bahwa secara bahasa, *khiyar* artinya: Memilih, menyisihkan, dan menyaring. Secara umum artinya adalah menentukan yang terbaik dari dua hal (atau lebih) untuk dijadikan orientasi. Sedangkan menurut istilah ulama fiqih, *khiyar* artinya hak yang dimiliki orang yang melakukan perjanjian usaha untuk memilih antara dua hal yang disukainya, meneruskan perjanjian tersebut atau membatalkannya. *Khiyar* merupakan sesuatu yang ditetapkan dalam fiqih Islam. Rasulullah Saw. bersabda:

عَنْ حَكِيمِ بْنِ حِزَامٍ رَضِيَ اللَّهُ عَنْهُ، عَنِ النَّبِيِّ صَلَّى اللهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ، قَالَ: الْبَيِّعَانِ بِالْخِيَارِ مَا لَمْ يَفْتَرِقَا (صحيح البخاري)

Artinya: "Dari Hakim bin Hizam dari Nabi Saw. bersabda: Sesungguhnya penjual dan pembeli memliki hak khiyar selama keduanya belum berpisah" (HR Bukhori).

Menurut penulis hadist tersebut menjelaskan bahwa dalam jual beli, penjual dan pembeli memiliki hak untuk melakukan *khiyar*, yaitu hak untuk meneruskan atau membatalkan transakasi jual belinya.

Pengertian kontrak opsi pada sebuah saham merupakan sebuah perjanjian hak untuk memilih antara membeli atau menjual saham tersebut pada suatu hari tertentu. Dilihat dari pengertian suatu kontrak opsi terdapat kesamaan dengan hukum fiqih tentang *khiyar* (Wahyudi, 2014). Menurut penulis kontrak opsi berarti hak untuk membeli atau menjual suatu aset tertentu dengan harga tertentu dan jangka waktu tertentu sesuai kesepakatan, seperti halnya kontrak opsi, *khiyar* berarti memilih untuk meneruskan atau membatalkan suatu penjanjian jual beli dengan waktu yang telah ditentukan. Dari pengertian tersebut diketahui bahwa terdapat kesamaan antara pengertian kontrak opsi dan *khiyar*.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Teknik kajian yang digunakan dalam pembahasan skripsi ini adalah penelitian kepustakaan (*library research*). Penelitian kepustakaan merupakan penampilan argumentasi penalaran keilmuan yang memaparkan hasil kepustakaan berisi satu topik kajian yang didalamnya memuat beberapa gagasan yang berkaitan dan harus didukung oleh data yang diperoleh dari berbagai sumber kepustakaan, baik dari buku-buku pustaka maupun jurnal-jurnal yang di-*download* dari internet, untuk mengetahui perkembangan dan perbaikan metode perhitungan harga opsi Asia dengan menggunakan metode Crank-Nicholson dengan transformasi peubah.

3.2 Sumber Data

Bahan kajian dalam skripsi ini adalah buku-buku mengenai metode numerik dan buku tentang opsi dan beda hingga. Literatur utama yang dijadikan acuan oleh penulis adalah buku karangan Hull (2003) yang berjudul *Option Future and Other Derivative*, Sedangkan untuk kajian keagamaan, penulis menggunakan buku rujukan Sahrani dan Abdullan (2011) berjudul *Fiqih Muamalah*, dan lain-lain

3.3 Langkah-langkah Penelitian

Adapun langkah-langkah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mengkaji perhitungan harga opsi Asia menggunakan metode beda hingga Crank-Nicholson dengan transformasi peubah. Adapun langkah-langkah

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

mengkaji perhitungan harga opsi Asia menggunakan metode beda hingga Crank-Nicholson dengan transformasi peubah adalah sebagai berikut:

a. Menentukan transformasi peubah harga saham S menjadi $\ln S$, dan menentukan turunan-turunannya.
b. Menentukan persamaan *Black-Sholes* dengan transformasi peubah
c. Menentukan persamaan metode beda hingga Crank-Nicholson dengan transformasi peubah.
d. Menentukan solusi matriks metode beda hingga Crank-Nicholson menggunakan transformasi peubah dengan mengambil suatu kasus tertentu pada perhitungan harga opsi Asia.

2. Membandingkan hasil analisis metode beda hingga Crank-Nicholson dengan transformasi peubah dan metode beda hingga Crank-Nicholson tanpa menggunakan transformasi peubah dengan membuat simulasi komputasi dengan mengambil suatu kasus tertentu. Dalam penelitian ini yang dibandingkan adalah titik kekonvergenannya, karena dibandingkan dengan waktu yang sama, maka jika titik kekonvergenannya lebih tinggi dan selisih harga opsi antar partisi waktu lebih kecil, maka metode tersebut lebih efisien untuk menghitung harga opsi. Dalam penelitian ini variabel yang diambil adalah harga saham untuk menentukan harga opsi saham. Adapun langkah-langkah yang dilakukan untuk mengkaji perbandingan metode beda hingga Crank-Nicholson dengan transformasi peubah dan metode beda hingga Crank-Nicholson tanpa menggunakan transformasi peubah dengan simulasi program Matlab R2010a adalah sebagai berikut:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

a. Menentukan parameter rata-rata dan standar deviasi dari suatu harga saham.

b. Membangkitkan harga saham pada masa tertentu.

c. Menentukan harga opsi *call* dan *put* Asia pada langkah *b*, dengan model harga opsi Asia.

d. Menentukan interval nilai opsi.

Menganalisis hasil komputasi perbandingan metode beda hingga Crank-Nicholson dengan transformasi peubah dan metode beda hingga Crank-Nicholson tanpa menggunakan transformasi peubah pada perhitungan harga opsi Asia.

3. Mengkaji hikmah *khiyar* dalam jual beli.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB IV

PEMBAHASAN

4.1 Transformasi Peubah

Brennan dan Schwartz dalam Hull & White (1990) menyatakan bahwa ketika S adalah harga saham, persamaan *Black-Scholes* lebih efisien menggunakan $\ln S$ daripada S apabila metode beda hingga diterapkan, karena jika σ konstan maka standar deviasi dari $\ln S$ juga konstan. Transformasi standar deviasi $\ln S$ pada interval Δt tidak bergantung pada S dan t.

Harga saham S merupakan fungsi yang berbentuk nonlinier sehingga dapat ditransformasi menjadi fungsi eksponensial, sehingga diperoleh $S = e^y$ dengan y positif karena harga saham S fungsi menaik. Fungsi $S = e^y$ dapat dinyatakan sebagai $\ln S = y$. Kemudian t yang merupakan waktu ditransformasikan menjadi τ dan V yang merupakan harga opsi ditransformasikan menjadi W sehingga diperoleh $V(S,t) \sim W(y,\tau)$. Turunan parsial V terhadap τ dan y adalah sebagai berikut :

$$\frac{\partial V}{\partial S} = \frac{\partial W}{\partial S}$$

Karena W tidak dapat diturunkan terhadap S, maka menggunakan aturan berantai, yaitu:

$$\frac{\partial V}{\partial S} = \frac{\partial W}{\partial S}\frac{\partial y}{\partial y}$$

$$= \frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial S} \tag{4.1}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Karena $y = \ln S$, maka persamaan (4.1) menjadi

$$\frac{\partial V}{\partial S} = \frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial}{\partial S}[\ln S]$$

$$= \frac{\partial W}{\partial y}\frac{1}{S} \tag{4.2}$$

Karena $S = e^{y}$, maka persamaan (4.2) menjadi

$$\frac{\partial V}{\partial S} = \frac{\partial W}{\partial y} \cdot \frac{1}{e^{y}}$$

$$= \frac{\partial W}{\partial y} e^{-y} \tag{4.3}$$

Turunan kedua dari V adalah

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = \frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{\partial W}{\partial y} e^{-y}\right)$$

Karena W tidak dapat diturunkan terhadap S, maka menggunakan aturan berantai, yaitu:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = \frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{\partial W}{\partial y} e^{-y}\right)\frac{\partial y}{\partial y}$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial W}{\partial y} e^{-y}\right)\frac{\partial y}{\partial S}$$

$$= \left[\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} e^{-y} + \frac{\partial W}{\partial y}(-e)^{-y}\right] e^{-y}$$

$$= \left[\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{\partial W}{\partial y}\right] e^{-y} e^{-y}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$= \left[\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{\partial W}{\partial y}\right] e^{-2y} \tag{4.4}$$

dan

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial W}{\partial \tau} \tag{4.5}$$

Substitusikan persamaan (4.3), (4.4), dan (4.5) ke persamaan *Black-Scholes* (2.35) maka akan menjadi persamaan:

$$0 = \frac{\partial W}{\partial \tau} + re^{y}\frac{\partial W}{\partial y}e^{-y} + \frac{1}{2}\sigma^2 e^{2y}\left[\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{\partial W}{\partial y}\right]e^{-2y} - rW \tag{4.6}$$

$$= \frac{\partial W}{\partial \tau} + r\frac{\partial W}{\partial y} + \frac{1}{2}\sigma^2\left[\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{\partial W}{\partial y}\right] - rW$$

$$= \frac{\partial W}{\partial \tau} + \left[r - \frac{1}{2}\sigma^2\right]\frac{\partial W}{\partial y} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - rW \tag{4.7}$$

Suritno (2008) menyatakan bahwa untuk menerapkan metode beda hingga peubah y dipartisi dengan interval Δy. Misalkan harga saham minimum adalah nol dan maksimum tak hingga. Maka harga saham yang mungkin adalah $0, \Delta y, 2\Delta y, \dots, y, y + \Delta y, \dots, \infty$. Ketika diterapkan metode ini, dipilih Δy sekecil mungkin dan harga saham maksimum berhingga. Karena $S_{\min}$ mendekati nol maka $\ln S$ juga mendekati nol, sehingga dipilih minimum $\ln S$ adalah ε. Sedangkan diskritisasi untuk τ adalah $0, \Delta\tau, 2\Delta\tau, \dots, \tau, \tau + \Delta\tau, \dots, \infty$. Sehingga nilai aproksimasi untuk opsi Asia dengan transformasi peubah pada waktu τ_i dan harga saham y_i dengan $i = (N-1), \dots, 2, 1, 0$ dan $j = 1, 2, \dots, (M-1)$ dinyatakan oleh

$$W_j^i = W(j\Delta y, i\Delta\tau) = W(y_j, \tau_i) \tag{4.8}$$

Dari persamaan (4.8) diketahui $j\Delta y = y_j$, maka $\Delta y = y_j/j$.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

4.2 Metode Beda Hingga Crank-Nicholson dengan Transformasi Peubah

Metode beda hingga Crank-Nicholson dengan transformasi peubah didapatkan dengan mengambil rata-rata dari penjumlahan metode implisit dan eksplisit dengan transformasi peubah.

Berdasarkan persamaan (2.37), (2.39), dan (2.41), transformasi peubah turunan pertama beda maju, turunan pertama beda pusat, dan turunan kedua beda pusat untuk beda hingga Crank-Nicholson, masing-masing yaitu sebagai berikut:

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = \frac{W_j^{i+1} - W_j^i}{\Delta \tau} \tag{4.9}$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(\frac{W_{j+1}^{i+1} - W_{j-1}^{i+1}}{2\Delta y} + \frac{W_{j+1}^{i} - W_{j-1}^{i}}{2\Delta y}\right) \tag{4.10}$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{W_{j+1}^{i+1} - 2W_j^{i+1} + W_{j-1}^{i+1}}{\Delta y^2} + \frac{W_{j+1}^{i} - 2W_j^{i} + W_{j-1}^{i}}{\Delta y^2}\right) \tag{4.11}$$

Substitusikan persamaan (4.9), (4.10) dan (4.11) ke dalam persamaan (4.7) akan diperoleh:

$$0 = \frac{W_j^{i+1} - W_j^i}{\Delta \tau} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{1}{2}\left(\frac{W_{j+1}^{i+1} - W_{j-1}^{i+1}}{2\Delta y} + \frac{W_{j+1}^{i} - W_{j-1}^{i}}{2\Delta y}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{1}{2}\left(\frac{W_{j+1}^{i+1} - 2W_j^{i+1} + W_{j-1}^{i+1}}{\Delta y^2} + \frac{W_{j+1}^{i} - 2W_j^{i} + W_{j-1}^{i}}{\Delta y^2}\right) - r\frac{W_j^{i+1} + W_j^i}{2}$$

$$0 = \frac{W_j^{i+1} - W_j^i}{\Delta \tau} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{1}{4\Delta y}\left(W_{j+1}^{i+1} - W_{j-1}^{i+1} + W_{j+1}^{i} - W_{j-1}^{i}\right) + \frac{\sigma^2}{4\Delta y^2}\left(W_{j+1}^{i+1} - 2W_j^{i+1} + W_{j-1}^{i+1} + W_{j+1}^{i} - 2W_j^{i} + W_{j-1}^{i}\right) - \frac{r}{2}\left(W_j^{i+1} + W_j^i\right)$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$-\left(\frac{W_j^{i+1}-W_j^i}{\Delta\tau}\right)=\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{1}{4\Delta y}\left(W_{j+1}^{i+1}-W_{j-1}^{i+1}+W_{j+1}^i-W_{j-1}^i\right)+$$
$$\frac{\sigma^2}{4\Delta y^2}\left(W_{j+1}^{i+1}-2W_j^{i+1}+W_{j-1}^{i+1}+W_{j+1}^i-2W_j^i+W_{j-1}^i\right)-$$
$$\frac{r}{2}\left(W_j^{i+1}+W_j^i\right)$$

$$\left(\frac{W_j^{i}-W_j^{i+1}}{\Delta\tau}\right)=\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{1}{4\Delta y}\left(W_{j+1}^{i+1}-W_{j-1}^{i+1}+W_{j+1}^i-W_{j-1}^i\right)+$$
$$\frac{\sigma^2}{4\Delta y^2}\left(W_{j+1}^{i+1}-2W_j^{i+1}+W_{j-1}^{i+1}+W_{j+1}^i-2W_j^i+W_{j-1}^i\right)- \tag{4.12}$$
$$\frac{r}{2}\left(W_j^{i+1}+W_j^i\right)$$

Sehingga persamaan (4.12) menjadi

$$\left(\frac{W_j^{i}-W_j^{i+1}}{\Delta\tau}\right)=\frac{\sigma^2}{4\Delta y^2}\left(W_{j+1}^{i+1}-2W_j^{i+1}+W_{j-1}^{i+1}+W_{j+1}^i-2W_j^i+W_{j-1}^i\right)+$$
$$\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{1}{4\Delta y}\left(W_{j+1}^{i+1}-W_{j-1}^{i+1}+W_{j+1}^i-W_{j-1}^i\right)- \tag{4.13}$$
$$\frac{r}{2}\left(W_j^{i+1}+W_j^i\right)$$

Kemudian kedua ruas persamaan (4.13) dikalikan Δτ, maka diperoleh

$$\left(W_j^{i}-W_j^{i+1}\right)=\frac{\Delta\tau\sigma^2}{4\Delta y^2}\left(W_{j+1}^{i+1}-2W_j^{i+1}+W_{j-1}^{i+1}+W_{j+1}^i-2W_j^i+W_{j-1}^i\right)+$$
$$\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{\Delta\tau}{4\Delta y}\left(W_{j+1}^{i+1}-W_{j-1}^{i+1}+W_{j+1}^i-W_{j-1}^i\right)- \tag{4.14}$$
$$\frac{\Delta\tau r}{2}\left(W_j^{i+1}+W_j^i\right)$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Sehingga persamaan (4.14) menjadi

$$W_{j-1}^{i}\left(\left(r-\frac{1}{2}\sigma^{2}\right)\frac{\Delta\tau}{4\Delta y}-\frac{\Delta\tau\sigma^{2}}{4\Delta y^{2}}\right)+W_{j}^{i}\left(1+\frac{\Delta\tau\sigma^{2}}{2\Delta y^{2}}+\frac{\Delta\tau r}{2}\right)+W_{j+1}^{i}\left(-\left(r-\frac{1}{2}\sigma^{2}\right)\frac{\Delta\tau}{4\Delta y}-\frac{\Delta\tau\sigma^{2}}{4\Delta y^{2}}\right)= \tag{4.15}$$
$$W_{j-1}^{i+1}\left(\frac{\Delta\tau\sigma^{2}}{4\Delta y^{2}}-\left(r-\frac{1}{2}\sigma^{2}\right)\frac{\Delta\tau}{4\Delta y}\right)+W_{j}^{i+1}\left(1-\frac{\Delta\tau\sigma^{2}}{2\Delta y^{2}}-\frac{\Delta\tau r}{2}\right)+W_{j+1}^{i+1}\left(\frac{\Delta\tau\sigma^{2}}{4\Delta y^{2}}+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^{2}\right)\frac{\Delta\tau}{4\Delta y}\right)$$

Substitusikan $\Delta y = y_j/j$, maka persamaan (4.15) menjadi:

$$W_{j-1}^{i}\left(\left(r-\frac{1}{2}\sigma^{2}\right)\frac{j\Delta\tau}{4y_j}-\frac{j^{2}\Delta\tau\sigma^{2}}{4y_j^{2}}\right)+W_{j}^{i}\left(1+\frac{j^{2}\Delta\tau\sigma^{2}}{2y_j^{2}}+\frac{\Delta\tau r}{2}\right)+W_{j+1}^{i}\left(-\left(r-\frac{1}{2}\sigma^{2}\right)\frac{j\Delta\tau}{4y_j}-\frac{j^{2}\Delta\tau\sigma^{2}}{4y_j^{2}}\right)= \tag{4.16}$$
$$W_{j-1}^{i+1}\left(\frac{j^{2}\Delta\tau\sigma^{2}}{4y_j^{2}}-\left(r-\frac{1}{2}\sigma^{2}\right)\frac{j\Delta\tau}{4y_j}\right)+W_{j}^{i+1}\left(1-\frac{j^{2}\Delta\tau\sigma^{2}}{2y_j^{2}}-\frac{\Delta\tau r}{2}\right)+W_{j+1}^{i+1}\left(\frac{j^{2}\Delta\tau\sigma^{2}}{4y_j^{2}}+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^{2}\right)\frac{j\Delta\tau}{4y_j}\right)$$

Persamaan (4.16) dapat disederhanakan menjadi:

$$\alpha_j W_{j-1}^{i}+\beta_j W_{j}^{i}+\gamma_j W_{j+1}^{i}=\bar{\alpha}_j W_{j-1}^{i+1}+\bar{\beta}_j W_{j}^{i+1}+\bar{\gamma}_j W_{j+1}^{i+1} \tag{4.17}$$

untuk $i = N-1, \dots, 2, 1, 0$ dan $j = 1, 2, \dots, M-1$, dengan:

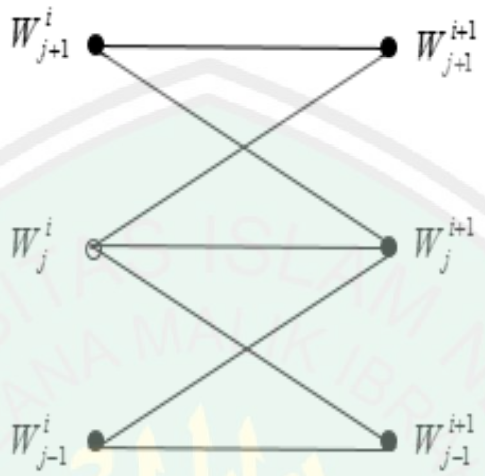
$$\alpha_j=\left(r-\frac{1}{2}\sigma^{2}\right)\frac{j\Delta\tau}{4y_j}-\frac{j^{2}\Delta\tau\sigma^{2}}{4y_j^{2}} \qquad \bar{\alpha}_j=\frac{j^{2}\Delta\tau\sigma^{2}}{4y_j^{2}}-\left(r-\frac{1}{2}\sigma^{2}\right)\frac{j\Delta\tau}{4y_j}$$

$$\beta_j=1+\frac{j^{2}\Delta\tau\sigma^{2}}{2y_j^{2}}+\frac{\Delta\tau r}{2} \qquad \bar{\beta}_j=1-\frac{j^{2}\Delta\tau\sigma^{2}}{2\Delta y_j^{2}}-\frac{\Delta\tau r}{2} \tag{4.18}$$

$$\gamma_j=-\left(r-\frac{1}{2}\sigma^{2}\right)\frac{j\Delta\tau}{4y_j}-\frac{j^{2}\Delta\tau\sigma^{2}}{4y_j^{2}} \qquad \bar{\gamma}_j=\frac{j^{2}\Delta\tau\sigma^{2}}{4y_j^{2}}+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^{2}\right)\frac{j\Delta\tau}{4y_j}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Berdasarkan persamaan (4.17) dapat dibentuk skema beda hingga Crank-Nicholson sebagai berikut:



Gambar 4.1 Skema Beda Hingga Crank-Nicholson

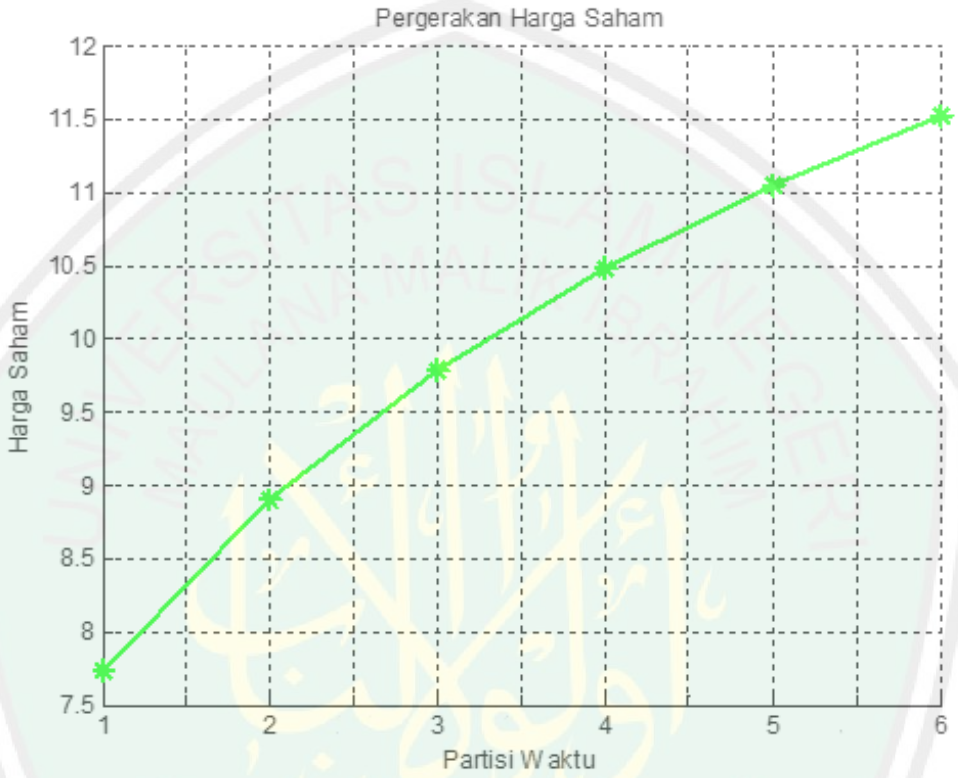
4.3 Solusi Matriks

Misalkan harga saham perusahaan X saat ini adalah 5 (satuan mata uang) perlembar. Sementara itu waktu jatuh temponya adalah 1 tahun kemudian dijual dengan *strike price* 10 (satuan mata uang) perlembar. Misalkan tingkat suku bunga bebas resiko 6% pertahun dan standar deviasi tingkat keuntungan saham tersebut sebesar 0.5 dan $M = N = 5$ pada opsi *call*.

Atau ditulis: $S(0) = 5, K = 10, r = 0.06, \sigma = 0.5, T = 1$, $N = M = 5$, maka $i = 4, 3, 2, 1, 0$ dan $j = 1, 2,3,4$, $T = 1$ tahun, maka $\Delta t = T/N = 1/5 = 0,2$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Untuk menentukan nilai awal harga opsi *call*, yaitu dengan menggunakan solusi eksak, dengan mendefinisikan $\xi = 1$, maka berdasarkan persamaan (2.54) diperoleh pergerakan harga saham sebagai berikut:



Gambar 4.2 Pergerakan Harga Saham

Gambar 4.2 diperoleh dari perhitungan harga saham $S(t)$ yaitu:

$$S(0) = 5$$

$$S(1) = 7.724$$

$$S(2) = 8.904$$

$$S(3) = 9.781$$

$$S(4) = 10.479$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Jadi nilai rata-rata harga saham pada persamaan (2.32) yaitu:

$$\bar{S} = 8.378 \tag{4.19}$$

Nilai rata-rata harga saham pada persamaan (4.19) disebarkan ke beberapa titik dengan mengalikan dua kali indeks waktu dan dibagi dengan banyaknya harga saham sehingga diperoleh

$$\bar{S}_1 = 3.3152$$

$$\bar{S}_2 = 6.7024$$

$$\bar{S}_3 = 10.0536$$

$$\bar{S}_4 = 13.4048$$

$$\bar{S}_5 = 16.756$$

Berdasarkan persamaan (2.55), diketahui nilai awal harga opsi *call* Asia dengan transformasi peubah dengan persamaan,

$$W_j^5 = \ln(\max(\bar{S}_j - K, 0)) \tag{4.20}$$

diperoleh:

$$W_1^5 = \ln(\max(\bar{S}_1 - K, 0)) = 0$$

$$W_2^5 = \ln(\max(\bar{S}_2 - K, 0)) = 0$$

$$W_3^5 = \ln(\max(\bar{S}_3 - K, 0)) = 0{,}0536$$

$$W_4^5 = \ln(\max(\bar{S}_4 - K, 0)) = 3{,}4048$$

$$W_5^5 = \ln(\max(\bar{S}_5 - K, 0)) = 6{,}756$$

Batas bawah atau nilai *payoff* terendah harga opsi *call* pada setiap periode, dengan persamaan,

$$W_0^i = \max(\bar{y}_{\min} - K, 0) = 0, \text{ untuk semua } i \tag{4.21}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Batas atas atau nilai *payoff* tertinggi harga opsi *call* pada setiap periode, dengan persamaan,

$$W_5^i = W_N^N e^{-(N-i)r\Delta\tau} \tag{4.22}$$

diperoleh:

$$W_5^4 = W_5^5 e^{-r\Delta\tau} = 7{,}6634$$

$$W_5^3 = W_5^4 e^{-r\Delta\tau} = W_5^5 e^{-2r\Delta\tau} = 7{,}5720$$

$$W_5^2 = W_5^3 e^{-r\Delta\tau} = W_5^5 e^{-3r\Delta\tau} = 7{,}4817$$

$$W_5^1 = W_5^2 e^{-r\Delta\tau} = W_5^5 e^{-4r\Delta\tau} = 7{,}3925$$

$$W_5^0 = W_5^1 e^{-r\Delta\tau} = W_5^5 e^{-5r\Delta\tau} = 7{,}3043$$

dengan mensubstitusikan $y_j = \ln(S_j)$ maka berdasarkan persamaan (4.18), untuk $j = 1,2,3,4$ diperoleh nilai-nilai α_j, β_j,dan γ_j sebagai berikut:

$$\alpha_1 = \left(0{,}06 - \frac{1}{2}(0{,}5^2)\right)\frac{1(0{,}2)}{4(\ln(5{,}772))} - \frac{1^2(0{,}2)(0{,}5^2)}{4((\ln(5{,}772))^2)} = -0{,}01123$$

$$\alpha_2 = \left(0{,}06 - \frac{1}{2}(0{,}5^2)\right)\frac{2(0{,}2)}{4\ln(11{,}544)} - \frac{2^2(0{,}2)(0{,}5^2)}{4(\ln(11{,}544))^2} = -0{,}01723$$

$$\alpha_3 = \left(0{,}06 - \frac{1}{2}(0{,}5^2)\right)\frac{3(0{,}2)}{4\ln(17{,}316)} - \frac{3^2(0{,}2)(0{,}5^2)}{4(\ln(17{,}316))^2} = -0{,}02534$$

$$\alpha_4 = \left(0{,}06 - \frac{1}{2}(0{,}5^2)\right)\frac{4(0{,}2)}{4\ln(23{,}088)} - \frac{4^2(0{,}2)(0{,}5^2)}{4(\ln(23{,}088))^2} = -0{,}03693$$

$$\beta_1 = 1 + \frac{1^2(0{,}2)(0{,}5^2)}{2(\ln(5{,}772))^2} + \frac{(0{,}2)0{,}06}{2} = 1{,}02309$$

$$\beta_2 = 1 + \frac{2^2(0{,}2)(0{,}5^2)}{2(\ln(11{,}544))^2} + \frac{(0{,}2)0{,}06}{2} = 1{,}03362$$

$$\beta_3 = 1 + \frac{3^2(0{,}2)(0{,}5^2)}{2(\ln(17{,}316))^2} + \frac{(0{,}2)0{,}06}{2} = 1{,}04824$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\beta_4 = 1 + \frac{4^2(0,2)(0,5^2)}{2(\ln(23,088))^2} + \frac{(0,2)0,06}{2} = 1,06537$$

$$\gamma_1 = -\left(0,06 - \frac{1}{2}(0,5^2)\right)\frac{1(0,2)}{4\ln(5,772)} - \frac{1^2(0,2)(0,5^2)}{4(\ln(5,772))^2} = -0,00585$$

$$\gamma_2 = -\left(0,06 - \frac{1}{2}(0,5^2)\right)\frac{2(0,2)}{4\ln(11,544)} - \frac{2^2(0,2)(0,5^2)}{4(\ln(11,544))^2} = -0,01039$$

$$\gamma_3 = -\left(0,06 - \frac{1}{2}(0,5^2)\right)\frac{3(0,2)}{4\ln(17,316)} - \frac{3^2(0,2)(0,5^2)}{4(\ln(17,316))^2} = -0,01689$$

$$\gamma_4 = -\left(0,06 - \frac{1}{2}(0,5^2)\right)\frac{4(0,2)}{4\ln(23,088)} - \frac{4^2(0,2)(0,5^2)}{4(\ln(23,088))^2} = -0,02467$$

$$\overline{\alpha_1} = \frac{1^2(0,2)(0,5^2)}{4(\ln(5,772))^2} - \left(0,06 - \frac{1}{2}(0,5^2)\right)\frac{1(0,2)}{4\ln(5,772)} = 0,01123$$

$$\overline{\alpha_2} = \frac{2^2(0,2)(0,5^2)}{4(\ln(11,544))^2} - \left(0,06 - \frac{1}{2}(0,5^2)\right)\frac{2(0,2)}{4\ln(11,544)} = 0,01723$$

$$\overline{\alpha_3} = \frac{3^2(0,2)(0,5^2)}{4(\ln(17,316))^2} - \left(0,06 - \frac{1}{2}(0,5^2)\right)\frac{3(0,2)}{4\ln(17,316)} = 0,02534$$

$$\overline{\alpha_4} = \frac{4^2(0,2)(0,5^2)}{4(\ln(23,088))^2} - \left(0,06 - \frac{1}{2}(0,5^2)\right)\frac{4(0,2)}{4\ln(23,088)} = 0,03469$$

$$\overline{\beta_1} = 1 - \frac{1^2(0,2)(0,5^2)}{2(\ln(5,772))^2} - \frac{(0,2)0,06}{2} = 0,97690$$

$$\overline{\beta_2} = 1 - \frac{2^2(0,2)(0,5^2)}{2(\ln(11,544))^2} - \frac{(0,2)0,06}{2} = 0,96637$$

$$\overline{\beta_3} = 1 - \frac{3^2(0,2)(0,5^2)}{2(\ln(17,316))^2} - \frac{(0,2)0,06}{2} = 0,95175$$

$$\overline{\beta_4} = 1 - \frac{4^2(0,2)(0,5^2)}{2(\ln(23,088))^2} - \frac{(0,2)0,06}{2} = 0,93462$$

$$\overline{\gamma_1} = \frac{1^2(0,2)(0,5^2)}{4(\ln(5,772))^2} + \left(0,06 - \frac{1}{2}(0,5^2)\right)\frac{1(0,2)}{4\ln(5,772)} = 0,00585$$

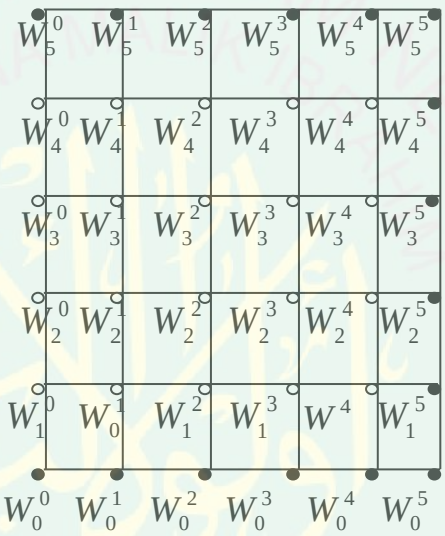
CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\overline{\gamma_2} = \frac{2^2(0{,}2)(0{,}5^2)}{4(\ln(11{,}544))^2} + \left(0{,}06 - \frac{1}{2}(0{,}5^2)\right)\frac{2(0{,}2)}{4\ln(11{,}544)} = 0{,}01039$$

$$\overline{\gamma_3} = \frac{3^2(0{,}2)(0{,}5^2)}{4(\ln(17{,}316))^2} + \left(0{,}06 - \frac{1}{2}(0{,}5^2)\right)\frac{3(0{,}2)}{4\ln(17{,}316)} = 0{,}01689$$

$$\overline{\gamma_4} = \frac{4^2(0{,}2)(0{,}5^2)}{4(\ln(23{,}088))^2} + \left(0{,}06 - \frac{1}{2}(0{,}5^2)\right)\frac{4(0{,}2)}{4\ln(23{,}088)} = 0{,}02467$$

Dari persamaan (4.17), didapatkan skema Crank-Nicholson sebagai berikut.



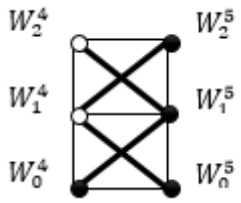
Gambar 4.3 *Grid* Beda Hingga

Dari Gambar 4.3 titik yang diarsir merupakan titik yang nilainya diketahui yaitu nilai awal, nilai batas atas, dan nilai batas bawah. Sedangkan titik yang tidak diarsir merupakan titik yang nilainya tidak diketahui atau titik yang akan dicari.

Karena *payoff* pada saat jatuh tempo adalah W_1^0, maka untuk memulai perhitungan ambil $i = 4$ dan $j = 1$, dengan W_0^4, W_0^5 merupakan batas bawah dan W_1^5,dan W_2^5 merupakan nilai awal dan nilainya diketahui, maka didapatkan persamaan:

$$\alpha_1 W_0^4 + \beta_1 W_1^4 + \gamma_1 W_2^4 = \overline{\alpha_1} W_0^5 + \overline{\beta_1} W_1^5 + \overline{\gamma_1} W_2^5$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG



Gambar 4.4 Skema Crank-Nicholson pada Satu Tahap

Dari skema tersebut titik W_1^4 dan W_2^4 tidak dapat dicari dengan menggunakan satu persamaan, maka membutuhkan persamaan lain untuk menentukan titik tersebut, ambil $j = 2$,

$$\alpha_2 W_1^4 + \beta_2 W_2^4 + \gamma_2 W_3^4 = \overline{\alpha_2} W_1^5 + \overline{\beta_2} W_2^5 + \overline{\gamma_2} W_3^5$$

Karena muncul W^4 yang belum diketahui, sehingga dibutuhkan persamaan selanjutnya dengan j selanjutnya, yaitu $j = 3,4$, sehingga diperoleh sistem persamaan linier sebagai berikut:

$$\beta_1 W_1^4 + \gamma_1 W_2^4 = \overline{\beta_1} W_1^5 + \overline{\gamma_1} W_2^5$$

$$\alpha_2 W_1^4 + \beta_2 W_2^4 + \gamma_2 W_3^4 = \overline{\alpha_2} W_1^5 + \overline{\beta_2} W_2^5 + \overline{\gamma_2} W_3^5$$

$$\alpha_3 W_2^4 + \beta_3 W_3^4 + \gamma_3 W_4^4 = \overline{\alpha_3} W_2^5 + \overline{\beta_3} W_3^5 + \overline{\gamma_3} W_4^5$$

$$\alpha_4 W_3^4 + \beta_4 W_4^4 + \gamma_4 W_5^4 = \overline{\alpha_4} W_3^5 + \overline{\beta_4} W_4^5 + \overline{\gamma_4} W_5^5$$

Dengan adanya nilai $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j, \bar{\alpha}_j, \bar{\beta}_j, \bar{\gamma}_j$ nilai awal, batas atas, dan batas bawah, maka akan membentuk sistem persamaan linier sebagai berikut:

$$1{,}02309 W_1^4 + (-0{,}00585) W_2^4 = 0{,}97690 W_1^5 + 0{,}00585 W_2^5$$

$$-0{,}017 W_1^4 + 1{,}034 W_2^4 + (-0{,}0103) W_3^4 = 0{,}017 W_1^5 + 0{,}967 W_2^5 + 0{,}0103 W_3^5$$

$$-0{,}025 W_2^4 + 1{,}048 W_3^4 + (-0{,}017) W_4^4 = 0{,}025 W_2^5 + 0{,}952 W_3^5 + 0{,}017 W_4^5$$

$$-0{,}037 W_3^4 + 1{,}065 W_4^4 - 0{,}0993 = 0{,}035 W_3^5 + 0{,}934 W_4^5 + 0.1689$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Dengan $W_1^5, W_2^5, W_3^5, W_4^5$ diketahui maka sistem persamaan linier tersebut dapat dibentuk menjadi matriks, yaitu :

$$\begin{bmatrix} 1{,}023 & -0{,}006 & 0 & 0 \\ -0{,}017 & 1{,}034 & -0{,}0103 & 0 \\ 0 & -0{,}025 & 1{,}0482 & -0{,}017 \\ 0 & 0 & -0{,}036 & 1{,}065 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1^4 \\ W_2^4 \\ W_3^4 \\ W_4^4 \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} 0{,}977 & 0{,}005 & 0 & 0 \\ 0{,}017 & 0{,}967 & 0{,}0103 & 0 \\ 0 & 0{,}025 & 0{,}095 & 0{,}017 \\ 0 & 0 & 0{,}035 & 0{,}934 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0{,}054 \\ 3{,}405 \end{bmatrix}$$

Matriks di atas dapat dinyatakan dengan $AW^4 = Bk$, dimana A dan B adalah matriks-matriks tridiagonal dengan ukuran 4×4, karena matriks A dan B determinannya tidak sama dengan nol, maka matriks A dan B invertibel, atau memiliki invers, maka penyelesaiannya yaitu $W^4 = A^{-1}Bk$ yang berukuran 4×1.

Dengan W^4 diketahui dari hasil solusi di atas, untuk selanjutnya dengan cara yang sama mencari W^3, W^2, W^1, dan W^0. Matriks tersebut diselesaikan dengan menggunakan program komputer. Sehingga secara umum matriksnya, yaitu:

$$\begin{bmatrix} \beta_1 & \gamma_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_{M-2} & \beta_{M-2} & \gamma_{M-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_{M-1} & \beta_{M-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1^i \\ W_2^i \\ \vdots \\ W_{M-2}^i \\ W_{M-1}^i \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} \bar{\beta}_1 & \bar{\gamma}_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \bar{\alpha}_2 & \bar{\beta}_2 & \bar{\gamma}_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \bar{\alpha}_{M-2} & \bar{\beta}_{M-2} & \bar{\gamma}_{M-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bar{\alpha}_{M-1} & \bar{\beta}_{M-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1^{i+1} \\ W_2^{i+1} \\ \vdots \\ W_{M-2}^{i+1} \\ W_{M-1}^{i+1} \end{bmatrix} \tag{4.23}$$

Untuk $i = (N-1), \dots, 1, 0$ dan $j = 1, 2, \dots, (M-1)$, maka matriks di atas dapat dinyatakan dengan $AW^i = BW^{i+1}$, dimana A dan B adalah matriks tridiagonal dengan ukuran $(M-1) \times (M-1)$, karena matriks A dan B memiliki ordo yang

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

sama, dan determinannya tidak sama dengan nol, maka matriks A dan B invertibel, atau memiliki invers, dengan unsur-unsur W^{i+1} diketahui maka penyelesaian untuk W^i adalah $W^i = A^{-1}BW^{i+1}$ yang berukuran $(M-1)$ x 1.

4.4 Simulasi Komputasi

Wahyudi (2014) menyatakan bahwa sebelum metode beda hingga Crank-Nicholson digunakan untuk menentukan perhitungan harga opsi Asia, terlebih dahulu diimplementasikan pada penentuan harga opsi Eropa. Karena pada opsi Eropa terdapat solusi analitik sedangkan pada opsi Asia tidak ada solusi analitiknya. Jika metode beda hingga Crank-Nicholson dengan transformasi peubah hasil perhitungan harga opsi Eropa sesuai dengan solusi analitiknya, maka metode Crank-Nicholson dengan transformasi peubah dapat digunakan pada opsi Asia.

4.4.1 Algoritma untuk Menghitung Harga Opsi Asia

Berikut ini adalah algoritma untuk metode beda hingga Crank-Nicholson dengan transformasi peubah pada perhitungan harga opsi Asia, yaitu:

1. *Input* : S, K, r, σ, T, N
2. Hitung $\Delta t = T/N$
3. Hitung $S(t)$ pada persamaan (2.54)
4. Hitung $\bar{S}$ pada persamaan (2.32)
5. Untuk *call* opsi, hitung nilai batas atas v_j^0 = Smax, nilai batas bawah v_j^{N-1} = Smin, untuk semua j = 1,2,..,M-1, dan nilai awal $v_{M-1}^i = \max\left(\bar{S} - K, 0\right)$ untuk semua i = N-1,...,2,1,0.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Untuk *put* opsi, hitung nilai batas atas v_j^0 = Smin, nilai batas bawah v_j^{N-1} = Smax, untuk semua j = 1,2,..,M-1, dan nilai awal $v_{M-1}^i = \max\left(K - \bar{S}, 0\right)$ untuk semua i = N-1,...,2,1,0.

6. Hitung $y_j = \ln S_j$
7. Hitung $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j, \bar{\alpha}_j, \bar{\beta}_j, \bar{\gamma}_j$ pada persamaan (4.18)
8. Tentukan matriks dari sistem persamaan linier pada persamaan (4.17)
9. Hitung nilai opsi untuk setiap vektor beda hingga Crank-Nicholson $W^i = A^{-1}BW^{i+1}$
10. *Output* harga opsi

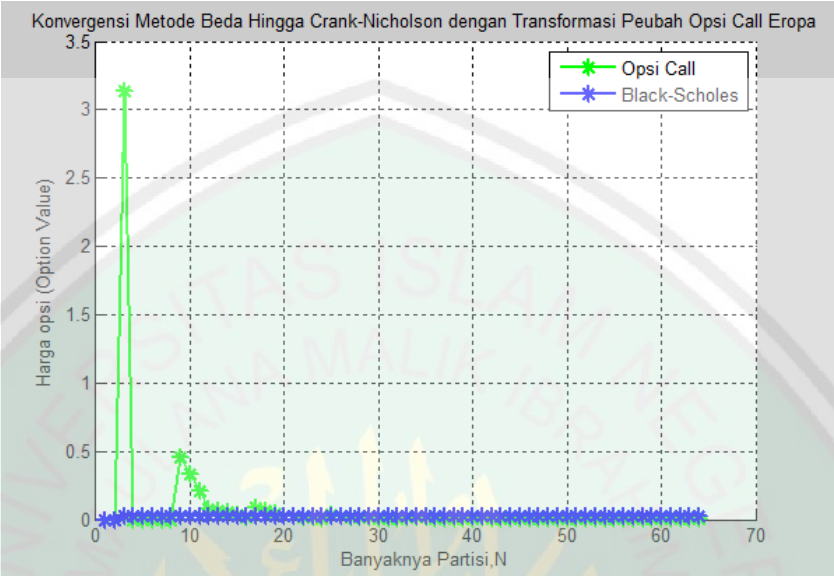
4.4.2 Perhitungan Harga Opsi Eropa

Misalkan harga saham perusahaan X saat ini adalah 5 (satuan mata uang) perlembar. Sementara itu waktu jatuh temponya adalah 1 tahun kemudian dijual dengan *strike price* 10 (satuan mata uang) perlembar. Misalkan tingkat suku bunga bebas resiko 6% pertahun dan standar deviasi tingkat keuntungan saham tersebut sebesar 0.5. Berdasarkan data tersebut, maka harga opsi *call* dan opsi *put* dapat dihitung menggunkan program Matlab, dan hasilnya sebagai berikut.

Misalkan $S_0 = 5, K = 10, r = 0.06, \sigma = 0.5, T = 1$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

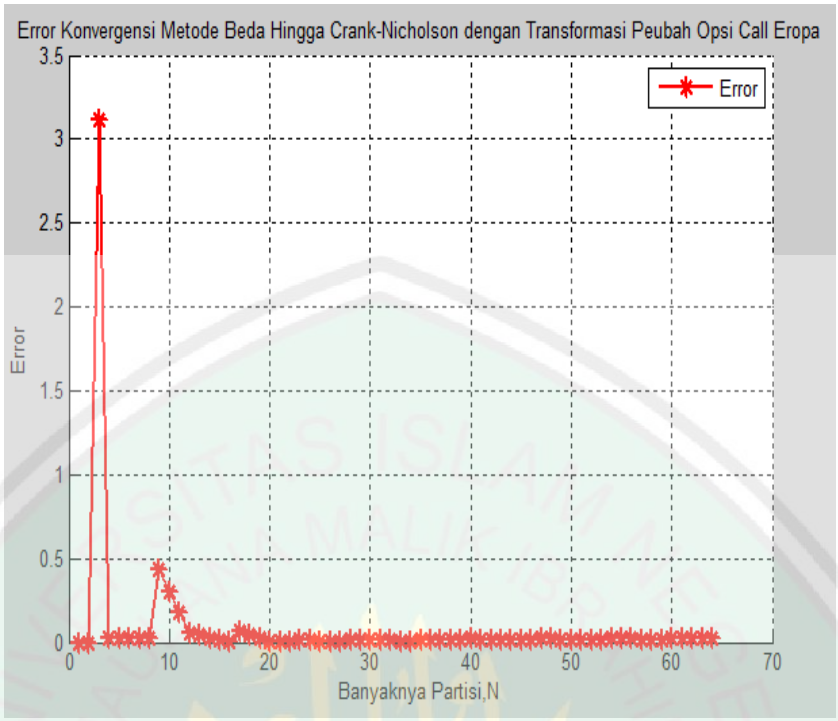
a) Perbandingan Harga Opsi *Call* Eropa Menggunakan Metode Beda Hingga Crank-Nicholson dengan transformasi peubah dan *Black-Scholes.*



Gambar 4.5 Grafik Simulasi Metode Beda Hingga Crank-Nicholson dengan Transformasi Peubah Opsi *Call* Eropa dengan $N = 64$

Grafik pada Gambar 4.5 menunjukkan pergerakan harga opsi *call* Eropa menggunakan metode beda hingga Crank-Nicholson dengan transformasi peubah dengan partisi waktu $N = 64$. Dengan partisi tersebut diketahui bahwa pergerakan harga opsi *call* Eropa semakin mendekati solusi analitiknya yaitu opsi *call* model persamaan *Black-Scholes* dengan transformasi peubah. Pada partisi N yang kecil nilai harga opsi *call* Eropa menggunakan metode beda hingga Crank-Nicholson masih jauh dari nilai opsi *call* model *Black-Scholes*, jadi partisi N perlu ditambah agar solusi numerik opsi *call* Eropa yaitu metode beda hingga Crank-Nicholson dengan transformasi peubah mendekati solusi analitiknya yaitu model *Black-Scholes*.

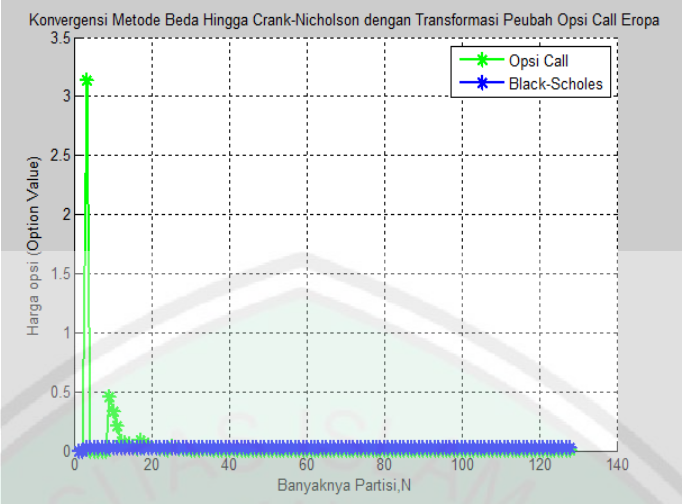
CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG



Gambar 4.6 Grafik Simulasi *Error* Metode Beda Hingga Crank-Nicholson dengan Transformasi Peubah Opsi *Call* Eropa dengan $N = 64$

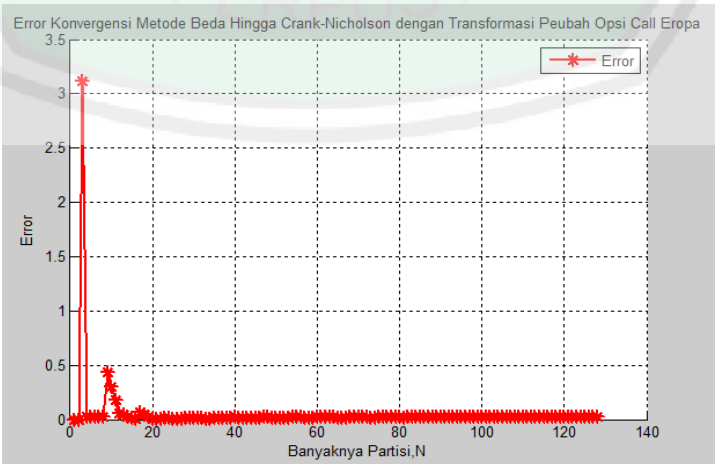
Grafik pada Gambar 4.6 menunjukkan pergerakan *error* harga opsi *call* Eropa menggunakan metode beda hingga Crank-Nicholson dengan transformasi peubah dengan partisi waktu $N = 64$. Dengan partisi tersebut diketahui bahwa *error* dari harga opsi *call* Eropa semakin mendekati nol. Karena *error* pada partisi N yang kecil menghasilkan nilai yang cukup besar, maka partisi N diperbanyak untuk menghasilkan nilai *error* yang lebih kecil, karena ketika solusi numeriknya yaitu beda hingga Crank-Nicholson dengan trnasformasi peubah tidak mendekati solusi analitiknya yaitu model *Black-Scholes*, maka metode tersebut tidak valid untuk menghitunga harga opsi Eropa, sehingga partisi N diperbanyak untuk menghasilkan *error* yang kecil.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG



Gambar 4.7 Grafik Simulasi Metode Beda Hingga Crank-Nicholson dengan Transformasi Peubah Opsi *Call* Eropa dengan $N = 128$

Grafik pada Gambar 4.7 menunjukkan pergerakan harga opsi *call* Eropa menggunakan metode beda hingga Crank-Nicholson dengan transformasi peubah dengan partisi waktu $N = 128$. Dengan partisi tersebut diketahui bahwa pergerakan harga opsi *call* Eropa semakin mendekati solusi analitiknya yaitu opsi *call* model persamaan *Black-Scholes* dengan transformasi peubah. Semakin banyak partisi N maka pergerakan harga opsi *call* Eropa akan semakin mendekati solusi analitiknya yaitu opsi *call* model persamaan *Black-Scholes* dengan transformasi peubah.

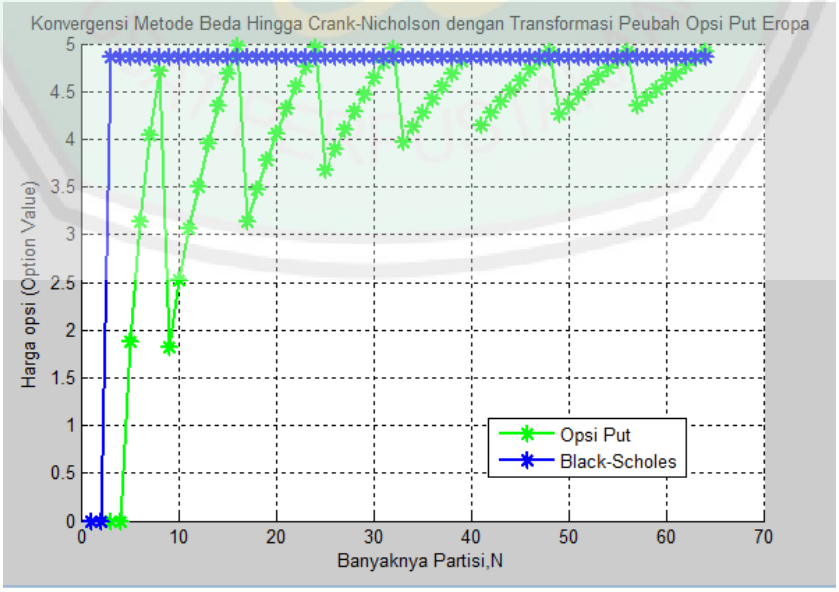


Gambar 4.8 Grafik Simulasi *Error* Metode Beda Hingga Crank-Nicholson dengan Transformasi Peubah Opsi *Call* Eropa dengan $N = 128$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Grafik pada Gambar 4.8 menunjukkan *error* pergerakan harga opsi *call* Eropa menggunakan metode beda hingga Crank-Nicholson dengan transformasi peubah dengan partisi waktu N = 128. Dengan partisi tersebut diketahui bahwa pergerakan *error* dari harga opsi *call* Eropa semakin mendekati nol. Semakin banyak partisi N maka pergerakan *error* dari harga opsi *call* Eropa akan semakin mendekati nol. Karena semakin partisi N diperbanyak solusi numerik opsi *call* Eropa yaitu metode beda hingga Crank-Nicholson dengan transformasi peubah mendekati solusi analitiknya yaitu model *Black-Scholes*, *error* yang dihasilkan semakin kecil dan mendekati nol, maka metode beda hingga Crank-Nicholson dengan transformasi peubah dapat digunakan untuk menentukan harga opsi *call* Eropa. Karena metode ini dapat digunakan untuk menentukan harga opsi *call* Eropa, maka metode ini dapat digunakan untuk menentukan harga opsi *call* Asia.

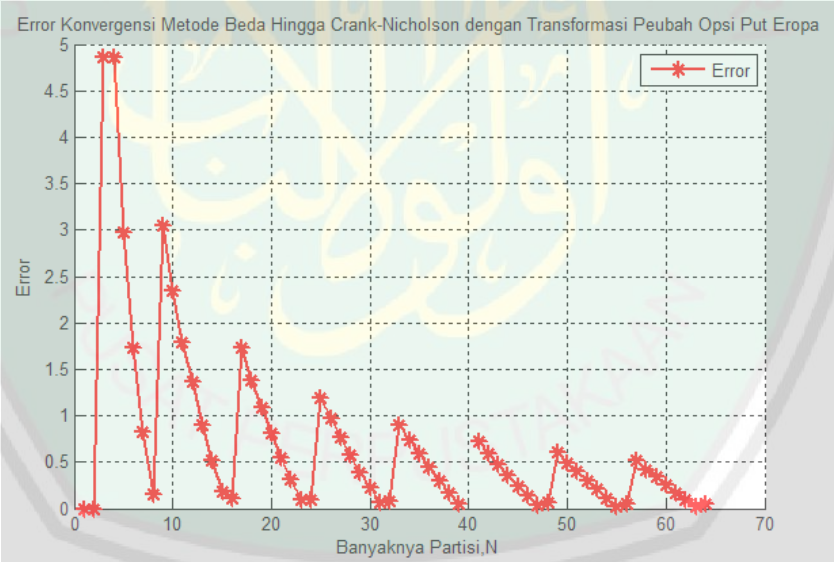
b) Perbandingan Harga Opsi *Put* Eropa Menggunakan Metode Beda Hingga Crank-Nicholson dengan Transformasi Peubah dan *Black-Scholes*.



Gambar 4.9 Grafik Simulasi Metode Beda Hingga Crank-Nicholson dengan Transformasi Peubah Opsi *Put* Eropa dengan $N = 64$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Gambar 4.9 menunjukkan grafik pergerakan harga opsi *put* Eropa dengan menggunakan metode beda hingga Crank-Nicholson dengan trasformasi peubah partisi $N = 64$. Pada gambar tersebut diketahui bahwa pada partisi $N = 64$ pergerakan harga opsi *put* Eropa semakin mendekati solusi analitiknya yaitu opsi *put* model persamaan *Black-Scholes* dengan transformasi peubah. Pada partisi N yang kecil nilai harga opsi *put* Eropa menggunakan metode beda hingga Crank-Nicholson masih jauh dari nilai opsi *put* model *Black-Scholes*, jadi partisi N perlu ditambah agar solusi numerik opsi *put* Eropa yaitu metode beda hingga Crank-Nicholson dengan transformasi peubah mendekati solusi analitiknya yaitu model *Black-Scholes*.

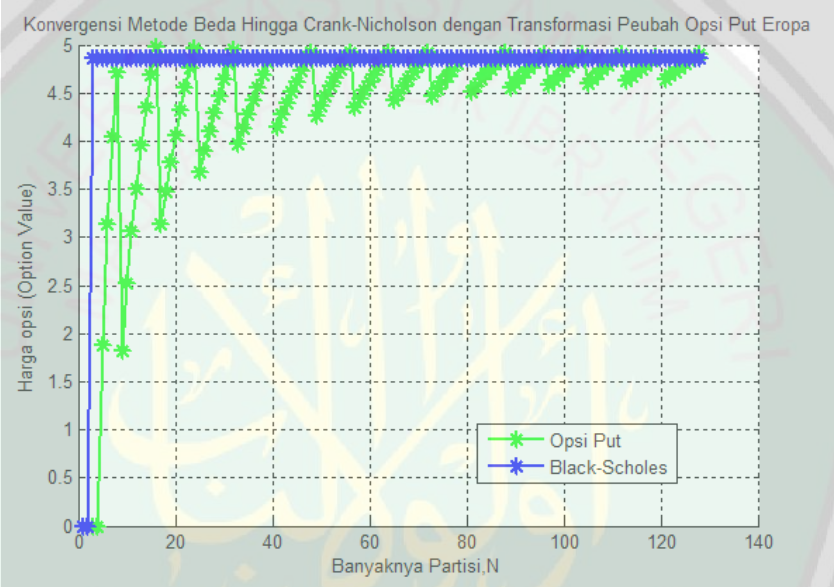


Gambar 4.10 Grafik Simulasi *Error* Metode Beda Hingga Crank-Nicholson Opsi *Put* Eropa dengan Transformasi Peubah dengan $N = 64$

Gambar 4.10 menunjukkan grafik pergerakan *error* harga opsi *put* Eropa dengan menggunakan metode beda hingga Crank-Nicholson dengan trasformasi peubah partisi $N = 64$. Pada gambar tersebut diketahui bahwa pada partisi $N = 64$ pergerakan harga opsi *put* Eropa semakin mendekati nol. Karena *error* pada

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

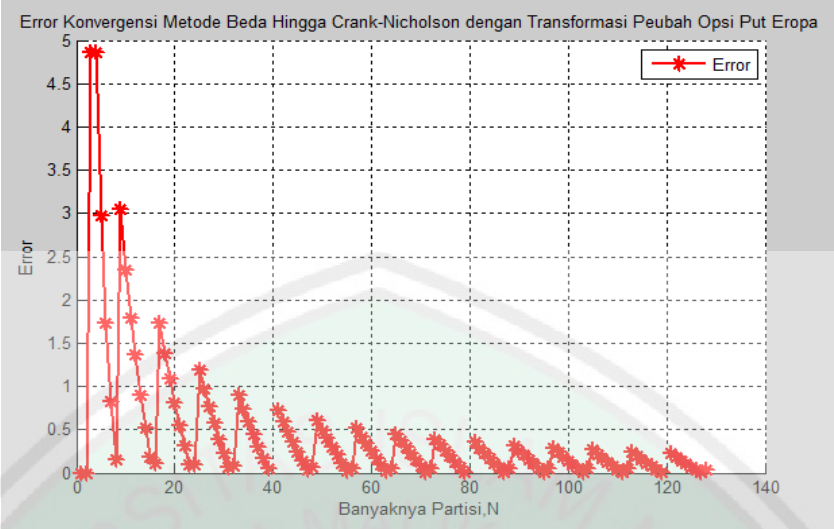
partisi N yang kecil menghasilkan nilai yang cukup besar, maka partisi N diperbanyak untuk menghasilkan nilai *error* yang lebih kecil, karena ketika solusi numeriknya yaitu beda hingga Crank-Nicholson dengan trnasformasi peubah tidak mendekati solusi analitiknya yaitu model *Black-Scholes*, maka metode tersebut tidak valid untuk menghitung harga opsi Eropa, sehingga partisi N diperbanyak untuk menghasilkan *error* yang kecil.



Gambar 4.11 Grafik Simulasi Metode Beda Hingga Crank-Nicholson Opsi *Put* Eropa dengan Transformasi Peubah dengan $N = 128$

Gambar 4.11 menunjukkan grafik pergerakan harga opsi *put* Eropa dengan menggunakan metode beda hingga Crank-Nicholson dengan trasformasi peubah partisi $N = 128$. Pada gambar tersebut diketahui bahwa pada partisi $N = 128$ pergerakan harga opsi *put* Eropa mendekati solusi analitiknya yaitu opsi *put* model persamaan *Black-Scholes* dengan transformasi peubah. Semakin banyak partisi N maka pergerakan harga opsi *put* Eropa akan semakin mendekati solusi analitiknya yaitu opsi *put* model persamaan *Black-Scholes* dengan transformasi peubah.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG



Gambar 4.12 Grafik Simulasi *Error* Metode Beda Hingga Crank-Nicholson Opsi *Put* Eropa dengan Transformasi Peubah dengan $N = 128$

Gambar 4.12 menunjukkan grafik pergerakan *error* harga opsi *put* Eropa dengan menggunakan metode beda hingga Crank-Nicholson dengan trasformasi peubah partisi $N = 128$. Pada gambar tersebut diketahui bahwa pada partisi $N = 128$ pergerakan *error* harga opsi *put* Eropa mendekati nol. Karena semakin partisi N diperbanyak solusi numerik opsi *put* Eropa yaitu metode beda hingga Crank-Nicholson dengan transformasi peubah mendekati solusi analitiknya yaitu model *Black-Scholes*, dan *error* yang dihasilkan semakin kecil dan mendekati nol, maka metode beda hingga Crank-Nicholson dengan transformasi peubah dapat digunakan untuk menentukan harga opsi *put* Eropa. Dengan demikian metode beda hingga Crank-Nicholson dengan transformasi peubah dapat digunakan untuk menentukan harga opsi *put* Eropa. Karena metode ini dapat digunakan untuk menentukan harga opsi *put* Eropa, maka metode ini dapat digunakan untuk menentukan harga opsi *put* Asia.

Metode beda hingga Crank-Nicholson dengan transformasi peubah dapat digunakan untuk menentukan harga opsi Eropa baik opsi *put* maupun opsi *call*,

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

karena semakin partisi N diperbanyak pergerakan harga opsi Eropa akan semakin mendekati solusi analtiknya yaitu model *Black-Scholes*, begitu juga *error* yang dihasilkan semakin kecil dan mendekati nol. Oleh karena itu metode ini dapat digunakan untuk menentukan harga opsi Asia baik opsi *put* maupun opsi *call*.

4.4.3 Perhitungan Harga Opsi Asia

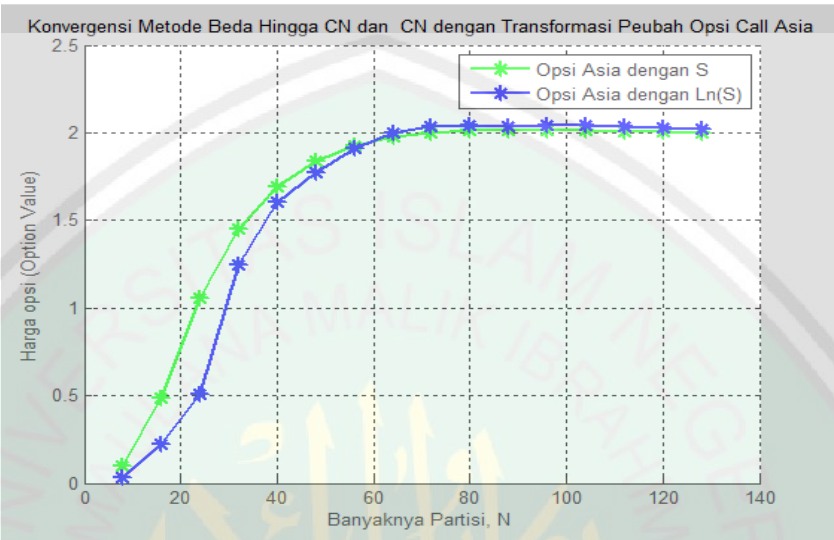
Pada opsi Asia tidak terdapat solusi analitik dalam perhitungan harga opsi. Akan tetapi, terdapat rumus pendekatan atau aproksimasi yang digunakan untuk mencari harga opsi ini. Dalam penelitian ini pendekatan atau aproksimasi yang digunakan untuk mencari harga opsi ini adalah model persamaan *Black-Scholes* yang transformasikan dengan peubah $\ln S$ sebagai harga saham.

Metode beda hingga Crank-Nicholson dengan transformasi peubah dapat digunakan untuk menentukan harga opsi Eropa yang mendekati (konvergen) terhadap solusi analitik dari opsi Eropa yaitu *Black-Scholes*, maka metode beda hingga Crank-Nicholson dengan transformasi peubah dapat digunakan untuk menentukan harga opsi Asia. Dengan kasus yang sama pada perhitungan harga opsi Eropa, akan ditampilkan grafik pergerakan harga opsi Asia dengan menggunakan metode beda hingga Crank-Nicholson dengan transformasi peubah dan metode beda hingga Crank-Nicholson untuk mengetahui keefektifan metode beda hingga Crank-Nicholson dengan transformasi peubah dengan membandingkan metode beda hingga Crank-Nicholson dan metode beda hingga Crank-Nicholson dengan transformasi peubah.

Berdasarkan Gambar 2.2 yaitu pergerakan harga opsi *call* Asia menggunakan metode beda hingga Crank-Nicholson dengan partisi waktu N =

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

128. Akan dibandingkan dengan pergerakan pergerakan harga opsi *call* Asia menggunakan metode beda hingga Crank-Nicholson dengan transformasi peubah dengan partisi waktu N = 128.

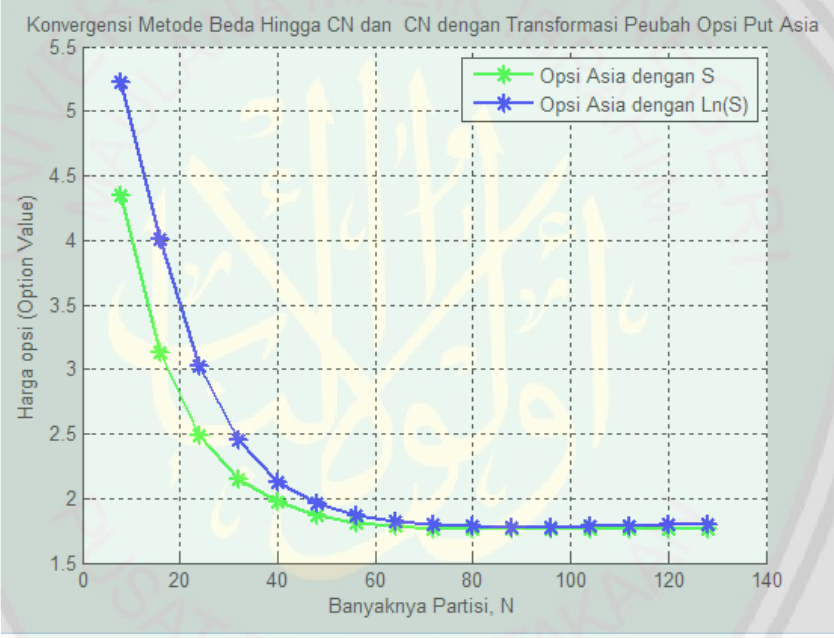


Gambar 4.13 Grafik Perbandingan Simulasi Metode Beda Hingga Crank-Nicholson dan Beda Hingga Crank-Nicholson dengan Transformasi Peubah Opsi *Call* Asia

Gambar 4.13 menunjukkan grafik perbandingan pergerakan harga opsi *call* Asia menggunakan metode beda hingga Crank-Nicholson dan beda hingga Crank-Nicholson dengan transformasi peubah dengan partisi $N = 128$. Karena pada harga opsi Asia tidak memiliki solusi analitik, maka perhitungan harga opsi Asia jika partisi waktu N diperbanyak akan konvergen ke suatu titik. Dari gambar tersebut dapat diketahui bahwa metode beda hingga Crank-Nicholson dengan transformasi peubah lebih efisien daripada metode beda hingga Crank-Nicholson tanpa transformasi peubah dalam perhitungan harga opsi *call* Asia. Hal ini dapat dilihat dari kekonvergenan titiknya. Metode beda hingga Crank-Nicholson dengan transformasi peubah ini memberikan hasil yang optimal dan akurat dilihat dari titik kekonvergenannya. Pada metode beda hingga Crank-Nicholson tanpa transformasi peubah pergerakan harga opsi *call* Asia konvergen pada titik 1.9988

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

(satuan mata uang), sedangkan pada metode beda hingga Crank-Nicholson dengan transformasi peubah pergerakan harga opsi *call* Asia konvergen pada titik 2.0204 (satuan mata uang). Karena pada waktu yang sama metode beda hingga Crank-Nicholson dengan transformasi peubah menghasilkan titik konvergenan yang lebih tinggi daripada metode beda hingga Crank-Nicholson tanpa transformasi peubah, maka metode beda hingga Crank-Nicholson dengan transformasi peubah lebih efisien digunakan untuk menentukan harga opsi *call* Asia.



Gambar 4.18 Grafik Perbandingan Simulasi Metode Beda Hingga Crank-Nicholson dan Beda Hingga Crank-Nicholson dengan Transformasi Peubah Opsi *Put* Asia

Gambar 4.18 menunjukkan grafik perbandingan pergerakan harga opsi *put* Asia menggunakan metode beda hingga Crank-Nicholson dan beda hingga Crank-Nicholson dengan transformasi peubah dengan partisi $N = 128$. Karena pada harga opsi Asia tidak memiliki solusi analitik, maka perhitungan harga opsi Asia jika partisi waktu N diperbanyak akan konvergen ke suatu titik. Dari gambar tersebut dapat diketahui bahwa metode beda hingga Crank-Nicholson dengan

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

transformasi peubah lebih efisien daripada metode beda hingga Crank-Nicholson tanpa transformasi peubah dalam perhitungan harga opsi *put* Asia. Hal ini dapat dilihat dari kekonvergenan titiknya. Metode beda hingga Crank-Nicholson dengan transformasi peubah ini memberikan hasil yang optimal dan akurat dilihat dari titik kekonvergenannya. Pada metode beda hingga Crank-Nicholson tanpa transformasi peubah pergerakan harga opsi *put* Asia konvergen pada titik 1.7684 (satuan mata uang), sedangkan pada metode beda hingga Crank-Nicholson dengan transformasi peubah pergerakan harga opsi *put* Asia konvergen pada titik 1.7984 (satuan mata uang). Karena pada waktu yang sama metode beda hingga Crank-Nicholson dengan transformasi peubah menghasilkan titik konvergenan yang lebih tinggi daripada metode beda hingga Crank-Nicholson tanpa transformasi peubah, maka metode beda hingga Crank-Nicholson dengan transformasi peubah lebih efisien digunakan untuk menentukan harga opsi *put* Asia.

4.5 Hikmah *Khiyar* dalam Jual Beli

Dalam praktek jual beli *khiyar* mempunyai hikmah untuk kemaslahatan bagi pihak-pihak yang melakukan transaksi serta menjalin cinta kasih di antara sesama manusia. Jika seseorang terlanjur membeli barang jika *khiyar* tidak ada, maka akan menimbulkan penyesalan bagi salah satu pihak dan dapat mengarah pada kedengkian, dendam, dan pertengkaran, maka dalam hukum Islam menetapkan adanya hak *khiyar* dalam rangka tegaknya kemasalahatan, kerukunan, dan keharmonisan dalam hubungan antar manusia.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Khiyar ini sangat penting dalam transaksi untuk menjaga kepentingan, kemaslahatan dan kerelaan kedua belah pihak yang melakukan kontrak serta melindungi mereka dari bahaya yang mungkin menimbulkan kerugian bagi mereka. *Khiyar* ini mencegah terjadinya penyesalan dikemudian hari yang disebabkan oleh penipuan dan ketidakcocokan dalam membeli barang yang telah dipilih serta untuk membuktikan dan mempertegas adanya kerelaan dari pihak-pihak yang terikat dalam perjanjian. *Khiyar* disyariatkan oleh Islam untuk memenuhi kepentingan yang timbul dari transaksi bisnis dalam kehidupan manusia.

Menurut penulis penjelasan ini sama halnya dengan kontrak opsi yang berarti suatu kontrak yang memberikan hak untuk menjual atau membeli suatu aset dalam jangka waktu tertentu. Dalam penelitian ini opsi yang digunakan yaitu opsi Asia, yaitu opsi yang harga ketentuannya bergantung pada rata-rata harga aset pada suatu selang periode tertentu. Seperti halnya *khiyar*, pada opsi Asia menghilangkan kemungkinan seseorang dicurangi oleh pemanipulasian harga aset sehingga terhindar dari kerugian. Oleh karena itu opsi ini banyak digemari orang. Rasulullah Saw. bersabda:

عن ابن عمر رضي الله عنه قال: ان رجلا ذكر النبي صلى الله عليه وسلم :انه يخدع في البيوع فقال له رسول الله صلى الله عليه وسلم :اذا با يعت فقل : لا خلا بة ولى الخيار ثلاثة ايام (روه البخارى)

Artinya: "Dari Ibnu Umar ra. Berkata: Seseorang pernah mengatakan kepada Rasulullah Saw. bahwa ia telah menipu dalam jual beli, maka Rasulullah Saw. berkata kepadanya, bila engkau berjual beli katakanlah: tidak ada penipuan dan saya khiyar selama tiga hari (HR. Bukhori).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Penulis menyatakan bahwa dari hadis tersebut diketahui bahwa dalam Islam *khiyar* dianjurkan dalam jual beli untuk menghindari penipuan dan penyesalan bagi pihak pembeli dan penjual, serta menjamin kesempurnaan dan kejujuran bagi penjual dan pembeli. Seorang pembeli atau penjual dapat membatalkan perjanjiannya atau melanjutkan perjanjiannya selama jangka waktu yang telah ditentukan. Seperti halnya opsi Asia, seorang pemegang kontrak dapat menggunakan haknya untuk menjual atau membeli suatu aset dalam jangka waktu yang telah ditentukan.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian tentang analisis metode beda hingga Crank-Nicholson dengan trasformasi peubah pada perhitungan harga opsi Asia, dapat diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Metode beda hingga Crank-Nicholson dengan transformasi peubah dapat digunakan untuk menentukan harga opsi Asia, hal ini dikarenakan metode beda hingga Crank-Nicholson semakin partisi waktu N diperbanyak, maka akan mendekati ke suatu titik kekonvergenan.
2. Metode beda hingga Crank-Nicholson dengan transformasi pubah lebih efisien digunakan untuk menentukan harga opsi Asia daripada metode beda hingga Crank-Nicholson tanpa transformasi peubah, hal ini dikarenakan metode beda hingga Crank-Nicholson dengan transformasi peubah memberikan hasil yang lebih optimal.
3. Pada opsi Asia menghilangkan kemungkinan seseorang dicurangi oleh pemanipulasian harga aset sehingga terhindar dari kerugian, seperti halnya opsi Asia, hikmah *khiyar* dalam jual beli yaitu menghindari penipuan dan penyesalan bagi penjual dan pembeli.

5.2 Saran

Penulis berharap pada penelitian selanjutnya untuk mengkaji tentang metode beda hingga Crank-Nicholson dengan transformasi peubah pada perhitungan opsi Asia dengan menggunakan rata-rata geometrik.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan salah satu cabang ilmu yang mendasari berbagai ilmu lain. Matematika juga merupakan alat untuk menyederhanakan penyajian dan pemahaman masalah (Sujono, 1988). Matematika mempunyai beberapa cabang keilmuan yang masing-masing mempunyai penerapan dalam hubungannya dengan berbagai disiplin ilmu lain dan dalam kehidupan sehari-hari. Salah satu dari cabang ilmu tersebut adalah metode numerik.

Salah satu metode numerik untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial adalah metode beda hingga. Metode beda hingga adalah suatu metode numerik untuk menyelesaikan suatu persamaan diferensial dengan mengaproksimasi turunan-turunan persamaan tersebut menjadi sistem persamaan linier (Sasongko, 2010). Terdapat tiga jenis metode beda hingga yaitu metode beda hingga implisit, metode beda hingga eksplisit, dan metode beda hingga Crank-Nicholson. Metode beda hingga Crank-Nicholson merupakan metode yang dikembangkan dari metode beda hingga implisit dan metode beda hingga eksplisit, yaitu rata-rata dari kedua metode tersebut.

Seiring dengan perkembangan zaman, keilmuan matematika juga berkembang dengan konsep penerapannya, baik penerapan dalam kehidupan sehari-hari maupun dalam hubungannya dengan disiplin ilmu lainnya. Salah satunya adalah ilmu keuangan.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Dunia keuangan mengenal adanya pasar keuangan (*finansial market*) yang terdiri atas pasar uang (*money market*) dan pasar modal (*capital market*). Pada pasar uang terjadi jual beli aset keuangan dalam jangka panjang. Pasar modal terdiri atas pasar obligasi, pasar saham, dan pasar untuk derivatif (Bodie, dkk, 2006).

Hull (2003) menyatakan bahwa salah satu produk derivatif atau turunan di dalam pasar modal adalah opsi. Opsi adalah salah satu kontrak yang memberikan hak (bukan kewajiban) kepada pemegang kontrak (*option buyer*) untuk membeli atau menjual suatu aset tertentu (*exercise price*) dalam jangka waktu tertentu (*expiration date*). Apabila pada saat jatuh tempo (*expiration date*) pemegang opsi tidak menggunakan haknya, maka haknya tersebut akan hilang dengan sendirinya. Dengan demikian opsi yang dimilikinya tidak akan bernilai lagi.

Terdapat dua jenis kontrak opsi yang paling mendasar, yaitu opsi *call* dan opsi *put*. Opsi *call* memberikan hak kepada pembeli untuk membeli suatu aset tertentu dengan jumlah tertentu pada harga yang telah ditentukan selama periode waktu tertentu pula. Sedangkan opsi *put* memberikan hak kepada penjual untuk menjual suatu aset tertentu dengan jumlah tertentu pada harga yang telah ditentukan selama periode waktu tertentu pula. Penggunaan hak untuk menjual atau membeli aset dalam kontrak opsi dikatakan sebagai tindakan eksekusi (Suritno, 2008).

Opsi dibedakan menjadi dua berdasarkan periode waktu pelaksanaannya, yaitu opsi Eropa dan opsi Amerika. Opsi tipe Eropa adalah opsi yang dilaksanakan hanya pada saat jatuh tempo saja. Opsi Amerika adalah opsi yang dapat dilaksanakan kapan saja hingga waktu jatuh tempo. Sedangkan opsi yang dapat berlaku seperti opsi Eropa atau opsi Amarika disebut opsi Asia (Hull, 2003).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Opsi Asia adalah opsi yang *payoff*-nya tergantung pada rata-rata harga aset dasar selama periode yang telah ditentukan terlebih dahulu (Seydel, 2009). Ada dua tipe dasar rata-rata harga saham, yaitu rata-rata aritmetika dan rata-rata geometrik. Rata-rata ini dapat dibentuk secara diskrit (Kangro, 2011). Pada opsi Asia tidak terdapat solusi analitik dalam perhitungan harga opsi. Akan tetapi, terdapat rumus pendekatan atau aproksimasi yang digunakan untuk mencari harga opsi ini (Wiklund, 2012).

Penelitian sebelumnya ditulis oleh Wahyudi (2014) yang berkaitan dengan analisis metode beda hingga implisit, eksplisit, dan Crank-Nicholson pada perhitungan harga opsi Asia. Hasil penelitian tersebut menyatakan bahwa dari ketiga metode beda hingga tersebut yang dapat digunakan untuk memperkirakan harga opsi Asia adalah metode beda hingga implisit dan Crank-Nicholson. Hal ini dikarenakan kedua metode beda hingga implisit dan Crank-Nicholson semakin partisi waktu N diperbanyak, maka akan mendekati ke suatu titik kekonvergenan, dan dari kedua metode beda hingga implisit dan Crank-Nicholson, metode yang lebih efektif untuk memperkirakan harga opsi Asia adalah metode beda hingga Crank-Nicholson, karena metode beda hingga Crank-Nicholson memberikan hasil yang lebih optimal atau lebih akurat dibanding dengan metode beda hingga implisit. Pada kasus penelitian tersebut harga saham yang digunakan adalah harga saham S. Dalam menentukan harga opsi saham dengan menggunakan metode beda hingga lebih efisien menggunakan $\ln S$. Karena ketika harga saham di-*log*-kan maka harga saham tersebut akan menjadi distribusi *lognormal*.

Brenan dan Schwartz, Geski dan Shastri dalam Hull dan White (1990) menyatakan bahwa akan lebih efisien menggunakan transformasi peubah terhadap

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

harga saham ketika menggunakan metode beda hingga. Menurut peneliti dari pernyataan tersebut diketahui bahwa metode beda hingga yang ditransformasikan akan mendapatkan hasil yang lebih efisien, artinya butuh ketelitian untuk mendapatkan hasil yang lebih optimal, di dalam al-Quran Allah telah menjelaskan bahwasannya hanya Allah Yang Maha Teliti dalam menghitung segala sesuatu, firman Allah dalam surat Maryam ayat 94 yang berbunyi:

لَقَدْ أَحْصَاهُمْ وَعَدَّهُمْ عَدّاً

Artinya: "Sesungguhnya Allah telah menentukan jumlah mereka dan menghitung mereka dengan hitungan yang teliti (Q.S. Maryam: 94").

Ayat ini menjelaskan bahwa alam semesta memuat teori-teori dan konsep matematika, meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada, alam semesta serta segala isinya diciptakan Allah dengan ukuran-ukuran yang sangat cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan, dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi (Abdussakir, 2007).

Penulis menyatakan bahwa dari ayat tersebut diketahui bahwa Allah Maha Teliti dalam menghitung sesuatu, karena hanya Allah yang mengetahui secara pasti jumlah mereka yaitu makhluk-Nya, dan Allah tidak akan salah dalam mengetahui jumlah mereka karena Allah menghitung mereka dengan hitungan yang teliti. Manusia sebagai makhluk-Nya juga harus teliti dalam menghitung sesuatu, hitungan manusia tidaklah pasti benar dan pasti ada yang lebih teliti. Oleh karena itu diperlukan perhitungan lanjutan untuk mendapatkan hasil yang lebih teliti, dalam permasalahan penelitian ini yaitu dalam menghitung harga opsi Asia, harga opsi Asia yang dihitung dengan menggunakan metode beda hingga akan lebih efisien menggunakan transformasi peubah, artinya dalam menghitung harga opsi Asia juga membutuhkan ketelitian, dalam hal ini dengan menggunakan metode

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

beda hingga yang ditransformasikan. Sehubungan dengan persoalan tersebut, penelitian ini dimaksudkan untuk mencari solusi penyelesaian perhitungan harga opsi Asia menggunakan metode beda hingga Crank-Nicholson dengan transformasi peubah.

1.2 Rumusan Masalah

Sehubungan dengan permasalahan yang diuraikan pada bagian latar belakang, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana hasil analisis metode beda hingga Crank-Nicholson dengan transformasi peubah pada perhitungan harga opsi Asia?
2. Bagaimana perbandingan metode beda hingga Crank-Nicholson dengan transformasi peubah dan metode beda hingga Crank-Nicholson tanpa menggunakan transformasi peubah?
3. Bagaimana interpretasi menurut Islam tentang analisis metode beda hingga Crank-Nicholson dengan transformasi peubah dan perbandinganya dengan tanpa menggunakan transformasi peubah pada perhitungan harga opsi Asia?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, tujuan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mengetahui hasil analisis metode beda hingga Crank-Nicholson dengan transformasi peubah pada perhitungan harga opsi Asia.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

2. Mengetahui perbandingan metode beda hingga Crank-Nicholson dengan transformasi peubah dan metode beda hingga Crank-Nicholson tanpa menggunakan transformasi peubah.
3. Mengatahui interpretasi menurut Islam tentang analisis metode beda hingga Crank-Nicholson dengan transformasi peubah dan perbandinganya dengan tanpa menggunakan transformasi peubah pada perhitungan harga opsi Asia.

1.4 Definisi Operasional

Adapun definisi operasional dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Metode Beda hingga merupakan salah satu metode numerik untuk menyelesaikan persamaan diferensial dengan mengaprosimasikan turunan-turunannya. Terdapat tiga jenis metode beda hingga yaitu metode beda hingga implisit, metode beda hingga eksplisit, dan metode beda hingga Crank-Nicholson. Beda hingga Crank-Nicholson merupakan beda hingga yang diambil dari rata-rata dari penjumlahan metode beda hingga implisit dan eksplisit
2. Transformasi peubah merupakan pengubahan peubah suatu fungsi peubah dengan fungsi lain sehingga terbentuk fungsi peubah baru yang didasari hubungan peubah awal dengan peubah baru. Dalam penelitian ini harga saham S merupakan fungsi berbentuk nonlinier sehingga dapat ditranformasi menjadi $\ln S$.
3. Opsi dalam dunia keuangan merupakan adalah suatu hak untuk membeli atau menjual sautu aset tertentu dengan harga tertentu dan dengan jangka waktu tertentu. Opsi dibedakan menjadi dua berdasarkan periode waktu

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

pelaksanaannya, yaitu opsi Eropa dan opsi Amerika. Sedangkan opsi yang dapat berlaku pada opsi Eropa atau opsi Amarika disebut opsi Asia.

4. Metode beda hingga Crank-Nicholson dengan transformasi peubah dibandingkan dengan metode beda hingga Crank-Nicholson tanpa transformasi peubah melalui titik kekonvergenannya, karena dibandingkan dengan waktu yang sama, maka jika titik kekonvergenannya lebih tinggi dan selisih harga opsi antar partisi waktu lebih kecil, maka metode tersebut lebih efisien untuk menghitung harga opsi.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Secara Teoritis, untuk memberikan informasi tentang perhitungan harga opsi Asia menggunakan metode beda hingga Crank-Nicholson dengan transformasi peubah.
2. Secara Praktis, sebagai metode alternatif untuk memprediksikan penetuan harga opsi Asia.

1.6 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Aset dasar opsi yang digunakan berupa saham.
2. Tipe dasar rata-rata harga saham yang digunakan adalah rata-rata aritmetika.
3. Perbandingan metode beda hingga Crank-Nicholson dengan tranformasi peubah dan metode beda hingga Crank-Nicholson tanpa transformasi peubah dibandingkan menurut titik kekonvergenannya.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

1.7 Sistematika Penulisan

Untuk mempermudah pembaca memahami tulisan ini, penulis membagi tulisan ini ke dalam lima bab, yaitu:

Bab I : Pendahuluan, berisi latar belakang masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, definisi operasional, manfaat penelitian, batasan masalah, dan sistematika penulisan.

Bab II : Kajian Pustaka, berisi hal-hal yang mendasari dalam masalah yang dikaji oleh peneliti, di antaranya adalah tentang deret Taylor, aproksimasi beda hingga, opsi, tipe-tipe opsi, tipe opsi Asia, model *Black-Scholes*, metode beda hingga Crank-Nicholson, proses stokastik, gerak Brown, *Ito process*, perkalian *Ito process*, proses harga saham, syarat batas dan nilai awal, matriks tridiagonal, dan *khiyar* dalam jual beli.

Bab III : Metode penelitian, berisi jenis penelitian, sumber data, dan langkah-langkah penelitian.

Bab IV : Pembahasan, berisi hasil kajian dan analisis dari simulasi yang sudah dilakukan oleh penulis dalam mengkaji permasalahan yang telah diangkat, yaitu: mengkaji perhitungan harga opsi Asia dengan menggunakan metode beda hingga Crank-Nicholson dengan transformasi peubah, membuat simulasi komputasi metode beda hingga Crank-Nicholson dengan transformasi peubah dengan mengambil suatu kasus tertentu serta menganalisis hasil simulasi tersebut kemudian membandingkannya dengan tanpa transformasi peubah.

Bab V : Penutup, berisi kesimpulan dan saran dari pembahasan yang sudah dilakukan.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika.* Malang: UIN Malang Press.

Bodie, Z., Kane, A., dan Markus, A. 2006. *Investasi*. Jakarta: Salemba Empat Penerjemah dari "Invesment".

Budi, D. 2009. *Diktat Kuliah Aljabar Linear.* Salatiga: Unversitas Kristen Satya Wacana.

Djojodihardjo, H. 2000. *Metode Numerik*. Jakarta: PT Gramedia Pustaka Utama.

Fidayanti, A. 2012. *Metode Binomial untuk Perhitungan Harga American Call Option Tanpa Deviden.* Malang: Universitas Brawijaya.

Halim, A. 2003. *Analisis Investasi*. Jakarta: Salemba Empat.

Haymans, A. 2011. *Kaya dari Bermain di Bursa Saham*. Jakarta: PT. Kompas Media Nusantara.

Higham. 2004. *An Introduction to Financial Option Valuation.* United Kingdom: Cambridge University Press.

Hull, J.C. 2003. *Option Future and Other Derivative*. Toronto: Prentice Hall.

Hull, J & White, A. 1990. Valuing Derivative Securities the Explicit Finite Difference Method. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 25.

Kangro, R. 2011. *Computational Finance.* Ulikool: European Union.

Khuriyanti. 2009. *Penentuan Harga Saham Opsi Asia.* Skripsi tidak diterbitkan. Depok: FMIPA Universitas Indonesia

Kwok, Y. 1998. *Mathematical Models of Financial Derivatives*. Hongkong: Springer.

Munir, R. 2010. *Metode Numerik*. Bandung: Informatika Bandung.

Muniroh, W.S. 2008. *Simulasi Monte Carlo dalam Menentukan Nilai Opsi Saham*. Skripsi tidak diterbitkan. Malang: UIN Malang.

Niwiga, D.B. 2005. *Numerical Methods for The Valuation Of Financial Derivatives.* Tesis tidak diterbitkan. Werstern Cape: University of Werstern Cape.

Nugroho, D.B. 2009. *Metode Numerik*. Salatiga: Universitas Kristen Satya Wacana.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Ross, S.M. 1996. S*tochastic Process*. New York: John Wiley & Son Inc.

Sahrani, S dan Abdullan, R. 2011. *Fiqih Muamalah.* Bogor: Ghalia Indonesia.

Sasongko. 2010. *Metode Numerik dengan Scilab*. Yogyakarta: CV Andi.

Seydel, R. 2009. *Tools for Computational Finance*. Jerman: Springer.

Sharpe, W. 1995. *Inverstmen.* New Jeisey: Prentice Hall.

Siregar, B. 2014. *Invers Suatu Matriks Toeplitz Menggunakan Metode Adjoin.* Medan: Universitas Sumatera Utara.

Suherdi, J. 2010. *Pengantar Derivatif dalam Moneter Internasional*. Jakarta: Grasindo.

Sujono. 1988. *Pengajaran Matematika untuk Sekolah Menengah.* Jakarta: Departemen Pendidikan dan Kebudayaan Dirjen Dikti Proyek Pengembangan Lembaga Pendidikan Tenaga Kependidikan.

Suritno. 2008. *Metode Beda Hingga Untuk Solusi Numerik dari Persamaan Black-Scholes Harga Opsi Put Amerika*. Tesis tidak diterbitkan. Bogor: IPB.

Tjandra, O. 2012. *Penentuan Harga Opsi Saham dengan Manggunakan Metode Beda Hingga Crank-Nicholson(C-N)*. Denpasar: Universitas Udayana.

Tsay, R. 2010. *Analysis of Financial Time Series.* Sixth Edition. New Jersey: Prentice-Hall.

Wahyudi. 2014. *Analisis Metode Beda Hingga Implisit, Eksplisit, dan Crank-Nicholson pada Perhitungan Harga Opsi Asia*. Skripsi tidak diterbitkan. Malang: UIN Malang.

Widoatmodjo, S. 2005. *Cara Sehat Investasi di Pasar Modal*. Jakarta: Alex Media Komputindo.

Wiklund, E. 2012. *Asian Option Pricing and Volatility*. Tesis tidak diterbitkan. Stockholm: Institute of Technology.

Wilmott, P., Howison, S., dan Dewynne, J. 1995. *The Mathematics of Financial Derivatives.* New York: Cambridge University Press.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

LAMPIRAN

1. Program Metode Beda Hingga Crank-Nicholson dengan Transformasi Peubah pada Perhitungan Harga Opsi Eropa

```
clc, clear all
format short
disp('');
disp('Program Metode Beda Hingga Crank-Nicholson Eropa');
disp('');
x=input('inputkan faktor pengali Smax x=');
M=input('inputkan partisi grid N=');
disp('');
disp('    pilihan');
disp('    pemegang hak saham');
disp('');
disp('   (1)Call Option');
disp('   (2)Put Option');
disp('');
OptionType=input('input pemegang hak yang diinginkan =');
disp('');
disp('    ');

tic;

SO=5;            % harga saham awal
T=1;             % waktu yang digunakan
K=10;            % harga saham ketentuan
sig=0.5;         % variansi
r=0.06;          % tingkat bunga

Smax=x*SO;       % harga saham maksimum
Smin=0;
% nilai untuk BS
d1=log(SO)/sqrt(2*T)+0.5*((r/(sig^2)/2)+1)*sqrt(2*T);
d2=log(SO)/sqrt(2*T)+0.5*((r/(sig^2)/2)-1)*sqrt(2*T);

N1=0.5*(1+erf(d1/sqrt(2)));
N2=0.5*(1+erf(d2/sqrt(2)));

for N=3:M
    Ds=Smax/N; % partisi harga saham
    Dt=T/N;    % partisi waktu
    matsol=zeros(N+1,N+1);

    %membangun vektor S dan vektor V
    for i=1:N+1
        S(i)=Smin+(i-1)*Ds;
        y=log(S);
        if OptionType==1
            V(i)=max(S(i)-K,0); % Call : payoff that is initial
condition
        else
            V(i)=max(K-S(i),0); % Put : payoff that is initial
condition
```

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

```
    end
end

% membangun matrik B
for j=1:N-1
    Alpha=(r-0.5*(sig^2))*((j*Dt)/(4*log(S(j))));
    Betha=((j^2)*Dt*(sig^2))/(4*(log(S(j))^2));
    a=Betha-Alpha;
    b=1-2*Betha-0.5*r*Dt;
    c=Betha+Alpha;
    if j==1
        B(j,j)=b;
        B(j,j+1)=c;
    elseif j==N-1
        B(N-1,N-2)=a;
        B(N-1,N-1)=b;
    else
        B(j,j-1)=a;
        B(j,j)=b;
        B(j,j+1)=c;
    end
end

%Membangun elemen matrik A
for j=1:N-1
    Alpha=(r-0.5*(sig^2))*((j*Dt)/(4*log(S(j))));
    Betha=((j^2)*Dt*(sig^2))/((4*log(S(j))^2));
    a1=Alpha-Betha;
    b1=1+2*Betha+0.5*r*Dt;
    c1=-Betha-Alpha;
    if j==1
        A(j,j)=b1;
        A(j,j+1)=c1;
    elseif j==N-1
        A(N-1,N-2)=a1;
        A(N-1,N-1)=b1;
    else
        A(j,j-1)=a1;
        A(j,j)=b1;
        A(j,j+1)=c1;
    end
end

%payoff
matsol(:,N+1)=V;

%batas
if OptionType==1
    for j=N:-1:1 % call option
        matsol(1,j)=Smin; % batas bawah
        matsol(N+1,j)=Smax*exp((N+1-j)*-r*Dt); % batas atas
    end
else
    for j=N:-1:1 % put option
        matsol(1,j)=Smax*exp((N+1-j)*-r*Dt); % batas atas
        matsol(N+1,j)=Smin; % batas bawah
    end
end
```

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

```
    %matrik harga opsi
    matV=matsol(2:N,1:N+1);
    for j=N:-1:1
        matV(:,j)=inv(A)*B*matV(:,j+1);
    end
    %Perhitungan Black-Scholes
    C=((SO)*(N2))-(exp((r/(sig^2)/2)*T)*(N1));
    P=(exp(-(r/(sig^2)/2)*T)*(-N2))-(SO)*(-N1);
    if OptionType==1
        BC(N,1)=C;
    else
        BC(N,1)=P;
    end

    %output perulangan 3:N
    p=ceil(N/x);
    harga_opsi(N,1)=matV(p,1);
    BS=BC;
end
%Output
error=abs(BC-harga_opsi);
harga_opsii=matV(p,1);
B_S=BC(N,1);
eror=abs(B_S-harga_opsii);
%output harga opsi, Blck-Scholes dan Eror
disp('');
disp('Harga Opsi BS Eror');
disp([harga_opsi BC error]);
disp('    ')
%perhitungan waktu kecepatan
toc;
%menggambar kurva Harga Opsi, Black-Scholes dan Error
grid on
hold on
plot(harga_opsi,'-*g','markerSize',10,'LineWidth',2);
plot(BC,'-*b','markerSize',10,'LineWidth',2);
hold on
plot(error,'-*r','markerSize',10,'LineWidth',2);
if OptionType==1
    title('Error Konvergensi Metode Beda Hingga Crank-Nicholson
dengan Transformasi Peubah Opsi Call Eropa')
else
    title('Konvergensi Metode Beda Hingga Crank-Nicholson dengan
Transformasi Peubah Opsi Put Eropa');
end
xlabel('Banyaknya Partisi,N')
ylabel('Error')
if OptionType==1
    q=legend('Error',1);
else
    q=legend('Opsi Put','Black-Scholes','Error',1);
end
```

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

2. **Program Perbandingan Metode Beda Hingga Crank-Nicholson dan Metode Beda Hingga Crank-Nicholson dengan Transformasi Peubah pada Perhitungan Harga Opsi Asia**

```
clc, clear all
format short
disp('');
disp('Program Metode Beda Hingga Crank-Nicholson Asia');
disp('');
x=input('inputkan faktor pengali Smax x=');
M=input('inputkan partisi grid N=');
disp('');
disp('    pilihan');
disp('    pemegang hak saham');
disp('');
disp('   (1)Call Option');
disp('   (2)Put Option');
disp('');
OptionType=input('input pemegang hak yang diinginkan =');
disp('');
disp('    ');

SO=5;            % harga saham awal
T=1;             % waktu yang digunakan
K=10;            % harga saham ketentuan
sig=0.5;         % variansi
r=0.06;          % tingkat bunga

Smax=x*SO;       % harga saham maksimum
Smin=0;

for N=3:M
    Ds=Smax/N;
    Dt=T/N;

    matsol=zeros(N+1,N+1);% solution matrik
%     B=zeros (N-1,N-1); %

    for i=1:N+1
        S(i)=SO*exp((r-0.5*sig^2)*i+sig*sqrt(Dt));
    end
    Sbar=mean(S);

    for j=1:N-1
        Alpha=0.25*sig^2*(j^2)*Dt;
        Betha=0.25*r*j*Dt;
        a=-Betha+Alpha;
        b=1-2*Alpha-0.5*r*Dt;
        c=Betha+Alpha;
        %a=1;b=2,c=3
        if j==1
            B(j,j)=b;
            B(j,j+1)=c;
        elseif j==N-1
            B(N-1,N-2)=a;
            B(N-1,N-1)=b;
```

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

```
    else
        B(j,j-1)=a;
        B(j,j)=b;
        B(j,j+1)=c;
    end
end

for j=1:N-1
    Alpha=0.25*sig^2*(j^2)*Dt;
    Betha=0.25*r*j*Dt;
    a=Betha-Alpha;
    b=1+2*Alpha+0.5*r*Dt;
    c=-Betha-Alpha;
    if j==1
        A(j,j)=b;
        A(j,j+1)=c;
    elseif j==N-1
        A(N-1,N-2)=a;
        A(N-1,N-1)=b;
    else
        A(j,j-1)=a;
        A(j,j)=b;
        A(j,j+1)=c;
    end
end
for i=1:N+1
    if OptionType==1
        V(i)=max((i-1)*Sbar-K,0);
    else
        V(i)=max(K-(i-1)*Sbar,0);
    end
end

matsol(:,N+1)=V;

if OptionType==1
    for j=N:-1:1 %call option
        matsol(1,j)=Smin; %batas bawah
        matsol(N+1,j)=Smax*exp((N+1-j)*-r*Dt); %batas atas
    end
else
    for j=N:-1:1 %put option
        matsol(1,j)=Smax*exp((N+1-j)*-r*Dt); %batas atas
        matsol(N+1,j)=Smin; %batas bawah
    end
end

matV=matsol(2:N,1:N+1);

for k=N:-1:1
    matV(:,k)=inv(A'*A)*A'*B*matV(:,k+1);
end

p=ceil(N/x);
harga_opsi(N,1)=matV(p,1);
harga_opsii=matV(p,1);
```

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

```
for j=1:N-1
    Alpha=(r-0.5*(sig^2))*((j*Dt)/(4*log(Sbar*(j))));
    Betha=((j^2)*Dt*(sig^2))/(4*(log(Sbar*(j))^2));
    a=Betha-Alpha;
    b=1-2*Betha-0.5*r*Dt;
    c=Betha+Alpha;
    %a=1;b=2,c=3
    if j==1
        B(j,j)=b;
        B(j,j+1)=c;
    elseif j==N-1
        B(N-1,N-2)=a;
        B(N-1,N-1)=b;
    else
        B(j,j-1)=a;
        B(j,j)=b;
        B(j,j+1)=c;
    end
end

for j=1:N-1
    Alpha=(r-0.5*(sig^2))*((j*Dt)/(4*log(Sbar*(j))));
    Betha=((j^2)*Dt*(sig^2))/(4*(log(Sbar*(j))^2));
    a1=Alpha-Betha;
    b1=1+2*Betha+0.5*r*Dt;
    c1=-Betha-Alpha;
    if j==1
        A(j,j)=b1;
        A(j,j+1)=c1;
    elseif j==N-1
        A(N-1,N-2)=a1;
        A(N-1,N-1)=b1;
    else
        A(j,j-1)=a1;
        A(j,j)=b1;
        A(j,j+1)=c1;
    end
end


for i=1:N+1
    if OptionType==1
        V(i)=max((i-1)*(Sbar)-K,0);
    else
        V(i)=max(K-(i-1)*Sbar,0);
    end
end

matsol(:,N+1)=V;

if OptionType==1
    for j=N:-1:1 %call option
        matsol(1,j)=Smin; %batas bawah
        matsol(N+1,j)=Smax*exp((N+1-j)*-r*Dt); %batas atas
    end
else
    for j=N:-1:1 %put option
        matsol(1,j)=Smax*exp((N+1-j)*-r*Dt); %batas atas
```

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

```
            matsol(N+1,j)=Smin; %batas bawah
        end
    end

    matV=matsol(2:N,1:N+1);

    for k=N:-1:1
        matV(:,k)=inv(A)*B*matV(:,k+1);
    end

    p=ceil(N/x);
    harga_ops(N,1)=(matV(p,1));
    harga_opsii=matV(p,1);
end
grid on
hold on
qq=x:x:N;
harga_opsi=harga_opsi(x:x:length(harga_opsi));
harga_ops=harga_ops(x:x:length(harga_ops));
% error=abs(harga_opsi-harga_ops)
grid on
hold on
plot(qq,harga_opsi,'-*g','markerSize',10,'LineWidth',2)
plot(qq,harga_ops,'-*b','markerSize',10,'LineWidth',2)
hold on
% plot(qq,error,'-*r','markerSize',10,'LineWidth',2)
if OptionType==1
    title('Konvergensi Metode Beda Hingga CN dan  CN dengan
Transformasi Peubah Opsi Call Asia')
else
    title('Konvergensi Metode Beda Hingga CN dan  CN dengan
Transformasi Peubah Opsi Put Asia')
end
xlabel('Banyaknya Partisi, N')
ylabel('Harga opsi (Option Value)')
q=legend('Opsi Asia dengan S','Opsi Asia dengan Ln(S)','Error',1);
```

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

RIWAYAT HIDUP

Diah Praminia, lahir di kota Jember pada tanggal 08 Maret 1993, biasa dipanggil Diah, tinggal di Pondok Pesantren Darul Ulum Al-Fadholi Jalan Mertojoyo Blok S No 09 Merjosari Kecamatan Lowokwaru Kabupaten Malang. Anak bungsu dari 4 bersaudara dari Bapak Ahmad Sadin dan Ibu Sumarni.

Pendidikan dasarnya ditempuh di SDN Gambiran 1 dan lulus pada tahun 2005, setelah itu melanjutkan ke MTs. Al-Imam Gambiran dan lulus pada tahun 2008, kemudian melanjutkan ke MAN Jember 1 dan lulus pada tahun 2011. Selanjutnya pada tahun 2011 menempuh kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang mengambil Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi.

Selama menjadi mahasiswa, dia berperan aktif pada organisasi intra kampus yaitu Himpunan Mahasiswa Jurusan (HMJ) Matematika sebagai anggota devisi pengembangan minat dan bakat periode 2012/2013 dalam rangka membangun kompetensi akademiknya.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG