

**PERBANDINGAN METODE NEWTON RAPHSON DENGAN
METODE HALLEY DALAM MENYELESAIKAN AKAR-
AKAR PERSAMAAN NONLINIER**

SKRIPSI

Oleh:

CHAMIM STALIS Y.Y

NIM: 05510007



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN)
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG**

2009

**PERBANDINGAN METODE NEWTON RAPHSON DENGAN
METODE HALLEY DALAM MENYELESAIKAN AKAR-
AKAR PERSAMAAN NONLINIER**

SKRIPSI

Diajukan Kepada:

**Fakultas Sains Dan Teknologi
Universitas Islam Negeri (UIN) Malang
Untuk Memenuhi Saah Satu Persyaratan Dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)**

Oleh:

CHAMIM STALIS Y.Y

NIM: 05510007

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN)
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG**

2009

**SURAT PERNYATAAN
KEASLIAN TULISAN**

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : CHAMIM STALIS Y.Y
NIM : 05510007
Jurusan : Matematika
Fakultas : Sains dan Teknologi

Menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa hasil penelitian saya ini tidak terfapat unsur-unsur penjiplakan karya penelitian atau karya ilmiah yang pernah dilakukan atau dibuat oleh orang lain, kecuali yang secara tertulis dikutip dalam naskah ini dan disebutkan dalam sumber kutipan dan daftar pustaka.

Apabila ternyata hasil penelitian ini terbukti terdapat unsur-unsur jiplakan, maka saya bersedia untuk mempertanggung jawabkan, serta diproses sesuai peraturan yang berlaku.

Malang, 4 Desember 2009

Yang membuat pernyataan,

Chamim Stalis Y.Y

NIM. 05510007

**PERBANDINGAN METODE NEWTON RAPHSON DENGAN
METODE HALLEY DALAM MENYELESAIKAN AKAR-
AKAR PERSAMAAN NONLINIER**

SKRIPSI

Oleh:
CHAMIM STALIS Y.Y
NIM. 05510007

Telah disetujui oleh:

Dosen Pembimbing Matematika

Dosen Pembimbing Keagamaan

Abdul Aziz, M.Si
NIP.19760318 200604 1 002

Ach Nashichuddin, M.A
NIP.19730705 200003 1 002

Tanggal 4 Desember 2009

**Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika**

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

**PERBANDINGAN METODE NEWTON RAPHSON DENGAN
METODE HALLEY DALAM MENYELESAIKAN AKAR-
AKAR PERSAMAAN NONLINIER**

SKRIPSI

Oleh:
CHAMIM STALIS Y.Y
NIM. 05510007

Telah Dipertahankan di depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal 22 Desember 2009

Susunan Dewan Penguji	Tanda Tangan
1. Penguji Utama : Usman Pagalay, M.Si	()
2. Ketua : Wahyu H. Irawan, M.Pd	()
3. Sekretaris : Abdul Aziz, M.Si	()
4. Anggota : Ach. Nashichuddin, M.A	()

**Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika**

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERSEMBAHAN

Dengan rasa rendah hati dan *Tawadlu'*,
KUPERSEMBAHKAN KARYA KECIL INI
Untuk mereka yang begitu berarti bagiku:

Bapak dan Ibu^{ku} tercinta,
yang dengan ikhlas mengasuh, merawat, dan mendidik^{ku} dari buaian hingga dewasa kini,
Terima kasih atas bantuan, ketulusan do'a, dan pengorbanan panjenengan
yang begitu berarti bagiku
Sehingga nanda bisa berhasil mewujudkan secuil dari harapanmu.

Para Guru, Ustadz, serta Dosen-dosen^{ku} terhormat
yang dengan ikhlas memberikan segudang ilmu dan wacana.
Aku hanya berdoa 'a semoga bisa menjadi ilmu yang bermanfaat.

Mbak *fiqoh* sekeluarga dan Mbak *Hanifah* sekeluarga
Yang banyak membantu dan memberikan semangat untuk^{ku}
selama kuliah sampai aku bisa menyelesaikan skripsi ini.

Buat para *Kyai-Kyai*^{ku}
yang telah memberikan ilmu yang sangat bermanfaat bagiku..
Khusus Prof. Dr. KH. Ahmad mudhor, SH., dan KH. Badruddin Anwar.,
barokah jenengan semua yang kuharapkan..

Semua Teman-teman Math Depart '05,
Thanks atas dukungan dan supportnya
'Especially to Ima n Navi',
Thanks mau membantu, dan mendengarkan semua keluh kesah^{ku}

Semua Teman-teman ^{ku} di pesantren L^UH^UR,
Ayo istiqomah, sholat berjama'ah, istighosah dan halaqoh
Ojo blarah tok..

Juga untuk semua Teman-teman yang selalu mengingat, menyayangi,
merindukan, menyemangati, dan menyebutkan namaku dalam doanya. Pokoknya, Aku Ucapin
makasih banyak dah.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Segala puji bagi Allah SWT karena atas rahmat, taufiq dan hidayah-Nya, penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana sains (S.Si) dalam bidang Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Malang.

Penulis menyadari bahwa banyak pihak yang telah berpartisipasi dan membantu dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Untuk itu, iringan do'a dan ucapan trima kasih yang sebesar-besarnya penulis sampaikan, utamanya kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo selaku Rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Drs Sutiman Bambang Sumitro, SU., D.Sc selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Bapak Abdussakir, M.Pd selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Bapak Abdul Aziz, M.Si yang telah bersedia meluangkan waktunya untuk memberikan bimbingan dan pengarahan selama penulisan skripsi di bidang matematika numerik.
5. Bapak Ach.Nasihchuddin M.A yang telah bersedia meluangkan waktunya untuk memberikan bimbingan dan pengarahan selama penulisan skripsi ini di bidang kajian keislaman.
6. Segenap dosen pengajar atas ilmu yang diberikan kepada penulis.

7. Bapak dan Ibu tercinta dan segenap keluarga yang senantiasa memberikan do'a dan dukungan yang terbaik bagi penulis.
8. Teman-teman Matematika, terutama angkatan 2005 beserta semua pihak yang telah membantu penyelesaian skripsi ini.
9. Teman-teman di pesantren Luhur, yang selalu memberikan dukungan dan semangat sehingga skripsi ini dapat terselesaikan.

Dalam penyusunan skripsi ini tentunya masih banyak terdapat kesalahan dan kekurangan, sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran demi perbaikan skripsi ini. Akhirnya, semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Amien.

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Malang, 4 Desember 2009

Penulis

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	i
DAFTAR ISI	iii
DAFTAR TABEL	v
DAFTAR GAMBAR	vi
DAFTAR LAMPIRAN	vii
ABSTRAK	viii
BAB I : PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Perumusan Masalah	5
1.3 Tujuan Penelitian	5
1.4 Manfaat Penelitian	6
1.5 Batasan Masalah	6
1.6 Metode Penelitian	7
1.7 Sistematika Pembahasan	9
BAB II : TINJAUAN PUSTAKA	
2.1 Metode Numerik dalam Konteks Keagamaan	10
2.2 Galat	18
2.2.1 Sumber Utama Galat Numerik	20
2.3 Deret Taylor.....	22
2.3.1 Kesalahan Pemotongan	24
2.4 Akar-akar persamaan	27
2.4.1 Metode Pencarian Akar	28
2.4.2 Metode Newton Raphson.....	29
2.4.3 Metode Halley	30
2.4.4 Kecepatan Konvergensi	30

BAB III: PEMBAHASAN

3.1 Metode Newton Raphson	31
3.1.1 Penurunan Rumus Newton Raphson Secara Geometri	32
3.1.2 Penurunan Rumus Newton Raphson dengan Bantuan Deret Taylor	34
3.1.3 Kriteria Konvergensi Metode Newton Raphson	35
3.1.4 Orde Konvergensi Metode Newton Raphson	43
3.2 Metode Halley	40
3.2.1 Orde Konvergensi Metode Halley	43
3.3 Menyelesaikan Akar-Akar Persamaan Nonlinier	45
3.3.1 Menyelesaikan Akar-Akar persamaan nonlinier dengan metode newton raphson dan metode halley	46
3.4 Perbandingan Konvergensi Metode Newton Raphson dengan Metode Halley dalam Menyelesaikan Akar-Akar Persamaan Nonlinier	51
3.5 Keterkaitan Antara Metode Newton Raphson dan Metode Halley dengan Kajian Agama Islam	57

BAB V: PENUTUP

4.1 Kesimpulan	59
4.2 Saran	59

DAFTAR PUSTAKA**LAMPIRAN**

DAFTAR TABEL

No	Judul	Halaman
3.1	Tabel konvergensi Newton Raphson	52
3.2	Tabel konvergensi Metode Halley	53
3.3	Tabel perbandingan konvergensi	54
3.4	Tabel perbandingan konvergensi	55



DAFTAR GAMBAR

No.	Gambar	Halaman
1.1	kurva $y = -x^2 + \exp(x)$	3
3.1	iterasi pada metode Newton-Raphson	32
3.2	Representasi garis tangen pada metode Newton-Raphson	33
3.3	grafik fungsi $f(x) = e^x - 5x^2$	46
3.4	Konvergensi nilai akar pada metode Newton Raphson	52
3.5	Konvergensi nilai fungsi pada metode Newton Raphson	52
3.6	Konvergensi nilai akar pada metode Halley	53
3.7	Konvergensi nilai fungsi pada metode Halley	54
3.8	Gambar 3.8. grafik fungsi $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$	55
3.9	Perbandingan Konvergensi Nilai Akar	56
3.10	Perbandingan Konvergensi Nilai Fungsi	56

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran i Program Perbandingan metode Newton Raphson dan Metode Halley dalam Mencari Akar-Akar Persamaan Nonlinier	ix
---	----



ABSTRAK

Yahya, Chamim. 2009. Perbandingan Metode Newton Raphson Dengan Metode Halley Dalam Menentukan Akar-Akar Persamaan Nonlinier. Skripsi, Jurusan matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Malang. Pembimbing: (I) Abdul Aziz, M.Si. (II) Ach Nashichuddin, M.A.

Kata Kunci: Metode Newton Raphson, Metode Halley, Persamaan Nonlinier, Kecepatan Konvergensi.

Metode numerik adalah teknik untuk menyelesaikan permasalahan-permasalahan yang diformulasikan secara matematis dengan operasi hitungan/ aritmetika biasa (tambah, kurang, bagi, dan kali). Salah satu penerapan metode numerik dalam perhitungan aritmetika adalah mencari akar-akar persamaan nonlinier. Salah satu metode pencarian akar-akar persamaan nonlinier adalah Metode Newton Raphson dan Metode Halley. Berdasarkan latar belakang tersebut penelitian ini dilakukan dengan tujuan untuk: (1) Mengetahui analisa metode Newton Raphson dan metode Halley, (2) Mengetahui penyelesaian akar-akar persamaan nonlinier dengan metode Newton Raphson dan metode Halley. (3) Mengetahui perbandingan kecepatan konvergensi dari metode Halley dengan metode Newton Raphson dalam menyelesaikan akar-akar persamaan nonlinier.

Dalam kajian ini, penulis memberikan analisis tentang metode Newton Raphson dan metode Halley dalam menentukan akar-akar persamaan nonlinier dan hasil temuannya akar-akar persamaan nonlinier. Persamaan nonlinier yang penulis gunakan adalah $f(x) = e^x - 5x^2$ dan $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$.

Dengan menggunakan Metode Newton Raphson, persamaan nonlinier $f(x) = e^x - 5x^2$ mempunyai nilai akar persamaan $x = 0,6052671213$ yang dihentikan pada iterasi ke empat. Sedangkan dengan menggunakan Metode Halley, persamaan nonlinier $f(x) = e^x - 5x^2$ mempunyai nilai akar persamaan $x = 0,6052671212$ yang dihentikan pada iterasi ke tiga. Masing-masing akar diperoleh dengan menggunakan toleransi maksimum nilai fungsi sebesar 0.00001 serta nilai tebakan awal $x_0 = 0,5$.

Begitu juga dengan persamaan nonlinier $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$, dengan menggunakan Metode Newton Raphson diperoleh nilai akar persamaan $x = 1,368808108$ yang dihentikan pada iterasi ke empat. Sedangkan dengan menggunakan Metode Halley, persamaan nonlinier $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$ mempunyai nilai akar persamaan $x = 1,368808108$ yang dihentikan pada iterasi ke tiga. Masing-masing akar diperoleh dengan menggunakan toleransi maksimum nilai fungsi sebesar 0.00001 serta nilai tebakan awal $x_0 = 1$.

Dari hasil tersebut, dapat disimpulkan bahwa dalam mencari akar-akar persamaan nonlinier dengan metode Halley lebih cepat konvergensinya daripada metode Newton Raphson. Hal ini karena pada metode Halley hanya memerlukan 3 iterasi untuk menentukan nilai akar, sedangkan pada metode Newton Raphson memerlukan 4 iterasi untuk menentukan nilai akar.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Manusia diciptakan oleh Allah di dunia, salah satunya adalah sebagai khalifah. Sebagai seorang khalifah atau insan biasa jika hidupnya tidak berbekal ilmu pengetahuan baik agama maupun umum, maka akan mudah tersesat. Allah tidak hanya memerintahkan manusia menuntut ilmu agama yang hanya untuk kepentingan akhirat saja, akan tetapi ilmu-ilmu yang sifatnya umum juga sangat dibutuhkan guna keberhasilan di dunia dan akhirat. Ini artinya menuntut ilmu yang sifatnya umum setara dengan menuntut ilmu yang agama. Sebagaimana hadits:

مَنْ أَرَادَ الدُّنْيَا فَعَلَيْهِ بِاِلْعِلْمِ وَ مَنْ أَرَادَ الْآخِرَةَ فَعَلَيْهِ بِاِلْعِلْمِ وَمَنْ
أَرَادَهُمَا فَعَلَيْهِ بِاِلْعِلْمِ

Artinya: “Barang siapa yang menghendaki kehidupan dunia maka dengan ilmu, barang siapa yang menghendaki kehidupan akhirat maka dengan ilmu, dan barang siapa menghendaki kehidupan keduanya, maka dengan ilmu pula” (H.R. Bukhari Muslim).

Shihab (2002: 79-80) mengatakan, tak hanya ilmu pengetahuan, wawasan yang luas, dan rasa segan dari orang lain saja yang dapat diperoleh bagi orang-orang yang beriman dan berilmu pengetahuan baik umum maupun agama, namun derajat kemanusiannya di hadapan Allah juga akan terangkat. Hal ini sebagaimana firman Allah dalam Surat Al-Mujaadilah ayat 11:

يَأْتِيهَا الَّذِينَ ءَامَنُوا إِذَا قِيلَ لَكُمْ تَفَسَّحُوا فِي الْمَجَالِسِ فَافْسَحُوا يَفْسَحِ اللَّهُ لَكُمْ وَإِذَا قِيلَ أَنْشُرُوا فَأَنْشُرُوا يَرْفَعِ اللَّهُ الَّذِينَ ءَامَنُوا مِنْكُمْ وَالَّذِينَ أُوتُوا الْعِلْمَ دَرَجَاتٍ وَاللَّهُ بِمَا تَعْمَلُونَ خَبِيرٌ ﴿١١﴾

Artinya: “Hai orang-orang yang beriman apabila kamu dikatakan kepadamu: “Berlapang-lapanglah dalam majlis”, Maka lapangkanlah niscaya Allah akan memberi kelapangan untukmu. dan apabila dikatakan: “Berdirilah kamu”, Maka berdirilah, niscaya Allah akan meninggikan orang-orang yang beriman di antaramu dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat. dan Allah Maha mengetahui apa yang kamu kerjakan” (Q.S. Al-Mujaadalah: 11).

Ilmu yang dimaksud ayat di atas bukan saja ilmu agama, tetapi ilmu apapun yang bermanfaat. Sebagai contoh adalah ilmu pengetahuan bidang sains yang sangat berperan dan merupakan alat (*tools*) bagi disiplin ilmu bidang sains lainnya yakni matematika. Matematika itu pada dasarnya berkaitan dengan pekerjaan menghitung, sehingga tidak salah jika kemudian ada yang menyebut matematika adalah ilmu hitung atau *ilmu hisab*. Dalam masalah perhitungan, Allah adalah rajanya. Allah sangat cepat dalam menghitung dan sangat teliti (Abdusysykir: 2007: 83-84). Sebagaimana dalam surat Maryam ayat 94 dan Al-Baqarah ayat 202:

لَقَدْ أَحْصَاهُمْ وَعَدَّهُمْ عَدًّا ﴿٩٤﴾

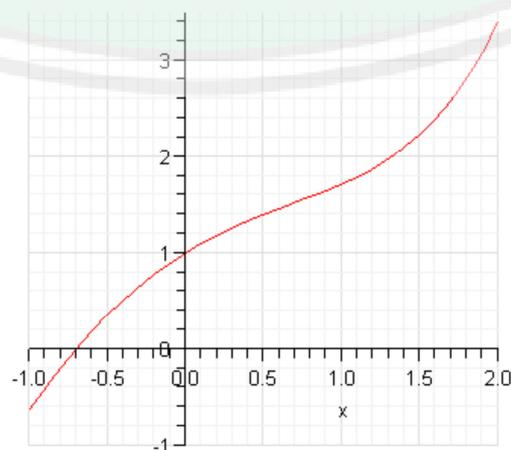
Artinya: “Sesungguhnya Allah telah menentukan jumlah mereka dan menghitung mereka dengan hitungan yang teliti” (Q.S. Maryam : 94).

أُولَئِكَ لَهُمْ نَصِيبٌ مِّمَّا كَسَبُوا وَاللَّهُ سَرِيعُ الْحِسَابِ ﴿٢٠٢﴾

Artinya: “Mereka Itulah orang-orang yang mendapat bagian daripada yang mereka usahakan; dan Allah sangat cepat perhitungan-Nya” (Q.S. Al-Baqarah: 202)

Dengan keterbatasan manusia dalam menghitung sehingga banyak fenomena dalam kehidupan sehari-hari yang sulit diselesaikan secara langsung sehingga dibutuhkan matematika sebagai alat bantu dalam menyelesaikan suatu masalah baik algoritma berfikir dari matematika, cara berhitung, ataupun hanya sebagai simbol-simbol untuk menyederhanakannya. Karena semakin hari semakin canggihnya IPTEK yang ada, maka hampir semua masalah tersebut dapat diselesaikan. Salah satu disiplin yang dari zaman dahulu sampai sekarang yang masih unggul digunakan di kalangan berbagai disiplin ilmu lainnya adalah matematika. Matematika merupakan salah satu disiplin ilmu yang sangat dibutuhkan untuk disiplin ilmu lainnya, apalagi keberadaannya dilengkapi dengan teknologi yang semakin canggih, yaitu komputer.

Tidak semua persamaan matematis dapat diselesaikan dengan mudah. Bahkan dalam prinsip matematik, dalam memandang persamaan yang terlebih dahulu diperhatikan apakah persamaan tersebut mempunyai penyelesaian atau tidak. Hal ini menjelaskan bahwa tidak semua persamaan dapat diselesaikan dengan menggunakan perhitungan eksak.



Gambar 1.1 kurva

Kita perhatikan kurva $y = -x^2 + \exp(x)$ memotong sumbu X di antara -1 dan -0.5 , untuk menentukan akar persamaan (titik potong dengan sumbu X) tersebut belum ada atau ditemukan rumusan maupun solusi dengan menggunakan metode analitik sehingga dapat dikatakan tidak mungkin diselesaikan secara analitik. Oleh karena itu diperlukan metode-metode pendekatan untuk dapat memperoleh akar yang dapat dikatakan mendekati benar. Metode tersebut adalah metode numerik, yaitu metode yang menggunakan analisis pendekatan untuk menghasilkan nilai yang diharapkan.

Persamaan-persamaan yang diselesaikan dengan metode numerik adalah persamaan matematis yang penyelesaiannya sulit atau didapatkan dengan menggunakan metode analitik, diantaranya dalam penyelesaian akar-akar persamaan nonlinier. Persamaan nonlinier ini bisa berupa persamaan polinomial tingkat tinggi, sinusioda, eksponensial, logaritmik, atau kombinasi dari persamaan-persamaan tersebut.

Di antara semua metode pencari akar, metode Newton-Raphsonlah yang paling terkenal dan paling banyak dipakai dalam terapan sains dan rekayasa. Metode ini paling disukai karena konvergensinya paling cepat diantara metode lainnya. (Rinaldi Munir, 2008:89)

Dari metode Newton Raphson yang menggunakan perulangan titik poin $x_{n+1} = f(x_n)$ ternyata masih terdapat beberapa kelemahan dalam keakuratan dan kecepatan konvergensinya, oleh karena itu perlu diadakan modifikasi atau pengembangan untuk meminimalkan kelemahan dari Metode Newton Raphson. Salah satu perkembangan metode Newton Raphson adalah Metode Halley yang

juga merupakan salah satu metode pencari akar dari persamaan nonlinier yang tidak banyak diketahui orang, sehingga metode ini mempunyai sistem kerja yang sama dengan Metode Newton Raphson.

Berdasarkan latar belakang tersebut, maka penulis mengambil judul *“Perbandingan Metode Newton Raphson dengan Metode Halley dalam Menyelesaikan Akar-Akar Persamaan nonlinier”*.

1.2. Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah tersebut, penulis merumuskan suatu masalah yaitu:

- 1) Bagaimana analisa metode Newton Raphson dan metode Halley ?
- 2) Bagaimana penyelesaian akar-akar persamaan nonlinier dengan Metode Newton Raphson dan Metode Halley ?
- 3) Bagaimana perbandingan kecepatan konvergensi dari metode Newton Raphson dengan metode Halley dalam menyelesaikan akar-akar persamaan nonlinier ?

1.3. Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang telah diuraikan maka tujuan dari penulisan skripsi ini adalah:

- 1) Mengetahui analisa metode Newton Raphson dan metode Halley.
- 2) Mengetahui penyelesaian akar-akar persamaan nonlinier dengan metode Newton Raphson dan metode Halley.

- 3) Mengetahui perbandingan kecepatan konvergensi dari metode Halley dengan metode Newton Raphson dalam menyelesaikan akar-akar persamaan nonlinier.

1.4. Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari skripsi ini adalah dapat digunakan berdasarkan kepentingan berikut :

1. Bagi Penulis
 - 1.1 Menambah pengetahuan dan keilmuan tentang metode numerik.
 - 1.2 Menambah wawasan tentang analisa perbandingan Metode Halley dengan Metode Newton Raphson dalam menyelesaikan persamaan nonlinier.
2. Bagi Lembaga
 - 2.1 Untuk menambah bahan kepustakaan yang dijadikan sarana pengembangan wawasan keilmuan.
3. Bagi Peneliti dan Mahasiswa
 - 3.1 Memperoleh kontribusi pemikiran yang dapat digunakan dalam pengembangan Ilmu Matematika.
4. Dapat membandingkan kecepatan konvergensi Metode numerik dalam mencari akar-akar persamaan nonlinier.

1.5. Batasan Masalah

Agar tidak terjadi perluasan permasalahan dalam pembahasan skripsi ini, maka penulis memberikan batasan masalah yaitu penurunan rumus dengan

bantuan deret Taylor, iterasi akan berhenti apabila $|x_{r+1} - x_r| < \varepsilon$ dengan $\varepsilon = 0.00001$, dan apabila diperoleh hasil iterasi yang panjang maka iterasi akan dihentikan hanya sampai pada iterasi ke sepuluh.

1.6. Metodologi Pembahasan

Dalam kajian ini penulis menggunakan metode literature, yaitu melakukan penelusuran dan penelaah terhadap beberapa literature yang punya relevansi dengan topik bahasan. Bertujuan untuk mengumpulkan data-data dan informasi dengan bantuan bermacam-macam materi yang terdapat di ruang perpustakaan, seperti : buku, majalah, dokumen, catatan, kisah-kisah sejarah dan sebagainya. (Nazir, 1988:11)

Adapun literature yang digunakan yaitu: metode numerik karangan Rinaldi Munir, metode numerik karangan Bambang Triatmodjo, metode numerik karangan Harjono djojodiharjo dan masih banyak yang lainnya serta catatan-catatan selama di perkuliahan.

Langkah umum penulisan ini adalah:

1. Merumuskan masalah.
2. Mengumpulkan bahan atau sumber dan informasi dengan cara membaca dan memahami literature yang berkaitan dengan metode Newton Raphson, metode Halley dan persamaan nonlinier.
3. Setelah memperoleh data dan informasi tentang metode Newton Raphson, metode Halley dan persamaan nonlinier, selanjutnya memaparkan analisa metode Newton Raphson dan metode Halley.

4. Langkah selanjutnya memberikan contoh dalam penyelesaian akar-akar persamaan nonlinier dengan metode Newton Raphson dan metode Halley.
5. Kemudian membandingkan kecepatan konvergensi dari metode Halley dengan metode Newton Raphson dalam menyelesaikan akar-akar persamaan nonlinier.
6. Terakhir membuat kesimpulan berupa perbandingan kecepatan konvergensi dari metode Halley dengan metode Newton Raphson dalam menyelesaikan akar-akar persamaan nonlinier.

Untuk lebih jelasnya bisa dilihat pada gambar diagram alir (*flow chart*) berikut ini :



Gambar 1.2 diagram alir penelitian.

1.7. Sistematika Penelitian

Dalam penulisan skripsi, di bagian awal penulis menyajikan konsep dasar persamaan nonlinier dilanjutkan dengan cara penyelesaian mencari akar-akar persamannya dengan metode Halley yang akan di bandingkan dengan metode Newton Raphson, dengan sistematika sebagai berikut:

BAB I. Membahas tentang pendahuluan yang berisi latar belakang masalah, dimana latar belakang masalah ini dikemukakan dengan alasan penulis mengangkat topik ini, rumusan masalah, batasan masalah untuk memfokuskan pembahasan, tujuan penulisan skripsi yang berisi tentang tujuan penulis membahas topik ini, manfaat penulisan ini, kajian yang digunakan penulis serta sistematika pembahasan.

BAB II. Teori pendukung yang berisi pokok-pokok kajian pustaka yang mendasari dan digunakan dalam penelitian, antara lain yang mencakup tentang metode numerik, analisis galat, deret Taylor, akar persamaan nonlinier, metode Newton Raphson, metode Halley dan kecepatan konvergensi.

BAB III. Memaparkan tentang analisa Metode Halley dengan metode Newton Raphson, mengaplikasikan kedalam persamaan nonlinier dalam mencari akarnya yang kemudian dibandingkan kecepatan konvergensi dari dua metode tersebut serta mengulas kajian keagamaan yang bisa diambil dari metode ini.

BAB IV. Berisi kesimpulan dan saran.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Metode Numerik dalam AI – Qur'an

Metode numerik merupakan salah satu cabang atau bidang ilmu pengetahuan, khususnya matematika rekayasa, yang menggunakan bilangan untuk menirukan proses matematika, yang selanjutnya telah dirumuskan untuk menirukan keadaan sebenarnya. Di dalam kegiatan rekayasa dan penelitian, setiap analisis diharapkan dapat menghasilkan bilangan, yang diperlukan dalam perencanaan teknik ataupun penghayatan masalah (Djojodihardjo, 2000: 1)

Selain persoalan rekayasa (*engineering*) seperti teknik sipil, teknik mesin, teknik elektro ternyata juga ada disiplin ilmu lainnya yakni bidang fisika, kimia, ekonomi, dan lain-lain yang semuanya juga melibatkan model matematika dalam pemecahannya. Sering kali model matematika tersebut muncul dalam bentuk yang tidak ideal atau rumit. Model matematika yang rumit ini ada kalanya tidak dapat diselesaikan dengan metode analitik yang sudah umum untuk mendapatkan **solusi sejatinya** (*exact solution*). Yang dimaksud dengan metode analitik adalah metode penyelesaian model matematika dengan rumus-rumus aljabar yang sudah ada.

Beberapa persoalan yang melibatkan model matematika dalam pemecahannya antara lain menentukan akar-akar polinom, menghitung nilai suatu fungsi bila rumus fungsinya sendiri tidak diketahui, untuk masalah pengamatan fenomena alam, baik berupa eksperimen di laboratorium maupun penelitian di lapangan yang melibatkan beberapa parameter (misalnya suhu, tekanan, waktu

dan sebagainya). Pengamat tidak mengetahui relasi yang menghubungkan parameter-parameter itu. Pengamat hanya dapat mengukur nilai-nilai parameter tersebut dengan menggunakan alat ukur seperti sensor, termometer, barometer, dan sebagainya. Tidak ada satupun metode analitik yang tersedia untuk menyelesaikan persoalan jenis ini.

Dengan melihat persoalan-persoalan di atas, jika metode analitik tidak dapat lagi digunakan, maka persoalan sebenarnya masih dapat dicari dengan menggunakan **metode numerik**. Metode numerik adalah teknik yang digunakan untuk memformulasikan persoalan matematika sehingga dapat dipecahkan dengan operasi perhitungan/ aritmetika biasa (tambah, kurang, kali, dan bagi).

Metode artinya cara, sedangkan numerik artinya angka. Jadi metode numerik secara harfiah berarti cara berhitung dengan menggunakan angka-angka (Munir, 2006: 1-5). Berdasarkan definisi harfiah tersebut, dapat diketahui bahwa metode numerik yang berarti cara berhitung dengan menggunakan angka-angka ini sangat erat hubungannya dengan matematika. Karena matematika itu pada dasarnya adalah disiplin ilmu yang berkaitan dengan pekerjaan menghitung, sehingga tidak salah jika kemudian ada yang menyebut matematika adalah ilmu hitung atau *ilmu hisab*. Dalam pekerjaan menghitung, selain dibutuhkan bilangan, di dalamnya juga terdapat operasi hitung/ aritmetika biasa (tambah, kurang, kali, dan bagi).

Pembahasan masalah operasi hitung dasar pada bilangan, juga disebutkan dalam Al-Qur'an yakni: Operasi penjumlahan, Operasi pengurangan, dan Operasi pembagian.

Masing-masing dari operasi di atas, disebutkan dalam Al-Qur'an yakni:

- a. Operasi penjumlahan terdapat dalam surat Al-Kahfi ayat 25

وَلَبِثُوا فِي كَهْفِهِمْ ثَلَاثَ مِائَةٍ سِنِينَ وَازْدَادُوا تِسْعًا ﴿٢٥﴾

Artinya: “Dan mereka tinggal dalam gua mereka tiga ratus tahun dan ditambah sembilan tahun (lagi)” (Q.S Al-Kahfi: 25)

- b. Operasi pengurangan terdapat dalam surat Al-Ankabut ayat 14,

وَلَقَدْ أَرْسَلْنَا نُوحًا إِلَىٰ قَوْمِهِ فَلَبِثَ فِيهِمْ أَلْفَ سَنَةٍ إِلَّا خَمْسِينَ عَامًا فَأَخَذَهُمُ الطُّوفَانُ وَهُمْ ظَالِمُونَ ﴿١٤﴾

Artinya: “Dan Sesungguhnya kami Telah mengutus Nuh kepada kaumnya, Maka ia tinggal di antara mereka seribu tahun kurang lima puluh tahun. Maka mereka ditimpa banjir besar, dan mereka adalah orang-orang yang zalim” (Q.S. Al-Ankabut: 14)

Dari kedua ayat di atas, dapat diketahui bahwa Al-Qur'an telah menggunakan bahasa matematika. Konsep matematika yang disebutkan dari ayat tersebut adalah:

1. Konsep bilangan, yaitu bilangan 300, 9, 1000, dan 50
2. Operasi penjumlahan, yaitu $300 + 9$
3. Operasi pengurangan, yaitu $1000 - 50$

Adapun makna yang tersirat dibalik 2 ayat tersebut adalah setiap muslim perlu memahami tentang bilangan dan operasi bilangan. Bagaimana mungkin seorang muslim dapat mengetahui bahwa Ashabul kahfi tertidur di dalam gua selama 309 tahun, jika tidak dapat menghitung $300 + 9$, juga bagaimana mungkin seorang muslim dapat mengetahui bahwa Nabi Nuh

tinggal bersama kaumnya selama 950 tahun jika tidak dapat menghitung 1000-50 (Abdusysyahir, 2006: 60-61)

c. Operasi pembagian terdapat dalam surat An-Nisa' ayat 12:

Operasi pembagian dalam Al-Qur'an diwakili dengan penyebutan

bilangan $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}$, dan $\frac{1}{10}$. Bilangan $\frac{2}{3}$ tidak lain adalah 2 dibagi 3

atau 2:3. Operasi pembagian dalam Al-Qur'an sangat berkaitan dengan masalah pembagian harta warisan (*faraidh*) dan pembagian harta rampasan perang (*ghanimah*) sebagaimana dalam firman Allah dalam surat An-Nisaa': 12 yaitu:

وَلَكُمْ نِصْفُ مَا تَرَكَ أَزْوَاجُكُمْ إِنْ لَمْ يَكُنْ لَهُنَّ وُلْدٌ فَإِنْ كَانَ لَهُنَّ وُلْدٌ فَلَكُمْ الرَّبْعُ مِمَّا تَرَكَنَّ مِنْ بَعْدِ وَصِيَّةٍ يُوصِينَ بِهَا أَوْ دَيْنٍ وَلَهُنَّ الرَّبْعُ مِمَّا تَرَكَتُمْ إِنْ لَمْ يَكُنْ لَكُمْ وُلْدٌ فَإِنْ كَانَ لَكُمْ وُلْدٌ فَلَهُنَّ الثُّمُنُ مِمَّا تَرَكَتُمْ مِنْ بَعْدِ وَصِيَّةٍ تُوصُونَ بِهَا أَوْ دَيْنٍ وَإِنْ كَانَ رَجُلٌ يُورَثُ كَلَالَةً أَوْ امْرَأَةٌ وَلَهُ أَخٌ أَوْ أُخْتٌ فَلِكُلِّ وَاحِدٍ مِّنْهُمَا السُّدُسُ فَإِنْ كَانُوا أَكْثَرَ مِنْ ذَلِكَ فَهُمْ شُرَكَاءُ فِي الثُّلُثِ مِنْ بَعْدِ وَصِيَّةٍ يُوصَى بِهَا أَوْ دَيْنٍ غَيْرِ مُضَارٍّ وَصِيَّةً مِنَ اللَّهِ وَاللَّهُ عَلِيمٌ حَلِيمٌ ﴿١٢﴾

Artinya: "Dan bagimu (suami-suami) seperdua dari harta yang ditinggalkan oleh isteri-isterimu, jika mereka tidak mempunyai anak. jika Isteri-isterimu itu mempunyai anak, Maka kamu mendapat seperempat dari harta yang ditinggalkannya sesudah dipenuhi wasiat yang mereka buat atau (dan) seduah dibayar hutangnya. para isteri memperoleh

seperempat harta yang kamu tinggalkan jika kamu tidak mempunyai anak. jika kamu mempunyai anak, Maka para isteri memperoleh seperdelapan dari harta yang kamu tinggalkan sesudah dipenuhi wasiat yang kamu buat atau (dan) sesudah dibayar hutang-hutangmu. jika seseorang mati, baik laki-laki maupun perempuan yang tidak meninggalkan ayah dan tidak meninggalkan anak, tetapi mempunyai seorang saudara laki-laki (seibu saja) atau seorang saudara perempuan (seibu saja), Maka bagi masing-masing dari kedua jenis saudara itu seperenam harta. tetapi jika Saudara-saudara seibu itu lebih dari seorang, Maka mereka bersekutu dalam yang sepertiga itu, sesudah dipenuhi wasiat yang dibuat olehnya atau sesudah dibayar hutangnya dengan tidak memberi mudharat (kepada ahli waris)[274]. (Allah menetapkan yang demikian itu sebagai) syari'at yang benar-benar dari Allah, dan Allah Maha mengetahui lagi Maha Penyantun” (Q.S. An-Nisaa’: 12)

Juga dalam surat Al-Anfaal: 41, yaitu:

وَأَعْلَمُوا أَنَّمَا غَنِمْتُمْ مِنْ شَيْءٍ فَإِنَّ لِلَّهِ خُمُسَهُ وَلِلرَّسُولِ وَلِذِي الْقُرْبَىٰ
وَالْيَتَامَىٰ وَالْمَسْكِينِ وَأَبْنِ السَّبِيلِ إِن كُنْتُمْ ءَامَنْتُمْ بِاللَّهِ وَمَا أَنْزَلْنَا عَلَىٰ
عَبْدِنَا يَوْمَ الْفُرْقَانِ يَوْمَ التَّقَىٰ أَجْمَعِينَ وَاللَّهُ عَلَىٰ كُلِّ شَيْءٍ قَدِيرٌ ﴿٤١﴾

Artinya: “Ketahuilah, Sesungguhnya apa saja yang dapat kamu peroleh sebagai rampasan perang, Maka Sesungguhnya seperlima untuk Allah, rasul, kerabat rasul, anak-anak yatim, orang-orang miskin dan ibnussabil, jika kamu beriman kepada Allah dan kepada apa yang kami turunkan kepada hamba kami (Muhammad) di hari Furqaan, yaitu di hari bertemunya dua pasukan. dan Allah Maha Kuasa atas segala sesuatu” (Q.S. Al-Anfaal: 41)

Ayat yang pertama di atas, menjelaskan tentang pembagian harta warisan untuk tiap-tiap anggota keluarga (ahli waris) dengan kriteria bagian $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$, dan $\frac{1}{10}$. Sedangkan ayat yang kedua menjelaskan tentang pembagian harta rampasan dari hasil peperangan dengan kriteria $\frac{1}{5}$ dan $\frac{4}{5}$. Dari kedua ayat di atas, sudah jelaslah bahwa Al-Qur'an dengan gamblang telah menjelaskan masalah pembagian yang merupakan salah satu operasi hitung dalam matematika (Abdusysyagir, 2006: 63).

Penjelasan di atas membuktikan bahwa Allah adalah Sang Maha Penghitung, sebagaimana firman Allah di bawah ini

لَقَدْ أَحْصَاهُمْ وَعَدَّهُمْ عَدًّا

Artinya: “Sesungguhnya Allah telah menentukan jumlah mereka dan menghitung mereka dengan hitungan yang teliti” (Q.S. Maryam : 94).

Kata (أَحْصَاهُمْ) mengetahui dengan rinci, terambil dari akar kata yang terdiri dari huruf-huruf *ha'*, *shad*, dan *ya'*, yang mengandung tiga makna asal, yaitu, a) *menghalangi, melarang*, b) *menghitung (dengan teliti)* dan *mampu*, dari sini lahir makna *mengetahui, mencatat, dan memelihara*, c) *sesuatu yang merupakan bagian dari tanah*, dari sini lahir kata *Hashaa* yang bermakna *batu*.

Dari ayat di atas, dapat diketahui bahwa Allah yang dilukiskan sebagai *Ahshaahum* atau dalam istilah hadits *Asma' al-Husna* adalah *al-Muhshi*, dipahami oleh banyak ulama sebagai “Dia” yang mengetahui kadar setiap peristiwa dan rinciannya, baik yang dapat dijangkau oleh manusia maupun yang tidak. Seperti

hembusan nafas, rincian perolehan rezeki dan kadarnya untuk masa kini dan mendatang.” Alhasil, Allah adalah Dia yang mengetahui dengan amat teliti rincian segala sesuatu dari segi jumlah dan kadarnya, panjang, dan lebarnya, jauh dan dekatnya, tempat dan waktunya, kadar cahaya dan gelapnya, sedang/ ketika dan saat wujudnya dan lain sebagainya (Shihab, 2002: 256-257).

أُولَئِكَ لَهُمْ نَصِيبٌ مِّمَّا كَسَبُوا وَاللَّهُ سَرِيعُ الْحِسَابِ

Artinya: “Mereka Itulah orang-orang yang mendapat bahagian daripada yang mereka usahakan; dan Allah sangat cepat perhitungannya” (Q.S. Al-Baqarah: 202)

Dari ayat di atas, dapat diketahui bahwa Allah akan memberikan imbalan/pahala tersendiri kepada orang-orang yang telah berusaha dalam rangka meraih apa yang mereka mohonkan kepada Allah, yakni memperoleh itu bukan sekedar ketulusan berdoa dengan lidah, tetapi juga disertai dengan kesungguhan bekerja serta kesucian aqidah. Karena do'a memang harus disertai dengan usaha. Pertolongan Allah baru datang setelah usaha yang maksimal telah diupayakan dan Allah akan membalas setiap orang sesuai dengan amalannya. Dan sebagai manusia, tidak perlu ragu kapan datangnya pahala atau ganjaran tersebut, karena Allah adalah salah satunya dzat yang Maha cepat dalam perhitungannya sehingga tidak membutuhkan waktu berapa lama untuk menyelesaikan sesuatu (Shihab, 2002: 413).

Selanjutnya dalam pembahasan matematika yang lebih spesifik, keberadaan metode numerik salah satunya adalah untuk memudahkan bagi persoalan perhitungan yang sulit atau tidak dapat dikerjakan dengan cara analitis, sehingga untuk mencapai suatu hasil, dibutuhkan suatu metode tersendiri.

Misalnya adalah pembahasan mengenai pencarian akar-akar persamaan nonlinier yang tidak terdapat rumus untuk penyelesaiannya sehingga dengan keberadaan metode numerik dapat dijadikan sarana untuk memudahkan dalam perhitungannya sehingga didapatkan selesaiannya.

Hal ini jika dikaitkan dengan Al-Qur'an, akan terdapat titik kesinambungannya. Yaitu jika dalam matematika didapati persoalan serumit apapun ternyata ada solusinya, begitu pula di dalam Islam jika didapati persoalan yang rumit untuk dipecahkan, maka Islam juga selalu mempunyai solusinya. karena Islam tidak menghendaki kesulitan tetapi kemudahan bagi orang-orang yang mau berfikir dan bersungguh-sungguh. Sebagaimana firman Allah:

فَإِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٦﴾ إِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٥﴾

Artinya: “Karena Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan. Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan” (Q.S. Al-Insyiroh: 5-6)

..... وَمَنْ يَتَّقِ اللَّهَ يَجْعَلْ لَهُ مَخْرَجًا ﴿٤﴾ وَمِنْ أَمْرِهِ يُسْرًا ﴿٥﴾

Artinya: “Dan barang siapa yang bertakwa kepada Allah, niscaya Allah menjadikan baginya kemudahan dalam urusannya” (Q.S. Ath-Thalaaq: 4)

Dari kedua ayat di atas bermaksud menjelaskan salah satu *Sunnah-Nya* yang bersifat umum dan konsisten yaitu, “setiap kesulitan pasti disertai atau disusul dengan kemudahan selama yang bersangkutan bertekad untuk menanggulangnya”. Ayat-ayat ini seakan-akan juga berpesan agar setiap orang mencari peluang pada setiap tantangan dan kesulitan yang dihadapi (Shihab, 2002: 363)

2.2 Galat

Definisi:

Misalkan \hat{a} adalah nilai hampiran terhadap nilai sejati a , maka selisih

$$\varepsilon = a - \hat{a} \dots\dots\dots (2.8)$$

disebut galat (Munir, 2006: 23)

Contoh 1:

Jika $\hat{a} = 10.5$ adalah nilai hampiran dari $a = 10.45$, maka galatnya adalah

$$\varepsilon = -0.01$$

Jika tanda galat (positif atau negatif) tidak dipertimbangkan, maka galat mutlak dapat didefinisikan sebagai

$$|\varepsilon| = |a - \hat{a}| \dots\dots\dots (2.9)$$

1. Galat relatif sejati

Galat relatif sejati didefinisikan sebagai:

$$\varepsilon_R = \frac{\varepsilon}{a} \dots\dots\dots (2.10)$$

dengan ε_R adalah kesalahan relatif terhadap nilai eksak.

atau dalam persentase

$$\varepsilon_R = \frac{\varepsilon}{a} \times 100\%$$

Karena galat dinormalkan terhadap nilai sejati, maka galat relatif tersebut dinamakan **galat relatif sejati**.

2. Galat relatif hampiran

Galat relatif hampiran didefinisikan sebagai:

$$\varepsilon_{RA} = \frac{\varepsilon}{\hat{a}} \dots\dots\dots (2.11)$$

dengan ε_{RA} adalah kesalahan relatif terhadap solusi hampirannya.

atau dalam persentase

$$\varepsilon_{RA} = \frac{\varepsilon}{a} \times 100\%$$

Karena galat dinormalkan terhadap nilai sejati, maka galat relatif tersebut dinamakan **galat relatif hampiran**. (Munir, 2006: 24)

Contoh 2:

Misalkan nilai sejati = $10/3$ dan nilai hampiran = 3.33. hitunglah galat, galat mutlak, galat relatif sejati, dan galat relatif hampiran

Solusi:

$$\text{Galat} = 10/3 - 3.333 = 10/3 - 33333/10000 = 1/3000 = 0.000333\dots$$

$$\text{Galat mutlak} = |0.000333\dots| = 0.000333\dots$$

$$\text{Galat relatif sejati} = (1/3000)/(10/3) = 1/10000 = 0.0001$$

$$\text{Galat relatif hampiran} = (1/3000)/3.333 = 1/9999$$

Di dalam metode numerik, sering dilakukan pendekatan secara iteratif. Pada pendekatan tersebut, pendekatan iterasi sekarang dibuat berdasarkan pendekatan iterasi sebelumnya. Dalam hal ini, kesalahan/ galat adalah perbedaan antara pendekatan iterasi sebelumnya dan pendekatan iterasi sekarang, sehingga kesalahan relatif hampiran menjadi:

$$\varepsilon_{RA} = \frac{a_{r+1} - a_r}{a_{r+1}} \times 100\% \dots\dots\dots (2.12)$$

dengan a_{r+1} adalah nilai hampiran pendekatan iterasi sekarang dan a_r adalah nilai pendekatan iterasi sebelumnya. (Triatmodjo, 2002: 4)

Selanjutnya, untuk proses iterasi akan segera dihentikan bila:

$$|\mathcal{E}_{RA}| = \mathcal{E}_S \dots\dots\dots (2.13)$$

dengan \mathcal{E}_S adalah toleransi galat yang dispesifikasikan. Nilai \mathcal{E}_S menentukan ketelitian solusi numerik. Semakin kecil nilai \mathcal{E}_S , maka akan semakin teliti solusinya. Namun semakin banyak proses iterasinya.

Contoh 3:

Misalkan ada prosedur iterasi sebagai berikut:

$$x_{r+1} = (-x_r^3 + 3)/6, \quad r = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Iterasi dihentikan bila kondisi $|\mathcal{E}_{RA}| = \mathcal{E}_S$, dalam hal ini \mathcal{E}_S adalah toleransi galat yang diinginkan. Misalkan dengan memberikan $x_0 = 0.5$, dan $\mathcal{E}_S = 0.00001$ diperoleh:

$$x_0 = 0.5$$

$$x_1 = 0.4791667 \quad ; \quad |\mathcal{E}_{RA}| = (x_1 - x_0)/x_1 = 0.043478 > \mathcal{E}_S$$

$$x_2 = 0.4816638 \quad ; \quad |\mathcal{E}_{RA}| = (x_2 - x_1)/x_2 = 0.00518438 > \mathcal{E}_S$$

$$x_3 = 0.4813757 \quad ; \quad |\mathcal{E}_{RA}| = (x_3 - x_2)/x_3 = 0.0005984 > \mathcal{E}_S$$

$$x_4 = 0.4814091 \quad ; \quad |\mathcal{E}_{RA}| = (x_4 - x_3)/x_4 = 0.0000693 > \mathcal{E}_S$$

$$x_5 = 0.4814052 \quad ; \quad |\mathcal{E}_{RA}| = (x_5 - x_4)/x_5 = 0.00000081 > \mathcal{E}_S, \text{ berhenti!}$$

Pada iterasi ke-5, $|\mathcal{E}_{RA}| < \mathcal{E}_S$ sudah terpenuhi sehingga iterasi dapat dihentikan (Munir, 2006: 25)

2.2.1 Sumber Utama Galat Numerik

Ada tiga sumber utama galat dalam suatu perhitungan numerik, yaitu: galat bawaan (inheren), galat pemotongan, dan galat pembulatan.

a. Galat Inheren (bawaan)

Galat inheren adalah galat dalam nilai data, disebabkan oleh ketidakpastian dalam pengukuran, kekeliruan atau oleh perlunya pendekatan untuk menyatakan suatu bilangan yang angkanya tidak secara tepat dapat dinyatakan dengan banyaknya angka yang tersedia. Galat ini biasanya berhubungan dengan galat pada data yang dioperasikan oleh komputer dengan beberapa prosedur numerik.

Suatu pengukuran fisik, misalnya jarak, voltase, atau periode waktu yang tidak eksak. Jika pengukuran diberikan dalam banyak angka, misalkan satu voltase sebesar 6.4837569, dapat dipastikan bahwa beberapa angka terakhir tidak ada artinya, karena voltase tidak dapat diukur sampai sebegitu tepat. Jika pengukuran diberikan hanya dalam beberapa angka, misalkan selang waktu 2.3 detik, dapat dipastikan bahwa terdapat beberapa galat inheren karena hanya dengan suatu kebetulan selang waktu akan diukur tepat 2.3 detik. Dalam beberapa hal boleh jadi beberapa batas yang mungkin pada galat inheren diketahui, seperti bila selang waktu dinyatakan sebagai 2.3 dengan ± 0.1 detik (Djojodiharjo, 2000: 16)

b. Galat Pemotongan

Galat pemotongan adalah galat yang terjadi karena hanya diperhitungkannya beberapa suku pertama. Galat yang terjadi karena tidak dilakukannya hitungan sesuai dengan prosedur matematika yang benar. Sebagai contoh suatu proses tak terhingga diganti dengan proses berhingga. Di dalam matematika, suatu fungsi dapat dipresentasikan dalam bentuk deret tak berhingga, misalkan:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Nilai eksak dari e^x diperoleh apabila semua suku dari deret tersebut diperhitungkan. Dalam praktek, sulit memperhitungkan semua suku sampai tak terhingga. Apabila hanya diperhitungkan beberapa suku pertama saja, maka hasilnya tidak sama dengan nilai eksak.

c. Galat Pembulatan

Galat yang terjadi karena tidak diperhitungkannya, beberapa angka terakhir dari suatu bilangan. Kesalahan ini terjadi apabila bilangan perkiraan digunakan untuk menggantikan bilangan eksak. Suatu bilangan dibulatkan pada posisi tersebut nol. Sedang angka pada posisi ke n tersebut tidak berubah atau dinaikkan satu digit yang tergantung apakah nilai tersebut lebih kecil atau lebih besar dari setengah dari angka posisi ke n .

Contoh 4:

Nilai: 8632574	dapat dibulatkan menjadi 8633000
3.1415926	dapat dibulatkan menjadi 3.14

(Triatmodjo, 2002: 3)

2.3 Deret Taylor

Definisi:

Deret Taylor merupakan dasar untuk menyelesaikan masalah dalam metode numerik, terutama penyelesaian persamaan diferensial. Jika suatu fungsi $f(x)$ diketahui di titik x_i dan semua turunan dari f terhadap x di titik tersebut, maka

dengan deret Taylor dapat dinyatakan nilai f pada titik x_{i+1} yang terletak pada jarak Δx dari titik x_i . Adapun rumus deret Taylor adalah:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i) \frac{\Delta x}{1!} + f''(x_i) \frac{\Delta x^2}{2!} + f'''(x_i) \frac{\Delta x^3}{3!} + \dots + f^n(x_i) \frac{\Delta x^n}{n!} + R_n \dots \dots \dots (2.14)$$

dan sisa (kesalahan pemotongan) R_n diberikan oleh bentuk berikut ini.

$$R_n = f^{n+1}(x_i) \frac{\Delta x^{n+1}}{(n+1)!} + f^{n+2}(x_i) \frac{\Delta x^{n+2}}{(n+1)!} + \dots \dots \dots (2.15)$$

dengan:

$f(x_i)$: nilai fungsi di titik x_i

$f(x_{i+1})$: nilai fungsi di titik x_{i+1}

f', f'', \dots, f^n : turunan pertama, kedua, ..., ke n dari fungsi f

Δx : langkah ruang, yaitu jarak antara x_i dan x_{i+1}

R_n : kesalahan pemotongan

! : operator faktorial, misalkan bentuk $3! = 1 \times 2 \times 3$; $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4$

Persamaan (2.14) yang mempunyai suku sebanyak tak terhingga akan memberikan perkiraan nilai suatu fungsi sesuai dengan penyelesaian eksaknya saja, sehingga dalam aplikasinya hanya diperhitungkan beberapa suku pertama saja, yakni:

1. Memperhitungkan satu suku pertama (order nol)

Jika hanya diperhitungkan satu suku pertama saja dari ruas kanan, maka persamaan (2.14) dapat ditulis dalam bentuk:

$$f(x_{i+1}) \approx f(x_i) \dots \dots \dots (2.16)$$

Persamaan tersebut disebut sebagai perkiraan order nol, nilai f pada titik x_{i+1} sama dengan nilai pada x_i . Perkiraan tersebut adalah benar jika fungsi yang diperkirakan adalah suatu konstan. Jika fungsi tidak konstan, maka harus diperhitungkan suku-suku berikutnya dari deret Taylor.

2. Memperhitungkan dua suku pertama (order 1)

Bentuk deret Taylor order satu, yang memperhitungkan dua suku pertama, dapat ditulis dalam bentuk:

$$f(x_{i+1}) \approx f(x_i) + f'(x_i) \frac{\Delta x}{1!} \dots \dots \dots (2.17)$$

yang merupakan bentuk persamaan garis lurus (linier)

3. Memperhitungkan tiga suku pertama (order dua)

Deret Taylor yang memperhitungkan tiga suku pertama dari ruas kanan dapat ditulis menjadi:

$$f(x_{i+1}) \approx f(x_i) + f'(x_i) \Delta x + f''(x_i) \frac{\Delta x}{2} \dots \dots \dots (2.18)$$

Persamaan di atas disebut sebagai perkiraan order dua.

2.3.1 Kesalahan Pemotongan

Deret Taylor akan memberikan perkiraan suatu fungsi dengan benar jika semua suku dari deret tersebut diperhitungkan. Dalam praktek hanya beberapa suku pertama saja yang diperhitungkan sehingga hasil perkiraan tidak tepat seperti pada penyelesaian analitik terdapat kesalahan karena tidak diperhitungkannya suku-suku terakhir dari deret Taylor. Kesalahan ini disebut dengan kesalahan pemotongan (*truncation error*, R_n), yang ditulis dalam bentuk:

$$R_n = O(\Delta x^{n+1})$$

Indeks n menunjukkan bahwa deret yang diperhitungkan adalah sampai pada suku ke n , sedang subskrip $n + 1$. Menunjukkan bahwa kesalahan pemotongan mempunyai order $n + 1$. Notasi $O(\Delta x^{n+1})$ berarti bahwa kesalahan pemotongan mempunyai order Δx^{n+1} ; atau kesalahan adalah sebanding dengan langkah ruang pangkat $n + 1$. Kesalahan pemotong tersebut adalah kecil apabila:

1. Interval Δx adalah kecil.
2. Lebih banyak memperhitungkan suku dari deret Taylor

Pada perkiraan order satu, besarnya kesalahan pemotongan adalah:

$$O(\Delta x^2) = f''(x_i) \frac{\Delta x^2}{2!} + f'''(x_i) \frac{\Delta x^3}{3!} + \dots \dots \dots (2.19)$$

Contoh: 5

Diketahui suatu fungsi $f(x) = 0,25x^3 + 0,5x^2 + 0,25x + 0,5$. Dengan menggunakan deret Taylor order nol, satu, dua dan tiga; perkiraan fungsi tersebut pada titik $x_{i+1}=1$, berdasarkan nilai fungsi pada titik $x_i = 0$. Titik $x_{i+1}=1$ berada pada jarak $\Delta x = 1$ dari titik $x_i = 0$.

Penyelesaian

Karena bentuk fungsi sudah diketahui, maka dapat dihitung nilai $f(x)$ antara 0 dan 1.

Untuk $x_i = 0$ maka $f(x = 0) = 0,25(0)^3 + 0,5(0)^2 + 0,25(0) + 0,5 = 0,5$

Untuk $x_{i+1} = 1$ maka $f(x = 1) = 0,25(1)^3 + 0,5(1)^2 + 0,25(1) + 0,5 = 1,5$

1. Pendahuluan

Jadi nilai eksak untuk $f(x = 1)$ adalah 1,5. Apabila digunakan deret Taylor order nol, maka berdasarkan persamaan (2.16) didapat:

$$f(x_{i+1} = 1) \approx f(x_i = 0) \approx 0,5$$

dengan perkiraan order nol adalah konstan, dan kesalahan pemotongannya adalah:

$$E_c = p - p^* = 1,5 - 0,5 = 1$$

Apabila digunakan deret Taylor order satu, nilai $f(x_{i+1} = 1)$ dapat dihitung dengan menggunakan Persamaan (2.17). Pertama kali dihitung turunan fungsi di titik $x_i = 0$:

$$f'(x_i = 0) = 0,75x^2 + x + 0,25 = 0,75(0)^2 + 0 + 0,25 = 0,25$$

sehingga diperoleh:

$$f'(x_{i+1}) \approx f(x_i) + f'(x_i) \frac{\Delta x}{1!} \approx 0,5 + 0,25 \times \frac{1}{1} = 0,75$$

Untuk perkiraan order satu adalah garis lurus, dan kesalahan pemotongannya adalah:

$$E_c = p - p^* = 1,5 - 0,75 = 0,75$$

Apabila digunakan deret Taylor order dua, nilai $f(x_{i+1} = 1)$ dapat dihitung dengan menggunakan Persamaan (2.19). Dihitung turunan kedua dari fungsi di titik $x_i = 0$:

$$f''(x) = 1,5x + 1 = 1,5(0) + 1 = 1,0$$

sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} f(x_{i+1}) &\approx f(x_i) + f'(x_i)\Delta x + f''(x_i) \frac{\Delta x}{2} \\ &\approx 0,5 + 0,25 \times 1 + 1 \times \frac{1}{1 \times 2} = 1,25 \end{aligned}$$

Untuk perkiraan order dua adalah garis lengkung dan kesalahan pemotongannya adalah:

$$E_c = p - p^* = 1,5 - 1,25 = 0,25$$

Apabila digunakan deret Taylor order tiga, Persamaan (2.14) menjadi:

$$f(x_{i+1}) \approx f(x_i) + f'(x_i) \frac{\Delta x}{1!} + f''(x_i) \frac{\Delta x^2}{2!} + f'''(x_i) \frac{\Delta x^3}{3!}$$

Turunan ketiga dari fungsi adalah:

$$f'''(x_i = 0) = 1,5$$

sehingga diperoleh:

$$f(x_{i+1} = 1) = 0,5 + 0,25 \times 1 + 1 \times \frac{1}{1 \times 2} + 1,5 \times \frac{1}{1 \times 2 \times 3} = 1,5$$

Kesalahan pemotongannya adalah:

$$E_c = p - p_* = 1,5 - 1,5 = 0,0$$

Terlihat bahwa dengan menggunakan deret Taylor order tiga, hasil penyelesaian numerik sama dengan penyelesaian eksak.

2.4. Akar-akar persamaan

Untuk persamaan polinomial berderajat dua, persamaan dapat diselesaikan dengan rumus persamaan kuadrat yang sangat sederhana. Misalnya bentuk $ax^2 + bx + c = 0$, dapat dicari akar-akarnya secara analitik dengan rumus kuadrat:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Untuk persamaan polinomial derajat tiga atau empat, rumus-rumus yang ada sangat kompleks dan jarang sekali digunakan. Sedang untuk persamaan dengan derajat yang lebih tinggi dan untuk persamaan yang sangat kompleks tidak ada rumus yang digunakan untuk menyelesaikannya. Bentuk persamaan tersebut misalnya:

1. $f(x) = e^{(2\sin(x))^{\cos(x)}} \log(|2x|)$

$$2. f(x) = x \sin x^2$$

$$3. f(x) = \sin x^{(\cos x)^{\tan x}} - 4/5$$

dan lain sebagainya.

Persamaan-persamaan tersebut diatas sulit atau tidak mungkin diselesaikan secara eksplisit. Metode numerik memberikan cara-cara untuk menyelesaikan bentuk persamaan tersebut secara perkiraan sampai diperoleh hasil yang mendekati penyelesaian eksak.

Penyelesaian numerik dilakukan dengan perkiraan yang berurutan (iterasi) sedemikian hingga setiap hasil adalah lebih teliti dari perkiraan sebelumnya. Dengan melakukan sejumlah prosedur iterasi yang dianggap cukup, akhirnya didapat hasil perkiraan yang mendekati nilai eksak (hasil yang benar) dengan toleransi kesalahan yang diijinkan.

2.4.1. Metode Pencarian Akar

Dalam metode numerik, pencarian akar $f(x) = 0$ dilakukan secara leleran (iteratif) . sampai saat ini sudah banyak ditemukan metode pencarian akar. Secara umum, semua metode pencarian akar tersebut dapat dikelompokkan menjadi dua golongan besar:

1. Metode Tertutup atau metode pengurung (*bracketing meth*)

Metode yang termasuk ke dalam golongan ini mencari akar di dalam selang $[a,b]$. Selang $[a,b]$ sudah dipastikan berisi minimal satu buah akar, karena itu metode jenis ini selalu berhasil menemukan akar, oleh karena itu metode tertutup kadang-kadang dinamakan juga **metode konvergen**.

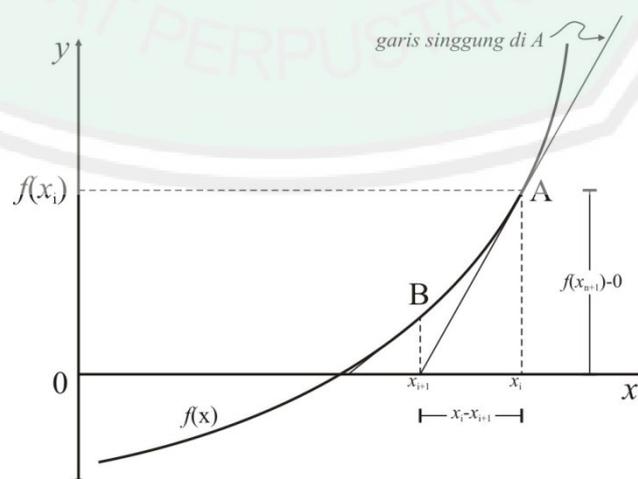
2. Metode terbuka

Berbeda dengan metode tertutup, metode terbuka tidak memerlukan selang $[a,b]$ yang mengandung akar. Yang diperlukan adalah tebakan (*guess*) awal akar, lalu dengan prosedur leleran, kita menggunakannya untuk menghitung hampiran akar yang baru. Pada setiap kali leleran, hampiran akar yang lama dipakai untuk menghitung hampiran akar yang baru. Mungkin saja hampiran akar yang baru mendekati akar sejati (konvergen), atau mungkin juga menjauhinya (divergen). Karena itu, metode terbuka tidak selalu berhasil menemukan akar, kadang-kadang konvergen, kadangkala divergen.

2.4.2. Metode Newton Raphson

Metode ini paling banyak digunakan dalam mencari akar-akar dari suatu persamaan. Jika perkiraan awal dari x_i , suatu garis singgung dapat dibuat dari titik $(x_i, f(x_i))$. Titik dimana garis singgung tersebut memotong sumbu x bisaanya memberikan perkiraan yang lebih dekat dari nilai akar. Dengan rumus iterasinya:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$



Gambar 2.5 Metode Newton-Raphson

2.4.3. Metode Halley

Seperti halnya metode Newton Raphson, metode ini juga digunakan dalam mencari akar-akar dari suatu persamaan. Jika perkiraan awal dari x_i , suatu garis singgung dapat dibuat dari titik $(x_i, f(x_i))$. Titik dimana garis singgung tersebut memotong sumbu x bisaanya memberikan perkiraan yang lebih dekat dari nilai akar. (John H. Mathews 2004. "Metode Halley." <http://math.fullerton.edu/mathews/n2003/Halley'sMethodMod.html>.)

Dengan rumus iterasinya:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \left[1 - \frac{f(x_n)f''(x_n)}{2(f'(x_n))^2} \right]^{-1}$$

2.4.4. Kecepatan Konvergensi

Pencarian akar persamaan dimulai dengan perkiraan akar persamaan yang pertama, lalu diikuti oleh perkiraan berikutnya dan seterusnya sampai perkiraan yang terakhir, yang kemudian dinyatakan sebagai akar persamaan hasil perhitungan tersebut. Proses itu harus bersifat konvergen yaitu, selisih perkiraan sebelum dari yang setelahnya makin lama makin kecil. Setelah dianggap cukup, proses pencarian akar persamaan berhenti.

$$|x_2 - x_1| > |x_3 - x_2| > |x_4 - x_3| \dots |x_n - x_{n-1}|$$

dengan $|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon$, dimana ε =bilangan kecil positif.

Kecepatan konvergensi sebuah proses yaitu, kecepatan proses itu untuk sampai pada hasil akhir.(imam fachruddin, 2007:22).

BAB III

PEMBAHASAN

Pencarian akar fungsi dimulai dengan perkiraan akar fungsi yang pertama, lalu diikuti oleh perkiraan berikutnya dan seterusnya sampai perkiraan yang terakhir, yang kemudian dinyatakan sebagai akar fungsi hasil perhitungan tersebut. Proses itu harus bersifat konvergen, yaitu selisih perkiraan sebelum dari yang setelahnya makin lama makin kecil. Setelah dianggap cukup, proses pencarian akar fungsi berhenti, seperti digambarkan dalam persamaan berikut:

$$|x_2 - x_1| > |x_3 - x_2| > |x_4 - x_3| \dots |x_n - x_{n-1}|$$

dengan $|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon$, dimana ε =bilangan kecil positif.

Kecepatan konvergensi sebuah proses, yaitu kecepatan proses itu untuk sampai pada hasil akhir. Untuk dapat membandingkan kecepatan konvergensi dari masing – masing metode numerik dibutuhkan analisis yang dipaparkan di bawah ini.

3.1. Metode Newton Raphson

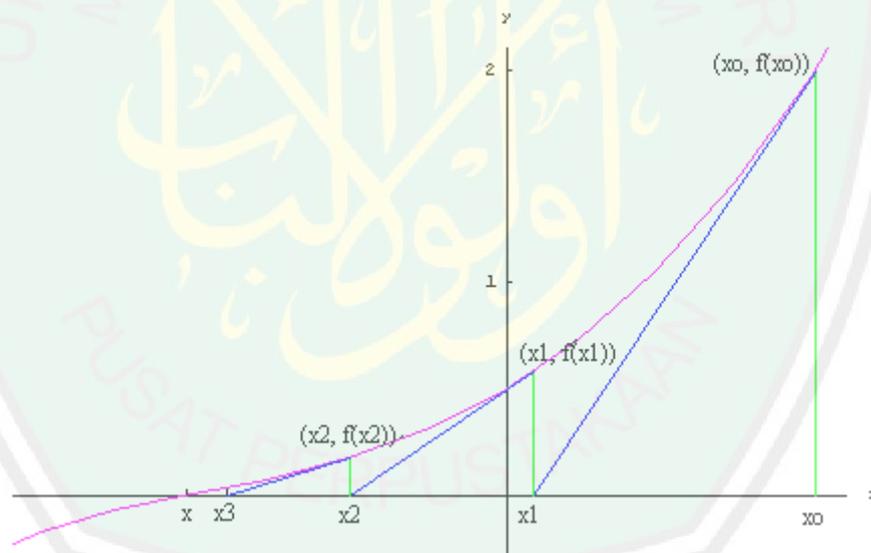
Di antara semua metode pencarian akar, metode Newton-Raphsonlah yang paling terkenal dan paling banyak dipakai dalam terapan sains dan rekayasa. Metode ini paling disukai karena karena konvergensinya paling cepat diantara metode lainnya(Rinaldi Munir, 2008:89).

Ada dua pendekatan dalam menurunkan rumus metode Newton-Raphson, yaitu :

- a) Penurunan rumus Newton-Raphson secara geometri,
- b) Penurunan rumus Newton-Raphson dengan bantuan deret Taylor.

3.1.1. Penurunan Rumus Newton-Raphson Secara Geometri

Metode Newton Raphson bisa digunakan dalam mencari akar suatu persamaan, jika diasumsikan f mempunyai turunan kontinu f' . Metode ini sering digunakan karena kesederhanaannya, misalkan tebakan awal untuk akar adalah x_0 , garis singgung dapat dibuat dari titik $(x_0, f(x_0))$, garis singgung tersebut memotong sumbu x , titik perpotongan ini memberikan perkiraan dekat dari nilai akar.

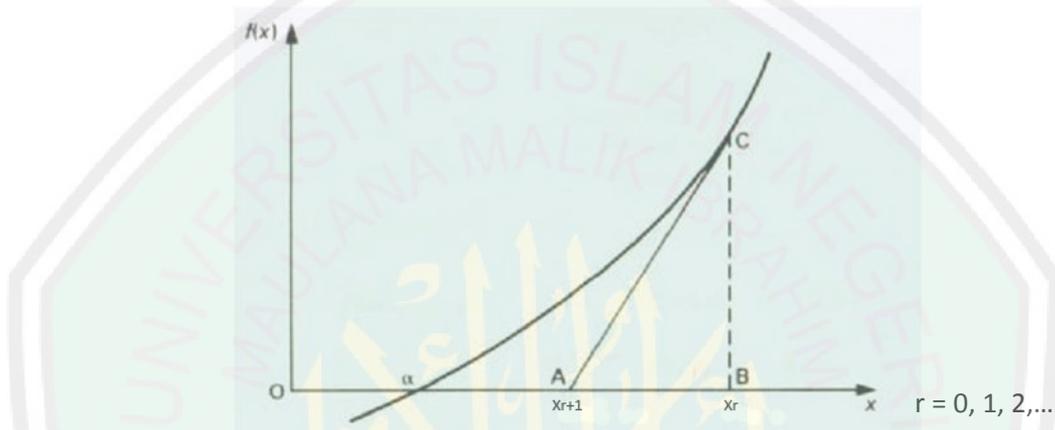


Gambar 3.1. iterasi pada metode Newton-Raphson.

Secara geometri, metode newton raphson hampir sama dengan metode posisi palsu, bedanya garis yang dipakai adalah garis singgung. Dengan menggunakan x_0 sebagai tebakan awal, dilanjutkan dengan mencari titik $(x_0, f(x_0))$, kemudian dibuat garis singgung dari titik $(x_0, f(x_0))$, sehingga diperoleh titik potong $(x_1, 0)$ antara sumbu x dan garis singgung titik $(x_0, f(x_0))$, kemudian dilanjutkan lagi dengan mencari titik $(x_1, f(x_1))$, dari titik $(x_1, f(x_1))$ kemudian dibuat garis

singgung, sehingga diperoleh titik potong $(x_2, 0)$ antara sumbu x dan garis singgung titik $(x_1, f(x_1))$, demikian seterusnya.

Solusi akar persamaan nonlinier dengan menggunakan Metode Newton Raphson, secara sederhana dapat diturunkan dari geometri gambar di bawah ini:



Gambar 3.2. Representasi garis tangen pada metode Newton-Raphson.

Garis tangen yang dimaksudkan pada Gambar. 3.2. di atas adalah garis AC , yang berarti juga bahwa tangen dari $\angle CAB$ (sudut CAB) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\tan(\angle CAB) = \frac{CB}{AB} \quad (3.1)$$

Bila diperhatikan pada gambar di atas, maka akan diperoleh persamaan-persamaan berikut:

$$CB = f(x_r) - 0 = f(x_r). \quad (3.2)$$

$$AB = x_r - x_{r+1}, \text{ dan} \quad (3.3)$$

$$\tan(\angle CAB) = f'(x_r) \quad (3.4)$$

Sehingga persamaan $\tan(\angle CAB)$ dapat ditulis kembali sebagai:

$$f'(x_r) = \frac{f(x_r)}{x_r - x_{r+1}} \quad (3.5)$$

atau setelah disusun-ulang, akan diperoleh formula rekursif yang merupakan rumus iterasi metode Newton-Raphson :

$$x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)}{f'(x_r)}, \quad (3.6)$$

dengan $r = 0, 1, 2, \dots$ dan $f'(x_r) \neq 0$.

3.1.2. Penurunan Rumus Newton-Raphson dengan Bantuan Deret Taylor

Pendekatan kedua dalam menurunkan rumus metode Newton-Raphson yaitu dengan bantuan deret Taylor adalah sebagai berikut:

Uraikan $f(x_{r+1})$ di sekitar x_r ke dalam deret Taylor:

$$f(x_{r+1}) \approx f(x_r) + (x_{r+1} - x_r)f'(x_r) + \frac{(x_{r+1} - x_r)^2}{2} f''(x_r)$$

Untuk $r = 0, 1, 2 \dots$ (3.7)

yang bila dipotong sampai suku orde-2 saja menjadi

$$f(x_{r+1}) \approx f(x_r) + (x_{r+1} - x_r)f'(x_r) \quad (3.8)$$

dan karena persoalan mencari akar, maka $f(x_{r+1}) = 0$, sehingga

$$0 \approx f(x_r) + (x_{r+1} - x_r)f'(x_r) \quad (3.9)$$

atau dapat kita uraikan menjadi

$$-f(x_r) \approx (x_{r+1} - x_r)f'(x_r) \quad (3.10)$$

$$-\frac{f(x_r)}{f'(x_r)} \approx (x_{r+1} - x_r) \quad (3.11)$$

Sehingga kita peroleh

$$x_{r+1} \approx x_r - \frac{f(x_r)}{f'(x_r)} \quad (3.12)$$

dengan $r = 0, 1, 2, \dots$ dan $f'(x_r) \neq 0$, yang merupakan rumus metode Newton-Raphson.

Kondisi berhenti iterasi Newton-Raphson adalah apabila

$$|x_{r+1} - x_r| < \varepsilon$$

atau apabila menggunakan galat relatif hampiran

$$\left| \frac{x_{r+1} - x_r}{x_{r+1}} \right| < \delta$$

dengan ε dan δ adalah toleransi galat yang diinginkan.

Catatan:

1. Jika terjadi $f'(x_r) = 0$, ulang kembali perhitungan iterasi dengan x_0 yang lain.
2. Jika persamaan $f(x) = 0$ memiliki lebih dari satu akar, pemilihan x_0 yang berbeda-beda dapat menentukan akar yang lain.
3. Dapat pula terjadi iterasi konvergen ke akar yang berbeda dari yang diharapkan.

3.1.3. Kriteria Konvergensi Metode Newton-Raphson

Apakah persyaratan agar metode Newton Raphson konvergen? Tinjau kembali bentuk umum prosedur iterasi terbuka, susunlah persamaan $f(x) = 0$ menjadi bentuk $x = g(x)$. Lalu, bentuklah menjadi prosedur iterasi

$$x_{r+1} = g(x_r). \tag{3.13}$$

Karena metode Newton Raphson termasuk metode terbuka, maka dalam hal ini,

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}. \quad (3.14)$$

Menurut teorema dalam bukunya Rinaldi Munir, misalkan $g(x)$ dan $g'(x)$ menerus di dalam selang $[a, b] = [-sh, s + h]$ yang mengandung titik tetap s dan nilai awal x_0 dipilih dalam selang tersebut. Jika $|g'(x)| < 1$ untuk semua $x \in [a, b]$ maka iterasi $x_{r+1} = g(x_r)$ akan konvergen ke s . Pada kasus ini s disebut juga *titik atraktif*. Jika $|g'(x)| > 1$ untuk semua $x \in [a, b]$ maka iterasi $x_{r+1} = g(x_r)$ akan divergen dari s .

Dengan mengingat syarat perlu agar iterasi konvergen adalah $|g'(x)| < 1$, maka:

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 - \frac{[f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)]}{[f'(x)]^2} \\ &= \frac{f'(x)^2 - [f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)]}{[f'(x)]^2} \\ &= \frac{[f'(x)]^2 - [f'(x)]^2 + f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} \\ &= \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Karena itu, metode Newton Raphson akan konvergen bila

$$\left| \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} \right| < 1 \quad (3.16)$$

dengan syarat $f'(x) \neq 0$.

3.1.4. Orde Konvergensi Metode Newton Raphson

Turunan pertama dari metode Newton Raphson, $g(x_r) = x_r - \frac{f(x_r)}{f'(x_r)}$, adalah

$$g'(x_r) = \frac{f(x_r)f''(x_r)}{[f'(x_r)]^2}. \quad (3.17)$$

Jika x_r adalah akar persamaan $f(x) = 0$, maka $f(x_r) = 0$, sehingga

$$g'(x_r) = 0. \quad (3.18)$$

Ini berarti pada metode Newton Raphson paling sedikit berorde dua. Turunan kedua dari $g(x_r)$ adalah

$$\begin{aligned} g''(x_r) &= \frac{1}{[f'(x_r)]^4} \left[\left(\frac{d}{dx} f(x_r)f''(x_r) \right) (f'(x_r))^2 - \left(\frac{d}{dx} (f'(x_r))^2 \right) f(x_r)f''(x_r) \right] \\ &= \frac{1}{[f'(x_r)]^4} \left[(f'(x_r)f''(x_r) + f'''(x_r)f(x_r))(f'(x_r))^2 - \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{d}{dx} (f'(x_r))^2 \right) f(x_r)f''(x_r) \right] \\ &= \frac{1}{[f'(x_r)]^4} \left[(f'(x_r)f''(x_r) + f'''(x_r)f(x_r))(f'(x_r))^2 - \right. \\ &\quad \left. (2f'(x_r)f''(x_r))f(x_r)f''(x_r) \right] \\ &= \frac{1}{[f'(x_r)]^4} \left[(f'(x_r)f''(x_r) + f'''(x_r)f(x_r))(f'(x_r))^2 - \right. \\ &\quad \left. 2f(x_r)f'(x_r)(f''(x_r))^2 \right] \end{aligned} \quad (3.19)$$

Jika x_r adalah akar persamaan $f(x) = 0$, maka $f(x_r) = 0$, sehingga persamaan diatas menjadi

$$\begin{aligned}
 g''(x_r) &= \frac{1}{[f'(x_r)]^2} [f'(x_r)f''(x_r) + 0 - (0)] \\
 &= \frac{1}{[f'(x_r)]^2} [f'(x_r)f''(x_r) + 0 - (0)] \\
 &= f''(x_r)/f'(x_r)
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

Menurut Renaldi Munir dalam bukunya yang berjudul Metode Numerik, prosedur iterasi numerik berode dua adalah:

$$\varepsilon_{r+1} \approx \frac{1}{2} g''(t_r) \varepsilon_r^2 \quad \text{dengan, } x_r < t < x_{r+1} \tag{3.21}$$

maka kita masukkan persamaan (3.20) kedalam persamaan (3.21) tersebut menjadi:

$$\varepsilon_{r+1} \approx \frac{f''(x_r) \varepsilon_r^2}{2f'(x_r)} \tag{3.22}$$

yang menjadi orde konvergensi.

Persamaan (3.22) ini mempunyai tiga arti:

1. Galat iterasi sekarang sebanding dengan kuadrat galat itersi sebelumnya. Jika galat iterasi sekarang misalnya 0.001, maka pada iterasi berikutnya sebanding dengan 0.000001. Hal inilah yang menyebabkan metode Newton Raphson sangat cepat menemukan akar (jika iterasinya konvergen).
2. Jumlah akar perbaikan akan berlipat dua pada tiap iterasi. Ini merupakan konsekuensi dari hal nomor 1 di atas.
3. Orde konvergensi metode Newton Raphson adalah kuadratik. Sehingga ia dinamakan juga *metode kuadratik*.

Cara lain menemukan orde konvergensi metode Newton Raphson adalah dengan meneruskan penurunan Newton Raphson dari deret Taylornya sebagai berikut. Perhatikan kembali persamaan (3.7) diatas.

Bilax_{r+1} = s sehingga f(x_{r+1}) = f(s) = 0 , dalam hal ini s adalah akar sejati, masukkan s ke dalam persaman (3.7) diatas:

$$0 = f(x_r) + (s - x_r)f'(x_r) + \frac{(s-x_r)^2 f''(t)}{2}. \quad (3.23)$$

Kurangi persamaan (3.23) dengan persamaan (3.9):

$$\begin{array}{r} 0 \approx f(x_r) + (s - x_r)f'(x_r) + \frac{(s - x_r)^2 f''(t)}{2} \\ 0 \approx f(x_r) + (x_{r+1} - x_r)f'(x_r) \\ \hline 0 \approx (s - x_{r+1})f'(x_r) + \frac{(s - x_r)^2 f''(t)}{2} \end{array} \quad (3.24)$$

Misalkan $s - x_{r+1} = \varepsilon_{r+1}$ dan $s - x_r = \varepsilon_r$, maka persamaan (3.24) dapat di tulis menjadi

$$(\varepsilon_{r+1})f'(x_r) + \frac{(\varepsilon_r)^2 f''(t)}{2} \approx 0$$

atau

$$\varepsilon_{r+1} \approx \frac{f''(t)(\varepsilon_r)^2}{2f'(x_r)} \quad (3.25)$$

yang sama dengan (3.22), kecuali pada $f''(x_r)$ dan $f''(t)$, tetapi perbedaan ini tidak begitu penting, sebab yang dicari adalah pangkat dari ε_r .

3.2. Metode Halley

Sebuah metode populer dari Edmond Halley (1656-1742) dengan menggunakan fungsi iterasi:

$$x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)}{f'(x_r)} \left| 1 - \frac{f(x_r)f''(x_r)}{2(f'(x_r))^2} \right|^{-1} \quad (3.26)$$

Istilah dalam kurung menunjukkan di mana letak perubahan dari fungsi iterasi Newton-Raphson.

Kita uraikan $f(x_{r+1})$ di sekitar x_r ke dalam deret Taylor:

$$f(x_{r+1}) \approx f(x_r) + (x_{r+1} - x_r)f'(x_r) + \frac{1}{2!}(x_{r+1} - x_r)^2 f''(x_r) + \frac{1}{3!}(x_{r+1} - x_r)^3 f'''(x_r) \dots, \text{ untuk } r = 0, 1 \dots \quad (3.27)$$

Yang bila dipotong sampai suku orde-3 saja menjadi

$$f(x_{r+1}) \approx f(x_r) + (x_{r+1} - x_r)f'(x_r) + \frac{1}{2}(x_{r+1} - x_r)^2 f''(x_r) \quad (3.28)$$

dan karena persoalan mencari akar, maka $f(x_{r+1}) = 0$, sehingga

$$0 \approx f(x_r) + (x_{r+1} - x_r)f'(x_r) + \frac{1}{2}(x_{r+1} - x_r)^2 f''(x_r) \quad (3.29)$$

dari persamaan (3.29) dapat disederhanakan menjadi,

$$0 \approx f(x_r) + \left[f'(x_r) + \frac{1}{2}(x_{r+1} - x_r) f''(x_r) \right] (x_{r+1} - x_r) \quad (3.30)$$

Sehingga persamaan $(x_{r+1} - x_r)$ diperoleh

$$(x_{r+1} - x_r) \approx - \frac{f(x_r)}{\left[f'(x_r) + \frac{1}{2}(x_{r+1} - x_r) f''(x_r) \right]} \quad (3.31)$$

Sehingga menghasilkan

$$(x_{r+1}) \approx x_r - \frac{f(x_r)}{\left[f'(x_r) + \frac{1}{2}(x_{r+1} - x_r) f''(x_r) \right]} \quad (3.32)$$

Dengan menggunakan hasil dari metode Newton Raphson, bahwa

$$x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)}{f'(x_r)} \text{ sehingga } (x_{r+1} - x_r) = -\frac{f(x_r)}{f'(x_r)}, \text{ kemudian kita substitusikan}$$

ke persamaan (3.32) sehingga menjadi,

$$(x_{r+1}) = x_r - \frac{f(x_r)}{\left[f'(x_r) - \frac{1}{2} \frac{f(x_r)}{f'(x_r)} f''(x_r) \right]} \quad (3.33)$$

atau

$$(x_{r+1}) = x_r - \frac{f(x_r)}{\left[\frac{2(f'(x_r))^2 - f(x_r)f''(x_r)}{2f'(x_r)} \right]} \quad (3.34)$$

Sehingga memberikan

$$(x_{r+1}) = x_r - \frac{2 f(x_r) f'(x_r)}{2(f'(x_r))^2 - f(x_r) f''(x_r)} \quad (3.35)$$

dengan mengalikan $\frac{f'(x)}{f'(x)}$ kedalam persamaan (3.35) diatas, dapat kita peroleh

$$(x_{r+1}) = x_r - \frac{f(x)}{f'(x)} \left[\frac{2 (f'(x_r))^2}{2(f'(x_r))^2 - f(x_r) f''(x_r)} \right] \quad (3.36)$$

atau

$$(x_{r+1}) = x_r - \frac{f(x)}{f'(x)} \left[\frac{2(f'(x_r))^2 - f(x_r) f''(x_r)}{2 (f'(x_r))^2} \right]^{-1} \quad (3.37)$$

kemudian kita sederhanakan sehingga kita peroleh rumus metode Halley

$$x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)}{f'(x_r)} \left[1 - \frac{f(x_r)f''(x_r)}{2(f'(x_r))^2} \right]^{-1} \quad (3.38)$$

Istilah dalam kurung menunjukkan di mana letak perubahan dari fungsi iterasi Newton-Raphson.

Kondisi berhenti iterasi metode Halley adalah apabila

$$|x_{r+1} - x_r| < \varepsilon$$

atau apabila menggunakan galat relative hampiran

$$\left| \frac{x_{r+1} - x_r}{x_{r+1}} \right| < \delta$$

dengan ε dan δ adalah toleransi galat yang diinginkan.

Catatan:

1. Jika terjadi $f'(x_r) = 0$, ulang kembali perhitungan iterasi dengan x_0 yang lain.
2. Jika persamaan $f(x) = 0$ memiliki lebih dari satu akar, pemilihan x_0 yang berbeda-beda dapat menentukan akar yang lain.
3. Dapat pula terjadi iterasi konvergen ke akar yang berbeda dari yang diharapkan (seperti halnya pada metode iterasi Newton Raphson).

3.2.1. Orde Konvergensi Metode Halley

Cara menemukan orde konvergensi metode Halley adalah dengan meneruskan penurunan metode Halley dari deret Taylornya sebagai berikut. Perhatikan kembali persamaan (3.27) diatas.

Bila $x_{r+1} = s$ sehingga $f(x_{r+1}) = f(s) = 0$, dalam hal ini s adalah akar sejati, masukkan s ke dalam persamaan (3.27) diatas:

$$0 \approx f(x_r) + (s - x_r)f'(x_r) + \frac{(s-x_r)^2 f''(t)}{2} + \frac{1}{3!}(s - x_r)^3 f'''(t) \quad (3.39)$$

Kurangi persamaan (3.39) dengan persamaan (3.29):

$$\begin{aligned} 0 &\approx f(x_r) + (s - x_r)f'(x_r) + \frac{1}{2}(s - x_r)^2 f''(t) + \frac{1}{3!}(s - x_r)^3 f'''(t) \\ 0 &\approx f(x_r) + (x_{r+1} - x_r)f'(x_r) + \frac{1}{2}(x_{r+1} - x_r)^2 f''(x_r) \quad - \\ \hline 0 &\approx (s - x_{r+1})f'(x_r) + \frac{1}{2}(s - x_r)^2 f''(t) + \frac{1}{3!}(s - x_r)^3 f'''(t) \end{aligned} \quad (3.40)$$

Misalkan $s - x_{r+1} = \varepsilon_{r+1}$ dan $s - x_r = \varepsilon_r$, maka persamaan (3.40) dapat di tulis menjadi

$$(\varepsilon_{r+1})f'(x_r) + \frac{1}{2}(\varepsilon_r)^2 f''(t) + \frac{1}{3!}(\varepsilon_r)^3 f'''(t) \approx 0$$

atau

$$\varepsilon_{r+1} \approx \frac{f''(t)(\varepsilon_r)^2}{2f'(x_r)} + \frac{(\varepsilon_r)^3 f'''(t)}{(3!)f'(x_r)} \quad (3.41)$$

Persamaan (3.41) ini mempunyai tiga arti:

1. Galat iterasi sekarang sebanding dengan pangkat tiga galat itersi sebelumnya. Jika galat iterasi sekarang misalnya 0.01, maka pada iterasi berikutnya sebanding dengan 0.000001. Hal inilah yang menyebabkan metode Halley lebih cepat menemukan akar dari pada metode Newton Raphson (jika iterasinya konvergen).
2. Jumlah akar perbaikan akan berlipat tiga pada tiap iterasi. Ini merupakan konsekuensi dari hal nomor 1 di atas.
3. Orde konvergensi metode Halley adalah kuadratik. Sehingga ia dinamakan juga *metode kubik*..

3.3. Menyelesaikan Akar-Akar Persamaan Nonlinear

Untuk persamaan polinomial berderajat dua, persamaan dapat diselesaikan dengan rumus persamaan kuadrat yang sangat sederhana. Misalnya bentuk $ax^2 + bx + c = 0$, dapat dicari akar-akarnya secara analitik dengan rumus kuadrat:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Untuk persamaan polinomial derajat tiga atau empat, rumus-rumus yang ada sangat kompleks dan jarang sekali digunakan. Sedang untuk persamaan dengan derajat yang lebih tinggi dan untuk persamaan yang sangat kompleks belum ada rumus yang digunakan untuk menyelesaikannya. Bentuk persamaan tersebut misalnya:

1. $f(x) = e^{(2\sin(x))^{\cos(x)}} \log(|2x|)$
2. $f(x) = x \sin x^2$
3. $f(x) = \sin x^{(\cos x)^{\tan x}} - 4/5$

dan lain sebagainya.

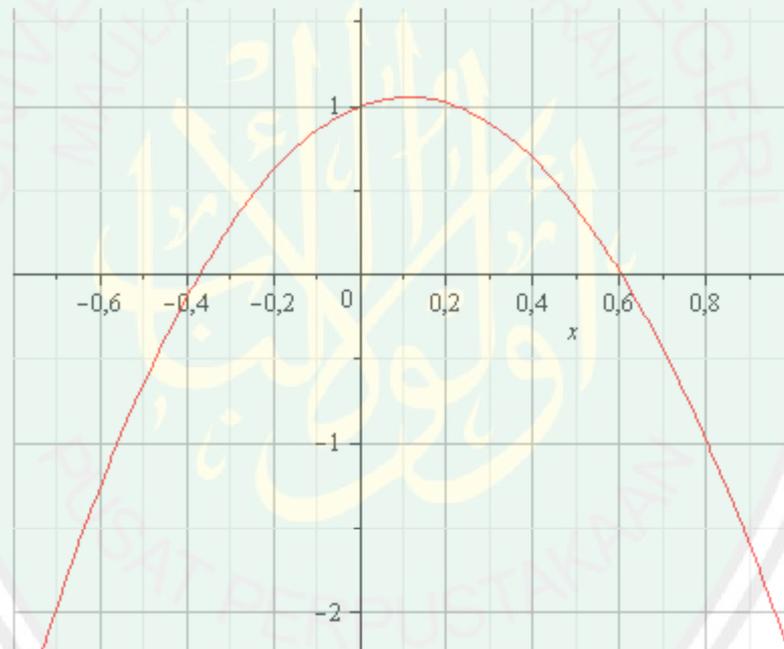
Persamaan-persamaan tersebut diatas sulit atau belum ada penyelesaian secara eksplisit. Metode numerik memberikan cara-cara untuk menyelesaikan bentuk persamaan tersebut secara perkiraan sampai diperoleh hasil yang mendekati penyelesaian eksak.

Penyelesaian numerik dilakukan dengan perkiraan yang berurutan (iterasi) sedemikian hingga setiap hasil adalah lebih teliti dari perkiraan sebelumnya. Dengan melakukan sejumlah prosedur iterasi yang dianggap cukup, akhirnya

didapat hasil perkiraan yang mendekati nilai eksak (hasil yang benar) dengan toleransi kesalahan yang diijinkan.

3.3.1. Menyelesaikan Akar-Akar Persamaan Nonlinear dengan Metode Newton Raphson dan Metode Halley.

Hitunglah akar dengan tebakan awal akar dan , menggunakan metode Newton Raphson dan metode Halley.



Gambar 3.3. grafik fungsi

Penyelesaian dengan metode Newton Raphson:

Metode Newton Raphson adalah metode penyelesaian persamaan non linear dengan menggunakan persamaan : $f(x) = 0$ dan jika memenuhi persyaratan : $f'(x) \neq 0$ dimana x_0 adalah titik awal yang ditentukan sebelum melakukan iterasi.

Langkah 1: mencari turunan pertama dan kedua dari $f(x)$, yaitu:

$$\diamond f(x) = e^x - 5x^2$$

$$\diamond f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{(x+h)} - 5(x+h)^2 - e^x + 5x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - 10xh - 5h^2 - e^x}{h}$$

$$\diamond \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = e^x - 10x$$

$$\diamond f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{(x+h)} - 10(x+h) - e^x + 10x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{(x+h)} - 10h - e^x}{h}$$

$$\diamond \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} = e^x - 10$$

Langkah 2: menentukan titik x_r , yakni $x_r = 0.5$ maka didapatkan :

$$\diamond f(x) = e^{0.5} - 5x^2 = 0.398721271$$

$$\diamond f'(0.5) = e^{0.5} - 10(0.5) = -3.351278729$$

$$\diamond f''(x) = e^{0.5} - 10 = -8.35127879$$

Jadi

$$\left| \frac{f(x_r) f''(x_r)}{[f'(x_r)]^2} \right| = \frac{(0.398721271) * (-8.35127879)}{(-3.351278729)^2} = -0.2964840153 < 1$$

Langkah 3: Melakukan Iterasi dengan persamaan:

$$x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)}{f'(x_r)}$$

$$\diamond r = 0$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0.5 - \frac{0.398721271}{-3.351278729} = 0.6189758606$$

$$\diamond r = 1$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0.6189758606 - \frac{-0.058630365}{-4.332733391} = 0.6054439029$$

$$\diamond r = 2$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = 0.6054439029 - \frac{-0.000746311}{-4.222373742} = 0.6052671514$$

❖ $r = 3$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_4)}{f'(x_4)} = 0.6052671514 - \frac{-1.27(10)^{-7}}{-4.220930018} = 0.6052671213$$

Karena

$$|x_{r+1} - x_r| = |0.6052671213 - 0.6052671514| = 0.0000000301 < \varepsilon$$

Maka iterasi Newton Raphson berhenti pada iterasi keempat, sehingga diperoleh akar dari persamaan di atas adalah 0.6052671213. dengan $f(x_4) = 1.10^{-9}$

Penyelesaian dengan metode Halley:

Metode Halley adalah metode penyelesaian persamaan non linear dengan

menggunakan persamaan $x_{r+1} = x_r - \frac{f(x)}{f'(x)} \left[1 - \frac{f(x_r)f''(x_r)}{2(f'(x_r))^2} \right]^{-1}$ dan jika

memenuhi persyaratan $\left| \frac{f(x_r)f''(x_r)}{[f'(x_r)]^2} \right| < 1$ dimana x_r adalah titik awal yang

ditentukan sebelum melakukan iterasi.

Langkah 1: mencari turunan pertama dan kedua dari $f(x)$, yaitu:

$$❖ f(x) = e^x - 5x^2$$

$$❖ f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{e^{(x+h)}-5(x+h)^2-e^x+5x^2}{h} = \frac{e^{x+h}-10xh-5h^2-e^x}{h}$$

$$❖ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = e^x - 10x$$

$$❖ f''(x) = \frac{f'(x+h)-f'(x)}{h} = \frac{e^{(x+h)}-10(x+h)-e^x+10x}{h} = \frac{e^{(x+h)}-10h-e^x}{h}$$

$$❖ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h)-f'(x)}{h} = e^x - 10$$

Langkah 2: menentukan titik x_r , yakni $x_r = 0.5$ maka didapatkan :

- ❖ $f(x) = e^{0.5} - 5x^2 = 0.398721271$
- ❖ $f'(0.5) = e^{0.5} - 10(0.5) = -3.351278729$
- ❖ $f''(x) = e^{0.5} - 10 = -8.35127879$

Jadi

$$\left| \frac{f(x_r)f''(x_r)}{[f'(x_r)]^2} \right| = \frac{(0.398721271) * (-8.35127879)}{(-3.351278729)^2} = -0.2964840153 < 1$$

Langkah 3: Melakukan Iterasi dengan persamaan:

$$(x_{r+1}) = x_r - \frac{f(x_r)}{f'(x_r)} \left[1 - \frac{f(x_r)f''(x_r)}{2(f'(x_r))^2} \right]^{-1}$$

- ❖ Untuk $r = 0$

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \left[1 - \frac{f(x_0)f''(x_0)}{2(f'(x_0))^2} \right]^{-1} \\ &= 0.5 - \frac{0.398721271}{-3.351278729} \left[1 - \frac{(0.398721271)*(-8.351278729)}{2(-3.351278729)^2} \right]^{-1} \\ &= 0.5 - (-0.1189758606) [1 - (-0.1482420077)]^{-1} \\ &= 0.5 - (-0.1189758606) [1.148242008]^{-1} \\ &= 0.5 - (-0.1189758606) * \left[\frac{1}{1.148242008} \right] \\ &= 0.5 + 0.1036156662 \\ &= 0.6036156662 \end{aligned}$$

- ❖ Untuk $r = 1$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \left[1 - \frac{f(x_2)f''(x_2)}{2(f'(x_2))^2} \right]^{-1}$$

$$\begin{aligned}
&= 0.6036156662 - \frac{0.006959536}{-4.207437764} \left[1 - \frac{(0.006959536)*(-8.171281102)}{2(-4.207437764)^2} \right]^{-1} \\
&= 0.6036156662 + 0.001651450543 \\
&= 0.6052671167
\end{aligned}$$

❖ Untuk $r = 2$

$$\begin{aligned}
x_3 &= x_2 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} \left[1 - \frac{f(x_3)f''(x_3)}{2(f'(x_3))^2} \right]^{-1} \\
&= 0.6052671167 - \frac{1.9 \cdot 10^{-8}}{-4.220929735} \left[1 - \frac{(1.9 \cdot 10^{-8})*(-8.168258568)}{2(-4.220929735)^2} \right]^{-1} \\
&= 0.6052671167 - (-4.501377941 \cdot 10^{-9}) [1 - (-4.355488156 \cdot 10^{-9})]^{-1} \\
&= 0.6052671167 + 4.501377923 \cdot 10^{-9} \\
&= 0.6052671212
\end{aligned}$$

Karena

$$|x_{r+1} - x_r| = |0.6052671212 - 0.6052671167| = 4.5 \cdot 10^{-9} < \varepsilon$$

Maka iterasi metode Halley berhenti pada iterasi ke tiga, sehingga diperoleh akar

dari persamaan diatas adalah 0.6052671212. dengan $f(x_3) = 1.10^{-9}$

3.4. Perbandingan Konvergensi Metode Newton Raphson dengan Metode Halley dalam Menyelesaikan Akar-Akar Persamaan Nonlinear.

Berdasarkan hasil penyelesaian akar $f(x) = e^x - 5x^2$ dengan tebakan awal akar $x_0 = 0.5$ dan $\varepsilon = 0.00001$, menggunakan metode Newton Raphson diperoleh nilai akar $x = 0,605267121$ dengan membutuhkan sebanyak 4 kali itersai, yaitu dengan perincian sebagai berikut:

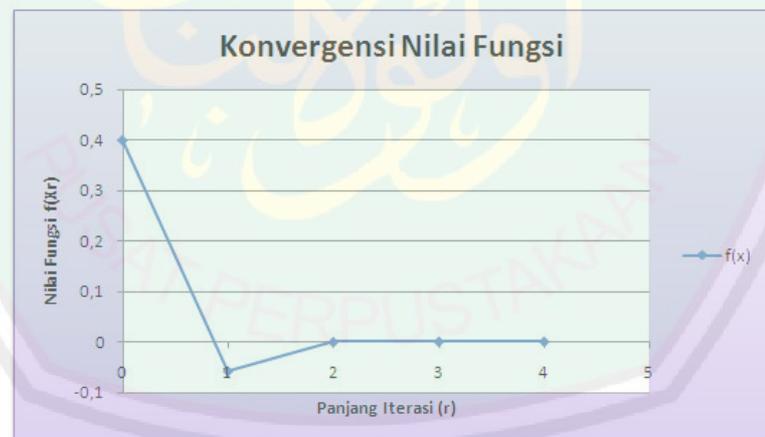
1. Dengan tebakan nilai awal untuk $x_0 = 0,5$ diperoleh $x_1 = 0,6189758606$ dengan nilai fungsi $f(x_1) = -0,0586$ dengan galat $0,118975861..$
2. Setelah diperoleh $x_1 = 0.6189758606$, dengan langkah perulangan kemudian di peroleh $x_2 = 0,6054439029$, dengan nilai fungsi $f(x_2) = -0,00074631$ sehingga galatnya diperoleh $-0,013531958$.
3. Setelah diperoleh $x_2 = 0,6054439029$, dengan langkah perulangan sehingga dipeoleh $x_3 = 0,6052671514$ dan nilai fungsi $f(x_3) = -0,000000127$, sehingga galatnya menjadi $-0,000176752$.
4. Setelah diperoleh $x_3 = 0,6052671514$, dengan melakukan perulangan sehingga diperoleh $x_4 = 0,6052671213$ dan nilai fungsi $0,000000001$ sehingga diperoleh galatnya $0,0000000301$.
5. Dikarenakan nilai galat $|x_{r+1} - x_r| = 0,0000000301 < \varepsilon$ dengan $\varepsilon = 0.00001$, maka iterasi metode Newton Raphson berhenti pada iterasi ke empat, sehingga diperoleh akar dari persamaan diatas adalah $0,6052671213$. Dengan $f(x_3) = 3,01 \cdot 10^{-8}$.

Tabel 3.1 tabel konvergensi Newton Raphson

iteasi (r)	x_r	$f(x_r)$	ε
0	0,5	0,398721271	0,5
1	0,618975861	-5,86E-02	0,118975861
2	0,605443903	-0,00074631	-0,013531958
3	0,605267151	-0,000000127	-0,000176752
4	0,605267121	0,000000001	-3,01E-08



Gambar 3.4. Konvergensi nilai akar pada metode Newton Raphson



Gambar 3.5. Konvergensi nilai fungsi pada metode Newton Raphson

Sedangkan hasil penyelesaian akar $f(x) = e^x - 5x^2$ dengan tebakan awal akar $x_0 = 0.5$ dan $\varepsilon = 0.00001$, menggunakan metode Halley diperoleh nilai akar $x = 0,605267$ dengan membutuhkan sebanyak 3 kali itersai, yaitu dengan perincian sebagai berikut:

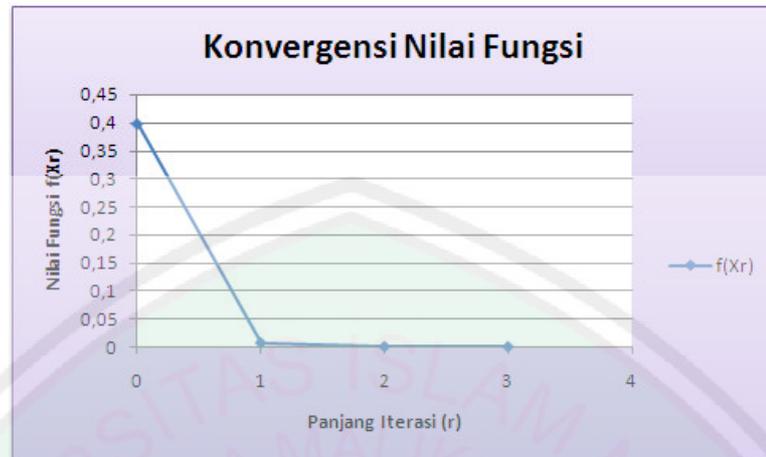
1. Dengan tebakan nilai awal untuk $x_0 = 0,5$ diperoleh $x_1 = 0,6036156662$ dengan nilai fungsi $f(x_1) = 0,006959536$ dengan galat $0,103615666$.
2. Setelah diperoleh $x_1 = 0,6036156662$, dengan langkah perulangan kemudian di peroleh $x_2 = 0,6052671167$, dengan nilai fungsi $f(x_2) = 0,000000019478$ sehingga galatnya diperoleh $0,001651451$.
3. Setelah diperoleh $x_2 = 0,6052671167$, dengan langkah perulangan sehingga dipeoleh $x_3 = 0,605267121$ dan nilai fungsi $f(x_3) = 0,000000000483796$, sehingga galatnya menjadi $0,0000000045$.
4. Dikarenakan nilai galat $|x_{r+1} - x_r| = 4,5 \cdot 10^{-9} < \varepsilon$ dengan $\varepsilon = 0.00001$, maka iterasi metode halley berhenti pada iterasi ketiga, sehingga diperoleh akar dari persamaan diatas adalah $0,6052671212$ dengan $f(x_3) = 1.10^{-9}$.

Tabel 3.2. tabel konvergensi Metode Halley.

iteasi	x_r	$f(x_r)$	ε
0	0,5	0,398721271	0,5
1	0,6036156662	0,006959536	0,103615666
2	0,6052671167	1,9478E-08	0,001651451
3	0,605267121	4,83796E-10	4,5E-09



Gambar 3.6. Konvergensi nilai akar pada metode Halley.



Gambar 3.7. Konvergensi nilai fungsi pada metode Halley.

Dari hasil analisa di atas dapat diketahui bahwa dalam pencarian akar persamaan nonlinier $f(x) = e^x - 5x^2$ dengan menggunakan metode Halley lebih cepat dari pada menggunakan metode Newton Raphson. Karena dengan metode Halley hanya membutuhkan 3 iterasi dalam mencari nilai akarnya sedangkan metode Newton Raphson membutuhkan 4 itersi untuk menemukan nilai akarnya.

Tabel 3.3. tabel perbandingan konvergensi.

Perbandingan Konvergensi						
Metode Newton Raphson				Metode Halley		
iteasi (r)	x_r	$f(x_r)$	ε	x_r	$f(x_r)$	ε
0	0,5	0,398721271		0,5	0,398721271	
1	0,618975861	-5,86E-02	0,118975861	0,603616	0,006959536	0,103615666
2	0,605443903	-0,00074631	-0,013531958	0,605267	1,9478E-08	0,001651451
3	0,605267151	-0,000000127	-0,000176752	0,605267	4,83796E-10	4,5E-09
4	0,605267121	0,000000001	-3,01E-08			

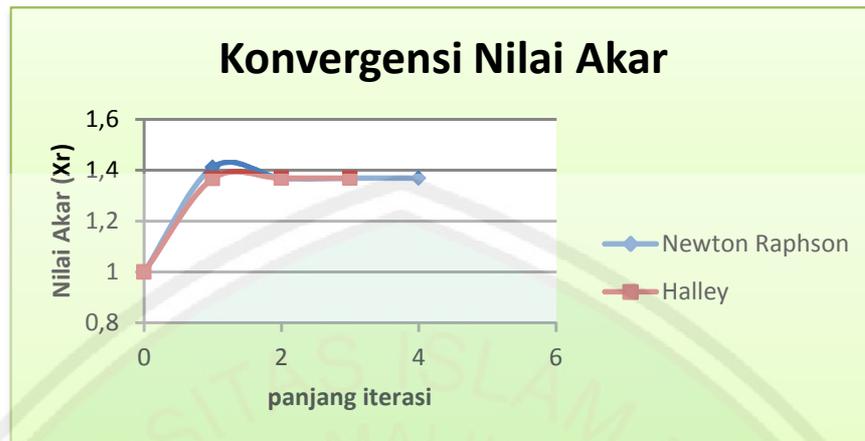
Perbandingan konvergensi dari akar $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$ dengan tebakan awal akar $x_0 = 1$ dan $\varepsilon = 0.00001$, menggunakan metode Newton Raphson dan metode Halley.



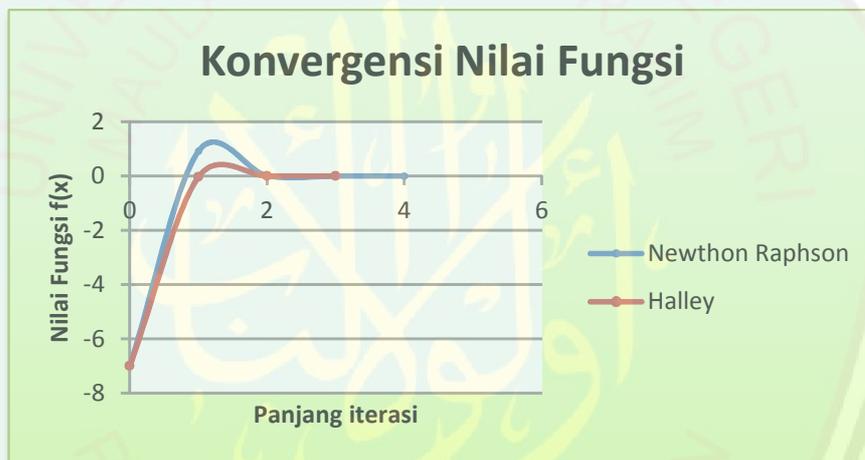
Gambar 3.8. grafik fungsi $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$.

Tabel 3.4. tabel perbandingan konvergensi.

Perbandingan Konvergensi						
Metode Newton Raphson				Metode Halley		
iteasi (r)	x_r	$f(x_r)$	ε	x_r	$f(x_r)$	ε
0	1	-7		1	-7	
1	1.411764706	0.91756564	0.411764706	1.367283951	-0.321 e-1	0.367283951
2	1.369336471	0.01114813	-0.042428235	1.368808108	0.3768 e-8	0.001524157
3	1.368808818	0.00000171	-0.000528282	1.368808108	0.3768 e-8	0.12877 e-9
4	1.368808108	0.37683 e-8	-8.1 10 ⁻⁸			



Gambar 3.9. Perbandingan Konvergensi Nilai Akar



Gambar 3.10. Perbandingan Konvergensi Nilai Fungsi

Dari hasil analisa di atas dapat diketahui bahwa dalam pencarian akar persamaan nonlinier dengan menggunakan metode Halley lebih cepat dari pada menggunakan metode Newton Raphson. Karena dengan metode Halley hanya membutuhkan 3 iterasi dalam mencari nilai akarnya sedangkan metode Newton Raphson membutuhkan 4 itersi untuk menemukan nilai akarnya, dan dalam metode Newton Raphson, perbaikan akar berlipat dua pada setiap iterasi, sedangkan pada metode Halley perbaikan akar berlipat tiga pada setiap iterasi sehingga metode halley lebih cepat konvergensi nilai akarnya.

3.5 Metode Newton Raphson dan Metode Halley dalam pandangan Islam

Berdasarkan hasil pembahasan di atas, dapat diketahui bahwa dengan mengaplikasikan metode Newton Raphson dan metode Halley pada solusi akar-akar persamaan nonlinier ini jika dikaitkan dengan Al-Qur'an, akan terdapat titik kesinambungannya. Yaitu jika dalam matematika didapati persoalan serumit apapun ternyata ada solusinya, begitu pula di dalam Islam jika didapati persoalan yang rumit untuk dipecahkan, maka Islam juga selalu mempunyai solusinya. karena Islam tidak menghendaki kesulitan tetapi kemudahan bagi orang-orang yang mau berfikir dan bersungguh-sungguh. Sebagaimana firman Allah:

فَإِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٥﴾ إِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٦﴾

Artinya: “*Karena Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan. Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan*” (Q.S. Al-Insyiroh: 5-6)

..... وَمَنْ يَتَّقِ اللَّهَ تَجْعَلْ لَهُ مِنْ أَمْرِهِ يُسْرًا ﴿٤﴾

Artinya: “*Dan barang siapa yang bertakwa kepada Allah, niscaya Allah menjadikan baginya kemudahan dalam urusannya*” (Q.S. Ath-Thalaaq: 4)

Dari kedua ayat di atas bermaksud menjelaskan salah satu *Sunnah-Nya* yang bersifat umum dan konsisten yaitu, “setiap kesulitan pasti disertai atau

disusul dengan kemudahan selama yang bersangkutan bertekad untuk menanggulangnya”. Ayat-ayat ini seakan-akan juga berpesan agar setiap orang mencari peluang pada setiap tantangan dan kesulitan yang dihadapi (Shihab, 2002: 363).

Seperti halnya metode Halley dan metode Newton Raphson, dengan kedua metode tersebut suatu permasalahan matematis yakni pencarian akar-akar persamaan nonlinier seperti $f(x) = e^x - 5x^2$ dan $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$ dapat terselesaikan. Dari sini, dapat diambil hikmahnya, bahwa suatu permasalahan matematis yang sulit diselesaikan dengan metode analitik untuk mendapatkan solusi sejatinya (jawab eksak) ternyata dapat diselesaikan dengan penghitungan numerik berupa beberapa metode sehingga didapatkan jawab yang mendekati solusi sejatinya (jawab eksaknya).

Dari sekian banyak masalah yang penulis temui, khususnya dalam bidang matematika, ternyata dapat menambah keyakinan bahwa semua pasti ada jalan keluar dan hikmahnya tersendiri. Hal ini sesuai dengan permasalahan yang sedang penulis hadapi yakni bagaimana menentukan akar persamaan nonlinier terutama selesaiannya berupa akar-akar yang kompleks. Untuk itu dibutuhkan suatu metode khusus untuk mendapatkan selesaiannya.

Sehingga penulis berfikir ternyata semua permasalahan yang ada khususnya dalam bidang matematika pasti ada solusinya. Sebagaimana permasalahan dalam menentukan akar-akar persamaan nonlinier jika tidak dapat dilakukan penghitungan dengan metode analitik, maka dapat menggunakan menggunakan metode numerik yang solusinya berbentuk angka.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil perbandingan konvergensi pada pembahasan, maka dapat diambil kesimpulan, antara lain:

1. Dalam metode Newton Raphson, perbaikan akar berlipat dua pada setiap iterasi, sedangkan pada metode Halley perbaikan akar berlipat tiga pada setiap iterasi.
2. Orde konvergensi metode Newton Rapson adalah kuadratik sedangkan orde konvergensi metode Haley adalah kubik.
3. Metode Halley lebih cepat menemukan nilai akar-akar persamaan nonlinier dibandingkan dengan metode Newton Raphson (jika iterasinya konvergen).

4.2 Saran

Skripsi ini merupakan penelitian dengan kajian literatur tentang pencarian akar persamaan nonlinier menggunakan metode Newton Raphson dan metode Halley. Dengan metode yang sudah ada itu penulis mengharapkan adanya pengembangan lebih lanjut, sehingga didapatkan metode numerik baru yang lebih cepat konvergensinya, sehingga tidak memerlukan iterasi yang panjang.

DAFTAR PUSTAKA

- Abdusysykir. 2006. *Ada Matematika dalam Al-Qur'an*. Malang: UIN Malang Press.
- Abdusysykir. 2006. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press.
- Depag RI. 1996. *Al-Qur'an dan Terjemahnya*. Semarang: Toha Putra
- Djojodihardjo, Harijono. 2000. *Metode Numerik*. Jakarta: PT. Gramedia Pustaka Utama
- Munir, Rinaldi. 2008. *Metode Numerik*. Bandung: Informatika.
- Setiawan, Agus. 2006. *Pengantar Metode Nmerik*. Yogyakarta: CV. Andi Offset.
- Shihab, M. Quraish. 2002. *Tafsir Al-Mishbah Volume 1*. Jakarta: Lentera Hati
- Shihab, M. Quraish. 2002. *Tafsir Al-Mishbah Volume 8*. Jakarta: Lentera Hati
- Shihab, M. Quraish. 2002. *Tafsir Al-Mishbah Volume 14*. Jakarta: Lentera Hati
- Shihab, M. Quraish. 2002. *Tafsir Al-Mishbah Volume 15*. Jakarta: Lentera Hati
- Triatmodjo, Bambang. 2002. *Metode Numerik Dilengkapi dengan Program Komputer*. Yogyakarta: Beta Offset.
- John H. Mathews 2004. "Metode Halley." Dari Math.Fullerton - Web Resource
<http://math.fullerton.edu/mathews/n2003/Halley'sMethodMod.html>.
diakses tanggal 27 Agustus 2009, jam 06.00
- Weisstein, Eric W. "Metode Halley." Dari MathWorld - A Wolfram Web Resource. <Http://mathworld.wolfram.com/HalleysMethod.html>.
diakses tanggal 27 Agustus 2009, jam 05.30

Lampiran i

PROGRAM PERBANDINGAN METODE HALLEY DAN NEWTON RAPHSON
DALAM MENCARI AKAR-AKAR PERSAMAAN NONLINIER

```

> restart;
> Newton := proc()
>   local f, p, tol, n, i, dig, SC1, SC2, SC3;
>   f:=unapply(Maplets:-Tools:-Get('TF1'::algebraic),x);
>   p[0]:=Maplets:-Tools:-Get('TF2'::numeric);
>   tol:=Maplets:-Tools:-Get('TF3'::numeric);
>   n:=Maplets:-Tools:-Get('TF4'::posint);
>   dig:=Maplets:-Tools:-Get('TF5'::posint);
>   SC1:=Maplets:-Tools:-Get('RB1');
>   SC2:=Maplets:-Tools:-Get('RB2');
>   SC3:=Maplets:-Tools:-Get('RB3');
>   Digits:=dig;
>   for i from 1 to n do
>     p[i]:=evalf(p[i-1]-f(p[i-1])/D(f)(p[i-1]));
>     if SC2 then
>       if evalf(abs((p[i]-p[i-1])/p[i])) < tol then
>         Maplets:-Tools:-Set('TF6'=p[i]);
>         Maplets:-Tools:-Set('TF7'=i);
>         Maplets:-Tools:-Set('TB1'=evalf[dig+50](f(p[i])));
>         return;
>       end if;
>     end if;
>     if SC1 then
>       if evalf(abs(p[i]-p[i-1])) < tol then
>         Maplets:-Tools:-Set('TF6'=p[i]);
>         Maplets:-Tools:-Set('TF7'=i);
>         Maplets:-Tools:-Set('TB1'=evalf[dig+50](f(p[i])));
>         return;
>       end if;
>     end if;
>     if SC3 then
>       if evalf(abs(f(p[i]))) < tol then
>         Maplets:-Tools:-Set('TF6'=p[i]);
>         Maplets:-Tools:-Set('TF7'=i);
>         Maplets:-Tools:-Set('TB1'=evalf[dig+50](f(p[i])));
>         return;
>       end if;
>     end if;
>   end do;
>   Maplets:-Tools:-Set('TF6'="Newton Method has failed");
>   Maplets:-Tools:-Set('TF7'=n);
>   Maplets:-Tools:-Set('TB1'="No approximated Solution.");
> end proc;
>
>
> Halley := proc()
>   local f, p, tol, n, i, dig, SC1, SC2, SC3;
>   f:=unapply(Maplets:-Tools:-Get('TF1'::algebraic),x);
>   p[0]:=Maplets:-Tools:-Get('TF2'::numeric);
>   tol:=Maplets:-Tools:-Get('TF3'::numeric);

```

```

> n:=Maplets:-Tools:-Get('TF4'::posint);
> dig:=Maplets:-Tools:-Get('TF5'::posint);
> Digits:=dig;
> SC1:=Maplets:-Tools:-Get('RB7');
> SC2:=Maplets:-Tools:-Get('RB8');
> SC3:=Maplets:-Tools:-Get('RB9');
> for i from 0 to n-1 do
>   p[i+1] := evalf(p[i]-f(p[i])*D(f)(p[i])/((D(f)(p[i]))^2-
1/2*f(p[i])*D(D(f))(p[i]))):
>   if evalb(SC2) then
>     if evalf(abs((p[i+1]-p[i])/p[i+1])) < tol then
>       Maplets:-Tools:-Set('TF10'=p[i+1]);
>       Maplets:-Tools:-Set('TF11'=i+1);
>       Maplets:-Tools:-Set('TB3'=evalf[dig+50](f(p[i+1])));
>       return;
>     end if;
>   end if;
>   if evalb(SC1) then
>     if evalf(abs(p[i+1]-p[i])) < tol then
>       Maplets:-Tools:-Set('TF10'=p[i+1]);
>       Maplets:-Tools:-Set('TF11'=i+1);
>       Maplets:-Tools:-Set('TB3'=evalf[dig+50](f(p[i+1])));
>       return;
>     end if;
>   end if;
>   if evalb(SC3) then
>     if evalf(abs(f(p[i+1]))) < tol then
>       Maplets:-Tools:-Set('TF10'=p[i+1]);
>       Maplets:-Tools:-Set('TF11'=i+1);
>       Maplets:-Tools:-Set('TB3'=evalf[dig+50](f(p[i+1])));
>       return;
>     end if;
>   end if;
> end do;
> Maplets:-Tools:-Set('TF10' = "Halley Method has Failed." );
> Maplets:-Tools:-Set('TF11' = n );
> Maplets:-Tools:-Set('TB3'="No approximated Solution.");
> end proc:
> function1:= proc()
>   Maplets:-Tools:-Set('ML1'=Maplets:-Tools:-Get('TF1'::algebraic));
> end proc:
>
> with(Maplets[Elements]):
> Newton1 := proc()
>   local f, p, tol, n, i, dig, SC1, SC2, SC3, maplet2;
>   f:=unapply(Maplets:-Tools:-Get('TF1'::algebraic),x);
>   p[0]:=Maplets:-Tools:-Get('TF2'::numeric);
>   tol:=Maplets:-Tools:-Get('TF3'::numeric);
>   n:=Maplets:-Tools:-Get('TF4'::posint);
>   dig:=Maplets:-Tools:-Get('TF5'::posint);
>   SC1:=Maplets:-Tools:-Get('RB1');
>   SC2:=Maplets:-Tools:-Get('RB2');
>   SC3:=Maplets:-Tools:-Get('RB3');
>   Digits:=dig;
>   for i from 1 to n do
>     p[i]:=evalf(p[i-1]-f(p[i-1])/D(f)(p[i-1]));
>     if SC2 then

```

```

>         if evalf(abs((p[i]-p[i-1])/p[i])) < tol then
>             maplet2 := Maplet(Window['Win1'] (title="The table of iterations
for Newton method",
>                 BoxLayout(vertical=true,
>                     BoxCell(Table([Index,"Iterations p", " Function Value f(p)"
],
>                         [seq([j,p[j],evalf[dig+10](f(p[j]))],j=0..i)]
),hscroll='always',vscroll='always'),
>                     BoxRow(Button("OK", CloseWindow(Win1))))
>                 )):
>             Maplets[Display](maplet2);
>             return;
>         end if;
>     end if;
>     if SC1 then
>         if evalf(abs(p[i]-p[i-1])) < tol then
>             maplet2 := Maplet(Window['Win1'] (title="The table of iterations
for Newton method",
>                 BoxLayout(vertical=true,
>                     BoxCell(Table([Index,"Iterations p", " Function Value f(p)"
],
>                         [seq([j,p[j],evalf[dig+10](f(p[j]))],j=0..i)]
),hscroll='always',vscroll='always'),
>                     BoxRow(Button("OK", CloseWindow(Win1))))
>                 )):
>             Maplets[Display](maplet2);
>             return;
>         end if;
>     end if;
>     if SC3 then
>         if evalf(abs(f(p[i]))) < tol then
>             maplet2 := Maplet(Window['Win1'] (title="The table of iterations
for Newton method",
>                 BoxLayout(vertical=true,
>                     BoxCell(Table([Index,"Iterations p", " Function Value f(p)"
],
>                         [seq([j,p[j],evalf[dig+10](f(p[j]))],j=0..i)]
),hscroll='always',vscroll='always'),
>                     BoxRow(Button("OK", CloseWindow(Win1))))
>                 )):
>             Maplets[Display](maplet2);
>             return;
>         end if;
>     end if;
> end do;
> maplet2 := Maplet(Window['Win1'] (title="The table of iterations for
Newton method",
>     BoxLayout(vertical=true,
>         BoxCell(Table([Index,"Iterations p", " Function Value f(p)"
],
>             [seq([j,p[j],evalf[dig+10](f(p[j]))],j=0..n)]
),hscroll='always',vscroll='always'),
>         BoxRow(Button("OK", CloseWindow(Win1))))
>     )):
> Maplets[Display](maplet2);
> end proc:
>

```

```

>
> Halley1 := proc()
>   local f, p, tol, n, i, dig, SC1, SC2, SC3, maplet2;
>   f:=unapply(Maplets:-Tools:-Get('TF1'::algebraic),x);
>   p[0]:=Maplets:-Tools:-Get('TF2'::numeric);
>   tol:=Maplets:-Tools:-Get('TF3'::numeric);
>   n:=Maplets:-Tools:-Get('TF4'::posint);
>   dig:=Maplets:-Tools:-Get('TF5'::posint);
>   Digits:=dig;
>   SC1:=Maplets:-Tools:-Get('RB7');
>   SC2:=Maplets:-Tools:-Get('RB8');
>   SC3:=Maplets:-Tools:-Get('RB9');
>   for i from 0 to n-1 do
>     p[i+1] := evalf(p[i]-f(p[i])*D(f)(p[i])/((D(f)(p[i]))^2-
1/2*f(p[i])*D(D(f))(p[i]))):
>     if evalb(SC2) then
>       if evalf(abs((p[i+1]-p[i])/p[i+1])) < tol then
>         maplet2 := Maplet(Window['Win2'] (title="The table of iterations
for Halley method",
>           BoxLayout(vertical=true,
>             TableCell(Table([Index,"Iterations p"," Function Value f(p)"
],
>               [seq([j,p[j],evalf[dig+10](f(p[j]))],j=0..i+1]
) ,hscroll='always',vscroll='always'),
>             BoxRow(Button("OK", CloseWindow(Win2))))
>           ):
>         Maplets[Display](maplet2);
>
>         return;
>       end if;
>     end if;
>     if evalb(SC1) then
>       if evalf(abs(p[i+1]-p[i])) < tol then
>         maplet2 := Maplet(Window['Win2'] (title="The table of iterations for
Halley method",
>           BoxLayout(vertical=true,
>             TableCell(Table([Index,"Iterations p"," Function Value f(p)"
],
>               [seq([j,p[j],evalf[dig+10](f(p[j]))],j=0..i+1]
) ,hscroll='always',vscroll='always'),
>             BoxRow(Button("OK", CloseWindow(Win2))))
>           ):
>         Maplets[Display](maplet2);
>         return;
>       end if;
>     end if;
>     if evalb(SC3) then
>       if evalf(abs(f(p[i+1]))) < tol then
>         maplet2 := Maplet(Window['Win2'] (title="The table of iterations
for Halley method",
>           BoxLayout(vertical=true,
>             TableCell(Table([Index,"Iterations p"," Function Value f(p)"
],
>               [seq([j,p[j],evalf[dig+10](f(p[j]))],j=0..i+1]
) ,hscroll='always',vscroll='always'),
>             BoxRow(Button("OK", CloseWindow(Win2))))
>           ):

```

```

>         Maplets[Display](maplet2);
>         return;
>     end if;
> end if;
> end do;
>     maplet2 := Maplet(Window['Win2'](title="The table of iterations for
Halley method",
>         BoxLayout(vertical=true,
>             BoxCell(Table([Index,"Iterations p"," Function Value f(p)"
],
>                 [seq([j,p[j],evalf[dig+10](f(p[j]))],j=0..n)
]),hscroll='always',vscroll='always'),
>             BoxRow(Button("OK", CloseWindow(Win2))))
>         )):
>     Maplets[Display](maplet2);
>
> end proc:
>
>
> function1:= proc()
>     Maplets:-Tools:-Set('ML1'=Maplets:-Tools:-Get('TF1'::algebraic));
> end proc:
>
> with(Maplets[Elements]):
>
> maplet1 := Maplet('onstartup'=Action(RunWindow('Main')),
>     Window['Main']('title'="Comparison between Newton Method and Halley
Method",
>     defaultbutton='B1', 'toolbar' = Toolbar(
>         ToolbarSeparator(),
>         ToolbarButton(" Approximate ",tooltip="Press to see the
approximated solution", Action(Evaluate ('function' =
"Newton"),Evaluate('function' = "Halley"))),
>         ToolbarSeparator(),
>         ToolbarButton(" Clear All ",tooltip="Clear all the
Entries",Action(SetOption('TF1'=""), SetOption
('TF2'=""),SetOption('TF3'=""),SetOption('TF4'=""),SetOption('TF5'=""),
>         SetOption('TF6'=""), SetOption('TF7'=""),
>         SetOption('TF10'=""),SetOption('TF11'=""),SetOption('ML1'="")) ),
>         ToolbarSeparator(),
>         ToolbarButton(" Plot ",tooltip="Click to check if there is a root
in the neighbourhood of the initial
guess",Action(RunWindow('plot1'),Evaluate('PL1'='plot(TF1,x=TF2-
10..TF2+10)'))),
>         ToolbarSeparator(),
>         ToolbarButton(" Newton Approximation ",tooltip="Press to see the
approximated solution only by Newton Method", Evaluate ('function' =
"Newton")),
>         ToolbarSeparator(),
>         ToolbarButton(" Halley Approximation ",tooltip="Press to see the
approximated solution only by Halley Method", Evaluate ('function' =
"Halley")),
>         ToolbarSeparator(),
>         ToolbarButton(" Close ",tooltip="Close the window",Shutdown()),
>         ToolbarSeparator()
>     ),
>

```

```

>
> BoxLayout (
>   BoxColumn(border=true,caption="Approximation of root by Iterative
Method",halign=left,hscroll=always,      inset=10,vscroll=always,(
>
>
> BoxLayout(border=true,caption="Input",vertical=true,halign=left,inset=10,
>   BoxRow(Label("Enter the function in x: "),
>     TextBox['TF1'](3..40,tooltip="Enter the function here, whose root is
to be approximated, e.g. x^3-27"),
>     Label("  Enter the intial guess: "),TextField['TF2'](10),
>     Label("Enter the tolerance level:"),TextField['TF3'](10)),
>   BoxRow( Label("Enter the Maximum number of
iterations:"),TextField['TF4'](10),HorizontalGlue() ,
>     Label("Enter the no. of digits for precision:"),
>     TextField['TF5'](10,tooltip="The answer will consist of no. of digit
entered here") ,
>     Label("
"),
>     HorizontalGlue() ,
>     BoxRow(Button("The Function",tooltip="Click to see whether you have
entered the intended function or
not",Evaluate('function'="function1")),MathMLViewer['ML1'](height=50)
>   ),
>
>   BoxRow(Label("")),
>
>
> BoxLayout(border=true,caption="Output",vertical=true,halign=left,inset=10,
>   BoxLayout(border=true,caption="Newton
Method",vertical=true,halign=left,inset=10,
>     BoxRow(inset=10,Label("Approximate Solution or Failure Message: "),
>       TextBox['TF6'](2..70,'editable'='false')),
>     BoxRow(inset=10,Label("Iterations taken for the approximation:
"),
>       TextBox['TF7'](1..5,'editable'='false'),Button("Stopping
Criteria",tooltip="Select the Stopping Criteria for Newton
Method",RunWindow('SC1')),Button("Check",tooltip="Gives the value of function
at approximated root",RunWindow(C1)),
>     Button("Table of
Iterations",Evaluate('function'="Newton1")),HorizontalGlue()
>   ),
>   BoxLayout(border=true,caption="Halley
Method",vertical=true,halign=left,
>     BoxRow(inset=10,Label("Approximate Solution or Failure Message:
"),
>       TextBox['TF10'](2..70,'editable'='false')),
>     BoxRow(inset=10,Label("Iterations taken for the approximation:
"),
>       TextBox['TF11'](1..5,'editable'='false'),Button("Stopping
Criteria",tooltip="Select the Stopping Criteria for Halley
Method",RunWindow('SC3')),Button("Check",tooltip="Gives the value of function
at approximated root",RunWindow(C3)),
>     Button("Table of
Iterations",Evaluate('function'="Halley1")),HorizontalGlue()
>   ),
>
> ),

```

```

>
>   BoxLayout (
>   BoxColumn(Button['B1']("Approximate",tooltip="Press to see the
approximated solution", Action(Evaluate('function' =
"Newton"), Evaluate('function' = "Halley")))),
>   BoxColumn(Button("Clear All",tooltip="Clear all the
Entries", Action(SetOption('TF1'=""), SetOption('TF2'=""), SetOption('TF3'=""), S
etOption('TF4'=""), SetOption('TF5'=""), SetOption('TF6'=""), SetOption('TF7'="
"), SetOption('TF10'=""), SetOption('TF11'=""), SetOption('ML1'="")) )),
>   BoxColumn(Button("Plot",tooltip="Click to check if there is a root in the
neighbourhood of the initial
guess", Action(RunWindow('plot1'), Evaluate('PL1'='plot(TF1, x=TF2-
5..TF2+5)')))),
>   BoxColumn(Button("Close",tooltip="Close the window", Shutdown()))
>   ),
>   BoxLayout (
>   BoxColumn(Label("Analisa Perbandingan Metode Halley dengan Metode
Newton Raphson dalam Menyelesaikan Akar-Akar Persamaan nonlinier"))
>   )
> ))
> ))),
> Window['plot1']("Graph of the given function",
> BoxColumn(vscroll=always, hscroll=always,
> BoxRow(Plotter['PL1'](width=700,height=500,tooltip="If there is no root
near your initial guess then enter the guess which is in the neighbourhood of
the root")),
> BoxRow(Button("OK",tooltip="Close the plot window", CloseWindow('plot1')))
> )
> ),
> Window['SC1']("Stopping Criteria for Newton Method", [
>   [RadioButton['RB1']('value'=true,
'group'='BG1'), MathMLViewer['ML2']('value'=MathML[Export](abs(p[n]-p[n-1]) <
epsilon))], [RadioButton['RB2']('value'=false, 'group'='BG1', tooltip="If the
root is zero try to avoid this
criteria"), MathMLViewer['ML3']('value'=MathML[Export](abs((p[n]-p[n-1])/p[n])
< epsilon))], [RadioButton['RB3']('value'=false,
'group'='BG1'), MathMLViewer['ML4']('value'=MathML[Export]((abs(f(p[n])) <
epsilon)))]),
>   [Button("Apply",
Action(Evaluate('function'="Newton"), CloseWindow('SC1'))), Button("Cancel",
CloseWindow('SC1'))]
> ]), ButtonGroup['BG1'](),
> Window['SC3']("Stopping Criteria for Halley Method", [
>   [RadioButton['RB7']('value'=true,
'group'='BG3'), MathMLViewer['ML8']('value'=MathML[Export](abs(p[n]-p[n-1]) <
epsilon))], [RadioButton['RB8']('value'=false, 'group'='BG3', tooltip="If the
root is zero try to avoid this
criteria"), MathMLViewer['ML9']('value'=MathML[Export](abs((p[n]-p[n-1])/p[n])
< epsilon))], [RadioButton['RB9']('value'=false,
'group'='BG3'), MathMLViewer['ML10']('value'=MathML[Export]((abs(f(p[n])) <
epsilon)))]),
>   [Button("Apply",
Action(Evaluate('function'="Halley"), CloseWindow('SC3'))), Button("Cancel",
CloseWindow('SC3'))]
> ]), ButtonGroup['BG3'](),
> Window['C1']("Value of the function at approximated solution",

```

```

> ["Value of the function at approximated root i.e. f(p):"],
> [" f(p)=
",TextBox['TB1'](4..70,editable=false)], [Button("OK",CloseWindow(C1))]
> ]
> ),
> Window['C2']("Value of the function at approximated solution",
> ["Value of the function at approximated root i.e. f(p):"],
> [" f(p)=
",TextBox['TB2'](4..70,editable=false)], [Button("OK",CloseWindow(C2))]
> ]
> ),
> Window['C3']("Value of the function at approximated solution",
> ["Value of the function at approximated root i.e. f(p):"],
> [" f(p)=
",TextBox['TB3'](4..70,editable=false)], [Button("OK",CloseWindow(C3))]
> ]
> )
> ):
> Maplets[Display](maplet1);

```



KARTU BIMBINGAN SKRIPSI

Nama : Chamim Stalis Y.Y
 NIM : 05510007
 Fakultas/Jurusan : Sains Dan Teknologi / Matematika
 Judul : Perbandingan Metode Newton Raphson dengan Metode Halley dalam menyelesaikan Akar-Akar Persamaan nonlinier.
 Pembimbing : I. Abdul Aziz, M.Si
 II. Ach. Nashicuddin, M.A

No	Tanggal	Materi	Tanda Tangan Pembimbing
1	29 Juni 2009	Proposal	
2	11 Agustus 2009	Bab I dan Bab II	
3	30 September 2009	Revisi Bab I,II + Bab III	
4	12 Oktober 2009	Revisi Bab III	
5	31 Oktober 2009	Revisi Bab III dan Tambahan	
6	6 November 2009	Revisi Bab III dan Bab IV	
7	3 Desember 2009	Kajian Keagamaan	
8	4 Desember 2009	Revisi Kajian Keagamaan	
9	5 Desember 2009	Revisi kajian keagamaan	
10	5 Desember 2009	ACC keseluruhan	

Mengetahui,
 Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir ,M. Pd
 NIP .19751006 200312 1 001