FUNGSI BERVARIASI TERBATAS
PADA INTERVAL $[a, b]$

SKRIPSI

Oleh:
ANAS JAMIL
NIM. 05510005

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERIMAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2009

FUNGSI BERVARIASI TERBATAS PADA INTERVAL $[a, b]$

SKRIPSI

Diajukan Kepada :
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan Dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
ANAS JAMIL
NIM. 05510005

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2009

FUNGSI BERVARIASI TERBATAS PADA INTERVAL $[a, b]$

SKRIPSI

Oleh:
ANAS JAMIL
NIM. 05510005

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji

Malang, 5 Oktober 2009

Pembimbing I

Hairur Rahman, S.Pd, M.Si
NIP. 19800429 200604 1 003

Pembimbing II

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

FUNGSI BERVARIASI TERBATAS PADA INTERVAL $[a, b]$

SKRIPSI

Oleh:
ANAS JAMIL
NIM. 05510005

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal:
9 Oktober 2009

Susunan Dewan Penguji:		Tanda Tangan
1. Penguji Utama	: Evawati Alisah, M.Pd NIP. 19720604 199903 2 001	( )
2. Ketua	: Wahyu H. Irawan NIP. 19710420 200312 1 003	( )
3. Sekretaris	: Hairur Rahman, S.Pd, M.Si NIP. 19800429 200604 1 003	( )
4. Anggota	: Abdussakir, M.Pd NIP. 19751006 200312 1 001	( )

Mengetahui dan Mengesahkan,
Dekan Fakultas Sains dan Teknologi

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

SURAT PERNYATAAN

Dengan ini, saya yang bertanda tangan di bawah ini:

NAMA : ANAS JAMIL.
NIM : 05510005.
JURUSAN : MATEMATIKA.
FAKULTAS : SAINS dan TEKNOLOGI.
JUDUL SKRIPSI : FUNGSI BERVARIASI TERBATAS PADA INTERVAL $[a, b]$.

Dengan ini saya menyatakan, dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 5 Oktober 2009
Yang membuat pernyataan

ANAS JAMIL
NIM. 05510005

MOTTO

أَمْ حَسِبْتُمْ أَن تَدْخُلُوا۟ ٱلْجَنَّةَ وَلَمَّا يَعْلَمِ ٱللَّهُ ٱلَّذِينَ جَٰهَدُوا۟ مِنكُمْ وَيَعْلَمَ ٱلصَّٰبِرِينَ ١٤٢

Artinya: "Apakah kamu mengira bahwa kamu akan masuk surga, Padahal belum nyata bagi Allah orang-orang yang berjihad diantaramu dan belum nyata orang-orang yang sabar". {Qs. Ali Imran: 142}

"Aku takut apa yang aku lakukan selama ini adalah kesia-siaan belaka, karena Allah Maha Melihat dan Mengetahui segala tindak-tanduk manusia. Hanya kepada-Nya lah segala amal kebajikan"

PERSEMBAHAN

Karya ilmiah ini penulis persembahkan:

Aba dan Umi serta segenap Keluarga terkasih H. Salim Ridwan
yang selalu menjaga, mengajari dan menyayangi penulis
semenjak masih kecil sampai saat ini.
Serta Kakak tersayang:
Yu Uyun, Yu Halim dan Kak Syaihu.
Lantunan terima kasih serta iringan do'a selalu menyertai Beliau
yang bergitu berarti

KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللهِ الرَّحْمنِ الرَّحِيْمِ

Syukur alhamdulillah kami panjatkan kehadirat Allah SWT, yang telah melimpahkan rahmat dan hidayahnya kepada kami sehingga dapat menyelesaikan skripsi dengan judul "**Fungsi Bervariasi Terbatas Pada Interval** $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$" dengan baik.

Shalawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada junjungan kita Nabi Besar Muhammad SAW. yang telah menunjukkan kita dari jalan yang gelap menuju jalan yang diridhoi Allah SWT. yaitu Ad-dinul Islam.

Dalam penulisan skripsi ini, kami menyadari bahwa tidak akan mendapatkan hasil yang baik tanpa iringan do'a dan besarnya motivasi, dukungan, bimbingan, bantuan, dorongan, semangat, spirit, pemikiran dari berbagai pihak. Maka dalam kesempatan ini, penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman B. Sumitro, SU., DSc., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang beserta stafnya.
3. Abdussakir, M.Pd selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang sekaligus selaku Dosen Pembimbing II, yang telah memberikan pengarahan dalam menganalisis, memberikan penjelasan tentang integrasi antara ayat-ayat yang terkandung dalam Al-Qur'an dan Hadits dengan fungsi bervariasi terbatas pada

interval $[a, b]$, serta telah memaparkan dengan jelas jawaban dari semua pertanyaan yang penulis ajukan dalam menyelesaikan skripsi ini.

4. Hairur Rahman, M.Si selaku Dosen Pembimbing Skripsi, yang telah memberikan pengarahan dalam menganalisis data dan membuktikan teorema, lemma, serta corollary, memberikan bimbingan dalam menyelesaikan soal-soal tentang fungsi bervariasi terbatas pada interval $[a, b]$, serta telah memaparkan dengan jelas jawaban dari semua pertanyaan yang penulis ajukan dalam menyelesaikan skripsi ini.
5. Seluruh dosen di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah menyampaikan ilmunya dengan sepenuh hati.
6. Keluarga tercinta yang senantiasa mendoakan dan memberikan dorongan kepada penulis agar mencapai kesuksesan.
7. Saudara dan sahabat seperjuangan, mahasiswa Jurusan Matematika Angkata 2005 Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah memberikan sumbangsih berupa masukan, pemikiran, dan ide demi kelancaran selama penyelesaian skripsi berlangsung.
8. Serta kepada sahabat-sahabat seperjuangan di TPQ NURUL HUDA yang telah bersedia mendengarkan semua keluhan dan selalu membantu dalam menyelesaikan skripsi ini, dan pihak–pihak lain yang selalu membantu.

Semoga Allah SWT. membalas kebaikan mereka semua. Keterbatasan ilmu yang dimiliki penulis, menjadi celah timbulnya kekurangan, jauh dari sempurna, dan kesalahan. Oleh karena itu, penulis menerima dan mengharapkan masukan, saran, kritik, dan teguran dari semua evaluator dan pembaca demi kesempurnaan skripsi ini. Semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat dan dapat menjadi literatur penambah wawasan dalam aspek pengajaran matematika dan khususnya dalam bidang analisis real yang berkaitan dengan masalah fungsi. Amiin.

Malang, 5 Oktober 2009

Penulis.

DAFTAR ISI

BAB II : KAJIAN TEORI

BAB III : PEMBAHASAN

BAB IV : PENUTUP

DAFTAR PUSTAKA

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Jamil, Anas. 2009. **Fungsi Bervariasi Terbatas pada Interval $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$**. Skripsi, Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: Hairur Rahman, S.Pd, M.Si. dan Abdussakir, M.Pd.

Kata Kunci: Fungsi, interval, fungsi bervariasi terbatas.

Dalam analisis matematika, suatu fungsi bervariasi terbatas juga dikenal sebagai fungsi BV (*bounded variation*), adalah fungsi bernilai real yang total variasi adalah terbatas. Fungsi ini pertama kali diperkenalkan oleh Camille Jordan (Jordan 1881) untuk fungsi dengan satu variabel. Kemudian oleh matematikawan setelahnya, konsep ini banyak digunakan untuk pengembangan dan juga diterapkan untuk mencari solusi berbagai pemasalahan dalam matematika. Penelitian ini dilakukan dengan tujuan untuk mendeskripsikan sifat dan struktur fungsi bervariasi terbatas yaitu dengan memaparkan dan menjelaskan definisi, menganalisis dan membuktikan kebenaran teorema-teorema yang berlaku dalam fungsi bervariasi terbatas pada interval $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$.

Definisi fungsi bervariasi terbatas diyatakan dengan,
misalkan $f : [a,b] \longrightarrow R$ suatu fungsi, $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ partisi dari $[a,b]$; $\Delta_i f = f(x_i) - f(x_{i-1})$; $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$. Jika ada suatu bilangan real $M > 0$ sehingga

$$V(f; P; [a,b]) = \sum_{i=1}^{n} |\Delta_i f| \leq M \text{ untuk setiap } P \in \varphi[a,b]$$

Maka fungsi f dikatakan bervariasi terbatas pada $[a,b]$. P disini merupakan domain yang berupa partisi dari suatu himpunan yang berbentuk interval. Adapun kategori teorema-teorema yang dibahas, yaitu fungsi bervariasi terbatas dengan bentuk dan partisi yang berbeda, dan fungsi bervariasi terbatas yang merupakan pengembangan dari bentuk fungsi yang lain.

BAB I
PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Ilmu pengetahuan dalam perkembangannya mempunyai arti yang sangat penting pada pola berfikir manusia. Dengan kelebihan berupa akal dan hati, manusia mampu membedakan baik atau buruk semua hal yang dilakukan. Mengingat keberadaan manusia sebagai khalifah di muka bumi yaitu suatu kaum yang akan menggantikan satu sama lain, ukuran demi ukuran, dan generasi demi generasi, tentunya ilmu pengetahuan berperan penting dalam rangka menjalankan fungsi kekhalifahan, (Kasir, 2000: 104). Rasulullah SAW. bersabda:

طلب العـــلم فريضـــة عـــلى كل مســـلم

Artinya: "menuntut ilmu adalah wajib bagi setiap orang Islam".

Hadist di atas menegaskan bahwa Islam mewajibkan umatnya untuk menuntut ilmu. Suatu perbuatan tanpa berlandaskan ilmu pengetahuan hanya akan membuahkan kesesatan dan akan menjurus pada perbuatan yang merusak. Padahal segala perbuatan manusia semasa hidup di dunia akan dimintai pertanggungjawabnnya di akhirat kelak. Oleh karenanya, segala tingkah laku dan perbuatan yang hendak dilakukan haruslah berlandaskan ilmu pengetahuan. Hal ini sebagaimana dinyatakan surat Al-Israa' ayat 36 yang berbunyi,

وَلَا تَقْفُ مَا لَيْسَ لَكَ بِهِۦ عِلْمٌ ۚ إِنَّ ٱلسَّمْعَ وَٱلْبَصَرَ وَٱلْفُؤَادَ كُلُّ أُو۟لَـٰٓئِكَ كَانَ عَنْهُ مَسْـُٔولًا ﴿٣٦﴾

Artinya: "Dan janganlah kamu mengikuti apa yang kamu tidak mempunyai pengetahuan tentangnya. Sesungguhnya pendengaran, penglihatan dan hati, semuanya itu akan diminta pertanggungan jawabnya".

اطلبـوا العـلم ولـو بالـصـــين

Artinya: "Tuntutlah ilmu walaupun sampai di negreri China".

Dalam hadist di atas, tentunya Rasulullah tidak menganjurkan umatnya untuk belajar agama di China, melainkan belajar ilmu alam (*sains*). Karena kala itu China menjadi pusat peradapan dunia dan bukan pusat ilmu agama Islam. Dengan demikian jelaslah bahwa ilmu pengetahuan yang dimaksud pada hadist di atas adalah ilmu pengetahuan dalam arti luas. Ilmu pengetahuan yang berguna bagi manusia, mencakupi ilmu agama dan ilmu alam (*sains*). Ilmu agama berfungsi sebagai sebuah jalan dalam mendekatkan diri kepada Allah SWT, Tuhan alam semesta sedangkan ilmu alam (*sains*) berfungsi sebagai bukti tentang keberadaan-Nya. sebagaimana firman Allah SWT. yang tertuang dalam Al-Qur'an dalam surat Al-Jaatsyiah ayat 13 sebagai berikut:

وَسَخَّرَ لَكُم مَّا فِي ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَمَا فِي ٱلْأَرْضِ جَمِيعًا مِّنْهُۚ إِنَّ فِي ذَٰلِكَ لَأَيَٰتٍ لِّقَوْمٍ يَتَفَكَّرُونَ ١٣

Artinya: "Dan Dia telah menundukkan untukmu apa yang di langit dan apa yang di bumi semuanya, (sebagai rahmat) daripada-Nya. Sesungguhnya pada yang demikian itu benar-benar terdapat tanda-tanda (kekuasaan Allah) bagi kaum yang berfikir".

Ayat di atas menegaskan bahwa fenomena-fenomena alam yang terjadi selama ini merupakan suatu bukti terhadap kekuasaan Allah. Dengan mempelajari tanda-tanda Allah di dalam alam, manusia akan dapat menyingkap keterkaitan seluruh bagian alam semesta dan kesatuan yang tersembunyi di belakang dunia yang beraneka ragam ini, yang pada gilirannya akan membimbing kepada sang Pencipta.

Matematika merupakan sebuah cabang dari ilmu alam (*sains*) memiliki peran penting dalam kemajuan ilmu-ilmu lain. Oleh kenyataan itulah maka matematika disebut sebagai pelayan dan sekaligus sebagai raja *sains*. Sebagai pelayan, matematika adalah ilmu dasar yang mendasari dan melayani berbagai ilmu pengetahuan lain. Sebagai raja, perkembangan matematika tak tergantung pada ilmu-ilmu lain. Banyak cabang matematika yang dulu biasa disebut matematika murni, dikembangkan oleh beberapa matematikawan yang mencintai dan belajar matematika hanya sebagai hobi tanpa memperdulikan fungsi dan manfaatnya untuk ilmu-ilmu lain. Dengan perkembangan teknologi, banyak cabang-cabang matematika murni yang ternyata kemudian hari bisa diterapkan dalam berbagai ilmu pengetahuan dan teknologi mutakhir.

Analisis matematika adalah salah satu cabang dari matematika selain aritmatika, statistika, aljabar dan geometri. Analisis matematika modern tidak menekankan pada perhitungan dan rumus atau aturan, tetapi pembahasannya didasarkan pada pengembangan konsep dasar dan teori dengan menggunakan penalaran untuk memperoleh prinsip-prinsip yang berupa definisi, aksioma, lemma, corollary, dan teorema-teorema beserta pembuktiannya. Klasifikasi materi dan pendekatannya bersifat abstrak dan intuitif untuk memahami dan mengembangkan metode-metode dan teknik-teknik yang dipergunakan dalam bukti-bukti sehingga suatu pemahaman yang baik sangat diperlukan untuk kesuksesan dalam mempelajari analisis matematika. Selain itu, analisis mendominasi wilayah dari matematika. Karena ide-idenya merupakan dasar dan keutamaan yang tidak hanya didefinisikan saja, tetapi artinya dapat diterima secara universal, (Muthmainnah, 2008: 2).

Salah satu konsep dasar yang menjadi pembahasan dalam analisis matematika adalah fungsi. Parzynski (1982: 2) menyatakan bahwa sebuah fungsi adalah suatu himpunan tak kosong X dan Y, dan aturan korespondensi f yang memasangkan masing-masing elemen $x \in X$ dengan sebuah elemen $y \in Y$. $f(x)$ adalah elemen y yang dipasangkan dengan sebuah elemen $x \in X$ yang diberikan. Himpunan X disebut daerah asal (*domain*) fungsi dan himpunan $f(x) \subseteq y$, yang didefinisikan dengan

$$f(x) = \{y \in Y | y = f(x) \text{ untuk } x \in X\}$$

disebut dengan daerah hasil (*range*) fungsi.

Lebih lanjut Parzynski (1982: 59) menyatakan bahwa sebuah fungsi dikatakan terbatas asalkan terdapat sebuah bilangan real $M > 0$ sehingga $|f(x)| \leq M$ untuk setiap $x \in A$ dengan bilangan real M merupakan konstanta sedangkan $f(x)$ di dalam sebuah interval. Apabila $f(x) \leq M$ untuk semua x di dalam interval maka$f(x)$ dibatasi di atas (*bounded above*) sedangkan M adalah batas atas (*upper bound*). Apabila $f(x) \geq M$ untuk semua x di dalam interval maka $f(x)$ dibatasi di bawah (*bounded below*) sedangkan M adalah batas bawah (*lower bound*).

Kekontinuan adalah konsep yang paling penting dalam matematika analisis, dan aplikasi-aplikasinya menduduki suatu peranan pusat dalam materi panjang selang suatu interval. Secara intuitif fungsi kontinu dalam matematika adalah fungsi yang bila daerah asal (*domain*) mengalami perubahan kecil maka berakibat perubahan kecil pula pada daerah hasil (*range*). Penjelasan intuitif ini dapat diberikan oleh kenyataan bahwa fungsi kontinu adalah fungsi yang grafiknya dapat digambar tanpa mengangkat pencil dari kertas. James Stewart (2001: 116) menyatakan bahwa sebuah fungsi dikatakan kontinu pada sebuah bilangan a jika $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Difinisi di atas secara implisit mengisyaratkan tiga hal jika f kontinu di a:

1. $f(x)$ terdefinisi (yaitu a berada di daerah asal f)
2. $\lim_{x\to a} f(x)$ ada (sehingga f haruslah terdefinisi pada suatu selang terbuka yang memuat a)
3. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Kekontinuan di atas merupakan kekontinuan fungsi pada suatu titik. Jelas karena daerah asal (*domain*) dari fungsi tersebut hanya sebuah bilangan dan bukan berupa selang. Kekontinuan pada suatu selang berarti kekontinuan di setiap titik dari selang tersebut. Kemudian selang tersebut kita namakan selang terbuka (a, b). Sedangkan pada selang tertutup, kita menyebut f kontinu pada $[a, b]$ jika ia kontinu di setiap titik dari (a, b) dan jika $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ dan $\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$.

Pada dasarnya fungsi bervariasi terbatas merupakan fungsi yang kontinu di titik-titik pada sebuah selang. Dengan demikian fungsi bervariasi terbatas didefinisikan sebagai sebuah fungsi kontinu dengan daerah asal (*domain*) berupa partisi dari selang $[a, b]$. Namun definisi di atas merupakan definisi secara umum. Sebuah definisi menyatakan bahwa dimisalkan $f : [a, b] \longrightarrow R$ suatu fungsi,

$P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ partisi dari $[a, b]$;$\triangle_k f = f(x_k) - f(x_{k-1})$, $\triangle_k x = x_k - x_{k-1}$ dan jika ada suatu bilangan real $M > 0$ sehingga

$$V(f; P; [a, b]) = \sum_{k=1}^{n} | \triangle_k f | \leq M \text{ untuk setiap } P \in \varphi[a, b],$$

maka fungsi f dikatakan bervariasi terbatas pada $[a, b]$, (Hutahaen, 1989: 1.3).

Dalam analisis matematika, suatu fungsi bervariasi terbatas juga dikenal sebagai fungsi BV (*bounded variasi*), adalah fungsi bernilai real yang total variasi adalah terbatas. Fungsi ini pertama kali diperkenalkan oleh Camille Jordan (Jordan 1881) untuk fungsi dengan satu variabel. Kemudian oleh matematikawan setelahnya, konsep ini banyak digunakan untuk pengembangan dan juga diterapkan untuk mencari solusi berbagai pemasalahan dalam matematika. Misalnya penerapan Fungsi Bervariasi Terbatas untuk menentukan solusi dari masalah persamaan Cauchy oleh Conway dan Smoller pada tahun 1966.

Selanjutnya, sebuah fungsi bervariasi terbatas memiliki sifat serta struktur yang membedakannya dengan fungsi yang lainnya. Oleh karena itu, penulis dalam skripsi ini mengambil judul tentang: FUNGSI BERVARIASI TERBATAS PADA INTERVAL $[a, b]$.

1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian skripsi ini adalah bagaimanakah sifat dan struktur fungsi bervariasi terbatas?

1.3. Tujuan Penelitian

Tujuan penulis mengambil judul ini ialah dapat mendeskripsikan sifat dan struktur fungsi bervariasi terbatas.

1.4. Manfaat Penelitian

Bagi Penulis:

1. Sebagai kontribusi terhadap pengembangan keilmuan, khususnya dalam bidang analisis.
2. Melatih berfikir kritis dan memecahkan masalah sesuai dengan bidang matematika.

Bagi Instansi:

1. Meningkatkan peran serta instansi khususnya fakultas sains dan teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang dalam pengembangan wawasan keilmuan matematika.
2. Sumbangan pemikiran sebagai kontribusi nyata terhadap fakultas sains dan teknologi.

Bagi Pembaca:

1. Khususnya bagi Jurusan Matematika dapat memberikan masukan dalam memahami Analisis Real lebih lanjut.
2. Sebagai bahan kejian keilmuan untuk menambah wawasan keilmuan.

1.5. Batasan Masalah

Batasan masalah pada pembahasan kajian fungsi bervariasi terbatas ini hanya terbatas pada bilangan real, yaitu daerah asal (*domain*) pada interval $[a, b]$.

1.6. Metode Penelitian

Skripsi ini merupakan sebuah penelitian kepustakaan (*library reseach*) yaitu melakukan penelitian untuk memperoleh data-data dan informasi menggunakan teknik dokumenter, artinya data-data sumber penelitian dikumpulkan dari dokumen-dokumen, baik yang berupa buku, artikel, jurnal, majalah, maupun karya ilmiah lainnya yang berkaitan dengan topik atau permasalahan yang diteliti (Azwar, 2004: 5).

Adapun metode penelitian penulis, yaitu suatu metode pengumpulan data yang berupa definisi-definisi dan teorema-teorema yang dilakukan dengan cara mempelajari buku-buku teks sebagai sumber data yang mengandung materi-materi yang banyak berhubungan dengan analisis matematika tentang teori fungsi bervariasi terbatas. Kemudian penulis menganalisis data-data yang diperoleh tersebut dengan menentukan konsep yang diperoleh dari literatur.

Adapun teknik analisis dengan metode kualitatif, yaitu metode yang menyebutkan definisi-definisi, lalu pengumpulan teorema-teorema untuk dibuktikan kebenarannya, setelah itu mengambil contoh-contoh yang berkaitan fungsi bervariasi terbatas, menyelesaikan contoh-contoh dengan menerapkan teorema-teorema yang telah dibuktikan kebenarannya. Kemudian langkah terakhir menarik kesimpulan.

1.7. Sistematika pembahasan

Untuk mempermudah pembaca memahami tulisan ini, penulis membagi tulisan ini kedalam empat bab sebagai berikut:

BAB I : PENDAHULUAN. Dalam bab ini dijelaskan latar belakang masalah, permasalahan, tujuan penelitian, manfaat penelitian, kerangka teori, metode penelitian dan sistematika pembahasan.

BAB II: KAJIAN TEORI. Dalam bab ini dikemukakan hal-hal yang mendasari dalam teori yang dikaji, yaitu konsep supremum suatu himpunan real, limit fungsi, fungsi kontinu, fungsi monoton dan turunan (*derivatife*) fungsi.

BAB III: PEMBAHASAN. Dalam bab ini dipaparkan pembahasan mengenai sifat dan struktur fungsi bervariasi terbatas. Pembuktian terhadap teorema-teorema yang bersangkutan dengan disertai contoh.

BAB IV: PENUTUP. Dalam bab ini dikemukakan kesimpulan akhir penelitian dan beberapa saran.

BAB II

KAJIAN TEORI

Pembahasan fungsi bervariasi terbatas tidak lepas dari pembahasan tentang Konsep supremum suatu himpunan bilangan real, limit fungsi, fungsi kontinu, fungsi monoton, turunan (*derivative*) fungsi. Dalam kajian teori ini akan disajikan pokok-pokok bahasan berupa definisi dan teorema yang akan digunakan untuk menunjang pembahasan dalam bab III nanti.

2.1. Konsep Supremum Suatu Himpunan Real

***Definisi* 2.1.1. (Definisi Himpunan Terbatas)** Diberikan subset tak kosong S ⊂ R.

a. Himpunan S dikatakan terbatas ke atas (*bounded above*) jika terdapat suatu bilangan $u \in R$ sedemikian hingga $s \leq u$ untuk semua $s \in S$. Setiap bilangan u seperti ini disebut dengan batas atas (*upper bound*) dari S.

b. Himpunan S dikatakan terbatas ke bawah (*bounded below*) jika terdapat suatu bilangan $w \in R$ sedemikian hingga $w \leq s$ untuk semua $s \in S$. Setiap bilangan w seperti ini disebut dengan batas bawah (*lower bound*) dari S.

c. Suatu himpunan dikatakan terbatas (*bounded*) jika terbatas ke atas dan terbatas ke bawah. Jika tidak, maka dikatakan tidak terbatas (*unbounded*).

(Riyanto, 2008: 18).

Contoh 2.1.2. Himpunan $S \coloneqq \{x \in R: x > 2\}$ merupakan himpunan terbatas ke bawah, sebab bilangan 2 dan sebarang bilangan kurang dari 2 merupakan batas bawah dari S. Himpunan ini tidak mempunyai batas atas, sehingga himpunan ini tidak terbatas ke atas. Jadi, S merupan himpunan yang tidak terbatas.

Istilah supremum biasa dipakai untuk sebuah bilangan yang menjadi batas atas terkecil dalam suatu himpunan. Demikian juga dengan istilah infimum biasa dipakai sebuah bilangan yang menjadi batas bawah terbesar. Dengan demikian, Konsep ini berlaku pada sebuah himpunan yang membentuk suatu interval yang terbatas, baik itu terbatas ke atas atau terbatas ke bawah. Berikut definisi infimum dan supremum:

***Definisi* 2.1.3. (Supremum dan Infimum)** Diberikan S subset tak kosong R.

a. Jika S terbatas ke atas, maka suatu bilangan u disebut supremum (batas atas terkecil) dari S jika memenuhi kondisi berikut:

   1) u merupakan batas atas S, dan

   2) jika v adalah sebarang batas atas S, maka $u \leq v$.

   Ditulis $u = \sup S$.

b. Jika S terbatas ke bawah, maka suatu bilangan u disebut infimum (batas bawah terbesar) dari S jika memenuhi kondisi berikut:

   1) w merupakan batas bawah S, dan

   2) jika t adalah sebarang batas bawah S, maka $t \leq w$.

   Ditulis $w = \inf S$.

Mudah untuk dilihat bahwa jika diberikan suatu himpunan S subset dari R, maka hanya terdapat satu supremum, atau supremumnya tunggal. Juga dapat ditunjukkan bahwa jika u' adalah sebarang batas atas dari suatu himpunan tak kosong S, maka sup $S \leq u'$, sebab sup S merupakan batas atas terkecil dari S, (Riyanto, 2008: 18).

Contoh 2.1.4. Himpunan $S: \{x \in R: 2 \leq x \leq 4\}$ adalah terbatas ke atas dan ke bawah, sebab bilangan 2 dan sebarang bilangan kurang dari 2 merupakan batas bawah dari S sedangkan bilangan 4 dan sebarang bilangan lebih dari 4 merupakan batas atas dari S. Infimum dari himpunan ini adalah 2 sedangkan supremumnya adalah 4.

***Lemma* 2.1.5.** Suatu bilangan u merupakan supremum dari subset tak kosong $S \subset R$, jika dan hanya jika u memenuhi kondisi berikut:

a) $s \leq u$ untuk semua $s \in S$,

b) jika $v < u$, maka terdapat $s' \in S$ sedemikian hingga $v < s'$,

(Riyanto, 2008: 19).

Bukti:

a) $\Rightarrow$ Misal S sebuah himpunan terbatas ke atas dengan $s \in S$ dan $u \in R$. Diketahui u adalah supremum dari S dan ditulis $u = \sup S$. Oleh karena $s \in S$ sedangkan u merupakan batas atas S, sehingga berlaku $s \leq u$ untuk semua $s \in S$.

$\Leftarrow$ Misal $u \in R$. diketahui $s \leq u$ untuk semua $s \in S$. Dengan demikian S adalah terbatas ke atas dengan u adalah batas atasnya. Oleh karena u adalah sebarang batas atas S sedemikian hingga berlaku $s \leq u$ untuk semua $s \in S$. Dengan demikian sesuai definisi maka u adalah supremum dari S ditulis $u = \sup S$.

b) ⇒ Diketahui u adalah supremum dari S, sehingga berlaku $s \leq u$ untuk $s \in S$. Jika S terbatas ke bawah maka terdapat v sehingga berlaku $v \leq s$. Ambil $s' \in S$ sedemikian hingga $s' \leq u$. karena u adalah supremum dari S dan v adalah sebarang batas bawah dari S maka

$$v \leq s' \leq u$$

Sehingga berlaku $v < s'$ untuk $s' \in S$.

⇐ Misal S adalah himpunan terbatas. Diketahui bahwa jika $v < u$, maka terdapat $s' \in S$ sedemikian hingga $v < s'$. Dengan demikian berarti v adalah sebarang batas bawah dan u adalah sebarang batas atas dari S, sedemikian hingga berlaku $v \leq s'$ dan $s' \leq u$. Oleh karena u adalah sebarang batas atas dari S dan memenuhi $s' \leq u$ untuk $s' \in S$, sesuai definisi maka u adalah supremum dari S.

***Lemma* 2.1.6.** Diberikan subset tak kosong $S \subset R$,

a) $u = \sup S$ jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $s_1 \in S$ sedemikian hingga $u_1 - \varepsilon < s$.

b) $w = \inf S$ jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $s_2 \in S$ sedemikian hingga $u_2 - \varepsilon < s$.

Bukti:

a) ⇒Diketahui $u = \sup S$ dan diberikan $\varepsilon > 0$. Karena $u - \varepsilon < u$, maka $u - \varepsilon$ bukan merupakan batas atas S. Oleh karena itu, terdapat $s_1 \in S$ yang lebih besar dari $u - \varepsilon$, sehingga $u - \varepsilon < s_1$.

⇐Diketahui $u_1 - \varepsilon < s$. Jika u merupakan batas atas S, dan jika memenuhi $v < u$, maka diambil $\varepsilon := u - v$. Maka jelas $\varepsilon > 0$, dan diperoleh bahwa $u = \sup S$.

(Riyanto, 2008: 19).

b) ⇒Diketahui $u = \inf S$ dan diberikan $\varepsilon > 0$. Karena $u < u + \varepsilon$, maka $u + \varepsilon$ merupakan batas bawah S. Oleh karena itu, terdapat $s_2 \in S$ yang lebih kecil dari $u + \varepsilon$, sehingga $u_2 + \varepsilon > s$

⇐Diketahui $u_2 + \varepsilon > s$. Jika u merupakan batas bawah S, dan jika memenuhi $v > u$, maka diambil $\varepsilon := u + v$. Maka jelas $\varepsilon > 0$, dan diperoleh bahwa $u = \inf S$.

Contoh 2.1.7.

a) Jika suatu himpunan tak kosong S_1 mempunyai elemen sebanyak berhingga, maka dapat dilihat bahwa S_1 mempunyai elemen terbesar, namakan u, dan elemen terkecil, namakan w. Maka $u = \sup S_1$ dan $w_1 = \inf S$, dan keduanya merupakan elemen S_1.

b) Himpunan $S_2 := \{x: 0 \leq x \leq 1\}$ mempunyai batas atas 1. Akan dibuktikan bahwa 1 merupakan supremumnya. Jika $v < 1$, maka terdapat $s' \in S_2$ sedemikian hingga $v < s'$. Oleh karena itu, v bukan merupakan batas atas S_2 dan karena v merupakan sebarang $v < 1$, maka dapat disimpulkan bahwa $\sup \mathrm{S}_2 = 1$. Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan bahwa $\inf \mathrm{S}_2 = 0$.

(Riyanto, 2008: 20).

Akan dibuktikan bahwa 0 merupakan infimumnya. Jika $w > 0$, maka terdapat $s' \in S_2$ sedemikian hingga $w > s'$. Oleh karena itu, w bukan merupakan batas bawah S_2 dan karena w merupakan sebarang $w > 0$, maka dapat disimpulkan bahwa $\inf \mathrm{S}_2 = 0$.

Menurut Riyanto (2008: 20) subset tak kosong R yang terbatas ke atas pasti mempunyai batas atas terkecil. Sifat ini disebut Sifat Lengkap R dan sering juga disebut dengan Aksioma Supremum R. Berikut sifat lengkap dan beberapa akibatnya:

***Sifat Lengkap R* 2.1.8.**

Jika subset tak kosong $S \subset R$ terbatas ke atas, maka supremumnya ada, yaitu terdapat $u \in R$ sedemikian hingga $u = \sup S$.

***Akibat* 2.1.9.** Jika subset tak kosong $S \subset R$ terbatas ke bawah, maka infimumnya ada, yaitu terdapat $w \in R$ sedemikian hingga $w = \inf S$.

Bukti: Misalkan himpunan T terbatas ke bawah, $T \subset R$. Dibentuk himpunan $S = \{-t : t \in T\}$, maka S terbatas ke atas dan tidak kosong. Menurut Aksioma Supremum, $u = \sup S$ ada, namakan $u = \sup S$, maka $-u = \inf \mathrm{T}$, (Riyanto, 2008: 20).

Contoh 2.1.10. Diberikan himpunan $S \coloneqq \{x \in R : x \geq 2\}$, maka S terbatas ke bawah. Bilangan 2 adalah infimum dari himpunan S sedangkan sebarang bilangan yang kurang dari 2 disebut batas atas.

***Teorema* 2.1.11.** Diberikan subset tak kosong $S \subset R$ yang terbatas ke atas dan sebarang $a \in R$. Didefinisikan himpunan $a + S := \{a + s : s \in S\}$, maka berlaku

$$\sup(a + S) = a + \sup(S)$$

Bukti: Jika diberikan $u := \sup S$, maka $x \leq u$ untuk semua $x \in S$, sehingga $a + x \leq a + u$. Oleh karena itu, $a + u$ merupakan batas atas dari himpunan $a + S$. Akibatnya $\sup(a + S) \leq a + u$. Selanjutnya, misalkan v adalah sebarang batas atas $a + S$, maka $a + x \leq v$ untuk semua $x \in S$. Akibatnya $x \leq v - a$ untuk semua $x \in S$, sehingga $v - a$ merupakan batas atas S. Oleh karena itu, $u = \sup S \leq v - a$. Karena v adalah sebarang batas atas $a + S$, maka dengan mengganti v dengan $u = \sup S$, diperoleh $a + u \leq \sup(a + S)$. Di lain pihak diketahui $\sup(a + S) \leq a + u$. Akibatnya terbukti bahwa

$$\sup(a + S) = a + u = a + \sup S$$

(Riyanto, 2008: 21).

Contoh 2.1.12. Diberikan himpunan tak kosong X dan $f: X \to R$ mempunyai range terbatas di R. Jika $a \in R$, tunjukkan bahwa $\sup\big(a + f(x)\big) = a + \sup\big(f(x)\big)$ untuk $x \in X$.

Penyelesaian: Jika diberikan $u := \sup f(x)$, maka terdapat $y \in f(x)$ sedemikian hingga berlaku $y \leq u$ sehingga $a + y \leq a + u$. Oleh karena, $a + u$ batas atas himpunan $a + y$. Akibatnya $\sup(a + y) \leq a + u$. Selanjutnya, misalkan v adalah sebarang batas atas $a + f(x)$, maka $a + y \leq v$ untuk $y \in f(x)$. Akibatnya $y \leq v - a$ untuk $y \in f(x)$, sehingga $v - a$ batas atas dari $f(x)$. Oleh karena itu, $u = \sup f(x) \leq v - a$. Karena v adalah sebarang batas atas $a + f(x)$, maka dengan mengganti v dengan $u = \sup\big(f(x)\big)$, diperoleh $a + u \leq \sup\big(a + f(x)\big)$. Di lain pihak diketahui $\sup\big(a + f(x)\big) \leq a + u$. Akibatnya terbukti bahwa

$$\sup\big(a + f(x)\big) = a + u = a + \sup\big(f(x)\big)$$

***Teorema* 2.1.13.** Diberikan subset tak kosong $S \subset R$ yang terbatas dan sebarang bilangan real $a > 0$. Didefinisikan himpunan $aS := \{as : s \in S\}$, maka berlaku:

$$\inf(aS) = a \inf(S)$$

Bukti: Tulis $u = \inf aS$ dan $v = \inf S$. Akan dibuktikan bahwa $u = av$.

Karena $u = \inf aS$, maka $u \leq as$, untuk setiap $s \in S$. Karena $v = \inf S$, maka $v \leq s$ untuk setiap $s \in S$. Akibatnya $av \leq as$ untuk setiap $s \in S$. Berarti *av* merupakan batas bawah aS. Karena u batas bawah terbesar aS, maka $av \leq u$. Karena $u \leq as$ untuk setiap $s \in S$, maka diperoleh $\frac{u}{a} \leq s$ untuk setiap $s \in S$ (sebab $a > 0$). Karena $v = \inf S$, maka $\frac{u}{a} \leq v$ yang berakibat $u \leq av$. Di lain pihak diketahui $av \leq u$. Akibatnya $u = av$. Jadi, terbukti bahwa $\inf(aS) = a \inf(S)$.

(Riyanto, 2008: 22).

Contoh 2.1.14. Diberikan himpunan tak kosong X dan $f: X \to R$ mempunyai range terbatas di R. Jika $a \in R$, tunjukkan bahwa $\inf\big(a * f(x)\big) = a * \inf\big(f(x)\big)$ untuk $x \in X$.

Penyelesaian: Tulis $u = \inf\big(a * f(x)\big)$ dan $v = \inf\big(f(x)\big)$. Akan dibuktikan bahwa $u = av$. Karena $u = \inf\big(a * f(x)\big)$, maka $u \leq ay$, untuk setiap $y \in f(x)$. Karena $v = \inf f(x)$, maka $v \leq y$ untuk setiap $y \in S$. Akibatnya $av \leq a\, f(x)$. Berarti *av* merupakan batas bawah $a\, f(x)$. Karena u batas bawah terbesar $a\, f(x)$, maka $av \leq u$. Karena $u \leq ay$ untuk setiap $y \in f(x)$, maka diperoleh $\frac{u}{a} \leq y$ untuk setiap $y \in f(x)$ (sebab $a > 0$). Karena $v = \inf f(x)$, maka $\frac{u}{a} \leq v$ yang berakibat $u \leq av$. Di lain pihak diketahui $av \leq u$. Akibatnya $u = av$. Jadi, terbukti bahwa

$$\sup\big(a * f(x)\big) = a * \sup\big(f(x)\big)$$

***Teorema* 2.1.15.** Jika A dan B subset tak kosong R dan memenuhi $a \leq b$ untuk semua $a \in A$ dan $b \in B$, maka $\sup A \leq \inf B$.

Bukti: Diambil sebarang $b \in B$, maka $a \leq b$ untuk semua $a \in A$. Artinya bahwa b merupakan batas atas A, sehingga sup $A \leq b$. Selanjutnya, karena berlaku untuk semua $b \in B$, maka sup A merupakan batas bawah B. Akibatnya diperoleh bahwa $\sup A \leq \inf B$. (Riyanto, 2008: 22).

Contoh 2.1.16. Diberikan himpunan $A \coloneqq \{x \in N: x \geq 5\}$ dan $B \coloneqq \{x \in N: x \leq 5\}$ dimana $A, B \subseteq N$. Bilangan 5 adalah batas atas terkecil dari A, ditulis $5 = \sup A$, di sisi lain bilangan 5 adalah batas bawah terbesar dari B, ditulis $5 = \inf B$. Oleh karena sebarang $x \in A \leq x \in B$, maka berakibat $\sup A \leq \inf B$.

2.2. Limit Fungsi

***Definisi* 2.2.1. (Limit Fungsi)** Limit f adalah L (suatu bilangan real) untuk x mendekati a, ditulis $\lim_{x \to a} f(x) = L$, dengan ketentuan setiap bilangan $\varepsilon > 0$ ada suatu bilangan $\delta > 0$ sedemikian hingga jika $0 < |x - a| < \delta$ maka $|f(x) - L| < \varepsilon$, (Parzynski, 1982: 65).

Contoh 2.2.2. Buktikan bahwa $\lim_{x \to 3}(2x - 1) = 5$.

Penyelesaian: Misal diberikan $\varepsilon > 0$. Akan ditemukan $\delta > 0$ sedemikian hingga jika $0 < |x - 3| < \delta$ maka $|f(x) - L| < \varepsilon$, dimana $2x - 1 = 5$. Sekarang

$$|f(x) - 5| = |(2x - 1) - 5| = |2x - 6| = 2|x - 3|$$

Dan ini akan kurang dari ε jika $|x - 3| < {}^{\varepsilon}/_{2}$. Dengan demikian kita ambil $\delta = {}^{\varepsilon}/_{2}$ dan amati bahwa jika $0 < |x - 3| < \delta = {}^{\varepsilon}/_{2}$ maka

$$|f(x)-5| = 2|x-3| < 2\delta = \varepsilon$$

Karenanya diberikan $\varepsilon > 0$, dengan memilih $\delta = {}^{\varepsilon}/_{2}$ kita pastikan bahwa $f(x) \in N_{\varepsilon}(5)$ bilamana $x \in N_{\delta}(3)$. Terbukti bahwa $\lim_{x\to 3}(2x-1) = 5$

Berikut teorema limit fungsi:

***Teorema* 2.2.2.** Jika $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ dan jika $\lim_{x\to a} f(x) = L_2$, maka $L_1 = L_2$.

Bukti: misal $\varepsilon > 0$ sebarang. Karena $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$, ada bilangan $\delta_1 > 0$ sedemikian hingga jika $0 < |x-a| < \delta_1$ maka $|f(x) - L_1| < {}^{\varepsilon}/_{2}$; dengan cara yang sama, karena $\lim_{x\to a} f(x) = L_2$, ada bilangan $\delta_2 > 0$ sedemikian hingga jika $0 < |x-a| < \delta_2$ maka $|f(x) - L_2| < {}^{\varepsilon}/_{2}$. Pilih $x_0 \in N_{\delta_1}(a) \cap N_{\delta_2}(a)$; yakni $0 < |x-a| < \delta_1$ dan $0 < |x-a| < \delta_2$. Maka kita punya $|f(x) - L_1| < {}^{\varepsilon}/_{2}$ dan $|f(x) - L_2| < {}^{\varepsilon}/_{2}$. Dengan demikian

$$\begin{aligned} |L_1 - L_2| &= |L_1 - f(x_0) + f(x_0) - L_2| \\ &\leq |L_1 - f(x_0)| + |f(x_0) - L_2| < {}^{\varepsilon}/_{2} + {}^{\varepsilon}/_{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Karena $\varepsilon > 0$ sebarang dan $|L_1 - L_2| < \varepsilon$, kita punya $|L_1 - L_2| = 0$. Oleh karena itu $L_1 = L_2$. (Parzynski, 1982: 71).

Teorema di atas digunakan untuk menunjukkan bahwa limit-limit tertentu tidak ada. Sebagai contoh, anggap $\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Fungsi $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ terdefinisi di semua bilangan $x \neq 0$. Kita tunjukkan bahwa $f(x) = 0$ untuk $x = \frac{1}{n\pi}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ dan $f(x) = 1$ untuk $x = \frac{2}{(4-2x)\pi}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Dengan begitu pada setiap neighborhood 0 yang dihapus, ada x dengan $f(x) = 0$

dan $\hat{x}$ dengan $f(\hat{x}) = 1$. Dengan teorema di atas limit f tidak bisa 0 dan 1. Karenanya $\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ tidak ada.

***Definisi* 2.2.3. (Fungsi Terbatas)** Misal $A \subseteq R$, $f: A \to R$, dan misal $c \in R$ titik cluster A. Dikatakan bahwa f terbatas pada neigborhood c jika ada δ-neigborhood $V_\delta(c)$ dari c dan bilangan konstan $M > 0$ sedemikian hingga $|f(x)| \leq M$ untuk semua $x \in A \cap V_\delta(c)$, (Bartle, 1994: 120).

Contoh 2.2.4. Tunjukkan bahwa fungsi $f(x) = \sin x$ adalah fungsi terbatas.

Penyelesaian: jika f terbatas di R maka terdapat sebuah batas $M > 0$. Ambil sebarang $M = \max(\sin x)$, maka terdapat π sedemikian hingga berlaku

$$M = \max(\sin\pi) = 1$$

Oleh karena $M = 1$ adalah batas atas $f(x)$ sedemikian hingga $|f(x)| \leq M$, dengan demikian $f(x) = \sin x$ terbatas.

***Teorema* 2.2.5.** jika $A \subseteq R$ dan $f: A \to R$ mempunyai limit di $c \in R$, maka f terbatas pada beberapa neigborhood c.

Bukti: jika $L := \lim_{x\to c} f(x)$, maka dengan $\varepsilon = 1$, ada $\delta > 0$ sedemikian hingga $0 < |x - c| < \delta$, maka $|f(x) - L| < 1$; karenanya

$$|f(x)| - |L| \leq |f(x) - L| < 1$$

Oleh karena itu, jika $x \in A \cap V_\delta(c), x \neq c$, maka $|f(x)| \leq |L| + 1$. Jika $c \notin A$. Ambil $M := |L| + 1$, sedangkan jika $c \in A$ kita himpun $M := \sup\{|f(c)|, |L| + 1\}$. Sementara itu jika $x \in A \cap V_\delta(c)$ maka $|f(x)| \leq M$. Hal ini menujukkan bahwa f terbatas pada neighborhood $V_\delta(c)$ dari c. (Bartle, 1994: 121).

Contoh 2.2.6. Tunjukkan bahwa fungsi $f(x) = x^2$ dimana $x \in A$, terbatas pada suatu neigborhood $c = 3$.

Penyelesaian: Diketahui $\lim_{x\to 3} x^2 = 9$, maka dengan dengan $\varepsilon > 0$, ada $\delta > 0$ sedemikian hingga $0 < |x - 3| < \delta$, maka $|x^2 - 9| < \varepsilon$; karenanya

$$|x^2| - |9| \leq |x^2 - 9| < \varepsilon$$

Oleh karena itu, jika $x \in A \cap V_\delta(3), x \neq 3$, maka $|x^2| \leq |9| + \varepsilon$. Karena $3 \in A$, maka himpun $M \coloneqq \sup\{|f(c)|, |9| + \varepsilon\}$ sedemikian hingga maka $|f(x)| \leq M$.

2.3. Fungsi Kontinu

***Definisi* 2.3.1. (Kekontinuan f Pada Sebuah Bilangan)** Misal $A \subseteq R$, $f: A \to R$, dan $c \in A$. Dikatakan bahwa f kontinu di c jika, diberikan setiap neighborhood $V_\delta(f(c))$ dari $f(c)$ ada sebuah neighborhood $V_\delta(c)$ dari c sedemikian hingga jika x setiap titik $A \cap V_\delta(c)$, maka $f(x)$ termasuk $V_\delta(f(c))$, (Bartle, 1996: 140).

Berdasarkan definisi di atas menyatakan bahwa jika $c \in A$ adalah sebuah titik cluster A, maka sebanding dengan definisi limit dan difinisi di atas menunjukkan bahwa f kontinu di c jika dan hanya jika

$$f(c) = \lim_{x\to c} f(x)$$

Jadi, jika c sebuah titik cluster A, maka tiga kondisi harus dijumpai: (i) f harus terdefinisi di c, (ii) limit f di c harus ada di R, dan (iii) nilai $f(c)$ ada dan harus sama dengan $\lim_{x\to c} f(x)$.

Contoh 2.3.2. Diberikan fungsi $f(x) = 2x^2$, maka f kontinu di bilangan 2. Dengan alasan berdasarkan definisi, yaitu:

(i) f terdefinisi di bilangan 2 yaitu $2(2)^2 = 8$.

(ii) $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} 2x^2 = 2(2)^2 = 8$.

(iii) Berdasarkan (i) dan (ii) dapat diketahui bahwa nilai $f(x) = 2x^2$ sama dengan $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} 2x^2$.

***Definisi* 2.3.3. (Kekontinuan f Pada Sebuah Himpunan)** Misal $A \subseteq R$ dan $f: A \to R$. Jika $B \subseteq A$, dikatakan bahwa f kontinu pada B jika f kontinu di masing-masing titik dari B, (Bartle, 1996: 141).

Sebagai contoh fungsi $f(x) = 2x^2$, adalah fungsi kontinu pada selang (a, b) dimana $a, b \in R$. Sebagai bukti, ambil sebarang selang (a, b) adalah $(-2,2)$ dengan $-2 \leq x' \leq 2$ untuk $x' \in R$. Maka jelas untuk setiap $f(x')$ memenuhi definisi 2.3.1. sedemikian hingga $f(x') = \lim_{x\to x'} f(x)$ untuk setiap $x' \in (-2,2)$.

***Teorema* 2.3.4.** Misal $A \subseteq R$, $f: A \to R$, dan $c \in A$. Maka kondisi-kondisi berikut ekivalen.

(a) f kontinu di c; itu diberikan setiap neighborhood $V_\varepsilon(f(c))$ dari $f(c)$ ada neighborhood $V_\delta(c)$ dari c sedemikian hingga jika x setiap titik $A \cap V_\delta(c)$, maka $f(x)$ termasuk $V_\varepsilon(f(c))$.

(b) Diberikan setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga untuk semua $x \in A$ dengan $|x - c| < \delta$, maka $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$.

(c) Jika x_n adalah setiap barisan bilangan real sedemikian hingga $x_n \in A$ untuk semua $n \in N$ dan (x_n) konvergen ke c, maka barisan $f(x_n)$ konvergen ke $f(c)$.

(Bartle, 1996: 142).

Bukti:

(a) $\Rightarrow$ (b) Andaikan f kontinu di c. Maka diberikan $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta = \delta(\varepsilon)$ sedemikian hingga untuk masing-masing x di A yang di dalam δ-neighborhood $V_\delta(c)$, $x \neq c$, nilai $f(x)$ termasuk ε-neighborhood $V_\varepsilon\big(f(c)\big)$. Bagaimana, x berada di dalam $V_\delta(c)$ dan $x \neq c$ jika dan hanya jika $|x - c| < \delta$. Juga, $f(x)$ termasuk $V_\varepsilon\big(f(c)\big)$ jika dan hanya jika $|f(x) - f(c)\,| < \varepsilon$. Jadi jika $x \in A$ memenuhi $|x - c| < \delta$, maka $f(x)$ memenuhi $|f(x) - f(c)\,| < \varepsilon$.

(b) $\Rightarrow$ (c) akan dibuktikan bahwa barisan $f(x_n)$ konvergen ke $f(c)$. Misal terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga jika x memenuhi $|x - c| < \delta$, dimana $x \in A$, maka $f(x)$ memenuhi $|f(x) - f(c)\,| < \varepsilon$. Berdasarkan definisi kekonvergenan, karena diberikan δ sebuah bilangan asli $K(\delta)$ sedemikian hingga jika $n > K(\delta)$ maka $|x_n - c| < \delta$. Tetapi untuk masing-masing x_n kita punya $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$. Jadi jika $n > K(\delta)$ maka $|f(x_n) - f(c)| < \varepsilon$. Oleh karena itu, $f(x_n)$ konvergen ke $f(c)$.

(c) $\Rightarrow$ (a) diberikan δ sebuah bilangan asli $K(\delta)$ sedemikian hingga jika $n > K(\delta)$ maka $|x_n - c| < \delta$. Berarti $|f(x_n) - f(c)| < \varepsilon$ untuk masing-masing x_n. Dengan demikian untuk setiap neighborhood $V_\varepsilon\big(f(c)\big)$ dari $f(c)$ ada neighborhood $V_\delta(c)$ dari c sedemikian hingga jika x setiap titik $A \cap V_\delta(c)$, maka $f(x)$ termasuk $V_\varepsilon\big(f(c)\big)$. Oleh karena itu terbukti jika barisan $f(x_n)$ konvergen ke $f(c)$ maka f kontinu di c.

2.4. Fungsi Monoton

***Definisi* 2.4.1. (Fungsi Monoton Naik dan Turun)** sebuah fungsi $f: A \rightarrow B$ dikatakan monoton naik di A jika $f(x_1) \leq f(x_2)$ untuk semua $x_1, x_2 \in A$ dengan $x_1 < x_2$; $f(x)$ dikatakan monoton turun di A jika $f(x_1) \geq f(x_2)$ untuk semua $x_1, x_2 \in A$ dengan $x_1 < x_2$, (Parzynski, 1982: 89).

Sebuah fungsi disebut monoton di A jika monoton naik atau monoton turun di A. Setiap fungsi konstan merupakan fungsi monoton naik dan monoton turun. Jika $f: A \rightarrow B$ dan interval $I \subset A$, memungkinkan bahwa f monoton di I tetapi tidak monoton di A.

Sebagai contoh, $f(x) = |x|$ adalah monoton turun di $(-\infty, 0]$ dan monoton naik di $[0, \infty)$, tapi f tidak monoton di R. Sebuah fungsi disebut naik secara keras di A jika $f(x_1) < f(x_2)$ untuk semua $x_1, x_2 \in A$ dengan $x_1 < x_2$; $f(x)$ dikatakan turun secara keras di A jika $f(x_1) > f(x_2)$ untuk semua $x_1, x_2 \in A$ dengan $x_1 < x_2$, (Parzynski, 1982: 89).

***Teorema* 2.4.2.** Jika f monoton di (a, b) maka untuk masing-masing x_0 dalam interval (a, b) terdapat $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ dan $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$.

Bukti:

Diasumsikan bahwa f monoton naik di (a, b); misal $x_0 \in (a, x_0)$. untuk setiap $x \in (a, x_0)$, $f(x) \leq f(x_0)$. Oleh karena itu himpunan $\{f(x) | x \in (a, x_0)\}$ terbatas ke atas, dengan demikian $\sup_x f(x) = a \in R$, dimana $x \in (a, x_0)$. Kita tunjukkan bahwa $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = a$. Misal diberikan $\varepsilon > 0$. Karena $a - \varepsilon < a = \sup_x f(x)$

terdapat $x_1 \in (a, x_0)$ dengan $f(x_1) > a - \varepsilon$. Misal $\delta = x_0 - x_1$. Sekarang jika x memenuhi $x_0 - \delta < x < x_0$ maka $f(x) \geq f(x_1)$, dengan demikian

$$|f(x) - a| = a - f(x) \leq a - f(x_1) < \varepsilon$$

Oleh karena itu $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = a$.

Untuk setiap $x \in (x_0, b)$, $f(x) \geq f(x_0)$. Jadi himpunan $\{f(x) | x \in (x_0, b)\}$ terbatas ke bawah dengan demikian $\inf_x f(x) = \beta \in R$, dimana $x \in (x_0, b)$. Kita tunjukkan bahwa $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \beta$. Misal diberikan $\varepsilon > 0$. Karena $\beta + \varepsilon > \beta = \inf_x f(x)$ terdapat $x_2 \in (x_0, b)$ dengan $f(x_2) < \beta + \varepsilon$. Misal $\delta = x_2 - x_0$. Sekarang jika x memenuhi $x_0 < x < x_0 + \delta$ maka $f(x) \leq f(x_2)$ dengan demikian

$$|f(x) - \beta| = f(x) - \beta \leq f(x_2) - \beta < \varepsilon$$

Oleh karena itu $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \beta$. (Parzynski, 1982: 90).

***Corollary* 2.4.3.** Jika f monoton naik di (a, b) maka untuk masing-masing $x_0 \in (a, b)$

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \sup_{x \in (a, x_0)} f(x) \leq f(x_0) \leq \inf_{x \in (x_0, b)} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

Karena keduanya limit sepihak terdapat di masing-masing titik $x_0 \in (a, b)$ yang mana f monoton di (a, b), kesimpulannya ialah f terbatas di masing-masing titik $x_0 \in (a, b)$. Tentu saja, ketika kita lihat sebelumnya, f sesungguhnya tak terbatas di interval (a, b). (Parzynski, 1982: 91).

***Lemma* 2.4.4.** Jika f monoton naik di (a, b) dan jika $a < x_1 < x_2 < b$ maka

$$\lim_{x \to x_1^+} f(x) \leq \lim_{x \to x_2^-} f(x)$$

Bukti: Pilih $\hat{x} \in (x_1, x_2)$. Karena $\hat{x} \in (x_1, b)$, $f(\hat{x}) \geq \inf_{x \in (x_1, b)} f(x)$; sama halnya, karena $\hat{x} \in (a, x_2)$, $f(\hat{x}) \geq \sup_{x \in (a, x_2)} f(x)$. Dengan corollary tersebut

$$\lim_{x \to x_2^-} f(x) = \sup_{x \in (a, x_2)} f(x) \text{ dan } \lim_{x \to x_1^+} f(x) = \inf_{x \in (x_1, b)} f(x).$$

Oleh karena itu, $\lim_{x \to x_1^+} f(x) \leq f(\hat{x}) \leq \lim_{x \to x_2^-} f(x)$. (Parzynski, 1982: 92).

2.5. Turunan (*Derivative*) Fungsi

***Difinisi* 2.5.1. (Turunan Fungsi)** Misal $I \subseteq R$ suatu interval, misal $f: I \to R$ dan $c \in I$. Sebuah bilangan real L adalah turunan dari f di c jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat sebuah bilangan $\delta(\varepsilon) > 0$ sedemikian hingga untuk setiap $x \in I$ dengan $0 < |x - c| < \delta(\varepsilon)$, maka

$$\left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - L \right| < \varepsilon$$

Dalam hal ini dikatakan bahwa f dapat diturunkan di c, dan ditulis $f'(c)$ untuk L, (Bartle, 1996: 184).

Dengan kata lain, turunan f di c diberikan oleh limit $f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$ dengan syarat limitnya ada. $f'(c)$ merupakan nilai dari turunan $f: I \to R$ di $c \in I$ dengan jalan bahwa domain fungsi f' tersebut merupakan subset dari domain f. Dalam hal ini fungsi f' tidak terlepas dari fungsi f. Oleh karenanya tepat sekali untuk menganggapnya sebagai bagian dari fungsi f dari x.

Contoh 2.5.2. Tentukan turunan $f(x) \coloneqq x^2$ untuk $x \in R$.

Penyelesaian: misalkan setiap c di R maka

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{x^2 - c^2}{x - c} = \lim_{x \to c}(x + c) = 2c$$

Jadi, dalam hal ini fungsi f' didefinisikan di semua R dan $f'(x) = 2x$ untuk $x \in R$.

***Teorema* 2.5.3.** Jika $f: I \to R$ mempunyai sebuah turunan di $c \in I$, maka f kontinu di c.

Bukti: Untuk semua $x \in I$, $x \neq c$ kita punya

$$f(x) - f(c) = \left(\frac{f(x) - f(c)}{x - c}\right)(x - c)$$

Karena $f'(c)$ ada, maka

$$\lim_{x \to c}\big(f(x) - f(c)\big) = \left(\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}\right)\left(\lim_{x \to c}(x - c)\right)$$

$$= f'(c) * 0 = 0$$

Oleh karena itu, $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$, dengan demikian f kontinu di c.

Teorema 2.5.4. Misal $f: I \to R$ dapat diturunkan di interval I. Maka

(a) f naik di I jika dan hanya jika $f'(x) \geq 0$ untuk semua $x \in I$.

(b) f turun di I jika dan hanya jika $f'(x) \leq 0$ untuk semua $x \in I$.

Bukti:

(a) ⇒Andaikan $f'(x) \geq 0$ untuk semua $x \in I$. Jika x_1, x_2 di I memenuhi $x_1 < x_2$, maka akan digunakan teorema nilai rata-rata untuk f di himpunan tertutup $j \coloneqq [x_1, x_2]$ untuk memperoleh suatu titik c di (x_1, x_2) Sedemikian hingga

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

Karena $f'(c) \geq 0$ dan $x_2 - x_1 > 0$, sehingga $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$. Hal ini karena $f(x_1) \geq f(x_2)$ dan karena $x_1 < x_2$ sebarang titik-titik di I, dengan demikian disimpulkan bahwa f naik di I.

$\Leftarrow$ Andaikan f dapat diturunkan dan naik di I. Karena setiap titik c di I, jika $x > c$ atau $x < c$ untuk $x \in I$ maka $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$. Hal ini karena

$$f'(x) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0.$$

(Bartle, 1996: 199).

(b) $\Rightarrow$Andaikan $f'(x) \leq 0$ untuk semua $x \in I$. Jika x_1, x_2 di I memenuhi $x_1 < x_2$, maka akan digunakan teorema nilai rata-rata untuk f di himpunan tertutup $j \coloneqq [x_1, x_2]$ untuk memperoleh suatu titik c di (x_1, x_2) Sedemikian hingga

$$f(x_1) - f(x_2) = f'(c)(x_1 - x_2)$$

Karena $f'(c) \leq 0$ dan $0 > x_1 - x_2$, sehingga $0 \geq f(x_1) - f(x_2)$. Hal ini karena $f(x_2) \geq f(x_1)$ dan karena $x_1 < x_2$ sebarang titik-titik di I, dengan demikian disimpulkan bahwa f turun di I.

$\Leftarrow$ Andaikan f dapat diturunkan dan turun di I. Karena setiap titik c di I, jika $x > c$ atau $x < c$ untuk $x \in I$ maka $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$. Hal ini karena

$$f'(x) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0.$$

Contoh 2.5.5. Tentukan selang fungsi naik dan fungsi turun dari fungsi $f(x) = x^2 + 2x$.

Penyelesaian: Turunan pertama $f'(x) = 2x + 2$. Untuk $f'(x) = 2x + 2 > 0$, maka fungsi naik pada $x \geq -\frac{1}{2}$ atau $0 < x < +\infty$ dan untuk $f'(x) = 2x + 2 < 0$ maka fungsi turun pada $x \leq -\frac{3}{2}$ atau $-\infty < x < -\frac{3}{2}$.

2.6. Kajian Keilmuan Dalam Islam

Al-Qur'an dan Hadits banyak menyebutkan kalimat yang mengandung isyarat dan konsep tentang ilmu pengetahuan, salah satunya adalah matematika. Hadi Masruri dan Imron Rossidy (2007: 22) menyatakan bahwa dalam pandangan Al-Qur'an dasar interpretasi dari semua bentuk ilmu adalah tauhid (keesaan Allah SWT), dimana merupakan aspek yang fundamental dalam ajaran Islam. Karena Islam memandang bahwa yang ada dalam alam raya ini termasuk ilmu pengetahuan, semuanya bersumber dari Dzat Yang Maha Esa (satu) Allah SWT, Tuhan Yang Maha Pencipta. Dengan demikian Islam memandang bahwa konsep ilmu pengetahuan tidak dapat dipisahkan dari pemahaman tentang Tuhan, sebab semua ilmu pengetahuan datangnya dari Tuhan Yang Maha Mengetahui.

Oleh karenanya, ilmu pengetahuan dalam pandangan Islam tidaklah bertentangan dengan iman. Sebaliknya, ilmu berjalan bersamaan dengan iman secara beriringan. Oleh karena itu, banyak ayat Al-Qur'an yang menyebut iman secara beriringan dengan ilmu. Seperti dalam surat Ar-Rum ayat 59,

وَقَالَ ٱلَّذِينَ أُوتُواْ ٱلْعِلْمَ وَٱلْإِيمَـٰنَ لَقَدْ لَبِثْتُمْ فِى كِتَـٰبِ ٱللَّهِ إِلَىٰ يَوْمِ ٱلْبَعْثِ ۖ فَهَـٰذَا يَوْمُ ٱلْبَعْثِ وَلَـٰكِنَّكُمْ كُنتُمْ لَا تَعْلَمُونَ ﴿٥٦﴾

Artinya: "Dan berkata orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan dan keimanan (kepada orang-orang yang kafir): "Sesungguhnya kamu telah berdiam (dalam kubur) menurut ketetapan Allah, sampai hari berbangkit; Maka Inilah hari berbangkit itu akan tetapi kamu selalu tidak meyakini(nya)".

Pada dasarnya ilmu pengetahuan tidak dapat dipisahkan dengan sang penciptan, tetapi harus terkait erat dengan-Nya agar dapat mencapai kebahagiaan dan keselamatan di dunia dan di akhirat. Oleh karenanya ilmu pengetahuan harus dapat mendekatkan manusia kepada Allah SWT. mengakui keagungan-Nya dan beramal saleh. Dengan demikian tujuan akhir dari ilmu pengetahuan adalah mengantarkan manusia untuk merealisasikan statusnya sebagai hamba Allah SWT. dan khalifah-Nya di muka bumi, dan meyiapkan diri untuk memenuhi peranan serta tanggung jawab atas amal perbuatannya hadapan Allah SWT.

Dalam Islam terdapat kesatuan antara ilmu pengetahuan, iman dan amal. Ilmu, iman dan amal dalam pandangan Islam saling berhubungan antara satu dengan yang lainnya sehingga pemisahannya tidak dapat dibenarkan, karena ilmu mencakup kepercayaan dan keimanan. Hadi Masruri dan Imron Rossidy (2007: 78) menyatakan bahwa ilmu dan iman berasal dari sumber yang sama dan keduanya merupakan pemberian dari Allah SWT. untuk tujuan yang sama, yaitu menerima secara totalitas kebajikan sebagaimana ditentukan oleh Allah SWT. dalam Al-Qur'an dan Hadits yang sahih. Selain itu Islam memandang bahwa keyakinan bertumpu pada ilmu yang benar. Ilmu terkait secara erat dengan tindakan dan konsekuensi logisnya adalah amal shalih. Kometmen ini dikarenakan ilmu menuntun pada keimanan yang benar dan tindakan yang benar. Sebagaimana firman Allah SWT. dalam surat Al-Qashash ayat 80 yang berbunyi:

وَقَالَ ٱلَّذِينَ أُوتُواْ ٱلْعِلْمَ وَيْلَكُمْ ثَوَابُ ٱللَّهِ خَيْرٌ لِّمَنْ ءَامَنَ وَعَمِلَ صَٰلِحًا وَلَا يُلَقَّىٰهَآ إِلَّا ٱلصَّٰبِرُونَ ﴿٨٠﴾

Artinya: *"Berkatalah orang-orang yang dianugerahi ilmu: "Kecelakaan yang besarlah bagimu, pahala Allah adalah lebih baik bagi orang-orang yang beriman dan beramal saleh, dan tidak diperoleh pahala itu, kecuali oleh orang-orang yang sabar".*

Ilmu matematika sebagai salah satu ilmu alam penting dipelajari karena banyak praktik ibadah dan amal saleh lainya yang penuh matematis. Misalnya saja dalam sholat. Untuk menentukan arah kiblat yang terletak di baitullah makkah diperlukan ilmu geometri yang merupakan cabang dari matematika. Begitu pula dengan jumlah raka'atnya. Tanpa adanya konsep teori bilangan dalam matematika, tentunya tidak akan dimengerti apa itu 2, 3, dan 4 raka'at, dan banyak lagi amal sholeh yang membutuhkan ilmu matematika seperti pembayaran zakat, faraidh dan lain sebagainya.

Allah berfirman dalam Al-Qur'an surat Al Israa' ayat 36,

وَلَا تَقْفُ مَا لَيْسَ لَكَ بِهِۦ عِلْمٌ ۚ إِنَّ ٱلسَّمْعَ وَٱلْبَصَرَ وَٱلْفُؤَادَ كُلُّ أُوْلَٰٓئِكَ كَانَ عَنْهُ مَسْـُٔولًا ﴿٣٦﴾

Artinya: *"Dan janganlah kamu mengikuti apa yang kamu tidak mempunyai pengetahuan tentangnya. Sesungguhnya pendengaran, penglihatan dan hati, semuanya itu akan diminta pertanggungan jawabnya".*

Ayat ini mengandung pengertian bahwa dalam pandangan Islam, taklid buta dalam melakukan suatu perbuatan terutama praktik agama itu dilarang. Yakni melakukan suatu perbuatan hanya sekedar ikut-ikutan saja tanpa ada dasar atas ilmunya. Karena suatu perbuatan tanpa berlandaskan ilmu pengetahuan hanya akan membuahkan kesesatan dan akan menjurus pada perbuatan yang merusak. Hal ini bertentangan dengan misi ajaran Islam yang rahmatan al-alamin, yakni membawa keselamatan bagi kehidupan di dunia. Untuk maksud itulah maka Islam menganjurkan bahkan mewajibkan umatnya untuk mencari ilmu sebagaimana yang dinyatakan Rasulullah SAW. dalam Haditsnya,

طلب العلم فريضة على كل مسلم

Artinya: "menuntut ilmu adalah wajib bagi setiap orang Islam".

Salah satu konsep matematika yang dapat diambil dari Hadits adalah sebuah himpunan yang berbentuk interval. Dari konsep inilah, kita bisa mengetahui sifat-sifat dari himpunan tersebut. Konsep ini misalnya dijelaskan dalam Hadits Qudsi yang menerangkan tentang keutamaan dari orang yang berpuasa,

عَنْ اَبِى هُرَيْرَةَ رَضِيَ اللهُ عَنْهُ قَالَ: سَمِعْتُ رَسُوْلَ اللهِ صلى الله عليه وسلم يَقُوْلُ: اِنَّ رَبَّكُمْ يَقُوْلُ: كُلُّ حَسَنَةٍ بعَشْرِ اَمْثَالِهَا اِلى سَبْعِمِائَةِ ضِعْفٍ، وَالصَّوْمُ لِى وَاَنَا اَجْزِى بِهِ،...

Artinya : "Dari Abu Hurairah ra., ia berkata: Saya mendengar Rosulullah SAW. bersabda: Sesungguhnya Tuhan berfirman: "setiap kebaikan itu sepuluh kali sampai tujuh ratus kali lipat. Puasa itu bagiKu dan Aku membalasnya.…", (Hadits ditakhrij oleh Tirmidzi).

Hadits di atas menunjukkan keutamaan ibadah puasa dibandingkan dengan ibadah yang lain. Jika setiap ibadah dan amal kebaikan yang dilakukan orang-orang beriman dilipatgandakan dari sepuluh sampai tujuh ratus kali maka pada ibadah puasa hanya Allah SWT. yang maha mengetahui akan pahala balasan bagi yang melaksanankannya.

Jika perhatikan Hadits di atas maka kita akan mendapati bahwa kelipatan kebaikan amal ibadah setiap manusia selain puasa terletak pada interval sepuluh sampai dengan tujuh ratus kali lipat. Secara simbolis dapat ditulis sebagai berikut:

$$10 \leq x \leq 700, \text{dimana } x \text{ adalah pahala}$$

Disini dapat diketahui bahwa interval ini adalah terbatas. Dengan alasan bahwa interval ini mempunyai batas atas dengan 10 adalah batas atas terkecilnya dan batas bawah dengan 700 adalah batas bawah terbesarnya. Kemudian secara matematis angka 10 adalah infimum sedangkan angka 700 adalah supremum. Dengan demikian dapat diambil kesimpulan bahwa sebuah interval adalah terbatas jika dan hanya jika interval tersebut mempunyai maksimal satu supremum dan satu infimum. Dan sebaliknya jika tidak terdapat supremum dan infimum maka interval tersebut tak terbatas, termasuk pahala puasa.

BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab ini kita akan mendeskripsikan sifat dan struktur fungsi bervariasi terbatas. Fungsi ini merupakan penurunan dari fungsi monoton. Fungsi ini juga dibangun dengan domain yang berupa partisi dari suatu selang.

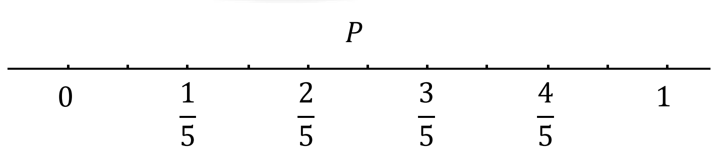
3.1. Definisi Fungsi Bervariasi Terbatas

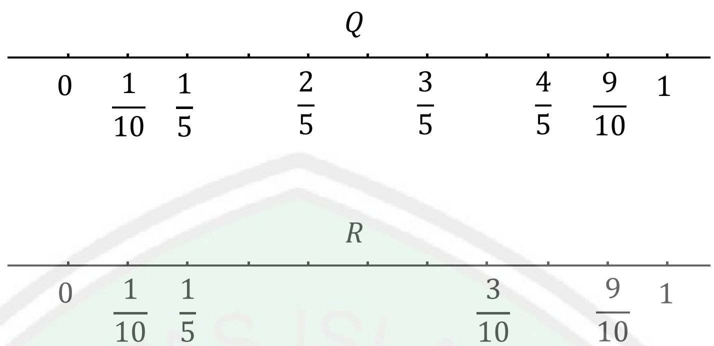
***Definisi* 3.1.1.** Jika $[a, b]$ suatu selang, maka himpunan $P = \{x_0,\ x_1,\ \ x_2, \ldots, x_n\}$ yang memenuhi ketaksamaan $a = x_0 < \ x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ dinamakan partisi dari $[a, b]$.

Partisi P dikatakan lebih halus dari partisi Q, jika $Q \subseteq P$. Koleksi semua partisi dari $[a, b]$ dinyatakan oleh $\varphi\ [a, b]$.

Contoh 3.1.2.

$P = \{0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1\}$, $Q = \{0, \frac{1}{10}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{9}{10}, 1\}$, dan $R = \{0, \frac{1}{10}, \frac{1}{5}, \frac{3}{10}, \frac{9}{10}, 1\}$ adalah tiga partisi dari selang $[0,1]$ Q lebih halus dari P karena $P \subseteq Q$, sedang R tidak dapat dibandingkan dengan P atau Q. Sebagai ilustrasi perhatikan gambar berikut:





Gambar 3.1.1. Perbandingan Penghalusan Partisi

Dari gambar di atas jelas bahwa R tidak dapat dibandingkan dengan P atau Q. Hal ini karena ada sebarang anggota R yang bukan anggota P atau Q, dan juga sebaliknya ada sebarang anggota P atau Q yang bukan anggota R.

***Definisi* 3.1.3.** Misalkan $f : [a,b] \longrightarrow R$ suatu fungsi, $P = \{x_0,\ x_1,\ x_2, \dots, x_n\}$ partisi dari $[a,b]$;

$$\triangle_i f = f(x_i) - f(x_{i-1});\ \triangle_i x = x_i - x_{i-1}$$

Jika ada suatu bilangan real $M > 0$ sehingga

$$V(f;P;[a,b]) = \sum_{i=1}^{n} |\triangle_i f| \leq M \text{ untuk setiap } P \in \varphi[a,b]$$

Maka fungsi f dikatakan bervariasi terbatas pada $[a,b]$.

Contoh 3.1.4. Jika $f: [a,b] \to R$ adalah monoton naik maka untuk setiap $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ dari $[a,b]$

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})] = f(x_n) - f(x_0) = f(b) - f(a).$$

Jadi f adalah bervariasi terbatas dan $V(f, P, [a,b]) = f(b) - f(a)$.

3.2. Sifat dan Teorema Fungsi Bervariasi Terbatas

***Teorema* 3.2.1.**

1. Jika P_1 dan P_2 dua partisi dari $[a, b]$ dengan $P_1 \subseteq P_2$, maka

$$V(f; P_1; [a, b]) \leq V(f; P_2; [a, b])$$

2. Jika P_1 dan P_2 dua partisi sebarang dari $[a, b]$, maka ada suatu partisi *P* dari $[a, b]$ sehingga

$$V(f; P; [a, b]) \geq \max\{V(f; P_1; [a, b]), V(f; P_2; [a, b])\}$$

Bukti:

1. Lebih dahulu kita tinjau bahwa $P_1 = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}, P_2 = P_1 \cup \{y\}$ dengan $x_{m-1} < y < x_m$. Kemudian akan ditunjukkan bahwa

$$V(f; P_2; [a, b]) \geq V(f; P_1; [a, b])$$

Dengan demikian maka,

$$V(f; P_2; [a, b]) = \sum_{i=1}^{m-1} |\Delta_i f| + \sum_{i=m-1}^{m} |\Delta_i f| + \sum_{i=m+1}^{n} |\Delta_i f|$$

$$= \sum_{i=1}^{m-1} |\Delta_i f| + |f(y) - f(x_{m-1})| + |f(x_m) - f(y)|$$

$$+ \sum_{i=m+1}^{n} |\Delta_i f|$$

$$V(f; P_1; [a, b]) = \sum_{i=1}^{m-1} |\Delta_i f| + \sum_{i=m-1}^{m} |\Delta_i f| + \sum_{i=m+1}^{n} |\Delta_i f|$$

$$= \sum_{i=1}^{m-1} |\Delta_i f| + |f(x_m) - f(x_{m-1})| + \sum_{i=m+1}^{n} |\Delta_i f|$$

Sehingga

$V(f; P_2; [a,b]) - V(f; P_1; [a,b]) \geq 0$

$\Leftrightarrow |f(y) - f(x_{m-1})| + |f(x_m) - f(y)| - |f(x_m) - f(x_{m-1})| \geq 0$

$\Leftrightarrow |f(y) - f(x_{m-1})| + |f(x_m) - f(y)| \geq |f(x_m) - f(x_{m-1})|$

$\Leftrightarrow V(f; P_2; [a,b]) \ \geq V(f; P_1; [a,b]).$

Berdasarkan hasil di atas juga akan ditunjukkan bahwa

$$V(f; P_2; [a,b]) \ \geq V(f; P_1; [a,b])$$

untuk $P_1 = \{x_0,\ x_1,\ x_2, \dots, x_n\}$, dan $P_2 = P_1 \cup \{y_1, y_2, \dots y_p\}$ dengan

$$x_{m-1} < y_1 < y_2 < \cdots < y_{p-1} < y_p < \ x_m$$

Dengan demikian maka,

$$V(f; P_2; [a,b]) = \sum_{i=1}^{m-1} |\Delta_i\, f| + \sum_{i=m-1}^{m} |\Delta_i\, f| + \sum_{i=m+1}^{n} |\ \Delta_i\, f|$$

$$= \sum_{i=1}^{m-1} |\Delta_i\, f| + |f(y_1) - f(x_{m-1})| + |f(y_2) - f(y_1)| + \cdots$$

$$+ |f(y_p) - f(y_{p-1})| + |f(x_m) - f(y_p)| + \sum_{i=m+1}^{n} |\ \Delta_i\, f|$$

$$V(f; P_1; [a,b]) = \sum_{i=1}^{m-1} |\ \Delta_i\, f| + \sum_{i=m-1}^{m} |\Delta_i\, f| + \sum_{i=m+1}^{n} |\ \Delta_i\, f|$$

$$= \sum_{i=1}^{m-1} |\ \Delta_i\, f| + |f(x_m) - f(x_{m-1})| + \sum_{i=m+1}^{n} |\ \Delta_i\, f|$$

Sehingga

$V(f; P_2; [a,b]) - V(f; P_1; [a,b]) \geq 0$

$\Leftrightarrow |f(y_1) - f(x_{m-1})| + |f(y_2) - f(y_1)| + \cdots + |f(y_p) - f(y_{p-1})|$

$$+\left|f(x_m)-f(y_p)\right|-|f(x_m)-f(x_{m-1})|\geq 0$$

$$\Leftrightarrow |f(y_1)-f(x_{m-1})|+|f(y_2)-f(y_1)|+\cdots+\left|f(y_p)-f(y_{p-1})\right|$$

$$+\left|f(x_m)-f(y_p)\right|\geq |f(x_m)-f(x_{m-1})|$$

$$\Leftrightarrow V(f;P_2;[a,b])\ \geq V(f;P_1;[a,b])$$

Sebagai contoh, kemudian akan dibuktikan bahwa jika

$P_1=\{x_0,\ x_1,\ x_2,\dots,x_n\}$, $P_1\cup\{y_1,y_2\}$ dengan $x_{m-1}<y_1<y_2<\ x_m$ dan

$P_1\cup\{y_1\}$ dengan $x_{m-1}<y_1<\ x_m$ maka berlaku

$$V(f;P_1\cup\{y_1,y_2\};[a,b])\geq V(f;P_1\cup\{y_1\};[a,b])$$

Maka,

$$V(f;P_1\cup\{y_1,y_2\};[a,b])=\sum_{i=1}^{m-1}|\vartriangle_i f|+\sum_{i=m-1}^{m}|\vartriangle_i f|+\sum_{i=m+1}^{n}|\vartriangle_i f|$$

$$=\sum_{i=1}^{m-1}|\vartriangle_i f|+|f(y_1)-f(x_{m-1})|+|f(y_2)-f(y_1)|$$

$$+|f(x_m)-f(y_2)|+\sum_{i=m+1}^{n}|\vartriangle_i f|$$

$$V(f;P_1\cup\{y_1\};[a,b])=\sum_{i=1}^{m-1}|\vartriangle_i f|+\sum_{i=m-1}^{m}|\vartriangle_i f|+\sum_{i=m+1}^{n}|\vartriangle_i f|$$

$$=\sum_{i=1}^{m-1}|\vartriangle_i f|+|f(y_1)-f(x_{m-1})|+|f(x_m)-f(y_1)|$$

$$+\sum_{i=m+1}^{n}|\vartriangle_i f|$$

Sehingga

$$V(f;P_1\cup\{y_1,y_2\};[a,b])-V(f;P_1\cup\{y_1\};[a,b])\geq 0$$

$$\Leftrightarrow |f(y_1) - f(x_{m-1})| + |f(y_2) - f(y_1)| + |f(x_m) - f(y_2)|$$
$$-|f(y_1) - f(x_{m-1})| + |f(x_m) - f(y_1)| \geq 0$$
$$\Leftrightarrow |f(y_1) - f(x_{m-1})| + |f(y_2) - f(y_1)| + |f(x_m) - f(y_2)|$$
$$\geq |f(y_1) - f(x_{m-1})| + |f(x_m) - f(y_1)|$$
$$\Leftrightarrow V(f; P_1 \cup \{y_1, y_2\}; [a,b]) \geq V(f; P_1 \cup \{y_1\}; [a,b])$$

2. Jika P_1 dan P_2 dua partisi sembarang dari $[a,b]$, ambil $P = P_1 \subseteq P_2$. Maka menurut hasil (1) di atas:

$$V(f; P; [a,b]) \geq V(f; P_i; [a,b]), i = 1, 2$$

Sehingga

$$V(f; P; [a,b]) \geq \max\{V(f; P_1; [a,b]), V(f; P_2; [a,b])\}$$

Sebagai ilustrasi perhatikanlah contoh berikut.

Contoh 3.2.2. Selidikilah apakah $f(x) = x^2$, $0 \leq x \leq 2$ bervariasi terbatas.

Penyelesaian:

Misalkan $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ partisi dari sebarang dari selang [0,2];

$$|\triangle_i f| = |f(x_i) - f(x_{i-1})| = f(x_i) - f(x_{i-1}).$$

Karena $f'(x) = 2x$ sedemikian hingga mempunyai nilai positif pada selang [0,2], maka $f(x)$ monoton naik pada selang [0,2]. Dengan demikian maka;

$$\sum_{i=1}^{n} |\triangle_i f| = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$
$$= \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})]$$
$$= f(2) - f(0) = 2^2 - 0^2 = 4$$

Untuk setiap partisi P dari selang $[0,2]$

Jadi $f(x) = x^2, 0 \leq x \leq 2$ bervariasi terbatas pada $[a, b]$.

Contoh 3.2.3. Selidiki apakah $f(x) = x^2, -1 \leq x \leq 2$ bervariasi terbatas pada selang $[-1,2]$.

Penyesaian:

Misalkan $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_m, 0, x_{m+1}, \dots, x_n\}$ berpartisi sebarang dari selang $[-1,2]$. karena $f(x) = x^2$ monoton turun pada selang $[-1,0]$ dan monoton naik pada selang $[0,2]$, maka

$$|\triangle_i f| = f(x_{i-1}) - f(x_i), i = 1,2, \dots, m,$$

$$|\triangle_i f| = f(x_i) - f(x_{i-1}), i = m+1, m+2, \dots, n$$

Sehingga

$$\sum_{i=1}^{n} |\triangle_i f| = \sum_{i=1}^{n} \left| |f(x_{i-1}) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x_{i-1})| \right|$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [|f(x_{i-1}) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x_{i-1})|]$$

$$= |f(x_0) - f(x_m)| + |f(x_n) - f(x_{m+1})|$$

$$= |f(-1) - f(0)| + |f(2) - f(0)|$$

$$= |1^2 - 0^2| + |2^2 - 0^2|$$

$$= |1 - 0| + |4 - 0|$$

$$= 1 + 4 = 5$$

Untuk setiap partisi P dari selang $[-1,2]$.

Jadi $f(x) = x^2, -1 \leq x \leq 2$ bervariasi terbatas pada $[-1,2]$.

***Teorema* 3.2.4.** Misal diberikan $f: I \to R$ dan andaikan $c \in I$. Maka

$$V(f;P;[a,b]) = V(f;P;[a,c]) + V(f;P;[c,b])$$

Bukti:

a) Pertama akan ditunjukkan bahwa

$$V(f;P;[a,b]) \leq V(f;P;[a,c]) + V(f;P;[c,b])$$

Kita boleh mengandaikan bahwa kedua teorema pada sisi kanan bersifat terbatas. Misal $\Delta: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ di setiap bagian. Kita bentuk bagian Δ' dengan memperkenalkan titik tambahan c, yang jatuh di antara x_{k-1} dan x_k. Maka

$$\sum_{i=1}^{k-1} |f(x_i) - f(x_{i-1})| + |f(c) - f(x_{k-1})| \leq V(f;P;[a,c])$$

$$\sum_{i=k+1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| + |f(x_k) - f(c)| \leq V(f;P;[c,b])$$

Dari pertidaksamaan $|f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq |f(x_k) - f(c)| + |f(c) - f(x_{k-1})|$, kesimpulannya ialah

$$\sum_{i=k+1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq V(f;P;[a,c]) + V(f;P;[c,b])$$

Karena bagian Δ sebarang, kita peroleh

$$V(f;P;[a,b]) \leq V(f;P;[a,c]) + V(f;P;[c,b])$$

b) kedua akan ditunjukkan bahwa

$$V(f;P;[a,b]) \geq V(f;P;[a,c]) + V(f;P;[c,b])$$

Jika $V(f;P;[a,b]) = +\infty$, maka pertidaksamaan pegang dengan jelas. Karena itu kita boleh berasumsi bahwa ketiga jumlah kuantitas tersebut bersifat terbatas. Sekarang misal diberikan $\varepsilon > 0$. Dari definisi supremum, ada suatu bagian

$$\Delta_1: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = c$$

Seperti

$$\sum_{i=1}^{k} |f(x_i) - f(x_{i-1})| > V(f; P; [a,c]) - \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Dengan cara yang sama, ada suatu bagian

$$\Delta_2: c = x_k < x_{k+1} < \cdots < x_n = b$$

seperti

$$\sum_{i=k+1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| > V(f; P; [c,b]) - \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Oleh karena itu,

$$V(f; P; [a,b]) \geq \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

$$> V(f; P; [a,c]) - \frac{1}{2}\varepsilon + V(f; P; [c,b]) - \frac{1}{2}\varepsilon$$

$$= V(f; P; [a,c]) + V(f; P; [c,b]) - \varepsilon$$

Karena ε sebarang, hasil mengikuti.

Dengan demikian, berdasarkan a) dan b), yaitu karena

$$V(f; P; [a,b]) \leq V(f; P; [a,c]) + V(f; P; [c,b])$$

dan

$$V(f; P; [a,b]) \geq V(f; P; [a,c]) + V(f; P; [c,b])$$

maka terbukti bahwa

$$V(f; P; [a,b]) = V(f; P; [a,c]) + V(f; P; [c,b])$$

Contoh 3.2.5. Diberikan fungsi bervariasi terbatas $f(x) = x^2, -1 \leq x \leq 2$.

Misalkan ada $c \in I$. Tunjukkan bahwa

$$V(f;P;[0,2]) = V(f;P;[0,c]) + V(f;P;[c,2])$$

Penyelesaian:

Karena $f'(x)$ bernilai positif di selang $[-1,2]$, maka fungsi $f(x) = x^2, 0 \leq x \leq 2$ adalah monoton naik. Misalkan $P = \{x_0,\ x_1,\ x_2, \dots, x_n\}$ partisi dari sebarang dari selang $[-1,2]$, sedemikian hingga

$$|\triangle_i f| = |f(x_i) - f(x_{i-1})| = f(x_i) - f(x_{i-1})$$

Ambil $c = 1$. Kemudian akan ditunjukkan bahwa nilai

$$V(f;P;[-1,2]) = V(f;P;[-1,1]) + V(f;P;[1,2])$$

Pertama, akan dicari nilai $V(f;P;[-1,2])$ dengan perhitungan sebagai berikut:

$$V(f;P;[-1,2]) \to \sum_{i=1}^{n} |\triangle_i f| = \sum_{i=1}^{n} \big||f(x_{i-1}) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x_{i-1})|\big|$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [|f(x_{i-1}) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x_{i-1})|]$$

$$= |f(-1) - f(0)| + |f(2) - f(0)|$$

$$= |1^2 - 0^2| + |2^2 - 0^2|$$

$$= |1 - 0| + |4 - 0|$$

$$= 1 + 4 = 5$$

Kemudian yang kedua akan dicari nilai $V(f;P;[-1,1])$ dan $V(f;P;[1,2])$, dengan perhitungan sebagai berikut:

$$V(f;P;[-1,1]) \to \sum_{i=1}^{n} |\triangle_i f| = \sum_{i=1}^{n} \big||f(x_i) - f(x_{i-1})| + |f(x_{i-1}) - f(x_i)|\big|$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [|f(0) - f(-1)| + |f(1) - f(0)|]$$

$$= |0^2 - (-1)^2| + |1^2 - 0^2|$$

$$= 1 + 1 = 2$$

$$V(f; P; [1,2]) \rightarrow \sum_{i=1}^{n} | \triangle_i f| = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |f(2) - f(1)|$$

$$= |2^2 - 1^2|$$

$$= 4 - 1 = 3$$

Dari hasil penghitungan di atas diperoleh bahwa $V(f; P; [-1,2]) = 5$ dan $V(f; P; [-1,1]) + V(f; P; [1,2]) = 2 + 3 = 5$. Dengan demikian berarti bahwa nilai $V(f; P; [-1,2]) = V(f; P; [-1,1]) + V(f; P; [1,2])$. Jadi, terbukti bahwa

$$V(f; P; [-1,2]) = V(f; P; [-1, c]) + V(f; P; [c, 2])$$

***Teorema* 3.2.6.** Jika fungsi f monoton pada $[a, b]$, maka f bervariasi terbatas pada $[a, b]$.

Bukti:

Fungsi monoton terbagi atas dua kelompok, ialah fungsi monoton naik dan fungsi monoton turun. Pertama, akan dibuktikan bahwa fungsi monoton naik bervariasi terbatas. Misalkan f fungsi monoton naik, maka untuk setiap partisi P: $\triangle_i f \geq 0$, sehingga

$$\sum_{i=1}^{n} | \triangle_i f| = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})]$$

$$= f(b) - f(a)$$

Jadi untuk setiap $P \in \varphi[a,b] : \sum_{i=1}^{n} | \triangle_i f| = f(b) - f(a)$, dan ini berarti fungsi f bervariasi terbatas pada $[a,b]$.

Yang kedua, akan dibuktikan bahwa fungsi monoton turun bervariasi terbatas. Misalkan f fungsi monoton turun, maka untuk setiap partisi P: $\triangle_i f \leq 0$, sehingga

$$\sum_{i=1}^{n} | \triangle_i f| = \sum_{i=1}^{n} |f(x_{i-1}) - f(x_i)|$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})]$$

$$= f(b) - f(a)$$

Jadi untuk setiap $P \in \varphi[a,b] : \sum_{i=1}^{n} | \triangle_i f| = f(b) - f(a)$, dan ini berarti fungsi f bervariasi terbatas pada $[a,b]$.

karena fungsi f monoton naik dan monoton turun bervariasi terbatas pada interval $[a,b]$, padahal fungsi monoton naik dan monoton turun merupakan bagian dari fungsi monoton, dengan demikian fungsi f bervariasi terbatas pada interval $[a,b]$.

Berikut contoh ilustrasi teorema di atas.

Contoh 3.2.7. Selidiki apakah fungsi $f(x) = x^2, 1 \leq x \leq 2$ bervariasi terbatas.

Penyelesaian:

Karena $f'(x) = 2x \geq 0$, untuk $0 \leq x \leq 2$ maka f monoton naik pada selang $[0,2]$. Sedangkan untuk $-1 \leq x \leq 0$, nilai $f'(x) = 2x \leq 0$ maka f monoton turun pada selang $[-1,0]$, sehingga menurut Teorema 3.2.6. fungsi f bervariasi terbatas pada $[-1,2]$.

***Akibat Teorema 3.2.6.* 3.2.8.**

1. Jika f monoton naik pada selang $[a, c]$ dan monoton turun pada selang $[c, b]$, maka fungsi f bervariasi terbatas pada selang $[a, b]$.
2. Jika f fungsi monoton bagian demi bagian pada selang $[a, b]$, maka fungsi bervariasi terbatas pada $[a, b]$.

Bukti:

Misal $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ partisi sebarang dari selang $[a, b]$;

$$|\Delta_i f| = |f(x_i) - f(x_{i-1})| = f(x_i) - f(x_{i-1})$$

Ambil partisi P_1 untuk $[a, c]$, partisi P_2 untuk $[c, b]$ dengan $c \in P_1$ dan $c \in P_2$, Sehingga

$$P_1 \cup P_2 = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n\}$$

Karena fungsi f monoton naik pada selang $[a, c]$ dan monoton turun pada selang $[c, b]$, maka

$$|\Delta_i f| = |f(x_i) - f(x_{i-1})| = f(x_i) - f(x_{i-1}), i = 1,2, \dots, m.$$

$$|\Delta_i f| = |f(x_{i-1}) - f(x_i)| = f(x_{i-1}) - f(x_i), i = m + 1, m + 2, \dots, n.$$

Sehingga

$$\sum_{i=1}^{n} |\Delta_i f| = \sum_{i=1}^{n} \big||f(x_i) - f(x_{i-1})| + |f(x_{i-1}) - f(x_i)|\big|$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [|f(x_i) - f(x_{i-1})| + |f(x_{i-1}) - f(x_i)|]$$

$$= |f(x_m) - f(x_0)| + |f(x_m) - f(x_n)|$$

$$= |f(c) - f(a)| + |f(c) - f(b)|$$

$$= |f(c) - f(a)| + |f(b) - f(c)|$$

$$= f(c) - f(a) + f(b) - f(c)$$

$$= -f(a) + f(b)$$

$$= f(b) - f(a)$$

Jadi f adalah bervariasi terbatas dan $V(f; P; [a, b]) = f(b) - f(a)$.

***Teorema* 3.2.9.** Jika fungsi f kontinu pada $[a, b]$ dan f' terbatas pada (a, b), maka fungsi f bervariasi terbatas pada $[a, b]$.

Bukti:

Karena f' terbatas pada (a, b) sesuai dengan definisi keterbatasan fungsi, maka terdapat bilangan konstan $M > 0$ sedemikian hingga berlaku

$$|f'(x)| \leq M$$

Akan dibuktikan bahwa terdapat sebarang bilangan real $M' > 0$ sedemikian hingga berlaku $V(f; P; [a, b]) \leq M'$. Misal $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ merupakan partisi $[a, b]$. Maka dengan teorema nilai rata-rata untuk masing-masing $i = 1,2,3, \dots, n$ terdapat $x_i^* \in (x_{i-1}, x_i)$ sedemikian hingga

$$\Delta_i f = f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(x_i^*)(x_i - x_{i-1}).$$

Kesimpulannya ialah

$$|f(x_i) - f(x_{i-1})| = |f'(x_i^*)||(x_i - x_{i-1})| \leq M|x_i - x_{i-1}|$$

Dengan demikian

$$\begin{aligned} V(f;P;[a,b]) &= \sum_{i=1}^{n} |\Delta_i f| \\ &= \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \\ &= \sum_{i=1}^{n} |f'(x_i^*)||(x_i - x_{i-1})| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} M|(x_i - x_{i-1})| \\ &= M\sum_{i=1}^{n} |(x_i - x_{i-1})| \\ &= M(b-a) \end{aligned}$$

Sehingga dapat diketahui bahwa $V(f;P;[a,b]) \leq M(b-a) = M'$. Hal ini berarti f bervariasi terbatas pada $[a,b]$.

Contoh 3.2.10. Diberikan fungsi $f(x) = 3x^4 - 56x^3 + 336x^2 - 768x + 1100$ di $[0,10]$. Periksalah apakah fungsi f tersebut bervariasi terbatas.

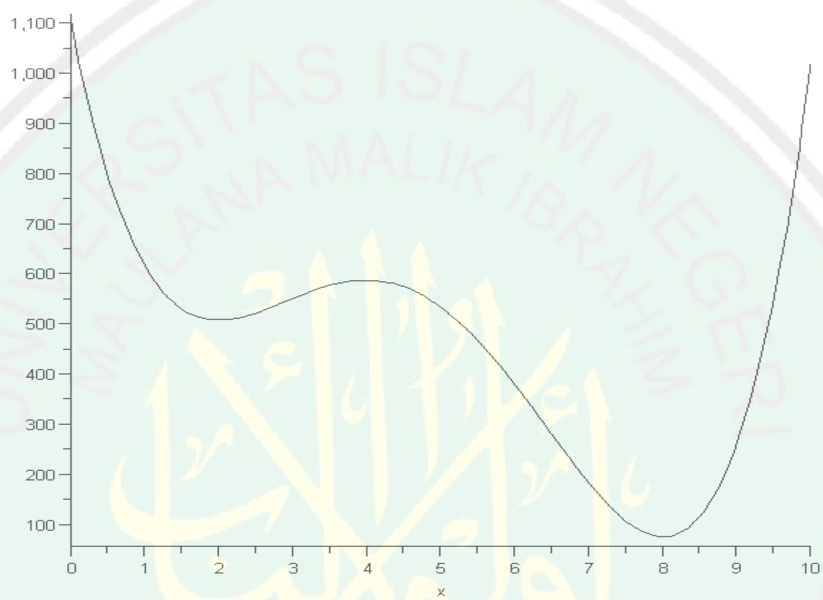
Penyelesaian:

Fungsi tersebut di atas mempuyai turunan pertama yaitu

$$f'(x) = 12x^3 - 168x^2 + 672x - 768$$

dengan $|f'(x)| \leq |f'(10)| = 1152$ untuk $x \in [0,10]$. Hal ini sesuai dengan teorema 3.2.9. bahwa f adalah bervariasi terbatas di $[0,10]$ dengan $V(f;P;[0,10]) \leq 1152(10-0) = 11520$.

Mengingat graf fungsi f sebagai berikut:



Gambar 3.2.1. Grafik Fungsi

Dari gambar di atas jelas bahwa f memiliki lokal ekstrim pada $2, 4$ dan 8. Dengan demikian total variasi f dengan menggunakan partisi P berdasarkan lokal ekstrim yaitu $P = \{0,2,4,8,10\}$ adalah

$$V(f;P;[0,10]) = \sum_{i=1}^{n} |\Delta_i f|$$

$$= |f(0) - f(2)| + |f(2) - f(4)| + |f(4) - f(8)| + |f(8) - f(10)|$$

$$= |1100 - 508| + |508 - 588| + |588 - 76| + |76 - 1020|$$

$$= 2128.$$

Akibat Teorema 3.2.9. **3.2.11.** Jika fungsi f mempunyai turunan pertama yang kontinu pada $[a, b]$, maka fungsi f bervariasi terbatas pada $[a, b]$.

Meskipun demikian, keterbatasan f' bukan syarat perlu agar f bervariasi terbatas. Sebagai contoh, ambil $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$. Fungsi ini bervariasi terbatas pada setiap selang $[a, b]$, karena fungsi ini monoton pada $[a, b]$. Tetapi $\lim_{x\to 0} f'(x) = \infty$, jadi f' tak terbatas di sekitar nol.

Teorema **3.2.12.** Jika f bervariasi terbatas pada $[a, b]$, maka f terbatas pada $[a, b]$.

Bukti:

Misalkan $x \in (a, b)$ sebarang, karena f bervariasi terbatas pada $[a, b]$ sedemikian hingga $V(f; P) \leq M$ untuk setiap $P \in \varphi[a, b]$ dengan $M > 0$ merupakan suatu bilangan real. Akan dibuktikan bahwa terdapat sebarang bilangan real $M' > 0$ sedemikian hingga berlaku $|f(x)| \leq M'$. Dengan menggunakan partisi $P = \{a, x, b\}$ diperoleh

$$\begin{aligned}
|f(x)| &= |f(x) - f(a) + f(a)| \\
&\leq |f(x) - f(a)| + |f(a)| \\
&\leq |f(a)| + |f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \\
&\leq |f(a)| + V(f; P) \\
&\leq |f(a)| + M
\end{aligned}$$

Dengan demikian dapat diketahui bahwa $|f(x)| \leq |f(a)| + M = M'$. Dan ini berarti f terbatas pada $[a, b]$.

Contoh 3.2.13. Diberikan fungsi $f(x) = x^2$ bervariasi terbatas pada $[0,2]$. Periksalah apakah f juga terbatas pada $[0,2]$.

Penyelesaian:

Diketahui fungsi $f(x) = x^2$ bervariasi terbatas pada $[-1,2]$. Akan ditunjukkan bahwa $|f(x)| \leq M$ untuk bilangan konstan $M > 0$. Dengan menggunakan partisi $P = \{0, x, 2\}$ diperoleh

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |f(x) - f(-1) + f(-1)| \\ &\leq |f(x) - f(-1)| + |f(-1)| \\ &\leq |f(-1)| + |f(x) - f(-1)| + |f(2) - f(x)| \\ &\leq (-1)^2 + f(x) + 2^2 - f(x) \\ &\leq f(x) - f(x) + 1 + 4 \\ &\leq 5 \end{aligned}$$

Dengan demikian terdapat bilangan $M = 5$ sedemikian hingga berlaku $|f(x)| \leq 5$ sehingga terbukti bahwa $f(x)$ terbatas pada interval $[-1,2]$.

3.3. Tinjauan Agama Berdasarkan Hasil Pembahasan.

Akal merupakan suatu anugrah yang amat besar diberikan oleh Allah SWT. kepada umat manusia. Dengan kemampuan akalnya, manusia dapat mengenal dirinya, dunianya, dan Rabbnya dan juga dapat memahami segala yang dapat dipahaminya, seperti perhitungan matematis, pokok-pokok pemikiran sehingga dapat menbedakan segala hal yang baik dan buruk. Hal inilah yang menjadi pokok pertimbangan dijadikannya manusia sebagai khalifah di bumi, yaitu sebagai pengelola dan pembangun. Oleh karenanya, Al-Qur'an memerintahkan manusia untuk mengunakan akalnya sebagai sarana untuk berfikir, sebagaimana firman Allah SWT. dalam QS. Ali Imran ayat 190:

إِنَّ فِي خَلْقِ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضِ وَٱخْتِلَٰفِ ٱلَّيْلِ وَٱلنَّهَارِ لَءَايَٰتٍ لِّأُو۟لِى ٱلْأَلْبَٰبِ

Artinya: "Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi, dan silih bergantinya malam dan siang terdapat tanda-tanda bagi orang-orang yang berakal".

Dalam tafsir Al-Maraghi penjelasan ayat 190 di atas adalah sesungguhnya dalam tatanan langit dan bumi serta keindahan perkiraan dan keajaiban ciptaan Allah dengan silih bergantinya siang dan malam secara teratur sepanjang tahun yang dapat dirasakan secara langsung pengaruhnya pada tubuh manusia karena pengaruh panas matahari, dinginnya malam dan pengaruhnya yang ada dalam dunia *flora* dan *fauna* dan sebagainya merupakan tanda bukti keesaan Allah, kesempurnaan pengetahuan dan kekuasaannya. Sedangkan *Ulul Albab* adalah orang-orang yang mau menggunakan pikirannya untuk mengambil faedah darinya, mengambil hidayah darinya, mengambarkan keagungan Allah dan mau mengingat hikmah akal dan keutamaannya.

Jika pada QS. Ali Imron ayat 190 tersebut dikaitkan dengan pembahasan secara matematis, berfikir adalah kata lain dari proses penalaran. Proses penalaran merupakan aspek yang paling penting dalam bahasan fungsi bervariasi terbatas yang merupakan bagian dari analisis matematika. Hal ini karena dalam analisis matematika lebih menekankan pada pengembangan konsep dasar dan teori sehingga proses penalaran penting digunakan untuk memperoleh prinsip-prinsip yang berupa definisi, aksioma, teorema serta pembuktianya. Pembuktian dalam analisis matematika mempunyai peranan yang penting dalam pengembangan konsep dan teori tersebut. Tanpa adanya pembuktian dalam analisis matematika, maka suatu teori tidak akan diterima.

Jika dikaitkan dengan kajian agama Islam, hal ini dapat direlevansikan dengan Al-Qur'an yang menyebutkan bahwa kebenaran suatu ilmu pengetahuan tidak cukup hanya dengan bentuk ucapan, dan tulisan saja, tetapi perlu dibuktikan. Allah berfirman dalam surat Al-Baqarah : 111 sebagai berikut :

وَقَالُواْ لَن يَدۡخُلَ ٱلۡجَنَّةَ إِلَّا مَن كَانَ هُودًا أَوۡ نَصَٰرَىٰۗ تِلۡكَ أَمَانِيُّهُمۡۗ قُلۡ هَاتُواْ بُرۡهَٰنَكُمۡ إِن كُنتُمۡ صَٰدِقِينَ ١١١

Artinya: "Dan mereka (Yahudi dan Nasrani) berkata: 'Sekali-kali tidak akan masuk surga kecuali orang-orang (yang beragama) Yahudi atau Nasrani'. demikian itu (hanya) angan-angan mereka yang kosong belaka. Katakanlah: 'Tunjukkanlah bukti kebenaranmu jika kamu adalah orang yang benar'".

Para ahli kitab, baik Yahudi maupun Nasrani, mereka menganggap bahwa tidak akan masuk surga terkecuali golongan mereka sendiri. Untuk menolak dan membatalkan anggapan mereka yang hanya berupa angan-angan yang timbul dari khayalan mereka sendiri, anggapan bahwa yang bukan golongan mereka akan terjerumus ke dalam siksa dan tidak memperoleh nikmat sedikitpun. Dalam ayat tersebut Allah SWT. seakan-akan meminta bukti kebenaran yang menguatkan anggapan mereka dengan menunjukkan bukti-bukti yang benar sehingga apa yang didakwakan mereka adalah benar. Dan meskipun terdapat tuntunan untuk dapat menunjukkan bukti-bukti kebenaran, namun makna dari ayat tersebut menyatakan bahwa ketidakbenaran dakwaan mereka karena tidak dapat menunjukkan bukti-bukti kebenarannya. Dalam ayat ini terdapat isyarat bahwa suatu pendapat yang tidak didasarkan bukti-bukti yang benar maka tidak akan diterima.

Oleh karena itu, suatu pendapat yang tidak dapat dibuktikan kebenarannya bukanlah masuk dalam tatanan ilmu pengetahuan melainkan hanya sebuah persangkaan yang tidak ada manfaatnya bagi kebenaran. Sebagaimana firman Allah SWT. dalam surat An-Najm ayat 28, sebagai berikut:

وَمَا لَهُم بِهِۦ مِنۡ عِلۡمٍۖ إِن يَتَّبِعُونَ إِلَّا ٱلظَّنَّۖ وَإِنَّ ٱلظَّنَّ لَا يُغۡنِي مِنَ ٱلۡحَقِّ شَيۡـٔٗا ٢٨

Artinya: "Dan mereka tidak mempunyai sesuatu pengetahuanpun tentang itu. mereka tidak lain hanyalah mengikuti persangkaan sedang Sesungguhnya persangkaan itu tiada berfaedah sedikitpun terhadap kebenaran".

Bahkan Allah SWT. menggolongkan orang-orang yang mengikuti persangkaan ke dalam golongan yang sesat dalam jalan-Nya. Dalam Al-Qur'an surat Al-An'am ayat 116 Allah SWT. Berfirman,

وَإِن تُطِعۡ أَكۡثَرَ مَن فِي ٱلۡأَرۡضِ يُضِلُّوكَ عَن سَبِيلِ ٱللَّهِۚ إِن يَتَّبِعُونَ إِلَّا ٱلظَّنَّ وَإِنۡ هُمۡ إِلَّا يَخۡرُصُونَ ١١٦

Artinya: "Dan jika kamu menuruti kebanyakan orang-orang yang di muka bumi ini, niscaya mereka akan menyesatkanmu dari jalan Allah. mereka tidak lain hanyalah mengikuti persangkaan belaka, dan mereka tidak lain hanyalah berdusta (terhadap Allah)".

Al-khursu 'dusta'menurut Yusuf Qardhawi, ialah segala ucapan yang didasarkan atas persangkaan dan perkiraan belaka. Dikatakan 'dusta' bagi orang yang berkeyakinan, baik itu sesuai dengan kenyataan maupun tidak, ia mengatakannya tidak didasarkan atas ilmu, tetapi didasarkan atas persangkaan dan perkiraan saja. Orang yang telah melakukan perbuatan demikian bisa dikatakan sebagai pendusta atau pembohong. Meskipun yang diucapkannya itu benar.

Oleh karenanya, Allah SWT. berfirman dalam Al-Qur’an surat Al-Israa’ ayat 36,

وَلَا تَقْفُ مَا لَيْسَ لَكَ بِهِۦ عِلْمٌ ۚ إِنَّ ٱلسَّمْعَ وَٱلْبَصَرَ وَٱلْفُؤَادَ كُلُّ أُو۟لَـٰٓئِكَ كَانَ عَنْهُ مَسْـُٔولًا ﴿٣٦﴾

Artinya: “Dan janganlah kamu mengikuti apa yang kamu tidak mempunyai pengetahuan tentangnya. Sesungguhnya pendengaran, penglihatan dan hati, semuanya itu akan diminta pertanggungan jawabnya”.

Dalam ayat di atas secara tegas Allah SWT. melarang umat-Nya untuk mengikuti dan melakukan suatu perbuatan tanpa ada landasan ilmu pengetahuan. Suatu perbuatan tanpa berlandaskan ilmu pengetahuan hanya akan membuahkan kesesatan dan akan menjurus pada perbuatan yang merusak. Dengan demikian dalam Islam menuntut akal untuk berfikir secara ilmiah yaitu berfikir secara hati-hati, teliti dan berdasarkan bukti yang benar sehingga ia dapat menghasilkan ilmu pengetahuan baru.

Suatu fungsi bervariasi terbatas dapat direpresentasikan kepada manusia sebagai khalifah di bumi dengan fungsi akalnya yang terbatas. Dimana umat manusia dengan akalnya memiliki kemampuan yang bervariasi dalam mengelola dan membangun alam dan seluruh isinya bergantung sejauh mana akal mampu menangkap ilmu pengetahuan. Hal ini Karena meskipun akal mempunyai kemampuan yang besar untuk menangkap ilmu pengetahuan serta menghasilkan ilmu pengetahuan yang baru. Kemudian juga kemampunannya untuk membedakan mana yang hakiki dan mana yang praduga, akal juga tidak terjaga dari kesalahan dalam memahami dan menghasilkan sesuatu. Karena ia dipengaruhi oleh ketergesa-gesaan, kesombongan, hawa nafsu, dan lingkungan sekitarnya baik itu pengaruh baik atau buruk. Itu semua membuat akal tidak dapat menangkap kebenaran dan menyalahi jalan yang lurus, dan menyangka apa yang dilakukan adalah baik, tetapi pada hakekatnya adalah buruk.

Akal juga menyadari, wilayah yang dapat dimasukinya terbatas. Akal hanya dapat memahami sedikit dari sisi-sisi alam ini dan ia juga hanya mengetahuai aspek luar dari sesuatu sedangkan hakekatnya tidak mengetahuinya. Hal ini karena disamping akal yang terbatas, manusia disertai juga dengan kemapuan panca indra dengan segala keterbatasannya seperti penglihatan pendengaran dan lain-lain yang merupakan penghubung antara diri manusia dengan dunia luar.

Oleh karena itu, akal membutuhkan teman yang dapat menuntunnya menuju kebenaran sehingga ia tidak tergelincir. Dengan penolong ini akal manusia akan mengetahui apa yang belum diketahui dan menyelamatkannya dari kebingungan, serta memberikan ketenangan dan kebenaran. Teman yang membantu ini adalah wahyu Ilahi, yang diberikan Allah SWT, melalui Rasul-Rasul-Nya, yang terangkum dalam risalah penutup yakni Al-Qur'an Al-Karim yang merupakan petunjuk bagi manusia. Di dalamnya terdapat banyak petunjuk bagaimana cara menggunakan akal untuk berfikir secara ilmiah, yang mana dengannya manusia dapat menangkap ilmu pengetahuan sehingga dapat membangun dunia serta dapat menjalankan fungsinya sebagi khalifah di muka bumi sesuai dengan yang diridlai Allah SWT.

Berdasarkan paparan di atas, ternyata konsep dalam mempelajari matematika yang merupakan cabang dari ilmu alam (*sains*), sesuai dengan konsep-konsep yang ada dalam Al-Qur'an. Hal ini menunjukkan bahwa Islam tidak bertentangan dengan ilmu pengetahuan. Karena agama yang hak adalah agama yang diridloi oleh Allah SWT, yakni Islam. Sebagaimana firman Allah SWT. dalam surat Al-Maa'idah ayat 3 yang berbunyi,

.... ٱلۡيَوۡمَ أَكۡمَلۡتُ لَكُمۡ دِينَكُمۡ وَأَتۡمَمۡتُ عَلَيۡكُمۡ نِعۡمَتِي وَرَضِيتُ لَكُمُ ٱلۡإِسۡلَٰمَ دِينٗاۚ ..... ﴿٣﴾

Artinya: "...pada hari ini telah Kusempurnakan untuk kamu agamamu, dan telah Ku-cukupkan kepadamu nikmat-Ku, dan telah Ku-ridhai Islam itu Jadi agama bagimu....".

Jadi dengan mempelajari matematika, selain melatih kita untuk untuk bersikap sabar, teliti dan tidak tergesa-gesa dalam melakukan suatu perbuatan, juga dapat menambah keimanan dan ketaqwaan. Karena apa yang ada dalam matematika juga sejalan dengan apa yang ada dalam Al-Quran.

BAB IV

PENUTUP

4.1. Kesimpulan

Jika f merupakan fungsi bervariasi terbatas pada interval $[a, b]$ dengan P adalah domain dari f yang berupa suatu partisi selang $[a, b]$, maka fungsi $f : [a, b] \longrightarrow R$ memiliki struktur dan sifat sebagai berikut:

1. Struktur Fungsi Bervariasi Terbatas Pada Interval $[a, b]$:
   - Jika P_1 dan P_2 dua partisi dari $[a, b]$ dengan $P_1 \subseteq P_2$, maka $V(f; P_1; [a, b]) \leq V(f; P_2; [a, b])$
   - Jika $\mathrm{P_1}$ dan $\mathrm{P_2}$ dua partisi sembarang dari $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$, maka ada suatu partisi P dari $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ sehingga $\mathrm{V(f; P; [a, b])} \geq \max\{\mathrm{V(f; P_1; [a, b]), V(f; P_2; [a, b])}\}$
   - Misal diberikan $\mathrm{f: I \rightarrow R}$ dan andaikan $\mathrm{c \in I}$. Maka $\mathrm{V(f; P; [a, b]) = V(f; P; [a, c]) + V(f; P; [c, b])}$
2. Sifat Fungsi Bervariasi Terbatas Pada Interval $[a, b]$:
   - Jika fungsi f monoton pada $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$, maka f bervariasi terbatas pada $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$.
   - Jika fungsi f kontinu pada $[a, b]$ dan f' terbatas pada (a, b), maka fungsi f bervariasi terbatas pada $[a, b]$.
   - Jika f bervariasi terbatas pada $[a, b]$, maka f terbatas pada $[a, b]$.

4.2. Saran

Selaku penulis dan pengamat, maka dalam hal ini ada beberapa saran yang yang bisa diberikan demi kemajuan dan perkembangan ilmu matematika di

Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

4.2.1. Bagi Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang.

Pada hasil penelitian dalam skripsi yang dilakukan diharapkan dapat menginformasikan dan memberikan ilmu, wawasan, serta pengetahuan kepada lembaga akan pentingnya masalah fungsi bervariasi terbatas. Karena konsep ini di perlukan untuk menyelesaikan masalah integral Reimann-Stieltjes sehingga untuk selanjutnya lembaga dapat memberikan bahasan tersebut di dalam bangku perkuliahan.

4.2.2. Bagi Peneliti Selanjutnya.

Mengembangkan dan memperluas tema yang sudah diteliti dalam skripsi studi literatur ini, terutama ditekankan pada pembahasan bervariasi terbatas pada Ruang Euclide R..

Atas perhatian dan kebijaksanaannya, sebelum dan sesudahnya penulis ucapkan terima kasih.

DAFTAR PUSTAKA

Ad-Dimasyqi, Ibnu Kasir. 2000. *Tafsir Ibnu Kasir*. Juz 4. Bandung: Sinar Baru Algensindo.

Azwar, Saifuddin. 2004. *Metode Penelitian*. Yogyakarta: Pustaka Pelajar.

Bartle, R. G. and Serbet, D. R. 1994. *Introduction to Real Analysis*. New York: John Wiley and Sons.

Hutahaean, Effendi. 1989. *Materi Pokok Analisis Real II*. Jakarta: Universitas Terbuka.

Masruri, Hadi dan Rossidy, Imron. 2007. *Filsafat Sains dalam Al-Qur'an*. Malang: UIN Malang Press.

Muthmainnah. 2008. *Ukuran Lebesgue dalam Garis Bilangan Real*. Malang: Skripsi Jurusan Matematika UIN Malang.

Parzynski, William R., dkk. 1982. *Introduction to Mathematical Analysis*. Tokyo: McGraw-Hill, InC.

Protter, Marray H. 1998. *Basic Elements of Real Analysis*. New York: Spinger.

Riyanto, Zaki. 2008. *Pengantar Analisis Real I*. (Online). (http://zaki.math.web.id, diakses 13 November 2008).

Sa'adah, Zumrotus. 2008. *Analisis Aproksimasi Padé dan Penerapannya pada Hampiran Fungsi*. Malang: Skripsi Jurusan Matematika UIN Malang.

Stewart, James. 2002. *Kalkulus Jilid I*. Diterjemahkan oleh I Nyoman Susila dan Hendra Gunawa. Jakarta: Erlangga.

Yayasan Penyelenggara Penterjemah Al-Qur'an. 1985. *Al-Quran dan Terjemahannya*. Jakarta: Dept. Agama RI.

DEPARTEMEN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN)
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang (0341)551345
Fax. (0341)572533

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : **Anas Jamil**
NIM : **05510005**
Fakultas/ jurusan : **Sains Dan Teknologi/ Matematika**
Judul skripsi : **Fungsi Bervariasi Terbatas Pada Interval** $[a, b]$
Pembimbing I : **Hairur Rahman, S.Pd, M.Si**
Pembimbing II : **Abdussakir, M.Pd.**

No	Tanggal	HAL	Tanda Tangan
1	5 Mei 2009	Konsultasi Masalah	1.
2	5 Juli	Konsultasi BAB I, II	2.
3	26 Juli	Konsultasi BAB I (kajian agama)	3.
4	27 Juli	Revisi BAB I dan konsultasi BAB III	4.
5	29 Juli	Acc BAB I	5.
6	29 juli	Konsultasi BAB II (kajian agama)	6.
7	3 Agustus	Konsultasi BAB III	7.
8	20 Agustus	Revisi BAB III	8.
9	14 Agustus	Revisi BAB II	9.
10	14 Agustus	Konsultasi BAB II (kajian agama)	10.
11	7 September	Acc BAB III	11.
12	15 September	Revisi BAB II & konsultasi BAB III (kajian agama)	12.
13	2 Oktober	Konsultasi BAB I, II, III, IV	13.
14	2 Oktober	Konsultasi BAB II, II (kajian agama)	14.
15	5 Oktober	ACC BAB I, II, III, IV	15.

Malang, 5 Oktober 2009
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001