KAJIAN SEMI HASIL KALI DALAM PADA SUATU NORMA

SKRIPSI

Oleh:

SHODIQ ALIMIN

NIM. 05510041

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2009

KAJIAN SEMI HASIL KALI DALAM PADA SUATU NORMA

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:

SHODIQ ALIMIN
NIM. 05510041

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2009

KAJIAN SEMI HASIL KALI DALAM PADA SUATU NORMA

SKRIPSI

Oleh:

SHODIQ ALIMIN
NIM. 05510041

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji

Pembimbing I	**Pembimbing II**
Hairur Rahman, S.Pd, M.Si	**Munirul Abidin, M.Ag**
NIP.19800429 200604 1 003	**NIP. 19720420 200212 1 003**

Tanggal, 06 Oktober 2009

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M. Pd
NIP. 1975006 200312 1 001

KAJIAN SEMI HASIL KALI DALAM PADA SUATU NORMA

SKRIPSI

Oleh:

SHODIQ ALIMIN
NIM. 05510041

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal: 09 Oktober 2009

Susunan Dewan Penguji		Tanda Tangan
1. Penguji Utama	: Drs. H. Turmudi, M.Si NIP. 19571005 198203 1 006	( )
2. Ketua Penguji	: Evawati Alisah, M.Pd NIP. 19720604 199903 2 001	( )
3. Sekretaris	: Hairur Rahman, S.Pd, M.Si NIP. 19800429 200604 1 003	( )
4. Anggota	: Munirul Abidin, M.Ag NIP. 19720420 200212 1 003	( )

Mengetahui dan Mengesahkan
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M. Pd
NIP. 1975006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : SHODIQ ALIMIN

NIM : 05510041

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambil alihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri.

Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 06 Oktober 2009

Yang membuat pernyataan

Shodiq Alimin

NIM. 05510041

Motto

....إِنَّ ٱللَّهَ لَا يُغَيِّرُ مَا بِقَوۡمٍ حَتَّىٰ يُغَيِّرُواْ مَا بِأَنفُسِهِمۡۗ ....

Artinya: "….Sesungguhnya Allah tidak merubah Keadaan sesuatu kaum sehingga mereka merubah keadaan yang ada pada diri mereka sendiri…"(QS. Ar-ra'ad:11)

Persembahan

Penulis persembahkan karya ini kepada:

Kedua orang tua tercinta yang senantiasa mendoakan, mendidik dan menyayangiku.

Kedua adikku tersayang

Nuriani dan Khoirul Amin yang tulus dan ikhlas mencurahkan cinta dan kasih sayangnya kepadaku.

Amaliya Rachmi yang selalu memberikan semangat, motivasi dan inspirasi dalam menyelesaikan skripsi ini.

Semoga Allah memberikan kebaikan dunia akhirat

kepada semuanya

KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيْمِ

Syukur alhamdulillah kehadirat Allah SWT. yang telah melimpahkan rahmat, taufik serta hidayah dan inayah-Nya sehingga skripsi dengan judul "*Kajian Semi Hasil Kali Dalam pada Suatu Norma*" ini dapat terselesaikan dengan baik. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi pembaca, terutama dalam pengembangan di bidang matematika.

Sholawat serta salam semoga tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW yang mana beliau telah mengantarkan manusia ke jalan kebenaran.

Keberhasilan penulisan skripsi ini tidak lepas dari bimbingan, pengarahan, dan bantuan dari berbagai pihak baik berupa pikiran, motivasi, tenaga, maupun do'a dan restu. Karena itu penulis mengucapkan terima kasih kepada :

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor Universites Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU., DSc selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang.
3. Abdussakir, M.Pd selaku Ketua Jurusan Matematika yang telah memberikan ijin dan kemudahan kepada penulis untuk menyusun skripsi.
4. Hairur Rahman, S.Pd, M.Si selaku dosen pembimbing yang dengan sabar telah meluangkan waktunya demi memberikan bimbingan dan pengarahan dalam penyelesaian skripsi ini.

5. Munirul Abidin, M.Ag selaku dosen pembimbing agama yang telah memberikan bimbingan dan petunjuk dalam menyelesaikan skripsi ini.
6. Ari kusumastuti, S.Si, M.Pd selaku wali dosen yang telah memberikan motivasi dan bimbingan mulai semester satu hingga semester akhir.
7. Segenap dosen Matematika yang telah berjasa memberikan ilmunya, membimbing dan memberikan motivasi dalam penyelesaian skripsi ini.
8. Kedua orang tua penulis Bapak Sutikno dan Ibu Satunah yang tidak pernah berhenti memberikan kasih sayang, do'a dan dorongan semangat kepada penulis selama ini.
9. Teman-teman matematika angkatan 2005 khususnya Surur, Doni, Amaliya. Terima kasih atas semua pengalaman dan motivasinya dalam penyelesaian penulisan skripsi ini.
10. Teman-teman pesantren Luhur, terima kasih atas keceriaan yang telah diberikan selama kebersamaan kita.
11. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu, yang telah banyak membantu penyelesaian skripsi ini.

Kiranya skripsi ini masih jauh dari sempurna, oleh karena itu penulis mengharapkan kritik dan saran yang sifatnya membangun. Akhirnya, penulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi penulis khususnya dan bagi pembaca pada umumnya.

Malang, 05 Oktober 2009

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Alimin, Shodiq. 2009. ***Kajian Semi Hasil Kali Dalam Pada Suatu Norma***, Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang. Dosen Pembimbing: Hairur Rahman S.Pd, M.Si dan Munirul Abidin, M.Ag

Kata kunci : Hasil Kali Dalam, Seminorma, Semi Hasil Kali Dalam

Dalam aljabar linier, suatu vektor **u** dan **v** pada ruang vektor *V* riil yang dihubungkan dengan perkalian titik $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ dan memenuhi (1) aksioma kehomogenan, (2) aksioma pemjumlahan, (3) aksioma simetris dan (4) aksioma definit positif, maka dikatakan hasil kali dalam. Seperti halnya pada pembahasan ruang vektor atau yang lainnya, hasil kali dalam juga mempunyai sub bagian dari hasil kali dalam yang disebut semi hasil kali dalam. Begitu pula dengan norma yang mempunyai sub bagian yang disebut seminorma.

Penelitian ini dilakukan dengan tujuan untuk mendiskripsikan sifat atau aksioma yang menjadi perbedaan antara hasil kali dalam dan semi hasil kali dalam, dan menjelaskan tentang seminorma yaitu dengan memaparkan dan menjelaskan definisi, membuktikan kebenaran teorema-teorema yang berlaku pada semi hasil kali dalam dan seminorma.

Berdasarkan hasil pembahasan skripsi ini, semi hasil kali dalam adalah fungsi $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ pada ruang veltor riil *V* yang memenuhi empat aksioma. Yaitu:

1) $[k\mathbf{u} + \mathbf{v}, \boldsymbol{w}] = k[\mathbf{u}, \mathbf{w}] + [\mathbf{v}, \mathbf{w}]$
2) $[\mathbf{u}, \mathbf{u}] > 0$ *untuk* $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$
3) $|[\mathbf{u}, \mathbf{v}]|^2 \leq [\mathbf{u}, \mathbf{u}][\mathbf{v}, \mathbf{v}]$
4) $[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = [\mathbf{v}, \mathbf{u}]$

Seminorma dengan lambang yang hampir sama dengan norma hasil kali dalam, yaitu: $\|\mathbf{u}\|$. Akan tetapi nilai seminorma selalu positif dan tidal pernah nol.

Maka jika suatu vektor **u** dan **v** pada ruang vektor *V* riil yang dihubungkan dengan perkalian titik $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ adalah semi hasil kali dalam, maka vektor **u** dan **v** pada ruang vektor *V* riil tersebut juga memenuhi aksioma hasil kali dalam. Sedangkan jika vektor **u** dan **v** pada ruang vektor *V* riil yang dihubungkan dengan perkalian titik $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ adalah hasil kali dalam, maka vektor **u** dan **v** pada ruang vektor *V* riil tersebut belum tentu memenuhi aksioma semi hasil kali dalam.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Al-Quran dan al-Hadits yang merupakan tuntunan umat Islam dalam menjalankan roda kehidupan di dunia, dan sebagai maha sumber ilmu pengetahuan. Sebagaimana yang terdapat pada surat Al-Baqarah ayat 150:

وَمِنۡ حَيۡثُ خَرَجۡتَ فَوَلِّ وَجۡهَكَ شَطۡرَ ٱلۡمَسۡجِدِ ٱلۡحَرَامِۚ وَحَيۡثُ مَا كُنتُمۡ فَوَلُّواْ
وُجُوهَكُمۡ شَطۡرَهُۥ لِئَلَّا يَكُونَ لِلنَّاسِ عَلَيۡكُمۡ حُجَّةٌ إِلَّا ٱلَّذِينَ ظَلَمُواْ مِنۡهُمۡ فَلَا
تَخۡشَوۡهُمۡ وَٱخۡشَوۡنِي وَلِأُتِمَّ نِعۡمَتِي عَلَيۡكُمۡ وَلَعَلَّكُمۡ تَهۡتَدُونَ ١٥٠

Artinya: Dan dari mana saja kamu (keluar), Maka Palingkanlah wajahmu ke arah Masjidil Haram. dan dimana saja kamu (sekalian) berada, Maka Palingkanlah wajahmu ke arahnya, agar tidak ada hujjah bagi manusia atas kamu, kecuali orang-orang yang zalim diantara mereka. Maka janganlah kamu takut kepada mereka dan takutlah kepada-Ku (saja). dan agar Ku-sempurnakan nikmat-Ku atasmu, dan supaya kamu mendapat petunjuk. (*Q.S Al-Baqarah:150)*

Ayat di atas menyebutkan bahwa *Masjidil Haram* merupakan kiblat daripada umat islam di seluruh isi bumi. Dengan artian semua umat islam mengarah pada *Masjidil Haram*. Apabila dihubungkan dengan vektor, maka kejadian tersebut termasuk vektor. Vektor itu mempunyai besaran dan arah. Dalam hal ini seseorang yang sedang melaksanakan sholat mempunyai suatu esensi di dalamnya. Dan itu bisa disebut besaran pada notasi vektor. Arah menghadap kiblat merupakan arah dalam notasi vektor.

Vektor sering dipergunakan dalam banyak cabang matematika murni dan matematika terapan serta dalam ilmu fisika dan teknik. Kita lihat dalam ilmu mekanika, suatu tenaga yang bekerja pada suatu benda. Ada 2 hal pokok yang mempengaruhi tenaga benda tersebut yaitu : besarnya atau kuatnya tenaga itu yang disebut *magnitude*, dan arah pada tenaga itu yang arahnya bisa lurus atau miring ke kanan atau miring ke kiri yang terlihat dari sudutnya. (Assauri, 1980:6)

Dalam ilmu matematika, vektor bisa disajikan secara geometris sebagai ruas garis berarah atau panah dalam ruang berdimensi-2 dan ruang berdimensi-3, arah panah menentukan arah vektor, dan panjang panah menentukan besarnya. Ekor dari panah tersebut disebut *titik pangkal* vektor, dan ujung panah disebut *titik ujung* vektor. (Suminto, 2000:153-154)

Hasil kali dalam pada ruang vektor riil V adalah fungsi yang mengasosiasikan bilangan $\langle \mathbf{u}\,,\ \mathbf{v} \rangle$ dengan masing-masing pasangan vektor **u** dan **v** pada V yang memenuhi aksioma-aksioma hasil kali dalam. sebuah ruang vektor riil dengan sebuah hasil kali dalam dinamakan ruang hasil kali dalam riil. (Suminto jilid 2, 2000:17)

Seperti halnya pada pembahasan ilmu aljabar yang lainnya, suatu ruang vektor mempunyai sub ruang vektor dan suatu ring juga mempunyai sub ring. Dari kajian dan fenomena seperti di atas, penulis ingin mengkaji lebih dalam tentang sub dari hasil kali dalam. Dan penulis memberi judul pada penelitian ini dengan judul *Semi Hasil Kali Dalam pada Suatu Norma*.

1.2 Rumusan Masalah

Dari uraian latar belakang tersebut, penulis merumuskan masalah dalam penelitian skripsi ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana hubungan antara hasil kali dalam dengan semi hasil kali dalam?
2. Bagaimanakah norma pada semi hasil kali dalam?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang dikaji sebelumnya, maka tujuan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mendiskripsikan hubungan antara hasil kali dalam dan semi hasil kali dalam dengan konsep yang menghubungkan antara keduanya.
2. Mendiskripsikan norma pada semi hasil kali dalam.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari pembahasan masalah ini adalah sebagai berikut:

1. Manfaat bagi Penulis

   Untuk memperdalam dan mengembangkan wawasan disiplin ilmu yang telah dipelajari tentang ilmu aljabar terutama tentang semi hasil kali dalam pada suatu norma.

2. Manfaat bagi instansi

   Sumbangan pemikiran sebagai kontribusi nyata terhadap Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.

3. Manfaat bagi Pembaca

   Sebagai tambahan wawasan dan informasi tentang semi hasil kali dalam pada suatu norma.

1.5 Batasan Masalah

Agar kajian ini tidak terlalu luas pembahasannya, maka kami membatasi masalah kajian ini adalah ruang semi hasil kali dalam pada ruang norma pada bilangan riil.

1.6 Metode Penelitian

Metode penelitian yang kami pakai untuk menyelesaikan masalah di atas adalah metode kepustakaan. Kegiatan penelitian hampir semuanya selalu bertolak dari ilmu pengetahuan yang sudah ada sebelumnya. Pada semua ilmu pengetahuan, ilmuwan selalu memulai penelitiannya dengan cara mengutip apa-apa yang sudah dikemukakan ahli lain. Peneliti memanfaatkan teori-teori yang ada di buku atau hasil penelitian untuk kepentingan penelitiannya. (Hasan, 2002:45)

Adapun langkah-langkah yang ditempuh oleh penulis untuk menyelesaikan penelitian ini adalah:

1) Tahap pertama yang kami lakukan untuk penelitian ini adalah mendefinisikan semi hasil kali dalam.
2) Selanjutnya kami akan mencari kedudukan semi hasil kali dalam pada ruang norma.
3) Tahap ketiga adalah mencari hubungan antara semi hasil kali dalam dengan hasil kali dalam.

1.7 Sistematika Penelitian

Agar dalam pembahasan penelitian ini sistematis, maka penulis menyusun sistematika penulisan sebagai berikut :

BAB I : Pendahuluan

Pendahuluan meliputi: latar belakang, rumusan masalah, tujuan pembahasan, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian dan sistematika pembahasan.

BAB II : Kajian pustaka

Kajian pustaka berisi tentang definisi dan teorema.

BAB III : Pembahasan

Pembahasan berisi kajian tentang semi hasil kali dalam pada suatu norma.

BAB IV : Penutup

Penutup berisi kesimpulan dan saran.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Vektor

Vektor bisa disajikan secara geometris sebagai ruas garis berarah atau panah dalam ruang berdimensi-2 dan ruang berdimensi-3. Arah panah menentukan arah vektor, dan panjang panah menentukan besarnya. Ekor dari panah tersebut disebut *titik pangkal* vektor, dan ujung panah disebut *titik ujung* vektor. Vektor ditulis dengan huruf kecil tebal (misalnya, **a**, **k**, **v**, **w**, dan **x**). Ketika kita bicara vektor maka kita juga akan menyebut bilangan sebagai *skalar*. Semua skalar adalah bilangan riil dan dinyatakan dengan huruf kecil miring (misalnya, *a*, *k*, *v*, *w*, dan *x*).

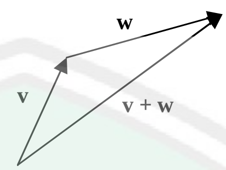
Misalnya kita definisikan vektor **v** mempunyai titik pangkal $\boldsymbol{A}$ dan titik ujung $\boldsymbol{B}$, maka dituliskan $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$.(Gambar 2.1) (Anton, 2000:153-154)

Gambar 2.1 Vektor $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$

2.2 Operasi Vektor

Definisi 2.2.1 Operasi Jumlah (Suminto jilid 1, 2000:154)

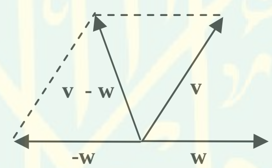
Jika **v** *dan* **w** *adalah dua vektor sebarang, maka* ***jumlah*** **v** + **w** *adalah vektor yang ditentukan sebagai berikut: Letakkan vektor* **w** *sedemikian* *sehingga titik pangkalnya bertautan dengan titik ujung* **v**. *Vektor* **v** + **w** *disajikan oleh panah dari titik pangkal* **v** *ke titik ujung* **w** (Gambar 2.2).



Gambar 2.2 Vektor **v** + **w**

Definisi 2.2.2 Operasi Selisih **(**Suminto jilid 1, 2000:155)

Jika **v** *dan* **w** *adalah dua vektor sebarang, maka* ***selisih*** **w** *dari* **v** *didefinisikan sebagai* $\mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{v} + (-\mathbf{w})$ (Gambar 2.3)



Gambar 2.3 Vektor $\mathbf{v} - \mathbf{w}$

Definisi 2.2.3 Hasil Kali Skalar (Suminto jilid 1, 2000:156)

Jika **v** *adalah suatu vektor tak-nol dan k adalah suatu bilangan real tak-nol (skalar), maka* ***hasil kali*** *k***v** *didefinisikan sebagai vektor yang panjangnya* $|k|$ *kali panjang* **v** *dan yang arahnya sama dengan arah* **v** *jika* $k > 0$ *dan berlawanan arah dengan* **v** *jika* $k < 0$. *Kita definisikan* $k\mathbf{v} = 0$ *jika* $k = 0$ *atau* $\mathbf{v} = 0$.

Contoh 2.2.4 (Suminto jilid 1, 2000:160)

Jika $\mathbf{v} = (1,\ -3, 2)$ dan $\mathbf{w} = (4, 2, 1)$ maka

$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (1 + 4, (-3) + 2, 2 + 1)$

$$= (5, -1, 3)$$

$$-\mathbf{w} = (-4, -2, -1)$$

$$\mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{v} + (-\mathbf{w})$$

$$= (1 + (-4), (-3) + (-2), 2 + (-1))$$

$$= (-3, -5, 1)$$

$$\mathbf{2v} = 2(1, -3, 2) = (2, -6, 4)$$

2.3 Ruang Vektor

Definisi 2.3.1 Ruang Vektor (Suminto, 2000:268)

Diberikan V sebarang himpunan tak-kosong dari objek dimana dua operasi didefinisikan, yaitu penjumlahan dan perkalian dengan skalar (bilangan). Yang dimaksud dengan ***penjumlahan*** *adalah suatu aturan yang menghubungkan setiap pasangan objek* **u** *dan* **v** *dalam V dengan suatu objek* $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ *yang disebut sebagai* ***jumlah*** **u** *dan* **v,** *yang dimaksud dengan* ***perkalian skalar*** *adalah suatu aturan yang menghubungkan setiap skalar k dan setiap objek* **u** *dalam V dengan objek k***u***, yang disebut* ***perkalian skalar*** *dari* **u** *dengan k. Jika aksioma berikut ini dipenuhi oleh semua objek* **u, v, w** *dalam V dan semua skalar k dan l, maka kita sebut V sebagai* ***ruang vektor*** *dan kita sebut objek dalam V disebut sebagai vektor.*

1) Jika **u** dan **v** adalah objek-objek dalam *V*, maka **u** + **v** berada dalam *V*.
2) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ (Komutatif)
3) $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$ (Assosiatif penjumlahan)

4) Ada suatu objek $\mathbf{0}$ dalam *V*, yang disebut suatu *vektor nol* untuk *V*, sedemikian sehingga $\mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$ untuk semua $\mathbf{u}$ dalam *V* .

5) Untuk setiap $\mathbf{u}$ dalam *V*, ada suatu objek $-\mathbf{u}$ dalam *V*, yang disebut *negatif* dari $\mathbf{u}$, sedemikian sehingga $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = (-\mathbf{u}) + \mathbf{u} = \mathbf{0}$.

6) Jika *k* adalah sebarang skalar dan $\mathbf{u}$ adalah sebarang objek dalam *V*, maka $k\mathbf{u}$ ada dalam *V*.

7) $k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$ (Distributif kiri)

8) $(k + l)\mathbf{u} = k\mathbf{u} + l\mathbf{u}$ (Distributif kanan)

9) $k(l\mathbf{u}) = (kl)(\mathbf{u})$ (Assosiatif Perkalian)

10) $1\,\mathbf{u} = \mathbf{u}$

*Contoh 2.3.2 (*Suminto, 2000:269-270*)*

Tunjukkan bahwa himpunan *V* dari semua matriks 2 x 2 dengan anggota bilangan riil merupakan suatu ruang vektor jika penjumlahan vektor didefinisikan sebagai penjumlahan matriks dan perkalian skalar vektor didefinisikan sebagai perkalian skalar matriks.

Penyelesaian.

Diberikan $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}$ dan $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix}$ adalah objek dalam *V*

Aksioma 1) kita tunjukkan bahwa $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ adalah suatu objek dalam *V*, yaitu harus ditunjukkan bahwa $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ adalah suatu matriks 2 x 2. Itu terbukti dari definisi penjumlahan matriks, karena

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} + v_{11} & u_{12} + v_{12} \\ u_{21} + v_{21} & u_{22} + v_{22} \end{bmatrix}$$

Jadi terbukti bahwa $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ adalah suatu objek dalam *V*.

Aksioma 2), Komutatif

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} + v_{11} & u_{12} + v_{12} \\ u_{21} + v_{21} & u_{22} + v_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} v_{11} + u_{11} & v_{12} + u_{12} \\ v_{21} + u_{21} & v_{22} + u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \mathbf{v} + \mathbf{u}$$

Jadi terbukti komutatif

Aksioma 3), Assosiatif penjumlahan

$$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{11} + w_{11} & v_{12} + w_{12} \\ v_{21} + w_{21} & v_{22} + w_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} u_{11} + v_{11} + w_{11} & u_{12} + v_{12} + w_{12} \\ u_{21} + v_{21} + w_{21} & u_{22} + v_{22} + w_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} u_{11} + v_{11} & u_{12} + v_{12} \\ u_{21} + v_{21} & u_{22} + v_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix}$$

$$= (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$$

Jadi terbukti Assosiatif penjumlahan

Aksioma 4), Ada suatu objek $\mathbf{0}$ dalam *V*, sedemikian sehingga $\mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$ untuk semua $\mathbf{u}$ dalam *V*.

kita definisikan objek $\mathbf{0}$ dalam *V* sebagai berikut

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Maka

$$\mathbf{0} + \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{u}$$

Demikian pula $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$

Jadi terbukti terdapat suatu objek $\mathbf{0}$ dalam *V*, sedemikian sehingga $\mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$ untuk semua **u** dalam *V*.

Aksioma 5), Terdapat suatu objek – **u** dalam *V*, yang disebut *negatif* dari **u**, sedemikian sehingga $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = (-\mathbf{u}) + \mathbf{u} = \mathbf{0}$.

kita definisikan objek $-\mathbf{u}$ dalam *V* sebagai berikut

$$-\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -u_{11} & -u_{12} \\ -u_{21} & -u_{22} \end{bmatrix}$$

Maka

$$\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -u_{11} & -u_{12} \\ -u_{21} & -u_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} u_{11} - u_{11} & u_{12} - u_{12} \\ u_{21} - u_{21} & u_{22} - u_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Jadi terbukti terdapat suatu objek – **u** dalam *V*, yang disebut *negatif* dari **u**, sedemikian sehingga $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = (-\mathbf{u}) + \mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Aksioma 6), Jika *k* adalah sebarang skalar dan **u** adalah sebarang objek dalam *V*, maka *k***u** ada dalam *V*.

untuk *k* sebarang skalar sehingga *k***u** adalah matriks 2 x 2

$$k\mathbf{u} = k \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ku_{11} & ku_{12} \\ ku_{21} & ku_{22} \end{bmatrix}$$

Jadi terbukti jika *k* adalah sebarang skalar dan **u** adalah sebarang objek dalam *V*, maka *k***u** ada dalam *V*.

Aksioma 7), Distributif kiri

$$k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k \begin{bmatrix} u_{11} + v_{11} & u_{12} + v_{12} \\ u_{21} + v_{21} & u_{22} + v_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} k(u_{11} + v_{11}) & k(u_{12} + v_{12}) \\ k(u_{21} + v_{21}) & k(u_{22} + v_{22}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ku_{11} + kv_{11} & ku_{12} + kv_{12} \\ ku_{21} + kv_{21} & ku_{22} + kv_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ku_{11} & ku_{12} \\ ku_{21} & ku_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} kv_{11} & kv_{12} \\ kv_{21} & kv_{22} \end{bmatrix}$$

$$= k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$$

Jadi terbukti distributif kiri

Aksioma 8), Distributif kanan

$$(k + l)\mathbf{u} = (k + l) \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (k + l)u_{11} & (k + l)u_{12} \\ (k + l)u_{21} & (k + l)u_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ku_{11} + lu_{11} & ku_{12} + lu_{12} \\ ku_{21} + lu_{21} & ku_{22} + lu_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ku_{11} & ku_{12} \\ ku_{21} & ku_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} lu_{11} & lu_{12} \\ lu_{21} & lu_{22} \end{bmatrix}$$

$$= k\mathbf{u} + l\mathbf{u}$$

Jadi terbukti distributif kanan

Aksioma 9), Assosiatif Perkalian

$$k(l\mathbf{u}) = k \begin{bmatrix} lu_{11} & lu_{12} \\ lu_{21} & ku_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} klu_{11} & klu_{12} \\ klu_{21} & klu_{22} \end{bmatrix}$$

$$= kl \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}$$

$$= (kl)(\mathbf{u})$$

Jadi terbukti Assosiatif Perkalian

Aksioma 10), terdapat skalar 1 sehingga 1 $\mathbf{u} = \mathbf{u}$

$$1\,\mathbf{u} = 1\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{u}$$

Jadi terbukti terdapat skalar 1 sehingga 1 $\mathbf{u} = \mathbf{u}$

Karena memenuhi kesepuluh aksioma ruang vektor, maka himpunan *V* dari semua matriks 2 x 2 dengan anggota bilangan riil merupakan suatu ruang vektor.

Teorema 2.3.3 (Bondan, 1998:106-107)

Jika V adalah ruang vektor dan **x** *adalah sebarang elemen dari V, maka*

1) $0.\mathbf{x} = \mathbf{0}$
2) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{0}$ *berakibat* $\mathbf{y} = -\mathbf{x}$ *(artinya, invers penjumlahan dari x adalah tunggal)*
3) $(-\mathbf{1})\mathbf{x} = -\mathbf{x}$

Bukti.

1) $0.\mathbf{x} = \mathbf{0}$

Diberikan

$\mathbf{x} = 1.\mathbf{x}$ Aksioma 10 ruang vektor

$= (1 + 0)\mathbf{x}$ Aksioma 4 ruang vektor

$= 1.\mathbf{x} + 0.\mathbf{x}$ Aksioma 8 ruang vektor

$= \mathbf{x} + 0.\mathbf{x}$ Aksioma 10 ruang vektor

Jadi

$(-\mathbf{x}) + \mathbf{x} = (-\mathbf{x}) + (\mathbf{x} + 0.\mathbf{x})$ Subtitusi **x = x + 0.x**

$= \big((-\mathbf{x}) + \mathbf{x}\big) + 0.\mathbf{x}$ Aksioma 3 ruang vektor

$\mathbf{0} = \mathbf{0} + 0.\mathbf{x}$ Aksioma 5 ruang vektor

$\mathbf{0} = 0.\mathbf{x}$ Aksioma 4 ruang vektor

2) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{0}$ *berakibat* $\mathbf{y} = -\mathbf{x}$ *(artinya, invers penjumlahan dari* $\mathbf{x}$ *adalah tunggal)*

Misalkan bahwa $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{0}$, Maka

$-\mathbf{x} = -\mathbf{x} + \mathbf{0}$ Aksioma 4 ruang vektor

$= -\mathbf{x} + (\mathbf{x} + \mathbf{y})$ Subtitusi $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{0}$

$= (-\mathbf{x} + \mathbf{x}) + \mathbf{y}$ Aksioma 3 ruang vektor

$= \mathbf{0} + \mathbf{y}$ Aksioma 5 ruang vektor

$-\mathbf{x} = \mathbf{y}$ Aksioma 4 ruang vektor

3) $(-1)\mathbf{x} = -\mathbf{x}$

Ambil $0.\mathbf{x} = \mathbf{0}$, Maka

$\mathbf{0} = 0.\mathbf{x}$

$= (1 + (-1))\mathbf{x}$ Aksioma 4 ruang vektor

$= 1\mathbf{x} + (-1)\mathbf{x}$ Aksioma 8 ruang vektor

$\mathbf{0} = \mathbf{x} + (-1)\mathbf{x}$ Aksioma 10 ruang vektor

$(-1)\mathbf{x} = -\mathbf{x}$ Teorema $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{0}$ *berakibat* $\mathbf{y} = -\mathbf{x}$

Contoh 2.3.4

Jika vektor $\mathbf{x} = (3,5)$ apakah memenuhi teorema 2.3.3

1) $0.\mathbf{x} = \mathbf{0}$

$0.(3,5) = (0.3, 0.5) = (0,0) = \mathbf{0}$

2) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{0}$ *berakibat* $\mathbf{y} = -\mathbf{x}$

$(3,5) + \mathbf{y} = (0,0)$

$\boldsymbol{y} = (0,0) - (3,5)$

$$\boldsymbol{y} = (0-3, 0-5)$$

$$\boldsymbol{y} = (-3,-5) = -(3,5)$$

3) $(-1)\mathbf{x} = -\mathbf{x}$

$$(-1)(3,5) = ((-1).3, (-1).5)$$

$$= (-3,-5) = -(3,5)$$

2.4 Hasil Kali Dalam

Definisi 2.4.1. Hasil Kali Dalam (Seymour, 2004:198)

Misalkan V adalah ruang vektor real. Diberikan setiap pasangan vektor **u,v** $\in$ *V terdapat bilangan riil dilambangkan dengan* $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$. *Fungsi ini disebut hasi kali dalam riil pada V, jika memenuhi aksioma-aksioma berikut*:

1) (*Sifat Linear*): $\langle k\mathbf{u_1} + l\mathbf{u_2},\ \mathbf{v} \rangle = k\langle \mathbf{u_1}, \mathbf{v} \rangle + l\langle \mathbf{u_2}, \mathbf{v} \rangle$.

2) (*Sifat Simetris*): $\langle \mathbf{u},\ \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v},\ \mathbf{u} \rangle$.

3) (*Sifat Definit Positif*): $\langle \mathbf{u},\ \mathbf{u} \rangle \geq 0$.; dan $\langle \mathbf{u},\ \mathbf{u} \rangle = 0$ jika dan hanya jika $\mathbf{u} = 0$.

Ruang vektor *V* dengan hasil kali dalam disebut *ruang hasil kali dalam.*

Dalam buku (Suminto, 2000:18) *Aksioma Sifat Linier* dipecah menjadi 2 bagian yaitu: *Aksioma Kehomogenan* dan *Aksioma Penjumlahan* yang didefinisikan sebagai berikut:

$k\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = k\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ Aksioma Kehomogenan

$\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ Aksioma Penjumlahan

Contoh 2.4.2

Misalnya $W \subseteq R^3$ yang dilengkapi dengan operasi hasil kali dalam berbentuk:

$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 2u_1v_1 + u_2v_2 + 3u_3v_3, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$

Tunjukkan bahwa W adalah ruang hasil kali dalam

Jawab:

Misalnya $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in W$

1) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 2u_1v_1 + u_2v_2 + 3u_3v_3$

$= 2v_1u_1 + v_2u_2 + 3v_3u_3$

$= \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$ Terbukti simetris

2) $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3), (w_1, w_2, w_3) \rangle$

$= 2(u_1 + v_1)w_1 + (u_2 + v_2)w_2 + 3(u_3 + v_3)w_3$

$= 2u_1w_1 + 2v_1w_1 + u_2w_2 + v_2w_2 + 3u_3w_3 + 3v_3w_3$

$= (2u_1w_1 + u_2w_2 + 3u_3w_3) + (2v_1w_1 + v_2w_2 + 3v_3w_3)$

$= \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ Terbukti penjumlahan

3) Untuk suatu $k \in R$,

$\langle k\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle (ku_1, ku_2, ku_3), (v_1, v_2, v_3) \rangle$

$= 2ku_1v_1 + ku_2v_2 + ku_3v_3$

$= k(2u_1v_1 + u_2v_2 + 3u_3v_3)$

$= k\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ Terbukti homogen

4) $\langle \mathbf{u}\,,\ \mathbf{u}\rangle = 2{u_1}^2 + {u_2}^2 + 3{u_3}^2$

Jelas bahwa $\langle \mathbf{u}\,,\ \mathbf{u}\rangle \geq 0$, karena nilai ${u_1}^2$ selalu positif dan ketika $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ maka $\langle \mathbf{u}\,,\ \mathbf{u}\rangle = 2(0)^2 + 0^2 + 3(0)^2 = 0$

Terbukti definit positif

Teorema 2.4.3 (Suminto, 2000:27)

Jika **u, v,** *dan* **w** *adalah vektor-vektor dalam suatu ruang hasil kali dalam real, dan k adalah sebarang skalar, maka:*

1) $\langle \mathbf{0}\,, \mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{v}\,,\ \mathbf{0}\rangle = 0$

2) $\langle \mathbf{u}\,,\ \mathbf{v}+\mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{u}\,,\ \mathbf{v}\rangle + \langle \mathbf{u}\,,\ \mathbf{w}\rangle$

3) $\langle \mathbf{u}\,,\ k\mathbf{v}\rangle = k\langle \mathbf{u}\,,\ \mathbf{v}\rangle$

4) $\langle \mathbf{u}-\mathbf{v}\,,\ \mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{u}\,,\ \mathbf{w}\rangle - \langle \mathbf{v}\,,\ \mathbf{w}\rangle$

5) $\langle \mathbf{u}\,,\ \mathbf{v}-\mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{u}\,,\ \mathbf{v}\rangle - \langle \mathbf{u}\,,\ \mathbf{w}\rangle$

Bukti.

1) $\langle \mathbf{0}\,, \mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{v}\,,\ \mathbf{0}\rangle = 0$

$\langle \mathbf{0}\,, \mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{v} + (-\mathbf{v}\,), \mathbf{v}\rangle$ Ambil $0 = \mathbf{v} + (-\mathbf{v})$

$= \langle \mathbf{v}\,, \mathbf{v}\rangle + \langle (-\mathbf{v})\,, \mathbf{v}\rangle$ Aksioma Penjumlahan

$= \langle \mathbf{v}\,, \mathbf{v}\rangle - \langle \mathbf{v}\,, \mathbf{v}\rangle$ Aksioma Kehomogenan

$\langle \mathbf{0}\,, \mathbf{v}\rangle = 0$

$\langle \mathbf{0}\,, \mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{v}\,,\ \mathbf{0}\rangle = 0$ Aksioma Kesimetrisan

2) $\langle \mathbf{u}\,,\ \mathbf{v}+\mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{u}\,,\ \mathbf{v}\rangle + \langle \mathbf{u}\,,\ \mathbf{w}\rangle$

$\langle \mathbf{u}\,,\ \mathbf{v}+\mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{v}+\mathbf{w}\,, \mathbf{u}\rangle$ Aksioma Kesimetrisan

$= \langle \mathbf{v}\,,\ \mathbf{u}\rangle + \langle \mathbf{w}\,,\ \mathbf{u}\rangle$ Aksioma Penjumlahan

$= \langle \mathbf{u}\,,\ \mathbf{v}\rangle + \langle \mathbf{u}\,,\ \mathbf{w}\rangle$ Aksioma Kesimetrisan

3) $\langle \mathbf{u}, k\mathbf{v} \rangle = k\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$

$\langle \mathbf{u}, k\mathbf{v} \rangle = \langle k\mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$ Aksioma Kesimetrisan

$= k\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$ Aksioma Kehomogenan

$= k\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ Aksioma Kesimetrisan

4) $\langle \mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$

$\langle \mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u} + (-\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle$

$= \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle (-\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle$ Aksioma Penjumlahan

$= \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ Aksioma Kehomogenan

5) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$

$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v} - \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle$ Aksioma Kesimetrisan

$= \langle \mathbf{v} + (-\mathbf{w}), \mathbf{u} \rangle$

$= \langle \mathbf{v}, -\mathbf{w} \rangle + \langle (-\mathbf{w}), \mathbf{u} \rangle$ Aksioma Penjumlahan

$= \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle - \langle \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle$ Aksioma Kehomogenan

$= \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$ Aksioma Kesimetrisan

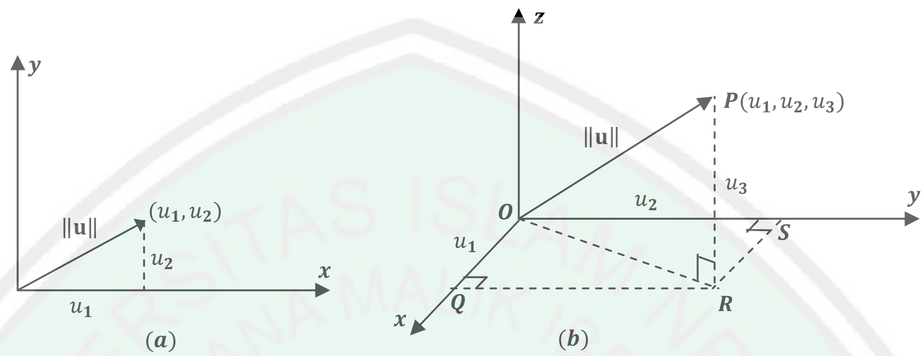
2.5 Norma Suatu Vektor

Definisi 2.5.1 (Suminto jilid 1, 2000:165-167)

Panjang suatu vektor **u** *sering disebut sebagai norma* **u** *dan dinyatakan sebagai* $\|\mathbf{u}\|$. *Dari teorema Pythagoras kita dapatkan bahwa norma suatu vektor* $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ *dalam ruang berdimensi-2 adalah*

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

(Gambar 2.4a). Anggap **u** adalah vektor dalam ruang berdimensi-3. Dengan menggunakan Gambar 2.4b dan dua penerapan teorema Pythagoras, kita peroleh



Gambar 2.4

$$\|\mathbf{u}\|^2 = (OR)^2 + (RP)^2$$
$$= (OQ)^2 + (OS)^2 + (RP)^2$$
$$= u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$$

Jadi, $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$

Contoh 2. 5. 2

Norma vektor $\mathbf{u} = (-3, 2, 1)$ adalah

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{(-3)^2 + (2)^2 + (1)^2}$$

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{9 + 4 + 1}$$

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{14}$$

2.6 Norma pada Hasil Kali Dalam

Definisi 2.6.1 (Suminto jilid 2, 2000:20-21)

Jika V adalah suatu ruang hasil kali dalam, maka norma atau panjang suatu vektor $\mathbf{u}$ *dalam V dinyatakan dengan* $\|\mathbf{u}\|$ *dan didefinisikan sebagai*

$$\|\mathbf{u}\| = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle^{\frac{1}{2}}$$

Jarak antara dua titik vektor $\boldsymbol{u}$ *dan* $\boldsymbol{v}$ *dinyatakan dengan* $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ *dan didefinisikan sebagai*

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$$

Contoh 2.6.2

Jika $\mathbf{u} = (3, -5, 2)$ dan $\mathbf{v} = (4, 2, -1)$ adalah vektor-vektor dalam R^3 dengan hasil kali dalam, maka

$$\|\mathbf{u}\| = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\langle (3, -5, 2), (3, -5, 2) \rangle}$$

$$= \sqrt{3.3 + (-5).(-5) + 2.2}$$

$$= \sqrt{9 + 25 + 4} = \sqrt{38}$$

dan

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \langle \mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{(3 - 4)^2 + ((-5) - 2)^2 + (2 - (-1))^2}$$

$$= \sqrt{(-1)^2 + (-7)^2 + 3^2}$$

$$= \sqrt{1 + 42 + 9} = \sqrt{52}$$

Teorema 2.6.3 Ketaksamaan Cauchy-Schwarz (Suminto jilid 2, 2000:32)

Jika **u** *dan* **v** *adalah vektor-vektor dalam suatu ruang hasilkali-dalam V, maka*

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$$

Bukti.

Jika **u** = 0, maka $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| = 0 = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$

Jika $\mathbf{u} \neq 0$

Anggap $a = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle, b = 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle, c = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$ dan anggap t adalah sebarang bilangan real.

Dengan menggunakan teorema kepositifan, hasil kali dalam sebarang vektor dengan dirinya sendiri selalu tak-negatif. oleh karena itu,

$$0 \leq \langle (t\mathbf{u} + \mathbf{v}), (t\boldsymbol{u} + \mathbf{v}) \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle t^2 + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle t + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$$
$$= at^2 + bt + c$$

Ketaksamaan ini menyatakan bahwa polinom kuadratik $at^2 + bt + c$ bisa tidak mempunyai akar riil atau dua akar riil yang sama. Dengan demikian diskriminannya pasti memenuhi ketaksamaan

$b^2 - 4ac \leq 0$

$(2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle)^2 - 4\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \leq 0$ Subtitusi *a*,*b*,*c* ke bentuk **u** dan **v**

$4\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2 - 4\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \leq 0$

$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2 - \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \leq 0$ Dibagi 4

$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2 \leq \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$

$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle^{\frac{1}{2}}\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle^{\frac{1}{2}}$ Diakarkan

$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$ Karena $\|\mathbf{u}\| = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle^{\frac{1}{2}}$

Contoh 2.6.4

Jika $\mathbf{u} = (4,6)$ dan $\mathbf{v} = (3,-2)$ vektor-vektor dalam suatu ruang hasilkali-dalam *V* apakah memenuhi teorema 2.6.3

$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| = |\langle (4,6), (3,-2) \rangle|$

$= |(4.3 + 6.(-2))|$

$= |12 + (-12)|$

$= 0$

$\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle^{\frac{1}{2}} \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle^{\frac{1}{2}}$

$= \langle (4,6), (4,6) \rangle^{\frac{1}{2}} . \langle (3,-2), (3,-2) \rangle^{\frac{1}{2}}$

$= \sqrt{(4.4 + 6.6)}.\sqrt{(3.3 + (-2).(-2))}$

$= \sqrt{(16 + 36)} . \sqrt{(9 + 4)}$

$= \sqrt{52}.\sqrt{13} = \sqrt{676}$

Karena $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| = 0$ dan $\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| = \sqrt{676}$

Maka $\mathbf{u} = (4,6)$ dan $\mathbf{v} = (3,-2)$ memenuhi teorema 2.6.3

Teorema 2.6.5 (Suminto jilid 2, 2000:34)

Jika $\mathbf{u}$ *dan* $\mathbf{v}$ *adalah vektor-vektor dalam suatu ruang hasil kali dalam* V, *dan jika k adalah sebarang skalar, maka*:

1) $\|\mathbf{u}\| \geq 0$
2) $\|\mathbf{u}\| = 0$ jika dan hanya jika $\mathbf{u} = 0$
3) $\|k\mathbf{u}\| = |k|\|\mathbf{u}\|$
4) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$ (Ketaksamaan Segitiga)

Bukti

1) $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle} \geq 0$

2) $\Longrightarrow \|\mathbf{u}\| = 0$

$\sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle} = 0$, maka $\mathbf{u} = 0$

$\Longleftarrow$ jika $\mathbf{u} = 0$

$$\sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle} = \sqrt{\langle \mathbf{0}, \mathbf{0} \rangle}$$

$$= 0$$

$$\|\mathbf{u}\| = 0$$

3) $\|k\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle k\mathbf{u}, k\mathbf{u} \rangle}$

$$= \sqrt{k^2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}$$

$$= \sqrt{k^2}\sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}$$

$$= |k|\|\mathbf{u}\|$$

4) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$

Berdasarkan definisi 2.6.1

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle}$$

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle$$

$$= \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$$

$$\leq \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + 2|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$$

$$\leq \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \quad \text{Teorema 2.6.3}$$

$$= \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2$$

$$= (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2$$

Dengan mengakarkannya kita akan mendapatkan

$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$

Teorema 2.6.6 (Suminto jilid 2, 2000:34)

Jika $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ dan $\mathbf{w}$ *adalah vektor-vektor dalam suatu ruang hasil kali dalam V, maka*:

1) $d(\mathbf{u},\mathbf{v}) \geq 0$
2) $d(\mathbf{u},\mathbf{v}) = 0$ jika dan hanya jika $\mathbf{u} = \mathbf{v}$
3) $d(\mathbf{u},\mathbf{v}) = d(\mathbf{v},\mathbf{u})$
4) $d(\mathbf{u},\mathbf{v}) \leq d(\mathbf{u},\mathbf{w}) + d(\mathbf{v},\mathbf{w})$ (Ketaksamaan Segitiga)

Bukti

1) $d(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u}-\mathbf{v},\mathbf{u}-\mathbf{v}\rangle} \geq 0$
2) $\Rightarrow d(\mathbf{u},\mathbf{v}) = 0$

   $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| = 0$

   $\sqrt{\langle \mathbf{u}-\mathbf{v},\mathbf{u}-\mathbf{v}\rangle} = 0$, dan $\mathbf{u}-\mathbf{v} = 0$

   maka $\mathbf{u} = \mathbf{v}$

   $\Leftarrow$ jika $\mathbf{u} = \mathbf{v}$

   maka $d(\mathbf{u},\mathbf{v}) = d(\mathbf{u},\mathbf{u})$

   $= \|\mathbf{u}-\mathbf{u}\|$

   $= \sqrt{\langle \mathbf{u}-\mathbf{u},\mathbf{u}-\mathbf{u}\rangle}$

   $= \sqrt{\langle \mathbf{0},\mathbf{0}\rangle}$

   $d(\mathbf{u},\mathbf{v}) = 0$
3) $d(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|$

   $= \sqrt{\langle \mathbf{u}-\mathbf{v},\mathbf{u}-\mathbf{v}\rangle}$

   $= \sqrt{\langle \mathbf{v}-\mathbf{u},\mathbf{v}-\mathbf{u}\rangle}$

$$= \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|$$

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = d(\mathbf{v}, \mathbf{u})$$

4) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$

$$= \|\mathbf{u} - \mathbf{v} + \mathbf{w} - \mathbf{w}\|$$

$$= \|\mathbf{u} - \mathbf{w} + \mathbf{w} - \mathbf{v}\|$$

$$\leq \|\mathbf{u} - \mathbf{w}\| + \|\mathbf{w} - \mathbf{v}\|$$

$$= \|\mathbf{u} - \mathbf{w}\| + \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|$$

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = d(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + d(\mathbf{v}, \mathbf{w})$$

2.7 Kajian Vektor Dalam Al-Qur’an

Secara tidak langsung vektor sudah diungkap oleh al-Qur’an. Menurut definisinya vektor adalah besaran yang mempunyai besaran dan arah. Besaran dapat diartikan sebagai nilai yang terkandung, esensi atau istilah lain yang mempunyai bobot. Dalam al-Qur’an terdapat beberapa ayat yang tersirat makna tentang vektor. Yaitu pada surat al-Baqarah ayat 125, 142 dan 150.

وَإِذْ جَعَلْنَا ٱلْبَيْتَ مَثَابَةً لِّلنَّاسِ وَأَمْنًا وَٱتَّخِذُوا۟ مِن مَّقَامِ إِبْرَٰهِـۧمَ مُصَلًّى ۖ وَعَهِدْنَآ إِلَىٰٓ إِبْرَٰهِـۧمَ وَإِسْمَـٰعِيلَ أَن طَهِّرَا بَيْتِىَ لِلطَّآئِفِينَ وَٱلْعَـٰكِفِينَ وَٱلرُّكَّعِ ٱلسُّجُودِ ١٢٥

Artinya: Dan (ingatlah), ketika Kami menjadikan rumah itu (Baitullah) tempat berkumpul bagi manusia dan tempat yang aman. dan Jadikanlah sebahagian maqam Ibrahim tempat shalat. dan telah Kami perintahkan kepada Ibrahim dan Ismail: "Bersihkanlah rumah-Ku untuk orang-orang yang thawaf, yang i'tikaf, yang ruku' dan yang sujud"..(QS. Al-Baqarah:125)

۞ سَيَقُولُ ٱلسُّفَهَآءُ مِنَ ٱلنَّاسِ مَا وَلَّىٰهُمۡ عَن قِبۡلَتِهِمُ ٱلَّتِي كَانُواْ عَلَيۡهَاۚ قُل لِّلَّهِ
ٱلۡمَشۡرِقُ وَٱلۡمَغۡرِبُۚ يَهۡدِي مَن يَشَآءُ إِلَىٰ صِرَٰطٖ مُّسۡتَقِيمٖ ١٤٢

Artinya: Orang-orang yang kurang akalnya[93] diantara manusia akan berkata: "Apakah yang memalingkan mereka (umat Islam) dari kiblatnya (Baitul Maqdis) yang dahulu mereka telah berkiblat kepadanya?" Katakanlah: "Kepunyaan Allah-lah timur dan barat; Dia memberi petunjuk kepada siapa yang dikehendaki-Nya ke jalan yang lurus"[94]. .(QS. Al-Baqarah:142)

[93] Maksudnya: ialah orang-orang yang kurang pikirannya sehingga tidak dapat memahami maksud pemindahan kiblat.

[94] Di waktu Nabi Muhammad s.a.w. berada di Mekah di tengah-tengah kaum musyirikin beliau berkiblat ke Baitul Maqdis. tetapi setelah 16 atau 17 bulan Nabi berada di Madinah ditengah-tengah orang Yahudi dan Nasrani beliau disuruh oleh Tuhan untuk mengambil ka'bah menjadi kiblat, terutama sekali untuk memberi pengertian bahwa dalam ibadat shalat itu bukanlah arah Baitul Maqdis dan ka'bah itu menjadi tujuan, tetapi menghadapkan diri kepada tuhan. Allah menjadikan ka'bah sebagai kiblat untuk persatuan umat Islam.

وَمِنۡ حَيۡثُ خَرَجۡتَ فَوَلِّ وَجۡهَكَ شَطۡرَ ٱلۡمَسۡجِدِ ٱلۡحَرَامِۚ وَحَيۡثُ مَا كُنتُمۡ فَوَلُّواْ
وُجُوهَكُمۡ شَطۡرَهُۥ لِئَلَّا يَكُونَ لِلنَّاسِ عَلَيۡكُمۡ حُجَّةٌ إِلَّا ٱلَّذِينَ ظَلَمُواْ مِنۡهُمۡ فَلَا
تَخۡشَوۡهُمۡ وَٱخۡشَوۡنِي وَلِأُتِمَّ نِعۡمَتِي عَلَيۡكُمۡ وَلَعَلَّكُمۡ تَهۡتَدُونَ ١٥٠

Artinya: Dan dari mana saja kamu (keluar), Maka Palingkanlah wajahmu ke arah Masjidil Haram. dan dimana saja kamu (sekalian) berada, Maka Palingkanlah wajahmu ke arahnya, agar tidak ada hujjah bagi manusia atas kamu, kecuali orang-orang yang zalim diantara mereka. Maka janganlah kamu takut kepada mereka dan takutlah kepada-Ku (saja). dan agar Ku-sempurnakan nikmat-Ku atasmu, dan supaya kamu mendapat petunjuk. .(QS. Al-Baqarah:150)

Semua benda yang ada di alam ini baik itu bumi, bulan, planet, matahari, bintang, bahkan galaksi dan malaikat pun bersujud dan berputar mengelilingi zat yang satu bagaikan sebuah medan magnet yang selalu mempunyai berputar mengelilingi arus listriknya. Orang yang sedang haji pun melakukan hal yang sama saat melakukan thawaf, yaitu bergerak mengelilingi ka'bah. Hal tersebut merupakan simbol bahwa semua yang ada di alam semesta ini berputar dan bersujud ke zat Yang Esa, yaitu Allah swt.(Imam 2008:92)

BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab ini kita mulai dengan semi hasil kali dalam, karena hasil kali dalam sudah dibahas pada bab II.

3.1 Semi Hasil Kali Dalam

Definisi 3.1.1 Semi hasil kali dalam

Diberikan V sebuah ruang vektor riil. Semi hasil kali dalam pada V adalah fungsi $[\mathbf{u},\mathbf{v}]$ *pada V* x *V yang memenuhi aksioma berikut:*

1) $[k\mathbf{u}+\mathbf{v},\boldsymbol{w}]=k[\mathbf{u},\mathbf{w}]+[\mathbf{v},\mathbf{w}]$
2) $[\mathbf{u},\mathbf{u}]>0$ *untuk* $\mathbf{u}\neq\mathbf{0}$
3) $|[\mathbf{u},\mathbf{v}]|^2\leq[\mathbf{u},\mathbf{u}][\mathbf{v},\mathbf{v}]$
4) $[\mathbf{u},\mathbf{v}]=[\mathbf{v},\mathbf{u}]$

Untuk semua $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}\in V$ *dan untuk semua* $k\in R$. *Sebuah ruang vektor dengan sebuah semi hasil kali dalam disebut ruang semi hasil kali dalam*

Contoh 3.1.2

Anggap $\mathbf{u}=(u_1,u_2)$ dan $\mathbf{v}=(v_1,v_2)$**.** Apabila semi hasil kali dalam didefinisikan $[\mathbf{u},\mathbf{v}]=3u_1v_1+5u_2v_2$, tunjukkan apakah memenuhi aksioma semi hasil kali dalam.

Ambil sebarang $u_1,u_2\;\epsilon\;\mathbf{u}\quad v_1,v_2\;\epsilon\;\mathbf{v}$ dan $w_1,w_2\;\epsilon\;\boldsymbol{w}$ sedemikian hingga $u_1,u_2,v_1,v_2,w_1,w_2\;\epsilon\;R^2$

1) $[k\mathbf{u}+\mathbf{v},\boldsymbol{w}]=[(ku_1+v_1,ku_2+v_2),(w_1,w_2)]$

$$=3(ku_1+v_1)w_1+5(ku_2+v_2)w_2$$

$$=3ku_1w_1+3v_1w_1+5ku_2w_2+5v_2w_2$$

$= (3ku_1w_1 + 5ku_2w_2) + (3v_1w_1 + 5v_2w_2)$

$= k(3u_1w_1 + 5u_2w_2) + (3v_1w_1 + 5v_2w_2)$

$= k[\mathbf{u}, \mathbf{w}] + [\mathbf{v}, \mathbf{w}]$

2) $[\mathbf{u}, \mathbf{u}] = [(u_1, u_2), (u_1, u_2)]$

$= 3u_1u_1 + 5u_2u_2$

$= 3{u_1}^2 + 5{u_2}^2 > 0$ karena untuk nilai $u_i > 0$ atau $u_i < 0$ nilai ${u_i}^2 > 0$ dan selalu positif, maka terbukti $[\mathbf{u}, \mathbf{u}] = 0$

3) $|[\mathbf{u}, \mathbf{v}]|^2 \leq [\mathbf{u}, \mathbf{u}][\mathbf{v}, \mathbf{v}]$

Anggap $a = [\mathbf{u}, \mathbf{u}] = 3{u_1}^2 + 5{u_2}^2$

$b = 2[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = 2(3u_1v_1 + 5u_2v_2)$

$c = [\mathbf{v}, \mathbf{v}] = 3{v_1}^2 + 5{v_2}^2$

dan anggap *t* adalah sebarang bilangan real.

Dengan menggunakan teorema kepositifan, semi hasil kali dalam sebarang vektor dengan dirinya sendiri selalu tak-negatif. oleh karena itu,

$0 \leq [(t\mathbf{u} + \mathbf{v}), (t\boldsymbol{u} + \mathbf{v})] = [\mathbf{u}, \mathbf{u}]t^2 + 2[\mathbf{u}, \mathbf{v}]t + [\mathbf{v}, \mathbf{v}]$

$= at^2 + bt + c$

Ketaksamaan ini menyatakan bahwa polinom kuadratik $a^2 + bt + c$ bisa tidak mempunyai akar riil atau dua akar riil yang sama. Dengan demikian diskriminannya pasti memenuhi ketaksamaan

$b^2 - 4ac \leq 0$ Subtitusi *a*,*b*,*c* ke bentuk **u** dan **v**

$(2[\mathbf{u}, \mathbf{v}])^2 - 4[\mathbf{u}, \mathbf{u}][\mathbf{v}, \mathbf{v}] \leq 0$

$\left(2(3u_1v_1 + 5u_2v_2)\right)^2 - 4(3{u_1}^2 + 5{u_2}^2)(3{v_1}^2 + 5{v_2}^2) \leq 0$

$4(3u_1v_1 + 5u_2v_2)^2 - 4(3{u_1}^2 + 5{u_2}^2)(3{v_1}^2 + 5{v_2}^2) \leq 0$

$4(9{u_1}^2{v_1}^2 + 30u_1v_1u_2v_2 + 25{u_2}^2{v_2}^2) - 4(9{u_1}^2{v_1}^2 + 15{u_1}^2{v_2}^2 +$

$15{u_2}^2{v_1}^2 + 25{u_2}^2{v_2}^2) \leq 0$

$(9{u_1}^2{v_1}^2 + 30u_1v_1u_2v_2 + 25{u_2}^2{v_2}^2) - (9{u_1}^2{v_1}^2 + 15{u_1}^2{v_2}^2 +$

$15{u_2}^2{v_1}^2 + 25{u_2}^2{v_2}^2) \leq 0$

$9{u_1}^2{v_1}^2 + 30u_1v_1u_2v_2 + 25{u_2}^2{v_2}^2 - 9{u_1}^2{v_1}^2 - 15{u_1}^2{v_2}^2 -$

$15{u_2}^2{v_1}^2 - 25{u_2}^2{v_2}^2 \leq 0$

$9{u_1}^2{v_1}^2 - 9{u_1}^2{v_1}^2 + 25{u_2}^2{v_2}^2 - 25{u_2}^2{v_2}^2 + 30u_1v_1u_2v_2 -$

$15{u_1}^2{v_2}^2 - 15{u_2}^2{v_1}^2 \leq 0$

$30u_1v_1u_2v_2 - 15{u_1}^2{v_2}^2 - 15{u_2}^2{v_1}^2 \leq 0$

$30u_1v_1u_2v_2 \leq 15{u_1}^2{v_2}^2 + 15{u_2}^2{v_1}^2$

$30u_1v_1u_2v_2 \leq 15({u_1}^2{v_2}^2 + {u_2}^2{v_1}^2)$

$2u_1v_1u_2v_2 \leq {u_1}^2{v_2}^2 + {u_2}^2{v_1}^2$

Karena $2u_1v_1u_2v_2$ tidak selalu positif ketika $u_i > 0$ atau $u_i < 0$ dan $v_i > 0$ atau $v_i < 0$, sedangkan ${u_1}^2{v_2}^2 + {u_2}^2{v_1}^2$ selalu positif ketika$u_i > 0$ atau $u_i < 0$ dan $v_i > 0$ atau $v_i < 0$. Maka $2u_1v_1u_2v_2 \leq {u_1}^2{v_2}^2 + {u_2}^2{v_1}^2$ terpenuhi.

Dan karena $2u_1v_1u_2v_2$ terdapat pada $|[\mathbf{u}, \mathbf{v}]|^2$ dan $({u_1}^2{v_2}^2 + {u_2}^2{v_1}^2)$ terdapat pada $[\mathbf{u}, \mathbf{u}][\mathbf{v}, \mathbf{v}]$

Maka terbukti $|[\mathbf{u}, \mathbf{v}]|^2 \leq [\mathbf{u}, \mathbf{u}][\mathbf{v}, \mathbf{v}]$

4) $[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = [(u_1, u_2), (v_1, v_2)]$

$= 3u_1v_1 + 5u_2v_2$

$= 3v_1u_1 + 5v_2u_2$

$= [(v_1, v_2), (u_1, u_2)]$

$= [\mathbf{v}, \mathbf{u}]$

$\therefore [\mathbf{u}, \mathbf{v}] = 3u_1v_1 + 5u_2v_2$ adalah semi hasil kali dalam karena memenuhi keempat aksioma semi hasil kali dalam

Contoh 3.1.3

Misalkan $\mathbf{u} = (-2,1,3)$ $\mathbf{v} = (4,0,-7)$ dan $\mathbf{w} = (-5,2,1)$ pada ruang vektor riil. Apabila semi hasil kali dalam didefinisikan $[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$, tunjukkan apakah memenuhi aksioma semi hasil kali dalam.

1) $[k\mathbf{u} + \mathbf{v}, \boldsymbol{w}] = k[\mathbf{u}, \mathbf{w}] + [\mathbf{v}, \mathbf{w}]$

   Misalkan $k = 2$, maka

   $[k\mathbf{u} + \mathbf{v}, \boldsymbol{w}] = \left[\left(2.(-2) + 4, 2.1 + 0, 2.3 + (-7)\right), (-5,2,1)\right]$

   $= [(0,2,-1), (-5,2,1)]$

   $= (0.(-5) + 2.2 + (-1).1)$

   $= (0 + 4 - 1) = 3$

   $k[\mathbf{u}, \mathbf{w}] + [\mathbf{v}, \mathbf{w}] = 2[(-2,1,3), (-5,2,1)] + [(4,0,-7), (-5,2,1)]$

   $= 2\left((-2).(-5) + 1.2 + 3.1\right) + (4.(-5) + 0.2 + (-7).1)$

   $= 2(10 + 2 + 3) + (-20 + 0 - 7)$

   $= 2.15 - 27 = 30 - 27 = 3$

   Jadi terbukti $[k\mathbf{u} + \mathbf{v}, \boldsymbol{w}] = 3 = k[\mathbf{u}, \mathbf{w}] + [\mathbf{v}, \mathbf{w}]$

2) $[\mathbf{u}, \mathbf{u}] > 0$ *untuk* $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$

   $[\mathbf{u}, \mathbf{u}] = [(-2,1,3), (-2,1,3)]$

   $= ((-2).(-2) + 1.1 + 3.3)$

   $= (4 + 1 + 9) = 14 > 0$

   Jadi terbukti $[\mathbf{u}, \mathbf{u}] > 0$ *untuk* $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$

3) $|[\mathbf{u},\mathbf{v}]|^2 \leq [\mathbf{u},\mathbf{u}][\mathbf{v},\mathbf{v}]$

$|[\mathbf{u},\mathbf{v}]|^2 = |[(-2,1,3),(4,0,-7)]|^2$

$= |(-2).4 + 1.0 + 3.(-7)|^2$

$= |-8 + 0 - 21|^2$

$= 29^2 = 841$

$[\mathbf{u},\mathbf{u}][\mathbf{v},\mathbf{v}] = [(-2,1,3),(-2,1,3)][(4,0,-7),(4,0,-7)]$

$= \big((-2).(-2) + 1.1 + 3.3\big).(4.4 + 0.0 + (-7).(-7))$

$= (4 + 1 + 9).(16 + 0 + 49)$

$= 14.65 = 910$

karena $|[\mathbf{u},\mathbf{v}]|^2 = 841 < 910 = [\mathbf{u},\mathbf{u}][\mathbf{v},\mathbf{v}]$

Jadi terbukti $|[\mathbf{u},\mathbf{v}]|^2 \leq [\mathbf{u},\mathbf{u}][\mathbf{v},\mathbf{v}]$

4) $[\mathbf{u},\mathbf{v}] = [\mathbf{v},\mathbf{u}]$

$[\mathbf{u},\mathbf{v}] = [(-2,1,3),(4,0,-7)]$

$= ((-2).4 + 1.0 + 3.(-7))$

$= (-8 + 0 - 21) = -29$

$[\mathbf{v},\mathbf{u}] = [(4,0,-7),(-2,1,3)]$

$= (4.(-2) + 0.1 + (-7).3)$

$= (-8 + 0 - 21) = -29$

Karena $[\mathbf{u},\mathbf{v}] = -29 = [\mathbf{v},\mathbf{u}]$

Jadi terbukti $[\mathbf{u},\mathbf{v}] = [\mathbf{v},\mathbf{u}]$

Jadi $\mathbf{u} = (-2,1,3)$ $\mathbf{v} = (4,0,-7)$ dan $\mathbf{w} = (-5,2,1)$ pada ruang vektor riil V memenuhi aksioma semi hasil kali dalam dan $[\mathbf{u},\mathbf{v}]$ merupakan semi hasil kali dalam.

3.2 Norma Pada Semi Hasil Kali Dalam

Definisi 3.2.1 Seminorma

Jika $[\mathbf{u},\mathbf{u}]$ *adalah semi hasil kali dalam pada ruang vektor V maka*

$$\|\mathbf{u}\| = [\mathbf{u},\mathbf{u}]^{\frac{1}{2}}$$

Disebut seminorma.

Dan jarak antara dua titik vektor ***u*** *dan* **v** *dinyatakan dengan* $d(\mathbf{u},\mathbf{v})$ *dan didefinisikan sebagai*

$$d(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|$$

Contoh 3.2.2

Jika $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ dan $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ adalah vektor-vektor dalam R^3 dengan semi hasil kali dalam, maka

$$\|\mathbf{u}\| = [\mathbf{u},\mathbf{u}]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{[(u_1,u_2,u_3),(u_1,u_2,u_3)]}$$

$$= \sqrt{u_1.u_1 + u_2.u_2 + u_3.u_3}$$

$$= \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

dan

$$d(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|$$

$$= [\mathbf{u}-\mathbf{v},\mathbf{u}-\mathbf{v}]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{(u_1-v_1)^2 + (u_2-v_2)^2 + (u_3-v_3)^2}$$

3.3 Hubungan Semi Hasil Kali Dalam dengan Hasil Kali Dalam

Menurut definisi semi hasil kali dalam dan definisi hasil kali dalam terdapat beberapa perbedaan aksioma.Yaitu:

a. Aksioma $|[\mathbf{u},\mathbf{v}]|^2 \le [\mathbf{u},\mathbf{u}][\mathbf{v},\mathbf{v}]$

Pada semi hasil kali dalam, aksioma tersebut termasuk suatu aksioma yang harus dipenuhi pada definisi. Sedangkan pada hasil kali dalam aksioma tersebut merupakan salah satu penjabaran daripada teorema 2.6.3 *Ketaksamaan Cauchy-Schwarz.*

b. Aksioma $\langle \boldsymbol{u},\mathbf{u}\rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = 0$

Pada semi hasil kali dalam aksioma tersebut tidak dipenuhi bahkan harus tidak ada. Sedangkan pada hasil kali dalam aksioma tersebut merupakan salah satu syarat jika ingin terdefinisi hasil kali dalam.

Dari dua perbedaan diatas dapat diketahui bahwa semi hasil kali dalam yang memenuhi aksioma $\langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = 0$ disebut hasil kali dalam. Yang berarti bahwa semi hasil kali dalam merupakan bagian daripada hasil kali dalam yang tidak pernah bernilai nol.

Teorema 3.3.1

Jika **u** *dan* **v** *adalah vektor-vektor dalam ruang semi hasil kali dalam V, dan jika k adalah sebarang skalar, maka:*

1) $\|\mathbf{u}\| > 0$
2) $\|k\mathbf{u}\| = |k|\|\mathbf{u}\|$
3) $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \le \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$

Bukti

1) Misalkan **u** didefinisikan $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ maka

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{[\mathbf{u},\mathbf{u}]} = \sqrt{[(u_1,u_2),(u_1,u_2)]}$$

$$= \sqrt{(u_1.u_1 + u_2.u_2)} = \sqrt{(u_1{}^2 + u_2{}^2)} > 0$$

karena $u_1{}^2 + u_2{}^2 > 0$, maka terbukti $\|\mathbf{u}\| > 0$

2) $\|k\mathbf{u}\| = \sqrt{[k\mathbf{u}, k\mathbf{u}]}$ Aksioma Kehomogenan

$= \sqrt{[k^2\mathbf{u}, \mathbf{u}]}$

$= \sqrt{k^2[\mathbf{u}, \mathbf{u}]}$

$= \sqrt{k^2}\sqrt{[\mathbf{u}, \mathbf{u}]}$

$= |k|\|\mathbf{u}\|$

3) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \sqrt{[\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v}]}$

$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = [\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v}]$ kedua ruas dikuadratkan

$= [\mathbf{u}, \mathbf{u}] + 2[\mathbf{u}, \mathbf{v}] + [\mathbf{v}, \mathbf{v}]$

$\leq [\mathbf{u}, \mathbf{u}] + 2|[\mathbf{u}, \mathbf{v}]| + [\mathbf{v}, \mathbf{v}]$

$\leq [\mathbf{u}, \mathbf{u}] + 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| + [\mathbf{v}, \mathbf{v}]$ definisi 3.1.1

$= \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2$

$= (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2$

$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 \leq (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2$ diakarkan menjadi

$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$

Teorema 3.3.2

Jika $\mathbf{u}$ *dan* $\mathbf{v}$ *adalah vektor-vektor dalam ruang semi hasil kali dalam* V, *maka:*

1) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) > 0$
2) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = d(\mathbf{v}, \mathbf{u})$
3) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq d(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + d(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ (Ketaksamaan Segitiga)

Bukti

1) $d(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|$

$= \sqrt{[\mathbf{u}-\mathbf{v},\mathbf{u}-\mathbf{v}]} > 0$ karena $[\mathbf{u}-\mathbf{v},\mathbf{u}-\mathbf{v}] > 0$

2) $d(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|$

$= \sqrt{[\mathbf{u}-\mathbf{v},\mathbf{u}-\mathbf{v}]}$

$= \sqrt{[\mathbf{v}-\mathbf{u},\mathbf{v}-\mathbf{u}]}$

$= \|\mathbf{v}-\mathbf{u}\|$

$d(\mathbf{u},\mathbf{v}) = d(\mathbf{v},\mathbf{u})$

3) $d(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|$

$= \|\mathbf{u}-\mathbf{v}+\mathbf{0}\|$ Aksioma 4 ruang vektor

$= \|\mathbf{u}-\mathbf{v}+\mathbf{w}+(-\mathbf{w})\|$

$= \|\mathbf{u}+(-\mathbf{w})+\mathbf{w}-\mathbf{v}\|$ Aksioma 3 ruang vektor

$= \|\mathbf{u}-\mathbf{w}+\mathbf{w}-\mathbf{v}\|$

$\leq \|\mathbf{u}-\mathbf{w}\| + \|\mathbf{w}-\mathbf{v}\|$

$= \|\mathbf{u}-\mathbf{w}\| + \|\mathbf{v}-\mathbf{w}\|$

$d(\mathbf{u},\mathbf{v}) \leq d(\mathbf{u},\mathbf{w}) + d(\mathbf{v},\mathbf{w})$

Teorema 3.3.3

Jika **u** *dan* **v** *adalah vektor-vektor yang memenuhi aksioma semi hasil kali dalam* $[\mathbf{u},\mathbf{v}]$ *pada V, maka* **u** *dan* **v** *juga memenuhi aksioma hasil kali dalam* $\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle$ *pada V.*

Bukti

Ambil sebarang $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w} \in V$ untuk $\mathbf{u} = (u_1,u_2)$ $\mathbf{v} = (v_1,v_2)$ $\mathbf{w} = (w_1,w_2)$ dan k,l bilangan riil

Sehingga $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle (u_1, u_2), (v_1, v_2) \rangle$

$= \langle (u_1 . v_1) + (u_2 . v_2) \rangle$

$= \langle (v_1 . u_1) + (v_2 . u_2) \rangle$

$= \langle (v_1, v_2), (u_1, u_2) \rangle$

$= \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ terbukti simetris hasil kali dalam

$\langle k\mathbf{u} + l\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \big((ku_1 + lv_1), (ku_2 + lv_2) \big), (w_1, w_2) \rangle$

$= (ku_1 + lv_1). w_1 + (ku_2 + lv_2). w_2$

$= ku_1 w_1 + lv_1 w_1 + \; ku_2 w_2 + lv_2 w_2$

$= ku_1 w_1 + \; ku_2 w_2 + lv_1 w_1 + lv_2 w_2$

$= k(u_1 w_1 + u_2 w_2) + l(v_1 w_1 + v_2 w_2)$

$= k\big((u_1, u_2), (w_1, w_2)\big) + l\big((v_1, v_2), (w_1, w_2)\big)$

$= \; k\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + l\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ terbukti linier hasil kali dalam

$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \langle (u_1, u_2), (u_1, u_2) \rangle$

$= (u_1 u_1 + u_2 u_2)$

$= {u_1}^2 + {u_2}^2$ terbukti definit positif hasil kali dalam

Karena memenuhi ketiga aksioma hasil kali dalam maka $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ adalah hasil kali dalam.

Teorema 3.3.4

Jika **u** *dan* **v** *adalah vektor-vektor yang memenuhi aksioma hasil kali dalam* $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ *pada V, maka* **u** *dan* **v** *belum tentu memenuhi aksioma hasil kali dalam* $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ *pada V.*

Bukti

Ambil sebarang $\mathbf{u} \in V$ dengan $\mathbf{u} = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$

Maka $[\mathbf{u},\mathbf{u}] = [(u_1,u_2),(u_1,u_2)]$

$= [(0,0),(0,0)] = 0$

Dan $[\mathbf{u},\mathbf{u}] = 0$ tidak dipenuhi oleh semi hasil kali dalam. Maka terbukti teorema di atas

3.4 Tinjauan Agama Dari Hasil Pembahasan

وَمِنۡ حَيۡثُ خَرَجۡتَ فَوَلِّ وَجۡهَكَ شَطۡرَ ٱلۡمَسۡجِدِ ٱلۡحَرَامِۚ وَحَيۡثُ مَا كُنتُمۡ فَوَلُّواْ
وُجُوهَكُمۡ شَطۡرَهُۥ لِئَلَّا يَكُونَ لِلنَّاسِ عَلَيۡكُمۡ حُجَّةٌ إِلَّا ٱلَّذِينَ ظَلَمُواْ مِنۡهُمۡ فَلَا
تَخۡشَوۡهُمۡ وَٱخۡشَوۡنِي وَلِأُتِمَّ نِعۡمَتِي عَلَيۡكُمۡ وَلَعَلَّكُمۡ تَهۡتَدُونَ ١٥٠

Artinya: Dan dari mana saja kamu (keluar), Maka Palingkanlah wajahmu ke arah Masjidil Haram. dan dimana saja kamu (sekalian) berada, Maka Palingkanlah wajahmu ke arahnya, agar tidak ada hujjah bagi manusia atas kamu, kecuali orang-orang yang zalim diantara mereka. Maka janganlah kamu takut kepada mereka dan takutlah kepada-Ku (saja). dan agar Ku-sempurnakan nikmat-Ku atasmu, dan supaya kamu mendapat petunjuk. .(QS. Al-Baqarah:150)

Dari ayat diatas, isltilah vektor sudah tersirat di dalam al-Qur'an. Dari definisinya vektor merupakan suatu besaran yang mempunyai besaran dan arah. Ayat di atas yang mempunyai arti "*Dan dari mana saja kamu (keluar), Maka Palingkanlah wajahmu ke arah Masjidil Haram. dan dimana saja kamu (sekalian) berada, Maka Palingkanlah wajahmu ke arahnya*" mengisyaratkan sesuatu vektor.

Vektor mempunyai titik pangkal dan titik ujung. Pada ayat di atas terdapat kalimat " فَوَلِّ وَجۡهَكَ شَطۡرَ" yang mempunyai arti "*Maka Palingkanlah wajahmu ke arah*". Dari kalimat tersebut tersirat bahwa terdapat tujuan dari kejadian tersebut. Yang berarti jika terdapat tujuan maka terdapat awal dari suatu kejadian.

Tujuan tersebut dalam vektor dapat disebut dengan titik ujung, sedangkan awal dari suatu kejadian tadi dapat disebut dengan titik pangkal.

Yang dimaksud dengan titik ujung dari ayat di atas adalah kata "ٱلۡمَسۡجِدِ ٱلۡحَرَامِ" yang berarti *Masjidil Haram.* Adapun yang dimaksud dengan titik pangkal dari ayat 150 surat al-Baqarah adalah kata "وَمِنۡ حَيۡثُ خَرَجۡتَ" yang berarti " *dan dari mana saja kamu (keluar)* " dan kata " وَحَيۡثُ مَا كُنتُمۡ " yang berarti" *dan dimana saja kamu (sekalian) berada* ". Jika dari titik awal ke titik ujung dihubungkan maka terbentuklah sebuah garis yang mempunyai arah dari titik awal ke ujung.

Vektor tidak hanya mempunyai arah, akan tetapi juga mempunyai besaran atau nilai. Dalam hal ini kami mengibaratkan besaran adalah esensi. Esensi merupakan kandungan yang terdapat pada suatu kejadian. Misalnya Shalat, jika seseorang menghadap ke arah masjidil haram dalam keadaan shalat, maka kandungan daripada shalat tersebut adalah esensi, yang tidak lain adalah besaran. Misalnya juga thawaf. Jika seseorang menghadap kiblat dalam keadaan thawaf, maka kandungan thawaf tersebut adalah besaran. Dari fenomena tersebut berarti terdapat vektor seseorang yang sedang shalat dan vektor seseorang yang sedang thawaf.

Allah swt berfirman dalam surat al-Baqarah ayat 142

۞ سَيَقُولُ ٱلسُّفَهَآءُ مِنَ ٱلنَّاسِ مَا وَلَّىٰهُمۡ عَن قِبۡلَتِهِمُ ٱلَّتِي كَانُواْ عَلَيۡهَاۚ قُل لِّلَّهِ
ٱلۡمَشۡرِقُ وَٱلۡمَغۡرِبُۚ يَهۡدِي مَن يَشَآءُ إِلَىٰ صِرَٰطٖ مُّسۡتَقِيمٖ ﴿١٤٢﴾

Artinya: Orang-orang yang kurang akalnya diantara manusia akan berkata: "Apakah yang memalingkan mereka (umat Islam) dari kiblatnya (Baitul Maqdis) yang dahulu mereka telah berkiblat kepadanya?" Katakanlah: "Kepunyaan Allah-lah timur dan barat; Dia memberi petunjuk kepada siapa yang dikehendaki-Nya ke jalan yang lurus".(QS. Al-Baqarah:142)

Pada ayat tersebut dijelaskan bahwa terjadi perubahan arah kiblat bagi orang muslim, yaitu yang sebelumnya kiblat umat islam adalah *Baitul Maqdis* berganti arah ke *Masjidil Haram.* Akan tetapi yang paling penting maksud dari ayat di atas adalah *Baitul Maqdis* dan *Masjidil Haram* bukanlah merupakan tujuan daripada shalat kita atau bahkan haji kita. Tujuan sebenarnya adalah Allah swt. Dari ayat di atas berati juga terdapat pergantian vektor daripada kiblatnya umat muslim.

Selain vektor, norma atau jarak daripada sebuah vektor dan selisih daripada dua buah vektor juga tersirat dalam al-Qur'an. Jarak daripada sebuah vektor dapat di isyaratkan oleh surat al-Baqarah ayat 150. Ketika seseorang melaksanakan shalat di suatu masjid selain *Masjidil Haram* maka terpaut jarak yang memisahkan diantara kedua tempat tersebut. Jarak yang memisahkan tersebut disebut dengan norma dari sebuah vektor seseorang yang shalat.

Sedangkan selisih daripada dua buah vektor tersirat dalam surat al-Baqarah ayat 158, yaitu:

۞ إِنَّ ٱلصَّفَا وَٱلۡمَرۡوَةَ مِن شَعَآئِرِ ٱللَّهِۖ فَمَنۡ حَجَّ ٱلۡبَيۡتَ أَوِ ٱعۡتَمَرَ فَلَا جُنَاحَ عَلَيۡهِ أَن يَطَّوَّفَ بِهِمَاۚ وَمَن تَطَوَّعَ خَيۡرٗا فَإِنَّ ٱللَّهَ شَاكِرٌ عَلِيمٌ ١٥٨

Artinya: Sesungguhnya Shafaa dan Marwa adalah sebahagian dari syi'ar Allah[102]. Maka Barangsiapa yang beribadah haji ke Baitullah atau ber-'umrah, Maka tidak ada dosa baginya[103] mengerjakan sa'i antara keduanya. dan Barangsiapa yang mengerjakan suatu kebajikan *dengan kerelaan hati, Maka Sesungguhnya Allah Maha Mensyukuri[104] kebaikan lagi Maha mengetahui. (QS. Al-Baqarah:158)*

Ayat di atas menjelaskan tentang sa'i, yang berarti lari-lari kecil dari *Shafaa* dan *Marwa* sebanyak tujuh kali. Yang dimulai dari *Shafaa* dan berakhir di *Marwa*. Seseorang yang sedang melaksanakan sa'i terbagi menjadi dua vektor, yaitu vektor lari-lari kecil dari *Shafaa* ke *Marwa* dan vektor lari-lari kecil dari *Marwa* ke *Shafaa*. Misalnya vektor lari-lari kecil dari *Shafaa* ke *Marwa* dilambangkan dengan $\mathbf{u}$ maka vektor lari-lari kecil dari *Marwa* ke *Shafaa* dilambangkan $-\mathbf{u}$. Karena jika sebuah vektor arahnya berlawanan dengan vektor lain maka vektor tersebut sama dengan negatif daripada vektor lain. Maka selisih dari vektor $\mathbf{u}$ dengan $-\mathbf{u}$ adalah $\|\mathbf{u}-(-\mathbf{u})\| = \|\mathbf{u}+\mathbf{u}\| = \|2\mathbf{u}\| = 2\|\mathbf{u}\|$. Yang berarti norma dari dua kali lari-lari kecil tersebut adalah 2 kali jarak antara *Shafaa* dan *Marwa*. Sehingga seseorang yang melakukan sa'i itu normanya adalah 7 kali jarak antara *Shafaa* dan *Marwa*.

Kalau ayat diatas tersirat daripada makna norma, maka jelaslah tersirat juga makna daripada hasil kali dalam, begitu juga makna semi hasil kali dalam. Sehingga semi hasil kali dalam daripada seseorang yang sedang melakukan sa'i adalah $[7\mathbf{u}] = \|7\mathbf{u}\|^2 = \|7\mathbf{u}\|\|7\mathbf{u}\| = 49\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{u}\|$. Yang berarti semi hasil kali dalam sama dengan empat puluh sembilan kali jarak antara *Shafaa* dan *Marwa* dikalikan dengan jarak antara *Shafaa* dan *Marwa* lagi.

Allah swt berfirman pada surat Ali-Imran ayat 190-191:

إِنَّ فِي خَلْقِ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضِ وَٱخْتِلَٰفِ ٱلَّيْلِ وَٱلنَّهَارِ لَءَايَٰتٍ لِّأُو۟لِى ٱلْأَلْبَٰبِ
﴿١٩٠﴾ ٱلَّذِينَ يَذْكُرُونَ ٱللَّهَ قِيَٰمًا وَقُعُودًا وَعَلَىٰ جُنُوبِهِمْ وَيَتَفَكَّرُونَ فِى خَلْقِ
ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضِ رَبَّنَا مَا خَلَقْتَ هَٰذَا بَٰطِلًا سُبْحَٰنَكَ فَقِنَا عَذَابَ ٱلنَّارِ ﴿١٩١﴾

Artinya: Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi, dan silih bergantinya malam dan siang terdapat tanda-tanda bagi orang-orang yang berakal,(yaitu) orang-orang yang mengingat Allah sambil berdiri atau duduk atau dalam keadan berbaring dan mereka memikirkan tentang penciptaan langit dan bumi (seraya berkata): "Ya Tuhan Kami, Tiadalah Engkau menciptakan ini dengan sia-sia, Maha suci Engkau, Maka peliharalah Kami dari siksa neraka.(QS. Ali-Imran 190-191)

Dalam surat Ali-Imran tersebut dijelaskan tentang konsep *Ulul Albab*. Seseorang yang sudah dalam tingkatan ulul albab akan selalu memikirkan semua yang diciptakan oleh Allah swt. Dalam keadaan bagaimanapun dan dimanapun. Ketika seseorang mempelajari tentang matematika, kemampuan intelektual semata tidak cukup, tetapi perlu didukung secara bersamaan dengan kemampuan emosional dan spiritual.

Seorang yang memahami matematika dengan konsep *Ulul Albab* akan selalu memikirkan setiap perbuatan yang mereka lakukan dengan teliti. Layaknya ilmu matematika yang disebut ilmu pasti, maka dia akan melakukan sesuatu dengan penuh kejujuran dan ketaatan.

BAB VI

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Bedasarkan hasil pembahasan pada bab III, maka dapat diambil kesimpulan bahwa:

1) Jika **u** dan **v** adalah vektor-vektor yang memenuhi aksioma semi hasil kali dalam $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ pada *V*, maka **u** dan **v** juga memenuhi aksioma hasil kali dalam $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ pada *V*. Sedangkan Jika **u** dan **v** adalah vektor-vektor yang memenuhi aksioma hasil kali dalam $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ pada *V*, maka **u** dan **v** belum tentu memenuhi aksioma hasil kali dalam $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ pada *V*. Karena ketika **u** dan **v** sama dengan **0** maka tidak dipenuhi oleh $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$.
2) Norma pada semi hasil kali dalam disebut seminorma dan lambangnya sama dengan norma, yaitu $\|\mathbf{u}\|$ Akan tetapi nilai seminorma selalu positif dan tidal pernah nol, karena pada semi hasil kali dalam harus dipenuhi $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$.

4.2 Saran

Pada pembahasan skripsi ini, Kajian semi hasil hali dalam ini ruang lingkupnya hanya pada bilangan riil. Dan teorema-teorema yang dipilih hanya teorema yang terbatas pada hasil kali dalam. Oleh karena itu, dalam pembahasan skripsi yang berkaitan dengan semi hasil kali dalam lainnya diharapkan ruang lingkupnya lebih luas.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, Howard.1987.*Aljabar Linier Elementer Edisi Kelima*, Jakarta: Erlangga

Sumitro, Hari.2000.*Dasar- Dasar Aljabar Linier Edisi 7 jilid 1*, Batam: Interaksasa

Sumitro, Hari.2000.*Dasar- Dasar Aljabar Linier Edisi 7 jilid 2*, Batam: Interaksasa

Assauri, Sofjan.1980. *Aljabar Linier Dasar Ekonometri Edisi Kedua*, Bandung: Penerbit ITB

Bondan, Alit. 1998. *Aljabar Linier dan Aplikasinya*, Jakarta: Erlangga

Lipschutz, Seymour.2004. *Teori dan Soal Aljabar Linier edisi ketiga.* Jakarta: Erlangga.

Hasan, Iqbal. 2002. *Metodologi Penelitian dan Aplikasinya*, Jakarta: Ghalia Indonesia

Kamal Faqih Imani, Allamah. 2006. *Tafsir Nurul Qur'an Jilid 1*. Jakarta: Al-Huda

Tazi, Imam. 2008. *Matematika Untuk Sains dan Teknik.* Malang: UIN-Press

Bong keun han, *On Joint Numerical Ranges And Joint Spectra Of Linear Operators On S.I.P.Spaces* (http://www.ams.org/mathscinet-getitem?mr=0227749)

DEPARTEMEN AGAMA
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Malang 65144 Telp. / Fax. (0341) 558933

BUKTI KONSULTASI

Nama : Shodiq Alimin
NIM : 05510041
Fakultas/ Jurusan : Saintek/ Matematika
Dosen pembimbing : 1. Hairur Rahman, S.Pd, M.Si
2. Munirul Abidin, M.Ag
Judul : Kajian Semi Hasil Kali Dalam pada Suatu Norma

No	Tanggal	Materi Konsultasi	Tanda Tangan	
1.	14 Mei 2009	Proposal Skripsi	1.	
2.	15 Juni 2009	ACC Proposal		2.
3.	13 Juli 2009	Konsultasi BAB I	3.	
4.	15 Juli 2009	Konsultasi BAB I dan BAB II		4.
5.	17 Juli 2009	Konsultasi Keagamaan BAB I	5.	
6.	22 Juli 2009	Revisi BAB I dan BAB II		6.
7.	30 Juli 2009	ACC BAB I dan BAB II	7.	
8.	30 Juli 2009	Revisi Keagamaan BAB I		8.
9.	11 Agustus 2009	Konsultasi BAB III	9.	
10.	18 Agustus 2009	Revisi BAB III dan Konsultasi BAB IV		10
11.	2 Oktober 2009	ACC BAB III dan IV	11	
12.	3 Oktober 2009	Konsultasi Keagamaan BAB II dan BAB III		12
13.	5 Oktober 2009	Revisi Keagamaan BAB II dan BAB III	13	
14.	6 Oktober 2009	Konsultasi Keseluruhan dan ACC		14
15.	6 Oktober 2009	ACC Keseluruhan Keagamaan	15	.

Malang, 6 Oktober 2009

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 197510062003121001