

**UJI SELANG KEPERCAYAAN PARAMETER REGRESI
NONLINIER DENGAN METODE OLS (*ORDINARY LEAST
SQUARE*) DAN METODE GLS (*GENERALIZED LEAST SQUARE*)**

SKRIPSI

OLEH :

A. DONNY HARHARA

NIM. 05510040



JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM

MALANG

2009

**UJI SELANG KEPERCAYAAN PARAMETER REGRESI NONLINIER
DENGAN METODE OLS (*ORDINARY LEAST SQUARE*) DAN METODE
GLS (*GENERALIZED LEAST SQUARE*)**

SKRIPSI

Diajukan Kepada:

**Universitas Islam Negeri
Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)**

Oleh:

A. DONNY HARHARA

NIM. 05510040

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2009**

**UJI SELANG KEPERCAYAAN PARAMETER REGRESI NON-LINIER
DENGAN METODE OLS (*ORDINARY LEAST SQUARE*) DAN METODE
GLS (*GENERALIZED LEAST SQUARE*)**

SKRIPSI

Oleh:

**A. DONNY HARHARA
NIM. 05510040**

**Telah Disetujui untuk Diuji :
Tanggal, 7 Oktober 2009**

Dosen Pembimbing I,

Dosen Pembimbing II,

**Sri Harini, M.Si
NIP. 19731014 200112 2 002**

**Abdul Aziz, M.Si
NIP. 197603182006041002**

**Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika**

**Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001**

**UJI SELANG KEPERCAYAAN PARAMETER REGRESI NON-LINIER
DENGAN METODE OLS (*ORDINARY LEAST SQUARE*) DAN METODE
GLS (*GENERALIZED LEAST SQUARE*)**

SKRIPSI

Oleh:

A. DONNY HARHARA

NIM. 05510040

**Telah dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan Untuk
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)**

Tanggal, 30 September 2009

Susunan Dewan Penguji

Tanda Tangan

- | | | |
|------------------|-----------------------|--------------------------|
| 1. Penguji Utama | : Drs. Turmudzi, M.Si | () |
| 2. Ketua | : Usman Pagalay, M.Si | () |
| 3. Sekretaris | : Sri Harini, M.Si | () |
| 4. Anggota | : Abdul Aziz, M.Si | () |

**Mengetahui dan Mengesahkan
Ketua Jurusan Matematika**

Abdussakir, M.Pd

NIP. 19751006 200312 1 001

**SURAT PERNYATAAN
KEASLIAN TULISAN**

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : A. DONNY HARHARA

NIM : 05510040

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul : Uji Selang Kepercayaan Parameter Regresi Nonlinier dengan
Metode OLS (*Ordinary Least Square*) dan Metode GLS
(*Generalized Least Square*)

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri.

Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 7 Oktober 2009

Yang membuat pernyataan,

A. Donny Harhara
NIM. 05510040

MOTTO

“Despair is conclusion of the fools”

“Despair is conclusion of the fools”

إِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا

Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan

PERSEMBAHAN

Penulis persembahkan karya kecil terbaik ini kepada:

*Bapak Kisam dan (alm.) Ibu Siti Romdiah yang tercinta,
Kakak-kakakku Laily Hindiana (sekeluarga), Dian Novita(sekeluarga),
M. Ricco Taufik Akbar dan Moh. Yogie Alambara
Adikku Anggun Rara Amalia
terima kasih atas kasih sayang, do'a, dan perhatian serta motivasinya
jasa-jasa beliau yang tidak akan pernah penulis lupakan demi terselesaikannya
penulisan skripsi ini.
Dan de2k Ema yang selalu memberikan motivasi, kasih sayang dan inspirasi
kepada penulis dalam mengerjakan skripsi ini.
Semoga Allah membalas semua kebaikan yang telah diberikan kepada penulis.*

KATA PENGANTAR



Syukur alhamdulillah kehadiran Allah SWT. yang telah melimpahkan rahmat, taufik serta hidayah dan inayah-Nya sehingga skripsi dengan judul “ **Uji Selang Kepercayaan Parameter Regresi Nonlinier dengan Metode OLS (*Ordinary Least Square*) dan Metode GLS (*Generalized Least Square*)**” ini dapat terselesaikan dengan baik.

Sholawat serta salam semoga tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW yang mana beliau telah mengantarkan manusia ke jalan kebenaran.

Keberhasilan penulisan skripsi ini tidak lepas dari bimbingan, pengarahan, dan bantuan dari berbagai pihak baik berupa pikiran, motivasi, tenaga, maupun do’a dan restu. Karena itu penulis mengucapkan terima kasih kepada :

1. Bapak Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang Malang.
2. Bapak Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU., DSc selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Bapak Abdussakir, M.Pd selaku Ketua Jurusan Matematika yang telah memberikan ijin dan kemudahan kepada penulis untuk menyusun skripsi.
4. Ibu Sri Harini, M.Si selaku dosen pembimbing yang dengan sabar telah meluangkan waktunya demi memberikan bimbingan dan pengarahan dalam penyelesaian skripsi ini.

5. Bapak Abdul Aziz, M.Si selaku dosen pembimbing agama yang telah memberikan bimbingan dan petunjuk dalam menyelesaikan skripsi ini.
6. Ibu Ari kusumastuti, S.Si, M.Pd selaku wali dosen yang telah memberikan motivasi dan bimbingan mulai semester satu hingga semester akhir.
7. Bapak dan Ibu dosen, jurusan matematika dan staf fakultas yang selalu membantu dan memberikan dorongan semangat semasa kuliah.
8. Kedua orang tua penulis bapak Kisam dan (alm) Ibu Siti Romdiah yang tidak pernah berhenti memberikan kasih sayang, do'a, dan dorongan semangat kepada penulis semasa kuliah hingga akhir pengerjaan skripsi ini.
9. Semua teman – teman matematika, terutama angkatan 2005. Terima kasih atas semua pengalaman dan motivasinya dalam penyelesaian penulisan skripsi ini.
10. Teman-teman UKM Unit Olah Raga (UNIOR) khususnya angkatan 2006, pengurus periode 2007-2008 dan pengurus periode 2008-2009 yang selalu memotivasi saya dalam menyelesaikan skripsi ini.
11. Teman-teman HMJ Matematika khususnya pengurus 2007-2008 yang telah memberikan motivasi kepada saya.
12. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu, atas keikhlasan bantuan moril dan sprituil, penulis ucapkan terima kasih sehingga dapat menyelesaikan skripsi.

Semoga Allah SWT. membalas kebaikan mereka semua. Manusia tidak pernah luput dari salah dan lupa serta keterbatasan ilmu yang dimiliki penulis,

menjadi celah timbulnya kekurangan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan masukan, saran, kritik, dan teguran dari semua evaluator dan pembaca demi kesempurnaan skripsi ini. Semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi semua pihak dan dapat menjadi literatur penambah wawasan dalam aspek pengajaran matematika terutama dalam pengembangan ilmu matematika di bidang statistika dan regresi. Amiin.

Malang, 05 Oktober 2009

Penulis



DAFTAR ISI

HALAMAN SAMPUL	
HALAMAN PENGAJUAN	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	
HALAMAN MOTTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR	i
DAFTAR ISI	iv
ABSTRAK	vii
BAB I: PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	5
1.3 Tujuan Penelitian.....	5
1.4 Batasan Masalah.....	5
1.5 Manfaat Penelitian.....	6
1.6 Metode Penelitian	6
1.7 Sistematika Penelitian.....	9
BAB II: KAJIAN PUSTAKA	
2.1 Analisis Regresi.....	10
2.2 Regresi Nonlinier	12

2.2.1 Pengertian.....	12
2.2.2 Bentuk-Bentuk Regresi Nonlinier	13
2.3 Estimasi Parameter	14
2.3.1 Pengertian Estimasi Parameter dan Estimasi	14
2.3.2 Sifat-sifat Estimator	15
2.4 Kuadrat Terkecil (<i>Least Square</i>).....	16
2.4.1 Kuadrat Terkecil Biasa (OLS).....	24
2.4.2 Kuadrat Terkecil Umum (GLS)	27
2.5 Selang Kepercayaan	28
2.5.1 Selang Kepercayaan untuk β_1	28
2.5.2 Selang Kepercayaan untuk β_0	31
2.6 Kajian dalam al-Qur'an tentang Estimasi, Kepercayaan dan Pengujian	32
2.6.1 Estimasi.....	32
2.6.2 Kepercayaan.....	33
2.6.3 Pengujian.....	35
BAB III : PEMBAHASAN	
3.1 Penentuan Estimasi Parameter Model Regresi Nonlinier.	39
3.2 Analisis Estimasi Parameter dengan metode OLS	41
3.3 Selang kepercayaan Nilai Estimasi Parameter dari metode OLS ..	48
3.3.1 Menentukan Selang Kepercayaan untuk β_1	48
3.3.2 Menentukan Selang Kepercayaan untuk $\ln \beta_0$	49
3.4 Analisis Estimasi Parameter dengan metode GLS	51

3.5	Selang kepercayaan Nilai Estimasi Parameter dari metode GLS ..	57
3.5.1	Menentukan Selang Kepercayaan untuk β_1	57
3.5.2	Menentukan Selang Kepercayaan untuk $\ln \beta_0$	59
3.6	Aplikasi Estimasi Parameter β_1 dan $\ln \beta_0$ pada data dengan menggunakan metode OLS dan GLS dan menentukan selang Kepercayaan	60
3.7	Membandingkan Selang Kepercayaan dari Parameter β_1 dan $\ln \beta_0$ yang diperoleh dari Metode OLS dan GLS	65
BAB IV : PENUTUP		
4.1	Kesimpulan	68
4.2	Saran	68

DAFTAR PUSTAKA

ABSTRAK

Harhara, A. Donny. 2009. **Uji Selang Kepercayaan Parameter Regresi Non-Linier dengan Metode OLS (*Ordinary Least Square*) dan Metode GLS (*Generalized Least Square*)**. Skripsi Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: Sri Harini M.Si. dan Abdul Aziz, M.Si.

Kata Kunci: Estimasi parameter, Metode OLS, Metode GLS, Selang Kepercayaan.

Estimasi Parameter merupakan proses yang menggunakan sampel statistik untuk menduga atau menaksir hubungan parameter populasi yang tidak diketahui. Pendugaan merupakan suatu pernyataan mengenai parameter populasi yang diketahui berdasarkan populasi dari sampel. Dengan estimasi parameter ini kita dapat mengetahui karakteristik parameter suatu populasi.

Estimasi parameter digolongkan menjadi estimasi titik (*Point Estimate*) dan estimasi selang (*Interval Estimate*). Metode yang paling sering dipakai peneliti untuk mengestimasi parameter adalah Metode Kuadrat Terkecil (*Least Square Methode*). Dengan menggunakan metode ini akan didapatkan penduga parameter yang tidak bias, konsisten dan efisien. Untuk menggunakan metode ini harus memenuhi asumsi-asumsi yang disebut asumsi klasik. Kuadrat Terkecil yang memenuhi asumsi-asumsi ini disebut Kuadrat Terkecil Biasa. Namun, pada pelaksanaannya sering kali terjadi penyimpangan asumsi-asumsi ini, salah satunya terjadinya heteroskedastisitas (nilai variansi tidak konstan). Apabila penyimpangan ini terjadi maka akan dihasilkan penduga yang tidak bias, konsisten namun tidak efisien. Maka harus digunakan metode kuadrat terkecil yang merupakan pengembangan dari kuadrat terkecil yang bisa digunakan pada data yang homoskedastisitas dan juga bisa digunakan untuk mengatasi heteroskedastisitas supaya tetap mendapatkan penduga yang tidak bias, konsisten dan efisien yaitu metode Kuadrat Terkecil Umum.

Setelah didapatkan penduga parameter, maka selang kepercayaan dari parameter juga akan dapat diketahui. Selang kepercayaan dapat digunakan sebagai taksiran suatu parameter dan dapat pula dipandang sebagai pengujian hipotesis, yaitu apakah suatu parameter sama dengan suatu nilai tertentu. Di bawah anggapan bahwa galat ε_i berdistribusi normal, untuk setiap i . maka statistik $\ln \beta_0$ dan β_1 juga akan berdistribusi normal.

Pada regresi nonlinier model power yang memenuhi asumsi regresi klasik yang dianalisis dengan metode OLS dan GLS didapatkan penduga parameter yang sama. Selang kepercayaannya juga diperoleh hasil selang yang sama.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Dalam ilmu matematika ada cabang ilmu yang sangat penting dan sering digunakan sebagian besar ilmuwan dalam melakukan penelitian yaitu ilmu statistik. Statistika adalah ilmu yang mempelajari suatu proses dalam merencanakan, mengumpulkan, menganalisis, menginterpretasi, dan mempresentasikan data. Istilah 'statistika' (bahasa Inggris: *statistics*) berbeda dengan 'statistik' (*statistic*). Statistika merupakan ilmu yang berkenaan dengan data, sedang statistik adalah data, informasi, atau hasil penerapan algoritma statistika pada suatu data dari kumpulan data, statistika dapat digunakan untuk menyimpulkan atau mendeskripsikan data, ini dinamakan statistika deskriptif. Sebagian besar konsep dasar statistika mengasumsikan teori probabilitas. Ilmu statistika ini memberikan kontribusi yang besar pada kemajuan keilmuan di dunia ini, tidak hanya pada induknya yakni ilmu matematika melainkan juga disiplin-disiplin ilmu yang lain.

Statistika berupa sekumpulan konsep dan metode untuk mengumpulkan data, menyajikanya dalam bentuk yang mudah dipahami, menganalisis data dan mengambil suatu kesimpulan berdasarkan hasil analisis data dalam situasi yang memiliki ketidakpastian dan variasi. Karena statistika bertolak pada cara berfikir probabilistik, hasil pengolahan data yang menggunakan metode statistika bukanlah hasil pasti, tetapi merupakan hasil taksiran adanya ketidakpastian dari variasi yang terjadi dalam fenomena tertentu. Teknik

pengambilan kesimpulan tentang suatu parameter meliputi pendugaan (*estimation*) parameter dan pengujian hipotesis. Teknik pendugaan (*estimation*) digolongkan menjadi penduga titik (*point estimate*) dan penduga selang (*interval estimate*).

Pendugaan yang juga dapat diartikan sebagai perkiraan terdapat dalam pemaknaan atau penafsiran dari surat ar-Ruum ayat 4 yang berbunyi:

فِي بَضْعِ سِنِينَ ۖ لِلَّهِ الْأَمْرُ مِنْ قَبْلُ وَمِنْ بَعْدِ ۚ وَيَوْمَئِذٍ يَفْرَحُ الْمُؤْمِنُونَ ﴿٤﴾

Artinya: "Dalam beberapa tahun lagi, bagi Allah-lah urusan sebelum dan sesudah (mereka menang). Dan di hari (kemenangan bangsa Romawi) itu bergembiralah orang-orang yang beriman."

Dalam surat ar-Ruum ayat 4 tersebut terdapat kata beberapa tahun lagi, menurut ahli tafsir kata tersebut ditafsirkan sebagai suatu "perkiraan tentang selang waktu" yang tidak secara pasti kapan bangsa Romawi akan menang dan selang waktu tersebut antara tiga sampai sembilan tahun. Jika kita membaca makna (tafsir) dari ayat tersebut dengan seksama, maka akan terdapat suatu ketidakpastian atau hanya perkiraan saja.

Dalam surat al-Jaatsiyah ayat 32 juga menyinggung tentang pendugaan yang berbunyi:

وَإِذَا قِيلَ إِنَّ وَعْدَ اللَّهِ حَقٌّ وَالسَّاعَةُ لَا رَيْبَ فِيهَا قُلْتُمْ مَا نَدْرِي مَا السَّاعَةُ ۖ إِن نَّظُنُّ إِلَّا ظَنًّا وَمَا نَحْنُ بِمُستَقِرِّينَ ﴿٣٢﴾

Artinya : Dan apabila dikatakan (kepadamu): "Sesungguhnya janji Allah itu adalah benar dan hari berbangkit itu tidak ada keraguan padanya", niscaya kamu menjawab: "Kami tidak tahu apakah

hari kiamat itu, kami sekali-kali tidak lain hanyalah menduga-duga saja dan kami sekali-kali tidak meyakini(nya)".

Dalam surat al-Jaatsiyah ayat 32 tersebut di atas menyinggung tentang pendugaan yakni pada kata “menduga-duga”. Dalam kata tersebut terdapat suatu kesan tentang keraguan atau rasa tidak percaya mengenai hari akhir (hari kiamat). Manusia meragukan pernyataan tersebut bahkan kadang-kadang tidak meyakininya. Sama halnya dalam ilmu statistika kita dapat menduga (mengestimasi) terlebih dahulu parameter suatu populasi ataupun sampel sebelum mengambil suatu keputusan. Dari gambaran penafsiran dari kedua ayat dalam al-Qur’an tersebut di atas, maka dapat diketahui bahwa di dalam pemahaman (pemaknaan) ayat al-Qur’an terdapat estimasi (pendugaan).

Salah satu metode yang sangat populer untuk mengestimasi nilai rata-rata dari variabel random adalah Metode Estimasi Kuadrat Terkecil (*Least Square Estimation*). Metode Kuadrat Terkecil (*Least Square*) merupakan salah satu metode untuk menganalisis regresi yang paling sering digunakan berdasarkan asumsi-asumsi tertentu yang merupakan bagian dari ilmu statistika.

Dalam perkembangannya Metode Estimasi Kuadrat Terkecil berkembang menjadi beberapa metode sesuai dengan kebutuhan, misalnya apabila terjadi penyimpangan asumsi pada kuadrat terkecil. Ada beberapa asumsi klasik yang harus dipenuhi oleh bentuk estimasi OLS (*Ordinary least Square*) agar hasil estimasinya dapat diandalkan. Salah satu asumsi penting yang akan dibahas dalam tulisan ini adalah asumsi *homoskedastisitas*. Asumsi variansi

galat homogen (asumsi *homoskedastisitas*) diperlukan oleh metode OLS untuk mendapatkan parameter regresi yang bersifat tak bias linear terbaik (*best linear unbiased estimation*). Tidak dipenuhinya asumsi variansi galat homogeny atau terjadi heterokedastisitas akan dapat mengakibatkan :

- a) Penduga OLS yang diperoleh tetap memenuhi persyaratan tidak bias.
- b) Varian yang diperoleh menjadi tidak efisien, artinya cenderung membesar sehingga tidak lagi merupakan varian yang terkecil.

Dengan demikian model perlu diperbaiki dulu agar pengaruh dari heteroskedastisitasnya hilang. (Muhammad Firdaus, 2004:107)

Penanganan kasus variansi galat tidak homogen (*heteroskedastisity*) kadang diikuti munculnya penyimpangan asumsi lainnya. Pada kondisi terdapat heteroskedastisitas estimasi atau pendugaan akan lebih efisien apabila menggunakan metode *Generalized Least Square* (GLS). Karena GLS sebagai salah satu bentuk *least square estimation*, merupakan bentuk estimasi yang dibuat untuk mengatasi sifat heteroskedastisitas yang memiliki kemampuan untuk mempertahankan sifat efisiensi estimatornya tanpa harus kehilangan sifat *unbiased* dan konsistensinya.

Pada tugas akhir ini penulis mengkaji lebih dalam tentang analisis estimasi parameter regresi nonlinier dengan menggunakan metode OLS (*Ordinary Least Square*) dan metode GLS (*Generalized Least Square*) yang kemudian dilanjutkan dengan mengestimasi atau menganalisis selang kepercayaan parameter regresinya (estimasi nilai β_0 dan β_1) dan menguji hasil selang kepercayaan dari kedua metode kuadrat terkecil tersebut. Sehingga dalam

tugas akhir ini akan diteliti tentang “**Uji Selang Kepercayaan Parameter Regresi Non-Linier dengan Metode OLS (*Ordinary Least Square*) dan Metode GLS (*Generalized Least Square*)**”.

1.2 Rumusan Masalah

Bagaimana uji selang kepercayaan parameter regresi nonlinier dengan menggunakan metode OLS (*Ordinary Least Square*) dan metode GLS (*Generalized Least Square*)?

1.3 Tujuan

Mendeskripsikan hasil uji selang kepercayaan parameter regresi nonlinier dengan menggunakan metode OLS (*Ordinary Least Square*) dan metode GLS (*Generalized Least Square*).

1.4 Batasan Masalah

Pada tugas akhir ini penelitian akan dibatasi pada parameter regresi nonlinier model Power dengan menggunakan metode OLS (*Ordinary Least Square*) dan metode GLS(*Generalized Least Square*). Kemudian diaplikasikan pada data regresi antara variabel GNP(*gross national product*) dalam satuan yen yang telah dibulatkan sampai trilyun yen sebagai variable tak bebas dan variabel emisi CO₂ (*carbon dioxide*) dalam satuan ton yang telah dibulatkan sampai juta ton sebagai variable bebas .Parameter yang diteliti adalah parameter β_0 dan β_1 untuk menghindari perluasan permasalahan.

1.5 Manfaat Penelitian

Bagi Penulis

- a. Mengetahui lebih dalam tentang disiplin ilmu matematika khususnya bidang regresi.
- b. Mengetahui perbandingan hasil uji selang kepercayaan parameter garis regresi non – linier dengan metode OLS (*Ordinary Least Square*) dan metode GLS (*Generalized Least Square*).

Bagi Instansi

- a. Sebagai sumbangan pemikiran keilmuan sebagai kontribusi nyata terhadap Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang.
- b. Peningkatan kualitas keilmuan fakultas dengan adanya penelitian dan pengembangan penelitian.
- c. Untuk menambah kepustakaan untuk menambah pengetahuan keilmuan dalam bidang ilmu matematika khususnya pada bidang ilmu regresi

Bagi Pembaca

- a. Dapat mengetahui perbandingan hasil uji selang kepercayaan parameter regresi dengan metode OLS (*Ordinary Least Square*) dan metode GLS(*Generalized Least Square*).
- b. Sebagai referensi apabila ingin mengembangkan ilmu regresi.
- c. Lebih bersemangat untuk mengembangkan ilmu regresi

1.6 Metode Penelitian

Dalam penelitian ini dilakukan dengan menggunakan metode penelitian

sebagai berikut:

- a) Pendekatan penelitian ini menggunakan pendekatan kajian kepustakaan.

Penelitian ini menggunakan pendekatan kepustakaan yang merujuk pada pustaka atau buku-buku yang berkaitan dan yang dibutuhkan untuk melakukan penelitian ini

- b) Sifat penelitian ini adalah penelitian perpustakaan (*library research*)

Sifat penelitian ini adalah penelitian perpustakaan yang bertujuan untuk mengumpulkan data dan informasi dengan bermacam-macam materi yang terdapat dalam perpustakaan, seperti buku, majalah, dokumen catatan dan kisah-kisah sejarah lainnya (Mardalis, 1990: 28).

- c) Teknik analisis data

Dalam menganalisis data dalam penelitian ini, penulis menyusun langkah-langkah sebagai berikut :

1. Menentukan persamaan regresi nonlinier yang akan diteliti (Model regresi nonlinier power).
2. Mentransformasikan persamaan regresi nonlinier model power ke dalam bentuk linier
 - a) Mentransformasikan persamaan regresi nonlinier model power ke dalam bentuk logaritma natural
 - b) Menotasikan model dengan pendekatan matrik

3. Menentukan estimasi parameter model regresi dengan metode OLS (*Ordinary Least Square*) dengan cara :
 - a) Menguji model dengan asumsi-asumsi yang telah ditentukan
 - b) Mengestimasi parameter β_0 dan β_1
 - c) Menentukan sifat-sifat penaksir *unbiased*, konsisten dan efisien
4. Mencari selang kepercayaan dari masing-masing nilai estimasi parameter β_0 dan β_1 dengan cara:
 - a) Menentukan nilai $\text{var}(\beta_0)$ dan $\text{var}(\beta_1)$
 - b) Menentukan selang kepercayaan dari nilai estimasi parameter β_0 dan β_1
5. Menentukan estimasi parameter model regresi dengan metode GLS (*Generalized Least Square*) dengan cara :
 - a) Menguji model dengan asumsi-asumsi yang telah ditentukan
 - b) Mengestimasi parameter β_0 dan β_1
 - c) Menentukan sifat-sifat penaksir *unbiased*, konsisten dan efisien
6. Mencari selang kepercayaan dari masing-masing nilai estimasi parameter β_0 dan β_1 dengan cara:
 - a) Menentukan nilai $\text{var}(\beta_0)$ dan $\text{var}(\beta_1)$
 - b) Menentukan selang kepercayaan dari nilai estimasi parameter β_0 dan β_1
7. Mensubstitusikan data regresi antara variabel GNP (*gross national product*) dan variabel emisi CO₂ (*carbon dioxide*), kemudian menentukan pendugaan parameter (β_0 dan β_1) pada data tersebut

dengan menggunakan metode OLS dan GLS dan menentukan selang kepercayaannya.

8. Membandingkan selang kepercayaan dari parameter (β_0 dan β_1) yang diperoleh dari metode OLS dan GLS
9. Membuat kesimpulan. Kesimpulan merupakan jawaban singkat dari permasalahan yang telah dikemukakan dalam pembahasan

1.7 Sistematika Penelitian

Agar dalam pembahasan penelitian ini sistematis, maka penulis menyusun sistematika penulisan sebagai berikut :

- BAB I : Pendahuluan, yang berisi latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metodologi penelitian dan sistematika penelitian.
- BAB II : Kajian pustaka, yang berisi tentang regresi, regresi nonlinier , estimasi parameter, kuadrat terkecil (*Least Square*), metode OLS (*Ordinary Least Square*) dan metode GLS (*Generalized Least Square*) dan selang kepercayaan parameter (β_0 dan β_1). Kajian dari al-Qur'an tentang estimasi, kepercayaan dan pengujian
- BAB III : Pembahasan, berisi estimasi parameter regresi dengan metode OLS dan metode GLS, selang kepercayaan parameter regresi dan hasil penelitian uji selang kepercayaan parameter regresi

nonlinier dengan metode OLS (*Ordinary Least Square*) dan metode GLS(*Generalized Least Square*).

BAB IV : Penutup, berisi kesimpulan dan saran.



BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Analisis Regresi

Istilah regresi diperkenalkan pertama kali oleh Francis Galton, dalam makalahnya yang berjudul *Family likeness in Stature*. Analisis regresi adalah teknik analisis yang mencoba menjelaskan bentuk hubungan antara peubah-peubah yang mendukung sebab akibat. Prosedur analisisnya didasarkan atas distribusi probabilitas bersama peubah-peubahnya. Bila hubungan ini dapat dinyatakan dalam persamaan matematika, maka dapat dimanfaatkan untuk keperluan-keperluan lain misalnya peramalan). Secara umum, dapat dikatakan bahwa analisis regresi berkenaan dengan studi ketergantungan suatu variabel, yaitu variabel tak bebas (*dependent variabel*), pada satu atau lebih variabel yang lain, yaitu variabel bebas (*independent variabel*), dengan maksud menduga dan atau meramalkan nilai rata-rata hitung (*mean*) atau rata-rata (populasi) dari variabel tak bebas, dipandang dari segi nilai yang diketahui atau tetap (dalam pengambilan sampel berulang) dari variabel bebas, (Firdaus,2004:22).

Menurut Supranto (1994:262) hubungan fungsi antara variabel X (variabel bebas) dan Y (variabel tak bebas) tidak selalu bersifat linier, akan tetapi bisa juga bukan linier (nonlinier). Diagram pencar dari hubungan yang linier akan menunjukkan suatu pola yang dapat didekati dengan garis lurus, sedangkan yang bukan linier harus didekati dengan garis lengkung

Analisis regresi linier dapat dibedakan menjadi dua, yaitu :

1. Analisis regresi sederhana (*simple regression analysis*) atau regresi dua variabel, yang mempelajari ketergantungan satu variabel tak bebas hanya pada satu variabel bebas

Model regresi sederhana:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i, i = 1, 2, 3 \dots N \quad (2.1)$$

Dimana :

Y_i = variable tak bebas (*dependent variable*)

X_i = variable bebas (*independent variable*)

β_0 = parameter konstanta/intersept regresi yang tidak diketahui nilainya dan akan diestimasi

β_1 = parameter koefisien regresi yang tidak diketahui nilainya dan akan diestimasi

ε = variabel galat/kesalahan regresi, dengan $\varepsilon \sim N(0; \sigma^2)$

N = banyaknya data observasi

2. Analisis regresi berganda (*multiple regression analysis*) atau regresi lebih dari dua variabel, yang mempelajari ketergantungan suatu variabel tak bebas pada lebih dari satu variabel bebas.

Model regresi berganda :

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_k X_k + \varepsilon_i, i = 1, 2, 3 \dots N \quad (2.2)$$

Dimana :

Y_i = variable tak bebas (*dependent variable*)

- X_i = variable bebas (*independent variable*)
- β_0 = parameter kontanta/intersept regresi yang tidak diketahui nilainya dan akan diestimasi
- $\beta_1, \dots, \beta_k$ = parameter koefisien regresi yang tidak diketahui nilainya dan akan diestimasi
- ε = variabel galat/kesalahan regresi, dengan $\varepsilon \sim N(0; \sigma^2)$
- k = banyaknya variabel bebas/faktor
- N = banyaknya data observasi

(Firdaus,2004:25)

Tujuan utama dari analisis regresi adalah mendapatkan dugaan (*estimation*) dari suatu variabel dengan menggunakan variabel lain yang diketahui. Analisis regresi mempunyai dua jenis yaitu regresi linier dan regresi nonlinier. Namun yang akan dibahas dalam penelitian ini mengenai regresi nonlinier saja.

2.2 Regresi Nonlinier

2.2.1 Pengertian

Menurut Supranto (1994:262) hubungan fungsi antara variabel X dan Y tidak selalu bersifat linier, akan tetapi bisa juga bukan linier (non-linier). Diagram pencar dari hubungan yang linier akan menunjukkan suatu pola yang dapat didekati dengan garis lurus, sedangkan yang bukan linier harus didekati dengan garis lengkung. Menurut Sugiarto (1992:29) hubungan fungsi diantara dua peubah X dan Y dikatakan tidak linier apabila laju perubahan dalam Y

yang berhubungan dengan satu satuan X tidak konstan untuk suatu jangkauan nilai-nilai X tertentu. Regresi nonlinier adalah regresi yang variabel-variabelnya berbentuk tidak biasa. Bentuk grafik non-linier adalah berupa lengkungan, (Hasan, 2002:279).

2.2.2 Bentuk-bentuk Regresi Non linier

Beberapa bentuk persamaan regresi nonlinier antara lain:

1. Bentuk Power

$$Y_i = \beta_0 X_i^{\beta_1} + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.3)$$

Dimana :

Y_i = variable tak bebas (*dependent variable*)

X_i = variable bebas (*independent variable*)

β_0 = parameter kontanta/intersept regresi yang tidak diketahui nilainya dan akan diestimasi

β_1 = parameter koefisien regresi yang tidak diketahui nilainya dan akan diestimasi

ε = variabel galat/kesalahan regresi, dengan $\varepsilon \sim N(0; \sigma^2)$

N = banyaknya data observasi

2. Bentuk Eksponensial

$$Y_i = e^{\beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \dots + \beta_k X_{ik}} \varepsilon_i \quad (2.4)$$

Dengan transformasi logaritma, persamaan (2.4) dapat diperoleh:

$$\ln(Y_i) = \ln(e^{\beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \dots + \beta_k X_{ik}} \varepsilon_i)$$

$$\ln(Y_i) = \ln(e^{\beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \dots + \beta_k X_{ik}} \epsilon_i)$$

$$\ln(Y_i) = \ln e^{\beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \dots + \beta_k X_{ik}} + \ln \epsilon_i$$

$$\ln(Y_i) = (\beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \dots + \beta_k X_{ik}) \ln e + \ln \epsilon_i$$

$$\ln(Y_i) = (\beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \dots + \beta_k X_{ik})(1) + \ln \epsilon_i$$

$$\ln Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \dots + \beta_k X_{ik} + \ln \epsilon_i \quad (2.5)$$

Model seperti ini adalah model linear dalam bentuk semi log yang dapat berupa log-lin atau lin-log

3. Bentuk berkebalikan (Respirokal)

$$Y_i = \frac{1}{\beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \dots + \beta_k X_{ik} + \epsilon_i} \quad (2.6)$$

Transformasi modelnya adalah

$$\frac{1}{Y_i} = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \dots + \beta_k X_{ik} + \epsilon_i$$

Bentuk respirokal yang lain adalah

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 \frac{1}{X_i} + \dots + \epsilon_i \quad (2.7)$$

2.3 Estimasi Parameter

2.3.1 Pengertian Estimasi Parameter dan Estimator

Menurut Hasan (2002: 111) Pendugaan (*estimasi*) merupakan proses yang menggunakan sampel statistik untuk menduga atau menaksir hubungan parameter populasi yang tidak diketahui. Pendugaan merupakan suatu pernyataan mengenai parameter populasi yang diketahui berdasarkan populasi

dari sampel dalam hal ini sampel random, yang diambil dari populasi yang bersangkutan. Jadi dengan pendugaan ini, keadaan parameter populasi dapat diketahui.

Estimator adalah anggota peubah acak dari statistik yang mungkin untuk sebuah parameter (anggota peubah diturunkan). Besaran sebagai hasil penerapan penduga terhadap data dari sesuatu contoh disebut nilai duga (*estimate*), (Yitnosumarto, 1990:211-212).

2.3.2 Sifat-Sifat Estimator

Estimator parameter mempunyai sifat-sifat antara lain:

1. Tak Bias (*Unbiased*)

Suatu hal yang menjadi tujuan dalam pendugaan adalah, penduga haruslah “mendekati” nilai sebenarnya dari parameter yang diduga tersebut. Misalkan parameter kita θ (kita gunakan parameter θ agar tidak terikat pada parameter μ dan σ^2 misalnya). Jika kita menyatakan $\hat{\theta}$ merupakan penduga tak bias (*unbiased estimator*) dari parameter θ , maka

$$E(\hat{\theta}) = \theta \quad (2.8)$$

2. Efisien

Syarat kedua dalam pendugaan adalah penduga yang kita pilih harus merupakan penduga yang efisien. Untuk menjelaskan hal ini, misalkan kita mempunyai dua penduga untuk parameter θ , katkanlah $\hat{\theta}_1$ dan $\hat{\theta}_2$. Untuk tiap-tiap penduga, karena merupakan peubah acak, maka ia mempunyai ragam sendiri-sendiri. Sebagai misal, $\bar{X}$ mempunyai ragam sebesar σ^2/n .

Jika $\bar{X}$ tersebut merupakan nilai tengah yang diambil dari populasi dengan ragam σ^2 dan atas dasar sampel berukuran n .

Jika ragam $\hat{\theta}_1$ dan $\hat{\theta}_2$ masing-masing sebesar $V(\hat{\theta}_1)$ dan $V(\hat{\theta}_2)$ maka $\hat{\theta}_1$ dikatakan lebih efisien dari $\hat{\theta}_2$, apabila

$$\frac{V(\hat{\theta}_1)}{V(\hat{\theta}_2)} < 1 \quad (2.9)$$

Atau dengan pernyataan lain, bila ragam untuk $\hat{\theta}_1$ lebih kecil dibanding dengan $\hat{\theta}_2$

3. Konsistensi

Bila suatu penduga, $\bar{X}$ misalnya semakin mendekati parameter yang diduga, maka penduga tersebut dinamakan penduga yang konsisten.

Jelasnya $\bar{X}$ penduga yang konsisten, karena:

$$\bar{X} \rightarrow \mu \text{ dengan } n \rightarrow \infty$$

Atau, dengan pernyataan peluang, jika:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\bar{X} - \mu| < \varepsilon) = 1 \quad (2.10)$$

Maka $\bar{X}$ merupakan penduga yang konsisten

(Yitnosumarto, 1990: 212)

2.4 Kuadrat Terkecil (*Least Square*)

Metoda Kuadrat Terkecil adalah salah satu metode yang paling populer dalam mengestimasi nilai rata-rata (*central moments*) dari variabel random. Aplikasi pertama perataan kuadrat terkecil adalah dalam hitungan masalah astronomi oleh Carl F. Gauss. Keunggulan dari sisi praktis makin nyata setelah berkembangnya komputer elektronik, formulasi teknik hitungan

dalam notasi matriks, dan hubungannya dengan konsep kuadrat terkecil itu ke statistik.

Model fungsional umum tentang sistem yang akan diamati harus ditentukan terlebih dahulu sebelum merencanakan pengukuran. Model fungsional ini ditentukan menggunakan sejumlah variabel (baik parameter maupun pengamatan) dan hubungan diantara mereka.

Selalu ada jumlah minimum variabel bebas yang secara unik menentukan model tersebut. Sebuah model fisis, bisa saja memiliki beberapa model fungsional yang berlainan, tergantung dari tujuan pengukuran atau informasi yang diinginkan. Jumlah minimum variabel dapat ditentukan setelah tujuan pengukuran berhasil ditetapkan, tidak terikat pada jenis pengukuran yang perlu dilakukan, (Firdaus,2004:30).

Metode kuadrat terkecil yang digunakan untuk menganalisis suatu regresi linier sederhana yaitu. Misalkan (x_i, y_i) , $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Untuk menentukan koefisien regresi β_0 dan β_1 sedemikian rupa sehingga dapat dituliskan jumlah kuadrat residunya sebagai berikut

$$S = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i)^2 \quad (2.11)$$

Dalam persamaan (2.11) X_i dan Y_i bilangan yang berasal dari pengamatan sedangkan β_0 merupakan parameter konstanta yang nilainya tidak diketahui dan akan diestimasi sedangkan β_1 merupakan parameter koefisien regresi yang nilainya tidak diketahui dan akan diestimasi, β_0 dan β_1 berubah jika garis regresinya berubah.

Sebagai nilai dugaan dipilih $\widehat{\beta}_0$ dan $\widehat{\beta}_1$ yang memiliki nilai jika nilai-nilai itu disubstitusikan ke dalam β_0 dan β_1 dalam persamaan (2.11), maka akan dihasilkan nilai S yang paling kecil. Maka kita perlu mencari turunan S terhadap β_0 dan β_1 kemudian menyamakannya dengan 0 (nol). Jadi, jika S diturunkan terhadap β_0 , maka diperoleh

$$\frac{\partial S}{\partial \beta_0} = -2 \sum_{i=1}^n (Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i) \quad (2.12)$$

Dan selanjutnya jika S diturunkan terhadap β_1 , maka diperoleh

$$\frac{\partial S}{\partial \beta_1} = -2 \sum_{i=1}^n (Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i) X_i \quad (2.13)$$

Kemudian nilai β_0 dan β_1 pada persamaan yang telah diturunkan dengan masing-masing taksirannya, $\widehat{\beta}_0$ dan $\widehat{\beta}_1$. Persamaan tersebut kemudian akan menjadi suatu sistem persamaan yang linier, disebut persamaan normal.

$$n\widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n Y_i \quad (2.14)$$

$$\widehat{\beta}_0 \sum_{i=1}^n X_i + \widehat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n X_i^2 = \sum_{i=1}^n X_i Y_i \quad (2.15)$$

Dengan menyelesaikan persamaan (2.14) dan (2.15) secara serentak, kita akan memperoleh hasil sebagai berikut:

$$\widehat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^n X_i \sum_{i=1}^n Y_i \right)}{n}}{\sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n X_i \right)^2}{n}} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \quad (2.16)$$

Dalam hal ini penjumlahan dilakukan dari $i=1$ sampai n dan kedua rumus untuk $\widehat{\beta}_1$ ini hanyalah bentuk yang sedikit berbeda dari besaran yang sama,

karena $\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n}$ dan $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$, maka

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) &= \sum_{i=1}^n X_i Y_i - \bar{Y} \sum_{i=1}^n X_i - \bar{X} \sum_{i=1}^n Y_i + n\bar{X}\bar{Y} \\
 &= \sum_{i=1}^n X_i Y_i - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n Y_i \right) \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) \sum_{i=1}^n Y_i + n \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n Y_i \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n X_i Y_i - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n Y_i \right) \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) \sum_{i=1}^n Y_i + \sum_{i=1}^n X_i \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n Y_i \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n X_i Y_i - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) \sum_{i=1}^n Y_i \\
 &= \sum_{i=1}^n X_i Y_i - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n X_i \sum_{i=1}^n Y_i \right) \\
 \text{dan} \\
 \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 &= \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(X_i - \bar{X}) \\
 &= \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X} \sum_{i=1}^n X_i - \bar{X} \sum_{i=1}^n X_i + n\bar{X}^2 \\
 &= \sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) \sum_{i=1}^n X_i + n \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) \sum_{i=1}^n X_i
 \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^n X_i^2 - n \left(\sum_{i=1}^n X_i \right)^2$$

Sebuah notasi untuk memudahkan adalah

$$S_{XY} = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}) (Y_i - \bar{Y})$$

$$= \sum_{i=1}^n X_i Y_i - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n X_i \sum_{i=1}^n Y_i \right)$$

$$= \sum_{i=1}^n X_i Y_i - n \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n Y_i \right)$$

$$= \sum_{i=1}^n X_i Y_i - \bar{X} \sum_{i=1}^n Y_i$$

$$= \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}) Y_i$$

$$S_{XX} = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

$$= \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}) (X_i - \bar{X})$$

$$= \sum_{i=1}^n X_i X_i - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n X_i \sum_{i=1}^n X_i \right)$$

$$= \sum_{i=1}^n X_i X_i - n \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n X_i \right)$$

$$= \sum_{i=1}^n X_i X_i - \bar{X} \sum_{i=1}^n X_i$$

$$= \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}) X_i$$

Dengan menyelesaikan persamaan (2.14) dan (2.15) secara serentak, kita juga akan memperoleh hasil sebagai berikut:

$$\widehat{\beta}_0 = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 \sum_{i=1}^n Y_i - \sum_{i=1}^n X_i \sum_{i=1}^n X_i Y_i}{n \sum_{i=1}^n X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n X_i \right)^2} \quad (2.17)$$

Sebenarnya dalam praktek tidak perlu dicari nilai dari $\widehat{\beta}_0$ itu dengan memakai rumus (2.17) jika nilai $\widehat{\beta}_1$ telah dihitung dengan memakai rumus (2.16). kalau nilai $\widehat{\beta}_1$ telah dihitung, maka nilai $\widehat{\beta}_0$ itu dapat diperoleh lebih langsung, dan dengan perhitungan yang lebih sedikit memakan waktu, dengan memasukkan nilai $\widehat{\beta}_1$ itu ke dalam persamaan (2.14) dan menyelesaikannya untuk mendapatkan nilai $\widehat{\beta}_0$. persamaan (2.14) dapat dirubah menjadi

$$\widehat{\beta}_0 n = \sum_{i=1}^n Y_i - \widehat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n X_i \quad (2.18)$$

Dengan membagi ruas kiri dan kanan dari persamaan (2.18) itu dengan n, kita akan memperoleh

$$\widehat{\beta}_0 = \bar{Y} - \widehat{\beta}_1 \bar{X} \quad (2.19)$$

Rumus (2.19) akan sangat menolong mempercepat perhitungan untuk mendapat nilai $\widehat{\beta}_0$ itu.

Menurut Sembiring (1995) kuadrat terkecil memiliki beberapa sifat yang baik. Kuadrat terkecil bersifat BLUE (*best linear unbiased estimator*) atau

penduga takbias linier terbaik ketika semua asumsi klasik dipenuhi. Best maksudnya adalah varian minimum dan linier menunjukkan bahwa penduga adalah fungsi linier dari Y . Terdapat beberapa persyaratan yang harus dipenuhi untuk menghasilkan penduga yang bersifat BLUE. Persyaratan yang harus dipenuhi ini lebih dikenal dengan nama asumsi klasik regresi linier.

Berkaitan dengan model regresi yang telah dikemukakan sebelumnya, Gauss telah membuat asumsi mengenai Variabel ε sebagai berikut:

1. Nilai harapan ε akan sama dengan nol, atau

$$E(\varepsilon) = 0 \quad (2.20)$$

Yang berarti nilai bersyarat ε yang diharapkan adalah sama dengan nol dimana syaratnya yang dimaksud tergantung pada nilai x . dengan demikian untuk nilai x tertentu mungkin saja nilai ε sama dengan nol, mungkin positif atau negatif, tetapi untuk nilai banyak x secara keseluruhan nilai rata-rata ε diharapkan sama dengan nol.

2. ε memiliki variasi yang konstan,

$$\text{Var}(\varepsilon) = E(\varepsilon - E(\varepsilon))^2 = E(\varepsilon^2) = \sigma^2. \quad (2.21)$$

Asumsi kedua ini juga dinamakan homoskedastik (*homoscedasticity*)

3. Tidak ada korelasi antara ε_i dan ε_j , dimana i tidak sama dengan j .

Dengan demikian dianggap bahwa tidak terdapat hubungan yang positif atau negative antara ε_i dan ε_j . Dan tidak terdapat heteroskedastisitas antar variabel ε untuk setiap observasi, atau dikatakan bahwa setiap variabel ε memenuhi syarat homoskedastisitas. Artinya variabel ε mempunyai varian yang positif dan konstan yang nilainya σ^2 , yaitu

$$\text{Var}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \begin{cases} \sigma^2, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (2.22)$$

Sehingga asumsi ketiga ini dapat dituliskan dalam bentuk

$$\text{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = E[(\varepsilon_i - E(\varepsilon_i))(\varepsilon_j - E(\varepsilon_j))^T] = E(\varepsilon\varepsilon^T) = \sigma^2 I_n \quad (2.23)$$

Dengan kata lain, asumsi ketiga ini dapat ditulis $\text{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j)=0$ dimana $i \neq j$. Asumsi ketiga ini juga dinamakan asumsi ε_i tidak bekorelasi serial (*nonserial correlation*) dan juga otokorelasi.

4. Variabel bebas tidak bersifat stokastik (*nonstochastic*).

Asumsi ini berarti bahwa dalam percobaan yang berulang-ulang nilai X adalah tetap. Implikasi dari asumsi ini adalah variasi Y_i sama dengan variasi ε_i , $\text{Var}(Y_i) = \sigma^2$, dan juga tidak ada korelasi Y_i dan Y_j untuk i tidak sama dengan j ,

$$\text{Cov}(Y_i, Y_j)=0 \quad (2.24)$$

Keempat asumsi di atas disebut asumsi klasik. Dengan menerapkan metode OLS maka akan diperoleh $\widehat{\beta}_0$ dan $\widehat{\beta}_1$ tidak sama dengan β_0 dan β_1 . maka untuk membuat inferensi mengenai β_0 dan β_1 berdasarkan $\widehat{\beta}_0$ dan $\widehat{\beta}_1$ dibutuhkan asumsi kelima yakni asumsi normalitas.

5. ε_i berdistribusi normal, atau dapat ditulis $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$. Implikasi dari asumsi ini dan keempat asumsi di atas adalah: Y_i berdistribusi normal, dapat ditulis $Y_i \sim N(E(Y_i), \sigma^2)$. Karena $\widehat{\beta}_0$ dan $\widehat{\beta}_1$ merupakan fungsi linier dari Y , maka $\widehat{\beta}_0$ dan $\widehat{\beta}_1$ juga berdistribusi normal. Untuk $\widehat{\beta}_1$ dapat ditulis $\widehat{\beta}_1 \sim N(E(\widehat{\beta}_1), \text{Var}(\widehat{\beta}_1))$. Dengan menggunakan hasil OLS, $\widehat{\beta}_1$ merupakan penaksir yang tidak bias bagi β_1 maka

$$\widehat{\beta}_1 \sim N(\beta_1, \sigma^2 / \sum (X_i - \bar{X})^2) \quad (2.25)$$

Penggunaan kuadrat terkecil pada umumnya menggunakan model fungsional yang linier karena model tidak linier lebih sulit dan lebih tidak praktis untuk diselesaikan (paling tidak sampai saat ini). Oleh karena itu, jika digunakan model yang tidak linier, maka perlu dilakukan kegiatan linierisasi atau ditransformasikan ke dalam bentuk linier terlebih dahulu. Karena Hubungan nonlinier dalam kasus tertentu dapat ditransformasikan menjadi hubungan linier, dengan cara mengubah variabel-variabel yang terkait secara tepat, (Spiegel dan Stephens, 2004:232).

2.4.1 Kuadrat Terkecil Biasa (*Ordinary Least Square*)

Kuadrat Terkecil Biasa (*Ordinary Least Square*) merupakan salah satu metode bagian dari kuadrat terkecil dan sering hanya disebut kuadrat terkecil saja. Metode ini sering digunakan oleh para ilmuwan atau peneliti dalam proses penghitungan suatu persamaan regresi sederhana.

Dalam penggunaan regresi, terdapat beberapa asumsi dasar yang dapat menghasilkan estimator linear tidak bias yang terbaik dari model regresi yang diperoleh dari metode kuadrat terkecil biasa (*Ordinary Least Square*) atau biasa dikenal dengan regresi OLS agar taksiran koefisien regresi itu bersifat BLUE yakni *best*, linier, tidak bias (*unbiased*) estimator.

Misalkan ada persamaan regresi linier

$$Y_i = \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \dots + \beta_{ik} X_{ik} + \varepsilon_i, i = 1, 2, 3 \dots n \quad (2.26)$$

dengan pendekatan matrik, dapat disederhanakan dan diperoleh

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

Variabel ε sangat memegang peranan dalam ekonometrika, tetapi variabel ini tidak dapat diteliti dan tidak pula tersedia informasi tentang bentuk distribusi kemungkinannya, beberapa asumsi lainnya khususnya tentang sifat statistiknya perlu di buat dalam menerapkan metode OLS

Misalkan sampel untuk y diberikan. Maka aturan main yang memungkinkan pemakaian sampel tadi untuk mendapatkan taksiran dari β adalah dengan membuat $\varepsilon = Y - X\beta$ sekecil mungkin, maka perlu memilih parameter β sehingga

$$S = \varepsilon^T \varepsilon = (Y - X\beta)^T (Y - X\beta) \quad (2.27)$$

Sekecil mungkin (minimal).

Karena persamaan tersebut skalar maka

$$\begin{aligned} S &= (Y - X\beta)^T (Y - X\beta) \\ &= (Y^T - X^T \beta^T) (Y - X\beta) \\ &= Y^T Y - Y^T X\beta - X^T \beta^T Y^T + X^T \beta^T X\beta \\ &= Y^T Y - (Y^T X\beta)^T - X^T \beta^T Y^T + X^T \beta^T X\beta \\ &= Y^T Y - X^T \beta^T Y - X^T \beta^T Y^T + X^T \beta^T X\beta \\ &= Y^T Y - 2(X^T \beta^T Y) + X^T \beta^T X\beta \end{aligned} \quad (2.28)$$

Untuk meminimumkannya dapat diperoleh dengan melakukan turunan parsial pertama S terhadap β

$$\begin{aligned} \frac{dS}{d\beta} &= -2X^T Y + X^T X\beta + (\beta^T X X^T)^T \\ &= -2X^T Y + X^T X\beta + \beta X X^T \\ &= -2X^T Y + 2(X^T X\beta) \end{aligned}$$

dan kemudian menyamakannya dengan nol diperoleh

$$X^T Y = X^T X \beta$$

yang dinamakan persamaan normal, dan

$$\hat{\beta}_{ols} = (X^T X)^{-1} X^T Y \quad (2.29)$$

yang dinamakan sebagai penaksir (*estimator*) parameter β secara OLS.

Untuk kovariansinya adalah

$$Cov(\hat{\beta}_{ols}) = (X^T X)^{-1} X^T \phi X (X^T X)^{-1} \quad (2.30)$$

Sedangkan estimator kuadrat terkecil untuk variannya, σ^2 , adalah

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{ols} &= \frac{\hat{\varepsilon}^T \hat{\varepsilon}}{n - k} \\ &= \frac{(Y - X \hat{\beta}_{ols})^T (Y - X \hat{\beta}_{ols})}{n - k} \end{aligned} \quad (2.31)$$

Akan tetapi asumsi dasar metode OLS sering dilanggar dalam melakukan estimasi sebuah model sehingga parameter yang diperoleh menjadi bias, tidak konsisten dan tidak efisien. Kehadiran heteroskedastisitas akan menyebabkan metode OLS menjadi tidak efisien walaupun parameter yang diperoleh tetap tidak bias dan konsisten. Tetapi penyimpangan yang muncul dalam dalam analisis regresi linear bukan hanya terkait dengan pelanggaran asumsi-asumsi dasar metode OLS yang menyangkut variabel-variabel bebas dan variabel disturbansi melainkan juga dapat ditimbulkan oleh kekeliruan dalam menspesifikasikan model yang akan ditaksir dan kesalahan dalam mengukur variabel. Metode OLS yang mengandung kasus heteroskedastisitas akan menyebabkan berubahnya beberapa sifat-sifat penaksir OLSE sehingga tidak lagi BLUE. Sehingga koefisien regresi linear yang diperoleh menjadi tidak

efisien walaupun masih tetap tidak bias (*unbiased*) dan konsisten. Disamping itu varian penaksir OLSE tersebut juga menjadi bias, (Firdaus,2004:107).

2.4.2 Kuadrat Terkecil Umum (*Generalized Least Square*)

GLS (*Generalized Least Square*) sebagai salah satu bentuk dari pengembangan estimasi *least square*, merupakan bentuk estimasi yang dibuat untuk mengatasi sifat heteroskedastisitas yang memiliki kemampuan untuk mempertahankan sifat efisiensi estimatornya tanpa harus kehilangan sifat unbiased dan konsistensinya. Walaupun metode ini merupakan pengembangan Metode Kuadrat Terkecil untuk mengatasi heteroskedastisitas, namun metode ini juga bisa digunakan pada data yang homoskedastisitas.

Penaksir parameter-parameter pada β untuk model transformasi statistik linier yang umum, persamaan $Y^* = X^*\beta + \varepsilon^*$ atau $PY = PX\beta + Pe$ dimana $PP^T = \phi^{-1}$ disebut sebagai *Generalized Least Square* (GLS), yaitu

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_{glS} &= (X^*TX^*)^{-1}X^*TY^* \\ &= ((PX)^TPX)^{-1}(PX)^TPY \\ &= (XT\phi^{-1}X)^{-1}XT\phi^{-1}Y \\ &= \sigma^2(XT\psi^{-1}X)^{-1}X^T\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)\psi^{-1}Y \\ &= (XT\psi^{-1}X)^{-1}X^T\psi^{-1}Y\end{aligned}\tag{2.32}$$

Yang merupakan *best linier unbiased estimator* (BLUE) dengan matrik kovariansi

$$\begin{aligned}
Cov(\hat{\beta}_{gls}) &= (X^{*T}X^*)^{-1} \\
&= [(PX)^T(PX)]^{-1} \\
&= (XT\phi^{-1}X)^{-1} \\
&= \sigma^2(XT\psi^{-1}X)^{-1}
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Sedangkan estimasi untuk σ^2 secara *generalized least square* adalah

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_{gls}^2 &= \frac{1}{n-k} (\bar{Y} - \bar{X}\hat{\beta}_{gls})^T (\bar{Y} - \bar{X}\hat{\beta}_{gls}) \\
&= \frac{1}{n-k} (YQ - XQ\hat{\beta}_{gls})^T (YQ - XQ\hat{\beta}_{gls}) \\
&= \frac{1}{n-k} (Q(Y - X\hat{\beta}_{gls}))^T (Q(Y - X\hat{\beta}_{gls})) \\
&= \frac{1}{n-k} (Y - X\hat{\beta}_{gls})^T Q^T Q (Y - X\hat{\beta}_{gls}) \\
&= \frac{1}{n-k} (Y - X\hat{\beta}_{gls})^T \psi^{-1} (Y - X\hat{\beta}_{gls})
\end{aligned} \tag{2.34}$$

(Kariya dan Kurata, 2004:34)

2.5 Selang Kepercayaan

Selang kepercayaan dapat digunakan sebagai taksiran suatu parameter dan dapat pula dipandang sebagai pengujian hipotesis, yaitu apakah suatu parameter sama dengan suatu nilai tertentu. Di bawah anggapan bahwa galat ε_i berdistribusi normal, untuk setiap i . maka statistik β_0 dan β_1 juga akan berdistribusi normal, (Sembiring, 1995:52).

2.5.1 Selang kepercayaan untuk β_1

Untuk memperoleh selang kepercayaan dari β_1 dapat dicari dengan cara:

Telah diketahui dari persamaan (2.16) bahwa

$$\widehat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^n X_i \sum_{i=1}^n Y_i\right)}{n}}{\sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^2}{n}} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

Dalam hal ini penjumlahan dilakukan dari $i=1$ sampai n dan kedua rumus untuk $\widehat{\beta}_1$ ini hanyalah bentuk yang sedikit berbeda

$$\begin{aligned} &= \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})Y_i}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \\ &= \frac{(X_1 - \bar{X})Y_1 + (X_2 - \bar{X})Y_2 + \dots + (X_n - \bar{X})Y_n}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \end{aligned} \quad (2.35)$$

Sekarang ragam suatu fungsi

$$a = a_1 Y_1 + a_2 Y_2 + \dots + a_n Y_n \quad (2.36)$$

adalah

$$Var(a) = a_1^2 Var(Y_1) + a_2^2 Var(Y_2) + \dots + a_n^2 Var(Y_n)$$

Kalau Y_i saling tidak berkorelasi dan a_i merupakan konstanta, lebih jauh, jika

$Var(Y_i) = \sigma^2$, maka

$$\begin{aligned} Var(a) &= (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \sigma^2 \\ &= \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \sigma^2 \end{aligned} \quad (2.37)$$

Dalam rumus $\widehat{\beta}_1$, $a_i = \frac{(X_i - \bar{X})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$

karena X_i merupakan konstanta. Dengan demikian, kita memperoleh

$$Var(\widehat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \quad (2.38)$$

simpangan baku bagi $\widehat{\beta}_1$ adalah akar ragamnya. Jadi

$$\text{s. b. } (\widehat{\beta}_1) = \frac{\sigma}{\left(\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \right)^{1/2}} \quad (2.39)$$

atau, kalau σ tidak diketahui dan sebagai gantinya digunakan s , dan modelnya benar, maka simpangan baku dugaan bagi $\widehat{\beta}_1$ adalah

$$\text{s. b. dugaan } (\widehat{\beta}_1) = \frac{s}{\left(\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \right)^{1/2}} \quad (2.40)$$

kalau kita asumsikan bahwa keragaman di sekitar garis regresi bersifat normal, artinya galat ε_i semuanya berasal dari sebaran normal yang sama $N(0, \sigma^2)$, dapat ditunjukkan bahwa selang kepercayaan bagi β_1 adalah

$$\widehat{\beta}_1 \pm \frac{t(n-2, 1-\alpha/2)s}{\left(\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \right)^{1/2}} \quad (2.41)$$

atau

$$\widehat{\beta}_1 - \frac{t(n-2, 1-\alpha/2)s}{\left(\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \right)^{1/2}} \leq \beta_1 \leq \widehat{\beta}_1 + \frac{t(n-2, 1-\alpha/2)s}{\left(\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \right)^{1/2}} \quad (2.42)$$

(Draper dan Smith, 1992:22-23)

2.5.2 Selang Kepercayaan untuk β_0

Selang kepercayaan bagi β_0 dengan cara yang serupa dengan yang diuraikan untuk β_1 .

$$\begin{aligned} Var(\widehat{\beta}_0) &= Var(\bar{y} - \widehat{\beta}_1 \bar{X}) \\ &= \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \right) \\ &= \frac{\sigma^2 \sum_{i=1}^n (X_i)^2}{n \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \end{aligned} \quad (2.43)$$

Simpangan baku bagi $\widehat{\beta}_1$ adalah akar ragamnya. Jadi

$$\text{s. b. } (\widehat{\beta}_0) = \sigma \left(\frac{\sigma^2 \sum_{i=1}^n (X_i)^2}{n \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \right)^{1/2} \quad (2.44)$$

penggantian σ dengan s menghasilkan nilai dugaan bagi s.b. $(\widehat{\beta}_0)$. jadi, selang kepercayaan $100(1-\alpha)$ persen bagi β_0 adalah

$$\widehat{\beta}_0 \pm t \left(n - 2, 1 - \frac{\alpha}{2} \right) s \left(\frac{\sigma^2 \sum_{i=1}^n (X_i)^2}{n \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \right)^{1/2} \quad (2.45)$$

(Draper dan Smith, 1992:25)

2.6 Kajian dalam Al-Qur'an tentang Estimasi, Kepercayaan dan Pengujian

2.6.1 Estimasi

Statistika adalah ilmu yang mempelajari suatu proses dalam merencanakan, mengumpulkan, menganalisis, menginterpretasi, dan mempresentasikan data. Sebagian besar konsep dasar statistika mengasumsikan teori probabilitas. Karena statistika bertolak pada cara berfikir probabilistik, hasil pengolahan data yang menggunakan metode statistika bukanlah hasil pasti, tetapi merupakan hasil taksiran adanya ketidakpastian dari variasi yang terjadi dalam fenomena tertentu. Teknik pengambilan kesimpulan tentang suatu parameter meliputi pendugaan (*estimation*) parameter dan pengujian hipotesis.

Pendugaan / estimasi telah disinggung di dalam Al-Qur'an yaitu di dalam surat Ar-Ruum ayat 4 yang berisi tentang pendugaan / estimasi selang waktu tentang kemenangan bangsa Rumawi:

فِي بَعْضِ سِنِينَ ۚ لِلَّهِ الْأَمْرُ مِنْ قَبْلُ وَمِنْ بَعْدُ ۚ وَيَوْمَئِذٍ يَفْرَحُ الْمُؤْمِنُونَ ﴿٤﴾

Artinya: “Dalam beberapa tahun lagi, bagi Allah-lah urusan sebelum dan sesudah (mereka menang). dan di hari (kemenangan bangsa Rumawi) itu bergembiralah orang-orang yang beriman,”

Dalam surat Ar-Ruum ayat 4 tersebut terdapat kalimat *فِي بَعْضِ سِنِينَ* (dalam beberapa tahun lagi) lagi, menurut ahli tafsir kata-kata tersebut ditafsirkan sebagai suatu “perkiraan tentang selang waktu” yang tidak secara pasti kapan bangsa Romawi akan menang dan selang waktu tersebut antara antara tiga sampai sembilan tahun. Jika kita membaca makna atau tafsir dari ayat tersebut dengan seksama, maka akan terdapat suatu ketidakpastian atau hanya

perkiraan saja. Di dalam ayat tersebut tidak secara pasti disebutkan tentang waktunya melainkan suatu pendugaan saja tanpa dilakukan pengukuran secara eksak. Estimasi / pendugaan ini termasuk dalam estimasi pengukuran.

Dalam surat al-Jaatsiyah ayat 32 juga menyinggung tentang pendugaan yang berbunyi:

وَإِذَا قِيلَ إِنَّ وَعْدَ اللَّهِ حَقٌّ وَالسَّاعَةُ لَا رَيْبَ فِيهَا قُلْتُمْ مَا نَدْرِي مَا السَّاعَةُ إِنْ نَظُنُّ إِلَّا ظَنًّا وَمَا نَحْنُ بِمُصْتَفِينَ

Artinya : Dan apabila dikatakan (kepadamu): "Sesungguhnya janji Allah itu adalah benar dan hari berbangkit itu tidak ada keraguan padanya", niscaya kamu menjawab: "Kami tidak tahu apakah hari kiamat itu, kami sekali-kali tidak lain hanyalah menduga-duga saja dan kami sekali-kali tidak meyakini(nya)".

Dalam surat Al Jaatsiyah ayat 32 tersebut di atas menyinggung tentang pendugaan yakni pada kata “menduga-duga”. Dalam kata-kata ini terdapat suatu kesan tentang keraguan atau rasa tidak percaya mengenai hari akhir atau hari kiamat. Manusia meragukan pernyataan terebut bahkan kadang-kadang tidak meyakininya. Sama halnya dalam ilmu statistik kita harus menduga atau mengestimasi terlebih dahulu tentang parameter suatu populasi ataupun sampel. Dari gambaran penafsiran kedua ayat dalam al-Qur’an tersebut diatas, maka dapat kita ketahui bahwa di dalam memahami ayat Al-Qur’an terdapat estimasi/ pendugaan.

2.5.2 Kepercayaan

Kepercayaan merupakan suatu hal yang sangat penting dalam kehidupan karena jika seseorang tanpa kepercayaan atau tanpa mempunyai rasa percaya

maka orang tersebut tidak akan mendapatkan ketentraman dalam hidupnya. Di dalam Al-Qur'an juga telah disinggung masalah kepercayaan atau rasa percaya yakni pada surat as-Sajdah ayat 15 yang berbunyi:

إِنَّمَا يُؤْمِنُ بِآيَاتِنَا الَّذِينَ إِذَا ذُكِّرُوا بِهَا خَرُّوا سُجَّدًا وَسَبَّحُوا بِحَمْدِ رَبِّهِمْ
وَهُمْ لَا يَسْتَكْبِرُونَ ﴿١٥﴾

Artinya : Sesungguhnya orang yang benar-benar percaya kepada ayat-ayat Kami adalah mereka yang apabila diperingatkan dengan ayat-ayat itu mereka segera bersujud seraya bertasbih dan memuji Rabbnya, dan lagi pula mereka tidaklah sombong.

Dalam surat As Sajdah ayat 15 tersebut diatas telah disebutkan suatu pernyataan **يُؤْمِنُ بِآيَاتِنَا** (orang-orang yang percaya kepada ayat-ayat al-Qur'an) yakni orang yang mempunyai rasa percaya atau kepercayaan yang tinggi kepada ayat-ayat al-Qur'an yang di dalam statistika disebut taraf kepercayaan. Orang-orang yang dimaksud adalah orang-orang yang beriman dan mempunyai rasa percaya yang tinggi, jika kita tafsirkan dengan ilmu statistik maka taraf kepercayaannya besar.

Di dalam statistika untuk mendapatkan hasil atau kesimpulan yang baik dengan taraf kepercayaan yang besar maka taraf kesalahannya haruslah kecil. Hal ini termasuk dalam surat as-Sajdah ayat 15 yakni kita harus menaruh taraf kepercayaan yang tinggi karena memang kita harus percaya kepada Tuhan Yang Maha Esa dan juga kitab-kitab-Nya (ayat-ayat-Nya) tanpa adanya suatu keraguan yang di dalam agama islam disebut dengan iman.

Dalam surat al-Hujarat ayat 15, kita juga dapat mengetahui tentang kepercayaan yang juga disebut iman yakni yang berbunyi:

إِنَّمَا الْمُؤْمِنُونَ الَّذِينَ ءَامَنُوا بِاللّٰهِ وَرَسُولِهِ ثُمَّ لَمْ يَرْتَابُوا وَجَاهَدُوا بِأَمْوَالِهِمْ وَأَنْفُسِهِمْ فِي سَبِيلِ اللّٰهِ أُولَٰئِكَ هُمُ الصّٰدِقُونَ ﴿١٥﴾

Artinya : Sesungguhnya orang-orang yang beriman itu hanyalah orang-orang yang percaya (beriman) kepada Allah dan Rasul-Nya, kemudian mereka tidak ragu-ragu dan mereka berjuang (berjihad) dengan harta dan jiwa mereka pada jalan Allah, mereka itulah orang-orang yang benar.

Dalam ayat ini dijelaskan dalam kata المؤمنون (beriman) dan juga pada kata الذين ءامنوا (yang beriman) bahwa di dalam agama kepercayaan tanpa dibarengi dengan keraguan sama sekali, bahkan mereka yang beriman rela berjuang (berjihad) dengan harta dan jiwa mereka pada jalan Allah. Dan mereka itulah orang-orang yang benar.

Dari gambaran kedua ayat al-Qur'an di atas kita dapat mengetahui bahwa di dalam al-Qur'an telah dibahas mengenai kepercayaan yang juga dapat diartikan sebagai iman.

2.5.3 Pengujian

Persoalan dalam Statistika inferensi dapat dibedakan menjadi dua macam persoalan, yaitu:

1. Pendugaan (estimasi) parameter
2. Pengujian hipotesis

Menurut Webster (1934) dalam (Firdaus, 2004:57) kata *to infer* adalah menurunkan sebagai akibat yang berupa konsekuensi, penyimpulan (*conclusion*), atau peluang. Misalnya jika kita melihat seorang perempuan

yang memakai cincin di jari manisnya di tangan kiri maka kita dapat tafsirkan bahwa perempuan itu sudah bertunangan.

Dalam statistika inferensi, dipertimbangkan bagaimana menarik kesimpulan dari sejumlah kejadian dari suatu penelitian dengan menarik sebagian kecil dari kejadian tersebut. Statistika menghendaki alat untuk memformulasikan dan membuat standart kerja tertentu untuk penarikan kesimpulan.

Di dalam al-Qur'anpun telah disinggung mengenai pengujian ini, kita dianjurkan untuk tidak langsung dengan serta-merta percaya begitu saja malainkan kita harus melakukan suatu pengujian seperti yang dijelaskan dalam Surat al-Mumtahanah ayat 10 yang berbunyi:

يٰۤاَيُّهَا الَّذِيْنَ ءَامَنُوْا اِذَا جَآءَكُمُ الْمُؤْمِنٰتُ مِهْجِرٰتٍ فَاَمْتَحِنُوْهُنَّ ۗ اَللّٰهُ اَعْلَمُ
بِاِيْمٰنِهِنَّ ۚ فَاِنْ عَلِمْتُمُوهُنَّ مُؤْمِنٰتٍ فَلَا تَرْجِعُوهُنَّ اِلَى الْكٰفِرِ لَا هُنَّ حِلٌّ
لَّهُمْ وَلَا هُمْ يَحِلُّوْنَ لَهُنَّ وَاَتُوهُنَّ مَّا اَنْفَقُوْا وَلَا جُنَاحَ عَلَيْكُمْ اَنْ تَنْكِحُوهُنَّ
اِذَا ءَاتَيْتُمُوهُنَّ اُجُوْرَهُنَّ ۚ وَلَا تُمْسِكُوْا بِعِصْمِ الْكٰوَفِرِ وَسَلُّوْا مَّا اَنْفَقْتُمْ
وَلَيْسَ لَكُمْ ذٰلِكُمْ ۗ اَللّٰهُ يَحْكُمُ بَيْنَكُمْ ۚ وَاللّٰهُ عَلِيْمٌ حَكِيْمٌ ﴿١٠﴾

Artinya : Hai orang-orang yang beriman, apabila datang berhijrah kepadamu perempuan-perempuan yang beriman, maka hendaklah kamu uji (keimanan) mereka. Allah lebih mengetahui tentang keimanan mereka, maka jika kamu telah mengetahui bahwa mereka (benar-benar) beriman maka janganlah kamu kembalikan mereka kepada (suami-suami mereka) orang-orang kafir. mereka tiada halal bagi orang-orang kafir itu dan orang-orang kafir itu tiada halal pula bagi mereka. dan berikanlah kepada (suami-suami) mereka, mahar yang telah mereka bayar. dan tiada dosa atasmu mengawini mereka apabila kamu bayar

kepada mereka maharnya, dan janganlah kamu tetap berpegang pada tali (perkawinan) dengan perempuan-perempuan kafir; dan hendaklah kamu minta mahar yang telah kamu bayar; dan hendaklah mereka meminta mahar yang telah mereka bayar. Demikianlah hukum Allah yang ditetapkan-Nya di antara kamu. dan Allah Maha mengetahui lagi Maha Bijaksana.

Dalam Surat al-Mumtahanah ayat 10 ini dijelaskan bahwa bagaimana kita memperlakukan seorang perempuan mukmin yang masuk kedalam daerah Islam. Dan perempuan itu datang kepadamu, maka kita tidak boleh langsung percaya begitu saja melainkan terlebih dahulu untuk melakukan suatu “pengujian” kepada mereka tentang keimanan mereka untuk mendapatkan hasil atau kesimpulan mengenai karakter perempuan tersebut.

Al-Qur'an juga telah menyinggung ketiga kajian di atas (estimasi, kepercayaan dan pengujian) yakni dalam surat al-'Ankabut ayat 2 yang berbunyi :

أَحْسِبَ النَّاسُ أَنْ يُتْرَكُوا أَنْ يَقُولُوا ءَامَنَّا وَهُمْ لَا يُفْتَنُونَ

Artinya : Apakah manusia itu mengira bahwa mereka dibiarkan (saja) mengatakan: "Kami telah beriman", sedang mereka tidak diuji lagi?

Dalam surat al-'Ankabut ayat 2 tersebut ada tiga kata kunci yang dapat kita ketahui yaitu :

1. Mengira (يُتْرَكُوا)

Kata “mengira” dapat kita artikan sebagai mengestimasi atau menduga karena kata mengira mempunyai arti yang sama dengan kata menduga atau mengestimasi. Dalam hal ini disebutkan manusia mengira mereka dibiarkan mengatakan "Kami telah beriman"

2. Beriman(ءَامَنَّا)

Dalam pembahasan pada sub-bab kepercayaan telah disebutkan bahwa arti kata “iman” sama dengan kata “percaya”. Dalam ayat ini manusia yang dimaksud adalah yang menyatakan dirinya telah beriman (percaya)

3. Uji (يُفْتَنُونَ)

Iman atau kepercayaan tidak langsung diterima begitu saja melainkan akan diuji lagi untuk mengetahui apakah mereka benar-benar beriman atau cuma dalam perkataannya saja.

Makna dari surat al-‘Ankabuut ayat 2 ini sesuai dengan penelitian yang kami lakukan yakni pertama kami akan menduga parameter regresi ($\hat{\beta}_1$) kemudian mencari selang kepercayaannya dan terakhir menguji selang kepercayaan tersebut.

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Penentuan Estimasi Parameter Model Regresi Nonlinier

Dalam regresi nonlinier terdapat beberapa model regresi, pada penelitian kali ini penulis tidak melakukan penelitian pada semua model regresi nonlinier melainkan mengambil satu model saja.

Pada penelitian ini penulis memakai model regresi nonlinier Power yang dinyatakan dalam bentuk

$$Y_i = \beta_0 X_i^{\beta_1} \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Dimana : Y_i = variabel tak bebas (*dependent variabel*)

X_i = variabel bebas (*independent variabel*)

β_0 = parameter kontanta/intersept regresi yang tidak diketahui nilainya dan akan diestimasi

β_1 = parameter koefisien regresi yang tidak diketahui nilainya dan akan diestimasi

ε = variabel galat/kesalahan regresi, dengan $\varepsilon \sim N(0; \sigma^2)$

N = banyaknya data observasi/pengamatan/trial/ukuran sampel

Mentransformasikan persamaan regresi nonlinier model power ke dalam bentuk linier, adapun langkah-langkah mentransformasikannya adalah:

Langkah I Mentransformasikan persamaan regresi nonlinier model power ke dalam bentuk logaritma natural

Dari persamaan (3.1) dimana $\varepsilon \sim N(0; \sigma^2)$ sehingga dapat dicari fungsi sebaran dari Y dengan cara menjadikan fungsi logaritma natural

$$\begin{aligned}\ln(Y_i) &= \ln(\beta_0 X_i^{\beta_1}) + \ln(\varepsilon_i) \\ &= \ln \beta_0 + \ln X_i^{\beta_1} + \ln(\varepsilon_i) \\ &= \ln \beta_0 + \beta_1 \ln X_i + \ln \varepsilon_i\end{aligned}$$

Langkah II Menotasikan model dengan pendekatan matrik

Dari persamaan (3.2) dengan menggunakan pendekatan matrik, maka persamaan (3.2) dapat dinotasikan dalam bentuk matrik, sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \ln Y_1 \\ \ln Y_2 \\ \vdots \\ \ln Y_n \end{bmatrix}_{n \times 1} &= \begin{bmatrix} \ln \beta_0 \\ \ln \beta_0 \\ \vdots \\ \ln \beta_0 \end{bmatrix}_{n \times 1} + \begin{bmatrix} \beta_1 \ln X_i \\ \beta_1 \ln X_i \\ \vdots \\ \beta_1 \ln X_i \end{bmatrix}_{n \times 1} + \begin{bmatrix} \ln \varepsilon_1 \\ \ln \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \ln \varepsilon_n \end{bmatrix}_{n \times 1} \\ &= \ln \beta_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{n \times 1} + \beta_1 \begin{bmatrix} \ln X_i \\ \ln X_i \\ \vdots \\ \ln X_i \end{bmatrix}_{n \times 1} + \begin{bmatrix} \ln \varepsilon_1 \\ \ln \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \ln \varepsilon_n \end{bmatrix}_{n \times 1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \ln X_i \\ 1 & \ln X_i \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \ln X_n \end{bmatrix}_{n \times 2} \begin{bmatrix} \ln \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}_{2 \times 1} + \begin{bmatrix} \ln \varepsilon_1 \\ \ln \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \ln \varepsilon_n \end{bmatrix}_{n \times 1}\end{aligned}$$

Dimana dimisalkan

$$U = \begin{bmatrix} \ln Y_1 \\ \ln Y_2 \\ \vdots \\ \ln Y_n \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

$$V = \begin{bmatrix} 1 & \ln X_i \\ 1 & \ln X_i \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \ln X_n \end{bmatrix}_{n \times 2}$$

$$B = \begin{bmatrix} \ln \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}_{2 \times 1}$$

$$W = \begin{bmatrix} \ln \varepsilon_1 \\ \ln \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \ln \varepsilon_n \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

Maka model persamaan regresi nonlinier Power di atas kita dapat menotasikannya ke dalam bentuk linier dengan pendekatan matrik sebagai berikut:

$$U = VB + W$$

Untuk selanjutnya model regresi linier ini yang akan digunakan untuk mengestimasi nilai parameter dari B yang terdiri dari $\ln \beta_0$ dan β_1

3.2 Analisis Estimasi Parameter dengan metode OLS (*Ordinary Least Square*)

Dalam mengestimasi parameter $\ln \beta_0$ dan β_1 pada persamaan regresi Power menggunakan metode OLS kita memakai model transformasi persamaan regresi Power ke dalam bentuk linier yakni $U = VB + W$

Langkah I Menguji model dengan asumsi-asumsi yang telah ditentukan.

Untuk menghasilkan estimator parameter regresi yang bersifat BLUE, maka harus memenuhi asumsi regresi yaitu:

1. Nilai rata-rata atau harapan variabel W adalah sama dengan nol atau

$$\begin{aligned}
E(W) &= E(U - \hat{U}) \\
&= E(U) - E(\hat{U}) \\
&= E(VB) - E(VB) \\
&= VB - VB \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$E \left(\begin{bmatrix} \ln \varepsilon_1 \\ \ln \varepsilon_2 \\ \dots \\ \ln \varepsilon_n \end{bmatrix} \right) = 0$$

2. W memiliki variansi yang konstan,

$$\text{Var}(W_i, W_j) = \begin{cases} \sigma^2, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

$$\text{Var}(W) = E((W - E(W))^T (W - E(W)))$$

$$= E \left(\left(\begin{bmatrix} \ln \varepsilon_1 \\ \ln \varepsilon_2 \\ \dots \\ \ln \varepsilon_n \end{bmatrix} - E \left(\begin{bmatrix} \ln \varepsilon_1 \\ \ln \varepsilon_2 \\ \dots \\ \ln \varepsilon_n \end{bmatrix} \right) \right)^T \left(\begin{bmatrix} \ln \varepsilon_1 \\ \ln \varepsilon_2 \\ \dots \\ \ln \varepsilon_n \end{bmatrix} - E \left(\begin{bmatrix} \ln \varepsilon_1 \\ \ln \varepsilon_2 \\ \dots \\ \ln \varepsilon_n \end{bmatrix} \right) \right) \right)$$

$$= E \left(\left(\begin{bmatrix} \ln \varepsilon_1 \\ \ln \varepsilon_2 \\ \dots \\ \ln \varepsilon_n \end{bmatrix} - 0 \right)^T \left(\begin{bmatrix} \ln \varepsilon_1 \\ \ln \varepsilon_2 \\ \dots \\ \ln \varepsilon_n \end{bmatrix} - 0 \right) \right)$$

$$= E \left(\left(\begin{bmatrix} \ln \varepsilon_1 \\ \ln \varepsilon_2 \\ \dots \\ \ln \varepsilon_n \end{bmatrix} \right)^T \left(\begin{bmatrix} \ln \varepsilon_1 \\ \ln \varepsilon_2 \\ \dots \\ \ln \varepsilon_n \end{bmatrix} \right) \right)$$

$$= E \left(\begin{bmatrix} \ln \varepsilon_1 & \ln \varepsilon_2 & \dots & \ln \varepsilon_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ln \varepsilon_1 \\ \ln \varepsilon_2 \\ \dots \\ \ln \varepsilon_n \end{bmatrix} \right)$$

$$= E(\ln \varepsilon_1 \ln \varepsilon_1 + \ln \varepsilon_2 \ln \varepsilon_2 + \dots + \ln \varepsilon_n \ln \varepsilon_n)$$

$$= E(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2)$$

Karena Varians bersifat kontans maka

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \dots = \sigma_n^2$$

sehingga

$$E(\sigma_i^2) = \sigma^2, i = 1, 2, \dots, n$$

3. Tidak ada korelasi antara W_i dan W_j , dimana $i \neq j$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(W_i, W_j) &= E\left((W_i - E(W_i))^T (W_j - E(W_j))\right) \\ &= E((W_i - 0)^T (W_j - 0)) \\ &= E(W_i^T W_j) \\ &= 0 \end{aligned}$$

4. Variabel bebas tidak bersifat stokastik (*nonstochastic*)

Implikasi dari asumsi ini adalah variasi Y_i sama dengan variasi W_i , $\text{Var}(Y_i) = \sigma^2$, dan juga tidak ada korelasi Y_i dan Y_j untuk i tidak sama dengan j , $\text{Cov}(Y_i, Y_j) = 0$

5. W_i berdistribusi normal, atau dapat ditulis $W_i \sim N(0, \sigma^2)$

Dengan terpenuhinya asumsi 1, 2 dan 3 maka variabel bebas W_i berdistribusi normal.

Langkah II Mengestimasi parameter $\ln \beta_0$ dan β_1

Karena persamaan (3.4) berdistribusi normal, maka Fungsi Kepadatan Bersama dengan W_i variabel bebas berdistribusi normal, sehingga

$$S = W^T W = (U - VB)^T (U - VB)$$

Karena persamaan tersebut skalar maka

$$S = (U - VB)^T (U - VB)$$

$$\begin{aligned}
&= (U^T - V^T B^T)(U - VB) \\
&= U^T U - U^T VB - V^T B^T U^T + V^T B^T VB \\
&= U^T U - (U^T VB)^T - V^T B^T U^T + V^T B^T VB \\
&= U^T U - V^T B^T U - V^T B^T U^T + V^T B^T VB \\
&= U^T U - 2(V^T B^T U) + V^T B^T VB
\end{aligned}$$

Untuk meminimumkannya dapat diperoleh dengan melakukan turunan parsial pertama S terhadap B

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dB} &= -2V^T U + V^T VB + (B^T V V^T)^T \\
&= -2V^T U + V^T VB + B V V^T \\
&= -2V^T U + 2V^T VB
\end{aligned}$$

Dan menyamakannya dengan nol diperoleh

$$\begin{aligned}
2V^T U &= 2V^T VB \\
V^T U &= V^T VB
\end{aligned}$$

Dari persamaan 3.10 disubstitusikan ke dalam persamaan awal pada 3.4. diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \ln X_1 & \dots & \ln X_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ln Y_1 \\ \vdots \\ \ln Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \ln X_1 & \dots & \ln X_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \ln X_1 \\ \vdots & \ln X_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ln \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}$$

Kemudian nilai $\ln \beta_0$ dan β_1 pada persamaan yang telah diturunkan dengan masing-masing taksirannya, $\ln \widehat{\beta}_0$ dan $\widehat{\beta}_1$. Persamaan tersebut kemudian akan menjadi suatu sistem persamaan yang linier, disebut persamaan normal.

$$\begin{bmatrix} \ln Y_1 + \dots + \ln Y_n \\ \ln X_1 \ln Y_1 + \dots + \ln X_n \ln Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \dots + 1 & \ln X_1 + \dots + \ln X_n \\ \ln X_1 + \dots + \ln X_n & (\ln X_1)^2 + \dots + (\ln X_n)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ln \widehat{\beta}_0 \\ \widehat{\beta}_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \ln Y_i \\ \sum_{i=1}^n \ln X_i \ln Y_i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n 1 & \sum_{i=1}^n \ln X_i \\ \sum_{i=1}^n \ln X_i & \sum_{i=1}^n (\ln X_i)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ln \widehat{\beta}_0 \\ \widehat{\beta}_1 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \ln \widehat{\beta}_0 \\ \widehat{\beta}_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n \ln X_i \\ \sum_{i=1}^n \ln X_i & \sum_{i=1}^n (\ln X_i)^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \ln Y_i \\ \sum_{i=1}^n \ln X_i \ln Y_i \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{n \sum_{i=1}^n (\ln X_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^n \ln X_i \right)^2} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n (\ln X_i)^2 & - \sum_{i=1}^n \ln X_i \\ - \sum_{i=1}^n \ln X_i & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \ln Y_i \\ \sum_{i=1}^n \ln X_i \ln Y_i \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{n \sum_{i=1}^n (\ln X_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^n \ln X_i \right)^2} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n (\ln X_i)^2 \sum_{i=1}^n \ln Y_i - \sum_{i=1}^n \ln X_i \sum_{i=1}^n \ln X_i \ln Y_i \\ n \sum_{i=1}^n \ln X_i \ln Y_i - \sum_{i=1}^n \ln X_i \sum_{i=1}^n \ln Y_i \end{bmatrix} \\
\ln \widehat{\beta}_0 &= \frac{\sum_{i=1}^n (\ln X_i)^2 \sum_{i=1}^n \ln Y_i - \sum_{i=1}^n \ln X_i \sum_{i=1}^n \ln X_i \ln Y_i}{n \sum_{i=1}^n (\ln X_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^n \ln X_i \right)^2} \\
\widehat{\beta}_1 &= \frac{n \sum_{i=1}^n \ln X_i \ln Y_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^n \ln X_i \sum_{i=1}^n \ln Y_i \right)}{n}}{\sum_{i=1}^n (\ln X_i)^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n \ln X_i \right)^2}{n}}
\end{aligned}$$

Langkah III Menentukan Sifat-sifat Penduga Parameter Regresi Nonlinier Power

Untuk mengetahui apakah penduga yang dihasilkan dari metode OLS memenuhi syarat-syarat penduga yang baik, maka diperlukan suatu pengujian sifat-sifat penduga yang baik, yaitu unbiased (tak bias), efisien, dan konsisten.

1. Tak Bias (Unbias)

$$\begin{aligned}
 \text{Untuk } E(\hat{B}) &= E\left(V^T V (V^T V)^{-1}\right) \\
 E\left(\begin{bmatrix} \ln \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{bmatrix}\right) &= E\left(V^T (VB + W) (V^T V)^{-1}\right) \\
 &= E\left(V^T VB (V^T V)^{-1} + V^T W (V^T V)^{-1}\right) \\
 &= E\left(V^T VB (V^T V)^{-1} + 0\right) \\
 &= E(B) \\
 &= E\left(\begin{bmatrix} \ln \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}\right) \\
 &= \begin{bmatrix} \ln \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

maka

$$E(\ln \hat{\beta}_0) = \ln \beta_0 \text{ dan } E(\hat{\beta}_1) = \beta_1 \quad (3.14)$$

2. Efisien

Suatu penaksir dikatakan efisien apabila penduga tersebut mempunyai variansi yang kecil. Dengan menggunakan rumus efisiensi relatif, maka dapat diketahui:

$$R = \frac{E\left(B_1^2 - E(B_1)\right)^2}{E\left(B_2^2 - E(B_2)\right)^2}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\text{Var}(B_1)}{\text{Var}(B_2)} \\
 &= \frac{\sigma^2_1}{\sigma^2_2}
 \end{aligned}$$

Jika $R > 1$, maka

$$\sigma^2_2 < \sigma^2_1 \quad (3.15)$$

Sehingga hal itu berarti bahwa $\text{Var}(B_2) = \sigma^2_2$ secara relatif lebih efisien daripada $\text{Var}(B_1) = \sigma^2_1$

3. Konsisten

Suatu penduga dikatakan konsisten adalah jika

$$E(\hat{\theta} - E(\theta))^2 \rightarrow 0 \text{ untuk } n \rightarrow \infty$$

Sehingga untuk peubah acak $X_1, X_2, \dots, X_n$ dengan parameter B yang tidak diketahui dapat dituliskan:

$$E(B^2 - E(B))^2 \rightarrow 0 \text{ untuk } n \rightarrow \infty$$

Karena nilai ekspektasi $E(\hat{B})$ diharapkan sama dengan B , maka dapat diperoleh:

$$E(\hat{B}) = B$$

$$E(B^2 - E(B))^2 = 0$$

Dimana nilai $E(B^2 - E(B))^2$ itu akan mendekati nol untuk $n \rightarrow \infty$, sehingga dapat dituliskan dengan:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(B^2 - E(B))^2 = 0 \quad (3.16)$$

Karena $\lim_{n \rightarrow \infty} E(B^2 - E(B))^2 = 0$, maka $\hat{B}$ merupakan penduga yang konsisten

3.3 Selang Kepercayaan Nilai Estimasi Parameter dari Metode OLS

3.3.1 Menentukan Selang Kepercayaan Untuk Parameter β_1 dari Metode

OLS

Telah diketahui dari persamaan (3.12) bahwa

$$\begin{aligned}
 \widehat{\beta}_1 &= \frac{n \sum_{i=1}^n \ln X_i \ln Y_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^n \ln X_i \sum_{i=1}^n \ln Y_i \right)}{n}}{\sum_{i=1}^n (\ln X_i)^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n \ln X_i \right)^2}{n}} \\
 &= \frac{\sum_{i=1}^n (\ln X_i - \overline{\ln X_i})(\ln Y_i - \overline{\ln Y_i})}{\sum_{i=1}^n (\ln X_i - \overline{\ln X_i})^2} \\
 &= \frac{\sum_{i=1}^n (\ln X_i - \overline{\ln X_i}) \ln Y_i}{\sum_{i=1}^n (\ln X_i - \overline{\ln X_i})^2} \\
 \text{Var}(\widehat{\beta}_1) &= \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (\ln X_i - \overline{\ln X_i})^2} \quad (3.17)
 \end{aligned}$$

Simpangan baku bagi $\widehat{\beta}_1$ adalah akar ragamnya. Jadi

$$\text{s. b. } (\widehat{\beta}_1) = \frac{\sigma}{\left(\sum_{i=1}^n (\ln X_i - \overline{\ln X_i})^2 \right)^{1/2}} \quad (3.18)$$

atau, kalau σ tidak diketahui dan sebagai gantinya digunakan s , dan modelnya

benar, maka simpangan baku dugaan bagi $\widehat{\beta}_1$ adalah

$$\text{s. b. dugaan } (\widehat{\beta}_1) = \frac{s}{\left(\sum_{i=1}^n (\ln X_i - \overline{\ln X_i})^2 \right)^{1/2}} \quad (3.19)$$

kalau diasumsikan bahwa keragaman di sekitar garis regresi bersifat normal, artinya galat ε_i semuanya berasal dari sebaran normal yang sama $N(0, \sigma^2)$, dapat ditunjukkan bahwa selang kepercayaan bagi β_1 adalah

$$\widehat{\beta}_1 - \frac{t(n-2, 1-\frac{\alpha}{2})s}{\left(\sum_{i=1}^n (\ln X_i - \overline{\ln X_i})^2 \right)^{1/2}} \leq \beta_1 \leq \widehat{\beta}_1 + \frac{t(n-2, 1-\frac{\alpha}{2})s}{\left(\sum_{i=1}^n (\ln X_i - \overline{\ln X_i})^2 \right)^{1/2}} \quad (3.20)$$

3.3.2 Menentukan Selang Kepercayaan Untuk Parameter $\ln \beta_0$ dari Metode OLS

Selang kepercayaan bagi $\ln \beta_0$ dapat diperoleh dengan cara yang serupa dengan yang diuraikan untuk β_1 .

$$\begin{aligned} \text{Var}(\ln \widehat{\beta}_0) &= \text{Var}(\bar{Y} - \widehat{\beta}_1 \bar{X}) \\ &= \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\overline{\ln X_i}^2}{\sum_{i=1}^n (\ln X_i - \overline{\ln X_i})^2} \right) \\ &= \frac{\sigma^2 \sum_{i=1}^n (\ln X_i)^2}{n \sum_{i=1}^n (\ln X_i - \overline{\ln X_i})^2} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Simpangan baku bagi $\widehat{\beta}_1$ adalah akar ragamnya. Jadi

$$\text{s. b. } (\ln \widehat{\beta}_0) = \sigma \left(\frac{\sum_{i=1}^n (\ln X_i)^2}{n \sum_{i=1}^n (\ln X_i - \overline{\ln X_i})^2} \right)^{1/2} \quad (3.22)$$

penggantian σ dengan s menghasilkan nilai dugaan bagi s.b. $(\ln \widehat{\beta}_0)$. jadi,

selang kepercayaan $100(1-\alpha)$ persen bagi $\ln \beta_0$ adalah

$$\ln \widehat{\beta}_0 \pm t \left(n-2, 1-\frac{1}{2}\alpha \right) s \left(\frac{\sum_{i=1}^n (\ln X_i)^2}{n \sum_{i=1}^n (\ln X_i - \overline{\ln X_i})^2} \right)^{1/2} \quad (3.23)$$

Maka $\ln \beta_0$ mempunyai selang diantara batas bawah

$$\ln \widehat{\beta}_0 - t \left(n-2, 1-\frac{1}{2}\alpha \right) s \left(\frac{\sum_{i=1}^n (\ln X_i)^2}{n \sum_{i=1}^n (\ln X_i - \overline{\ln X_i})^2} \right)^{1/2} \quad (3.24)$$

dan batas atas

$$\ln \widehat{\beta}_0 + t \left(n-2, 1-\frac{1}{2}\alpha \right) s \left(\frac{\sum_{i=1}^n (\ln X_i)^2}{n \sum_{i=1}^n (\ln X_i - \overline{\ln X_i})^2} \right)^{1/2} \quad (3.25)$$

3.4 Analisis Estimasi Parameter dengan metode GLS (*Generalized Least Square*)

Dalam mengestimasi parameter $\ln \beta_0$ dan β_1 pada persamaan regresi Power menggunakan metode GLS dengan memakai model tranformasi persamaan regresi Power ke dalam persamaan 3.4

Dalam menganalisis parameter regresi dilakukan dengan beberapa langkah, antara lain :

Langkah I Mengestimasi parameter $\ln \beta_0$ dan β_1

Karena persamaan (3.4) berdistribusi normal, maka Fungsi Kepadatan Bersama dengan W_i variabel bebas berdistribusi normal, dengan menggunakan model Anderson diperoleh :

$$E(W) = 0, \quad (3.26)$$

$$\text{Cov}(W_i, W_j) = E(W_i^T W_j) = \phi \quad (3.27)$$

Dimana

$$\phi = \sigma^2 \psi(\theta) \quad (3.28)$$

dengan

$$\psi(\theta)^{-1} = I_n + \lambda_n(\theta)C \quad \text{dan} \quad \sigma^2 = \frac{\tau^2}{(1-\theta)^2} \quad (3.29)$$

Dimana C adalah matrik simetris $n \times n$ yang telah diketahui, $\lambda = \lambda_n = \lambda_n(\theta)$ dan matrik $\psi(\theta)$ adalah positif definit, dimana

$$\lambda_n(\theta) = \frac{\theta}{(1-\theta)^2}, \quad \text{dan} \quad \hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^n W_i W_{i-1}}{\sum_{i=1}^n W_i^2} \quad (3.30)$$

dan

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}_{n \times n} \quad (3.31)$$

Untuk estimasi parameter $\ln \beta_0$ dan β_1 sama dengan proses pada metode OLS dengan $\phi = \sigma^2 \psi(\theta) = \sigma^2 I$, karena pada GLS $\phi = \sigma^2 \psi(\theta)$

Dimana

$$\phi = \sigma^2 \psi(\theta) \begin{cases} \psi(\theta) = I, \text{homoskedastisitas} \\ \psi(\theta) \neq I, \text{heteroskedastisitas} \end{cases}$$

maka

$$\begin{aligned} V^T \phi^{-1} U &= V^T \phi^{-1} V B \\ V^T (\sigma^2 \psi(\theta))^{-1} U &= V^T (\sigma^2 \psi(\theta))^{-1} V B \\ B &= (V^T (\sigma^2 \psi(\theta))^{-1} V)^{-1} V^T (\sigma^2 \psi(\theta))^{-1} U \\ B &= \sigma^2 (V^T (\psi(\theta))^{-1} V)^{-1} V^T \frac{1}{\sigma^2} (\psi(\theta))^{-1} U \\ B &= (V^T (\psi(\theta))^{-1} V)^{-1} V^T (\psi(\theta))^{-1} U \end{aligned} \quad (3.32)$$

dengan

$$\begin{aligned} (\psi(\theta))^{-1} &= I_n + \lambda_n(\theta) C \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ -\lambda & 2\lambda & -\lambda & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 2\lambda & -\lambda \\ 0 & \dots & 0 & -\lambda & \lambda \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1+\lambda & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 1+2\lambda & -\lambda \\ 0 & \dots & 0 & -\lambda & 1+\lambda \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.33)$$

maka,

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \ln \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} &= \left(\begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \ln X_1 & \dots & \ln X_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+\lambda & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 1+2\lambda & -\lambda \\ 0 & \dots & 0 & -\lambda & 1+\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \ln X_1 \\ \dots & \dots \\ 1 & \ln X_n \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \ln X_1 & \dots & \ln X_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+\lambda & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 1+2\lambda & -\lambda \\ 0 & \dots & 0 & -\lambda & 1+\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ln Y_1 \\ \dots \\ \ln Y_n \end{bmatrix} \\
 &= \left(\begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \ln X_1 & \dots & \ln X_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \ln X_1 \\ \dots & \dots \\ 1 & \ln X_n \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \ln Y_i \\ \sum_{i=1}^n \ln X_i \ln Y_i \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n \ln X_i \\ \sum_{i=1}^n \ln X_i & \sum_{i=1}^n (\ln X_i)^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \ln Y_i \\ \sum_{i=1}^n \ln X_i \ln Y_i \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{n \sum_{i=1}^n (\ln X_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^n \ln X_i \right)^2} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n (\ln X_i)^2 & -\sum_{i=1}^n \ln X_i \\ -\sum_{i=1}^n \ln X_i & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \ln Y_i \\ \sum_{i=1}^n \ln X_i \ln Y_i \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n \sum_{i=1}^n (\ln X_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^n \ln X_i \right)^2} \left[\sum_{i=1}^n (\ln X_i)^2 \sum_{i=1}^n \ln Y_i - \sum_{i=1}^n \ln X_i \sum_{i=1}^n \ln X_i \ln Y_i \right] \\
&\ln \widehat{\beta}_0 = \frac{\sum_{i=1}^n (\ln X_i)^2 \sum_{i=1}^n \ln Y_i - \sum_{i=1}^n \ln X_i \sum_{i=1}^n \ln X_i \ln Y_i}{n \sum_{i=1}^n (\ln X_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^n \ln X_i \right)^2} \\
&\widehat{\beta}_1 = \frac{n \sum_{i=1}^n \ln X_i \ln Y_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^n \ln X_i \sum_{i=1}^n \ln Y_i \right)}{n}}{\sum_{i=1}^n (\ln X_i)^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n \ln X_i \right)^2}{n}} \quad (3.35)
\end{aligned}$$

Langkah II Uji Heteroskedastisitas

Untuk menguji heteroskedastisitas dapat dilakukan dengan menggunakan uji korelasi *rank spearman*. Langkah-langkahnya adalah sebagai berikut:

1. Menentukan model regresi (penelitian ini menggunakan model regresi nonlinier model power) $= Y_i = \beta_0 X_i^{\beta_1} + \varepsilon_i$
2. Mencari nilai-nilai variabel gangguan penduga e_i
3. Ranking nilai-nilai e_i itu serta nilai X_i yang bersangkutan dalam urutan semakin kecil atau semakin besar.
4. Hitunglah koefisien regresi penduga Rank Spearman r_s dengan rumus:

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n d_i^2}{n(n^2 - 1)}$$

Dimana : d menunjukkan perbedaan perbedaan setiap pasang rank

n menunjukkan jumlah pasangan rank

5. Bila nilai r_s mendekati maka kemungkinan besar terdapat heteroskedastisitas dalam model, sedangkan bila r_s mendekati 0 maka kemungkinan adanya heteroskedastisitas kecil

Pada penelitian ini pengujian ini dilakukan pada data dalam model regresi nonlinier model power.

Langkah III Menentukan Sifat-sifat Penduga Parameter Regresi Nonlinier Power

Untuk mengetahui apakah penduga yang dihasilkan dari metode OLS (*Ordinary Least Square*) memenuhi syarat-syarat penduga yang baik, maka diperlukan suatu pengujian sifat-sifat penduga yang baik, yaitu *unbiased* (tak bias), efisien, dan konsisten.

1. Tak Bias (Unbias)

$$\begin{aligned}
 \text{Untuk } E(\hat{B}) &= E\left(\left(V^T(\psi(\theta))^{-1}V\right)^{-1}V^T(\psi(\theta))^{-1}U\right) \\
 E\left(\begin{bmatrix} \ln \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{bmatrix}\right) &= E\left(\left(V^T(\psi(\theta))^{-1}V\right)^{-1}V^T(\psi(\theta))^{-1}(VB+W)\right) \\
 &= E\left(V^T(\psi(\theta))^{-1}VB(V^TV)^{-1}+V^T(\psi(\theta))^{-1}W(V^TV)^{-1}\right) \\
 &= E\left(V^T(\psi(\theta))^{-1}VB(V^TV)^{-1}+0\right) \\
 &= E(B) \\
 &= E\left(\begin{bmatrix} \ln \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}\right)
 \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} \ln \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}$$

Maka

$$E(\ln \widehat{\beta}_0) = \ln \beta_0 \text{ dan } E(\widehat{\beta}_1) = \beta_1 \quad (3.36)$$

2. Efisien

Suatu penaksir dikatakan efisien apabila penduga tersebut mempunyai variansi yang kecil. Dengan menggunakan rumus efisiensi relatif, maka dapat diketahui:

$$\begin{aligned} R &= \frac{E(B_1^2 - E(B_1))^2}{E(B_2^2 - E(B_2))^2} \\ &= \frac{\text{Var}(B_1)}{\text{Var}(B_2)} \\ &= \frac{\sigma^2_1}{\sigma^2_2} \end{aligned}$$

Jika $R > 1$, maka

$$\sigma^2_2 < \sigma^2_1 \quad (3.37)$$

3. Konsisten

Suatu penduga dikatakan konsisten adalah jika

$$E(\widehat{\theta} - E(\theta))^2 \rightarrow 0 \text{ untuk } n \rightarrow \infty$$

Sehingga untuk peubah acak $X_1, X_2, \dots, X_n$ dengan parameter B yang tidak diketahui dapat dituliskan:

$$E(B^2 - E(B))^2 \rightarrow 0 \text{ untuk } n \rightarrow \infty$$

Karena nilai ekspektasi $E(\widehat{B})$ diharapkan sama dengan B , maka dapat diperoleh:

$$E(\widehat{B}) = B$$

$$E(B^2 - E(B))^2 = 0$$

Dimana nilai $E(B^2 - E(B))^2$ itu akan mendekati nol untuk $n \rightarrow \infty$, sehingga dapat dituliskan dengan:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(B^2 - E(B))^2 = 0 \quad (3.38)$$

Karena $\lim_{n \rightarrow \infty} E(B^2 - E(B))^2 = 0$, maka $\hat{B}$ merupakan penduga yang konsisten)

3.5 Selang Kepercayaan Nilai Estimasi Parameter dari Metode GLS

3.5.1 Menentukan Selang Kepercayaan Untuk Parameter β_1 dari Metode GLS

Telah diketahui dari persamaan (3.35) bahwa

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_1 &= \frac{n \sum_{i=1}^n \ln X_i \ln Y_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^n \ln X_i \sum_{i=1}^n \ln Y_i \right)}{n}}{\sum_{i=1}^n (\ln X_i)^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n \ln X_i \right)^2}{n}} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n (\ln X_i - \overline{\ln X})(\ln Y_i - \overline{\ln Y})}{\sum_{i=1}^n (\ln X_i - \overline{\ln X})^2} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n (\ln X_i - \overline{\ln X}) \ln Y_i}{\sum_{i=1}^n (\ln X_i - \overline{\ln X})^2} \end{aligned}$$

$$Var(\widehat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (\ln X_i - \overline{\ln X})^2} \quad (3.39)$$

Simpangan baku bagi $\widehat{\beta}_1$ adalah akar ragamnya. Jadi

$$\text{s. b. } (\widehat{\beta}_1) = \frac{\sigma}{\left(\sum_{i=1}^n (\ln X_i - \overline{\ln X})^2 \right)^{1/2}} \quad (3.40)$$

atau, kalau σ tidak diketahui dan sebagai gantinya digunakan s , dan modelnya benar, maka simpangan baku dugaan bagi $\widehat{\beta}_1$ adalah

$$\text{s. b. dugaan } (\widehat{\beta}_1) = \frac{s}{\left(\sum_{i=1}^n (\ln X_i - \overline{\ln X})^2 \right)^{1/2}} \quad (3.41)$$

kalau diasumsikan bahwa keragaman di sekitar garis regresi bersifat normal, artinya galat ε_i semuanya berasal dari sebaran normal yang sama $N(0, \sigma^2)$, dapat ditunjukkan bahwa selang kepercayaan bagi β_1 adalah

$$\widehat{\beta}_1 - \frac{t(n-2, 1-\frac{\alpha}{2})s}{\left(\sum_{i=1}^n (\ln X_i - \overline{\ln X})^2 \right)^{1/2}} \leq \beta_1 \leq \widehat{\beta}_1 + \frac{t(n-2, 1-\frac{\alpha}{2})s}{\left(\sum_{i=1}^n (\ln X_i - \overline{\ln X})^2 \right)^{1/2}} \quad (3.42)$$

3.5.2 Menentukan Selang Kepercayaan Untuk Parameter $\ln \beta_0$ dari Metode GLS

Selang kepercayaan bagi $\ln \beta_0$ dapat diperoleh dengan cara yang serupa dengan yang diuraikan untuk β_1 .

$$Var(\ln \widehat{\beta}_0) = Var(\bar{Y} - \widehat{\beta}_1 \bar{X})$$

$$\begin{aligned}
&= \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\overline{\ln X_i}^2}{\sum_{i=1}^n (\ln X_i - \overline{\ln X_i})^2} \right) \\
&= \frac{\sigma^2 \sum_{i=1}^n (\ln X_i)^2}{n \sum_{i=1}^n (\ln X_i - \overline{\ln X_i})^2} \tag{3.43}
\end{aligned}$$

Simpangan baku bagi $\widehat{\beta}_1$ adalah akar ragamnya. Jadi

$$\text{s. b. } (\ln \widehat{\beta}_0) = \sigma \left(\frac{\sum_{i=1}^n (\ln X_i)^2}{n \sum_{i=1}^n (\ln X_i - \overline{\ln X_i})^2} \right)^{1/2} \tag{3.44}$$

penggantian σ dengan s menghasilkan nilai dugaan bagi s.b. $(\ln \widehat{\beta}_0)$. jadi, selang kepercayaan $100(1-\alpha)$ persen bagi $\ln \beta_0$ adalah

$$\ln \widehat{\beta}_0 \pm t \left(n-2, 1-\frac{1}{2}\alpha \right) s \left(\frac{\sum_{i=1}^n (\ln X_i)^2}{n \sum_{i=1}^n (\ln X_i - \overline{\ln X_i})^2} \right)^{1/2} \tag{3.45}$$

Maka $\ln \beta_0$ mempunyai selang diantara batas bawah

$$\ln \widehat{\beta}_0 - t \left(n-2, 1-\frac{1}{2}\alpha \right) s \left(\frac{\sum_{i=1}^n (\ln X_i)^2}{n \sum_{i=1}^n (\ln X_i - \overline{\ln X_i})^2} \right)^{1/2} \tag{3.46}$$

dan batas atas

$$\ln \widehat{\beta}_0 + t \left(n - 2, 1 - \frac{1}{2} \alpha \right) s \left(\frac{\sum_{i=1}^n (\ln X_i)^2}{n \sum_{i=1}^n (\ln X_i - \overline{\ln X_i})^2} \right)^{1/2} \quad (3.47)$$

3.6. Aplikasi Estimasi Parameter ($\ln \beta_0$ dan β_1) pada data tersebut dengan menggunakan metode OLS dan GLS dan menentukan selang kepercayaannya.

Tabel 3.1 CO2 emission data of Japan

No.	Tahun	GNP (Triliun yen)	Volume emisi CO2 (Juta ton)
1	1970	187	739
2	1971	196	765
3	1972	213	822
4	1973	230	916
5	1974	227	892
6	1975	234	854
7	1976	244	875
8	1977	254	919
9	1978	268	916
10	1979	283	951
11	1980	290	920
12	1981	299	903
13	1982	309	879
14	1983	316	866
15	1984	329	934
16	1985	344	909
17	1986	354	907
18	1987	370	897
19	1988	393	984
20	1989	412	1013
21	1990	433	1071
22	1991	449	1093
23	1992	455	1105
24	1993	456	1080

25	1994	459	1131
26	1995	466	1137
27	1996	485	1168

(Kariya and Kurata, 2004)

Dalam tabel 3.1 di atas merupakan data dari volume emisi CO₂ dalam juta ton dan GNP (*Gross National Product*) dalam triliun yen di Jepang dari tahun 1970 sampai dengan tahun 1996. Dimana variabel bebasnya adalah CO₂ dan variabel tak bebasnya adalah GNP. Dengan menggunakan persamaan regresi nonlinier model power dapat dinotasikan

$$CO_2 = \beta_0(GNP)^{\beta_1}$$

Untuk memperoleh nilai dari parameter β_0 dan β_1 dapat dilakukan dengan beberapa langkah sebagai berikut:

Langkah I Mentransformasikan persamaan regresi nonlinier model power ke dalam bentuk logaritma natural.

$$\begin{aligned}
 \ln CO_2 &= \ln(\beta_0(GNP)^{\beta_1} \varepsilon) \\
 &= \ln(\beta_0(GNP)^{\beta_1}) + \ln \varepsilon \\
 &= \ln \beta_0 + \ln(GNP)^{\beta_1} + \ln \varepsilon \\
 &= \ln \beta_0 + \beta_1 \ln(GNP) + \ln \varepsilon
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

Langkah II Menotasikan model dengan pendekatan matrik

Dari persamaan (3.46) dengan menggunakan pendekatan matrik, maka persamaan (3.46) dapat dinotasikan dalam bentuk matrik, sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \ln(CO_2)_1 \\ \ln(CO_2)_2 \\ \dots \\ \ln(CO_2)_{27} \end{bmatrix}_{27 \times 1} = \begin{bmatrix} 1 & \ln(GNP)_1 \\ 1 & \ln(GNP)_2 \\ \dots & \dots \\ 1 & \ln(GNP)_n \end{bmatrix}_{n \times 2} \begin{bmatrix} \ln \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}_{2 \times 1} + \begin{bmatrix} \ln \varepsilon_1 \\ \ln \varepsilon_2 \\ \dots \\ \ln \varepsilon_n \end{bmatrix}_{n \times 1} \quad (3.47)$$

Dengan memisalkan

$$P = \begin{bmatrix} \ln(CO_2)_1 \\ \ln(CO_2)_2 \\ \dots \\ \ln(CO_2)_{27} \end{bmatrix}_{27 \times 1}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & \ln(GNP)_1 \\ 1 & \ln(GNP)_2 \\ \dots & \dots \\ 1 & \ln(GNP)_{27} \end{bmatrix}_{27 \times 2}$$

$$B = \begin{bmatrix} \ln \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}_{2 \times 1}$$

$$W = \begin{bmatrix} \ln \varepsilon_1 \\ \ln \varepsilon_2 \\ \dots \\ \ln \varepsilon_{27} \end{bmatrix}_{27 \times 1}$$

maka

$$P = QB + W$$

yang merupakan persamaan linier.

Langkah II Menguji model dengan asumsi-asumsi yang telah ditentukan.

Untuk menghasilkan estimator parameter regresi yang bersifat BLUE (*Best, Linier, Unbiased Estimation*), maka harus memenuhi asumsi regresi yaitu:

1. Nilai rata-rata atau harapan variabel W adalah sama dengan nol atau

$$E(W) = E(P - \hat{P})$$

$$\begin{aligned}
&= E(P) - E(\hat{P}) \\
&= E(184,9369) - E(184,9369) \\
&= 184,9369 - 184,9369 \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$E \left(\begin{bmatrix} \ln \varepsilon_1 \\ \ln \varepsilon_2 \\ \dots \\ \ln \varepsilon_n \end{bmatrix} \right) = 0$$

2. W memiliki variansi yang konstan,

$$\text{Var}(W_i, W_j) = \begin{cases} \sigma^2, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

$$\text{Var}(W) = E((W - E(W))^T (W - E(W)))$$

$$= E \left(\left(\begin{bmatrix} \ln \varepsilon_1 \\ \ln \varepsilon_2 \\ \dots \\ \ln \varepsilon_n \end{bmatrix} - E \left(\begin{bmatrix} \ln \varepsilon_1 \\ \ln \varepsilon_2 \\ \dots \\ \ln \varepsilon_n \end{bmatrix} \right) \right)^T \left(\begin{bmatrix} \ln \varepsilon_1 \\ \ln \varepsilon_2 \\ \dots \\ \ln \varepsilon_n \end{bmatrix} - E \left(\begin{bmatrix} \ln \varepsilon_1 \\ \ln \varepsilon_2 \\ \dots \\ \ln \varepsilon_n \end{bmatrix} \right) \right) \right)$$

$$= E \left(\left(\begin{bmatrix} \ln \varepsilon_1 \\ \ln \varepsilon_2 \\ \dots \\ \ln \varepsilon_n \end{bmatrix} - 0 \right)^T \left(\begin{bmatrix} \ln \varepsilon_1 \\ \ln \varepsilon_2 \\ \dots \\ \ln \varepsilon_n \end{bmatrix} - 0 \right) \right)$$

$$= E \left(\left(\begin{bmatrix} \ln \varepsilon_1 \\ \ln \varepsilon_2 \\ \dots \\ \ln \varepsilon_n \end{bmatrix} \right)^T \left(\begin{bmatrix} \ln \varepsilon_1 \\ \ln \varepsilon_2 \\ \dots \\ \ln \varepsilon_n \end{bmatrix} \right) \right)$$

$$= E \left(\begin{bmatrix} \ln \varepsilon_1 & \ln \varepsilon_2 & \dots & \ln \varepsilon_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ln \varepsilon_1 \\ \ln \varepsilon_2 \\ \dots \\ \ln \varepsilon_n \end{bmatrix} \right)$$

$$= E(\ln \varepsilon_1 \ln \varepsilon_1 + \ln \varepsilon_2 \ln \varepsilon_2 + \dots + \ln \varepsilon_n \ln \varepsilon_n)$$

$$= E(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2)$$

$$= E(0 + 0 + \dots + 0)$$

Karena Varians bersifat kontans maka

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \dots = \sigma_n^2$$

sehingga

$$E(\sigma_i^2) = \sigma^2, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

3. Tidak ada korelasi antara W_i dan W_j , dimana $i \neq j$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(W_i, W_j) &= E\left((W_i - E(W_i))^T (W_j - E(W_j))\right) \\ &= E((W_i - 0)^T (W_j - 0)) \\ &= E(W_i^T W_j) \\ &= 0 \end{aligned}$$

4. Variabel bebas tidak bersifat stokastik (*nonstochastic*)

Implikasi dari asumsi ini adalah variasi Y_i sama dengan variasi W_i , $\text{Var}(Y_i) = \sigma^2$, dan juga tidak ada korelasi Y_i dan Y_j untuk i tidak sama dengan j , $\text{Cov}(Y_i, Y_j) = 0$

5. W_i berdistribusi normal, atau dapat ditulis $W_i \sim N(0, \sigma^2)$

Dengan terpenuhinya asumsi 1, 2 dan 3 maka variabel bebas W_i berdistribusi normal.

Langkah III menentukan nilai $\ln \hat{\beta}_0$ dan $\hat{\beta}_1$ dengan metode OLS

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n \ln(GNP)_i \ln(CO_2)_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^n \ln(GNP)_i \sum_{i=1}^n \ln(CO_2)_i\right)}{27}}{\sum_{i=1}^n (\ln(GNP)_i)^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n \ln(GNP)_i\right)^2}{27}}$$

$$= 0,36354$$

$$\ln \widehat{\beta}_0 = \frac{\sum_{i=1}^n (\ln(GNP)_i)^2 \sum_{i=1}^n \ln(CO_2)_i - \sum_{i=1}^n \ln(GNP)_i \sum_{i=1}^n \ln(GNP)_i \ln(CO_2)_i}{n \sum_{i=1}^n (\ln(GNP)_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^n \ln(GNP)_i \right)^2}$$

$$= 4,754292756$$

Langkah IV mencari selang kepercayaan β_1 dan $\ln \beta_0$ dari metode OLS

$$s = \sqrt{\frac{s}{n-2}} = \sqrt{\frac{W^T W}{27-2}} = 0,0521$$

selang kepercayaan untuk β_1 adalah

$$\widehat{\beta}_1 - \frac{t(n-2, 1-\alpha/2)s}{\left(\sum_{i=1}^n (\ln X_i - \bar{\ln X}_i)^2\right)^{1/2}} \leq \beta_1 \leq \widehat{\beta}_1 + \frac{t(n-2, 1-\alpha/2)s}{\left(\sum_{i=1}^n (\ln X_i - \bar{\ln X}_i)^2\right)^{1/2}}$$

$$0,36354 - \frac{t(27-2, 1-0,05/2)0,0521}{1,5} \leq \beta_1 \leq 0,36354 + \frac{t(n-2, 1-0,05/2)0,0521}{1,5}$$

$$0,36354 - \frac{(2,06) 0,0521}{1,5} \leq \beta_1 \leq 0,36354 + \frac{(2,06) 0,0521}{1,5}$$

$$0,291989 \leq \beta_1 \leq 0,435090352$$

selang kepercayaan untuk $\ln \beta_0$

$$\ln \widehat{\beta}_0 \pm t\left(n-2, 1-\frac{1}{2}\alpha\right)s \left(\frac{\sum_{i=1}^n (\ln X_i)^2}{n \sum_{i=1}^n (\ln X_i - \bar{\ln X}_i)^2}\right)^{1/2}$$

$$4,754292756 \pm (2,06) 0,0521 (3,846119944)$$

Maka selang kepercayaan bagi $\ln \beta_0$ adalah

$$4,754292756 - 0,412788675 \leq \ln \beta_0 \leq 4,754292756 + 0,412788675$$

$$4,341504081 \leq \ln \beta_0 \leq 5,167081431$$

Langkah V menentukan nilai $\ln \widehat{\beta}_0$ Dan $\widehat{\beta}_1$ dengan metode GLS

$$\begin{aligned}\widehat{\beta}_1 &= \frac{\sum_{i=1}^n \ln(GNP)_i \ln(CO_2)_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^n \ln(GNP)_i \sum_{i=1}^n \ln(CO_2)_i\right)}{27}}{\sum_{i=1}^n (\ln(GNP)_i)^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n \ln(GNP)_i\right)^2}{27}} \\ &= 0,36354 \\ \ln \widehat{\beta}_0 &= \frac{\sum_{i=1}^n (\ln(GNP)_i)^2 \sum_{i=1}^n \ln(CO_2)_i - \sum_{i=1}^n \ln(GNP)_i \sum_{i=1}^n \ln(GNP)_i \ln(CO_2)_i}{n \sum_{i=1}^n (\ln(GNP)_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^n \ln(GNP)_i\right)^2} \\ &= 4,754292756\end{aligned}$$

Langkah VI mencari selang kepercayaan β_1 dan $\ln \beta_0$ dari metode GLS

$$s = \sqrt{\frac{s}{n-2}} = \sqrt{\frac{W^T W}{27-2}} = 0,0521$$

selang kepercayaan untuk β_1 adalah

$$\begin{aligned}\widehat{\beta}_1 - \frac{t(n-2, 1-\alpha/2)s}{\left(\sum_{i=1}^n (\ln X_i - \overline{\ln X_i})^2\right)^{1/2}} &\leq \beta_1 \leq \widehat{\beta}_1 + \frac{t(n-2, 1-\alpha/2)s}{\left(\sum_{i=1}^n (\ln X_i - \overline{\ln X_i})^2\right)^{1/2}} \\ 0,36354 - \frac{t(27-2, 1-0,05/2)0,0521}{1,5} &\leq \beta_1 \leq 0,36354 + \frac{t(n-2, 1-0,05/2)0,0521}{1,5} \\ 0,36354 - \frac{(2,06) 0,0521}{1,5} &\leq \beta_1 \leq 0,36354 + \frac{(2,06) 0,0521}{1,5} \\ 0,291989 &\leq \beta_1 \leq 0,435090352\end{aligned}$$

selang kepercayaan untuk $\ln \beta_0$

$$\ln \widehat{\beta}_0 \pm t \left(n - 2, 1 - \frac{1}{2} \alpha \right) s \left(\frac{\sum_{i=1}^n (\ln X_i)^2}{n \sum_{i=1}^n (\ln X_i - \overline{\ln X})^2} \right)^{1/2}$$

$$4,754292756 \pm (2,06) 0,0521 (3,846119944)$$

Maka selang kepercayaan bagi $\ln \beta_0$ adalah

$$4,754292756 - 0,412788675 \leq \ln \beta_0 \leq 4,754292756 + 0,412788675$$

$$4,341504081 \leq \ln \beta_0 \leq 5,167081431$$

3.7 Membandingkan Selang Kepercayaan dari Parameter ($\ln \beta_0$ dan β_1) yang diperoleh dari Metode OLS dan GLS

Pada pembahasan sub-bab 3.6 dapat diketahui bahwa selang kepercayaan untuk parameter $\ln \beta_0$ dan β_1 dari kedua metode (OLS dan GLS) yakni

$$0,291989 \leq \beta_1 \leq 0,435090352$$

dan

$$4,341504081 \leq \ln \beta_0 \leq 5,167081431$$

Maka didapatkan hasil selang kepercayaan untuk parameter $\ln \beta_0$ dan β_1 dari model regresi nonlinier model power dengan menggunakan metode OLS dan GLS

Walaupun hasil yang diperoleh adalah sama, namun pada proses penghitungannya lebih mudah atau lebih sederhana menggunakan metode OLS.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Dari pembahasan pada bab III, dapat diambil simpulan yaitu Penerapan Metode OLS (*Ordinary Least Square*) dan GLS (*Generalized Least Square*) pada data yang memenuhi asumsi klasik regresi dalam mengestimasi parameter β_0 dan β_1 pada regresi nonlinier model power memiliki persamaan hasil estimasi parameter β_0 dan β_1 . Hasil uji selang kepercayaan parameter regresi nonlinier model power pada data yang memenuhi asumsi klasik regresi dengan menggunakan metode OLS (*Ordinary Least Square*) dan metode GLS (*Generalized Least Square*) adalah sama.

4.2 Saran

Pada penelitian ini peneliti hanya menggunakan model regresi nonlinier model power. Bagi pembaca yang ingin melakukan penelitian yang serupa, peneliti menyarankan agar menggunakan model regresi nonlinier yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

- Abdusysykir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. UIN-Malang press: Malang.
- Awat, Napa.1995. *Metode Statistik dan Ekonometri*. Yogyakarta: Liberty Yogyakarta
- Draper, Norman dan Harry Smith.1992. *Analisis Regresi Terapan (edisi kedua)*. Jakarta:PT. Gramedia Pustaka Utama
- Firdaus,Muhammad. 2004. *Ekonometrika Suatu Pendekatan Aplikatif*. PT. Bumi Aksara. Jakarta
- Gujarati, Damodar.1999. *Dasar - Dasar Ekonometrika*.Jakarta: Erlangga
- Hasan, Iqbal. 2002. *Pokok-Pokok Materi Statistik 1 (Statistik Deskriptif)*. Bumi Aksara: Jakarta
- Kariya, Takeaki and Hiroshi Kurata.2004.*Generalized Least Square*. John Wiley & Sons, Ltd: Chichester
- Pasaribu, Amudi.1983.*Pengantar Statistik*.Jakarta: Ghalia Indonesia
- Sembiring, R K.1995. *Analisis Regresi*.ITB: Bandung
- Sugiyanto, Catur. 2002. *Ekonometrika Terapan*. PBFE-Yogyakarta: Yogyakarta
- Supranto.2004.*Ekonometri*.Jakarta: Ghalia Indonesia
- Yitnosumarto, Suntoyo. 1990. *Dasar-Dasar Statistika*. C.V Rajawali: Jakarta.



DEPARTEMEN AGAMA
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Malang 65144 Telp. / Fax. (0341) 558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : A. Donny Harhara
NIM : 05510040
Fakultas : Sains dan Teknologi
Jurusan : Matematika
Judul Skripsi : Uji Selang Kepercayaan Parameter Regresi Non-Linier dengan Metode OLS (*Ordinary Least Square*) dan Metode GLS (*Generalized Least Square*)”
Pembimbing I : Sri Harini, M.Si.
Pembimbing II : Abdul Aziz M.Si

No.	Tanggal	Materi	Ttd. Pembimbing
1	30 Juli 2009	Proposal	
2	6 Agustus 2009	Bab I	
3	31 Agustus 2009	Bab I dan II (Keagamaan)	
4	1 September 2009	Bab I dan II	
5	9 September 2009	Revisi Bab I dan II (Keagamaan)	
6	12 September 2009	Revisi Bab II (Keagamaan)	
7	14 September 2009	Bab I dan II	
8	4 Oktober 2009	Bab III	
9	5 Oktober 2009	Bab III	
10	6 Oktober 2009	Bab IV	

Mengetahui,

Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd

NIP. 19751006 200312 1 001