ANALISIS SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL MODEL PREDATOR-PREY DENGAN PERLAMBATAN

SKRIPSI

Oleh:
VIVI AIDA FITRIA
NIM: 05510004

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
MALANG
2009

ANALISIS SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL MODEL PREDATOR-PREY DENGAN PERLAMBATAN

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Universitas Islam Negeri "Maulana Malik Ibrahim" Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
VIVI AIDA FITRIA
NIM: 05510004

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
MALANG
2009

ANALISIS SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL MODEL PREDATOR-PREY DENGAN PERLAMBATAN

SKRIPSI

Oleh:
VIVI AIDA FITRIA
NIM: 05510004

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji:
Tanggal: 27 Juli 2009

Pembimbing I,	**Pembimbing II,**
Usman Pagalay, M.Si	**Ach. Nashichuddin, M.Ag**
NIP. 150 327 240	**NIP. 150 302 531**

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M.Si
NIP. 150 318 321

ANALISIS SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL MODEL PREDATOR-PREY DENGAN PERLAMBATAN

SKRIPSI

Oleh:
VIVI AIDA FITRIA
NIM: 05510004

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal: 27 Juli 2009

Susunan Dewan Penguji:			Tanda Tangan
1. Penguji Utama	:	Abdussakir, M. Pd NIP. 150 327 247	( )
2. Ketua Penguji	:	Sri Harini, M.Si NIP. 150 209 630	( )
3. Sekretaris Penguji	:	Usman Pagalay, M.Si NIP. 150 327 240	( )
4. Anggota Penguji	:	Ach. Nashichuddin, M.Ag NIP. 150 302 531	( )

Mengetahui dan Mengesahkan
Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M.Si
NIP. 150 318 321

SURAT PERNYATAAN
ORISINALITAS PENELITIAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : VIVI AIDA FITRIA

NIM : 05510004

Fakultas/Jurusan : SAINS DAN TEKNOLOGI/MATEMATIKA

Judul Penelitian : ANALISIS SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL MODEL PREDATOR PREY DENGAN PERLAMBATAN

Menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa hasil penelitian saya ini tidak terdapat unsur-unsur penjiplakan karya penelitian atau karya ilmiah yang pernah dilakukan atau dibuat oleh orang lain, kecuali yang secara tertulis dikutip dalam naskah ini dan disebutkan dalam sumber kutipan dan daftar pustaka.

Apabila ternyata hasil penelitian ini terbukti terdapat unsur-unsur jiplakan, maka saya bersedia untuk mempertanggung jawabkan, serta diproses sesuai peraturan yang berlaku.

Malang, 23 Juli 2009

Yang Membuat

Pernyataan

Vivi Aida Fitria

NIM 05510004

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Segala puji bagi Allah SWT karena atas rahmat, taufiq dan hidayah-Nya, penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains dalam bidang Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Penulis menyadari bahwa banyak pihak yang telah berpartisipasi dan membantu dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Untuk itu, iringan do'a dan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya penulis sampaikan, terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Drs Sutiman Bambang Sumitro, SU., D.Sc selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Ibu Sri Harini, M.Si selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Bapak Usman Pagalay, M.Si dan Bapak Ach. Nashichuddin, M. Ag yang telah bersedia meluangkan waktunya untuk memberikan bimbingan dan pengarahan selama penulisan skripsi.
5. Segenap dosen pengajar atas ilmu yang telah diberikan kepada penulis.
6. Ibunda, suami, ananda dan segenap keluarga yang senantiasa memberikan do'a dan dukungan yang terbaik bagi penulis.

7. Teman-teman Matematika, terutama angkatan 2005 beserta semua pihak yang telah membantu penyelesaian skripsi ini.

Dalam penyusunan skripsi ini tentunya masih terdapat banyak kesalahan dan kekurangan, sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran demi perbaikan skripsi ini. Akhirnya, semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Amien.

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Malang, 27 Juli 2009

Penulis

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR GAMBAR

Halaman

DAFTAR TABEL

Halaman

DAFTAR LAMPIRAN

Halaman

ABSTRAK

Fitria, Vivi Aida. 2009. **Analisis Sistem Persamaan Diferensial Model Predator-Prey dengan Perlambatan.** Skripsi, Program S-I Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: Usman Pagalay, M.Si
Ach. Nashichuddin, M. Ag

Kata Kunci: Sistem Persamaan Diferensial, Titik Ekuilibrium, Kestabilan, Perlambatan.

Model predator-prey dengan perlambatan merupakan model interaksi dua spesies antara mangsa dan pemangsa yang berbentuk sistem persamaan diferensial tak liner. Adanya waktu perlambatan sangat mempengaruhi kestabilan titik ekuilibrium sistem persamaan diferensial model predator-prey.

Berdasarkan permasalahan di atas maka penelitian ini bertujuan untuk menganalisis pengaruh waktu perlambatan terhadap kestabilan titik ekuilibrium sistem persamaan diferensial model predator-prey. Namun sebelum itu, agar dapat diketahui asal mula pembentukan model predator-prey dengan perlambatan akan dianalisis proses terbentuknya model predator-prey dengan perlambatan. Penelitian ini menggunakan penelitian kepustakaan, yaitu dengan menampilkan argumentasi penalaran keilmuan yang memaparkan hasil kajian literatur dan hasil olah pikir peneliti mengenai suatu permasalahan atau topik kajian.

Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa ada beberapa nilai perlambatan yang menyebabkan titik ekuilibrium sistem persamaan diferensial model predator-prey stabil, dan ada beberapa nilai perlambatan yang menyebabkan titik ekuilibrium sistem persamaan diferensial model predator-prey tidak stabil

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Peningkatan jumlah populasi tanpa batas waktu tertentu tidak akan mungkin terjadi baik di laboratorium maupun di alam. Misalnya yang terjadi pada sebuah bakteri. Bakteri dapat bereproduksi dengan cara pembelahan setiap 20 menit dengan kondisi laboratorium yang ideal. Setelah 20 menit, akan terdapat dua bakteri, empat bakteri setelah 40 menit, dan demikian seterusnya. Jika keadaan ini berlangsung terus selama satu setengah hari –hanya 36 jam saja- akan terdapat bakteri yang cukup untuk membentuk suatu lapisan setebal satu kaki. Darwin menghitung bahwa hanya memerlukan 750 tahun bagi sepasang gajah untuk menghasilkan populasi 19 juta gajah (Campbell, 2004 :344). Hal ini menyingkapkan bahwa tak ada "kekurangan keseimbangan" dalam alam semesta ciptaan Allah dan bahwa kekuasaan, kebijaksanaan, dan pengetahuan-Nya tidak terbatas. Allah menjelaskannya dalam Al Quran :

الَّذِي خَلَقَ سَبْعَ سَمَاوَاتٍ طِبَاقًا مَا تَرَى فِي خَلْقِ الرَّحْمَنِ مِنْ تَفَاوُتٍ
فَارْجِعِ الْبَصَرَ هَلْ تَرَى مِنْ فُطُورٍ (٣)ثُمَّ ارْجِعِ الْبَصَرَ كَرَّتَيْنِ يَنْقَلِبْ إِلَيْكَ
الْبَصَرُ خَاسِئًا وَهُوَ حَسِيرٌ (٤)

Artinya : ”*Yang telah menciptakan tujuh langit berlapis-lapis. Kamu sekali-kali tidak melihat pada ciptaan Tuhan Yang Maha Pemurah sesuatu yang tidak seimbang. Maka lihatlah berulang-ulang, adakah kamu lihat*

> *sesuatu yang tidak seimbang. Kemudian pandanglah sekali lagi niscaya penglihatanmu akan kembali kepadamu dengan tidak menemukan sesuatu cacat dan penglihatanmu itupun dalam keadaan payah.* (Q.S Al Mulk : 3-4)

Oleh karena itu di dalam skripsi ini, akan dibahas tentang analisis kestabilan model predator-prey atau analisis kestabilan model mangsa-pemangsa. Dari model predator-prey yang stabil akan terciptalah lingkungan yang seimbang. Model ini digambarkan dalam suatu persamaan matematika. Persamaan ini merupakan pendekatan terhadap suatu fenomena fisik. Persamaan yang digunakan adalah persamaan diferensial. Persamaan diferensial adalah persamaan yang di dalamnya terdapat turunan-turunan. (Frank Ayres, 1992 : 1)

Dengan model dapat digambarkan suatu fenomena sehingga menjadi lebih jelas dalam memahaminya. Dan dengan adanya model predator-prey ini, memudahkan para ahli untuk dapat memproyeksikan populasi/spesies pada suatu waktu tertentu atau menekan laju populasi agar tetap seimbang.

Dari waktu ke waktu bentuk model predator-prey dimodifikasi sehingga dapat menggambarkan dengan dengan teliti keadaan sebenarnya. Begitupula model predator-prey, berawal dari model yang sederhana yang diperkenalkan oleh Lotka-Voltera, sampai pada model predator-prey dengan perlambatan.

Di dalam model predator-prey dengan perlambatan dipertimbangkan waktu tunda dari prey pada saat memasuki masa sebelum melahirkan. Dengan adanya waktu perlambatan inilah menyebabkan titik ekuilibrium model tidak stabil. Berdasarkan permasalahan di atas, penulis sangat tertarik untuk membahas atau mengkaji lebih jauh tentang model predator-prey dengan perlambatan. Penulis akan menganalisis pada saat waktu perlambatan berapakah titik ekuilibrium model predator-prey stabil. Oleh karena itu, dalam skripsi ini penulis mengambil judul ANALISIS SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL MODEL PREDATOR-PREY DENGAN PERLAMBATAN.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan di atas, maka permasalahan dalam penelitian ini adalah :

1. Bagaimanakah analisis pembentukan model predator-prey dengan perlambatan ?
2. Bagaimanakah pengaruh waktu perlambatan terhadap kestabilan titik ekuilibrium sistem persamaan diferensial model predator-prey ?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan penelitian ini adalah :

1. Untuk menganalisis pembentukan model predator-prey dengan perlambatan.
2. Untuk mengetahui pengaruh waktu perlambatan terhadap kestabilan titik ekuilibrium sistem persamaan diferensial model predator-prey dengan perlambatan.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari pembahasan masalah ini adalah sebagai berikut:

1. Manfaat bagi Penulis

Untuk memperdalam dan mengembangkan wawasan disiplin ilmu yang telah dipelajari dalam mengkaji permasalahan tentang analisis dari sistem persamaan diferensial dengan perlambatan.

2. Manfaat bagi Pembaca

   Sebagai tambahan wawasan dan informasi tentang model matematika dari salah satu model dalam matematika ekologi, yaitu model predator-prey dengan perlambatan

1.5 Batasan Masalah

Dalam skripsi ini akan dibahas tentang analisis model predator-prey dengan perlambatan. Untuk menghindari terjadinya pembahasan yang meluas, maka penulis membatasi ruang lingkup permasalahan pada analisis kestabilan titik equilibrium E^* dua persamaan tak linear dengan adanya waktu perlambatan.

1.6 Metode Penelitian

Pada penelitian ini, pendekatan penelitian yang digunakan adalah menggunakan penelitian kepustakaan (*library research*). Studi kepustakaan merupakan penampilan argumentasi penalaran keilmuan yang memaparkan hasil kajian literatur dan hasil olah pikir peneliti mengenai suatu permasalahan atau topik kajian. Studi kepustakaan berisi satu topik kajian yang di dalamnya memuat beberapa gagasan dan atau proposisi yang berkaitan dan harus didukung oleh data yang diperoleh dari sumber kepustakaan. Sumber kajian pustaka dapat berupa jurnal penelitian, disertasi, tesis, skripsi, laporan penelitian, atau diskusi-diskusi ilmiah. Bahan-bahan pustaka tersebut harus dibahas secara mendalam sehingga mendukung gagasan dan atau proposisi untuk menghasilkan kesimpulan dan saran.

Data yang diperlukan dalam penelitian ini adalah data yang bersifat tekstual meliputi persamaan diferensial non linier, pemodelan matematika, dan pembahasan keduanya dalam analisis model matematika. Dalam memahami data-data yang berupa teks dalam buku-buku literatur diperlukan suatu analisis. Metode analisis yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode deduksi, yaitu cara berpikir yang berangkat dari hal-hal umum menuju kesimpulan yang khusus.

1.7 Sistematika Penulisan

Untuk mempermudah pembaca memahami tulisan ini, penulis membagi tulisan ini kedalam empat bab sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN: Dalam bab ini dijelaskan latar belakang masalah, pembatasan dan rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian dan sistematika pembahasan.

BAB II KAJIAN TEORI: Dalam bab ini dikemukakan hal-hal yang mendasari dalam teori yang dikaji.

BAB III PEMBAHASAN: Dalam bab ini dipaparkan hasil-hasil kajian yang meliputi pembentukan model predator-prey dengan perlambatan dan analisis sistem persamaan diferensial pada model predator-prey dengan perlambatan

BAB IV PENUTUP: Dalam bab ini dikemukakan kesimpulan akhir penelitian dan diajukan beberapa saran.

BAB II

KAJIAN TEORI

Pemodelan matematika merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang cukup penting dan banyak manfaatnya. Beberapa situasi sejalan dengan semakin kompleksnya permasalahan pemodelan matematika dapat diterapkan langsung untuk memecahkan suatu masalah dalam kehidupan nyata, diantaranya permasalahan-permasalahan pada bidang kedokteran, meteorologi, farmakologi dan sebagainya. Model matematika adalah model yang digambarkan dalam suatu persamaan matematika. Persamaan ini merupakan pendekatan terhadap suatu fenomena fisik, salah satu persamaan yang digunakan adalah persamaan diferensial. Ada banyak jenis dari persamaan diferensial, salah satunya yaitu persamaan diferensial tak linier. Persamaan diferensial tak linier inilah yang mendasari model predator-prey dengan perlambatan.

2.1 Sistem Persamaan Diferensial

Definisi 1 :

Sistem persamaan diferensial adalah suatu sistem yang memuat n buah persamaan diferensial, dengan n buah fungsi yang tidak diketahui, dimana n merupakan bilangan bulat positif lebih besar sama dengan 2 (Finizio dan Ladas, 1982:132). Antara persamaan diferensial yang satu dengan yang lain saling keterkaitan dan konsisten.

Bentuk umum dari suatu sistem n persamaan orde pertama mempunyai bentuk sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= g_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
\frac{dx_2}{dt} &= g_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
&\vdots \\
\frac{dx_n}{dt} &= g_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Dengan $x_1, x_2, \ldots x_n$ adalah variabel bebas dan t adalah variabel terikat, sehingga $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \ldots x_n = x_n(t)$, dimana $\frac{dx_n}{dt}$ merupakan derivatif fungsi x_n terhadap t, dan g_i adalah fungsi yang tergantung pada variabel $x_1, x_2, \ldots x_n$ dan t (Claudia, 2004:702).

2.2 Sistem Otonomus

Definisi 2 :

Sistem otonomus adalah suatu sistem persamaan diferensial yang berbentuk

$$\dot{x} = f(x, y) \qquad \dot{y} = g(x, y) \tag{2.2}$$

dimana fungsi-fungsi f dan g bebas dari waktu (Finizio dan Ladas, 1982:287).

Definisi 3:

Jika $\hat{y}$ memenuhi

$$g(\hat{y}) = 0$$

maka $\hat{y}$ adalah sebuah titik ekuilibrium dari

$$\frac{dy}{dx} = g(y)$$ (Claudia, 2004 : 494)

Contoh :

$$\dot{x} = -y, \qquad \dot{y} = x \qquad (2.3)$$

Titik ekuilibrium persamaan (2.3) ditentukan oleh dua persamaan $-y = 0, x = 0$. Jadi (0,0) merupakan satu-satunya titik ekuilibriumdari persamaan (2.3).

Jika sistem otonomus (2.2) linier dengan koefisien konstan, maka sistem otonomus tersebut berbentuk :

$$\dot{x} = ax + by \qquad \dot{y} = cx + dy \qquad (2.4)$$

dengan *a,b,c,* dan *d* adalah konstanta. Jika dimisalkan *ad-bc* $\neq$ 0 maka titik (0,0) adalah satu-satunya titik kritis persamaan (2.4) dan persamaan karakteristiknya berbentuk :

$$\lambda^2 - (a-d)\lambda + (ad - bc) = 0 \qquad (2.5)$$

dengan λ_1 dan λ_2 adalah akar-akar persamaannya. Sehingga terdapat teorema berikut :

Teorema 1

a. Titik kritis (0,0) dari sistem (2.4) stabil, jika dan hanya jika, kedua akar dari persamaan (2.5) adalah riil dan negatif atau mempunyai bagian riil takposistif.

b. Titik kritis (0,0) dari sistem (2.4) stabil asimtotis, jika dan hanya jika, kedua akar dari persamaan (2.5) adalah riil dan negatif atau mempunyai bagian riil negatif.

c. Titik kritis (0,0) dari sistem (2.4) tak stabil, jika salah satu (atau kedua akar) akar dari persamaan (2.5) adalah riil dan positif atau jika paling sedikit satu akar mempunyai bagian riil posistif (Finizio dan Ladas, 1982:293).

Sistem persamaan diferensial tak linier seringkali muncul dalam penerapan, misalnya dalam model predator-prey. Tetapi hanya beberapa tipe persamaan diferensial tak linier yang dapat diselesaikan secara eksplisit. Sedangkan persamaan diferensial tak linier yang tidak dapat diselesaikan secara eksplisit, dapat diselesaikan dengan melinierkan terlebih dahulu.

Sistem (2.2) dari dua persamaan diferensial tak linier dengan dua fungsi yang tak diketahui berbentuk :

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= ax + by + P(x,y) \\ \dot{y} &= cx + dy + Q(x,y) \end{aligned}\right\} \qquad (2.6)$$

dimana a, b, c, d, P, Q memenuhi syarat :

a. a, b, c dan d konstanta real dan $\begin{vmatrix} a & c \\ d & b \end{vmatrix} \neq 0$

b. P(x,y) dan Q(x,y) mempunyai derivatif parsial kontinu untuk semua (x,y) dan memenuhi : $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{P(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{Q(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$

sehingga sistem linearnya berbentuk :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax + by \\ \dot{y} &= cx + dy\end{aligned} \qquad (2.7)$$

Dari syarat di atas maka berlaku :

Teorema 2

a. Titik kritis (0,0) dari sistem tak linier (2.6) adalah stabil asimtotis jika titik kritis (0,0) dari sistem yang dilinierkan (2.7) adalah stabil asimtotis.

b. Titik kritis (0,0) dari sistem taklinier (2.6) adalah takstabil jika titik kritis (0,0) dari sistem (2.7) adalah takstabil.

Teorema ini tidak memberikan kesimpulan mengenai sistem (2.6) bila (0,0) hanya merupakan titik stabil dari sistem (2.7). (Finizio dan Ladas, 1982:294).

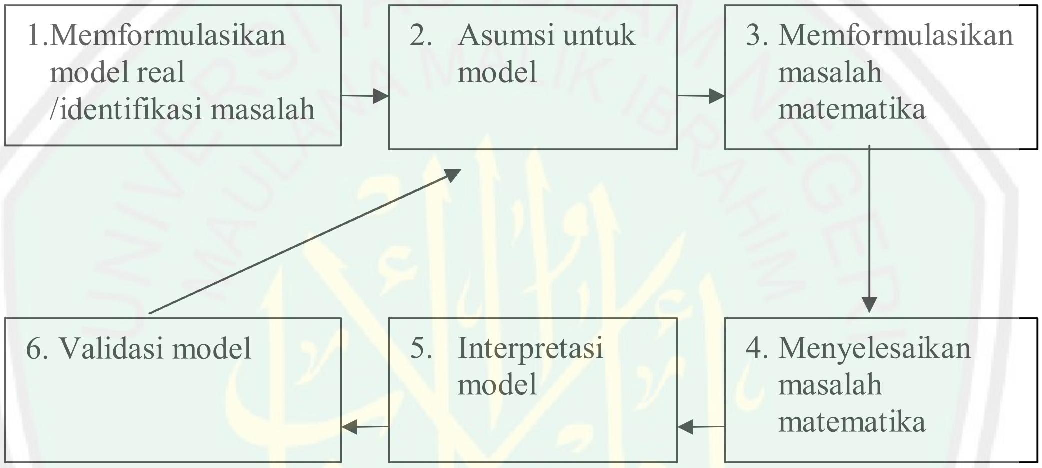
2.3 Model Matematika

Pemecahan masalah dalam dunia nyata dengan matematika dilakukan dengan mengubah masalah tersebut menjadi bahasa matematika, proses tersebut disebut pemodelan secara matematik atau model matematika. (Baiduri, 2002:1). Jadi pemodelan matematika dapat dipandang sebagai terjemahan dari fenomena atau masalah menjadi permasalahan matematika. Informasi matematika yang diperoleh dengan melakukan kajian matematika atas model tersebut dilakukan sepenuhnya dengan menggunakan kaedah-kaedah matematika. Syarat utama model yang baik adalah sebagai berikut :

a. Representatif: model mewakili dengan benar sesuatu yang diwakili, makin mewakili, model makin kompleks.

b. Dapat dipahami/dimanfaatkan: model yang dibuat harus dapat dimanfaatkan (dapat diselesaikan secara matematis), makin sederhana makin mudah diselesaikan.

Langkah-langkah dalam pemodelan masalah digambarkan dalam diagram berikut :



Keterangan :

1. Identifikasi masalah, yaitu mampu memahami masalah yang akan dirumuskan sehingga dapat ditranslasi ke dalam bahasa matematika
2. Membuat asumsi, yaitu dengan cara menyederhanakan banyaknya faktor yang berpengaruh terhadap kejadian yang sedang diamati dengan mengasumsi hubungan sederhana antara variabel. Asumsi tersebut dibagi dalam dua kategori utama :
   a. Klasifikasi variabel

      Pemodel mengidentifikasi variabel terhadap hal-hal yang mempengaruhi tingkah laku pengamatan

b. Menentukan interelasi antara variabel yang terseleksi untuk dipelajari

   Pemodel membuat sub model sesuai asumsi yang telah dibuat pada model utama, kemidian mempelajari secara terpisah pada satu atau lebih variabel bebas.

3. Menyelesaikan atau menginterpretasikan model

   Setelah model diperoleh kemudian diselesaikan secara matematis, dalam hal ini model yang digunakan dan penyelesaiannya menggunakan persamaan diferensial. Apabila pemodel mengalami kesulitan untuk menyelesaikan model dan interpretasi model, maka kelangkah 2 dan membuat asumsi sederhana tambahan atau kembali kelangkah 1 untuk membuat definisi ulang dari permasalahan. Penyederhanaan atau definisi ulang sebuah model merupakan bagian yang penting dalam matematika model.

4. Verifikasi model

   Sebelum menyimpulkan kejadian dunia nyata dari hasil model, terlebih dahulu model tersebut harus diuji. Beberapa pertanyaan yang diajukan sebelum melakukan uji dan mengumpulkan data, yaitu : 1) apakah model menjawab masalah yag telah diidentifikasi? 2) apakah model membuat pemikiran yang sehat? 3) apakah data (sebaiknya menggunakan data aktual yang diperoleh dari observasi empirik) dapat dikumpulkan untuk menguji dan mengoperasikan model dan apakah memenuhi syarat apabila diuji (Baiduri, 2002:15-17).

2.4 Model Logistik

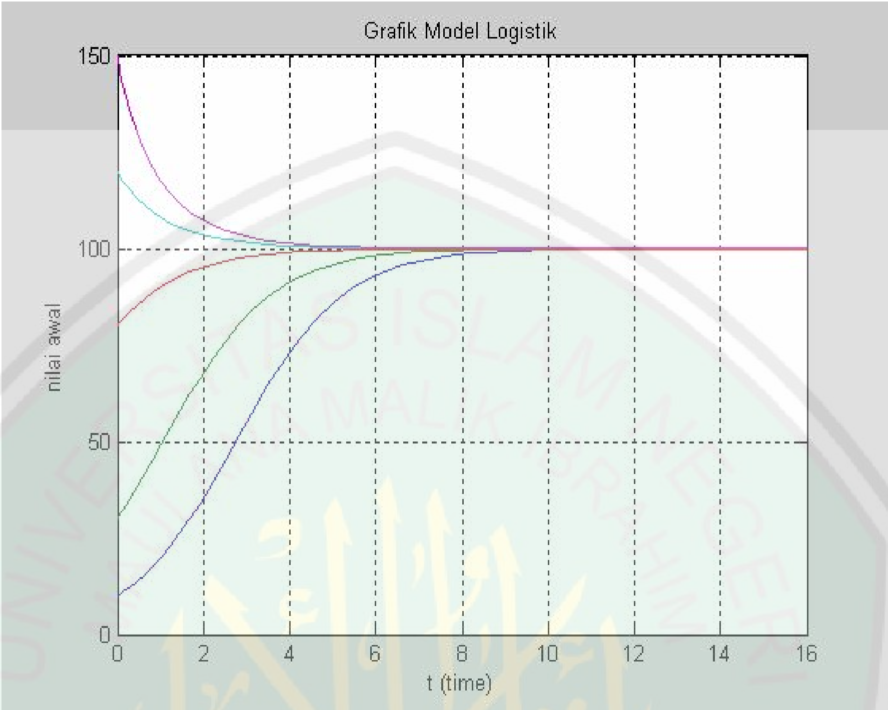
Model logistik atau model Verhulst atau kurva pertumbuhan logistik adalah sebuah model pertumbuhan populasi. Model logistik termasuk model yang memiliki waktu kontinu. Model tersebut dideskripsikan sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right). \tag{2.8}$$

Konstanta r, diasumsikan positif. Konstanta r adalah laju pertumbuhan intrinsik karena perbandingan laju pertumbuhan untuk x diperkirakan sama dengan r. Konstanta positif K biasanya mengarah kepada daya kapasitas kesehatan lingkungan yaitu kemampuan menahan populasi agar tetap maksimum. Solusi dari model logistik tersebut adalah :

$$x(t) = \frac{x_0 K}{x_0 + (K - x_0)e^{-rt}} \tag{2.9}$$

Model logistik mempunyai dua titik ekuilibrium, yaitu x = 0 dan x = K. Titik ekulibrium pertama tidak stabil sementara titik ekuilibrium kedua adalah stabil global. Beberapa kurva dari solusi model logistik dengan titik awal yang berbeda dapat dilihat pada Grafik 2.1.



Gambar 2.1. Grafik Model Logistik dari Persamaan (2.9) dengan K= 100 ,r=1 dan Lima Kondisi Awal Masing-Masing x(0)= 10 ,x(0)=30, x(0)=80, x(0) = 120 dan x(0) = 150

2.5 Model Logistik dengan Perlambatan

Model logistik tunggal dengan perlambatan adalah

$$\frac{dx(t)}{dt} = rx(t)\left(1 - \frac{x(t-\tau)}{K}\right), \tag{2.10}$$

dimana τ adalah sebuah waktu perlambatan dan dianggap positif. Suatu titik ekuilibrium positif dari model ini adalah K. Hal ini diusulkan oleh Hutchinson di Gopalsamy, model (2.10) tersebut bisa digunakan pada model pertumbuhan populasi jenis dinamik tunggal terhadap ketahanan level K, dengan sebuah konstanta laju pertumbuhan intrinsik r. Bentuk $\left(1 - \frac{x(t-\tau)}{K}\right)$

pada model (2.10) merupakan sebuah kepadatan tergantung pada mekanisme pengaruh arus balik yang mengambil τ satuan waktu untuk menanggapi perubahan pada kepadatan populasi diwakili pada model (2.10) oleh x. Model logistik dengan perlambatan (2.10) dikenal sebagai persamaan perlambatan Verhulst atau persamaan Hutchinson. Persamaan Hutchinson telah dipelajari di beberapa jurnal dan buku.

Selanjutnya akan dianalisis stabilitas lokal dari titik ekuilibrium. Untuk menganalisis, digunakan sebuah metode standar yaitu metode linierisasi disekitar titik ekuilibrium. Misalkan $u(t) = x(t) - K$, maka $\frac{du(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}$. Mensubtitusi $x(t) = u(t) + K$ ke dalam persamaan (2.10) untuk memperoleh

$$\frac{du(t)}{dt} = r(u(t) + K)\left(1 - \frac{u(t-\tau) + K}{K}\right) \tag{2.11}$$

$$\frac{du(t)}{dt} = \frac{-r}{K} u(t)u(t-\tau) - ru(t-\tau).$$

Karena x(t) tertutup untuk K, $u(t)u(t-\tau)$ dapat dihilangkan. Selanjutnya didapatkan suatu model linier

$$\frac{du(t)}{dt} = -ru(t-\tau). \tag{2.12}$$

Untuk memahami stabilitas titik ekuilibrium nol dari model (2.12), dipertimbangkan persamaan karakteristik pada model (2.12). Pensubtitusian pada fungsi tes $x(t) = e^{\lambda\tau}$ ke dalam model (2.12) menghasilkan persamaan karakteristik

$$\lambda e^{\lambda\tau} = -re^{\lambda(t-\tau)}$$

karena $e^{\lambda\tau} \neq 0$, maka

$$\lambda + re^{-\lambda\tau} = 0. \qquad (2.13)$$

Lemma 1 Misalkan $r > 0$ dan $\tau > 0$ jika $\tau \leq \frac{1}{re}$ maka persamaan (2.13) memiliki akar-akar persamaan karakteristik negatif

Bukti

Misalkan $F(\lambda) = \lambda + re^{-\lambda\tau}$. Dengan catatan bahwa λ bukan bilangan riil nonnegatif. Akan dibuktikan bahwa akar-akar dari $F(\lambda)$ adalah bukan bilangan komplek. Karena $F(\lambda) = \lambda + re^{-\lambda\tau}$ maka $F'(\lambda) = 1 - r\tau e^{-\lambda\tau}$ dan $\lambda_* = \frac{1}{\tau}\ln(r\tau)$ adalah titik kritik dari $F(\lambda)$. Oleh karena itu, $F''(\lambda) = r\tau^2 e^{-\lambda\tau}$ yang positif. Ini berarti bahwa nilai dari titik kritik memberikan nilai minimum untuk $F(\lambda)$. Selanjutnya karena $F(\lambda_*) = \frac{1}{\tau}(\ln(r\tau)+1)$ yang sama dengan nol jika $r\tau = \frac{1}{e}$ atau $\left(\tau = \frac{1}{re}\right)$, dan kurang dari nol jika $\tau < \frac{1}{re}$ maka persamaan (2.13) hanya memiliki satu akar, yaitu $\tau = \frac{1}{re}$, dan jika $\lambda = \frac{1}{\tau}\ln(r\tau)$ persamaan (2.13) memiliki dua akar riil negatif.

Jika $F(\lambda_\bullet) > 0$, yaitu $r\tau > \frac{1}{e}$, ini mengakibatkan bahwa tidak ada akar riil dari persamaan karakteristik (2.13). Kondisi persamaan karakteristik ini mempunyai akar komplek konjugat. Jika dimisalkan $\lambda = \rho + i\omega$, $\rho \in R$, $\omega \in [0,\infty)$, sebagai sebuah akar dari (2.13), maka

$$\rho + i\omega = -re^{-(\rho+i\omega)\tau} = -re^{-\rho\tau}\left(\cos(\omega\tau) - i\sin(\omega\tau)\right),$$

maka didapatkan dua persamaan dengan bagian riil dan bagian imajinernya:

$$\rho = -re^{-\rho\tau}\cos(\omega\tau), \qquad (2.14.a)$$

$$\omega = re^{-\rho\tau}\sin(\omega\tau). \qquad (2.14.b)$$

(Syamsuddin, 2006:3.7).

Lemma 2 Misalkan $r > 0$ dan $\tau > 0$. Jika $\frac{1}{re} < \tau < \frac{\pi}{2r}$ maka akar dari persamaan karakteristik (2.13) adalah komplek konjugat dengan bagian riil negatif.

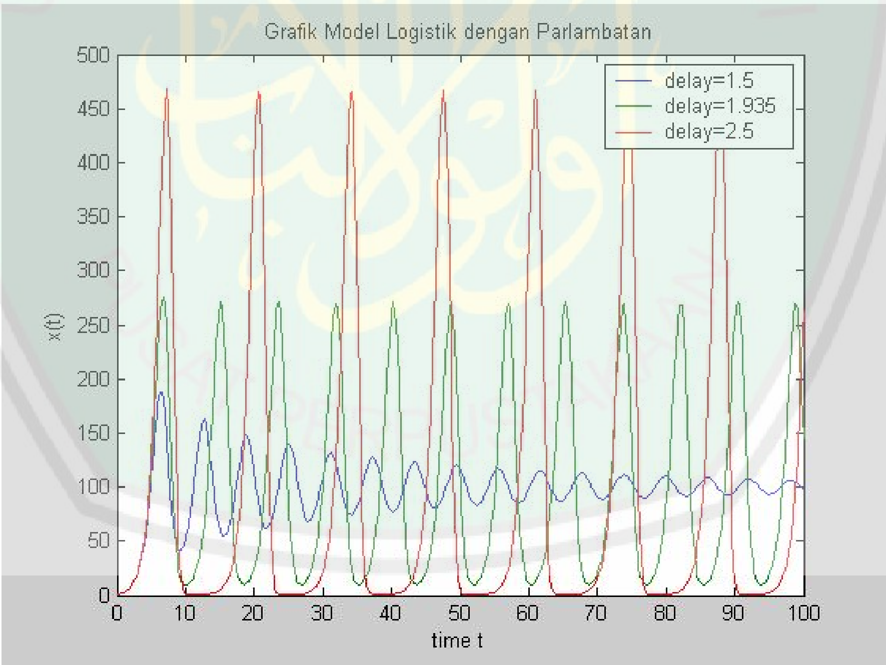
`Bukti

Misalkan $F(\lambda) = \lambda + re^{-\lambda\tau}$. Dari persamaan (2.13) bahwa λ bukan bilangan riil nonnegatif. Maka $F'(\lambda) = 1 - r\tau e^{-\lambda\tau}$ dan $\lambda_{\bullet} = \frac{1}{\tau}\ln(r\tau)$ adalah sebuah titik ekuilibrium untuk $F(\lambda)$. Selanjutnya $F''(\lambda) = r\tau^2 e^{-\lambda\tau}$ adalah positif. Ini berarti bahwa nilai dari titik ekuilibrium memberi nilai minimum untuk $F(\lambda)$. Fungsi $F(\lambda)$ tidak mempunyai akar riil dimana $F(\lambda_{\bullet}) = \frac{1}{\tau}(\ln(r\tau) + 1) > 0$ dan ini terjadi ketika $\frac{1}{re} < \tau$. Sekarang akan ditunjukkan bahwa akar dari $F(\lambda)$ adalah sebuah bilangan komplek dengan bagian riil negatif. Misalkan persamaan (2.13) tersebut mempunyai akar $\lambda = \rho + i\omega$ dengan $\rho \geq 0$. Karena $\lambda = 0$ adalah bukan akar dari persamaan karakteristik (2.13) dan diasumsikan $\omega > 0$ hal ini menunjukkan (dari persamaan (2.14b)) bahwa

$$0 < \omega\tau = r\tau e^{-\rho\tau} \sin \omega\tau < \frac{\pi}{2}$$

Hal ini menunjukkan bahwa sisi kiri dari persamaan (2.14a) adalah nonnegatif. Karena kontradiksi hal ini membuktikan bahwa $\rho < 0$. Perhatikan konjugat dari λ membuktikan persamaan karakteristik (2.13) (Syamsuddin, 2006: 3.9).

Berikut adalah kurva dari solusi model logistik dengan beberapa nilai perlambatan berbeda :



Gambar 2.2. Grafik Model Logistik dari Persamaan (2.10) dengan K= 100 ,r=1 dan Tiga Nilai Perlambatan Yaitu $\tau = 1.5, \tau = 1.935$ **dan** $\tau = 2.5$

2.6 Model Populasi Predator-Prey

Dalam subbab ini, dibahas tentang model sederhana dari predator-prey, yang didefinisikan sebagai konsumsi predator terhadap prey. Model predator-prey yang paling sederhana didasarkan pada model Lotka-Volterra (Lotka, 1932 ; Volterra, 1926) dalam Claudia (2004 :760) , yang dideskripsikan dalam kata-kata Volterra, sebagai berikut :

> ”Kasus pertama yang saya pertimbangkan adalah bahwa ada dua jenis hubungan. Yang pertama menemukan makanan yang cukup di lingkungannya dan akan berkembang terus meskipun hidup sendirian, dan yang kedua mati karena kekurangan makanan jika dibiarkan hidup sendiri. Tetapi makanan yang kedua untuk makanan yang pertama. Sehingga dua jenis ini dapat hidup berdampingan. Angka perbandingan dari kenaikan jenis makanan dikurangi jumlah individu dari pertumbuhan jenis makanan, saat tambahan jenis makanan berkembang seiring dengan berkembangnya jumlah individu dari jenis makanan. ”

Model Lotka-Voltera tersusun dari pasangan persamaan diferensial yang mendeskripsikan predator-prey dalam kasus yang paling sedehana. model ini membuat beberapa asumsi :

1. Populasi prey akan tumbuh secara eksponen ketika tidak adanya predator
2. Populasi predator akan mati kelaparan ketika tidak adanya populasi prey
3. Predator dapat mengkonsumsi prey dengan jumlah yang tak terhingga
4. Tidak adanya lingkungan yang lengkap (dengan kata lain, kedua populasi berpindah secara acak melalui sebuah lingkungan yang homogen)

Selanjutnya bentuk verbal ini diterjemahkan ke dalam sebuah sistem persamaan diferensial. Diasumsikan bahwa populasi prey berkurang ketika predator membunuhnya dan bertahan hidup (tidak mengurangi populasi prey) ketika predator hanya menyerangnya. Model dengan laju perubahan dari populasi prey (x) dan populasi predator (y) adalah :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= rx\left(1-\frac{x}{K}\right)-\alpha xy \\ \frac{dy}{dt} &= -cy+\beta xy \end{aligned} \qquad (2.15)$$

Parameter model di atas yaitu :

K= daya kapasitas

r = laju pertumbuhan intrinsik prey

c = laju kematian jika predator tanpa prey

α = laju perpindahan dari prey ke predator

β = laju pepindahan dari predator ke prey

Model di atas dibentuk dengan analisis sebagai berikut :

Dimulai dengan memperhatikan apa yang terjadi pada populasi predator ketika tidak adanya prey, tanpa sumber makanan, bilangannya diharapkan berkurang secara eksponensial, dideskripikan oleh persamaan di bawah ini :

$$\frac{dy}{dt} = -cy$$

Persamaan ini menggunakan hasil kali dari bilangan predator (y) dan kelajuan kematian predator (c). Untuk mendeskripsikan penurunan kelajuan (karena tanda negatif pada bagian kanan persamaan) dari populasi predator dengan pengaruh waktu. Dengan adanya prey bagaimanapun juga pengurangan ini dilawan oleh laju kelahiran predator, yang ditentukan oleh laju konsumsi (βxy). Dimana laju penyerangan (β) dikalikan dengan bilangan y dan bilangan x. Bilangan predator dan prey naik ketika pertemuan predator dan prey lebih sering, tetapi laju aktual dari konsumsi akan tergantung pada laju penyerangan (β). Persamaan populasi predator menjadi

$$\frac{dy}{dt} = -cy + \beta xy$$

Perkalian βy adalah tanggapan predator secara numerik atau peningkatan perkapita dari fungsi prey yang melimpah. Dan untuk perkalian βxy menunjukkan bahwa kenaikan populasi predator sebanding dengan perkalian dan prey yang melimpah.

Beralih pada populasi prey, kita berharap tanpa serangan predator, bilangan prey akan naik secara eksponensial. Persamaan di bawah ini mendeskripsikan laju kenaikan populasi prey dengan pengaruh waktu, dimana r adalah laju pertumbuhan intrinsik prey dan x adalah jumlah dari populasi prey.

$$\frac{dx}{dt} = rx$$

Di hadapan predator, bagaimanapun juga populasi prey dicegah dari peningkatan eksponensial secara terus-menerus. Karena model predator prey memiliki waktu yang kontinu dan mengisyaratkan tentang model pertumbuhan populasi maka termasuk dalam model logistik. Jadi persamaan di atas menjadi:

$$\frac{dx}{dt} = rx(1 - \frac{x}{K})$$

Dengan adanya predator bagaimanapun juga kenaikan ini dilawan oleh laju kematian prey karena adanya penyerangan dari predator, yang ditentukan oleh laju konsumsi (αxy).Di mana laju penyerangan (α) dikalikan dengan bilangan y dan bilangan x. Bilangan predator dan prey turun ketika pertemuan predator dan prey lebih sering, tetapi laju aktual dari konsumsi akan tergantung pada laju penyerangan (α). Persamaan populasi prey menjadi:

$$\frac{dx}{dt} = rx(1 - \frac{x}{K}) - \alpha xy$$

Adapun analisis numerik model predator prey adalah :

1. Titik ekuilibrium model (2.15) adalah E_0 = (0,0), E_1 = (K,0) dan E^* =(x^*,y^*) = $\left(\frac{c}{\beta}, \frac{r(K\beta - c)}{\alpha\beta K}\right)$. Agar mendapatkan sebuah titik ekuilibrium yang positif diasumsikan bahwa $K\beta - c >$ 0. Matriks Jacobian dari model (2.15) yaitu

$$J = \begin{pmatrix} r - \frac{2rx}{K} - \alpha y & -\alpha x \\ \beta y & -c + \beta x \end{pmatrix}$$

2. Matriks Jacobian pada titik ekuilibrium E* adalah

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{-rc}{\beta K} & \dfrac{-\alpha c}{\beta} \\ \dfrac{r\beta K - rc}{\alpha K} & 0 \end{pmatrix}$$

3. Persamaan karakteristik dari Matriks Jacobian di atas adalah

$$f(\lambda) = \lambda^2 + \frac{rc}{\beta K}\lambda + \frac{c}{\beta K}(r\beta K - rc)$$

4. Misalkan $P = \dfrac{rc}{\beta K}$ dan $Q = \dfrac{c}{\beta K}(r\beta K - rc)$ maka nilai eigen dari matrik Jacobian di atas adalah

$$\lambda_{1,2} = \frac{-P \pm \sqrt{P^2 - 4Q}}{2}$$

Karena P dan Q adalah bilangan positif, maka nilai eigen dari P dan Q memiliki bagian yang riil negatif. Hal ini berarti bahwa titik ekuilibrium E* adalah asimtot lokal stabil. Karena $K\beta - c > 0$ maka titik ekuilibrium E* juga asimtot global stabil.

2.7 Model Populasi Predator Prey dengan Perlambatan

Waktu perlambatan (perlambatan) sangat penting untuk diperhitungkan di dunia permodelan karena keputusan seringkali dibuat berdasarkan pada keterangan realita. Merupakan hal yang penting untuk mempertimbangkan model populasi dimana laju pertumbuhan populasi tidak hanya tergantung pada ukuran populasi pada satu waktu tertentu tetapi juga tergantung pada ukuran populasi pada $(t-\tau)$, dimana τ adalah waktu perlambatan.

Berikut adalah model populasi predator-prey dengan perlambatan yang diperkenalkan olah May pada tahun 1974:

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= rx(t)\left(1-\frac{x(t-\tau)}{K}\right)-\alpha x(t)y(t)\\ \frac{dy(t)}{dt} &= -cy(t)+\beta x(t)y(t)\end{aligned} \qquad (2.16)$$

dimana r, K, τ, α, c dan β adalah konstanta positif. Parameter model (2.16) yaitu :

K= daya kapasitas

r = laju pertumbuhan intrinsik prey

c = laju kematian jika predator tanpa prey

α = laju perpindahan dari prey ke predator

β = laju perpindahan dari predator ke prey

τ = waktu perlambatan

Untuk menganalisis kestabilan titik ekuilibrium dari model dengan perlambatan, harus mengelinierisasi model di sekitar titik ekuilibrium, kemudian memeriksa nilai eigen pada persamaan karakteristik. Titik ekuilibrium asimtot stabil jika dan hanya jika akar-akar dari persamaan karakteristik mempunyai bagian real negatif . Langkah selanjutnya dalam menganalisis titik ekuilibrium dari model predator-prey dengan perlambatan dibutuhkan teorema berikut :

Teorema 3

Misalkan $K\beta - c > 0$ dan $\tau_k^{\pm}$ didefinisikan pada persamaan (2.16) berbentuk :

$$\tau_k^{+} = \frac{\pi/2}{\omega_+} + \frac{2k\pi}{\omega_+} . \text{ dan } \tau_k^{-} = \frac{3\pi/2}{\omega_-} + \frac{2k\pi}{\omega_-},$$

maka terdapat sebuah bilangan positif m sedemikian hingga m merubah dari stabil ke tidak stabil dan ke stabil. Dengan kata lain, ketika $\tau \in [0, \tau_0^+) \cup (\tau_0^-, \tau_1^+) \cup \ldots \cup (\tau_{m-1}^-, \tau_m^+)$, titik ekuilibrium E^* pada model (3.2) stabil, dan ketika $\tau \in [\tau_0^+, \tau_0^-) \cup (\tau_1^+, \tau_1^-) \cup \ldots \cup (\tau_{m-1}^+, \tau_{m-1}^-)$, titik ekuilibrium E^* tidak stabil. Oleh karena itu ada bifurkasi untuk $\tau = \tau_k^{\pm}$, k=0,1,2,…

Bukti

Diketahui bahwa titik ekuilibrium E^* stabil untuk $\tau = 0$. Maka untuk membuktikan teorema 3 hanya dibutuhkan kondisi secara transversal.

$$\left.\frac{d(\operatorname{Re}\lambda)}{d\tau}\right|_{\tau=\tau_k^+} > 0 \quad \text{dan} \quad \left.\frac{d(\operatorname{Re}\lambda)}{d\tau}\right|_{\tau=\tau_k^-} < 0.$$

Persamaan $\lambda^2 + \lambda P e^{-\lambda\tau} + Q = 0$ dideferensialkan menjadi

$$2\lambda\frac{d\lambda}{d\tau} + Pe^{-\lambda\tau}\frac{d\lambda}{d\tau} + \lambda P e^{-\lambda\tau}\left(-\tau\frac{d\lambda}{d\tau} - \lambda\right) = 0,$$

$$\left(2\lambda + (1-\lambda\tau)Pe^{-\lambda\tau}\right)\frac{d\lambda}{d\tau} = \lambda^2 P e^{-\lambda\tau}.$$

Agar lebih mudah dipahami, maka $\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)$ diubah menjadi $\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1}$. Maka didapatkan :

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} = \frac{2\lambda e^{\lambda\tau} + P(1-\lambda\tau)}{\lambda^2 P}$$

$$= \frac{2\lambda e^{\lambda\tau} + P}{\lambda^2 P} - \frac{\tau}{\lambda}$$

dari persamaan karakteristik $\lambda^2 + \lambda P e^{-\lambda\tau} + Q = 0$ diketahui bahwa

$$e^{\lambda\tau} = \frac{-\lambda P}{\lambda^2 + Q}$$

Maka didapatkan

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} = \frac{-\lambda^2 + Q}{\lambda^2(\lambda^2 + Q)} - \frac{\tau}{\lambda}$$

Oleh karena itu

$$sign\left(\frac{d(\mathrm{Re}\,\lambda)}{d\tau}\right)_{\lambda=i\omega} = sign\left(\mathrm{Re}\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1}\right)_{\lambda=i\omega}$$

$$= sign\left(\mathrm{Re}\left[\frac{-1}{\lambda^2 + Q}\right]_{\lambda=i\omega} + \mathrm{Re}\left[\frac{Q}{\lambda^4 + \lambda^2 Q}\right]_{\lambda=i\omega}\right)$$

$$= sign\left(\frac{-1}{-\omega^2 + Q} + \frac{Q}{\omega^4 - \omega^2 Q}\right)$$

$$= sign\left(\frac{\omega^4 - Q^2}{\omega^2(\omega^2 - Q)^2}\right)$$

$$= sign\left(\omega^4 - Q^2\right)$$

Karena $\omega^4 - Q^2 = 2\omega^4 - (P^2 + 2Q)\omega^2$

Maka didapatkan

$$sign\left(\frac{d(\mathrm{Re}\,\lambda)}{d\tau}\right)_{\lambda=i\omega} = sign(2\omega^4 - (P^2 + 2Q)\omega^2)$$

$$= sign(2\omega^2 - (P^2 + 2Q))$$

Jadi dapat dibuktikan bahwa kondisi transversal telah terpenuhi. (Syamsuddin, 2006:4.10)

2.8 Keseimbangan Lingkungan Hidup dalam Kajian Islam

Reaksi antara predator-prey di dalam biologi dipelajari dalam salah satu cabangnya yang disebut ekologi. Ekologi berasal dari bahasa Yunani, yang terdiri dari dua kata, yaitu oikos yang artinya rumah atau tempat hidup, dan logos yang berarti ilmu. Ekologi diartikan sebagai ilmu yang mempelajari tentang interaksi antar makhluk hidup dan interaksi antara makhluk hidup dan lingkungannya.

Pembahasan ekologi tidak lepas dari pembahasan ekosistem dengan berbagai komponen penyusunnya, yaitu faktor abiotik dan biotik. Faktor abiotik antara lain suhu, air, kelembapan, cahaya, dan topografi, sedangkan faktor biotik adalah makhluk hidup yang terdiri dari manusia, hewan, tumbuhan, dan mikroba. Ekologi juga berhubungan erat dengan tingkatan-tingkatan organisasi makhluk hidup, yaitu populasi, komunitas, dan ekosistem. Tingkatan-tingkatan organisme makhluk hidup tersebut dalam ekosistem akan saling berinteraksi, saling mempengaruhi membentuk suatu sistem yang menunjukkan kesatuan.

Interaksi antarkomponen ekologi dapat merupakan interaksi antarorganisme, antarpopulasi, dan antarkomunitas. Di dalam interaksi antar organisme menurut sifatnya dapat dibagi menjadi lima macam. Salah satu diantara interaksi tersebut bersifat predasi. Yaitu hubungan antara mangsa dan pemangsa (predator). Hubungan ini sangat erat sebab tanpa mangsa, predator tak dapat hidup. Sebaliknya, predator juga berfungsi sebagai pengontrol populasi mangsa. Sehingga terdapat keseimbangan dalam interaksi tersebut, yaitu terdapat keseimbangan antara jumlah populasi predator dan prey.

Di dalam kajian Islam Allah juga sudah mengatur dengan indah keseimbangan tersebut. Bahkan berabad-abad tahun yang lalu Allah telah menyebutkan firman-Nya dalam Qur'an Surat Al Mulk ayat 3 dan 4, yang berbunyi :

الَّذِي خَلَقَ سَبْعَ سَمَاوَاتٍ طِبَاقًا مَا تَرَى فِي خَلْقِ الرَّحْمَنِ مِنْ تَفَاوُتٍ

فَارْجِعِ الْبَصَرَ هَلْ تَرَى مِنْ فُطُورٍ (٣)ثُمَّ ارْجِعِ الْبَصَرَ كَرَّتَيْنِ يَنْقَلِبْ إِلَيْكَ

الْبَصَرُ خَاسِئًا وَهُوَ حَسِيرٌ (٤)

Artinya : "*Yang telah menciptakan tujuh langit berlapis-lapis. Kamu sekali-kali tidak melihat pada ciptaan Tuhan Yang Maha Pemurah sesuatu yang tidak seimbang. Maka lihatlah berulang-ulang, adakah kamu lihat sesuatu yang tidak seimbang. Kemudian pandanglah sekali lagi niscaya penglihatanmu akan kembali kepadamu dengan tidak menemukan sesuatu cacat dan penglihatanmu itupun dalam keadaan payah.*

Menurut Musthafa Ahmad al-Maraghi dalam Tafsir al-Maraghi bahwa Alam raya ini diciptakan oleh Allah swt dalam bentuk yang sangat serasi dan selaras. Keserasian ini dalam ilmu biologi dikenal dengan istilah rantai atau jaring makanan. Apabila ada satu komponen dari rantai makanan tersebut terganggu keseimbangannya maka akan mempengaruhi komponen yang lain. Seperti misalnya sekawanan gajah yang seharusnya mencari makan di hutan, sekarang sudah mulai memasuki pemukiman manusia karena sumber makanannya sudah habis, hutan tempat mencari makan dirusak manusia. Akibatnya manusia sendiri yang terganggu keamanannya, rumahnya diserang gajah.

Dalam Tafsir Jalalain, Jalaluddin al-Mahalli dan Jalaluddin as-Suyuthi secara jelas mengatakan bahwa tidak ada satupun mahluk ciptaan Allah SWT yang diciptakan tidak seimbang. Bahkan Abil Fida' Ismail bin Katsir dalam Tafsir Ibnu Katsir mengatakan bahwa pada dasarnya manusia, bumi, hewan, tumbuh-tumbuhan dan seluruh makhluk ciptaan Allah SWT layaknya sahabat yang tidak pernah berselisih karena merasa saling membutuhkan. Namun sayang persahabatan ini telah dirusak oleh manusia itu sendiri. Oleh karena itu jika interaksi antara predator dan prey tidak dirusak oleh ulah manusia maka keseimbangan jumlah populasi antara predator dan prey akan stabil. Karena sudah sifat alamiah dari predator bertugas untuk mengontrol populasi prey.

Maka sudah menjadi tugas kita untuk menjaga kelestarian lingkungan hidup, yaitu dengan tetap menjaga keseimbangannya. Karena segala tindakan yang merusak keseimbangan dan kelestarian bumi dan alam pada dasarnya merupakan pelanggaran agama dan berdosa. Dalam surat al-A'raf: 56, Allah SWT berfirman:.

وَلا تُفْسِدُوا فِي الأَرْضِ بَعْدَ إِصْلاحِهَا وَادْعُوهُ خَوْفًا وَطَمَعًا إِنَّ رَحْمَةَ اللَّهِ قَرِيبٌ مِنَ الْمُحْسِنِينَ

Artinya : *"Janganlah membuat kerusakan di muka bumi (dunia) sesudah direformasi, berdo'alah kepada-Nya dengan rasa takut dan rindu; rahmat Allah selalu dekat kepada orang yang berbuat baik."*

Ungkapan "janganlah berbuat kerusakan di muka bumi sesudah direformasi"(wa lâ tufsidû fii al-ardl ba'da ishlâhihâ) dalam surat al-A'raf ayat 56 di atas mengandung makna ganda. Pertama, larangan merusak bumi setelah perbaikan (ishlah), yaitu saat bumi ini diciptakan Allah SWT. Makna ini menunjukkan tugas manusia untuk melindungi bumi yang sudah merupakan tempat yang baik bagi hidup manusia. Jadi, larangan merusak bumi berkaitan dengan usaha pelestarian lingkungan hidup yang sehat dan alami. Kedua, larangan membuat kerusakan di bumi setelah terjadi perbaikan oleh sesama manusia. Hal ini bersangkutan dengan tugas reformasi aktif manusia untuk berusaha menciptakan sesuatu yang baru, yang baik (shalih) dan membawa kebaikan (mashlahah) untuk manusia.

Apabila manusia menyadari betapa pentingnya bumi bagi mereka, maka manusia dan bumi bisa bersanding secara harmonis. Apalagi manusia terbuat dari tanah, dan tanah itu sendiri berasal dari bumi, sehingga antara manusia dan bumi memiliki ketergantungan satu sama lain. Allah SWT berfirman: Q.S. Al-Ra'du:4

وَفِي الأَرْضِ قِطَعٌ مُتَجَاوِرَاتٌ وَجَنَّاتٌ مِنْ أَعْنَابٍ وَزَرْعٌ وَنَخِيلٌ

صِنْوَانٌ وَغَيْرُ صِنْوَانٍ يُسْقَى بِمَاءٍ وَاحِدٍ وَنُفَضِّلُ بَعْضَهَا عَلَى بَعْضٍ

فِي الأُكُلِ إِنَّ فِي ذَلِكَ لآيَاتٍ لِقَوْمٍ يَعْقِلُونَ

Artinya : *"Dan di bumi ini terdapat bagian-bagian yang berdampingan, dan kebun-kebun anggur, tanaman-tanaman dan pohon korma yang bercabang dan yang tidak bercabang, disirami dengan air yang sama. Kami melebihkan sebahagian tanam-tanaman itu atas sebahagian yang lain tentang rasanya. Sesungguhnya pada yang demikian itu terdapat tanda-tanda (kebesaran Allah) bagi kaum yang berfikir."*

Manusia, bumi, dan makhluk ciptaan lainnya di alam semesta adalah sebuah ekosistem yang kesinambungannya amat bergantung pada moralitas manusia sebagai khalifah di bumi, sebagaimana Al-Qur'an jelaskan dalam surat Al-Baqarah:30

وَإِذْ قَالَ رَبُّكَ لِلْمَلائِكَةِ إِنِّي جَاعِلٌ فِي الأَرْضِ خَلِيفَةً قَالُوا أَتَجْعَلُ فِيهَا

مَنْ يُفْسِدُ فِيهَا وَيَسْفِكُ الدِّمَاءَ وَنَحْنُ نُسَبِّحُ بِحَمْدِكَ وَنُقَدِّسُ لَكَ قَالَ إِنِّي

أَعْلَمُ مَا لا تَعْلَمُونَ,

Artinya :"*Ingatlah ketika Tuhanmu berfirman kepada para Malaikat: "Sesungguhnya Aku hendak menjadikan seorang khalifah di muka bumi." Mereka berkata: "Mengapa Engkau hendak menjadikan (khalifah) di bumi itu orang yang akan membuat kerusakan padanya dan menumpahkan darah, padahal kami senantiasa bertasbih dengan memuji Engkau dan mensucikan Engkau?" Tuhan berfirman: "Sesungguhnya Aku mengetahui apa yang tidak kamu ketahui."*

Dalam konteks ini, melindungi dan merawat bumi, menurut Fakhruddin al-Razi dalam tafsir Mafatih al-Ghaib, merupakan suatu kewajiban setiap muslim dan menjadi tujuan universal syariat Islam. Semua itu menunjukkan betapa Allah SWT menciptakan segala sesuatu dalam keseimbangan dan keserasian. Semuanya serba terkait. Jika terjadi gangguan yang luar biasa terhadap salah satunya, maka akan terganggu pula makhluk lainnya. Karenanya, keseimbangan dan keserasian tersebut harus dipelihara, agar tidak terjadi kerusakan.

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Analisis Pembentukan Model Predator Prey dengan Perlambatan

Berikut adalah model populasi predator-prey dengan perlambatan yang diperkenalkan olah May pada tahun 1974:

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= rx(t)\left(1-\frac{x(t-\tau)}{K}\right)-\alpha x(t)y(t)\\ \frac{dy(t)}{dt} &= -cy(t)+\beta x(t)y(t)\end{aligned} \tag{3.1}$$

dimana r, K, τ, α, c dan β adalah konstanta positif. Parameter model (3.1) yaitu :

K= daya kapasitas

r = laju pertumbuhan intrinsik prey

c = laju kematian jika predator tanpa prey

α = laju perpindahan dari prey ke predator

β = laju perpindahan dari predator ke prey

τ = waktu perlambatan

Dimulai dengan menganalisis pembentukan model predator. Pertama, dengan memperhatikan apa yang terjadi pada populasi predator ketika tidak adanya prey, tanpa sumber makanan, bilangannya diharapkan berkurang secara eksponensial, dideskripikan oleh persamaan di bawah ini :

$$\frac{dy}{dt} = -cy$$

Persamaan ini menggunakan hasil kali dari bilangan predator (y) dan kelajuan kematian predator (c). Tanda negatif pada bagian kanan persamaan untuk mendeskripsikan penurunan kelajuan dari populasi predator terhadap pengaruh waktu. Dengan adanya prey (sebagai konsumsi predator) pengurangan ini dilawan oleh laju kelahiran predator, yang ditentukan oleh laju konsumsi (βxy). Dimana laju penyerangan (β) dikalikan dengan bilangan y dan bilangan x. Bilangan predator dan prey naik ketika pertemuan predator dan prey lebih sering, tetapi laju aktual dari konsumsi akan tergantung pada laju penyerangan (β). Persamaan populasi predator menjadi

$$\frac{dy}{dt} = -cy + \beta xy$$

Perkalian βy adalah tanggapan predator secara numerik atau peningkatan perkapita dari fungsi prey yang melimpah. Dan untuk perkalian βxy menunjukkan bahwa kenaikan populasi predator sebanding dengan perkalian dan prey yang melimpah.

Selanjutnya dianalisis populasi prey. Diharapkan tanpa serangan predator, bilangan prey akan naik secara eksponensial. Persamaan di bawah ini mendeskripsikan laju kenaikan populasi prey dengan pengaruh waktu, dimana r adalah laju pertumbuhan intrinsik prey dan x adalah jumlah dari populasi prey.

$$\frac{dx}{dt} = rx$$

Di hadapan predator, bagaimanapun juga populasi prey mencegah agar tidak terjadi peningkatan eksponensial secara terus-menerus. Karena model predator-prey memiliki waktu yang kontinu dan mengisyaratkan tentang model pertumbuhan populasi maka termasuk dalam model logistik. Jadi persamaan di atas menjadi:

$$\frac{dx}{dt} = rx(1 - \frac{x}{K})$$

Dengan adanya predator, kenaikan ini dilawan oleh laju kematian prey karena adanya penyerangan dari predator, yang ditentukan oleh laju konsumsi (αxy). Dimana laju penyerangan (α) dikalikan dengan bilangan y dan bilangan x. Bilangan predator dan prey turun ketika pertemuan predator dan prey lebih sering, tetapi laju aktual dari konsumsi akan tergantung pada laju penyerangan (α). Persamaan populasi prey menjadi:

$$\frac{dx}{dt} = rx(1 - \frac{x}{K}) - \alpha xy$$

Karena dalam kondisi tertentu pada populasi prey tedapat keterlambatan (waktu τ)pada laju kelahiran maka persamaan populasi menjadi :

$$\frac{dx}{dt} = rx(1 - \frac{(x-\tau)}{K}) - \alpha xy$$

Jadi sistem persamaan diferensial model predator prey dengan perlambatan adalah :

$$\frac{dx(t)}{dt} = rx(t)\left(1 - \frac{x(t-\tau)}{K}\right) - \alpha x(t)y(t)$$
$$\frac{dy(t)}{dt} = -cy(t) + \beta x(t)y(t)$$

3.2 Analisis Model Predator Prey dengan Perlambatan

Berikut ini adalah pembahasan tentang analisis model predator-prey dengan mempertimbangkan waktu perlambatan, May (1974) telah menunjukkan model sistem persamaan diferensial di bawah ini :

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= rx(t)\left(1 - \frac{x(t-\tau)}{K}\right) - \alpha x(t)y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} &= -cy(t) + \beta x(t)y(t) \end{aligned} \qquad (3.2)$$

Dimana r, K, τ, α, c dan β adalah konstanta positif. Model (3.2) memuat sebuah single diskrit perlambatan.

Jika masa perlambatan dari prey adalah τ, maka fungsi laju pertumbuhan perkapita akan membawa sebuah waktu perlambatan τ. Di dalam skripsi ini akan dianalisis pengaruh waktu perlambatan terhadap kestabilan titik ekuilibrium dari sistem.

Titik equilibrium model (3.2) ada 2 yaitu :

1. Titik (0,0)
2. Titik kedua yang memenuhi $\frac{dy}{dt} = 0$ dan $\frac{dx}{dt} = 0$ yaitu :

$$\frac{dy}{dt} = 0$$
$$-cy + \beta xy = 0$$
$$x = \frac{cy}{\beta y} \qquad \text{dan}$$
$$x = \frac{c}{\beta}$$

$$\frac{dx}{dt} = 0$$
$$rx - rx^2 - \alpha xy = 0$$
$$y = \frac{rx^2 - rx}{\alpha x}$$
$$y = \frac{rx - r}{\alpha}$$
$$y = \frac{\frac{rc}{\beta K} - r}{\alpha}$$
$$y = \frac{r(K\beta - c)}{\alpha \beta K}$$

Jadi titik ekuilibrium yang kedua yaitu $\left(\frac{c}{\beta}, \frac{r(K\beta - c)}{\alpha\beta K}\right)$.

Dalam skripsi ini akan difokuskan pada analisis kestabilan dari titik equilibrium E^*, karena titik equilibrium tersebut berada di kuadran positif dan asimtot stabil ketika tidak ada waktu perlambatan. Untuk memahami kestabilan lokal dari titik equilibrium E^* pada model (3.2), akan dianalisis model sistem persamaan diferensial nonlinear setelah model tersebut dilinearisasi. Misalkan $u(t) = x(t) - x^*$ dan $v(t) = y(t) - y^*$. Maka setelah disubtitusi ke dalam model (3.2) didapatkan :

$$\dot{u}(t) = r\left(u(t) + x^*\right)\left(1 - \frac{u(t-\tau) + x^*}{K}\right) - \alpha\left(u(t) + x^*\right)\left(v(t) + y^*\right)$$
$$\dot{v}(t) = -c\left(v(t) + y^*\right) + \beta\left(u(t) + x^*\right)\left(v(t) + y^*\right)$$

atau

$$\dot{u}(t) = ru(t) + rx^* - \frac{r}{K}u(t)u(t-\tau) - \frac{r}{K}x^*u(t-\tau) - \frac{r}{K}x^*u(t) - \frac{r}{K}(x^*)^2$$
$$-\alpha u(t)v(t) - \alpha x^*v(t) - \alpha y^*u(t) - \alpha x^*y^*$$
$$\dot{v}(t) = -cv(t) - cy^* + \beta u(t)v(t) + \beta y^*u(t) + \beta x^*v(t) + \beta x^*y^*$$

Setelah menyederhanakan dan mengabaikan hubungan hasil kali, didapat sebuah model linear :

$$\dot{u}(t) = -\frac{r}{K}x^*u(t-\tau) - \alpha x^*v(t)$$
$$\dot{v}(t) = \beta y^*u(t).$$

Menganalisis kestabilan lokal dari titik ekulibrium titik E^* pada model (3.2) ekuivalen dengan menganalisis kestabilan dari titik ekulibrium nol pada model linear. Dari model yang telah dilinearisasi didapatkan matrik Jacobian sebagai berikut :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{pmatrix}$$

Misalkan $f_1 = \dot{u}(t)$ dan $f_1 = \dot{v}(t)$ maka didapatkan matriks Jacobian sebagai berikut :

$$J = \begin{pmatrix} -\frac{r}{K}x^*e^{-\lambda\tau} & -\alpha x^* \\ \beta y^* & 0 \end{pmatrix}$$

Polinom karakteristik dari J adalah :

$$\det(\lambda I - J) = \det\left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{r}{K}x^* e^{-\lambda\tau} & -\alpha x^* \\ \beta y^* & 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \det\begin{pmatrix} \lambda + \frac{r}{K}x^* e^{-\lambda\tau} & \alpha x^* \\ -\beta y^* & \lambda \end{pmatrix}$$

$$= \lambda^2 + \lambda\frac{r}{K}x^* e^{-\lambda\tau} + \alpha\beta x^* y^*$$

Jadi persamaan karakteristik dari J adalah sebagai berikut :

$$\lambda^2 + \lambda P e^{-\lambda\tau} + Q = 0 \qquad (3.3)$$

dimana

$P = \frac{r}{K}x^*$ dan

$Q = \alpha\beta x^* y^*$.

Untuk $\tau = 0$ persamaan karakteristik (3.3) menjadi :

$$\lambda^2 + \lambda P + Q = 0 \qquad (3.4)$$

yang memiliki akar-akar

$$\lambda_{1,2} = \frac{-P \pm \sqrt{P^2 - 4Q}}{2}. \qquad (3.5)$$

Karena P dan Q keduanya adalah bilangan positif , nilai eigen dari persamaan karakteristik (3.4) memiliki bagian riil negatif.

Sedangkan untuk $\tau \neq 0$, jika $\lambda = i\omega, \omega > 0$, adalah sebuah akar dari persamaan karakteristik (3.4) maka didapatkan :

$$-\omega^2 + iP\omega e^{-i\omega\tau} + Q = 0,$$

$$-\omega^2 + iP\omega\cos(\omega\tau) + P\omega\sin(\omega\tau) + Q = 0.$$

Dengan memisahkan bagian riil dan imajinernya, didapatkan :

$$-\omega^2 + P\omega\sin(\omega\tau) + Q = 0, \tag{3.6}$$

$$P\omega\cos(\omega\tau) = 0.$$

Kedua persamaan diatas dikuadratkan menjadi:

$$P^2\omega^2\sin^2(\omega\tau) = \omega^4 - 2Q\omega^2 + Q^2$$

$$P^2\omega^2\cos^2(\omega\tau) = 0.$$

Kedua persamaan diatas dijumlahkan , menjadi

$$P^2\omega^2\sin^2(\omega\tau) + P^2\omega^2\cos^2(\omega\tau) = \omega^4 - 2Q\omega^2 + Q^2$$

$$P^2\omega^2 = \omega^4 - 2Q\omega^2 + Q^2$$

Kemudian dikelompokkan didapatkan polinomial pangkat empat:

$$\omega^4 - (P^2 + 2Q)\omega^2 + Q^2 = 0, \tag{3.7}$$

Akar-akar dari persamaan diatas yaitu:

$$\omega_\pm^2 = \frac{1}{2}\left\{(P^2 + 2Q) \pm \sqrt{(P^2 + 2Q)^2 - 4Q^2}\right\}$$

atau

$$\omega_\pm^2 = \frac{1}{2}\left\{(P^2 + 2Q) \pm \sqrt{P^4 + 4P^2Q}\right\} \tag{3.8}$$

Dari persamaan (3.7) dapat diketahui bahwa ada solusi positif pada $\omega_\pm^2$. Selanjutnya dapat ditemukan nilai $\tau_k^\pm$ dari subtitusi $\omega_\pm^2$ ke dalam persamaan (3.6) dan penyelesaian untuk τ , yaitu :

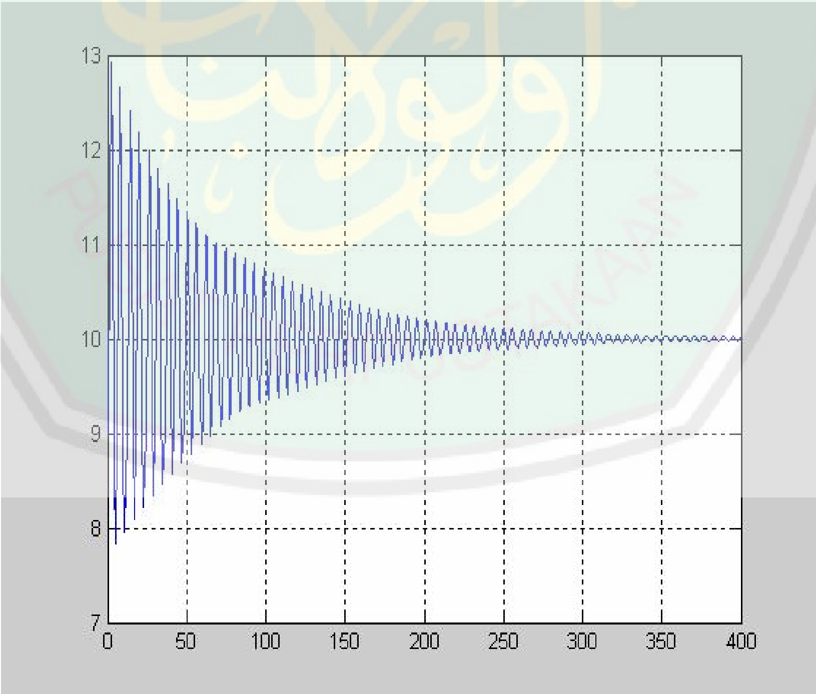
$$\cos\omega\tau = 0$$

$$\omega\tau = \cos^{-1} 0$$
$$\omega\tau^{+} = 90 + 2k\pi$$
$$\omega\tau^{-} = 270 + 2k\pi$$

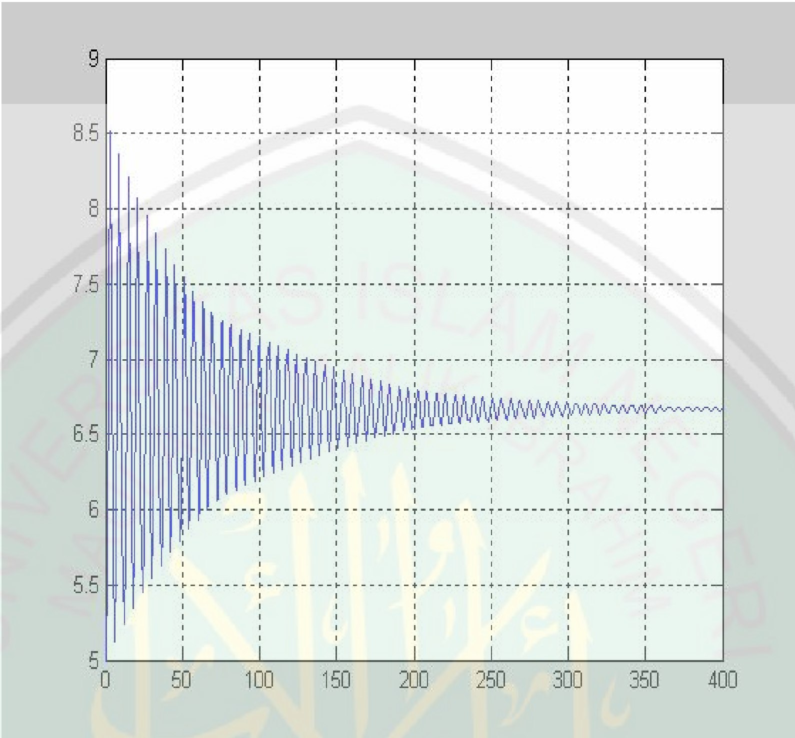
Didapatkan

$$\tau_k^{+} = \frac{\pi/2}{\omega_+} + \frac{2k\pi}{\omega_+},\ \tau_k^{-} = \frac{3\pi/2}{\omega_-} + \frac{2k\pi}{\omega_-},\quad k=0,1,2,\ldots \tag{3.9}$$

Sebagai contoh model (3.2) dimasukkan parameter r =1, K = 200, $\alpha =$ 0.15 , c=1 dan β=0.1. Maka didapatkan beberapa grafik sebagai berikut:



Gambar 3.1 Grafik Persamaan Diferensial Dari Prey (x(t)) dengan x(0)=9 dan $\tau = 0.5$



Gambar 3.2 Grafik Persamaan Diferensial dari Predator (y(t)) dengan y(0)=9 dan $\tau = 0.5$

Dan berikut ini adalah jumlah populasi predator dan dan prey pada saat nilai perlambatan $\tau = 0.5$:

Hari ke	Prey (x(t))	Predator(y(t))
1	9,00000	5,00000
2	11,16000	5,58000
3	12,91882	7,20870
4	11,81165	8,51466
5	8,57016	7,29720
6	7,82904	5,71301
7	8,96348	5,12085
8	11,01645	5,64135
9	12,65420	7,13868
10	11,70644	8,35686
11	8,76626	7,32584
12	7,96392	5,83424

13	8,97430	5,23583
14	10,87775	5,69540
15	12,41077	7,06843
16	11,61527	8,21018
17	8,94913	7,34739
18	8,09499	5,94771
19	8,98527	5,34418
20	10,74771	5,74377
21	12,18821	7,00063
22	11,53376	8,07436
23	9,11724	7,36158
24	8,22196	6,05267
25	8,99761	5,44595
26	10,62769	5,78779
27	11,98545	6,93692
28	11,45890	7,94895
29	9,26995	7,36864
30	8,34460	6,14883
31	9,01207	5,54137
32	10,51822	5,82854
33	11,80096	6,87823
34	11,38862	7,83335
35	9,40731	7,36908
36	8,46273	6,23626
37	9,02908	5,63077
38	10,41928	5,86686
39	11,63309	6,82497
40	11,32156	7,72693
41	9,52981	7,36361
42	8,57623	6,31521
43	9,04881	5,71451
44	10,33050	5,90338
45	11,48018	6,77718
46	11,25688	7,62899
47	9,63825	7,35301
48	8,68498	6,38608
49	9,07122	5,79295
50	10,25131	5,93853
51	11,34072	6,73472
52	11,19406	7,53889
53	9,73361	7,33806
54	8,78889	6,44934
55	9,09616	5,86642
56	10,18105	5,97263
57	11,21334	6,69731
58	11,13286	7,45602
59	9,81693	7,31953
60	8,88787	6,50550

61	9,12338	5,93521
62	10,11901	6,00585
63	11,09685	6,66460
64	11,07317	7,37982
65	9,88929	7,29812
66	8,98187	6,55507
67	9,15259	5,99959
68	10,06450	6,03829
69	10,99020	6,63620
70	11,01499	7,30977
71	9,95174	7,27449
72	9,07085	6,59859
73	9,18346	6,05979
74	10,01687	6,07001
75	10,89250	6,61175
76	10,95837	7,24541
77	10,00526	7,24922
78	9,15481	6,63653
79	9,21567	6,11600
80	9,97548	6,10100
81	10,80294	6,59088
82	10,90340	7,18630
83	10,05080	7,22281
84	9,23377	6,66938
85	9,24888	6,16843
86	9,93976	6,13127
87	10,72085	6,57324
88	10,85016	7,13207
89	10,08920	7,19568
90	9,30779	6,69759
91	9,28280	6,21723
92	9,90917	6,16077
93	10,64561	6,55851
94	10,79872	7,08235
95	10,12125	7,16823
96	9,37693	6,72160
97	9,31712	6,26259
98	9,88323	6,18946
99	10,57669	6,54641
100	10,74915	7,03683
101	10,14767	7,14075
102	9,44131	6,74180
103	9,35158	6,30465
104	9,86149	6,21732
105	10,51360	6,53665
106	10,70151	6,99520
107	10,16912	7,11350
108	9,50107	6,75858

109	9,38594	6,34357
110	9,84353	6,24431
111	10,45589	6,52898
112	10,65582	6,95717
113	10,18616	7,08669
114	9,55636	6,77230
115	9,42000	6,37950
116	9,82897	6,27039
117	10,40317	6,52319
118	10,61212	6,92249
119	10,19935	7,06049
120	9,60736	6,78327
121	9,45355	6,41259
122	9,81746	6,29554
123	10,35506	6,51907
124	10,57040	6,89092
125	10,20915	7,03504
126	9,65425	6,79180
127	9,48643	6,44300
128	9,80868	6,31973
129	10,31123	6,51642
130	10,53066	6,86222
131	10,21599	7,01043
132	9,69724	6,79818
133	9,51851	6,47086
134	9,80234	6,34295
135	10,27135	6,51507
136	10,49287	6,83618
137	10,22026	6,98675
138	9,73652	6,80267
139	9,54967	6,49632
140	9,79814	6,36519
141	10,23515	6,51486
142	10,45703	6,81261
143	10,22231	6,96406
144	9,77230	6,80549
145	9,57981	6,51953
146	9,79585	6,38643
147	10,20233	6,51565
148	10,42307	6,79131
149	10,22244	6,94238
150	9,80480	6,80687
151	9,60884	6,54061
152	9,79524	6,40669
153	10,17266	6,51730
154	10,39098	6,77211
155	10,22095	6,92174
156	9,83423	6,80700

157	9,63673	6,55972
158	9,79608	6,42595
159	10,14589	6,51970
160	10,36068	6,75485
161	10,21807	6,90216
162	9,86078	6,80606
163	9,66340	6,57697
164	9,79819	6,44424
165	10,12179	6,52272
166	10,33215	6,73937
167	10,21403	6,88362
168	9,88466	6,80422
169	9,68885	6,59250
170	9,80137	6,46156
171	10,10017	6,52628
172	10,30531	6,72554
173	10,20902	6,86611
174	9,90605	6,80161
175	9,71304	6,60643
176	9,80549	6,47793
177	10,08082	6,53028
178	10,28011	6,71320
179	10,20323	6,84963
180	9,92516	6,79837
181	9,73598	6,61888
182	9,81037	6,49337
183	10,06356	6,53464
184	10,25649	6,70225
185	10,19680	6,83415
186	9,94216	6,79462
187	9,75767	6,62996
188	9,81589	6,50790
189	10,04823	6,53929
190	10,23438	6,69256
191	10,18987	6,81963
192	9,95720	6,79045
193	9,77812	6,63978
194	9,82193	6,52155
195	10,03466	6,54415
196	10,21373	6,68402
197	10,18257	6,80605
198	9,97047	6,78595
199	9,79735	6,64844
200	9,82838	6,53434
201	10,02270	6,54917
202	10,19447	6,67654
203	10,17500	6,79338
204	9,98210	6,78122

205	9,81540	6,65603
206	9,83514	6,54630
207	10,01222	6,55430
208	10,17654	6,67001
209	10,16725	6,78157
210	9,99225	6,77631
211	9,83228	6,66266
212	9,84212	6,55747
213	10,00309	6,55949
214	10,15987	6,66436
215	10,15940	6,77059
216	10,00104	6,77130
217	9,84804	6,66840
218	9,84925	6,56787
219	9,99518	6,56470
220	10,14440	6,65950
221	10,15152	6,76041
222	10,00860	6,76622
223	9,86272	6,67333
224	9,85645	6,57754
225	9,98838	6,56989
226	10,13007	6,65535
227	10,14368	6,75097
228	10,01505	6,76114
229	9,87635	6,67754
230	9,86367	6,58651
231	9,98259	6,57504
232	10,11683	6,65185
233	10,13592	6,74226
234	10,02050	6,75608
235	9,88900	6,68109
236	9,87086	6,59481
237	9,97770	6,58010
238	10,10460	6,64893
239	10,12828	6,73422
240	10,02505	6,75109
241	9,90069	6,68404
242	9,87796	6,60247
243	9,97364	6,58507
244	10,09333	6,64653
245	10,12080	6,72682
246	10,02879	6,74619
247	9,91148	6,68647
248	9,88495	6,60954
249	9,97031	6,58991
250	10,08297	6,64459
251	10,11352	6,72002
252	10,03181	6,74139

253	9,92141	6,68841
254	9,89178	6,61603
255	9,96765	6,59463
256	10,07347	6,64307
257	10,10645	6,71379
258	10,03418	6,73674
259	9,93053	6,68994
260	9,89844	6,62199
261	9,96557	6,59919
262	10,06476	6,64193
263	10,09961	6,70809
264	10,03598	6,73223
265	9,93889	6,69108
266	9,90490	6,62745
267	9,96401	6,60359
268	10,05680	6,64110
269	10,09303	6,70289
270	10,03728	6,72788
271	9,94652	6,69190
272	9,91114	6,63243
273	9,96291	6,60783
274	10,04955	6,64057
275	10,08671	6,69815
276	10,03814	6,72369
277	9,95349	6,69242
278	9,91714	6,63697
279	9,96222	6,61190
280	10,04294	6,64029
281	10,08065	6,69385
282	10,03860	6,71969
283	9,95982	6,69269
284	9,92291	6,64109
285	9,96189	6,61578
286	10,03695	6,64023
287	10,07487	6,68995
288	10,03874	6,71586
289	9,96557	6,69274
290	9,92842	6,64483
291	9,96186	6,61949
292	10,03153	6,64036
293	10,06937	6,68642
294	10,03858	6,71221
295	9,97076	6,69259
296	9,93368	6,64821
297	9,96211	6,62302
298	10,02663	6,64065
299	10,06414	6,68324
300	10,03817	6,70875

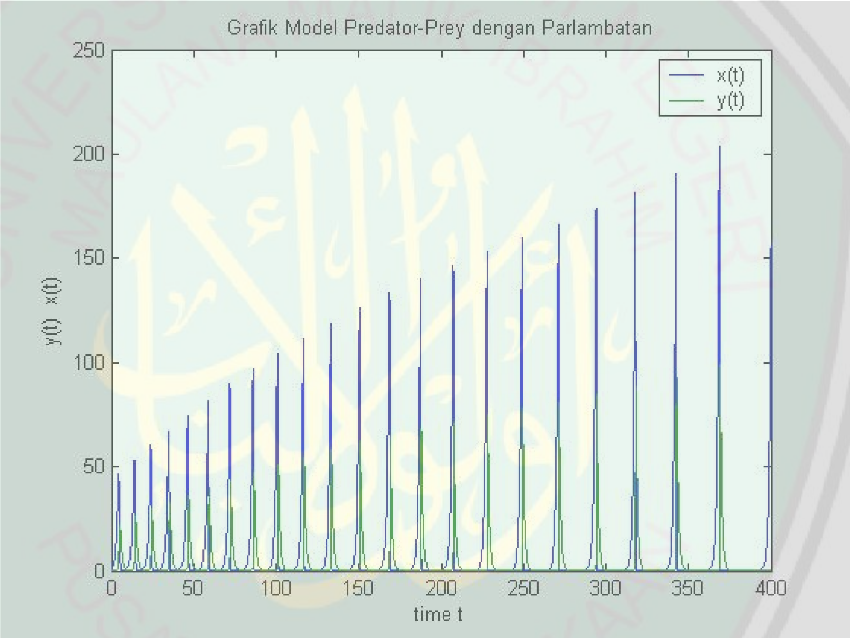
301	9,97545	6,69228
302	9,93868	6,65125
303	9,96258	6,62636
304	10,02222	6,64108
305	10,05918	6,68039
306	10,03755	6,70547
307	9,97967	6,69184
308	9,94343	6,65398
309	9,96325	6,62953
310	10,01826	6,64163
311	10,05450	6,67783
312	10,03675	6,70237
313	9,98344	6,69127
314	9,94792	6,65643
315	9,96408	6,63252
316	10,01472	6,64228
317	10,05008	6,67555
318	10,03581	6,69945
319	9,98681	6,69061
320	9,95216	6,65861
321	9,96505	6,63534
322	10,01156	6,64301
323	10,04592	6,67352
324	10,03474	6,69670
325	9,98981	6,68988
326	9,95616	6,66055
327	9,96613	6,63799
328	10,00876	6,64380
329	10,04202	6,67172
330	10,03358	6,69412
331	9,99247	6,68908
332	9,95991	6,66226
333	9,96730	6,64048
334	10,00627	6,64464
335	1,00384	6,67013
336	10,03234	6,69170
337	9,99482	6,68823
338	9,96342	6,66377
339	9,96854	6,64280
340	10,00409	6,64552
341	10,03493	6,66874
342	10,03104	6,68944
343	9,99688	6,68735
344	9,96672	6,66509
345	9,96982	6,64498
346	10,00218	6,64643
347	10,03174	6,66752
348	10,02971	6,68733

349	9,99867	6,68644
350	9,96979	6,66624
351	9,97114	6,64700
352	10,00051	6,64735
353	10,02876	6,66647
354	10,02836	6,68537
355	10,00023	6,68552
356	9,97265	6,66724
357	9,97248	6,64889
358	9,99908	6,64828
359	10,02599	6,66556
360	10,02699	6,68355
361	10,00157	6,68460
362	9,97531	6,66809
363	9,97383	6,65064
364	9,99784	6,64921
365	10,02343	6,66478
366	10,02562	6,68186
367	10,00272	6,68367
368	9,97777	6,66882
369	9,97517	6,65226
370	9,99679	6,65013
371	10,02105	6,66413
372	10,02426	6,68029
373	10,00369	6,68276
374	9,98006	6,66943
375	9,97651	6,65376
376	9,99590	6,65104
377	10,01885	6,66358
378	10,02292	6,67885
379	10,00450	6,68186
380	9,98217	6,66994
381	9,97782	6,65515
382	9,99517	6,65193
383	10,01682	6,66313
384	10,02160	6,67752
385	10,00517	6,68097
386	9,98411	6,67036
387	9,97911	6,65642
388	9,99457	6,65281
389	10,01496	6,66276
390	10,02032	6,67630
391	10,00571	6,68011
392	9,98590	6,67069
393	9,98037	6,65759
394	9,99409	6,65366
395	10,01325	6,66247
396	10,01906	6,67518

397	10,00613	6,67927
398	9,98754	6,67095
399	9,98159	6,65867
400	9,99372	6,65449

Tabel 3.1 Jumlah Populasi Predator dan Prey

Dari grafik (3.1) dan (3.2) di atas dapat diamati bahwa dengan nilai perlambatan $\tau = 0.5$ titik ekuilibrium (10;6.33) sistem persamaan diferensial model predator-prey stabil.



Gambar 3.3 Grafik Jumlah Populasi Predator dan Prey dengan $\tau = 2.7$

Dari grafik (3.3) dapat diamati bahwa dengan nilai perlambatan $\tau = 2.7$ titik ekuilibrium (10;6.33) sistem persamaan diferensial model predator-prey tidak stabil.

Dari persamaan (3.9) yang telah diubah ke dalam bentuk radian didapatkan nilai-nilai perlambatan sebagai berikut :

$\tau_0^+ = 1.57080$ $\tau_0^- = 5.23599$

$\tau_1^+ = 7.85398$ $\tau_1^- = 12.21730$

$\tau_2^+ = 14.13717$ $\tau_2^- = 19.19862$

$\tau_3^+ = 20.42035$ $\tau_3^- = 26.17994$

$\tau_4^+ = 26.70354$ $\tau_4^- = 33.16126$

$\tau_5^+ = 32.98672$ $\tau_5^- = 40.14257$

Berdasarkan teorema 3 dengan nilai perlambatan

$$\tau \in (0,1.57080) \cup (5.23599,7.85398) \cup (12.21730,1413717) \cup$$

$$(19.19862,20.42035) \cup (26.17994,26.70354) \cup (33.16126,32.98672)$$

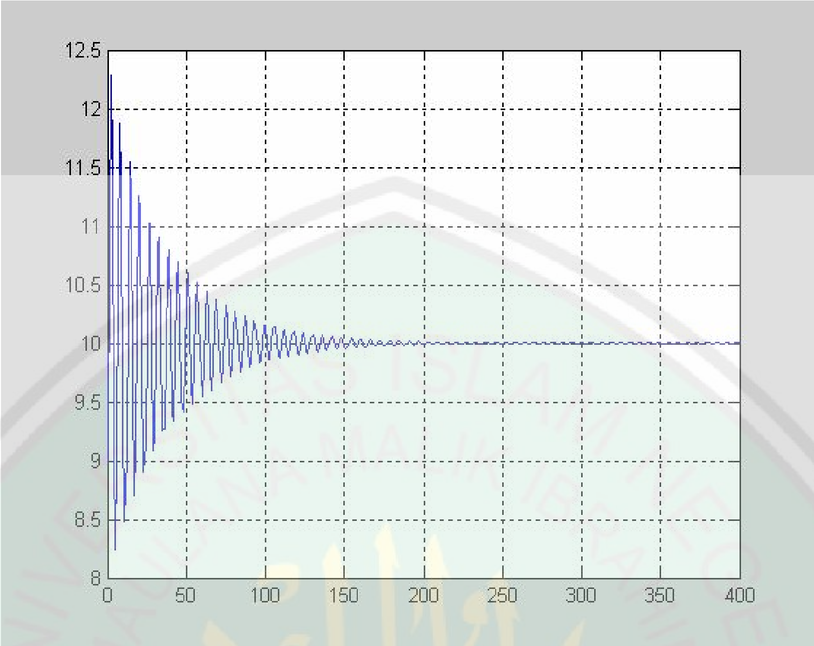
titik ekuilibrium (10;6.33) pada sistem persamaan diferensial model predator-prey stabil. Sedangkan dengan nilai perlambatan

$$\tau \in (1.57080,5.23599) \cup (7.85398,12.21730) \cup (14.13717,19.19882) \cup$$

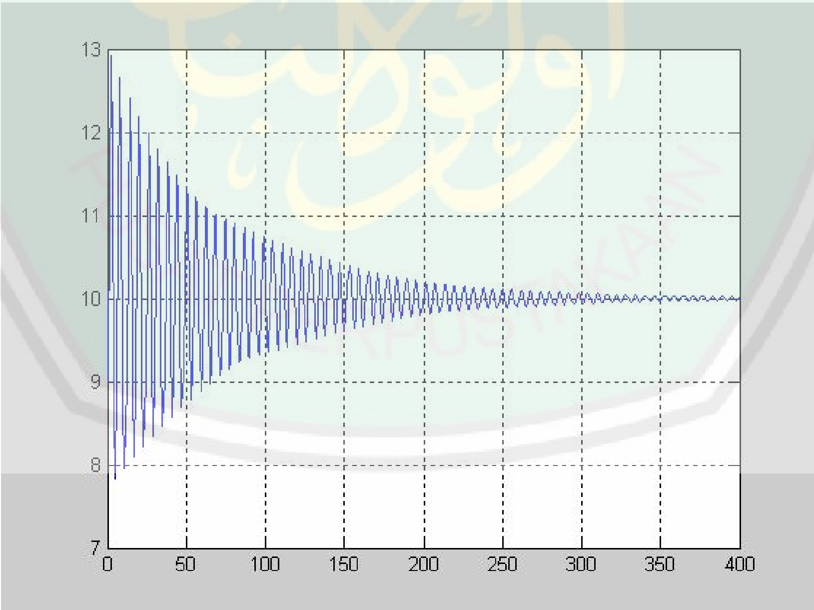
$$(20.42035 \cup 26.17994) \cup (26.70354,3316126) \cup (32.98672,40.14257)$$

titik ekuilibrium (10;6.33) pada sistem persamaan diferensial model predator-prey tidak stabil.

Untuk mengetahui pengaruh waktu perlambatan terhadap titik ekuilibrium sistem, dapat diamati dengan membandingkan grafik antara model dengan waktu perlambatan dan model tanpa waktu perlambatan.



Gambar 3.4 Grafik Persamaan Diferensial dari Prey (x(t))
Tanpa Waktu Perlambatan



Gambar 3.5 Grafik Persamaan Diferensial dari Prey (x(t))
dengan Waktu Perlambatan $\tau = 0.5$

Adapun nilai numerik solusi persamaan diferensial dengan waktu perlambatan dan tanpa waktu perlambatan, sebagai berikut :

Hari ke	Dengan Waktu Perlambatan	Tanpa Waktu Perlambatan
1	9,00000	9,00
2	11,16000	10,85
3	12,91882	12,28
4	11,81165	11,54
5	8,57016	9,11
6	7,82904	8,24
7	8,96348	9,01
8	11,01645	10,59
9	12,65420	11,88
10	11,70644	11,41
11	8,76626	9,41
12	7,96392	8,48
13	8,97430	9,04
14	10,87775	10,38
15	12,41077	11,54
16	11,61527	11,27
17	8,94913	9,64
18	8,09499	8,70
19	8,98527	9,08
20	10,74771	10,22
21	12,18821	11,26
22	11,53376	11,14
23	9,11724	9,82
24	8,22196	8,91
25	8,99761	9,13
26	10,62769	10,09
27	11,98545	11,03
28	11,45890	11,02
29	9,26995	9,95
30	8,34460	9,09
31	9,01207	9,20
32	10,51822	10,00
33	11,80096	10,83
34	11,38862	10,91
35	9,40731	10,05
36	8,46273	9,25
37	9,02908	9,27
38	10,41928	9,93
39	11,63309	10,66
40	11,32156	10,80
41	9,52981	10,12
42	8,57623	9,40

43	9,04881	9,34
44	10,33050	9,87
45	11,48018	10,53
46	11,25688	10,70
47	9,63825	10,17
48	8,68498	9,52
49	9,07122	9,41
50	10,25131	9,84
51	11,34072	10,41
52	11,19406	10,60
53	9,73361	10,20
54	8,78889	9,63
55	9,09616	9,48
56	10,18105	9,82
57	11,21334	10,32
58	11,13286	10,52
59	9,81693	10,21
60	8,88787	9,71
61	9,12338	9,54
62	10,11901	9,81
63	11,09685	10,24
64	11,07317	10,45
65	9,88929	10,21
66	8,98187	9,79
67	9,15259	9,60
68	10,06450	9,80
69	10,99020	10,18
70	11,01499	10,38
71	9,95174	10,21
72	9,07085	9,85
73	9,18346	9,66
74	10,01687	9,81
75	10,89250	10,12
76	10,95837	10,32
77	10,00526	10,20
78	9,15481	9,89
79	9,21567	9,71
80	9,97548	9,81
81	10,80294	10,08
82	10,90340	10,27
83	10,05080	10,19
84	9,23377	9,93
85	9,24888	9,76
86	9,93976	9,82
87	10,72085	10,05
88	10,85016	10,22
89	10,08920	10,18
90	9,30779	9,96

91	9,28280	9,80
92	9,90917	9,84
93	10,64561	10,03
94	10,79872	10,19
95	10,12125	10,16
96	9,37693	9,99
97	9,31712	9,83
98	9,88323	9,85
99	10,57669	10,01
100	10,74915	10,15
101	10,14767	10,15
102	9,44131	10,00
103	9,35158	9,86
104	9,86149	9,86
105	10,51360	9,99
106	10,70151	10,12
107	10,16912	10,13
108	9,50107	10,01
109	9,38594	9,89
110	9,84353	9,88
111	10,45589	9,98
112	10,65582	10,10
113	10,18616	10,12
114	9,55636	10,02
115	9,42000	9,91
116	9,82897	9,89
117	10,40317	9,97
118	10,61212	10,08
119	10,19935	10,10
120	9,60736	10,03
121	9,45355	9,93
122	9,81746	9,90
123	10,35506	9,97
124	10,57040	10,06
125	10,20915	10,09
126	9,65425	10,03
127	9,48643	9,95
128	9,80868	9,92
129	10,31123	9,97
130	10,53066	10,05
131	10,21599	10,08
132	9,69724	10,03
133	9,51851	9,96
134	9,80234	9,93
135	10,27135	9,97
136	10,49287	10,03
137	10,22026	10,07
138	9,73652	10,03

139	9,54967	9,97
140	9,79814	9,94
141	10,23515	9,97
142	10,45703	10,02
143	10,22231	10,06
144	9,77230	10,03
145	9,57981	9,98
146	9,79585	9,95
147	10,20233	9,97
148	10,42307	10,02
149	10,22244	10,05
150	9,80480	10,03
151	9,60884	9,99
152	9,79524	9,96
153	10,17266	9,97
154	10,39098	10,01
155	10,22095	10,04
156	9,83423	10,03
157	9,63673	9,99
158	9,79608	9,96
159	10,14589	9,97
160	10,36068	10,01
161	10,21807	10,03
162	9,86078	10,03
163	9,66340	10,00
164	9,79819	9,97
165	10,12179	9,97
166	10,33215	10,00
167	10,21403	10,03
168	9,88466	10,03
169	9,68885	10,00
170	9,80137	9,97
171	10,10017	9,98
172	10,30531	10,00
173	10,20902	10,02
174	9,90605	10,02
175	9,71304	10,00
176	9,80549	9,98
177	10,08082	9,98
178	10,28011	10,00
179	10,20323	10,02
180	9,92516	10,02
181	9,73598	10,00
182	9,81037	9,98
183	10,06356	9,98
184	10,25649	10,00
185	10,19680	10,01
186	9,94216	10,02

187	9,75767	10,00
188	9,81589	9,99
189	10,04823	9,98
190	10,23438	10,00
191	10,18987	10,01
192	9,95720	10,02
193	9,77812	10,01
194	9,82193	9,99
195	10,03466	9,99
196	10,21373	9,99
197	10,18257	10,01
198	9,97047	10,01
199	9,79735	10,01
200	9,82838	9,99
201	10,02270	9,99
202	10,19447	9,99
203	10,17500	10,01
204	9,98210	10,01
205	9,81540	10,01
206	9,83514	9,99
207	10,01222	9,99
208	10,17654	9,99
209	10,16725	10,00
210	9,99225	10,01
211	9,83228	10,01
212	9,84212	10,00
213	10,00309	9,99
214	10,15987	9,99
215	10,15940	10,00
216	10,00104	10,01
217	9,84804	10,01
218	9,84925	10,00
219	9,99518	9,99
220	10,14440	9,99
221	10,15152	10,00
222	10,00860	10,01
223	9,86272	10,01
224	9,85645	10,00
225	9,98838	9,99
226	10,13007	9,99
227	10,14368	10,00
228	10,01505	10,01
229	9,87635	10,00
230	9,86367	10,00
231	9,98259	9,99
232	10,11683	10,00
233	10,13592	10,00
234	10,02050	10,01

235	9,88900	10,00
236	9,87086	10,00
237	9,97770	10,00
238	10,10460	10,00
239	10,12828	10,00
240	10,02505	10,00
241	9,90069	10,00
242	9,87796	10,00
243	9,97364	10,00
244	10,09333	10,00
245	10,12080	10,00
246	10,02879	10,00
247	9,91148	10,00
248	9,88495	10,00
249	9,97031	10,00
250	10,08297	10,00
251	10,11352	10,00
252	10,03181	10,00
253	9,92141	10,00
254	9,89178	10,00
255	9,96765	10,00
256	10,07347	10,00
257	10,10645	10,00
258	10,03418	10,00
259	9,93053	10,00
260	9,89844	10,00
261	9,96557	10,00
262	10,06476	10,00
263	10,09961	10,00
264	10,03598	10,00
265	9,93889	10,00
266	9,90490	10,00
267	9,96401	10,00
268	10,05680	10,00
269	10,09303	10,00
270	10,03728	10,00
271	9,94652	10,00
272	9,91114	10,00
273	9,96291	10,00
274	10,04955	10,00
275	10,08671	10,00
276	10,03814	10,00
277	9,95349	10,00
278	9,91714	10,00
279	9,96222	10,00
280	10,04294	10,00

Tabel 3.2 Solusi Numerik Jumlah Populasi
dengan Waktu Perlambatan dan Tanpa Waktu Perlambatan

Dari nilai numerik pada tabel di atas dapat diamati bahwa titik ekuilibrium (10;6.33) pada sistem persamaan diferensial model predator-prey tanpa waktu perlambatan stabil, terjadi pada hari ke-235. Sedangkan titik ekuilibrium (10;6.33) sistem persamaan diferensial dengan waktu perlambatan stabil, terjadi pada hari ke-251, lebih lambat jika dibandingkan dengan kestabilan titik ekuilibrium sistem persamaan diferensial tanpa waktu perlambatan.

3.3 Model Predator-Prey dengan Perlambatan dalam Perspektif Islam

Persamaan (3.2) dapat dijadikan sebagai alat untuk memproyeksikan populasi predator dan prey pada suatu waktu tertentu, dengan memperhatikan waktu perlambatan pada populasi prey. Dengan waktu perlambatan

$$\tau \in (0,1.57080) \cup (5.23599,7.85398) \cup (12.21730,1413717) \cup$$

$$(19.19862,20.42035) \cup (26.17994,26.70354) \cup (33.16126,32.98672)$$

titik ekuilibrium sistem persamaan diferensial model predator-prey stabil. Jika titik ekuilibrium stabil maka jumlah populasi antara predator dan prey seimbang yang menyebabkan keseimbangan alam. Sudah menjadi kewajiban manusia untuk memelihara keseimbangan tersebut. Di dalam kajian Islam, Allahpun juga sudah mengatur dengan indah keseimbangan tersebut. Yaitu dalam Qur’an Surat Al Mulk ayat tiga dan empat, yang berbunyi :

الَّذِي خَلَقَ سَبْعَ سَمَاوَاتٍ طِبَاقًا مَا تَرَى فِي خَلْقِ الرَّحْمَنِ مِنْ تَفَاوُتٍ فَارْجِعِ الْبَصَرَ هَلْ تَرَى مِنْ فُطُورٍ (٣)ثُمَّ ارْجِعِ الْبَصَرَ كَرَّتَيْنِ يَنْقَلِبْ إِلَيْكَ الْبَصَرُ خَاسِئًا وَهُوَ حَسِيرٌ (٤)

Artinya : ”*Yang telah menciptakan tujuh langit berlapis-lapis. Kamu sekali-kali tidak melihat pada ciptaan Tuhan Yang Maha Pemurah sesuatu yang tidak seimbang. Maka lihatlah berulang-ulang, adakah kamu lihat sesuatu yang tidak seimbang. Kemudian pandanglah sekali lagi niscaya penglihatanmu akan kembali kepadamu dengan tidak menemukan sesuatu cacat dan penglihatanmu itupun dalam keadaan payah.*

Maka jika interaksi antara predator dan prey tidak ada perusakan keseimbangan akibat ulah manusia maka jumlah populasi antara predator dan prey pasti akan stabil.

BAB IV
PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan penelitian yang telah penulis lakukan, maka penulis dapat menarik kesimpulan tentang analisis pembentukan model matematika yaitu :

1. Analisis Pembentukan Model Predator dengan Perlambatan
   a. Terjadi penurunan jumlah populasi predator karena tidak ada prey sebagai sumber makanan. Oleh karena itu persamaannya bertanda negatif.
   b. Terjadi kenaikan jumlah populasi predator karena adanya laju kelahiran predator yang ditentukan oleh laju konsumsi predator.
2. Analisis Pembentukan Model Prey
   a. Terjadi kenaikan jumlah populasi prey karena tidak adanya predator sebagai pemangsa. Oleh karena itu persamaannya bertanda positif.
   b. Model prey termasuk dalam model logistik.
   c. Terjadi penurunan jumlah populasi prey karena adanya laju kematian prey dengan adanya penyerangan dari predator.

Selanjutnya untuk mengetahui pengaruh waktu perlambatan terhadap kestabilan titik ekuilibrium pada sistem persamaan diferensial model predator-prey yaitu dengan menganalisis titik ekuilibrium $\left(\frac{c}{\beta}, \frac{r(K\beta - c)}{\alpha\beta K}\right)$. Karena titik equilibrium tersebut berada di kuadran positif dan asimtot stabil ketika tidak ada waktu perlambatan. Dari hasil analisis pada pembahasan didapatkan nilai perlambatan

$\tau \in (0,1.57080) \cup (5.23599,7.85398) \cup (12.21730,1413717) \cup$

$(19.19862,20.42035) \cup (26.17994,26.70354) \cup (33.16126,32.98672)$

titik ekuilibrium (10;6.33) pada sistem persamaan diferensial model predator-prey stabil. Sedangkan dengan nilai perlambatan

$\tau \in (1.57080,5.23599) \cup (7.85398,12.21730) \cup (14.13717,19.19882) \cup$

$(20.42035 \cup 26.17994) \cup (26.70354,3316126) \cup (32.98672,40.14257)$

titik ekuilibrium (10;6.33) pada sistem persamaan diferensial model predator-prey tidak stabil.

4.2 Saran

Untuk menindak lanjuti penelitian ini, diharapkan kepada pembaca untuk menganalisis model predator prey dengan adanya pengaruh waktu perlambatan pada kedua persamaan. Karena dalam skripsi ini, waktu perlambatan hanya terdapat pada persamaan prey (x(t)). Atau menerapkan analisis peneliti ke dalam sistem persamaan diferensial lain yang lebih kompleks, misalnya Analisis Model Dinamika Virus Dalam Sel Tubuh.

DAFTAR PUSTAKA

Abdurrahman, bin Muhammad. 2008. Tafsir Al-Usyr Al-Akhir, *http://www.tafseer.info.* Diakses tanggal 7 Juli 2009

Al Katsir, Abul Fida'. 1993. *Tafsir Ibnu Katsir.* Beirut : Darul Fikri.

Al Mahalli. Jalaluddin. 1990. *Tafsir Jalalain.* Toha Putra : Semarang.

Al Maraghi, Musthofa Ahmad. 1971. *Tafsir Al Maraghi.* Beirut : Darul Fikri

Anonim. 2009. Proses Pemodelan Matematika, , *http://www.sipoel.unimed.in/file.php/44/COURSE/BAB_II/BAB_2.doc.* Diakses tanggal 19 Mei 2008.

Ayres, Frank. 1992. *Persamaan Diferensial dalam Satuan SI Metric.* Jakarta : Erlangga

Baiduri. 2002. *Persamaan Diferensial dan Matematika Model.* Malang: UMM Press.

Beals. 1999. Predator Prey Dynamics: Lotka Voltera, *http://www.google.com/htm.* Diakses tanggal 7 Juli 2009

Baiduri. 2002. *Persamaan Diferensial dan Matematika Model.* Malang: UMM Press

Finizio dan Ladas. 1998. *Penerapan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern,* Edisi Kedua. Terjemahan Widiarti Santoso. Jakarta : Erlangga.

Kasanah, Srinur. 2007. *Analisis Model Matematika pada Interaksi Leukimia Mielogenous Kronik (CML) dengan Sel T.* Skripsi tidak dipublikasikan. Malang :UIN.

Murray, JD. 2002. *Mathematical Biology I. An Introduction Third Edition.* New York : Springer

Neuhauser, Claudia. 2004. *Calculus for Biology and Medicine.* New Jersey : Pearson Education

Reece, Campbell. 2004. *Biologi*. Jakarta : Erlangga.

Shihab, M. Quraish. 2002. *Tafsir Al-Misbah*. Jakarta: Lentera Hati.

Sirin, Khaeron. 2008. Membangun Fiqh Bumi, *http://www.ptiq.ac.id/index.php?option=com_content&task=view&id=38 &Itemid=34*. Diakses tanggal 14 Juli 2009.

Toaha, Syamsuddin. 2006. *Stability Analysis of Sum Population Model with Time Delay and Harvesting*. Makasar. Department of Mathematics Hasanuddin University

Yahya, Harun. 2009. Menyingkap Rahasia Alam Semesta, *http://www.harunyahya.com/indo/buku/menyingkap010.htm*. Diakses tanggal 7 Juli 2009.

Lampiran 1

Program Matlab Grafik Model Logistik

```
function fpp=fvi(t,x)
fpp=zeros(5,1)
fpp(1)=0.8*x(1)-0.8*(x(1))^2/100;
fpp(2)=0.8*x(2)-0.8*(x(2))^2/100;
fpp(3)=0.8*x(3)-0.8*(x(3))^2/100;
fpp(4)=0.8*x(4)-0.8*(x(4))^2/100;
fpp(5)=0.8*x(5)-0.8*(x(5))^2/100;

%=========================================

clc;clear all;format long;
simtime=input('masukkan waktu(t)= ');
acc=input('masukkan nilai akurasi= ');
initx=[10 30 80 120 150]';
[t x]=ode45('fvi',0,simtime,initx,acc)

figure(1)
plot(t,x(:,1),t,x(:,2),t,x(:,3),t,x(:,4),t,x(:,5)),grid;
title('Grafik Model Logistik')
xlabel('t (time)')
ylabel('nilai awal'
```

Lampiran 2

Program Matlab Grafik Model Logistik dengan Perlambatan

```
function ddex1

sol = dde23(@ddex1de,[1.5 1.935 2.5],@ddex1hist,[0,100]);
figure;
plot(sol.x,sol.y)
title('Grafik Model Logistik dengan Parlambatan');
xlabel('time t');
ylabel('x(t)');
legend('delay=1.5','delay=1.935','delay=2.5')
% --------------------------------------------------------------------------

function s = ddex1hist(t)
s = ones(1,3);

% --------------------------------------------------------------------------

function dydt = ddex1de(t,y,Z)
ylag1 = Z(:,1);
ylag2 = Z(:,2);
ylag3 = Z(:,3);
dydt = [ y(1)*(1-ylag1(1)/100)
         y(2)*(1-ylag2(2)/100)
        y(3)*(1-ylag3(3)/100)]
```

Lampiran 3

Program Matlab Grafik Predator-Prey dengan Perlambatan

```
clear,clc
f=inline('1*u*(1-w/200)-0.15*u*v','u','v','w')
g=inline('-1*v+0.1*u*v','u','v')
uo=9;
vo=5;
i=1;
U(1)=uo; V(1)=vo; W(1)=2;
for t=0:400
U(i+1)=U(i)+f(U(i),V(i),W(i))
V(i+1)=V(i)+g(U(i+1),V(i));
W(i+1)=(U(i+1)-U(i))/2
i=i+1;
end
t=0:400;
figure(1)
plot(t,U(t+1)), grid
figure(2)
plot(t,V(t+1)), grid
```

Lampiran 4

Program Matlab Grafik Predator-Prey

dengan Sembarang Nilai Perlambatan

```
function ddex1

sol = dde23(@ddex1de,[1.8],@ddex1hist,[0, 40]);
figure;
plot(sol.x,sol.y)
title('Grafik Model Predator-Prey dengan Parlambatan');
xlabel('time t');
ylabel('y(t)  x(t)');
legend('x(t)','y(t)')
% --------------------------------------------------------------------------

function s = ddex1hist(t)
s = ones(2,1);

% --------------------------------------------------------------------------

function dydt = ddex1de(t,y,Z)
ylag1 = Z(:,1);
dydt = [ y(1)*(1-ylag1(1)/200)-0.15*y(1)*y(2)
        -y(2)+0.1*y(1)*y(2)];
```