

***ANALISIS PERSAMAAN DIFERENSIAL PADA POPULASI SEL
HEMATOPOIETIK***

SKRIPSI

Oleh:
DWI MARDIANA WATI
NIM. 04510033



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM (UIN MMI) MALANG
MALANG
2009**

**ANALISIS PERSAMAAN DIFERENSIAL PADA POPULASI SEL
HEMATOPOIETIK**

SKRIPSI

Oleh:

DWI MARDIANA WATI

NIM. 04510033

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal 6 Agustus 2009

Susunan Dewan Penguji	Tanda Tangan
1. Penguji Utama : <u>Sri Harini, M. Si</u> NIP. 150 318 321	()
2. Ketua : <u>Turmudi, M. Si</u> NIP. 150 209 630	()
3. Sekretaris : <u>Usman Pagalay, M. Si</u> NIP. 150 327 240	()
4. Anggota : <u>Abdul Aziz, M. Si</u> NIP. 150 377 256	()

Mengetahui dan Mengesahkan,

Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M. Si

NIP. 150 318 321



**ANÁLISIS PERSAMAAN DIFERENSIAL PADA POPULASI SEL
HEMATOPOIETIK**

SKRIPSI

Oleh:

DWI MARDIANA WATI

NIM. 04510033

Telah Disetujui Oleh:

Pembimbing I

Pembimbing II

Usman Pagalay, M.Si
NIP. 150 327 240

Abdul Aziz, M. Si
NIP. 150 377 256

Tanggal: 27 Juli 2009

Mengetahui,

Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M. Si

NIP. 150 318 321

SURAT PERNYATAAN

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Dwi Mardianawati

NIM : 04510033

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Analisis Persamaan Diferensial Pada Populasi Sel Hematopoietik

Menyatakan bahwa skripsi tersebut adalah karya saya sendiri dan bukan karya orang lain, baik sebagian maupun keseluruhan, kecuali dalam bentuk kutipan yang telah disebutkan sumbernya.

Selanjutnya apabila dikemudian hari ada “klaim” dari pihak lain, bukan menjadi tanggung jawab Dosen Pembimbing atau Pengelola Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Malang, tetapi menjadi tanggung jawab saya sendiri.

Demikian surat pernyataan ini saya buat dengan sebenar-benarnya dan apabila pernyataan ini tidak benar, saya bersedia mendapat sanksi akademis.

Malang, Agustus 2009

Menyatakan,

Dwi Mardiana Wati



Syukur Alhamdulillah ke hadirat Allah SWT, yang telah melimpahkan rahmat dan hidayatNya kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi dengan judul **Analisis Persamaan Diffrensial Pada Populasi Sel Hematopoietik**

Shalawat serta salam tercurahkan kepada Nabi besar Muhammad SAW yang telah menunjukkan dari jalan yang gelap gulita menuju jalan yang terang benderang yaitu Ad-dinul islam.

Dalam penulisan skripsi ini, penulis menyadari bahwa tidak akan mendapatkan hasil yang baik tanpa adanya bimbingan, bantuan, dorongan, saran serta do'a dari berbagai pihak. Maka dalam kesempatan ini, penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo selaku Rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim malang.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU., DSc selaku Dekan Fakultas Saintek Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim malang.
3. Sri Harini, M.Si selaku ketua Jurusan matematika Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim malang.
4. Usman Pagalay, M.Si selaku dosen pembimbing yang selalu memberikan bimbingannya kepada kami.

5. Abdul Aziz, M.Si selaku dosen pembimbing Integrasi Ilmu Sains dan Agama.
6. Ayahanda dan Ibunda tercinta dan seluruh keluarga besar yang tiada lelah memberikan do'a dan kasih sayang serta kepercayaan.
7. Teman Matematika angkatan 2004 yang telah mewarnai hari-hariku dan selalu memberikan keceriaan selama kuliah di UIN Malang.
8. Teman Alumni Tebuireng (King-kong, Afiq, Liza, Kuntet, Tape dan yang tidak bisa disebutkan satu persatu) yang telah memberikan motivasi kepada penulis untuk menyelesaikan skripsi.
9. Teman-teman kost Sunan Pandanaran 4. (Iam, Shasa, mila, Upe, Isti) yang telah memberikan motivasi dan bantuan.
10. Semua pihak yang tidak bisa kusebutkan satu persatu terima kasih sudah bersedia mendengarkan keluhan penulis dan telah membantu dalam menyelesaikan laporan ini.

Semoga Allh SWT membalas kebaikan mereka semua. Penulis berharap, semoga skripsi ini bermanfaat. Amin....

Malang, Agustus 2009

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PENGAJUAN	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	
HALAMAN MOTTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR	i
DAFTAR ISI	iii
DAFTAR GAMBAR	v
ABSTRAK	vi
 BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Tujuan Masalah	4
1.4 Batasan Masalah	4
1.5 Manfaat Penelitian	5

1.6 Metode Penelitian	5
1.7 Sistematika Penulisan	6

BAB II : KAJIAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Diferensial	8
2.2 Persamaan Diferensial Liier dan Persamaan Diferensial Tak linier	10
2.3 Sistem Persamaan Diferensial Liier dan Persamaan Diferensial Tak linier	12
2.4 Kondisi Awal dan Keseimbangan.....	14
2.5 Fungsi Kontinu.....	15
2.6 Model Matematika	17
2.7 Sel Hematopoietik	20
2.8 Pemodelan Matematika Dalam Al-Qur'an.....	33

BAB III PEMBAHASAN

3.1 Model Populasi Sel Hematopoietik	38
3.2 Analisis Model Matematika	42
3.3 Titik Kestabilan Model Dengan Persamaan Diferensial.....	53

BAB IV KESIMPULAN

4.1. Kesimpulan 58

4.2. Saran..... 59

DAFTAR PUSTAKA

LAMPIRAN



DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Langkah-langkah Pemodelan	18
Gambar 3.1 Skema Model Populasi Sel Hematopoietik	39
Gambar 3.2 Grafik Perubahan Jumlah Sel Hematopoietik	56



ABSTRAK

Mardianawati, Dwi. 2009. *Analisis Persamaan Diferensial Pada Populasi Sel Hematopoietik*. Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim (UIN MMI) Malang

Pembimbing: (1) Usman Pagalay, M.Si (2) Abdul Aziz, M.Si

Kata Kunci: persamaan diferensial, Populasi sel hematopoietik

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang mengandung fungsi dan turunan. Pada matematika terdapat suatu kajian tentang pemodelan matematika. Salah satu fenomena yang dapat dimodelkan ke dalam bentuk matematika adalah populasi sel hematopoietik. Maka pembahasan dilakukan dengan tujuan (1) untuk memperoleh hasil analisis model populasi sel hematopoietik dengan menggunakan persamaan diferensial, (2) untuk mengetahui penyelesaian model populasi sel hematopoietik dengan menggunakan persamaan diferensial setelah dianalisis.

Sel hematopoietik adalah sel yang memproduksi sel darah merah, sel darah putih dan platelet. Mereka adalah sel batang pluripotent, dengan pembaharuan diri dan kemampuan yang berbeda. Seluruh divisi, sel batang hematopoietik menghasilkan bertambahnya jumlah pada kemampuan sel, sampai proses untuk mendewasakan sel. Yang belakangan ini akhirnya menjangkau aliran darah dan menjadi sel darah.

Berdasarkan hasil penelitian ini, diperoleh model matematika pada populasi sel hematopoietik adalah sebagai berikut:

$$\frac{dx_1}{dt} = -(\delta_1 + \beta_1)x_1 + \sigma_1\beta_1x_1(t - \tau_1)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -(\delta_2 + \beta_2)x_2 + \sigma_2\beta_2x_2(t - \tau_2) + \sigma_1\beta_1x_1(t - \tau_1)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = -\delta_3x_3 + \sigma_3\beta_2x_2(t - \tau_2)$$

Model ini terdiri dari tiga sistem persamaan diferensial tak linier yang bergantung pada variable-variabel yang menyatakan populasi sel darah merah, sel darah putih dan pluripoten.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Menurut Odum (1975:8), Persamaan matematika merupakan salah satu bentuk relasi dari matematika. Setiap persamaan matematika perlu di analisis supaya dapat diketahui kegunaannya dalam kehidupan praktis, khususnya bidang sains dan teknologi. Hal ini dilakukan karena fungsi utama persamaan matematika ialah sebagai model dari problematika kehidupan sehari-hari. *Model* merupakan versi sederhana dari dunia nyata

Menurut Davis (1992: 6) salah satu bentuk persamaan ialah persamaan diferensial. Persamaan diferensial adalah suatu relasi yang menyangkut satu atau lebih turunan dari sebuah fungsi yang tek dikethui dan mungkin fungsi itu sendiri.

Pada umumnya, yang ingin dikethui dari suatu persamaan diferensil adalah selesaian, nilai minimum dan maksimum, nilai akar, atau perilaku fungsi persamaan tersebut. Banyak cara yang bisi dilakukan untuk dapat menganalisis persamaan diferensial, misalnya dengan analisis kualitatif, pendekatan metode numeric, atau dengan bantuan computer.

Semua sel darah, yaitu sel darah merah, sel darah putih, dan platelets di produksi oleh sel batang hematopoitik. Mereka adalah sel batang pluripotent, dengan

pembaharuan diri dan kemampuan yang berbeda. Seluruh divisi, sel batang hematopoietis menghasilkan bertambahnya jumlah pada kemampuan sel, sampai proses untuk mendewasakan sel. Yang belakangan ini akhirnya menjangkau aliran darah dan menjadi sel darah.

Sering kali banyak dihadapi permasalahan di bidang non-matematika, misalnya pada bidang kedokteran, fisika, teknik, ilmu sosial dan lain sebagainya tidak dapat diselsaikan secara langsung. Salah satu cara untuk mengatasi masalah tersebut adalah matematika.

Secara umum pengertian model adalah suatu usaha menciptakan replika/tiruan dari suatu fenomena alam. Pada model Matematika replika/tiruan tersebut dilaksanakan dengan mendeskripsikan fenomena alam dengan satu set persamaan. Kecocokan model terhadap fenomena tersebut tergantung dari ketepatan formulasi persamaan matematis dalam mendeskripsikan fenomena alam yang ditirukan.

Allah berfirman dalam Al-Quran:



Arinya: Sesungguhnya kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran.

Menurut Abdusysyagir (2007: 80), semua yang ada di alam ini ada ukurannya, ada hitung-hitungannya, ada rumusnya, atau ada persamaannya. Pada dasarnya manusia tidak dapat membuat rumus sedikitpun, mereka hanya

menemukannya rumus atau persamaannya. Dalam pemodelan matematika, ilmuwan hanya mencari persamaan-persamaan atau rumus-rumus yang berlaku pada fenomena, sehingga ditemukannya suatu model matematika. Penulis akan mengambil salah satu persamaan diferensial yang berkaitan dengan sel hematopoietik yang persamaannya adalah

$$\frac{dx_1}{dt} = -(\delta_1 + \beta_1)x_1 + \sigma_1\beta_1x_1(t - \tau_1)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -(\delta_2 + \beta_2)x_2 + \sigma_2\beta_2x_2(t - \tau_2) + \sigma_1\beta_1x_1(t - \tau_1)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = -\delta_3x_3 + \sigma_3\beta_2x_2(t - \tau_2)$$

Variabel dan parameter di atas saling berkaitan atau saling berhubungan. Berdasarkan dari latar belakang di atas penulis mempunyai gagasan dalam penulisan skripsi yang berjudul **“Analisis Persamaan Diferensial Pada Populasi Sel Hematopoietik”**.

1.2 Rumusan Masalah

Dari latar belakang di atas maka permasalahan dirumuskan sebagai berikut yaitu; Bagaimana titik kestabilan model matematika pada sel hemotopoietik menggunakan persamaan diferensial?

1.3 Tujuan Pembahasan

Tujuan yang dapat diambil dari rumusan masalah diatas, yaitu untuk mengetahui cara menyelesaikan titik kestabilan model matematika pada sel hemotopietik menggunakan persamaan diferensial.

1.4 Batasan Masalah

Dalam penelitian ini, penulis memberikan batasan pembahasan pada penggunaan sistem persamaan diferensial tak linier orde satu dan hanya pada saat proliferasi. Asumsi yang digunakan adalah bahwa perubahan jumlah populasi sel terhadap waktu dipengaruhi oleh laju maturasi serta kematian oleh apoptosis dan perpindahan satu kompartemen maturasi kepada yang berikutnya.

1.5 Manfaat Pembahasan

1. Bagi penulis

Untuk menambah pengetahuan dalam mengkaji permasalahan matematika yang berkaitan dengan keilmuan lain, khususnya kedokteran.

2. Bagi Mahasiswa Matematika

Untuk membantu dalam perkuliahan, terutama tentang model matematika dan persamaan diferensial sekaligus mengetahui aplikasinya.

3. Bagi Pembaca

Sebagai wahana dalam pengetahuan tentang model matematika pada sel batang hematopoietik.

1.6 Metode Penelitian

Dalam menyusun skripsi ini, penulis menggunakan metode penelitian kepustakaan atau studi literatur. Penelitian kepustakaan yaitu penelitian yang dalam menunjukkan penelitiannya dilakukan dengan cara mendalami, mencermati, menelaah dan mengidentifikasi pengetahuan yang ada dalam kepustakaan. Sumber kajian pustaka dapat berupa jurnal penelitian, disertasi, tesis, skripsi, laporan penelitian, atau diskusi-diskusi ilmiah.

Setelah didapatkan data dari sumber-sumber di atas, langkah selanjutnya dilakukan analisis terhadap data tersebut. Kemudian untuk menentukan variabel yang digunakan dengan mengasumsikan bahwa hanya ada tiga, yaitu variabel-variabel yang menggambarkan populasi sel darah merah, sel darah putih dan platelet. Setelah menentukan variabel maka akan di analisis kemudian dicari titik kestabilannya.

Penyelesaian analitik sistem persamaan diferensial taklinier sulit ditentukan sehingga penyelesaian dilakukan dengan menggunakan metode numerik untuk memudahkan perhitungan digunakan *software* MATLAB kemudian untuk mencari titik kestabilan dari model digunakan *software* MAPLE.+

1.7 Sistematika Pembahasan

Untuk memudahkan pembahasan dalam skripsi ini, penulis membagi ke dalam empat bab, yaitu:

BAB I: Pendahuluan

Pada bab ini penulis memaparkan tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan pembahasan, batasan masalah, manfaat pembahasan, metode penelitian serta sistematika pembahasan.

BAB II: Kajian Pustaka

Pada bab ini penulis memaparkan tentang persamaan diferensial, persamaan diferensial linier dan persamaan diferensial tak linier, sistem persamaan diferensial linier dan tak linier, kondisi awal dan kesetimbangan, fungsi kontinu, model matematika, sel hematopoietik, pemodelan matematika dalam Al-Qur'an.

BAB III: Pembahasan

Berisi pembentukan model matematika pada sel hematopotik, analisis model populasi sel hematopoietik dengan persamaan diferensial, titik kestabilan model dengan persamaan diferensial.

BAB IV: Penutup

Pada bab ini berisi tentang kesimpulan dari hasil penelitian serta saran.



BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Persamaan diferensial

Definisi 1.

Persamaan yang menyangkut satu atau lebih fungsi (peubah tak bebas) beserta turunannya terhadap satu atau lebih peubah bebas disebut persamaan diferensial. (Pamuntjak dan Santoso, 1990: 11)

Definisi 2.

Sebuah persamaan yang mengandung derivative/diferensial dari satu atau lebih variabel terikat terhadap suatu atau lebih variable bebas disebut persamaan diferensial (PD). Jika hanya satu variable bebasnya, maka persamaannya disebut persamaan diferensial parsial. (Baiduri, 2002: 2)

Definisi 3.

Persamaan diferensial adalah memuat turunan satu atau beberapa fungsi yang tak diketahui. (Finzio dkk, 1982 : 1)

Meskipun persamaan seperti itu seharusnya disebut “persamaan turunan”, namun istilah “persamaan diferensial” (aequatio differentialis) yang diperkenalkan oleh Leibniz dalam tahun 1676 sudah umum digunakan.

Contoh:

$$1. \frac{dy}{dx} = 2 \cos 2x - 3e^{-x}$$

$$2. \frac{dy}{dx} + xy = 3$$

$$3. \frac{d^2 y}{dx^2} + 2xy = e^x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = u$$

$$4. \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} + 2u = 0$$

Pada contoh 1 persamaan 1 sampai 3 adalah persamaan diferensial biasa, x merupakan variabel bebas dan y variabel terikat. Sementara persamaan 4 dan 5 adalah persamaan diferensial parsial, variabel u dan variabel bebasnya x dan t .

2.2 Persamaan Diferensial Linier Dan Persamaan Diferensial Tak Linier

Defenisi 4.

Persamaan diferensial linier adalah persamaan diferensial yang berpangkat satu dalam peubah bebas dan turunan-turunannya, yaitu persamaan diferensial yang berbentuk:

$$a_m(x) \frac{d^m y}{dx^m} + a_{m-1}(x) \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = r(x) \quad (2.1)$$

Diasumsikan bahwa a_0, a_1, \dots, a_n dan fungsi-fungsi $f(x)$ merupakan fungsi-fungsi yang kontinu pada satu selang I dan koefisien pertama $a_n(x) \neq 0$ untuk setiap $x \in I$. (Pamuntjak dan Santoso, 1990:1-14)

Definisi 5.

Persamaan diferensial yang bukan persamaan diferensial linier disebut *persamaan tak linier*.

Dengan demikian persamaan diferensial $F(x, y', \dots, y''') = 0$ adalah persamaan diferensial tak linier, jika salah satu dari yang berikut dipenuhi oleh F :

1. F tidak berbentuk polinim dalam y, y', \dots, y'''
 2. F tidak berbentuk polinim berpangkat lebih dari 2 dalam y, y', \dots, y'''
- (pamuntjak dan santoso, 1990:1-14)

Suatu persamaan diferensial linier orde n adalah persamaan yang berbentuk:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \quad (2.2)$$

Disini selalu memisalkan bahwa koefisien-koefisien $a_n(x), a_{n-1}, \dots, a_0(x)$ dan fungsi $f(x)$ merupakan fungsi-fungsi yang kontinu pada selang I dan bahwa koefisien pertama $a_n x \neq 0$ untuk setiap $x \in I$. Selang I disebut *selang definisi* (selang asal) dari *persamaan diferensial itu*. Jika fungsi f identik dengan nol, kita sebut persamaan (2.1) *homogen*. Jika $f(x)$ tak identik dengan nol, persamaan (2.1) disebut *takhomogen*. Bila semua koefisien $a_n(x), a_{n-1}, \dots, a_0(x)$ adalah tetap, persamaan (2.1) dikatakan sebagai persamaan diferensial linier dengan *koefisien konstanta*, di lain pihak, adalah persamaan diferensial dengan koefisien-koefisien peubah, berikut ini adalah contoh-contoh persamaan diferensial linier:

Contoh:

1. $xy' - 2y = x^3, x \neq 0$
2. $y'' + 2y' + 3y = \cos x$
3. $y^{(4)} + y = 0$

Persamaan (1) adalah suatu persamaan diferensial linier *takhomogen* orde 1 dengan koefisien konstanta. Persamaan (2) adalah persamaan diferensial linier *takhomogen* orde 2 dengan koefisien konstanta. Persamaan (3) persamaan diferensial

linier *homogen* orde 4 dengan koefisien konstanta. Istilah linier berkaitan dengan kenyataan bahwa tiap suku dalam persamaan diferensial itu, peubah y, y', y'' berderajat satu atau nol. (Finzio dkk, 1988:58)

Sebuah persamaan diferensial dikatakan linier bila memenuhi 2 hal berikut:

1. Variabel-variabel terikat turunannya paling tinggi pangkat satu.
2. tak mengandung bentuk perkalian antara sebuah variabel terikat dengan variabel terikat lainnya, atau turunan yang satu dengan yang turunan lainnya, atau variabel terikat dengan sebuah turunan (Kusumah, 1984:4).

Contoh persamaan tak linier adalah persamaan pendulum

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{g}{t} \sin \theta = 0$$

Persamaan tersebut tak linier karena suku $\sin \theta$. Persamaan diferensial

$$y'' + 2e^t y' + yy' + y^2 = t^4$$

Juga tak linier karena suku yy' dan y^2 (Waluya, 2006:6).

2.3 Sistem Persamaan Diferensial Linier Dan Persamaan Diferensial Tak Linier

Sistem persamaan diferensial linier adalah persamaan yang terdiri dari lebih dari satu persamaan yang terkait. Sistem dari dua persamaan diferensial dengan dua fungsi yang tak diketahui berbentuk:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + f_1(t) \\ \dot{x}_2 &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + f_2(t)\end{aligned}\quad (2.3)$$

Dimana koefisien $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ dan f_1, f_2 merupakan fungsi t yang kontinu pada selang I dan x_1, x_2 adalah fungsi t yang tak diketahui. Sistem (2.5) memiliki penyelesaian eksplisit jika koefisien-koefisien a_{12}, a_{12}, a_{21} dan a_{22} semuanya konstanta.

Sistem persamaan diferensial linier dengan n buah fungsi-fungsi yang tak diketahui berbentuk:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \dots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ \dot{x} &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \dots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\ &\vdots \\ \dot{x} &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \dots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t)\end{aligned}\quad (2.4)$$

Atau secara singkat:

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j + f_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Sistem persamaan diferensial tak linier adalah persamaan yang terdiri dari lebih dari satu persamaan yang saling terkait. Sistem dari dua persamaan diferensial tak linier dengan dua fungsi yang tak diketahui berbentuk:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax + by + F(x, y) \\ \dot{y} &= cx + dy + G(x, y)\end{aligned}\quad (2.5)$$

Di mana $ad - bc \neq 0$

Amaliyah (2007:11-12), dalam menyelesaikan sistem persamaan diferensial linier dan system persamaan diferensial tak linier dapat juga menggunakan metode eksplisit yang diperluas sesuai dengan tingkat kesukaran, yaitu dengan metode eliminasi (metode penyelesaian sitem persamaan difrensial dalam dua fungsi yang tak diketahui dan dengan koefisien konstan) dan metode matriks (metode penyelesaian sistem persamaan diferensial dalam n buah fungsi yang tak diketahui dan dengan koefisien konstan). Persamaan diferensial tak linier dan system persamaan diferensial tak linier seringkali muncul dalam penerapan. Tetapi, hanya beberapa tipe persamaan diferensial linier dan persamaan diferensial tak linier (sebagai contoh: terpisah, homogen, eksak) yang dapat diselesaikan secara eksplisit.

2.4 Kondisi Awal dan Keseimbangan

Solusi dari persamaan diferensial berorder n memiliki konstanta sebarang sebanyak n , seperti pada definisi sebelumnya. agar persamaan diferensial tersebut memiliki karakteristik maka konstanta tersebut harus tetap agar terdapat solusi tunggal dengan cara menentukan syarat bantu kondisi awal (initial conditions). Kondisi merupakan posisi waktu saat $t = 0$. Dengan kondisi awal tersebut akan terdapat *masalah nilai awal*

Definisi 2

Suatu persamaan diferensial orde n yang memiliki n syarat bantu untuk waktu awal yang sama dari variable bebasnya dinamakan *masalah nilai awal*. (Rahardi dkk, 2003: 10).

Keadaan setimbang atau *ekuilibrium* dari suatu persamaan diffrensial adalah sebarang selesaian konstan persamaan tersebut. Titik yang menyebabkan konstan disebut *titik kesetimbangan*. Keadaan setimbang tersebut dikatakan *stabil* jika seluruh solusi yang dekat dengan titik kesetimbangan menuju titik itu.

2.5 Fungsi kontinu**Definisi 3**

Suatu fungsi $f(x)$ dikatakan kontinu pada suatu titik $x = c$ jika syarat-syarat berikut terpenuhi:

1. $f(x)$ terdefinisi pada $x = c$; yaitu $f(x)$ ada,
2. $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ ada
3. $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$

jika salah satu dari syarat di atas tidak terpenuhi maka tersebut dikatak *tidak kontinu* pada $x = c$ (Arya dan Lardner, 1979: 83)

Contoh

$$\text{Diketahui } f(x) = \begin{cases} 1 & \text{untuk } x \geq 0 \\ -1 & \text{untuk } x < 0 \end{cases}$$

selidiki kontinuitas $f(x)$ di $x = 0$

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 1 \text{ (terdefinisi)} \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(0) = 1 \text{ (ada)} \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

jadi $f(x)$ kontinu di sebelah kanan pada $x = 0$

$$\text{tetapi } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1 \neq f(0)$$

jadi diskontinu di sebelah kiri pada $x = 0$. Berarti $f(x)$ diskontinu pada $x = 0$.

Teorema 1

Misalkan f kontinu pada suatu selang I dan dapat didiferensialkan pada setiap titik dalam I ;

1. Jika $f'(x) > 0$ untuk setiap x titik dalam I , jika untuk setiap pasang bilangan x_1 dan x_2 dalam I $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ maka f naik pada I .
2. jika $f'(x) < 0$ untuk setiap x titik dalam I , jika untuk setiap pasang bilangan x_1 dan x_2 dalam I $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ maka f turun pada I .

Bukti:

Kita andaikan bahwa f kontinu pada I dan bahwa $f'(x) > 0$ di setiap titik x di bagian dalam I . Pandang dua titik sebarang x_1 dan x_2 I dengan $x_1 < x_2$.

Selanjutnya diterapkan pada selang $[x_1, x_2]$, terdapat sebuah c dalam (x_1, x_2) yang memenuhi

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

karena $f'(c) > 0$, kita lihat bahwa $f(x_2) - f(x_1) > 0$ yakni $f(x_2) > f(x_1)$. Inilah apa yang kita maksudkan pada waktu kita mengatakan f adalah naik pada I .

Teorema 2

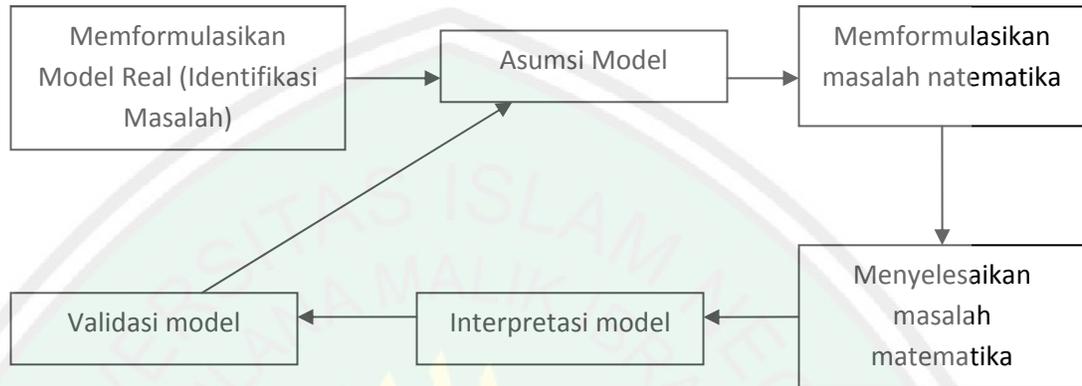
Misalnya f terdefiniskan dua kali pada suatu selang terbuka (a, b) ;

- i. Jika $f''(x) > 0$ untuk setiap x titik dalam (a, b) , maka f cekung terbuka ke atas pada (a, b) .
- ii. Jika $f''(x) < 0$ untuk setiap x titik dalam (a, b) , maka f cekung terbuka ke bawah pada (a, b) . (Purcell dan Verberg, 1984).

2.6 Model Matematika

Dalam bagian ini disajikan proses formulasi fenomena atau kelakuan dunia nyata dalam bentuk Matematika. Matematika yang kita gunakan adalah persamaan

diferensial. Langkah dalam pemodelan masalah dunia nyata diilustrasikan dalam diagram berikut:



Gambar 2.1. langkah-langkah pemodelan (Baiduri, 2002: 15)

Selanjutnya langkah-langkah pemodelan dapat dijelaskan sebagai berikut:

Langkah 1: Identifikasi masalah

Pemodel harus mempunyai kemampuan yang cukup dalam formulasi verbal agar masalah bisa ditraslasikan ke dalam bahasa Matematika. Translasi ini akan terus diselesaikan pada langkah berikutnya.

Langkah 2 : Membuat asumsi

Secara umum kita tidak bisa berharap bahwa semua faktor yang berpengaruh pada peristiwa yang sedang kita amati dapat dimodelkan dengan Matematika. Hal ini disederhanakan dengan mereduksi banyaknya faktor yang berpengaruh terhadap kejadian yang sedang diamati sehingga kompleksitas persoalan

bisa direduksi dengan mengasumsikan hubungan sederhana antara variabel. Asumsi di sini dibagi dalam dua katagori utama:

a) Klasifikasi Model

Apa yang mempengaruhi tingkah laku pengutamaan pada *langkah 1*. Hal ini diidentifikasi sebagai variabel, baik berupa variabel bebas maupun variabel terikat. Dalam model akan dijelaskan variabel terikat dan sisanya sebagai variabel bebas. Kita juga boleh memilih variabel mana yang mesti diabaikan.

b) Menentukan interelasi antara variabel yang terseleksi untuk dipelajari

Sebelum kita memuat hipotesa tentang relasi antara variable, secara umum kita membuat beberapa penyederhanaan tambahan. Persoalan mungkin cukup kompleks bahwa relasi antar semua variabel tidak bisa dilihat secara permulaan. Dalam kasus ini kita biasanya membuat submodel. Disini satu atau lebih variabel bebas dipelajari secara terpisah. Perlu diperhatikan bahwa submodel ini terintegral terhadap asumsi yang dibuat pada model utama.

Langkah 3: Menyelesaikan dan menginterpretasi model

Sekarang kita perhatikan semua submodel untuk melihat apakah model yang disusun sudah cukup. Selanjutnya model tersebut akan diselesaikan secara Matematika. Dalam hal ini model yang kita gunakan dan penyelesaiannya menggunakan persamaan diferensial. Seringkali disini kita mengalami kesulitan

untuk menyelesaikan dan menginterpretasi model. Dalam kondisi ini kita kembali ke *langkah 2* dan membuat asumsi sederhana tambahan atau kembali ke *langkah 1* untuk membuat definisi ulang dari permasalahan atau definisi ulang sebuah model merupakan bagian yang penting dalam model matematika.

Langkah 4: Verifikasi model

Sebelum menggunakan model untuk menyimpulkan kejadian dunia nyata, model tersebut mesti diuji. Ada beberapa pertanyaan yang diperlukan yang diajukan sebelum melakukan uji dan mengumpulkan data. *Pertama*, apakah model menjawab masalah yang telah diidentifikasi pada *langkah 1* atau apakah kita menyimpang dari isu utama seperti yang dikonstruksi dalam model? *Kedua*, bisakah kita mengumpulkan data untuk menguji dan mengoperasikan model dan apakah model memenuhi syarat bila diuji? Dalam mendisain sebuah tes untuk model yang kita buat, kita sebaiknya menggunakan data aktual yang diperoleh dari observasi. (Baiduri, 2002: 15-17)

2.7 Sel Hematopoietik

Darah

Mesekima (mesenchyma), suatu jaringan penyambung embrionik (embryonic connective tissue) yang berasal dari mesoderm, mengandung sel-sel khas yang

berbentuk bintang dan berhubungan satu sama lain karena tonjolan-tonjolan selnya. Sel-sel ini mengalami banyak perubahan, yang menimbulkan pembentukan darah, getah bening, dalam interselulernya bersifat cair, dalam jaringan penyambung terdapat serat-serat, dalam tulang rawan bahan interselulernya setengah kaku dan mengandung serat, sedangkan dalam tulang, serat-serat yang ada terimpregnasi dengan garam-garam mineral.

Darah dapat dipandang sebagai bentuk dari sel-sel bebas dan suatu matrik yang cair (plasma). Sel-sel darah berkembang dalam jaringan retikuler organ-organ pembentuk darah dan masuk ke dalam aliran darah sebagai sel-sel yang sepenuhnya telah terbentuk.

Unsure-unsur structural darah terdiri dari *eritrosit, leukosit dan platelets*. Mereka kira-kira sama banyaknya dengan plasmanya. Eritrosit jauh lebih banyak daripada leukosit, jumlah eritrosit pada manusia laki-laki adalah 5 sampai 5,5 juta per mm^3 , pada wanita 4,5 sampai 5 juta per mm^3 . Akan tetapi angka-angka ini sangat bervariasi. Leukosit terdapat jumlah 8.000 sampai 10.000 per mm^3 . Volume seluruh darah individu rata-rata dengan berat badan 5 sampai 6 liter atau secara kasar 8% dari berat badan.

Sel Darah Merah (*eritrosit*)

Bila suatu tetes darah diperiksa di bawah mikroskop, terlihat sel-sel darah sebagai lempengan bikonkaf dengan diameter sebesar hampir 8 μm . Dalam keadaan

segar mereka tampak berwarna kehijau-hijauan daripada merah. Lekuk pada bagian pusat tiap sel darah merah menimbulkan bintik terang, yang pada penglihatan pertama dapat disalah tafsirkan sebagai nucleus. Akan tetapi sel darah merah dewasa tidak bernukleus pada darah mamalia (binatang menyusui). Seringkali mereka melekat berpadu dalam barisan, atau rouleaux. Bila suatu tetesan darah mengering tepinya, sel-sel merahnya kehilangan cairannya dan berubah bentuknya. Beberapa berbentuk mangkok, lain-lainnya tak teratur dalam garis-garis luarnya. Dalam irisan organ dan jaringan yang diwarnai dengan hematoksilin atau eosin, sel-sel merahnya mempunyai warna jingga cerah atau merah. Bentuk lempengan adalah yang paling umum dalam preparat semacam itu, tetapi, khususnya dalam pembuluh kecil, sel-selnya kadang-kadang berbentuk mangkok, kadang-kadang terpampat menjadi bentuk sudut lancip. Cara yang biasa membuat preparat darah untuk pemeriksaan mikroskop adalah mengoleskan suatu tetesan darah pada slide sedemikian rupa sehingga terjadi sediaan hapus tipis dan kemudian mewarnainya dengan pewarna tertentu. Biasanya digunakan pewarna Wright. Sel-sel darah merah, bila diperlakukan semacam itu, akan kehilangan volume tanpa mengubah bentuknya. Sel-sel darah merah di bagian tengah hapusannya, jika tak terjadi perubahan-perubahan karena cepat, mempunyai bentuk lempengan bikonkaf, dengan diameter rata-rata sekitar $7,5 \mu m$. Sel-selnya tidak berbutir dan warna coklat pucat atau merah jambu karena zat warnanya.

Sekitar 1% dari eritrosit yang diperiksa dalam hapusan tadi, meskipun telah kehilangan nukleusnya, mendapat warna kebitu-biruan dan agak lebih besar daripada

sel-sel yang berwarna merah. Jika diwarnai dengan kresil biru, terlihat anyaman reticulum dalam sitoplasma, oleh karena itu mereka dikenal sebagai *retikulosit* (reticulocyte). Mereka merupakan eritrosit yang belum masak.

Karena sel-sel darah merah itu tidak bernukleusnya, maka kadang-kadang orang berkata bahwa itu hendaknya jangan disebut sel. Nama eritroplastid (erythroplastid) dapat digunakan, tetapi eritrosit adalah istilah yang lebih umum. Sitoplasma sel merah itu mengandung protein yang disebut hemoglobin, yang berpadu dengan oksigen dan berbentuk oksihemoglobin. Dalam jaringan-jaringan tubuh, di mana kadar oksigennya lebih kecil daripada dalam paru-paru, oksihemoglobinnya dibebaskan dan oksigennya digunakan dalam proses metabolisme sel. Hemoglobin juga penting dalam angkutan karbondioksida dari jaringan ke paru-paru.

Hemoglobin memberikan warna kemerahan pada sel-sel ini diwarnai dengan pewarna Wright. Kenyataan ini penting dalam pengenalan tahap-tahap awal perkembangan sel-sel darah merah.

Sel darah putih (*leukosit*)

Leukosit sebagai kelompok berbeda reaksinya dengan sel darah merah terhadap perlakuan pada pembuatan hapusan. Eritrosit hanya kehilangan volume sedikit sekali dan karena arena itu lebih kecil dalam hapusan dalam keadaan segar.

Leukosit sebaliknya, menjadi pipih karena perlakuan tadi dan memperoleh diameter yang lebih besar.

Leukosit mengandung sebuah nucleus dan organel-organel sel. Mereka menunjukkan gerakan amuboid terbatas dan untuk mudahnya dapat dibagi dalam dua kelompok utama: varietas granuler (granular) dan jenis-jenis non-granular atau limfoid (lymphoid). Pada sediaan yang diwarnai dengan hematoksilin dan eosin, leukositnya menonjol di antara eritrosit karena nukleusnya mereka yang berwarna gelap. Kadang-kadang ada kemungkinan untuk mengidentifikasi limfosit, granulosit dan monosit dalam preparat-preparat semacam itu, tetapi untuk pemeriksaan sel-sel putih yang teliti harus digunakan preparat-preparat yang dibuat dengan pewarna Wright atau Giemsa.

Leukosit Granular (*polimorfoklear*). Suatu sifat yang mencolok dari granulosit adalah granula-granula di dalam sitoplasma. Tiap varietas granulosit mempunyai jenis granula berbeda yang langsung diidentifikasi pada tingkat mikroskop optic dan electron. Sifat khas yang kedua dari sel-sel ini adalah nukleusnya yang berlobus banyak (multilobed). Meskipun dapat digunakan beberapa criteria untuk membedakan dan menggolongkan granulosit itu, namun dua yang paling lazim digunakan didasarkan atas sifat-sifat morfologi nukleusnya dan ukuran, bentuk, serta sifat-sifat pewarnaan dari granulanya. Granulosit itu merupakan 60% sampai 70% dari sel-sel putih. Dalam hapusan darah atau hapusan sumsum tulang yang diberi pewarnaan Wright.

Leukosit Neutrofil (*heterofil*). Nukleus leukosit neutrofil (neutrophilic leucocyte) terdiri dari tiga sampai lima lobus bulat telur tak teratur, yang berhubungan satu sama lain dengan untaian kromatin tipis (chromatin strands). Dalam preparat hapusan kering dari wanita pada salah satu lobusnya tampak tambahan 3% dari jumlah sel. Tambahan kromatin ini, dikenal sebagai “drum-stick” (jaringan bingung dengan ketidak teraturan yang terdapat pada tepi nukleusnya), merupakan bahan kromatin sebagai tempat lokasinya kromosom wanita (X). Sitoplasmanya (dengan pengecualian zona periferi jernih yang homogen), adalah sedikit asidofil (acidophilic) dan mengandung sejumlah besar granula halus, yang tampak ungu atau pucat (purple or lavender). Sel-sel ini berukuran sekitar 8 μm dalam keadaan segar dan mencapai ukuran 12 μm dalam sediaan hapus kering. Pada tingkat mikroskop electron, granula-granulanya tampak beraneka ragam dalam ukuran dan bentuk. Mereka dapat dibagi dalam tiga varietas morfologis dan biokimia

1. Granula azuro fil atau granula primer yang relative besar, padat-elektron, yang mengandung peroksidase dan hidrolase
2. Granla spesifik yang lebih kecil, tidak begitu padat-elektron, yang mengandung alkalin fotofase dan beberapa bahan antibacterial, dan
3. Suatu kelompok heterogen yang lebih kecil daripada granula spesifik, yang mengandung hidrolase asam. Granula ini dan granula primer dipandang sebagai lisosom.

Leukosit asidofil (*eosinofil*). Leukosit yang asidofil (*acidophilic leucocytes*), yang hampir berbentuk bola, berukuran $9\ \mu\text{m}$ dalam keadaan segar dan hapusan kering dapat mencapai diameter yang mendekati $12\ \mu\text{m}$. Mereka merupakan 2% sampai 5% dari seluruh leukosit dalam darah periferi. Berlawanan dengan nucleus dari neutrofil (*neutrophil*), nucleus dari asidofil biasanya terdiri dari atas dua lobus berbentuk bulat-telur yang salingberhubungan dengan untaian kromati (*chromatin strands*). Kecuali daerah pusat si pusat yang diduduki oleh sitosentrum (*cytocentrum*), sitoplasma mengandung sejumlah besar granula besar dan granula kasar, yang pada manusia berbentuk bola. Jika diwarnai dengan pewarna asa, granula-granula itu bervariasi dalam warna dari merah jambu sampai merah cerah. Jika diamati dengan mikroskop electron, granula-granula ini menunjukkan benda-benda padat pada beberapa species. Eisonofil meningkat dalam jumlah selama keadaan alergi dan infeksi parasit tertentu. Mereka tampaknya memakan (*phagocytize*) kemudian aksi dari enzim-enzim yang terdapat dalam granula.

Leukosit basofil (*basiphilic leucocytes*). Basofil-basofil ini (*basophils*) di antara leukosit paling sedikit jumlahnya dan meliputi kurang dari 0,5% dari seluruh jumlah. Mereka hampir sama besar dengan neutrofil. Nukleusnya seringkali berbentuk-S, terbatas pada dua atau lebih daerah, dan kurang menyerap warna daripada lain-lain varietas. Granula-granulanya luar biasa kasar dan dengan pewarna Wright tamoak biru suram. Mereka metakromatis (*metachromatic*) dan mengandung histamine, hyparin, dan serotin. Granula-granula ini juga memberi kesan terperas keluar

sebagian dari permukaan selnya mudah terbagi dalam pecahan-pecahan. Mereka seringkali mengelapi nukleusnya. Diamati dengan mikroskop electron, granula-granulanya tampak terikat pada embran, bahan yang terbungkus oleh membrane bervariasi dalam penampilannya pada berbagai spesies. Mitokondria (mitochondria) yang tersebar gelembung-gelembung golgi (golgi vesicles) biasanya ada.

Fungsi leukosit (*leucocytes*). Leukosit dalam aliran darah tampaknya tidak aktif, dan fungsinya tidak begitu dipahami orang. Di luar aliran darah mereka menunjukkan gerakan mereka amuba. Leukosit itu selalu berpindah-pindah dari pembuluh ke jaringan. Hal ini terutama pada tempat terjadinya luka atau infeksi, di mana granulosit (granulocytes) itu berpindah sebagai respons terhadap rangsangan kemotatis (chemotatic). Kemudian, monosit ini juga berakumulasi di daerah-daerah ini. Di antara granulosit itu hanya neutrofil yang menunjukkan fagositosis. Banyak jenis bakteri dimakan oleh proses ini. Setelah fagositosis, granula spesifik dari sel itu hancur dan menghilang, dan sementara itu membebaskan enzim-enzim hidrolitis, yang bertanggungjawab terhadap pernapasan bakteri. Sementara itu, neutrofil mati fungsi mereka sekarang belum diketahui.

Pringan Kecil (*Platelets*)

Di samping sel-sel tersebut di atas darah mengandung kelompok pecahan sitoplasma kecil yang disebut platelets atau trombosit dan pada umumnya tidak dimasukkan dalam golongan sel-sel darah. Platelets ini sekitar 2 μm dalam diameter,

tersusun dari sitoplasma yang menyerupai warna biru dengan pewarna Wright. Ia mempunyai pusat yang granular gelap, kromomer dan suatu daerah periferi yang terang, hialomer.

Trombosit atau pletet itu diduga membebaskan enzim tromboplastin yang berperan dalam pembekuan darah. Tromboplastin mengubah protombin menjadi trombin, yang pada gilirannya mengubah fibrinogen menjadi fibrin. Tromboplastin juga telah diidentifikasi dalam plasma darah. Platelet dibuat melalui pertuntasan fragmen-fragmen seluler dari megakaryosit dalam sumsum tulang.

Pembentukan Darah

Pada orang dewasa, sel-sel darah merah secara normal terbentuk dalam dua organ yang serupa karena mempunyai kerangka jaringan retikuler (reticular tissue), tetapi berbeda dalam jenis sel-sel darah yang mereka produksi. Sumsum tulang merupakan sumber normal dari sel-sel darah merah dan granulosit, dan mungkin sekali juga monosit dan nodulus limpa merupakan sumber limfosit.

Sumsum tulang. Dalam pembentukan tulang, tersisa suatu ruang di bagian pusat karena resorpsi, pertama-tama dari tulang rawan dan kemudian dari tulang endosteum (endosteal bone). Ruang ini diinvasi oleh mesenkima, yang berkembang menjadi sebuah organ yang tidak berperan dalam fungsi penunjang dari tulangnya sendiri. Ini adalah sumsum tulang merah, yang pada individu dewasa merupakan

sumber untuk sebagian besar dari sel-sel darah merah mesenkima primitive (primitive mesenchyme) dari embrio di tempat ini berkembang menjadi tiga jenis sel:

1. Kerangka untuk jaringan retikuler (reticuler tissue)
2. Jaringan lemak (adipose tissue)
3. Sel-sel hematopoitik atau sel-sel pembentuk darah.

Pada awal kehidupan mereka, semua dari tiga jenis sel itu terdapat dalam sumsum dari tiap tulang. Kelak sel-sel hematopoitik itu menghilang dari sumsum beberapa tulang, dan meninggalkan hanya jaringan retikuler dan sel-sel lemak, yang merupakan sumsum kuning dalam tulang-tulang darah selama hidupnya dan kehadirannya membuat jaringan merah.

Sumsum dapat dipelajari dalam preparat hapus atau irisan. Untuk pemeriksaan yang lebih teliti, harus digunakan pewarna darah.

Sel-sel jaringan retikuler (reticuler tissue cells). Dalam irisan, sel-sel jaringan retikuler agak menjadi gelap karena sel-sel hematopoitik, tetapi dapat diamati dalam hapusan atau irisan-irisan tipis.

Sel-sel jaringan lemak. Sel-sel jaringan lemak umumnya terdapat terpecah dalam sumsum merah dan tampak di bawah mikroskop dengan perbesaran rendah sebagainya lemak sewaktu waktu fiksasi. Kira-kira setengah dari sumsum tulang ditempati oleh sel-sel lemak.

Hematositoblas (stem cells). Hematositoblas berdiameter 10 sampai 12 μm , dan mempunyai sitoplasma yang basofil (basophilic), biasanya non-granular. Bentuk selnya seperti buah pir atau polygon, tanpa tonjolan sitoplasma. Nukleusnya besar dan terdapat dalam bagian sel yang terlebar. Seperti tersirat dalam namanya, mereka sekali waktu pernah dipandang sebagai sel-sel darah merah. Berdasarkan penyelidikan kultur sel dan pencatat genetic (genetic marker), telah dapat ditentukan bahwa semua sel darah berasal dari sel induk (stem cells) bebas yang disebut unit pembentukan koloni (colony-forming unit-CFU), sel yang jauh lebih kecil dari hematositoblas. Sesuai dengan sifatnya sebagai sel induk (yaitu, sel yang belum terdiferensiasi yang terlibat dalam pembagian sel), sel ini hanya mengandung jumlah organel yang minimal sekali, termasuk mitokondria, ribosom bebas, dan sebuah kompleks Golgi kecil untuk membuat membrane sel dan selaput-selaput permukaasn.

Promyelosit, myelosit, metamyelosit. Ada tiga tahap antara sel induk (CFU) dan leukosit granular. Mereka pada umumnya ditandai oleh perkembangan granula sitoplasma, yang neutrofil, eosinofil atau basofil, menurut jenis leukosit yang bertujuan untuk berkembang dari masing-masing. Dengan perlakuan yang hati-hati sekali, ada kemungkinan untuk tiga jenis atau tahap utama kelompok ini

1. Yang termuda (promyosit) adalah suatu sel berbentuk bola dengan sitoplasma basofil sangat menyerupai sitoplasma hematositoblas kecuali ada kandungan beberapa granula. Nucleus dari promyosit adalah besar dan pucat.

2. Tahap kedua (myelosit-sel sumsum) adalah yang paling umum dari kelompok ini dan yang paling mudah dibedakan. Myelosit membelah diri cepat sekali, dan melahirkan generasi sel berturut-turut, di mana dapat diikuti peningkatan jumlah granula sitoplasma tertentu secara lambat-laun, dan disertai hilangnya afinitas terhadap pembelahan sel, juga terdapat sedikit kehilangan dalam ukuran dan peningkatan dalam berat-jenis nukleusnya.
3. Produk dari pembelahan terakhir myelosit adalah metamyelosit. Sel-sel ini berkembang tanpa pembelahan lebih lanjut menjadi leukosit polimorfonuklear. Metamyelosit itu, dalam kenyataan merupakan tahap granulosit yang tidak cukup dewasa untuk masuk ke dalam peredaran bawah keadaan normal.

Leukosit muda (juvenile leucocytes). Dalam beberapa keadaan patologis, leukosit masuk ke dalam aliran darah sebelum mereka cukup dewasa. Sebelum infeksi dan sesudah terjadi kerusakan jaringan, jumlah total sel darah putih meningkat (leukositosis) dan lebih banyak sel dengan nucleus yang berlobus (bercouing) tampak dalam preparat hapus. Sel-sel yang belum masak ini disebut sel-sel pita atau tikaman (band or stab cells) karena penampilan nukleusnya, yang menyerupai bentuk-bentuk yang secara normal terlihat pada myelosit dan metamyelosit. Peningkatan bentuk-bentuk ini dalam darah, kadang-kadang dilukiskan sebagai pergeseran ke arah kanan atau pergeseran ke arah bentuk-bentuk muda.

Proeritroblas, eritroblas, normoblas. Apabila sel-sel induk primitive membelah diri, anak-anak selnya mendiferensiasi diri menjadi eritrosit. Mereka membesar, kehilangan nukleusnya, dan mengisi sitoplasma mereka dengan hemoglobin. Proses ini dapat dibedakan proeritroblas, eritroblas, normoblas, meskipun seperti biasanya pembedaan semacam itu bersifat semuanya.

1. Proeritroblas merupakan tahap awal yang dapat dibedakan dalam perkembangan sel darah merah. Ia berbeda dengan promyosit secara berikut. Ia sedikit lebih kecil dan mempunyai nucleus yang lebih kromatis, hemoglobin mulai berkembang di dalam sitoplasma hematositoblas dan promyosit, tetapi kehadiran hemoglobin memberikan warna sedikit keungu-unguan atau keabu-abuan padanya.
2. Pada tahap berikutnya, tahap eritoblas, serangkaian perubahan lambat-laun berkembang sewaktu-waktu selnya membelah diri. Perubahan ini dari dua jenis, peningkatan jumlah hemoglobin dalam sitoplasma dan penurunan dalam besarnya terjelma secara morfologis sebagai pergeseran warna dari biru keabu-abuan dari proetroblas menjadi merah jambu yang karakteristik untuk eritrositnya. Jika warna merah-jambu itu telah berkembang sepenuhnya, sel-selnya disebut normoblas (normoblast).
3. Suatu normoblas hanya sedikit lebih besar daripada suatu eritrosit tetapi berbeda dengannya karena mempunyai nucleus. Normoblas ini mengalami beberapa

pembelahan itu nucleus mereka menjadi lambat-laun lebih kecil dan lebih gelap. Akhirnya nucleus normoblas itu tereduksi menjadi suatu sosok padat yang berwarna tua sekali, dan jika ini didorong keluar dari permukaannya, maka selnya menjadi sel darah merah yang telah berkembang sepenuhnya.

Sel raksasa atau megakaryosit. Megakaryosit merupakan sel sumsum tulang yang dan yang paling sepat dapat dibedakan. Ia dapat berukuran lebih dari $100 \mu m$ dalam diameter. Mereka mempunyai sitoplasma kemerah-merahan yang agak padat dan suatu nucleus polimarf. Dalam ukuran dan warna mereka menyerupai osteolas, yang dapat dijumpai pada tepi sumsum. Akan tetapi oestoklas mempunyai banyak nucleus terpisah (polikaryosit), sedangkan sel raksasa saling berhubungan oleh untaian bahan nucleus. Dari sitoplasma sel raksasa inilah platelet darah terbentuk.

2.8 Pemodelan Matematika dalam Al-Quran

Pemecahan masalah dalam dunia nyata dengan matematika dilakukan dengan mengubah masalah tersebut menjadi bahasa matematika. Masalah nyata dalam kehidupan biasanya timbul dalam bentuk gejala-gejala yang belum jelas hakikatnya. Kita masih harus membuang factor-faktor yang tidak/kurang relevan, mencari data-data informasi tambahan, lalu kita menemukan hakikat masalah sebenarnya. Langkah ini dinamakan sebagai mengidentifikasi masalah. Langkah selanjutnya setelah mengidentifikasi masih ke bahasa lambing, yaitu matematika. Penerjemahan ini

disebut pemodelan matematika. Setelah model matematika jadi, maka di cari alat yang dapat digunakan untuk menyelesaikannya. Pemodelan inilah yang menjadi kunci dalam penerapan matematika. Memodelkan masalah ke dalam bahasa matematika berarti menirukan atau mewakili objek yang bermasalah dengan variable dalam matematika. Pada hakikatnya, kerja pemodelan tidak lain adalah abstraksi dari masalah nyata menjadi masalah (model) matematika. (Fathoni, 2006)

Matematika pada dasarnya berkaitan dengan pekerjaan menghitung, sehingga tidak salah jika matematika disebut ilmu hitung atau ilmu al-hisab. Dalam urusan menghitung, Allah adalah rajanya. Allah sangat cepat dalam menghitung dan sangat teliti (Abdusysyahir, 2007:83). Alam beserta isinya diciptakan Allah dengan ukuran-ukuran yang sangat cermat dan teliti, dengan perhitungan yang sangat mapan dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi.

Dalam perkembangannya, matematika dapat digunakan untuk mengungkapkan suatu kejadian menjadi ungkapan yang sistematis. Salah satu kejadian Allah adalah telah ditemukan pemodelan-pemodelan matematika. Pada hakikatnya manusia hanya mencari persamaan atau rumus-rumus yang berlaku pada suatu fenomena. Bahkan telah ditemukan aturan-aturan yang sistematis pada wabah seperti demam berdarah, malaria, flu burung, tuberculosis dan lain sebagainya.

Ahli matematika tidak dapat membuat rumus sedikitpun, mereka hanya menemukan rumus atau persamaan. Albert Einstein tidak membuat rumus $e = mc^2$

tetapi dia hanya menemukan dan menyimbolkannya. Archimedes menemukan hitungan mengenai volume benda melalui media air. Hukum Archimedes itu sudah ada sebelumnya dan dialah yang menemukan pertama kali melalui hasil menelaah dan membaca ketetapan Allah. (Abdusysyahir, 2007: 80)

Pada pembahasan sebelumnya sudah didapatkan model matematika pada sel hematopoitik. Dari model tersebut juga digambarkan fenomena pengaruh pada pembentukan sel darah. Juga dipaparkan cara kerja sel darah merah, sel darah putih dan platelet. Dengan kata lain sel darah sangat berpengaruh terhadap pembentukan dalam tubuh.

Ada makna tersendiri di balik kenyataan bahwa system yang sangat mengagumkan umat manusia bahkan pada titik pemahaman ini ditempatkan pada sebuah sel yang tidak memiliki kemampuan untuk berpikir dan bernalar. Ini merupakan cerminan dari keunikan ciptaan Allah Yang Maha Mengetahui. Dalam Al-Quran dinyatakan bahwa kebijaksanaan Allah meliputi segalanya. (Yahya: 2004)



Artinya: Mereka tidak mengetahui apa-apa dari ilmu Allah melainkan apa yang dikehendaki-Nya. Kursi Allah meliputi langit dan bumi. dan Allah tidak merasa berat memelihara keduanya, dan Allah Maha Tinggi lagi Maha besar. (Al-Baqarah, 255)

Pada sel hematopoitik dapat dicari satu pemodelan matematika dengan memperhatikan komponen-komponen yang menjadi penyebab terjadinya sel hematopoitik tersebut. Untuk menemukan suatu model ini diperlukan suatu usaha

keras agar dapat menemukan pemodelan yang diinginkan dan sesuai dengan keadaan yang nyata. Allah memberikan kesempatan kepada manusia untuk berusaha mempergunakan waktunya sebaik mungkin. Dengan kesepakatan tersebut maka manusia akan mampu mengerjakan yang lebih bermanfaat.

Sebagaimana firman Allah:



Artinya: Demi masa., Sesungguhnya manusia itu benar-benar dalam kerugian, Kecuali orang-orang yang beriman dan mengerjakan amal saleh dan nasehat menasehati supaya mentaati kebenaran dan nasehat menasehati supaya menetapi kesabaran. (Al-Ashar: 1-3)

Perhatikan Al-Qur'an surat Al-Zalzalah ayat 7 da 8



Artinya: Barangsiapa yang mengerjakan kebaikan seberat dzarrahpun, niscaya dia akan melihat (balasan)nya.



Artinya: dan barangsiapa yang mengerjakan kejahatan sebesar dzarrahpun, niscaya dia akan melihat (balasan)nya pula.

Pada ayat di atas terdapat pengukuran dengan satuan ukuran berat yaitu biji dzarah (satuan terkecil) adalah satu berat yang tidak baku. Hal ini karena pada masa itu belum ada satuan baku seperti milligram (mg), gram (g), ons atau kilogram (kg).

meskipun demikian, sudah jelas Al-Qur'an juga berbicara mengenai pengukuran berat. Sekecil apaun dan seberat apapun kebaikan atau kejahatan akan mendapatkan balasannya.



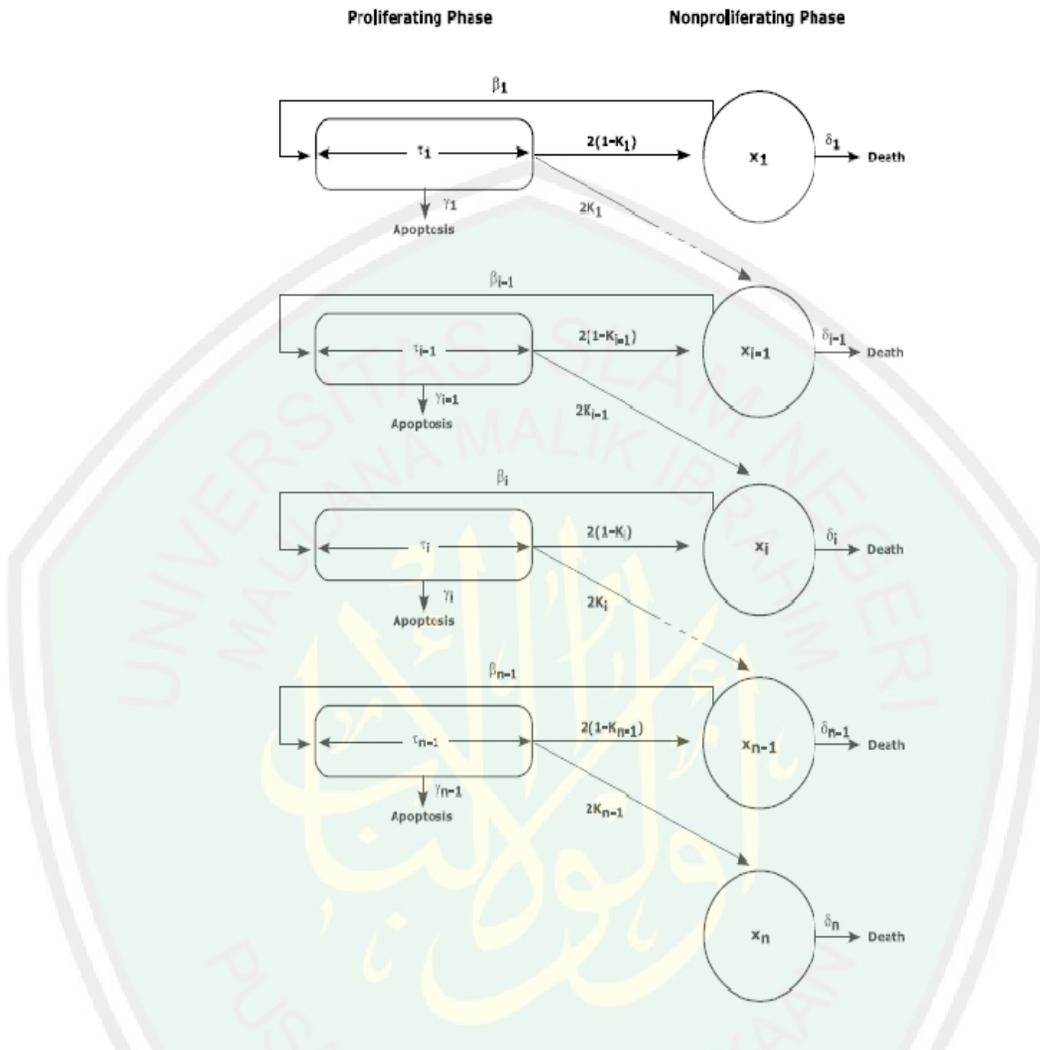
BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Model Populasi Sel Hematopoietik

Semua sel darah, yaitu sel darah merah, sel darah putih, dan platelets diproduksi oleh tulang sumsum yang disebut sel hematopoietik. Mereka adalah sel pluripoten, dengan pembaharuan diri dan kemampuan yang bebrbeda. Seluruh divisi, sel hematopoietik menghasilkan suatu peningkatan sel (dengan beberapa peningkatan, seperti sel maturasi, sel yang belum dewasa) sampai proses memimpin ke arah dewasa. Yang belakangan ini menjangkau aliran darah dan menjadi sel darah.

Populasi sel hematopoietik dibagi menjadi dua yaitu proliferasi dan nonproliferasi. Populasi sel hematopoietik juga dibagi dalam kompartemen yang berbeda, tergantung pada tingkat maturasinya mereka. n kompartemen yang dipertimbangkan, pertama dibagikan dengan pluripoten sel hematopoietik dan yang terakhir untuk maturasi sel, yang mana tidak proliferasi lagi.



Gambar 3.1 Skema Populasi Sel Hematopitik Saat Proliferasi

Pada gambar 3.1 menjelaskan bahwa populasi sel pada saat nonproliferasi dalam i kompartemen ditandai dengan x_i dan sel ini dapat mati dengan tingkat δ_i kemudian menjadi perkenalan pada fase proliferasi dengan tingkat β_i . Sel saat proliferasi mempunyai waktu τ_i untuk melaksanakan siklus sel. Mereka dapat mati oleh apoptosis dengan tingkat γ_i . Perpindahan dari satu kompartemen maturasi

kepada yang berikutnya, dari proporsi i kompartemen ke $i + 1$ adalah divisi yang diserang, dan suatu proporsi K_i membagi sel kepada fase nonproleferasi yang berikutnya, dimana yang lainnya masuk kembali ke tahap yang sama pada fase nonproliferasi.

Diasumsikan $\beta_1, \beta_2, \sigma_1, \sigma_2$ dan σ_3 adalah positif maka populasi sel darah merah, sel darah putih dan platelet akan saling mempengaruhi dan dimisalkan $2(1 - K_i)e^{-\nu_i\tau_i} = \sigma_i$.

Berdasarkan uraian di atas, jumlah yang mempengaruhi proliferasi sel darah merah, maka bentuk persamaannya menjadi

$$\frac{dx_1}{dt} = -(\delta_1 + \beta_1)x_1 + \sigma_1\beta_1x_1(t - \tau_1) \quad (3.1)$$

Jumlah yang mempengaruhi proliferasi sel darah putih terhadap waktu, maka bentuk persamaannya menjadi

$$\frac{dx_2}{dt} = -(\delta_2 + \beta_2)x_2 + \sigma_2\beta_2x_2(t - \tau_2) + \sigma_1\beta_1x_1(t - \tau_1) \quad (3.2)$$

Jumlah yang mempengaruhi proliferasi platelet terhadap waktu, maka bentuk persamaannya menjadi

$$\frac{dx_3}{dt} = -\delta_3x_3 + \sigma_3\beta_2x_2(t - \tau_2) \quad (3.3)$$

Dari uraian di atas, maka model matematika sel hematopoietic membentuk suatu persamaan diferensial tak linier orde satu sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= -(\delta_1 + \beta_1)x_1 + \sigma_1\beta_1x_1(t - \tau_1) \\ \frac{dx_2}{dt} &= -(\delta_2 + \beta_2)x_2 + \sigma_2\beta_2x_2(t - \tau_2) + \sigma_1\beta_1x_1(t - \tau_1) \\ \frac{dx_3}{dt} &= -\delta_3x_3 + \sigma_3\beta_2x_2(t - \tau_2)\end{aligned}\quad (3.4)$$

3.2 Analisis Model Matematika

Berdasarkan keterangan pada subbab sebelumnya maka dapat dibentuk suatu model yang terdiri dari tiga persamaan yaitu:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= -(\delta_1 + \beta_1)x_1 + \sigma_1\beta_1x_1(t - \tau_1) \\ \frac{dx_2}{dt} &= -(\delta_2 + \beta_2)x_2 + \sigma_2\beta_2x_2(t - \tau_2) + \sigma_1\beta_1x_1(t - \tau_1) \\ \frac{dx_3}{dt} &= -\delta_3x_3 + \sigma_3\beta_2x_2(t - \tau_2)\end{aligned}\quad (3.5)$$

Di mana, untuk x_1, x_2, x_3 tertentu, laju kedewasaan dalam fase nonproliferasi $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ dan dalam satu proliferasi $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ jangka waktu fase proliferasi, σ_1 adalah konstan, dan laju pendahuluan $\beta_2 : [0, +\infty] \rightarrow R$ adalah fungsi kontinu. Kita asumsikan, untuk $i \in I_{n-1}$,

$$(H1) \quad 0 < \delta_2 \leq \delta_3, \quad 0 < \gamma_2 \leq \gamma_3, \quad \text{dan} \quad 0 \leq \tau_2 \leq \tau_3$$

$$(H2) \quad 0 := K_0 < K_1 \leq K_3 < 1$$

Tampaknya fase proliferasi lamanya τ , adalah suatu peningkatan pada kedewasaan sel (sel yang belum dewasa yang membagi lebih cepat dari sel dewasa), seperti halnya tingkat kematian, membenarkan hipotesis (H1). Lebih dari itu, seperti sel yang menjadi lebih banyak dewasa, mereka menghilangkan kapasitas pembaharuan diri sehingga laju perbedaan σ meningkat (hipotesis H2) dan menjadi semakin dekat bagi satu.

Bahwa fungsi β_i memenuhi

$$(H3) \quad 0 < \beta_3(0) \leq \beta_2(0) \quad \text{untuk} \quad i \in I_1 \quad \text{dan} \quad \beta_3 \equiv 0;$$

$$(H4) \quad \text{untuk} \quad i \in I_1, \beta_2 \text{ positif dan mengurangi fungsi seperti}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \beta_2(x) = 0$$

$$\frac{dx_1}{dt} = -(\delta_1 + \beta_1)x_1 + \sigma_1\beta_1x_1(t - \tau_1)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -(\delta_2 + \beta_2)x_2 + \sigma_2\beta_2x_2(t - \tau_2) + \sigma_1\beta_1x_1(t - \tau_1)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = -\delta_3x_3 + \sigma_3\beta_2x_2(t - \tau_2)$$

Karena $T > 0$ seperti $x_1(t) > 0$ untuk $t < T$ dan $x_1(T) = 0$. Kemudian, dari persamaan (3.1) dengan menggunakan hipotesa (H2) dan (H4) maka diperoleh

$$\frac{dx_1}{dt} = -(\delta_1 + \beta_1)x_1 + \sigma_1\beta_1x_1(t - \tau_1) > 0$$

Asumsikan bahwa $x_1, 1 \leq i \leq 3$ adalah positif dan akan ditunjukkan x_3 positif. Mengira bahwa $T > 0$ seperti bahwa $x_3(t) > 0$ untuk $x_3(T) = 0$. kemudian, dari (3.1), menggunakan (H2) dan (H4)

$$\frac{dx_3}{dt} = -\delta_3 x_3 + \sigma_3 \beta_2 x_2(t - \tau_2)$$

Akan dibuktikan bahwa persamaan (3.1) dibatasi. untuk $x_1, x_2, x_3 \in I_3$, memberi definisi fungsi $f_2, g_1 : [0, 3] \rightarrow R^+$ dengan

$$f_2(y) = 1(1 - K_2)e^{-\gamma_2 \tau_2} \beta_2(y) \text{ dan } g_1(y) = 2K_1 e^{-\gamma_1 \tau_1} \beta_1(y) \quad (3.2)$$

Dari $i \in I_1, \beta_2$, fungsi f_2 dan g_1 sedang menurun dan cenderung pada 0 ketika y cenderung tak terbatas (kecuali fungsi g_0 dan f_3 memenuhi $f_3 \equiv g_0 \equiv 0$). Dan akan dicari $x_0^2 \geq 0$ seperti

$$f_2(y) < \frac{\delta_2}{2} \text{ dan } g_1(y) < \frac{\delta_2}{2} \text{ untuk } y > x_0^2 \quad (3.3)$$

dengan definisi

$$x_1^2 = \frac{2x_0^2}{\delta_2} (f_2(0) + g_1(0)).$$

Misal $x > x_1^2$ dan $y \in [0, x]$ tertentu. Kemudian, digunakan (3.3) dan fakta bahwa f_2 menurun, didapatkan

$$f_2(y)y \leq \begin{cases} f_2(0)x_0^2, & \text{jika } y \leq x_0^2 \\ \frac{\delta_2}{2}y & \text{jika } y > x_0^2 \end{cases}$$

dengan definisi pada x_1^2 , disimpulkan

$$f_2(y)y \leq \frac{\delta_2}{2}x,$$

sama dengan hasil

$$g_1(y)y \leq \frac{\delta_2}{2}x$$

Kemudian, untuk semua $x > x_1^2$, kita punya

$$\max_{0 \leq y, z \leq x} (f_2(y)y + g_1(z)z) \leq \delta_2 x \quad (3.4)$$

Asumsikan sekarang x_1 tidak dibatasi. Kemudian satu dapat dicari $f_0 > 0$ seperti

$$x_1(t) \leq x_1(t_0) \text{ untuk } t \in [t_0 - \tau_1, t_0], \text{ dan } x_1(t_0) > x_1^1.$$

Kemudian, dari (3.1) dan digunakan (3.4), kita punya

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt}(t_0) &= -[\delta_1 + \beta_1(x_1(t_0))]x_1(t_0) + f_1(x_1(t_0 - \tau_1))x_1(t_0 - \tau_1) \\ &\leq -[\delta_1 + \beta_1(x_1(t_0))]x_1(t_0) + \delta_1 x_1(t_0) \end{aligned}$$

$$= -\beta_1(x_1(t_0))x_1(t_0)$$

$$< -\beta_1 x_1(t_0).$$

Ini memimpin ke arah kontradiksi, dapat disimpulkan bahwa, untuk semua x_1 dibatasi.

Asumsikan bahwa $x_2, i \geq 1$, di batasi dan akan ditunjukkan bahwa x_3 dibatasi.

Mengira, dengan kontradiksi, bahwa x_3 dibatasi. Kemudian satu dapat mencari $t_0 > 0$ seperti

$$x_3(t) \leq x_3(t_0) \text{ dan } x_2(t) \leq x_3(t_0) \quad \text{untuk } t \in [t_0 - \tau_3, t_0],$$

$$\text{dan } x_3(t_0) > x_1^1.$$

Kemudian, dari (3.1) digunakan (3.4), pemikiran yang sama menggunakan x_1 memimpin ke arah

$$\begin{aligned} \frac{dx_3}{dt}(t_0) &= -[\delta_3 + \beta_3(x_3(t_0))]x_3(t_0) + f_3(x_3(t_0 - \tau_3))x_3(t_0 - \tau_3) \\ &\quad + g_2(x_2(t_0 - \tau_2))x_2(t_0 - \tau_2) \\ &\leq -\beta_3(x_3(t_0))x_3(t_0) \\ &< -\beta_3 x_3(t_0) \end{aligned}$$

Ini memimpin ke arah kontradiksi, dapat disimpulkan bahwa, untuk semua $i \in I_3, x_2$ dibatasi.

Akan diselidiki, dalam bagian yang berikutnya, keberadaan posisi untuk persamaan (3.1).

Dengan memusatkan pada keberadaan perkiraan ketetapan untuk persamaan (3.1). Misal $E = (x_1, x_2, x_3)^T$ menjadi ketetapan pada (3.1). Kemudian E memenuhi

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{dx_2}{dt} = \frac{dx_3}{dt} = 0$$

Itu adalah

$$\begin{cases} [(2\sigma_1 - 1)\beta_1(\bar{x}_1) - \delta_1]\bar{x}_1 = 0 \\ 2\sigma_1\beta_1(\bar{x}_1)\bar{x}_1 + [(2\sigma_2 - 1)\beta_2(\bar{x}_2) - \delta_2]\bar{x}_2 = 0, \\ 2\sigma_2\beta_2(\bar{x}_2)\bar{x}_2 - \delta_3\bar{x}_3 = 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

$$\begin{pmatrix} \xi_1(x_1) & 0 & 0 \\ g_1(x_1) & \xi_2(x_2) & 0 \\ 0 & g_2(x_2) & \xi_3(x_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

Dimana fungsi g_1 definisi dari (3.2) dan

$$\xi_2(x) = (2(1 - K_2)e^{-\gamma_2 x_2} - 1)\beta_2(x) - \delta_2, \quad \text{untuk } i \in I_3, \quad (3.7)$$

dengan $\xi_3(x) = -\delta_3$

Sesungguhnya fungsi ξ_2 dan $i \rightarrow \xi_2(0)$ tergantung pada τ_2 . Persamaan (3.6) dapat ditulis seperti $A(E)E = 0$ dimana $A(E)$ adalah 3×3 matriks diberikan dalam (3.6)

Diketahui Bahwa $E^0 = (0, 0, 0)^T$ selalu merupakan suatu titik keseimbangan. Jika kondisi yang berikut

$$(2\sigma_1 - 1)\beta_1(0) < \delta_1, \quad (3.8)$$

kemudian menggunakan (H1), (H2), dan (H3), didapatkan

$$(2\sigma_1 - 1)\beta_2(2\sigma_1 - 1)\beta_1(0) < \delta_1 \leq \delta_2, \quad \text{untuk semua } i \in I_3$$

maka $\xi_2(\bar{x}_2) < 0$ untuk semua $i \in I_3$, dan matriks $A(\bar{E})$ pada system (3.6) invertible.

Seperti, kondisi pada persamaan (3.8), E^0 adalah titik keseimbangan.

Ketidaksamaan (3.8) memenuhi, untuk contoh, jika laju kematian δ_1 atau γ_1 adalah besar, atau laju pengenalan $\beta_1(0)$ kecil. Menguraikan situasi yang mana angka kematian mengambil keuntungan pada pembaharuan sel, untuk sel yang belum dewasa. Dari asumsi (H1), (H2) dan (H3), situasi ini kemudian valid untuk semua sel yang keberadaannya menjadi tak terelakkan.

Kemudian, asumsikan bahwa

$$(2\sigma_1 1)\beta_1(0) > \delta_1, \quad (3.9)$$

Misal $\bar{E} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)^T \neq E^0$ menjadi ketetapan pada (1). Dari (6), E menjadi ketetapan jika dan hanya jika

$$\xi_1(x_1)x_1 = 0 \quad (3.10)$$

$$\xi_1(x_1)x_1 = -g_1(x_1)x_1, \quad (3.11)$$

Mengikuti, dari (3.10), bahwa yang manapun $x_1 = 0$ atau $\xi_1(x_1) = 0$. Catatan bahwa (3.7) dan (H4), pemetaan $x \rightarrow \xi_2(x), i \in I_2$ tertentu, menurun untuk $x \geq 0$ dan $\lim_{x \rightarrow +\infty} \xi_2(x) = -\delta_2$. Dengan konsekuensi, untuk $i \in I_3$, persamaan $\xi_2(x) = 0$ mempunyai suatu solusi positif jika dan hanya jika $\xi_2(0) > 0$, dan solusi kemudian unik. Dari (3.9), $\xi_2(0) > 0$, maka persamaan (3.10) mempunyai bilangan dua solusi, $\bar{x}_1 = 0$ dan $\bar{x}_1 = x_1 > 0$, solusi unik pada $\xi_2(x) = 0$.

Sekarang misalkan $i \geq 2$ dan \bar{x}_i menjadi tertentu. akan dipertimbangkan dua kasus: setiap $x_1 = 0$ atau $x_2 = 0$ atau $x_1 = x_2 > 0$.

Jika $x_1 = 0$ kemudian x_2 , memenuhi, $\xi_2(x_2)x_2 = 0$. Mengikuti bahwa $x_2 = 0$ atau $x_2 = x_2 > 0$, dimana $\xi_2(x_2) = 0$, membuktikan bahwa $\xi_2(0) > 0$.

Jika $x_1 = x_1 > 0$., kemudian x_2 harus memenuhi (3.11) maka x_2 dengan keras positif dan

$$\xi_2(x_2) = -\frac{g_1(x_1)x_1}{x_2}$$

Ketika pemetaan $x \rightarrow g_1(x_1)x_1/x$ adalah negatif dan meningkat, dengan

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{g_1(x_1)x_1}{x} = 0$$

Mengikuti bahwa di sana ada suatu solusi positif $x_2 = x_2$ pada persamaan (3.11).

Satu yang dapat dilihat bahwa situasi seperti yang mengikuti: ketika $x_1 > 0$., x_2 adalah positif dan determinan yang unik seperti solusi pada (3.11). Di mana ketika $x_1 = 0$., kemudian $x_2 = 0$., adalah selalu suatu solusi dan suatu nilai positif pada x_2 ., mungkin ada, membuktikan bahwa $\xi_2(0) > 0$..

Dalam daerah determinan keberadaan pada keseimbangan menurut tanda pada $\xi_2(0)$., misal seperti definisi.

$$i_0 := \min \{i \in I_3 / \xi_2(0) < 0\}$$

Ketika $\xi_3(0) = -\delta_3 < 0$, kemudian i_0 mendefinisikan.. Karena, dari (H1), (H2) dan (H3), pemetaan $i \rightarrow \xi_2(0)$ menurun, kemudian $\xi_2(0) \leq \xi_{i_0}(0) < 0$, untuk semua $i \geq i_0$. Dengan $\xi_2(0) < 0$. untuk semua. $i \geq i_0$.

Misal $i_0 := \min \{i \in I_3 / \xi_2(0) < 0\}$

Asumsikan bahwa $i_0 = 1$, bahwa $\xi_2(0) < 0$. Kemudian E^0 hanya bagian tetap tetap pada persamaan (3.1).

Asumsikan bahwa $i_0 \geq 2$, bahwa $\xi_2(0) > 0$. Kemudian system (3.1) mempunyai kesetimbangan. Kesetimbangan ini, ditandai dengan E^0 , E , E_1, \dots, E_{i_0-2} , diberikan oleh

$$E^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, E_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \text{ dan } E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

dimana $x_2 > 0$ solusi unik pada persamaan

$$(2\sigma_1 - 1)\beta_2(x) - \delta_2 = 0,$$

Jika $x_1 = 0$, dan x_2 solusi unik pada persamaan

$$(2\sigma_1 - 1)\beta_2(x) - \delta_2 = -\frac{2}{x}\sigma_1\beta_1(x_1)x_1,$$

Jika $x_1 > 0$,

Misal $E = (\bar{x}_2)_{i \in I_2}$ menjadi posisi tetap pada sistem (3.1). Asumsikan $\beta_2, i \in I_2$, menjadi C^1 fungsi. Linierisasi pada sistem (3.1) sekitar E diberikan oleh

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= -(\delta_1 + \beta_1)x_1 + \sigma_1\beta_1x_1(t - \tau_1) \\ \frac{dx_2}{dt} &= -(\delta_2 + \beta_2)x_2 + \sigma_2\beta_2x_2(t - \tau_2) + \sigma_1\beta_1x_1(t - \tau_1) \\ \frac{dx_3}{dt} &= -\delta_3x_3 + \sigma_3\beta_2x_2(t - \tau_2)\end{aligned}$$

dimana, untuk $i \in I_2, \alpha_2(x) = d(x\beta_2(x))/dx$, satu yang dapat diberitahukan bahwa mempunyai yang digunakan notasi x_i sebagai gantinya pada $x_2 - \bar{x}_2$ dalam (3.12), untuk tujuan pada kesederhanaan.

Sistem (3.12) dapat ditulis pada matriks dari

$$x'(t) = A_0x(t) + \sum_{i=1}^3 A_i x(t - \tau_i)$$

dimana $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))^T$, $A_0 = \text{diag} \left(\left(-(\delta_j + \alpha_j(x_j)) \right) \right)_{1 \leq j \leq 3}$ dengan

$\alpha_3(x_3) = 0$ dan (3×3) matriks $A_2, i \in I_3$ mendefinisikan dengan

$$(A_1)_{j,k} = \begin{cases} 2\sigma_1\alpha_1(\bar{x}_1), & j = k = 1 \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases}$$

$$(A_1)_{j,k} = \begin{cases} 2\sigma_1\alpha_1(\bar{x}_1), & j=1 \text{ dan } k=1, \\ 2\sigma_2\alpha_2(\bar{x}_2), & j=k=2, \\ 0 & \text{lainnya} \end{cases}$$

dan

$$(A_1)_{j,k} = \begin{cases} 2\sigma_3\alpha_3(\bar{x}_3), & j=3, k=2 \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases}$$

Persamaan karakteristik pada sistem (3.12) kemudian mendefinisikan dengan

$$\det\left(\lambda Id - A_0 - \sum_{i=1}^3 e^{-\lambda\tau_i}\right) = 0$$

dimana Id ditandai identitas matrikas pada $M_3(R)$.

Setelah perhitungan dengan mudah, persamaan karakteristik menurun

$$(\lambda + \delta_3) \prod_{i=1}^3 \left[\lambda + \delta_2 + \alpha_2(\bar{x}_2) - 2(1 - K_2) e^{-\gamma_2\tau_2} \alpha_2(\bar{x}_2) e^{-\lambda\tau_2} \right] = 0 \quad (3.13)$$

Kita mengingat bahwa suatu posisi tetap \bar{E} pada (3.1) lokasi asimtotik stabil jika semua akar karakteristik pada (3.12) mempunyai bilangan real negatif, dan tidak stabil jika akar karakteristik dengan bilangan real positif ada. Stabilitas pada posisi tetap dapat hilang hanya jika akar imajiner nampak.

Dari (3.13) akar persamaan karakteristik $\lambda = -\delta_3 < 0$ dan λ solusi pada persamaan

$$\lambda + A_2(\tau_1, \tau_2, \tau_3) - B_2(\tau_1, \tau_2, \tau_3)e^{-\lambda\tau_2} = 0, \quad (3.14)$$

Untuk $i \in I_2$, di mana

$$\begin{aligned} A_2(\tau_1, \tau_2, \tau_3) &= \delta_2 + \alpha_2(\bar{x}_2), \\ B_2(\tau_1, \tau_2, \tau_3) &= 2(1 - K_2)e^{-\gamma_2\tau_2}\alpha_2(\bar{x}_2) \end{aligned} \quad (3.15)$$

akan ditunjukkan bahwa koefisien A_2 dan B_2 tergantung, implisit, pada semua waktu ketrelambatan τ_j , dengan $1 \leq j \leq 2$, melalui nilai-nilai pada keseimbangan \bar{x}_2 .

3.3 Titik Kestabilan Model Dengan Persamaan Diferensial

Dari model yang terdiri dari tiga persamaan di atas membentuk sistem persamaan diferensial taklinier. Kemudian diberikan parameter pada persamaan diferensial tersebut (Adimy M, 2007)

$$\delta_1 = 0.05 \quad \delta_2 = 0.1$$

$$\delta_3 = 0.15 \quad \beta_1 = 2$$

$$\beta_2 = 1.5 \quad \tau_1 = 0.5$$

$$\tau_2 = 0.8 \quad \sigma_1 = 1.8$$

$$\sigma_2 = 0.178 \quad \sigma_3 = 0.16$$

Sehingga sistem persamaan diferensialnya menjadi

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -(0.05 + 2)x_1 - 1.8 \times 2x_1(t - 0.5) \\ \frac{dx_2}{dt} &= -(0.15 + 1.5)x_2(t - 0.8) + 0.178 \times 1.5x_2 + 0.16 \times x_1(t - 0.5) \\ \frac{dx_3}{dt} &= -0.15x_3 + 0.16 \times 1.8x_2(t - 0.8) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Nilai eigen dari persamaan (3.5) adalah sebagai berikut:

$$\text{nilai eigen} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial y} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

yaitu

$$\frac{\partial x}{\partial x} = -\delta_1 - \beta_1 + \sigma_1 \beta_1 x(t - \tau_1)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \sigma_2 \beta_2 + \sigma_1 \beta_1$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial x}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial y} = -\delta_2 - \beta_2 x(t - \tau_2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \sigma_3 \beta_2 x(t - \tau_1)$$

$$\frac{\partial x}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial z} = -\delta_3$$

Sehingga menghasilkan matrik jacobian sebagai berikut

$$\text{Matrik jacobian} = \begin{bmatrix} -\delta_1 - \beta_1 + \sigma_1 \beta_1 x(t - \tau_1) & 0 & 0 \\ \sigma_2 \beta_2 + \sigma_1 \beta_1 & -\delta_2 - \beta_2 x(t - \tau_2) & 0 \\ 0 & \sigma_3 \beta_2 x(t - \tau_1) & -\delta_3 \end{bmatrix}$$

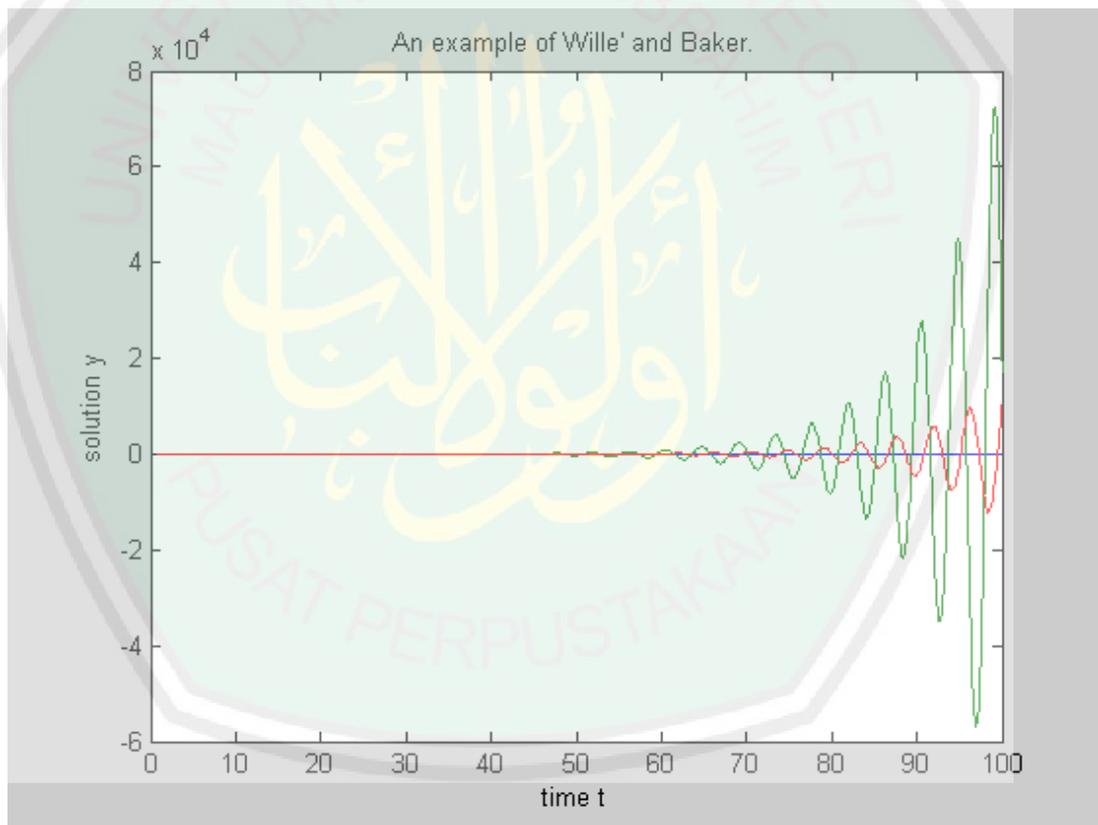
Dengan menggunakan software maple, diperoleh hanya ada satu titik tetap sebagai titik kestabilan yakni $\{x = 0., y = 0.09696969697, z = 1.861818182\}$ yang menunjukkan atau menggambarkan saat proliferasi.

Dan nilai matrik jacobian disekitar titik kritis yang menunjukkan kestabilan saat proliferasi, yakni:

$$\text{jac} = \begin{bmatrix} -5.65 & 0 & 0 \\ 0.2670 & -1.65 & 0 \\ 0 & 2.88 & -0.15 \end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh nilai eigen = $\{-0.1500000000, -1.6500000000, -5.6500000000\}$

Sedangkan dengan menggunakan program matlab, diperoleh solusi sistem (3.5) pada grafik x, y, z terhadap waktu tertentu.



Gambar 3.2 Grafik Perubahan Jumlah Populasi Sel Hematopoietik

Pada gambar 3.2 garis hijau menggambarkan perubahan jumlah populasi sel darah merah yang proliferasi saat waktu t , garis merah menggambarkan perubahan

jumlah populasi sel darah putih yang proliferasi saat waktu t dan pada garis biru menggambarkan jumlah populasi perubahan platelet yang proliferasi saat waktu t .



BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Persamaan pertama menjelaskan tentang perubahan populasi sel darah merah terhadap waktu, persamaan kedua yaitu perubahan jumlah populasi sel darah putih terhadap waktu, dan persamaan yang ketiga perubahan jumlah populasi platelet terhadap waktu.

Sehingga menghasilkan matrik jacobian sebagai berikut

$$\text{Matrik jacobian} = \begin{bmatrix} -\delta_1 - \beta_1 + \sigma_1 \beta_1 x(t - \tau_1) & 0 & 0 \\ \sigma_2 \beta_2 + \sigma_1 \beta_1 & -\delta_2 - \beta_2 x(t - \tau_2) & 0 \\ 0 & \sigma_3 \beta_2 x(t - \tau_1) & -\delta_3 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan software maple, diperoleh hanya ada satu titik tetap sebagai titik kestabilan yakni $\{x = 0., y = 0.09696969697, z = 1.861818182\}$ yang menunjukkan atau menggambarkan saat proliferasi.

Dan nilai matrik jacobian disekitar titik kritis yang menunjukkan kestabilan saat proliferasi, yakni:

$$\text{jac} = \begin{bmatrix} -5.65 & 0 & 0 \\ 0.2670 & -1.65 & 0 \\ 0 & 2.88 & -0.15 \end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh nilai eigen = $\{-0.1500000000, -1.6500000000, -5.6500000000\}$

4.2 Saran

Pembahasan mengenai model matematika ini masih terbuka bagi peneliti lain untuk melanjutkan penelitian ini pada aplikasinya dan bisa juga mengadakan penelitian yang sejenis dengan jenis-jenis sel yang berbeda.

DAFTAR PUSTAKA

- Abdusysykir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang.
- Adimy, Mostafa. 2007. *Asymptotic Behavior of a Discrete Maturity Structured System of Hematopoietic Stem Cell Dynamics with Several delay*. Laboratoire de Mathematiques CNRS UMR 5142. France
- Amaliyah, Fakrina. 2007. *Pemodelan Penyakit Tuberkulosis (TB) dengan Sistem Persamaan Diferensial*. Skripsi Tidak diterbitkan. Malang: Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang.
- Baiduri. 2002. *Persamaan Diferensial dan Matematika Model*. Malang: UMM press.
- Beretta, E., Kuang, Y. 2002. *Geometric Stability Switch Criteria in Delay Differential System with Delay Dependent Parameters*. SIAM J. Math. Anal 33(5), 114-116.
- Finzio dan Ladas. 1988. *Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern*. Jakarta: Erlangga.
- Kusumah, Yaya S. 1989. *Persamaan Diferensial*, Jakarta: Departemen Pendidikan dan Kebudayaan.
- Pamuntjak, R.J dan Santosa Widiarti. 1990. *Persamaan Diferensial Biasa*. Bandung: ITB.
- Purcell, E.J, dkk. 1984. *Kalkulus dan Geometri Analitis Jilid 1 Edisi 4*. ITB: Erlangga
- Shampine, L.F., Thompson, S. 2001. *Solving DDEs in MATLAB*. Appl. Numer. Math. 37, 441-458. <http://www.radford.edu/thompson/webdes>

DAFTAR ISTILAH



Basofil	= Sifat muda dipulas dengan pewarna basa
Bikonkaf	= Sifat cekung kembar suatu lensa
Embrio	= Hasil pembuahan sel telur pada tahap permulaan kemudian menjadi Janin
Eosiofil	= Zat warna yang menyebabkan warna merah muda
Eritosit	= Sel darah merah
Hemoglobin	= Zat warna dalam sel darah merah yang berguna untuk mengangkut oksigen dan karbon diaoksida
Leukosit	= Sel darah putih
Limfoid	= Zat yang menyerupai limfosit
Limfosit	= Sejenis leukosit dengan inti tunggal tak bersegmen, umumnya tak mengandung butir-butir dalam plasma
Mesoderm	= Lapis benih tengah
Metamyosit	= bentuk peralihan mielosit antara mielosit dan granulosit
Monosit	= sejenis leukosit dengan satu inti, bersifat fagositik

Myosit	= Leukosit granuler muda yang berasal dari mieloblas
Neutrofil	= Sifat dapat dipulas dengan zat warna netral
Nukleus	= Inti sel
Normoblas	= Sel darah merah muda
Platelet	= Keping darah, trombosit
Preparat	= Sesuatu yang dibuat atau disediakan menurut aturan tertentu
Proeritoblas	= Sel darah merah muda sebelum menjadi normoblas
Promilosit	= Mielosit termuda yang berasal dari mieloblas



function ddex1

%DDEX1 Example 1 for DDE23.

% This is a simple example of Wille' and Baker that illustrates the
% straightforward formulation, computation, and plotting of the solution
% of a system of delay differential equations (DDEs).

%

% The differential equations

%

% $y'_1(t) = y_1(t-1)$

% $y'_2(t) = y_1(t-1) + y_2(t-0.2)$

% $y'_3(t) = y_2(t)$

%

% are solved on $[0, 5]$ with history $y_1(t) = 1$, $y_2(t) = 1$, $y_3(t) = 1$ for
% $t \leq 0$.

%

% The lags are specified as a vector $[1, 0.2]$, the delay differential

% equations are coded in the subfunction DDEX1DE, and the history is

% evaluated by the function DDEX1HIST. Because the history is constant it

% could be supplied as a vector:

% `sol = dde23(@ddex1de,[1, 0.5],ones(3,0.8),[0, 0.5]);`

%

% See also DDE23, @.

% Jacek Kierzenka, Lawrence F. Shampine and Skip Thompson

```

% Copyright 1984-2002 The MathWorks, Inc.

% $Revision: 1.2 $ $Date: 2002/04/08 20:04:38 $

sol = dde23(@ddex1de,[1, 0.5],@ddex1hist,[0.8, 100]);

figure;

plot(sol.x,sol.y)

title('An example of Wille" and Baker.');
```

```

xlabel('time t');
ylabel('solution y');
```

```

function s = ddex1hist(t)

% Constant history function for DDEX1.
s = ones(3,1);
```

```

function dydt = ddex1de(t,y,Z)

% Differential equations function for DDEX1.

ylag1 = Z(:,1);
ylag2 = Z(:,2);

dydt = [ -2.5*y(1)-3.6*ylag1(1)
         -1.65*ylag1(2) + 0.267*y(2)+0.16*ylag1(1)
         -0.15*y(3)+0.288*ylag2(2)          ];
```



DEPARTEMEN AGAMA RI

**UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK
IBRAHIM (UIN MMI) MALANG**

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang (0341)551345

Fax. (0341)572533

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : DWI MARDIANA WATI
NIM : 04510033
Fakultas/ jurusan : SAINS DAN TEKNOLOGI/ MATEMATIKA
Judul skripsi : *ANALISIS PERSAMAAN DIFFRENSIAL PADA
POPULASI SEL HEMATOPOIETIK*
Pembimbing I : USMAN PAGALAY , M.Si
Pembimbing II : ABDUL AZIZ, M.Si

No	Tanggal	HAL	Tanda Tangan	
1	27 November 2008	Proposal	1.	
2	28 November 2008	ACC Proposal		2.
3	28 Mei 2009	Konsultasi BAB III	3.	
4	20 Juli 2009	Revisi BAB III		4.

5	14 Juli 2009	Konsultasi BAB I dan II	5.	
6	14 Juli 2009	Kajian Keagamaan		6.
7	23 Juli 2009	Revisi BAB I dan II	7.	
8	23 Juli 2009	Revisi Keagamaan		8.
9	24 Juli 2009	ACC BAB I, II, dan III	9.	
10	24 Juli 2009	ACC Keseluruhan		10.

Mengetahui,

Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M.Si

NIP. 150 318 321