PENDETEKSI PARAMETER OUTLIER PADA MODEL REGRESI NONLINIER EKSPONENSIAL DENGAN MENGGUNAKAN METODE *MAKSIMUM LIKELIHOOD ESTIMATION*

SKRIPSI

Oleh:
AMINATUS SAKDIYAH
NIM. 04510027

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
MALANG
2009

PENDETEKSI PARAMETER OUTLIER PADA MODEL REGRESI NONLINIER EKSPONENSIAL DENGAN MENGGUNAKAN METODE *MAKSIMUM LIKELIHOOD ESTIMATION*

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Universitas Islam Negeri Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan Dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
AMINATUS SAKDIYAH
NIM. 04510027

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
MALANG
2009

PENDETEKSI PARAMETER OUTLIER PADA MODEL REGRESI NONLINIER EKSPONENSIAL DENGAN MENGGUNAKAN METODE *MAKSIMUM LIKELIHOOD ESTIMATION*

SKRIPSI

Oleh :
AMINATUS SAKDIYAH
NIM. 04510027

Telah disetujui untuk diuji

Malang, 17 Januari 2008

Dosen pembimbing I	**Dosen Pembimbing II**
Sri Harini, M.Si	**Abdul Aziz, M.Si**
NIP. 150 318 321	**NIP. 150 377 256**

Mengetahui,

Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M.Si
NIP. 150 318 321

PENDETEKSI PARAMETER OUTLIER PADA MODEL REGRESI NONLINIER EKSPONENSIAL DENGAN MENGGUNAKAN METODE *MAKSIMUM LIKELIHOOD ESTIMATION*

SKRIPSI

OLEH:

AMINATUS SAKDIYAH
NIM. 04510027

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal:
19 Januari 2009

Susunan Dewan Penguji:		Tanda Tangan
1. Penguji Utama	: Drs. H. Turmudi, M.Si	( )
2. Ketua	: Usman Pagalay, M.Si	( )
3. Sekretaris	: Sri Harini, M.Si	( )
4. Anggota	: Abdul Aziz, M.Si	( )

Mengetahui dan Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M.Si
NIP. 150 318 321

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Aminatus Sakdiyah

NIM : 04510027

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambil alihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri.

Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 17 Januari 2009

Yang membuat pernyataan

Aminatus Sakdiyah

NIM. 04510027

Motto

"Sebaik-Baik Manusia Adalah Yang Bermanfaat Bagi Manusia Yang Lain"

"*Sesungguhnya Allah membela orang-orang yang telah beriman. Sesungguhnya Allah tidak menyukai tiap-tiap orang yang berkhianat lagi mengingkari nikmat*". (Al-Hajj: 38)

HALAMAN PERSEMBAHAN

بسم الله الرحمن الرحيم

Karya ini ku persembahan untuk...

Allah S.W.T, yang telah memberikan petunjuk dan hidayah-Nya. Lantunan Sholawat tercurah untuk Penerang dunia Muhammad S.A.W, inspirator umat manusia dalam berkarya.

Ayah&Ibu (*H. Abd Munif & Hj. Sulamiyah*), terima kasih atas kasih sayang, do'a, perhatian, semoga Allah membalas semua kebaikan yang telah Ayah&Ibu lakukan pada ananda karena hanya Allah yang bisa membalas kebaikan Ayah&Ibu

Kakak-kakakku (*Khoirun Nisa', Ahmad Kharis*) yang telah memberikan perhatian, semangat, bimbingan dan kebaikan yang tidak akan pernah bisa adik balas

Sopyan Hadi **yang telah menemani, memberikan semangat, perhatian dan bimbingan, terima kasih atas semua yang engkau lakukan**

Special untuk teman-teman IPS NU Pagar Nusa UIN Malang *khususnya angkatan '04*,

Teman-teman Matematik '04 semoga selalu sukses.

KATA PENGANTAR

بسم الله الرحمن الرحيم

Assalamu'alaikum Wr.Wb.

Teriring ucapan puja dan puji syukur kehadirat Allah SWT. yang telah melimpahkan rahmat, taufik dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan Skripsi yang berjudul "Pendeteksi Parameter Outlier Pada Model Regresi Nonlinier Eksponensial dengan Menggunakan Metode Maximum Likelihood Estimation**".**

Penulisan skripsi ini dapat terselesaikan berkat bimbingan dan motivasi dari dosen pembimbing, bapak dan ibu dosen serta bantuan dari semua pihak. Menyadari dengan sepenuhnya, bahwa penulisan skripsi ini tidak lepas dari banyak pihak. Oleh karena itu, tidak lupa penulis ucapkan banyak-banyak terima kasih kepada:

1. Bapak Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Malang
2. Bapak Prof. Drs. Sutiman B. Sumitro, SU., DSc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang
3. Ibu Sri Harini, M.Si, selaku Dosen pembimbing dan ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Malang, yang telah bersedia meluangkan waktunya untuk membimbing dan mengarahkan penulis dalam menyelesaikan penulisan skripsi.

4. Bapak Abdul Aziz, M.Si selaku dosen pembimbing, terima kasih atas masukan dan arahannya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini.
5. Seluruh Dosen Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang yang telah memberikan ilmu pengetahuan kepada penulis selama di bangku kuliah, serta seluruh karyawan dan staf UIN Malang.
6. Kedua orang tua (Bapak Abd Munif dan Ibu Sulamiyah), keiklasan beliau memberikan dukungan moril dan sprituil, sehingga penulisan tugas akhir ini dapat terselesaikan
7. Kakak-kakakku (Khoirun Nisa' dan Ahmad Kharis), terimakasih atas perhatian dan supportnya.
8. Terimakasih yang amat sangat kepada Sofyan Hadi dengan sabar engkau telah menemani sampai skripsi ini selesai dan Teman-teman Pagar Nusa Koms. Universitas Islam Negeri Malang khususnya angkatan '04 (semoga selalu kompak).
9. Terimakasih juga kami sampaikan teman-teman jurusan matematika angkatan '04 yang telah memberikan support, semangat dan do'a.
10. Semua pihak yang tidak mungkin penulis sebut satu persatu, atas keiklasan bantuan moril dan sprituil penulis ucapkan terima kasih.

Penulis menyadari sepenuhnya bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna. Untuk itu, kritik dan saran yang bersifat membangun dari berbagai pihak selalu dinantikan demi kesempurnaan skripsi ini. Dan untuk itu, dengan segala kerendahan hati, penulis mengharapkan semoga skripsi ini dapat diterima.

Semoga ikhtiar ini senantiasa mendapat ridho dan berkah dari Allah SWT. sekaligus sebagai ibadah sosial yang bermanfaat. Akhir kata, semoga skripsi ini dapat bermanfaat khususnya bagi penulis dan pembaca pada umumnya. Amiiiiin.........

Wassalamu'alaikum Wr.Wb

.

Malang, 17 Januari 2009

Penyusun

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR SIMBOL

Lambang Matematika

	: Berdistribusi
$\leq$	: Lebih kecil atau sama dengan
$\geq$	: Lebih besar atau sama dengan
∞	: Tak berhingga
$<$	: Lebih kecil daripada
$>$	: Lebih besar daripada
$\prod$	: Untuk perkalian
$\sum$	: Untuk penjumlahan

Abjad Yunani

μ	: Mu
Θ θ	: Theta
σ	: Sigma
λ	: Lambda
π	: Pi
ϕ	: Phi
∂	: Dho
ε	: Epsilon

ψ : Psi

β : Bheta

Lambang Khusus

μ	: Nilai Tengah (rataan)
$\bar{X}$	: Rata-rata pada pengamatan X
$\bar{Y}$	: Rata-rata pada pengamatan Y
$\rightarrow$	: Menuju
s^2	: Ragam untuk sampel
σ^2	: Ragam (varian) untuk populasi
X	: Matrik **X** yang entri-entrinya merupakan peubah acak
$\underline{\beta}$	: Matrik vektor β yang entri-entrinya terdiri dari parameter $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$
$\underline{\psi}$	: Matrik vektor ψ yang entri-entrinya terdiri dari parameter $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$
$\underset{\sim}{\mathbf{0}}$	: Matrik vektor 0 yang entri-entrinya terdiri dari bilangan nol
$\underline{\hat{\beta}}$	: Penduga dari matrik vektor β
$\underline{\hat{\psi}}$	: Penduga dari matrik vektor ψ
$\hat{\theta}$	: Penduga dari parameter θ
E	: Expectation (nilai harapan)

T	: Transpose
$L(x_1,\ldots,x_n;\theta)$	: Fungsi likelihood
$f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n;\theta)$	: Fungsi padat peluang
$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$	: Peubah acak
N	: Normal

ABSTRAK

Sakdiyah, Aminatus. 2009. *Pendeteksi Parameter Outlier pada Model Regresi Nonlinier Eksponensial dengan Menggunakan Metode Maximum Likelihood Estimation*. Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Malang. Pembimbing: Sri Harini, M. Si dan Abdul Aziz, M. Si.

Kata kunci: outlier, pendugaan parameter, regresi non linier eksponensial, *maksimum likelihood estimation*.

Secara umum outlier (pencilan) dapat diartikan data yang tidak mengikuti pola umum model dan secara kasar dapat diambil patokan yaitu yang sisanya berjarak tiga kali simpangan baku atau lebih dari rata-ratanya (yaitu nol). Outlier merupakan salah satu faktor yang dapat mempengaruhi pendugaan parameter pada model regresi nonlinier eksponensial. Untuk mengetahui apakah outlier berpengaruh terhadap pendugaan parameter pada model regresi nonlinier eksponensial dilakukan dengan jalan mendeteksi parameter model regresi nonlinier eksponensial yang tidak terdapat outlier dengan yang terdapat outlier. Penelitian ini bertujuan untuk mendeteksi parameter outlier pada model regresi nonlinier eksponensial, dan diharapkan dapat mempermudah para peneliti dalam mendeteksi parameter outlier pada model regresi eksponensial yang mengandung outlier.

Metode yang digunakan untuk mendeteksi parameter outlier model regresi nonlinier eksponensial adalah metode *maximum likelihood estimation*. Untuk membuktikan pengaruh outlier terhadap suatu pendugaan parameter pada model regresi nonlinier eksponensial dilakukan suatu pengujian terhadap pendugaan parameter yang dihasilkan dari metode *maximum likelihood estimation* yaitu dengan cara menentukan sifat-sifat pendugaan parameter yang tidak mengandung outlier dengan yang mengandung outlier sesuai sifat-sifat pendugaan parameter yang baik yaitu unbias, efisien, dan konsisten.

Hasil penelitian ini menujukkan bahwa pendugaan parameter yang dihasilkan model regresi eksponensial yang tidak mengandung outlier ternyata lebih baik dari pada yang mengandung outlier dikarenakan pendugaan parameter yang dihasilkan model regresi eksponensial yang tidak mengandung outlier memenuhi sifat-sifat dari pendugaan parameter yang baik yaitu unbias, efisien dan konsisten. Sedangkan pendugaan parameter yang dihasilkan model regresi eksponensial yang mengandung outlier tidak memenuhi sifat-sifat dari pendugaan parameter tersebut. Oleh karena itu outlier dapat mempengaruhi hasil dari suatu pendugaan parameter.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan ilmu yang mendasari berbagai macam ilmu yang lain misalkan ekonomi, kesehatan, pertahanan dan keamanan, budaya, sosial, politik, dan agama. Sedangkan cabang ilmu matematika yang seringkali digunakan adalah statistik. Statistik yaitu metode atau ilmu yang mempelajari cara pengumpulan, pengolahan, penganalisisan, penafsiran dan penarikan kesimpulan (Hasan, 2002: 2).

Dalam statistik tidak jarang berhadapan dengan persoalan yang melibatkan dua atau lebih peubah atau variabel yang ada, atau diduga ada, dalam suatu hubungan tertentu. Bentuk hubungan ini dikenal dengan nama regresi untuk satu peubah atas peubah lain. Regresi merupakan bentuk hubungan antara peubah respon atau peubah terikat atau peubah tak bebas dan peubah prediktor atau peubah bebas.

Suatu model regresi linier ataupun nonlinier tidak akan terlepas dari permasalahan sisaan. Sisaan (*residual*) ε_i didefinisikan sebagai selisih antara nilai pengamatan Y_i dan nilai ramalannya $\hat{Y}_i$, $i = 1,2,...,n$, yang diperoleh dari persamaan regresi (Draper dan Smith, 1992: 135). Sisaan tersebut seringkali tidak dihiraukan atau biasanya dihilangkan, apalagi jika nilai sisaan tersebut sangat besar dibandingkan dengan sisaan lainnya. Sisaan tersebut biasa disebut dengan pencilan (outlier).

Sisaan yang merupakan pencilan (outlier) adalah yang nilai mutlaknya jauh lebih besar dari pada sisaan-sisaan lainnya dan bisa jadi terletak tiga atau empat kali simpangan baku atau lebih jauh lagi dari rata-rata sisaannya. Pencilan merupakan suatu keganjilan dan menandakan suatu titik data yang sama sekali tidak tipikal dibandingkan data lainnya. Oleh karenanya, suatu pencilan patut diperiksa secara seksama, barangkali saja ada alasan dibalik keganjilan itu dapat diketahui (Draper dan Smith, 1992: 146).

Suatu penelitian khususnya yang melibatkan suatu variabel respon dan variabel *explanatory*, maka model regresi merupakan model yang cocok digunakan dalam menganalisis data. Model regresi ini mempunyai 2 bentuk yaitu bentuk linier dan tak linier dalam parameternya. Model yang linier dalam parameternya adalah yang dapat didekati dengan teknik regresi berganda, seperti model-model polinom. Model yang tak linier dalam parameternya dikatakan linier instrinsik bila suatu transformasi dapat membuatnya linier. Kurva-kurva logaritma dan eksponensial termasuk golongan ini. Model yang tak dapat dilinierkan melalui transformasi dikatakan tidak linier instrinsik dan analisis yang berhubungan dengannya disebut regresi tak linier (Steel dan Torrie, 540:1993). Salah satu model regresi nonlinier (yang secara instrinsik linier) adalah model eksponensial. Penggunaan analisis regresi ini bertujuan untuk mendeteksi parameter outlier pada model regresi nonlinier eksponensial.

Sedangkan metode yang digunakan untuk mendeteksi parameter outlier adalah metode *maximum likelihood estimation* dengan cara menentukan penduga dari model mean shift yang berasal dari model regresi eksponensial yang telah dilinierkan. Terdapat banyak metode untuk menduga parameter model nonlinier, akan tetapi salah satu metode klasik untuk menduga model regresi nonlinier adalah metode maksimum likelihood.

Dalam mendeteksi outlier pada model regresi nonlinier eksponensial terdapat beberapa macam asumsi tehadap nilai pengamatan (variabel random) akan tetapi dalam pendeteksian parameter outlier dan pendugaan parameter menggunakan satu asumsi, yaitu nilai pengamatannya diasumsikan berdistribusi normal, dikarenakan distribusi normal merupakan salah satu pendekatan penyelesaian yang cukup baik bagi distribusi-distribusi lain, termasuk distribusi bagi variabel diskrit seperti binomial dan poisson (Harini, 2007:123).

Pendeteksian parameter outlier dilakukan karena outlier merupakan masalah yang paling utama yang dapat mempengaruhi pendugaan parameter. Maka dari itu diperlukan suatu cara untuk mengatasinya yaitu melakukan suatu pendeteksian terhadap parameter outlier tersebut dengan menggunakan suatu metode. Dan metode tersebut haruslah memberikan hasil yang baik, metode tersebut adalah metode *maximum likelihood estimation*. Untuk membuktikan apakah pendugaan tersebut memenuhi syarat sifat-sifat pendugaan yang baik maka dilakukan suatu pengujian terhadap hasil pendugaan dengan sifat-sifat pendugaan itu sendiri yaitu unbias, efisien, dan konsisten.

Dalam Al Quran telah disinggung terkait dengan permasalahan outlier dan pendugaan. Untuk permasalahan outlier yaitu terdapat pada Surat Al-Jinn ayat 14:

وَأَنَّا مِنَّا ٱلۡمُسۡلِمُونَ وَمِنَّا ٱلۡقَٰسِطُونَ ۖ فَمَنۡ أَسۡلَمَ فَأُوْلَٰٓئِكَ تَحَرَّوۡاْ رَشَدٗا ١٤

Artinya:" Dan sesungguhnya di antara kami ada orang-orang yang taat dan ada (pula) orang-orang yang menyimpang dari kebenaran. Barangsiapa yang taat, maka mereka itu benar-benar telah memilih jalan yang lurus". (Qs. Al-Jinn, 72:14)

Pada Qs. Al-Jinn ayat 14 tersebut dijelaskan bahwa terdapat suatu kaum jin yang taat dan patuh kepada Allah SWT dan ada pula para penyimpang. Dari penjelasan ayat tersebut terdapat kata penyimpang, dalam ilmu statistika para penyimpang tersebut dianggap sebagai outlier. Karena outlier dapat diartikan sebagai data yang tidak mengikuti pola umum model atau data yang menyimpang (Sembiring, 1995:62).

Sedangkan untuk masalah pendugaan terdapat pada surat Ash Shaffaat ayat 147:

وَأَرْسَلْنَٰهُ إِلَىٰ مِاْئَةِ أَلْفٍ أَوْ يَزِيدُونَ ١٤٧

Artinya: Dan Kami utus dia kepada seratus ribu orang atau lebih (Qs. Ash-Shaffaat/37:147)

Pada Qs. Ash Shaffaat ayat 147 tersebut dijelaskan bahwa Nabi Yunus di utus kepada umatnya yang jumlahnya 100.000 orang atau lebih. Pada ayat tersebut terdapat ketidakpastian dalam menentukan jumlah umat Nabi Yunus. Mengapa harus menyatakan 100.000 atau lebih? Mengapa tidak menyatakan dengan jumlah sebenarnya? Bukankah Allah SWT mengetahui yang ghaib dan yang nyata? Bukankah Allah SWT Maha mengetahui segala sesuatu termasuk jumlah umat Nabi Yunus (Abdussyakir, 2007:153).

Karena pemahaman manusia terhadap Al-Quran bertingkat-tingkat sesuai dengan kondisi dan kemampuan masing-masing di zaman sekarang, maka orang lebih perlu belajar hal-hal yang disajikan Al-Quran dari pada zaman dahulu agar mampu menyingkapi rahasia-rahasia dibalik ayat-ayatnya demi kebaikan dunia dan akhirat (Passya, 2004:39).

Oleh karena itu, dalam tugas akhir ini penulis mengkaji dan membahas permasalahan diatas dengan judul "***Pendeteksi Parameter Outlier pada Model Regresi Nonlinier Eksponensial dengan Menggunakan Metode Maksimum Likelihood Estimation***".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan pada latar belakang masalah yang telah dipaparkan di atas, rumusan masalah dalam tugas akhir ini adalah

1. Bagaimana cara mendeteksi parameter outlier pada model regresi eksponensial dengan menggunakan metode *Maksimum Likelihood Estimation*?
2. Apakah pendugaan parameter yang dihasilkan model regresi eksponensial yang tidak mengandung outlier lebih baik dari pada yang mengandung outlier?

1.3 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan penulisan tugas akhir ini adalah

1. Menjelaskan cara mendeteksi parameter outlier pada model regresi eksponensial dengan menggunakan metode *Maksimum Likelihood Estimation*.
2. Untuk mengetahui apakah pendugaan parameter yang dihasilkan model regresi eksponensial yang tidak mengandung outlier lebih baik dari pada yang mengandung outlier.

1.4 Batasan Masalah

Untuk mendeteksi parameter outlier model regresi eksponensial dibatasi pada asumsi yaitu $\varepsilon \sim N(0,\sigma^2)$ dimana estimasi parameter β dan σ^2 akan dicari dengan *Maksimum Likelihood Estimation*. Dalam menentukan pendugaan parameter model regresi eksponensial yang tidak mengandung outlier maupun yang mengandung outlier digunakan sifat-sifat pendugaan yaitu unbias, efisien, dan konsisten.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah untuk mempermudah para peneliti dalam mendeteksi parameter outlier pada model regresi eksponensial yang mengandung outlier.

1.6 Metode Penelitian

Adapun metode yang digunakan dalam penulisan skripsi ini ialah menggunakan studi literatur yaitu penelitian yang dilakukan diperpustakaan dengan cara mengumpulkan data dan informasi dengan bantuan bermacam-macam material yang terdapat di ruang perpustakaan seperti buku-buku, majalah, artikel, jurnal dan lain-lain (Mardalis,1999:28).

Adapun langkah-langkah dalam penulisan ini adalah

1. Mengasumsikan variabel independen dengan distribusi yang akan digunakan untuk menentukan penduga parameter regresi eksponensial. Penelitian ini mengasumsikan variabel independen berdistribusi normal dengan mean μ dan variansi σ^2.
2. Mentransformasikan model regresi eksponensial menjadi bentuk regresi linier dengan pendekatan matrik
3. Menentukan penduga model yang tidak mengandung outlier dan yang mengandung outlier dengan mengggunakan metode *maximum likelihood estimation*.
4. Membandingkan sifat-sifat pendugaan parameter pada model regresi eksponensial, pendugaan parameter yang tidak mengandung outlier dengan yang mengandung outlier.
5. Membuat kesimpulan. kesimpulan merupakan jawaban dari permasalahan yang telah dikemukakan dalam pembahasan.

1.7 Sistematika Penulisan

Dalam penulisan tugas akhir ini, penulis menggunakan sistematika penulisan yang terdiri dari empat bab, dan masing-masing bab dibagi dalam subbab dengan sistematika penulisan sebagai berikut:

BAB I : Pendahuluan, yang meliputi beberapa sub bahasan yaitu latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II : Kajian pustaka, kajian yang berisi tentang teori-teori yang ada kaitannya dengan hal-hal penulis bahas diantaranya adalah outlier, distribusi normal, pendugaan parameter, metode maksimum likelihood, model regresi nonlinier eksponensial, kajian outlier dan estimasi pada Al- Quran dan beberapa definisi yang diambil dari berbagai literatur (buku, majalah, internet, dan lain-lain) yang berkaitan dengan penelitian

BAB III : Pembahasan, pada bab ini berisi tentang uraian cara mendeteksi parameter outlier yang meliputi: langkah-langkah dalam mendeteksi parameter outlier pada regresi eksponensial, menentukan bentuk regresi linier dari model regresi eksponensial, menentukan penduga parameter model regresi eksponensial dengan metode *maximum likelihood estimation* dan menentukan sifat-sifat pendugaan parameter.

BAB IV : Penutup, pada bab ini penulis mengkaji tentang kesimpulan yang dilengkapi dengan saran-saran dari penelitian ini.

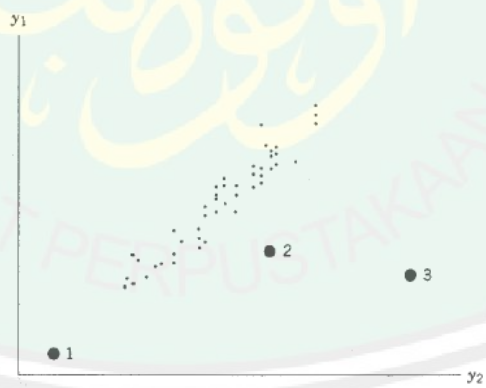
BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Outlier (Pencilan)

2.1.1. Pengertian Outlier

Belum ada patokan yang disepakati para statistikawan kapan suatu pengamatan dapat dikategorikan sebagai outlier. Secara umum outlier dapat diartikan data yang tidak mengikuti pola umum model dan secara kasar, dapat diambil patokan yaitu yang sisanya berjarak 3 kali simpangan baku atau lebih dari rata-ratanya (yaitu nol) (Sembiring, 1995:62). Menurut Draper (1992: 146), sisaan yang merupakan outlier adalah yang nilai mutlaknya jauh lebih besar dari pada sisaan-sisaan lainnya dan bisa jadi terletak tiga atau empat kali simpangan baku atau lebih jauh lagi dari rata-rata sisaannya.



Gambar 2.1 Bivariate yang menunjukkan tiga titik data outlier

(Alvin C , 2002: 103)

Pada gambar 2.1 di atas dapat dilihat bahwa terdapat tiga titik data yang terpisah sangat jauh dari data lainnya yaitu data yang diberi nomor 1, 2, dan 3 dan bisa jadi ketiga titik data tersebut terletak tiga atau empat kali simpangan bakunya. Ketiga titik data itulah yang disebut sebagai pencilan.

2.1.2. Pendeteksian Parameter Outlier

Kenyataan bahwa suatu pengamatan merupakan pencilan jelas tidak baik, namun itu tidak berarti bahwa pengamatan itu berpengaruh besar dalam pendugaan koefisien regresi. Akan tetapi dalam situasi yang pendugaan terhadap parameternya sangat bergantung pada sejumlah kecil pengamatan, kesulitan mungkin saja timbul. Salah satu cara mengatasi masalah ini adalah dengan memeriksa apakah pembuangan satu atau dua pengamatan kritis mengubah secara berarti persamaan regresinya serta kesimpulan-kesimpulannya. Bila demikian halnya, maka kesimpulan-kesimpulan itu berarti tidak kokoh dan oleh karenanya lebih banyak data yang diperlukan.

N.R. Draper dan John menyarankan, misalkan melambangkan model regresi untuk *n* pengamatan dan ρ parameter sebagai

$$E(Y) = E\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}\beta$$

pengamatan-pengamatan tersebut dikelompokkan menjadi k pengamatan (Y_2) yang kemungkinan menjadi pencilan (pengamatan berpengaruh) dan *n-k* pengamatan (Y_1) yang tidak. Tentu saja penataan kembali sebagian baris mungkin diperlukan untuk mencapai pengelompokan. Sisaan yang diperoleh berdasarkan model ini, dengan menggunakan analisis kuadrat terkecil biasa, adalah

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix} = (I-H)Y = \begin{pmatrix} I-H_{11} & I-H_{12} \\ I-H_{21} & I-H_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$$

Dimana

$$H_{ij} = X_i (X'X)^{-1} X_j'$$

Adalah suatu anakmatriks (*submatrix*) dari $H = X(X'X)^{-1} X'$ (2.1)

Pembuangan kelompok pengamatan (Y_2) yang dicurigai menghasilkan model $E(Y_1) = X_1\beta$. Alternative lain model

$$E\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ X_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Dengan γ menyatakan vektor parameter tambahan yang berukuran $k \times 1$. Penduga **b** dan **c** masing-masing bagi β dan γ adalah

$$\mathbf{b} = (X_1'X_1)^{-1} X_1'Y_1 \text{ dan } \mathbf{c} = (I - H_{22})^{-1} \varepsilon_2$$

dari persamaan (2.2) diperoleh

$E(Y_1) = X_1\beta$ dan

$E(Y_2) = X_2\beta + I\gamma$ (2.3)

$E(Y_1)$ merupakan model dengan membuang suatu pengamatan yang kemungkinan pengamatan tersebut suatu pencilan. Sedangkan $E(Y_2)$ merupakan model yang kemungkinan mengandung pencilan. Dari persamaan (2.3) diperoleh

$$\underline{Y} = \mathbf{X}\underline{\beta} + \mathbf{Z}\underline{\psi} + \underline{\varepsilon} \quad (2.4)$$

Dimana $\mathbf{Z} = I$ dan $\underline{\psi} = \underline{\gamma}$.

Jumlah kuadrat ekstra yang berasal dari nilai dugaan $\underline{\psi} = \underline{\gamma}$ dalam persamaan (2.4) diberikan oleh

$$Q_k = \varepsilon_2'(I - H_{22})^{-1}\varepsilon_2 \tag{2.5}$$

Statistik ini dapat digunakan untuk menguji pencilan.

Draper dan John menyarankan dihitungnya Q_k karena Q_k memberikan suatu ukuran bagi pencilan, nilai yang besar merupakan penyimpangan (Draper, 1992: 163-168).

2.2. Distribusi Normal

Distribusi yang penting dalam statistika ialah distribusi normal atau sering pula disebut distribusi *Gauss*.

$$f(y_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{(y-\mu)}{\sigma}\right)^2} \tag{2.6}$$

Distribusi ini mempunyai rataan μ dan variansi σ^2. Grafiknya mirip lonceng dan tertentu sepenuhnya bila μ dan σ^2 diketahui. Suatu peubah acak Y yang berdistribusi normal dengan rataan μ dan simpangan baku σ^2 sering disingkat dengan lambang $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Distribusi normal dengan rataan 0 dan simpangan baku 1 disebut normal baku., lambang $N(0,1)$. Untuk suatu distribusi $N(\mu, \sigma^2)$ berlaku

$$P(\mu - \sigma \le Y \le \mu + \sigma) = 0{,}6826 \approx 0{,}68$$

$$P(\mu - 2\sigma \le Y \le \mu + 2\sigma) = 0{,}9544 \approx 0{,}95$$

$$P(\mu - 3\sigma \le Y \le \mu + 3\sigma) = 0{,}9774 \approx 0{,}997 \tag{2.7}$$

Ketiga sifat di atas sering berguna untuk menentukan apakah anggapan normal dilanggar secara kasar atau tidak pada suatu terok data. Begitupun, dalam menentukan pengamatan yang mungkin merupakan pencilan, datanya dapat secara cepat dikenal dari jaraknya dari titik tengah terok. Misalnya, suatu data yang berjarak lebih dari $4s$ dari $\overline{Y}$ kemungkinan merupakan suatu outlier (Sembiring, 1995: 4-5).

2.3. Pendugaan Parameter

Pendugaan (*estimasi*) adalah proses yang menggunakan sampel statistik untuk menduga atau menaksir hubungan parameter populasi yang tidak diketahui. Pendugaan merupakan suatu pernyataan mengenai parameter populasi yang diketahui berdasarkan populasi dari sampel, dalam hal ini sampel random, yang diambil dari populasi yang bersangkutan. Jadi dengan pendugaan ini, keadaan parameter populasi dapat diketahui (Hasan, 2002:111). Menurut Yitnosumarto (1990:211-212), pendugaan adalah anggota peubah acak dari statistik yang mungkin untuk sebuah parameter (anggota peubah diturunkan). Besaran sebagai hasil penerapan penduga terhadap data dari semua contoh disebut nilai duga (*estimate*). Adapaun sifat-sifat dari penduga parameter tersebut adalah:

1) Tak bias (*Unbias*)

Satu hal yang menjadi tujuan dalam pendugaan adalah pendugaan harus mendekati nilai sebenarnya dari parameter yang diduga tersebut. Misalkan terdapat parameter θ. Jika $\hat{\theta}$ merupakan penduga tak bias (*unbiased estimator*) dari parameter θ, maka:

$$E(\hat{\theta}) = \theta \tag{2.8}$$

(Yitnosumarto,1990:212)

2) Efisien

Suatu penduga (dimisalkan: $\hat{\theta}$) dikatakan efisien bagi parameter (θ) apabila penduga tersebut mempunyai varians yang kecil. Apabila terdapat lebih dari satu penduga, penduga yang efisien adalah penduga yang mempunyai varian terkecil. Dua buah penduga dibandingkan efisiennya dengan menggunakan efisien relative (*relative efficiency*). Efisien relatif $\hat{\theta}_2$ terhadap $\hat{\theta}_1$ dirumuskan:

$$\begin{aligned} R(\hat{\theta}_2, \hat{\theta}_1) &= \frac{E(\hat{\theta}_1 - \hat{\theta})^2}{E(\hat{\theta}_2 - \hat{\theta})^2} \\ &= \frac{E(\hat{\theta}_1 - E(\hat{\theta}_1))^2}{E(\hat{\theta}_2 - E(\hat{\theta}_2))^2} \\ &= \frac{\operatorname{var} \hat{\theta}_1}{\operatorname{var} \hat{\theta}_2} \end{aligned} \tag{2.9}$$

$R = \frac{\hat{\theta}_1}{\hat{\theta}_2}$, jika $R > 1$ maka $\hat{\theta}_1 > \hat{\theta}_2$ artinya secara relatif $\hat{\theta}_2$ lebih efisien daripada $\hat{\theta}_1$, dan jika $R < 1$ maka $\hat{\theta}_1 < \hat{\theta}_2$ artinya secara relatif $\hat{\theta}_1$ lebih efisien daripada $\hat{\theta}_2$.

3) Konsisten

Suatu penduga dikatakan konsisten apabila memenuhi syarat sebagai berikut:

1. Jika ukuran sampel semakin bertambah maka penduga akan mendekati parameternya. Jika besar sampel menjadi tak terhingga maka penduga konsisten harus dapat memberi suatu penduga titik yang sempurna terhadap parameternya. Jadi, ($\hat{\theta}$) merupakan penduga konsisten, jika dan hanya jika:

$$E\left(\hat{\theta} - E\left(\hat{\theta}\right)\right)^2 \to 0 \text{ jika n} \to \infty \qquad (2.10)$$

2. Jika ukuran sampel bertambah besar maka distribusi sampling penduga akan mengecil menjadi satu garis tegak lurus di atas parameter yang sama dengan probabilitas sama dengan 1. (Hasan, 2002:113-115)

2.4. Maksimum Likelihood

2.4.1. Fungsi likelihood

Definisi

Fungsi likelihood dari n variabel random x_1, $x_2,...,x_n$ didefinisikan sebagai fungsi kepadatan bersama dari n variabel random. Fungsi kepadatan bersama $f_{x_1,...,x_n}(x_1,...,x_n;\theta)$, yang mempertimbangkan fungsi dari θ. Jika $x_1,...,x_n$ adalah sampel random dari fungsi kepadatan $f(x;\theta)$, maka fungsi likelihoodnya adalah $f(x_1;\theta)f(x_2;\theta)...f(x_n;\theta)$ (Mood, Graybill and Boes, 1986:278)

Notasi

Untuk mengingatkan dalam mempelajari fungsi likelihood sebagai fungsi dari θ, dapat dinotasikan $L(x_1,...,x_n;\theta)$ atau $L(x_1,...,x_n)$

Contoh

Jika x_1, $x_2,...,x_n$ adalah random sampel dari distribusi $x \sim N(0,1)$. Fungsi likelihoodnya adalah:

$$L(x_1,x_2,...,x_n;\theta) = f(x_1;\theta)f(x_2;\theta)...f(x_n;\theta)\,,\ \theta \in \Theta$$

Karena berdistribusi normal, maka fungsi $f(x;\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x_i-\theta)^2}$

Fungsi likelihoodnya adalah:

$$L(x_1,x_2,...,x_n;\theta) = f(x_1;\theta)f(x_2;\theta)...f(x_n;\theta)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x_1-\theta)^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x_2-\theta)^2} ... \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x_n-\theta)^2}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\left(-\frac{1}{2}(x_1-\theta)^2\right)+\left(-\frac{1}{2}(x_2-\theta)^2\right)+...+\left(-\frac{1}{2}(x_n-\theta)^2\right)}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left((x_1-\theta)^2+(x_2-\theta)^2+(x_n-\theta)^2\right)}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2}$$

$$= \left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\right)^n e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2}$$

Sehingga fungsi likelihood dapat di tulis sebagai berikut:

$$L(x_1, x_2, ..., x_n; \theta) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \theta)^2}$$

2.4.2. Maximum Likelihood Estimation

Kita telah membahas sifat baik yang dimiliki dalam pendugaan. Jadi untuk mengetahui apakah suatu pendugaan bersifat unbias, efisien dan konsisten dan sebagainya terlebih dahulu ditentukan pendugaan parameternya dengan menggunakan suatu metode yaitu metode maximum likelihood estimation. Metode tersebut sering memberikan hasil yang baik (yaitu sering memberikan penaksir yang baik).

Definisi.

Andaikan $X_1, X_2, ..., X_n$ peubah acak dengan fungsi distribusi $F(x_1, x_2, ..., x_n \mid \theta)$ dengan $\theta \in \Theta$ yang tidak diketahui. Dan fungsi likelihood ialah

$$L(\theta) = \begin{cases} f(x_1, x_2, ..., x_n \mid \theta), \text{ jika } F \text{ mempunyai fungsi padat } f \\ p(x_1, x_2, ..., x_n \mid \theta), \text{ jika } F \text{ mempunyai fungsi padat } p \end{cases}$$

Setiap $\hat{\theta} = \hat{\theta}_n(X_1, X_2, ..., X_n) \in \Theta$ sehingga

$$L(\hat{\theta}) = \sup\{L(\theta) : \theta \in \Theta\}$$

disebut maximum likelihood estimation (Dudewicz dan Misrhra, 1995: 412).

Contoh:

Andaikan bahwa sampel random berukuran n berdistribusi bernoulli

$$f(x;p) = p^x q^{1-x} I_{(0,1)}(x)\text{, untuk } 0 \le p \le 1 \text{ dan } q = 1 - p$$

Nilai sampel x_1, $x_2,\ldots,x_n$ menjadi barisan bernilai nol dan satu, fungsi likelihoodnya adalah

$$L(p) = \prod_{i=1}^{n} p^{x_i} q^{1-x_i} = p^{\sum x_i} q^{n-\sum x_i}$$

Dimisalkan

$$y = \sum x_i$$

Maka fungsi likelihoodnya menjadi:

$$L(p) = p^{y_i} q^{n-y_i}$$

Dengan melogaritmakan persamaan di atas, diperoleh:

$$\ln L(p) = y \ln p + (n-y)\ln q \qquad (2.11)$$

Untuk mendapatkan penduga dari p maka dengan mendiferensialkan persamaan (2.11) terhadap p, diperoleh:

$$\frac{\partial \ln L(p)}{\partial p} = \frac{y}{p} - \frac{n-y}{q} \qquad (2.12)$$

Karena $\dfrac{\partial \ln L(p)}{\partial p} = 0$, persamaan (2.12) menjadi

$$0 = \frac{y}{p} - \frac{n-y}{q}$$

Untuk $q = 1 - p$, maka:

$$\frac{y}{\hat{p}} - \frac{n-y}{\hat{q}} = 0$$

$$\frac{y}{\hat{p}} = \frac{n-y}{1-\hat{p}}$$

$$y - \hat{p}y = \hat{p}(n - y)$$

$$-\hat{p}y - \hat{p}(n - y) = -y$$

$$-\hat{p}(y + n - y) = -y$$

$$-\hat{p}n = -y$$

$$\hat{p} = \frac{-y}{-n} = \frac{y}{n} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{1}{n}\sum x_i = \bar{x}$$

2.5. Model Regresi Nonlinier Eksponensial

Model regresi nonlinier dibagi menjadi dua jenis yaitu model linier intrinsik dan model nonlinier intrinsik. Jika suatu model adalah linier instrinsik, maka model ini dapat dinyatakan melalui transformasi yang tepat terhadap peubahnya, kedalam bentuk model linier baku yang dinyatakan dalam bentuk berikut ini:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \ldots + \beta_n x_n + \varepsilon$$

Dimana

y_i = nilai pengamatan ke- i (variabel random), $i = 1,2,3,\ldots,n$

β_0 = parameter intersep

$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_p$ = parameter slope

$x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n$ = peubah acak

ε = galat

Jika suatu model nonlinier tidak dapat dinyatakan dalam bentuk baku ini, berarti model itu secara nonlinier intrinsik (Draper dn Smith,1992:212).

Diantara bentuk-bentuk model (linier intrinsik) yang dapat ditransformasikan ke dalam bentuk linier adalah model regresi eksponensial yaitu:

$$y_i = e^{\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \ldots + \beta_k x_{ik}} \varepsilon_i \qquad (2.13)$$

Model regresi eksponensial dapat ditransformasi dengan mudah dengan mengambil transformasi logaritmanya. Dimana β_0, β_1, dan β_2 adalah parameter yang tidak diketahui, dan ε adalah galat acak yang bersifat multiplikatif. Dengan melogaritmakan natural persamaan (2.13), model tersebut berubah menjadi bentuk linier.

$$\ln(y_i) = \ln(e^{\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \ldots + \beta_k x_{ik}} \varepsilon_i)$$

$$\ln(y_i) = \ln(e^{\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \ldots + \beta_k x_{ik}}) + \ln(\varepsilon_i)$$

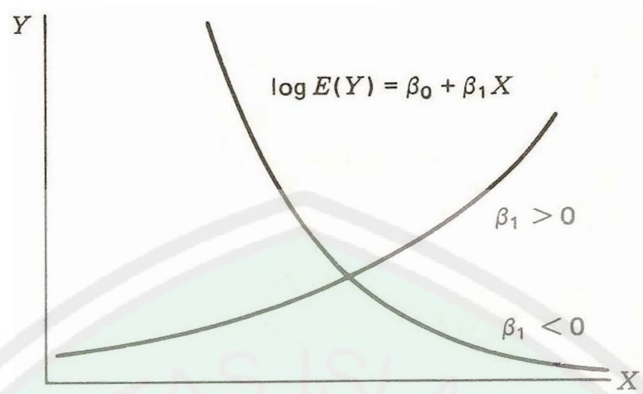
$$\ln(y_i) = (\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \ldots + \beta_k x_{ik}) \ln e + \ln(\varepsilon_i)$$

$$\ln(y_i) = (\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \ldots + \beta_k x_{ik})(1) + \ln(\varepsilon_i)$$

$$\ln y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \ldots + \beta_k x_{ik} + \ln \varepsilon_i \qquad (2.14)$$

Model seperti ini adalah model linier dalam bentuk semi log yang dapat berupa log-lin atau lin-log. (Draper and Smith, 1992:213).

Model (2.14) merupakan model linier dalam bentuk $\ln \varepsilon$. ε dalam hal ini tidak berdistribusi normal, sebab yang berdistribusi normal adalah $\ln \varepsilon = 0$.



Gambar 2.2 Model regresi nonlinier eksponensial

(Steel&Torrie, 1993:541)

Pada gambar 2.2 di atas dapat dilihat bahwa terdapat hubungan antara dua variabel X dan Y yang mempunyai persamaan $\log E(Y) = \beta_0 + \beta_1 X$. Gambar tersebut menunjukkan model regresi nonlinier eksponensial.

2.6. Model Regresi dalam Pendekatan Matrik

Model yang paling sederhana adalah model regresi linier. Model regresi linier sederhana terdiri dari satu variabel. Model tersebut dapat digeneralisasikan menjadi lebih dari satu atau dalam *k* variabel. Persamaan bagi model regresi linier dengan k variabel diberikan sebagai berikut:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_k x_k + \varepsilon \qquad (2.15)$$

Bila pengamatan mengenai y, x_1, x_2,..., x_k dinyatakan masing-masing dengan y_i, x_{i1}, x_{i2},..., x_{ik} dan galatnya ε_i. Maka persamaan (2.15) dapat dituliskan sebagai:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \ldots + \beta_k x_{ik} + \varepsilon_i\,,\; i = 1,2,\ldots,n$$

Dinotasikan dalam bentuk matrik, sehingga menjadi:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \dots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & \dots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n1} & \dots & x_{nk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \dots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

Misalkan

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \dots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & \dots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n1} & \dots & x_{nk} \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix} \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \dots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$$

Persamaan (2.16) dapat dinyatakan sebagai:

$$\underline{Y} = \mathbf{X}\underline{\beta} + \underline{\varepsilon}$$

Dimana

$\underline{Y}$ = vektor respon $n \times 1$

$\mathbf{X}$ = matrik peubah bebas ukuran $n \times (k+1)$

$\underline{\beta}$ = vektor parameter ukuran $(k+1) \times 1$ ang tak diketahui

$\underline{\varepsilon}$ = vektor galat ukuran $n \times 1$

(Sembiring,1995:134-135)

Sistem (2.16) dikenal sebagai penyajian matrik model regresi linier (*k*-variabel) umum. Sistem tersebut bisa ditulis lebih ringkas sebagai:

$$\underset{n \times 1}{\underline{Y}} = \underset{n \times (k+1)}{\mathbf{X}} \; \underset{(k+1)+1}{\underline{\beta}} + \underset{n \times 1}{\underline{\varepsilon}} \tag{2.17}$$

2.7. Kajian Outlier dan Estimasi pada Al Quran

Al-Quran merupakan kitabullah yang di dalamnya terkandung ilmu-ilmu Allah, untuk mendapatkan ilmu tersebut perlu mengkaji Al-Quran secara mendalam. Al-Quran bukan hanya berbicara ilmu agama yaitu halal dan haram, pahala dan dosa, surga dan neraka, lebih dari itu di dalamnya terdapat banyak hal yang berkaitan dengan masalah keduniawian, mulai masalah sains dan teknologi, sosial, politik, ekonomi, hukum, dan yang lainnya. Ada banyak sumber kajian tentang itu semua yang menjadikan Al-Quran sebagai acuannya (Abtokhi, 2007:182). Oleh karena itu di sini akan dibuktikan bahwa Al-Quran tidak hanya membahas tentang ilmu agama saja akan tetapi membahas tentang masalah ilmu statistik juga.

Salah satu masalah ilmu statistik yang dibahas dalam penelitian ini adalah tentang outlier dan estimasi dalam ilmu statistik yang ternyata telah disinggung sejak zaman Nabi Muhammad. Hal tersebut terbukti sebagaimana yang telah dijelaskan dalam Al-Quran surat Al-Jinn Ayat 14 dan surat Ash-Shaffaat ayat 147.

2.4.3. Outlier dalam Al Quran

Surat Al-Jinn terdiri atas 28 ayat, termasuk golongan surat-surat Makkiyyah, yakni turun sebelum Nabi Hijrah ke Madinah. Dinamai Al-Jinn diambil dari perkataan Al-Jinn yang terdapat pada ayat pertama surat ini. Surat Al-Jinn menerangkan bahwa Jin sebagai makhluk halus telah mendengar pembacaan Al Quran dan mereka mengikuti ajaran Al Quran tersebut. Pada surat tersebut terdapat ayat yang menyinggung masalah pencilan (outlier), yaitu pada ayat 14:

وَأَنَّا مِنَّا الْمُسْلِمُونَ وَمِنَّا الْقَاسِطُونَ ۖ فَمَنْ أَسْلَمَ فَأُولَٰئِكَ تَحَرَّوْا رَشَدًا ﴿١٤﴾

Artinya." Dan sesungguhnya di antara kami ada orang-orang yang taat dan ada (pula) orang-orang yang menyimpang dari kebenaran. Barangsiapa yang taat, maka mereka itu benar-benar telah memilih jalan yang lurus". (Qs. Al-Jinn, 72:14)

Asal turunnya Surat Al-Jinn Ayat 14 yaitu untuk menampik dugaan bahwa semua jin baik yang mendengar langsung ayat-ayat Al-Quran maupun yang belum atau tidak mendengarnya kesemuanya telah patuh kepada Allah. Kemudian pada ayat tersebut diterangkan bahwa *dan sesungguhnya di antara kami* masyarakat jin *ada orang-orang muslim* yakni yang benar-benar taat dan penuh kepatuhan kepada Allah dan ada pula *para penyimpang* yakni mereka yang telah sangat jauh dari kebenaran lagi sangat mantap kekufurannya. *Barang siapa yang patuh, maka mereka itu telah* bersungguh-sungguh *memilih arah* yang mengantar ke jalan *kebenaran* (Shihab, 2003:494).

Kata "penyimpangan" dalam surat di atas pada konsep statistika dapat diartikan sebagai suatu outlier. Sebab suatu outlier dikatakan sebagai penyimpang dilihat dari pengertiannya yaitu:

1. Pencilan (outlier) adalah yang nilai mutlaknya jauh lebih besar dari pada sisaan-sisaan lainnya dan bisa jadi terletak tiga atau empat simpangan baku atau lebih jauh lagi dari rata-rata sisaannya.
2. Pencilan adalah suatu keganjilan dan menandakan suatu titik data yang sama sekali tidak tipikal dibandingkan data lainnya (Draper dan Smith, 1992: 146).

3. Pencilan (outlier) adalah data yang tidak mengikuti pola umum model (Sembiring, 1995:62).

Dari penafsiran Surat Al-Jinn Ayat 14 di atas dijelaskan bahwa "para penyimpang yakni mereka yang telah sangat jauh dari kebenaran lagi sangat mantap kekufurannya". Penafsiran mengenai para penyimpang tersebut mempunyai makna yang sama dengan pengertian dari outlier yaitu sama-sama terletak sangat jauh.

Akan tetapi terdapat banyak perbedaan mengenai konsep outlier pada statistika dengan maksud kata "penyimpangan" pada surat Al-Jinn Ayat 14 diantaranya:

1. Dilihat dari jumlah penyimpangan yang terjadi

   Dalam statistika, suatu data yang kemungkinan menjadi outlier biasanya dapat diduga tidak lebih dari 5% dari data yang ada. Sedangkan dalam Al-Quran surat Al-Jinn Ayat 14, jumlah penyimpangan dapat diduga kurang dari 50% atau bahkan bisa lebih dari 50%.

2. Dilihat dari obyeknya

   Obyek outlier dalam penelitian ini yaitu berupa data yang belum diketahui. Sedangkan dalam surat Al-Jinn Ayat 14 obyek penyimpangannya sudah diketahui yaitu sekelompok jin.

3. Dilihat dari bentuk obyek

   Dalam statistika, bentuk dari suatu data adalah menyebar mengikuti garis model maka outlier juga mempunyai bentuk menyebar seperti gambar 2.1. Berbeda dengan bentuk penyimpangan dalam Al-Quran surat Al-Jinn Ayat 14 bentuknya yaitu berkelompok, dikarenakan jumlah mereka yang banyak (lebih dari 5%).

2.4.4. Estimasi dalam Al Quran

Dalam Al-Qur'an pada surat Ash-Shaffaat terdapat ayat yang menyinggung masalah pendugaan. Surat Ash-Shaffaat adalah surat Makiyah, yakni turun sebelum Nabi Hijrah ke Madinah yang terdiri dari 182 ayat..

Pendugaan dalam statistika disinggung dalam surat Ash-Shaffaat ayat 147, yaitu:

وَأَرْسَلْنَٰهُ إِلَىٰ مِاْئَةِ أَلْفٍ أَوْ يَزِيدُونَ ﴿١٤٧﴾

Artinya: Dan Kami utus dia kepada seratus ribu orang atau lebih. (Qs. Ash-Shaffaat,37:147*)*

Asal turunnya ayat diatas yaitu menceritakan tentang kisah Nabi Yunus. Bahwa Nabi Yunus keluar dari kaumnya ketika akan disiksa oleh kaumnya sebelum mendapat perintah dari Allah SWT untuk Hijrah. Kemudian Nabi Yunus mendapatkan balasan dari Allah SWT. Setelah itu, Nabi Yunus diutus kembali kepada kaumnya. *Kami mengutusnya* yakni menugaskannya lagi *kepada seratus ribu orang atau lebih* jika kamu melihat mereka sekali pandang. (Shihab,2003:83).

Pada kalimat "kepada seratus ribu orang atau lebih jika kamu melihat mereka sekali pandang" terdapat suatu pendugaan, yaiu pada kata seratus ribu orang atau lebih. Contoh lain pendugaan yaitu, misalkan pada suatu pertandingan sepak bola dengan banyak sekali penonton seseorang ditanya tentang jumlah penonton tersebut, maka ia akan menduga jumlah penonton menurut pandangannya. Sama halnya dengan (*seratus ribu orang atau lebih*) أَوۡ يَزِيدُونَ

مِاْئَةِ أَلۡف pada surat Ash Shaffat ayat 147 diatas, jika seseorang menanyakan

berapa jumlah pasti (*seratus ribu orang atau lebih*) مِاْئَةِ أَلۡف أَوۡ يَزِيدُونَ, maka

orang tersebut hanya dapat menduga jumlahnya karena ayat tersebut tidak ada kejelasan dalam menerangkan jumlah umat Nabi Yunus.

Maka dari itu terdapat perbedaan dalam menafsirkan (*seratus ribu orang atau lebih*) مِاْئَةِ أَلۡف أَوۡ يَزِيدُونَ , sebagai berikut;

1. Shihab dalam Tafsir al-Misbah (2003: 84)

   Kata (أَو) auw/atau pada firman-Nya: (أَوۡ يَزِيدُونَ) *au yazidun*, lebih

dipahami oleh sementara ulama dalam arti *bahkan*, ada juga yang memahaminya dalam arti *dan*. Jika anda memahaminya dalam arti *atau*, maka ayat ini bagaikan menyatakan jumlah mereka banyak, menurut perhitungan kamu adalah seratus ribu atau lebih. Jika anda memahaminya dalam arti *dan* atau *bahkan*, maka itu berarti beliau diutus kepada dua kelompok. Yang pertama berjumah seratus ribu dan yang satu lagi adalah yang lebih dari itu. Dalam satu riwayat dinyatakan jumlah mereka sebanyak dua puluh ribu. Yang seratus ribu adalah orang-orang Yahudi penduduk negeri Nainawa, yang ketika itu berada dalam tawanan kerajaan Asyur, sedang yang lebih adalah selain orang Yahudi yang bermukim juga dinegeri itu.

2. Hamka dalam Tafsir al-Ahzar (1981:194)

Menceritakan bahwa setelah Nabi Yunus sehat dan kuat kembali, dia diperintahkan Tuhan melaksanakan perintah yang dipikulkan kepadanya, yaitu mendatangi dan melakukan dakwah kepada kaumnya di negeri Ninive ini, yang berjumlah 100.000 orang atau lebih, artinya lebih dari 100.000, kurang tidak.

3. Al-Mahally dan As-Syuyuthi, dalam tafsir Jalalain, (1990: 1946)

Menjelaskan bahwa وَأَرْسَلْنَٰهُ *(Dan kami utus dia*) sesudah itu, sebagaimana status sebelumnya, kepada kaum Bunainawiy yang tinggal didaerah Mausul- إِلَىٰ مِاْئَةِ أَلْفٍ (*kepada seratus ribu orang*) bahkan أَو يَزِيدُونَ (*atau lebih dari itu*) yakni lebihnya dua puluh atau tiga puluh atau tujuh puluh ribu orang.

Para ulama memperkirakan jumlah umat Nabi Yunus dengan jumlah yang berbeda-beda, meskipun demikian tidak ada yang mengatakan kurang dari 100.000 orang. Dari ketiga penafsiran di atas dapat disimpulkan bahwa terdapat suatu penggunaan istilah pendugaan pada surat Ash Shaffat ayat 147.

Dari penjelasan di atas telah dibuktikan bahwa Al-Quran tidak hanya berbicara tentang ilmu-ilmu agama saja, akan tetapi juga berbicara tentang ilmu statistik. Namun, dalam Al-Quran konsep-konsep ilmu statistik tidak disajikan secara langsung, akan tetapi berupa pengetahuan yang membutuhkan penafsiran secara mendalam. Oleh karena itu Allah SWT telah memberi akal dan pikiran manusia untuk berpikir dan mengkaji Al-Quran , menguak rahasia-rahasia yang terkandung dalam Al-Quran.

BAB III

PEMBAHASAN

3.1. Langkah-langkah dalam Mendeteksi Parameter Outlier Pada Model Regresi Eksponensial

Untuk mendeteksi parameter outlier pada model regresi eksponensial, diperlukan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Mengasumsikan variabel independen dengan distribusi yang akan digunakan untuk menentukan penduga parameter regresi eksponensial. Penelitian ini mengasumsikan variabel independen berdistribusi normal dengan mean μ dan variansi σ^2.
2. Mentransformasikan model regresi eksponensial menjadi bentuk regresi linier dengan pendekatan matrik
3. Menentukan penduga parameter yang tidak mengandung outlier
4. Menentukan penduga parameter yang mengandung outlier.
5. Membandingkan sifat-sifat pendugaan parameter pada model regresi eksponensial, pendugaan parameter yang tidak mengandung outlier dengan yang mengandung outlier.

Untuk menentukan penduga parameter yang tidak mengandung outlier dan yang mengandung outlier mengggunakan metode *maximum likelihood estimation*.

3.2. Menentukan Bentuk Regresi Linier dari Model Regresi Eksponensial dengan Pendekatan Matrik

Regresi nonlinier ekponensial dinyatakan dalam bentuk

$$y_i = e^{\beta_0+\beta_1 x_{i1}+\beta_2 x_{i2}+\ldots+\beta_k x_{ik}}\varepsilon_i \tag{3.1}$$

Persamaan (3.1) dilinierkan dengan menggunakan logaritma natural, sehingga modelnya menjadi:

$$\ln(y_i) = \ln(e^{\beta_0+\beta_1 x_{i1}+\beta_2 x_{i2}+\ldots+\beta_k x_{ik}}\varepsilon_i)$$

$$\ln(y_i) = \ln(e^{\beta_0+\beta_1 x_{i1}+\beta_2 x_{i2}+\ldots+\beta_k x_{ik}}) + \ln(\varepsilon_i)$$

$$\ln(y_i) = (\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \ldots + \beta_k x_{ik})\ln e + \ln \varepsilon_i$$

$$\ln(y_i) = (\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \ldots + \beta_k x_{ik})(1) + \ln \varepsilon_i$$

$$\ln(y_i) = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \ldots + \beta_k x_{ik} + \ln \varepsilon_i \tag{3.2}$$

Dimana (i = 1,2,…,n), ($p = 0,1,\ldots,k$) dan ε tidak berdistribusi normal, karena yang berdistribusi normal adalah $\ln \varepsilon$.

Dengan menggunakan pendekatan matrik, maka persamaan (3.2) dinotasikan dalam bentuk matrik, sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} \ln y_1 \\ \ln y_2 \\ \vdots \\ \ln y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \ldots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & \ldots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n1} & \ldots & x_{nk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \ln \varepsilon_1 \\ \ln \varepsilon_2 \\ \ldots \\ \ln \varepsilon_n \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

Misalkan

$$\underline{Y}^* = \begin{pmatrix} \ln y_1 \\ \ln y_2 \\ \vdots \\ \ln y_n \end{pmatrix} \qquad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \ldots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & \ldots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n1} & \ldots & x_{nk} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix} \qquad \underline{\varepsilon}^* = \begin{pmatrix} \ln \varepsilon_1 \\ \ln \varepsilon_2 \\ \dots \\ \ln \varepsilon_n \end{pmatrix}$$

Maka persamaan (3.2) dapat diubah menjadi

$$\underset{n \times 1}{\underline{Y}^*} = \underset{n \times (k+1)}{\mathbf{X}} \cdot \underset{(k+1) \times 1}{\underline{\beta}} + \underset{n \times 1}{\underline{\varepsilon}^*} \tag{3.4}$$

Persamaan (3.4) merupakan bentuk regresi linier dari model regresi eksponensial dengan pendekatan matrik.

3.3. Menentukan Penduga Parameter Regresi Eksponensial Menggunakan Metode *Maksimum Likelihood Estimation*

3.3.1. Menentukan penduga parameter yang tidak mengandung outlier

Untuk menentukan penduga parameter yang tidak mengandung outlier menggunakan bentuk regresi linier dari model regresi eksponensial dengan pendekatan matrik yaitu menggunakan persamaan (3.4) seperti:

$$\underline{Y}^* = \mathbf{X}\underline{\beta} + \underline{\varepsilon}^*$$

3.3.1.1. Penduga Parameter $\underline{\beta}^*$

Dari persamaan (3.4) diketahui bahwa $\underline{Y}^* = (\ln y_1,\ \ln y_2,\ \dots, \ln y_n)^T$, adalah variabel random, karena diasumsikan berdistribusi normal maka $\underline{Y}^* \sim N(\mathbf{X}\underline{\beta}, \sigma^2 I)$ dengan $\mathbf{X} = (x_{i0},\ x_{i1}, \dots,\ x_{ik})$ dan $\underline{\beta} = (\beta_0,\ \beta_1, \dots,\ \beta_k)^T$

dimana i = 1,2,…,n dan I menyatakan matrik ukuran $\mathrm{n}\times\mathrm{n}$. Sehingga fungsi distribusi peluang dari $\underline{Y}^*$ adalah

$$f(\underline{\beta},\sigma^2|\underline{Y}^*) \quad = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\left(\underline{Y}^*-\mathbf{X}\underline{\beta}\right)\sigma^{-1}\right)^T\left(\left(\underline{Y}^*-\mathbf{X}\underline{\beta}\right)\sigma^{-1}\right)} \qquad (3.5)$$

Untuk menentukan penduga parameter menggunakan metode *maksimum likelihood estimation*, terlebih dahulu ditentukan fungsi likelihood (L) yang di peroleh dari fungsi distribusi peluang pada persamaan (3.5) di atas sebagai berikut:

$$\mathrm{L}(\underline{\beta},\sigma^2|\underline{Y}^*) \quad = f(\underline{\beta},\sigma^2|\underline{Y}^*)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\left(\underline{Y}^*-\mathbf{X}\underline{\beta}\right)\sigma^{-1}\right)^T\left(\left(\underline{Y}^*-\mathbf{X}\underline{\beta}\right)\sigma^{-1}\right)}$$

$$= \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right]^n e^{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\left(\sigma^{-1}\right)^T\left(\underline{Y}^*-\mathbf{X}\underline{\beta}\right)^T\left(\underline{Y}^*-\mathbf{X}\underline{\beta}\right)\sigma^{-1}\right)}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\left(\sigma^2\right)^{\frac{n}{2}}} e^{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\left(\sigma^{-1}\right)^T\left(\underline{Y}^*-\mathbf{X}\underline{\beta}\right)^T\left(\underline{Y}^*-\mathbf{X}\underline{\beta}\right)\sigma^{-1}\right)} \qquad (3.6)$$

Sehingga fungsi likelihoodnya (L) adalah:

$$\mathrm{L}(\underline{\beta},\sigma^2|\underline{Y}^*) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\left(\sigma^2\right)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\left(\left(\sigma^{-1}\right)^T\left(\underline{Y}^*-\mathbf{X}\underline{\beta}\right)^T\left(\underline{Y}^*-\mathbf{X}\underline{\beta}\right)\sigma^{-1}\right)} \qquad (3.7)$$

Untuk mempermudah mendapatkan penduga parameter maka persamaan (3.7) di ubah menjadi fungsi log-likelihood sehingga diperoleh

$$\ln \mathrm{L}(\underline{\beta},\sigma^2|\underline{Y}^*)$$

$$=\ln\left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\left(\sigma^2\right)^{\frac{n}{2}}}\,e^{-\frac{1}{2}\left(\left(\sigma^{-1}\right)^T\left(\underline{Y}^*-\mathbf{X}\underline{\beta}\right)^T\left(\underline{Y}^*-\mathbf{X}\underline{\beta}\right)\sigma^{-1}\right)}\right)$$

$$=\ln\left((2\pi)^{-\frac{n}{2}}\left(\sigma^2\right)^{-\frac{n}{2}}\,e^{-\frac{1}{2}\left(\left(\sigma^{-1}\right)^T\left(\underline{Y}^*-\mathbf{X}\underline{\beta}\right)^T\left(\underline{Y}^*-\mathbf{X}\underline{\beta}\right)\sigma^{-1}\right)}\right)$$

$$=\ln\left((2\pi)^{-\frac{n}{2}}\right)+\ln\left(\left(\sigma^2\right)^{-\frac{n}{2}}\right)+\ln\left(e^{-\frac{1}{2}\left(\left(\sigma^{-1}\right)^T\left(\underline{Y}^*-\mathbf{X}\underline{\beta}\right)^T\left(\underline{Y}^*-\mathbf{X}\underline{\beta}\right)\sigma^{-1}\right)}\right)$$

$$=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln\left(\sigma^2\right)+\left\{-\frac{1}{2}\left(\left(\sigma^{-1}\right)^T\left(\underline{Y}^*-\mathbf{X}\underline{\beta}\right)^T\left(\underline{Y}^*-\mathbf{X}\underline{\beta}\right)\sigma^{-1}\right)\right\}\ln e$$

$$=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln\left(\sigma^2\right)+\left\{-\frac{1}{2}\left(\left(\sigma^{-1}\right)^T\left(\underline{Y}^*-\mathbf{X}\underline{\beta}\right)^T\left(\underline{Y}^*-\mathbf{X}\underline{\beta}\right)\sigma^{-1}\right)\right\}(1)$$

$$=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln\left(\sigma^2\right)-\frac{1}{2}\left\{\left(\sigma^{-1}\right)^T\left(\underline{Y}^{*T}\underline{Y}^*-\underline{Y}^{*T}\mathbf{X}\underline{\beta}-\underline{Y}^{*T}\mathbf{X}\underline{\beta}+\underline{\beta}^T\mathbf{X}^T\mathbf{X}\underline{\beta}\right)\sigma^{-1}\right\}$$

$$=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln\left(\sigma^2\right)-\frac{1}{2}\left\{\left(\sigma^{-1}\right)^T\left(\underline{Y}^{*T}\underline{Y}^*-2\underline{Y}^{*T}\mathbf{X}\underline{\beta}+\underline{\beta}^T\mathbf{X}^T\mathbf{X}\underline{\beta}\right)\sigma^{-1}\right\}$$

$$=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln\left(\sigma^2\right)-\frac{1}{2}\left(\sigma^{-1}\right)^T\underline{Y}^{*T}\underline{Y}^*\sigma^{-1}+\frac{1}{2}2\left(\sigma^{-1}\right)^T\underline{Y}^{*T}\mathbf{X}\underline{\beta}\sigma^{-1}-\frac{1}{2}\left(\sigma^{-1}\right)^T\underline{\beta}^T\mathbf{X}^T\mathbf{X}\underline{\beta}\sigma^{-1}$$

$$=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln\left(\sigma^2\right)-\frac{1}{2}\left(\sigma^{-1}\right)^T\underline{Y}^{*T}\underline{Y}^*\sigma^{-1}+\left(\sigma^{-1}\right)^T\underline{Y}^{*T}\mathbf{X}\underline{\beta}\sigma^{-1}-\frac{1}{2}\left(\sigma^{-1}\right)^T\underline{\beta}^T\mathbf{X}^T\mathbf{X}\underline{\beta}\sigma^{-1} \quad (3.8)$$

untuk mendapatkan penduga parameter $\underline{\beta}$ yaitu dengan memaksimumkan persamaan (3.8) terhadap $\underline{\beta}$, artinya mendeferensialkan $\ln \mathrm{L}(\underline{\beta},\sigma^2|\underline{Y}^*)$ terhadap $\underline{\beta}$, di peroleh:

$$\frac{\partial \ln \mathrm{L}(\underline{\beta},\sigma^2|\underline{Y}^*)}{\partial \underline{\beta}}=-0-0-0+\left(\sigma^{-1}\right)^T\underline{Y}^{*T}\mathbf{X}\sigma^{-1}-\frac{1}{2}2\left(\sigma^{-1}\right)^T\underline{\beta}^T\mathbf{X}^T\mathbf{X}\sigma^{-1}$$

$$\frac{\partial \ln \mathrm{L}(\underline{\beta},\sigma^2|\underline{Y}^*)}{\partial \underline{\beta}}=\left(\sigma^{-1}\right)^T\underline{Y}^{*T}\mathbf{X}\sigma^{-1}-\left(\sigma^{-1}\right)^T\underline{\beta}^T\mathbf{X}^T\mathbf{X}\sigma^{-1}$$

$$\frac{\partial \ln \mathrm{L}(\underline{\beta},\sigma^2|\underline{Y}^*)}{\partial \underline{\beta}} = \underline{0} \text{, sehingga}$$

$$\left(\hat{\sigma}^{-1}\right)^T \underline{Y}^{*T}\mathbf{X}\hat{\sigma}^{-1} - \left(\hat{\sigma}^{-1}\right)^T \underline{\hat{\beta}}^T \mathbf{X}^T\mathbf{X}\hat{\sigma}^{-1} = \underline{0}$$

$$\left(\hat{\sigma}^{-1}\right)^T \underline{Y}^{*T}\mathbf{X}\hat{\sigma}^{-1} = \left(\hat{\sigma}^{-1}\right)^T \underline{\hat{\beta}}^T \mathbf{X}^T\mathbf{X}\hat{\sigma}^{-1}$$

$$\left(\hat{\sigma}\right)^T\left(\hat{\sigma}^{-1}\right)^T \underline{Y}^{*T}\mathbf{X}\hat{\sigma}^{-1}\hat{\sigma} = \left(\hat{\sigma}\right)^T\left(\hat{\sigma}^{-1}\right)^T \underline{\hat{\beta}}^T \mathbf{X}^T\mathbf{X}\hat{\sigma}^{-1}\hat{\sigma}$$

$$\underline{Y}^{*T}\mathbf{X} = \underline{\hat{\beta}}^T\mathbf{X}^T\mathbf{X}$$

$$\left(\underline{Y}^{*T}\mathbf{X}\right)^T = \left(\underline{\hat{\beta}}^T\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)^T$$

$$\mathbf{X}^T\underline{Y}^* = \mathbf{X}^T\mathbf{X}\underline{\hat{\beta}} \qquad (3.9)$$

$$\underline{\hat{\beta}} = \left(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^T\underline{Y}^* \qquad (3.10)$$

Dimana $\underline{Y}^*$ adalah $\ln \underline{Y}$ maka:

$$\underline{\hat{\beta}} = \left(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^T \ln \underline{Y} \qquad (3.11)$$

Penduga parameter pada persamaan (3.11) dikatakan sebagai penduga parameter $\underline{\hat{\beta}}$ yang tidak mengandung outlier.

3.3.1.2. Penduga Parameter σ^2

Untuk mendapatkan penduga dari σ^2 dengan cara memaksimumkan persamaan (3.8) terhadap σ^2 artinya mendeferensialkan persamaan (3.8) terhadap σ^2, diperoleh

$\ln \mathrm{L}(\underline{\beta},\sigma^2|\underline{Y}^*)$

$$=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln\left(\sigma^{2}\right)-\frac{1}{2}\left(\sigma^{-1}\right)^{T}\underline{Y}^{*T}\underline{Y}^{*}\sigma^{-1}+\left(\sigma^{-1}\right)^{T}\underline{Y}^{*T}\mathbf{X}\underline{\beta}\sigma^{-1}-\frac{1}{2}\left(\sigma^{-1}\right)^{T}\underline{\beta}^{T}\mathbf{X}^{T}\mathbf{X}\underline{\beta}\sigma^{-1}$$

$$=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}2\ln(\sigma)-\frac{1}{2}\frac{1}{\sigma}I^{T}\underline{Y}^{*T}\underline{Y}^{*}\frac{1}{\sigma}I+\frac{1}{\sigma}I^{T}\underline{Y}^{*T}\mathbf{X}\underline{\beta}\frac{1}{\sigma}I-\frac{1}{2}\frac{1}{\sigma}I^{T}\underline{\beta}^{T}\mathbf{X}^{T}\mathbf{X}\underline{\beta}\frac{1}{\sigma}I$$

$$=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-n\ln(\sigma)-\frac{1}{2\sigma^{2}}\underline{Y}^{*T}\underline{Y}^{*}+\frac{1}{\sigma^{2}}\underline{Y}^{*T}\mathbf{X}\underline{\beta}-\frac{1}{2\sigma^{2}}\underline{\beta}^{T}\mathbf{X}^{T}\mathbf{X}\underline{\beta}$$

Sehingga

$$\frac{\partial \ln \mathrm{L}(\underline{\beta},\sigma^{2}|\underline{Y}^{*})}{\partial\sigma^{2}}$$

$$=-0-\frac{n}{\sigma^{2}}-\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{\sigma^{4}}\right)\underline{Y}^{*T}\underline{Y}^{*}+\left(-\frac{2}{\sigma^{4}}\right)\underline{Y}^{*T}\mathbf{X}\underline{\beta}-\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{\sigma^{4}}\right)\underline{\beta}^{T}\mathbf{X}^{T}\mathbf{X}\underline{\beta}$$

$$=-\frac{n}{\sigma^{2}}+\frac{1}{\sigma^{4}}\underline{Y}^{*T}\underline{Y}^{*}-\frac{2}{\sigma^{4}}\underline{Y}^{*T}\mathbf{X}\underline{\beta}+\frac{1}{\sigma^{4}}\underline{\beta}^{T}\mathbf{X}^{T}\mathbf{X}\underline{\beta}$$

$\frac{\partial \ln \mathrm{L}(\underline{\beta},\sigma^{2}|\underline{Y}^{*})}{\partial\sigma^{2}}=\underline{0}$, sehingga

$$-\frac{n}{\hat{\sigma}^{2}}+\frac{1}{\hat{\sigma}^{4}}\underline{Y}^{*T}\underline{Y}^{*}-\frac{2}{\hat{\sigma}^{4}}\underline{Y}^{*T}\mathbf{X}\hat{\underline{\beta}}+\frac{1}{\hat{\sigma}^{4}}\hat{\underline{\beta}}^{T}\mathbf{X}^{T}\mathbf{X}\hat{\underline{\beta}}=\underline{0}$$

$$\frac{n}{\hat{\sigma}^{2}}=\frac{1}{\hat{\sigma}^{4}}\underline{Y}^{*T}\underline{Y}^{*}-\frac{2}{\hat{\sigma}^{4}}\underline{Y}^{*T}\mathbf{X}\hat{\underline{\beta}}+\frac{1}{\hat{\sigma}^{4}}\hat{\underline{\beta}}^{T}\mathbf{X}^{T}\mathbf{X}\hat{\underline{\beta}}$$

$$\frac{n}{\hat{\sigma}^{2}}=\frac{1}{\hat{\sigma}^{4}}\left(\underline{Y}^{*T}\underline{Y}^{*}-2\underline{Y}^{*T}\mathbf{X}\hat{\underline{\beta}}+\hat{\underline{\beta}}^{T}\mathbf{X}^{T}\mathbf{X}\hat{\underline{\beta}}\right)$$

$$\hat{\sigma}^{4}\frac{n}{\hat{\sigma}^{2}}=\hat{\sigma}^{4}\frac{1}{\hat{\sigma}^{4}}\left(\underline{Y}^{*T}\underline{Y}^{*}-2\underline{Y}^{*T}\mathbf{X}\hat{\underline{\beta}}+\hat{\underline{\beta}}^{T}\mathbf{X}^{T}\mathbf{X}\hat{\underline{\beta}}\right)$$

$$n\hat{\sigma}^{2}=\left(\underline{Y}^{*T}\underline{Y}^{*}-2\underline{Y}^{*T}\mathbf{X}\hat{\underline{\beta}}+\hat{\underline{\beta}}^{T}\mathbf{X}^{T}\mathbf{X}\hat{\underline{\beta}}\right)$$

Karena

$$n\sigma^{2}=\left(\underline{Y}^{*T}\underline{Y}^{*}-2\underline{Y}^{*T}\mathbf{X}\hat{\underline{\beta}}+\underline{\beta}^{T}\mathbf{X}^{T}\mathbf{X}\hat{\underline{\beta}}\right)$$

$$=\left(\underline{Y}^{*}-\mathbf{X}\hat{\underline{\beta}}\right)^{T}\left(\underline{Y}^{*}-\mathbf{X}\hat{\underline{\beta}}\right)$$

Maka

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\left(\underline{Y}^* - \mathbf{X}\underline{\hat{\beta}}\right)^T\left(\underline{Y}^* - \mathbf{X}\underline{\hat{\beta}}\right) \quad (3.12)$$

Dimana $\underline{Y}^*$ adalah $\ln \underline{Y}$ maka:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\left(\ln \underline{Y} - \mathbf{X}\underline{\hat{\beta}}\right)^T\left(\ln \underline{Y} - \mathbf{X}\underline{\hat{\beta}}\right) \quad (3.13)$$

Penduga parameter pada persamaan (3.13) dikatakan sebagai penduga parameter $\hat{\sigma}^2$ yang tidak mengandung outlier.

3.3.2. Menentukan penduga parameter yang mengandung outlier

Model regresi eksponensial yang mengandung outlier adalah

$$y_i = e^{\beta_0+\beta_1 x_{i1}+\beta_2 x_{i2}+\ldots+\beta_k x_{ik}+\psi_0+\psi_1 z_{i1}+\ldots+\psi_k z_{ik}}\varepsilon_i$$

Untuk mempermudah dalam menentukan pendugaan maka persamaan di atas di linierkan menjadi bentuk matrik sebagai berikut

$$\ln(y_i) = \ln(e^{\beta_0+\beta_1 x_{i1}+\beta_2 x_{i2}+\ldots+\beta_k x_{ik}+\psi_0+\psi_1 z_{i1}+\ldots+\psi_k z_{ik}}\varepsilon_i)$$

$$\ln(y_i) = \ln(e^{\beta_0+\beta_1 x_{i1}+\beta_2 x_{i2}+\ldots+\beta_k x_{ik}+\psi_0+\psi_1 z_{i1}+\ldots+\psi_k z_{ik}}) + \ln(\varepsilon_i)$$

$$\ln(y_i) = \left(\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \ldots + \beta_k x_{ik} + \psi_0 + \psi_1 z_{i1} + \ldots + \psi_k z_{ik}\right)\ln e + \ln \varepsilon_i$$

$$\ln(y_i) = \left(\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \ldots + \beta_k x_{ik} + \psi_0 + \psi_1 z_{i1} + \ldots + \psi_k z_{ik}\right)(1) + \ln \varepsilon_i$$

$$\ln(y_i) = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \ldots + \beta_k x_{ik} + \psi_0 z_{10} + \psi_1 z_{21} + \ldots + \psi_k z_{nk} + \ln \varepsilon_i \quad (3.14)$$

Dimana (i = 1,2,…,n), (p $=0,1,\ldots,k$) dan ε tidak berdistribusi normal, karena yang berdistribusi normal adalah $\ln \varepsilon$. Dalam bentuk matrik persamaan (3.14) menjadi

$$\begin{pmatrix} \ln y_1 \\ \ln y_2 \\ \vdots \\ \ln y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \dots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & \dots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n1} & \dots & x_{nk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_{10} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z_{21} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & z_{nk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \ln \varepsilon_1 \\ \ln \varepsilon_2 \\ \dots \\ \ln \varepsilon_n \end{pmatrix}$$

misalkan

$$\underline{Y}^* = \begin{pmatrix} \ln y_1 \\ \ln y_2 \\ \vdots \\ \ln y_n \end{pmatrix} \qquad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \dots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & \dots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n1} & \dots & x_{nk} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix} \qquad \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} z_{10} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z_{21} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & z_{nk} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\psi} = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_k \end{pmatrix} \qquad \underline{\varepsilon}^* = \begin{pmatrix} \ln \varepsilon_1 \\ \ln \varepsilon_2 \\ \dots \\ \ln \varepsilon_n \end{pmatrix}$$

Dimana $\mathbf{Z}$ merupakan matrik identitas, $z_{10} = z_{21} = \dots = z_{nk} = 1$ dan $\mathbf{Z}$, $\underline{\psi}$ menunjukkan persamaan tersebut mengandung parameter outlier. Sehingga persamaan (3.14) menjadi

$$\underline{Y}^* = \underset{n\times(k+1)}{\mathbf{X}} \ \underset{(k+1)\times 1}{\underline{\beta}} + \underset{n\times(k+1)}{\mathbf{Z}} \ \underset{(k+1)\times 1}{\underline{\psi}} + \underset{n\times 1}{\underline{\varepsilon}^*} \qquad (3.15)$$

persamaan (3.15) diperoleh dari persamaan (3.14)

Penduga parameter yang mengandung outlier ini dinotasikan dengan $\underline{\beta}$, $\underline{\psi}$ dan σ^2, untuk menentukan penduga parameter yang mengandung outlier dapat kita gunakan cara yang sama dengan cara menentukan penduga parameter yang tidak mengandung outlier $\underline{\beta}$ dan σ^2 seperti di atas.

3.3.2.1. Penduga Parameter $\underline{\beta}$

Dari persamaan (3.15) diketahui bahwa $\underline{Y}^* = (\ln y_1,\ \ln y_2,\ \ldots, \ln y_n)^T$, adalah variabel random, karena diasumsikan berdistribusi normal maka $\underline{Y}^* \sim N(\mathbf{X}\underline{\beta} + \mathbf{Z}\underline{\psi}, \sigma^2 I)$ dimana $\mathbf{Z} = (z_{10},\ z_{21},\ \ldots,\ z_{nk})^T$, dan $\underline{\psi} = (\psi_0,\ \psi_1, \ldots, \psi_n)^T$, $i = 1,2,\ldots,$n. Sehingga fungsi distribusi peluang dari $\underline{Y}^*$ adalah

$$f(\underline{\beta},\underline{\psi},\sigma^2 \mid \underline{Y}^*) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\left(\underline{Y}^* - \left(\mathbf{X}\underline{\beta} + \mathbf{Z}\underline{\psi}\right)\right)\sigma^{-1}\right)^T \left(\left(\underline{Y}^* - \left(\mathbf{X}\underline{\beta} + \mathbf{Z}\underline{\psi}\right)\right)\sigma^{-1}\right)} \tag{3.16}$$

Untuk menentukan penduga parameter menggunakan metode *maksimum likelihood estimation*, terlebih dahulu di tentukan fungsi likelihood (L) yang di peroleh dari fungsi distribusi peluang pada persamaan (3.16) di atas sebagai berikut:

$$\mathrm{L}(\underline{\beta},\underline{\psi},\sigma^2 \mid \underline{Y}^*)$$

$$= f(\underline{\beta},\underline{\psi},\sigma^2 \mid \underline{Y}^*)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\left(\underline{Y}^* - \left(\mathbf{X}\underline{\beta} + \mathbf{Z}\underline{\psi}\right)\right)\sigma^{-1}\right)^T \left(\left(\underline{Y}^* - \left(\mathbf{X}\underline{\beta} + \mathbf{Z}\underline{\psi}\right)\right)\sigma^{-1}\right)}$$

$$= \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right]^n e^{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\left(\sigma^{-1}\right)^T \left(\underline{Y}^* - \mathbf{X}\underline{\beta} - \mathbf{Z}\underline{\psi}\right)^T \left(\underline{Y}^* - \mathbf{X}\underline{\beta} - \mathbf{Z}\underline{\psi}\right)\sigma^{-1}\right)}$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\left(\sigma^2\right)^{\frac{n}{2}}}e^{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\left(\sigma^{-1}\right)^T\left(\underline{Y}^*-\mathbf{X}\underline{\beta}-\mathbf{Z}\underline{\psi}\right)^T\left(\underline{Y}^*-\mathbf{X}\underline{\beta}-\mathbf{Z}\underline{\psi}\right)\sigma^{-1}\right)} \tag{3.17}$$

Sehingga fungsi likelihoodnya (L) adalah:

$$\mathrm{L}(\underline{\beta},\underline{\psi},\sigma^2 \mid \underline{Y}^*)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\left(\sigma^2\right)^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{1}{2}\left(\left(\sigma^{-1}\right)^T\left(\underline{Y}^*-\mathbf{X}\underline{\beta}-\mathbf{Z}\underline{\psi}\right)^T\left(\underline{Y}^*-\mathbf{X}\underline{\beta}-\mathbf{Z}\underline{\psi}\right)\sigma^{-1}\right)} \tag{3.18}$$

Untuk mempermudah mendapatkan penduga parameter maka persamaan (3.18) di ubah menjadi fungsi log-likelihood sehingga diperoleh

$$\ln \mathrm{L}(\underline{\beta},\underline{\psi},\sigma^2 \mid \underline{Y}^*)$$

$$=\ln\left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\left(\sigma^2\right)^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{1}{2}\left(\left(\sigma^{-1}\right)^T\left(\underline{Y}^*-\mathbf{X}\underline{\beta}-\mathbf{Z}\underline{\psi}\right)^T\left(\underline{Y}^*-\mathbf{X}\underline{\beta}-\mathbf{Z}\underline{\psi}\right)\sigma^{-1}\right)}\right)$$

$$=\ln\left((2\pi)^{-\frac{n}{2}}\left(\sigma^2\right)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{1}{2}\left(\left(\sigma^{-1}\right)^T\left(\underline{Y}^*-\mathbf{X}\underline{\beta}-\mathbf{Z}\underline{\psi}\right)^T\left(\underline{Y}^*-\mathbf{X}\underline{\beta}-\mathbf{Z}\underline{\psi}\right)\sigma^{-1}\right)}\right)$$

$$=\ln\left((2\pi)^{-\frac{n}{2}}\right)+\ln\left(\left(\sigma^2\right)^{-\frac{n}{2}}\right)+\ln\left(e^{-\frac{1}{2}\left(\left(\sigma^{-1}\right)^T\left(\underline{Y}^*-\mathbf{X}\underline{\beta}-\mathbf{Z}\underline{\psi}\right)^T\left(\underline{Y}^*-\mathbf{X}\underline{\beta}-\mathbf{Z}\underline{\psi}\right)\sigma^{-1}\right)}\right)$$

$$=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln\left(\sigma^2\right)$$

$$+\left\{-\frac{1}{2}\left(\left(\sigma^{-1}\right)^T\left(\underline{Y}^*-\mathbf{X}\underline{\beta}-\mathbf{Z}\underline{\psi}\right)^T\left(\underline{Y}^*-\mathbf{X}\underline{\beta}-\mathbf{Z}\underline{\psi}\right)\sigma^{-1}\right)\right\}\ln e$$

$$=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln\left(\sigma^2\right)$$

$$+\left\{-\frac{1}{2}\left(\left(\sigma^{-1}\right)^T\left(\underline{Y}^*-\mathbf{X}\underline{\beta}-\mathbf{Z}\underline{\psi}\right)^T\left(\underline{Y}^*-\mathbf{X}\underline{\beta}-\mathbf{Z}\underline{\psi}\right)\sigma^{-1}\right)\right\}(1)$$

$$=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln\left(\sigma^2\right)$$

$$+\left\{-\frac{1}{2}\left(\left(\sigma^{-1}\right)^{T}\left(\underline{Y}^{*}-\mathbf{X}\underline{\beta}-\mathbf{Z}\underline{\psi}\right)^{T}\left(\underline{Y}^{*}-\mathbf{X}\underline{\beta}-\mathbf{Z}\underline{\psi}\right)\sigma^{-1}\right)\right\}(1)$$

$$=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln\left(\sigma^{2}\right)-\frac{1}{2}\left\{\left(\sigma^{-1}\right)^{T}\left(\underline{Y}^{*T}\underline{Y}^{*}-\underline{Y}^{*T}\mathbf{X}\underline{\beta}-\underline{Y}^{*T}\mathbf{Z}\underline{\psi}-\underline{Y}^{*T}\mathbf{X}\underline{\beta}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\mathbf{X}\underline{\beta}\right)^{T}\mathbf{X}\underline{\beta}+\left(\mathbf{X}\underline{\beta}\right)^{T}\mathbf{Z}\underline{\psi}-\underline{Y}^{*T}\mathbf{Z}\underline{\psi}+\left(\mathbf{X}\underline{\beta}\right)^{T}\mathbf{Z}\underline{\psi}+\left(\mathbf{Z}\underline{\psi}\right)^{T}\mathbf{Z}\underline{\psi}\right)\sigma^{-1}\right\}$$

$$=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln\left(\sigma^{2}\right)-\frac{1}{2}\left\{\left(\sigma^{-1}\right)^{T}\left(\underline{Y}^{*T}\underline{Y}^{*}-2\underline{Y}^{*T}\mathbf{X}\underline{\beta}-2\underline{Y}^{*T}\mathbf{Z}\underline{\psi}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\mathbf{X}\underline{\beta}\right)^{T}\mathbf{X}\underline{\beta}+2\left(\mathbf{X}\underline{\beta}\right)^{T}\mathbf{Z}\underline{\psi}+\left(\mathbf{Z}\underline{\psi}\right)^{T}\mathbf{Z}\underline{\psi}\right)\sigma^{-1}\right\}$$

$$=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln\left(\sigma^{2}\right)-\frac{1}{2}\left\{\left(\sigma^{-1}\right)^{T}\underline{Y}^{*T}\underline{Y}^{*}\sigma^{-1}-2\left(\sigma^{-1}\right)^{T}\underline{Y}^{*T}\mathbf{X}\underline{\beta}\sigma^{-1}\right.$$

$$-2\left(\sigma^{-1}\right)^{T}\underline{Y}^{*T}\mathbf{Z}\underline{\psi}\sigma^{-1}+\left(\sigma^{-1}\right)^{T}\left(\mathbf{X}\underline{\beta}\right)^{T}\mathbf{X}\underline{\beta}\sigma^{-1}+2\left(\sigma^{-1}\right)^{T}\left(\mathbf{X}\underline{\beta}\right)^{T}\mathbf{Z}\underline{\psi}\sigma^{-1}$$

$$\left.+\left(\sigma^{-1}\right)^{T}\left(\mathbf{Z}\underline{\psi}\right)^{T}\mathbf{Z}\underline{\psi}\sigma^{-1}\right\}$$

$$=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln\left(\sigma^{2}\right)-\frac{1}{2}\left(\sigma^{-1}\right)^{T}\underline{Y}^{*T}\underline{Y}^{*}\sigma^{-1}+\frac{1}{2}2\left(\sigma^{-1}\right)^{T}\underline{Y}^{*T}\mathbf{X}\underline{\beta}\sigma^{-1}$$

$$+\frac{1}{2}2\left(\sigma^{-1}\right)^{T}\underline{Y}^{*T}\mathbf{Z}\underline{\psi}\sigma^{-1}-\frac{1}{2}\left(\sigma^{-1}\right)^{T}\left(\mathbf{X}\underline{\beta}\right)^{T}\mathbf{X}\underline{\beta}\sigma^{-1}-\frac{1}{2}2\left(\sigma^{-1}\right)^{T}\left(\mathbf{X}\underline{\beta}\right)^{T}\mathbf{Z}\underline{\psi}\sigma^{-1}$$

$$-\frac{1}{2}\left(\sigma^{-1}\right)^{T}\left(\mathbf{Z}\underline{\psi}\right)^{T}\mathbf{Z}\underline{\psi}\sigma^{-1}$$

$$=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln\left(\sigma^{2}\right)-\frac{1}{2}\left(\sigma^{-1}\right)^{T}\underline{Y}^{*T}\underline{Y}^{*}\sigma^{-1}+\left(\sigma^{-1}\right)^{T}\underline{Y}^{*T}\mathbf{X}\underline{\beta}\sigma^{-1}$$

$$+\left(\sigma^{-1}\right)^{T}\underline{Y}^{*T}\mathbf{Z}\underline{\psi}\sigma^{-1}-\frac{1}{2}\left(\sigma^{-1}\right)^{T}\left(\mathbf{X}\underline{\beta}\right)^{T}\mathbf{X}\underline{\beta}\sigma^{-1}-\left(\sigma^{-1}\right)^{T}\left(\mathbf{X}\underline{\beta}\right)^{T}\mathbf{Z}\underline{\psi}\sigma^{-1}$$

$$-\frac{1}{2}\left(\sigma^{-1}\right)^{T}\left(\mathbf{Z}\underline{\psi}\right)^{T}\mathbf{Z}\underline{\psi}\sigma^{-1}$$

$$=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln\left(\sigma^{2}\right)-\frac{1}{2}\left(\sigma^{-1}\right)^{T}\underline{Y}^{*T}\underline{Y}^{*}\sigma^{-1}+\left(\sigma^{-1}\right)^{T}\underline{Y}^{*T}\mathbf{X}\underline{\beta}\sigma^{-1}$$

$$+\left(\sigma^{-1}\right)^T \underline{Y}^{*T}\ \mathbf{Z}\underline{\psi}\sigma^{-1}-\frac{1}{2}\left(\sigma^{-1}\right)^T\left(\mathbf{X}\underline{\beta}\right)^T\mathbf{X}\underline{\beta}\sigma^{-1}-\left(\sigma^{-1}\right)^T\left(\mathbf{Z}\underline{\psi}\right)^T\ \mathbf{X}\underline{\beta}\sigma^{-1}$$

$$-\frac{1}{2}\left(\sigma^{-1}\right)^T\left(\mathbf{Z}\underline{\psi}\right)^T\ \mathbf{Z}\underline{\psi}\sigma^{-1} \tag{3.19}$$

untuk mendapatkan penduga parameter $\underline{\beta}$ yaitu dengan memaksimumkan persamaan (3.19) terhadap $\underline{\beta}$, artinya mendeferensialkan $\ln \mathrm{L}(\underline{\beta},\underline{\psi},\sigma^2 \mid \underline{Y}^*)$ terhadap $\underline{\beta}$, di peroleh:

$$\frac{\partial \ln \mathrm{L}(\underline{\beta},\underline{\psi},\sigma^2 \mid \underline{Y}^*)}{\partial \underline{\beta}}$$

$$=-0-0-0+\left(\sigma^{-1}\right)^T\underline{Y}^{*T}\mathbf{X}\sigma^{-1}+0-\frac{1}{2}2\left(\sigma^{-1}\right)^T\left(\mathbf{X}\underline{\beta}\right)^T\mathbf{X}\sigma^{-1}-\left(\sigma^{-1}\right)^T\left(\mathbf{Z}\underline{\psi}\right)^T\mathbf{X}\sigma^{-1}-0$$

$$=\left(\sigma^{-1}\right)^T\underline{Y}^{*T}\mathbf{X}\sigma^{-1}-\left(\sigma^{-1}\right)^T\left(\mathbf{X}\underline{\beta}\right)^T\mathbf{X}\sigma^{-1}-\left(\sigma^{-1}\right)^T\left(\mathbf{Z}\underline{\psi}\right)^T\mathbf{X}\sigma^{-1}$$

$\dfrac{\partial \ln \mathrm{L}(\underline{\beta},\underline{\psi},\sigma^2 \mid \underline{Y}^*)}{\partial \underline{\beta}}=\underline{0}$, sehingga

$$\left(\hat{\sigma}^{-1}\right)^T\underline{Y}^{*T}\mathbf{X}\hat{\sigma}^{-1}-\left(\hat{\sigma}^{-1}\right)^T\left(\mathbf{X}\hat{\underline{\beta}}\right)^T\mathbf{X}\hat{\sigma}^{-1}-\left(\hat{\sigma}^{-1}\right)^T\left(\mathbf{Z}\hat{\underline{\psi}}\right)^T\mathbf{X}\hat{\sigma}^{-1}=\underline{0}$$

$$\left(\hat{\sigma}^{-1}\right)^T\underline{Y}^{*T}\mathbf{X}\hat{\sigma}^{-1}=\left(\hat{\sigma}^{-1}\right)^T\left(\mathbf{X}\hat{\underline{\beta}}\right)^T\mathbf{X}\hat{\sigma}^{-1}+\left(\hat{\sigma}^{-1}\right)^T\left(\mathbf{Z}\hat{\underline{\psi}}\right)^T\mathbf{X}\hat{\sigma}^{-1}$$

$$\hat{\sigma}^T\left(\hat{\sigma}^{-1}\right)^T\underline{Y}^{*T}\mathbf{X}\hat{\sigma}^{-1}\hat{\sigma}=\hat{\sigma}^T\left(\hat{\sigma}^{-1}\right)^T\left(\mathbf{X}\hat{\underline{\beta}}\right)^T\mathbf{X}\hat{\sigma}^{-1}\hat{\sigma}+\hat{\sigma}^T\left(\hat{\sigma}^{-1}\right)^T\left(\mathbf{Z}\hat{\underline{\psi}}\right)^T\mathbf{X}\hat{\sigma}^{-1}\hat{\sigma}$$

$$\underline{Y}^{*T}\mathbf{X}=\left(\mathbf{X}\hat{\underline{\beta}}\right)^T\mathbf{X}+\left(\mathbf{Z}\hat{\underline{\psi}}\right)^T\mathbf{X}$$

$$\mathbf{X}^T\mathbf{X}\hat{\underline{\beta}}=\mathbf{X}^T\underline{Y}^*-\mathbf{X}^T\mathbf{Z}\hat{\underline{\psi}}$$

$$\hat{\underline{\beta}}=\left(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^T\left(\underline{Y}^*-\mathbf{Z}\hat{\underline{\psi}}\right) \tag{3.20}$$

Dimana $\underline{Y}^*$ adalah $\ln \underline{Y}$ maka:

$$\underline{\hat{\beta}} = \left(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^T\left(\ln \underline{Y} - \mathbf{Z}\underline{\hat{\psi}}\right) \tag{3.21}$$

Penduga parameter pada persamaan (3.21) dikatakan sebagai penduga parameter $\underline{\hat{\beta}}$ yang mengandung outlier.

3.3.2.2. Penduga Parameter $\underline{\psi}$

Untuk mendapatkan penduga dari $\underline{\psi}$ dengan cara memaksimumkan persamaan (3.19) terhadap $\underline{\psi}$ artinya mendeferensialkan persamaan (3.19) terhadap $\underline{\psi}$, diperoleh

$$\ln \mathrm{L}(\underline{\beta},\underline{\psi},\sigma^2 \mid \underline{Y}^*)$$

$$= -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln\left(\sigma^2\right) - \frac{1}{2}\left(\sigma^{-1}\right)^T \underline{Y}^{*T}\underline{Y}^*\sigma^{-1} + \left(\sigma^{-1}\right)^T \underline{Y}^{*T}\mathbf{X}\underline{\beta}\sigma^{-1}$$

$$+\left(\sigma^{-1}\right)^T \underline{Y}^{*T}\mathbf{Z}\underline{\psi}\sigma^{-1} - \frac{1}{2}\left(\sigma^{-1}\right)^T\left(\mathbf{X}\underline{\beta}\right)^T\mathbf{X}\underline{\beta}\sigma^{-1} - \left(\sigma^{-1}\right)^T\left(\mathbf{X}\underline{\beta}\right)^T\mathbf{Z}\underline{\psi}\sigma^{-1}$$

$$-\frac{1}{2}\left(\sigma^{-1}\right)^T\left(\mathbf{Z}\underline{\psi}\right)^T\mathbf{Z}\underline{\psi}\sigma^{-1}$$

$$\frac{\partial \ln \mathrm{L}(\underline{\beta},\underline{\psi},\sigma^2 \mid \underline{Y}^*)}{\partial \underline{\psi}}$$

$$= -0 - 0 - 0 + 0 + \left(\sigma^{-1}\right)^T \underline{Y}^{*T}\mathbf{Z}\sigma^{-1} - 0 - \left(\sigma^{-1}\right)^T\left(\mathbf{X}\underline{\beta}\right)^T\mathbf{Z}\sigma^{-1}$$

$$-\frac{1}{2}2\left(\sigma^{-1}\right)^T\left(\mathbf{Z}\underline{\psi}\right)^T\mathbf{Z}\sigma^{-1}$$

$$= \left(\sigma^{-1}\right)^T \underline{Y}^{*T}\mathbf{Z}\sigma^{-1} - \left(\sigma^{-1}\right)^T\left(\mathbf{X}\underline{\beta}\right)^T\mathbf{Z}\sigma^{-1} - \left(\sigma^{-1}\right)^T\left(\mathbf{Z}\underline{\psi}\right)^T\mathbf{Z}\sigma^{-1}$$

$\frac{\partial \ln L(\underline{\beta},\underline{\psi},\sigma^2 \mid \underline{Y}^*)}{\partial \underline{\psi}} = \underline{0}$, sehingga

$$\left(\hat{\sigma}^{-1}\right)^T \underline{Y}^{*T} \ \mathbf{Z}\hat{\sigma}^{-1} - \left(\hat{\sigma}^{-1}\right)^T \left(\mathbf{X}\underline{\hat{\beta}}\right)^T \ \mathbf{Z}\hat{\sigma}^{-1} - \left(\hat{\sigma}^{-1}\right)^T \left(\mathbf{Z}\underline{\hat{\psi}}\right)^T \ \mathbf{Z}\hat{\sigma}^{-1} = 0$$

$$\left(\hat{\sigma}^{-1}\right)^T \underline{Y}^{*T} \ \mathbf{Z}\hat{\sigma}^{-1} = \left(\hat{\sigma}^{-1}\right)^T \left(\mathbf{X}\underline{\hat{\beta}}\right)^T \ \mathbf{Z}\hat{\sigma}^{-1} + \left(\hat{\sigma}^{-1}\right)^T \left(\mathbf{Z}\underline{\hat{\psi}}\right)^T \ \mathbf{Z}\hat{\sigma}^{-1}$$

$$\hat{\sigma}^T \left(\hat{\sigma}^{-1}\right)^T \underline{Y}^{*T} \ \mathbf{Z}\hat{\sigma}^{-1}\hat{\sigma} = \hat{\sigma}^T \left(\hat{\sigma}^{-1}\right)^T \left(\mathbf{X}\underline{\hat{\beta}}\right)^T \ \mathbf{Z}\hat{\sigma}^{-1}\hat{\sigma} + \hat{\sigma}^T \left(\hat{\sigma}^{-1}\right)^T \left(\mathbf{Z}\underline{\hat{\psi}}\right)^T \ \mathbf{Z}\hat{\sigma}^{-1}\hat{\sigma}$$

$$\left(\mathbf{Z}\underline{\hat{\psi}}\right)^T \ \mathbf{Z} = \underline{Y}^{*T} \ \mathbf{Z} - \left(\mathbf{X}\underline{\hat{\beta}}\right)^T \ \mathbf{Z}$$

$$\left(\left(\mathbf{Z}\underline{\hat{\psi}}\right)^T \ \mathbf{Z}\right)^T = \left(\underline{Y}^{*T} \ \mathbf{Z} - \left(\mathbf{X}\underline{\hat{\beta}}\right)^T \ \mathbf{Z}\right)^T$$

$$\mathbf{Z}^T\mathbf{Z}\underline{\hat{\psi}} = \mathbf{Z}^T \underline{Y}^* - \mathbf{Z}^T \mathbf{X}\underline{\hat{\beta}}$$

$$\underline{\hat{\psi}} = \left(\mathbf{Z}^T\mathbf{Z}\right)^{-1} \mathbf{Z}^T \left(\underline{Y}^* - \mathbf{X}\underline{\hat{\beta}}\right) \tag{3.22}$$

Dimana $\underline{Y}^*$ adalah $\ln \underline{Y}$ maka:

$$\underline{\hat{\psi}} = \left(\mathbf{Z}^T\mathbf{Z}\right)^{-1} \mathbf{Z}^T \left(\ln \underline{Y} - \mathbf{X}\underline{\hat{\beta}}\right) \tag{3.23}$$

Penduga parameter pada persamaan (3.23) dikatakan sebagai penduga parameter $\underline{\hat{\psi}}$ yang mengandung outlier.

3.3.2.3. Penduga Parameter σ^2

Untuk mendapatkan penduga dari σ^2 dengan cara memaksimumkan persamaan (3.19) terhadap σ^2 artinya mendeferensialkan persamaan (3.19) terhadap σ^2 diperoleh:

$\ln L(\underline{\beta},\underline{\psi},\sigma^2 \mid \underline{Y}^*)$

$$=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln\left(\sigma^{2}\right)-\frac{1}{2}\left(\sigma^{-1}\right)^{T}\underline{Y}^{*T}\underline{Y}^{*}\sigma^{-1}+\left(\sigma^{-1}\right)^{T}\underline{Y}^{*T}\mathbf{X}\underline{\beta}\sigma^{-1}$$

$$+\left(\sigma^{-1}\right)^{T}\underline{Y}^{*T}\mathbf{Z}\underline{\psi}\sigma^{-1}-\frac{1}{2}\left(\sigma^{-1}\right)^{T}\left(\mathbf{X}\underline{\beta}\right)^{T}\mathbf{X}\underline{\beta}\sigma^{-1}-\left(\sigma^{-1}\right)^{T}\left(\mathbf{X}\underline{\beta}\right)^{T}\mathbf{Z}\underline{\psi}\sigma^{-1}$$

$$-\frac{1}{2}\left(\sigma^{-1}\right)^{T}\left(\mathbf{Z}\underline{\psi}\right)^{T}\mathbf{Z}\underline{\psi}\sigma^{-1}$$

$$=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}2\ln(\sigma)-\frac{1}{2}\frac{1}{\sigma}I^{T}\underline{Y}^{*T}\underline{Y}^{*}\frac{1}{\sigma}I+\frac{1}{\sigma}I^{T}\underline{Y}^{*T}\mathbf{X}\underline{\beta}\frac{1}{\sigma}I$$

$$+\frac{1}{\sigma}I^{T}\underline{Y}^{*T}\mathbf{Z}\underline{\psi}\frac{1}{\sigma}I-\frac{1}{2}\frac{1}{\sigma}I^{T}\left(\mathbf{X}\underline{\beta}\right)^{T}\mathbf{X}\underline{\beta}\frac{1}{\sigma}I-\frac{1}{\sigma}I^{T}\left(\mathbf{X}\underline{\beta}\right)^{T}\mathbf{Z}\underline{\psi}\frac{1}{\sigma}I$$

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{\sigma}I^{T}\left(\mathbf{Z}\underline{\psi}\right)^{T}\mathbf{Z}\underline{\psi}\frac{1}{\sigma}I$$

$$=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-n\ln(\sigma)-\frac{1}{2\sigma^{2}}\underline{Y}^{*T}\underline{Y}^{*}+\frac{1}{\sigma^{2}}\underline{Y}^{*T}\mathbf{X}\underline{\beta}+\frac{1}{\sigma^{2}}\underline{Y}^{*T}\mathbf{Z}\underline{\psi}$$

$$-\frac{1}{2\sigma^{2}}\left(\mathbf{X}\underline{\beta}\right)^{T}\mathbf{X}\underline{\beta}-\frac{1}{\sigma^{2}}\left(\mathbf{X}\underline{\beta}\right)^{T}\mathbf{Z}\underline{\psi}-\frac{1}{2\sigma^{2}}\left(\mathbf{Z}\underline{\psi}\right)^{T}\mathbf{Z}\underline{\psi}$$

maka

$$\frac{\partial\ln \mathrm{L}(\underline{\beta},\underline{\psi},\sigma^{2}\mid\underline{Y}^{*})}{\partial\sigma^{2}}$$

$$=-0-n\frac{1}{\sigma^{2}}-\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{\sigma^{4}}\right)\underline{Y}^{*T}\underline{Y}^{*}+\left(-\frac{2}{\sigma^{4}}\right)\underline{Y}^{*T}\mathbf{X}\underline{\beta}+\left(-\frac{2}{\sigma^{4}}\right)\underline{Y}^{*T}\mathbf{Z}\underline{\psi}$$

$$-\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{\sigma^{4}}\right)\left(\mathbf{X}\underline{\beta}\right)^{T}\mathbf{X}\underline{\beta}-\left(-\frac{2}{\sigma^{4}}\right)\left(\mathbf{X}\underline{\beta}\right)^{T}\mathbf{Z}\underline{\psi}-\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{\sigma^{4}}\right)\left(\mathbf{Z}\underline{\psi}\right)^{T}\mathbf{Z}\underline{\psi}$$

$$=-\frac{n}{\sigma^{2}}+\frac{1}{\sigma^{4}}\underline{Y}^{*T}\underline{Y}^{*}-\frac{2}{\sigma^{4}}\underline{Y}^{*T}\mathbf{X}\underline{\beta}-\frac{2}{\sigma^{4}}\underline{Y}^{*T}\mathbf{Z}\underline{\psi}+\frac{1}{\sigma^{4}}\left(\mathbf{X}\underline{\beta}\right)^{T}\mathbf{X}\underline{\beta}$$

$$+\frac{2}{\sigma^{4}}\left(\mathbf{X}\underline{\beta}\right)^{T}\mathbf{Z}\underline{\psi}+\frac{1}{\sigma^{4}}\left(\mathbf{Z}\underline{\psi}\right)^{T}\mathbf{Z}\underline{\psi}$$

$\frac{\partial\ln \mathrm{L}(\underline{\beta},\underline{\psi},\sigma^{2}\mid\underline{Y}^{*})}{\partial\sigma^{2}}=\underline{0}$, sehingga

$$-\frac{n}{\hat{\sigma}^2}+\frac{1}{\hat{\sigma}^4}\underline{Y}^{*T}\underline{Y}^{*}-\frac{2}{\hat{\sigma}^4}\underline{Y}^{*T}\mathbf{X}\underline{\hat{\beta}}-\frac{2}{\hat{\sigma}^4}\underline{Y}^{*T}\mathbf{Z}\underline{\hat{\psi}}+\frac{1}{\hat{\sigma}^4}\left(\mathbf{X}\underline{\hat{\beta}}\right)^T\mathbf{X}\underline{\hat{\beta}}$$

$$+\frac{2}{\hat{\sigma}^4}\left(\mathbf{X}\underline{\hat{\beta}}\right)^T\mathbf{Z}\underline{\hat{\psi}}+\frac{1}{\hat{\sigma}^4}\left(\mathbf{Z}\underline{\hat{\psi}}\right)^T\mathbf{Z}\underline{\hat{\psi}}=\underline{0}$$

$$\frac{n}{\hat{\sigma}^2}=\frac{1}{\hat{\sigma}^4}\underline{Y}^{*T}\underline{Y}^{*}-\frac{2}{\hat{\sigma}^4}\underline{Y}^{*T}\mathbf{X}\underline{\hat{\beta}}-\frac{2}{\hat{\sigma}^4}\underline{Y}^{*T}\mathbf{Z}\underline{\hat{\psi}}+\frac{1}{\hat{\sigma}^4}\left(\mathbf{X}\underline{\hat{\beta}}\right)^T\mathbf{X}\underline{\hat{\beta}}$$

$$+\frac{2}{\hat{\sigma}^4}\left(\mathbf{X}\underline{\hat{\beta}}\right)^T\mathbf{Z}\underline{\hat{\psi}}+\frac{1}{\hat{\sigma}^4}\left(\mathbf{Z}\underline{\hat{\psi}}\right)^T\mathbf{Z}\underline{\hat{\psi}}$$

$$\frac{n}{\hat{\sigma}^2}=\frac{1}{\hat{\sigma}^4}\left(\underline{Y}^{*T}\underline{Y}^{*}-2\underline{Y}^{*T}\mathbf{X}\underline{\hat{\beta}}-2\underline{Y}^{*T}\mathbf{Z}\underline{\hat{\psi}}+\left(\mathbf{X}\underline{\hat{\beta}}\right)^T\mathbf{X}\underline{\hat{\beta}}+2\left(\mathbf{X}\underline{\hat{\beta}}\right)^T\mathbf{Z}\underline{\hat{\psi}}+\left(\mathbf{Z}\underline{\hat{\psi}}\right)^T\mathbf{Z}\underline{\hat{\psi}}\right)$$

$$\hat{\sigma}^4\frac{n}{\hat{\sigma}^2}=\hat{\sigma}^4\frac{1}{\hat{\sigma}^4}\left(\underline{Y}^{*T}\underline{Y}^{*}-2\underline{Y}^{*T}\mathbf{X}\underline{\hat{\beta}}-2\underline{Y}^{*T}\mathbf{Z}\underline{\hat{\psi}}+\left(\mathbf{X}\underline{\hat{\beta}}\right)^T\mathbf{X}\underline{\hat{\beta}}+2\left(\mathbf{X}\underline{\hat{\beta}}\right)^T\mathbf{Z}\underline{\hat{\psi}}+\left(\mathbf{Z}\underline{\hat{\psi}}\right)^T\mathbf{Z}\underline{\hat{\psi}}\right)$$

$$n\hat{\sigma}^2=\left(\underline{Y}^{*T}\underline{Y}^{*}-2\underline{Y}^{*T}\mathbf{X}\underline{\hat{\beta}}-2\underline{Y}^{*T}\mathbf{Z}\underline{\hat{\psi}}+\left(\mathbf{X}\underline{\hat{\beta}}\right)^T\mathbf{X}\underline{\hat{\beta}}+2\left(\mathbf{X}\underline{\hat{\beta}}\right)^T\mathbf{Z}\underline{\hat{\psi}}+\left(\mathbf{Z}\underline{\hat{\psi}}\right)^T\mathbf{Z}\underline{\hat{\psi}}\right)$$

Karena

$$\begin{aligned}n\hat{\sigma}^2 &=\left(\underline{Y}^{*T}\underline{Y}^{*}-2\underline{Y}^{*T}\mathbf{X}\underline{\hat{\beta}}-2\underline{Y}^{*T}\mathbf{Z}\underline{\hat{\psi}}+\left(\mathbf{X}\underline{\hat{\beta}}\right)^T\mathbf{X}\underline{\hat{\beta}}+2\left(\mathbf{X}\underline{\hat{\beta}}\right)^T\mathbf{Z}\underline{\hat{\psi}}+\left(\mathbf{Z}\underline{\hat{\psi}}\right)^T\mathbf{Z}\underline{\hat{\psi}}\right)\\
&=\left(\underline{Y}^{*}-\mathbf{X}\underline{\hat{\beta}}-\mathbf{Z}\underline{\hat{\psi}}\right)^T\left(\underline{Y}^{*}-\mathbf{X}\underline{\hat{\beta}}-\mathbf{Z}\underline{\hat{\psi}}\right)\\
&=\left(\underline{Y}^{*}-\left(\mathbf{X}\underline{\hat{\beta}}+\mathbf{Z}\underline{\hat{\psi}}\right)\right)^T\left(\underline{Y}^{*}-\left(\mathbf{X}\underline{\hat{\beta}}+\mathbf{Z}\underline{\hat{\psi}}\right)\right)\end{aligned}$$

Maka

$$\hat{\sigma}^2 =\frac{1}{n}\left(\underline{Y}^{*}-\left(\mathbf{X}\underline{\hat{\beta}}+\mathbf{Z}\underline{\hat{\psi}}\right)\right)^T\left(\underline{Y}^{*}-\left(\mathbf{X}\underline{\hat{\beta}}+\mathbf{Z}\underline{\hat{\psi}}\right)\right) \tag{3.24}$$

Dimana $\underline{Y}^*$ adalah $\ln \underline{Y}$ maka:

$$\hat{\sigma}^2 =\frac{1}{n}\left(\ln\underline{Y}-\left(\mathbf{X}\underline{\hat{\beta}}+\mathbf{Z}\underline{\hat{\psi}}\right)\right)^T\left(\ln\underline{Y}-\left(\mathbf{X}\underline{\hat{\beta}}+\mathbf{Z}\underline{\hat{\psi}}\right)\right) \tag{3.25}$$

Penduga parameter pada persamaan (3.24) dikatakan sebagai penduga parameter $\hat{\sigma}^2$ yang mengandung outlier.

3.4. Menentukan Sifat-sifat Penduga Parameter Regresi Eksponensial

Untuk mengetahui apakah penduga yang dihasilkan dari metode *maksimum likelihood estimation* memenuhi syarat-syarat penduga yang baik, maka diperlukan suatu pengujian sifat-sifat pendugaan yang baik, yaitu: sifat unbias (tak bias), efisien, dan konsisten.

Untuk menentukan sifat-sifat penduga parameter regresi eksponensial telah diketahui bahwa:

1. $\underline{Y}^*$ yang tidak mengandung outlier mempunyai persamaan

$$\underline{Y}^* = \mathbf{X}\underline{\beta} + \underline{\varepsilon}^*$$

Dan $\underline{Y}^*$ berdistribusi normal $N(\mathbf{X}\underline{\beta}, \sigma^2 I)$, sehingga $E(\underline{Y}^*) = \mathbf{X}\underline{\beta}$ dan $Var(\underline{Y}^*) = \sigma^2 I$ dari persamaan tersebut juga diasumsikan bahwa $\underline{\varepsilon}^*$ variabel bebas berdistribusi normal $\underline{\varepsilon}^* \sim N(0, \sigma^2 I)$ karena

$$\begin{aligned} E(\underline{\varepsilon}^*) &= E(\underline{Y}^* - \mathbf{X}\underline{\beta}) \\ &= E(\underline{Y}^*) - \mathbf{X}E(\underline{\beta}) \\ &= \mathbf{X}\underline{\beta} - \mathbf{X}\underline{\beta} = 0 \end{aligned} \tag{3.26}$$

2. $\underline{Y}^*$ yang mengandung outlier mempunyai persamaan

$$\underline{Y}^* = \mathbf{X}\underline{\beta} + \mathbf{Z}\underline{\psi} + \underline{\varepsilon}^*$$

Dimana $\underline{Y}^*$ berdistribusi normal $N(\mathbf{X}\underline{\beta} + \mathbf{Z}\underline{\psi}, \sigma^2 I)$, sehingga $E(\underline{Y}^*) = \mathbf{X}\underline{\beta} + \mathbf{Z}\underline{\psi}$ dan $\mathrm{var}(\underline{Y}^*) = \sigma^2 I$ dari persamaan tersebut juga diasumsikan bahwa $\underline{\varepsilon}^*$ variabel bebas berdistribusi normal $\varepsilon^* \sim N(0, \sigma^2 I)$ karena

$$E(\underline{\varepsilon}^*) \quad = E\left(\underline{Y}^* - \left(\mathbf{X}\underline{\beta} + \mathbf{Z}\underline{\psi}\right)\right)$$

$$= E\left(\underline{Y}^*\right) - E\left(\mathbf{X}\underline{\beta} + \mathbf{Z}\underline{\psi}\right)$$

$$= \left(\mathbf{X}\underline{\beta} + \mathbf{Z}\underline{\psi}\right) - \left(\mathbf{X}\underline{\beta} + \mathbf{Z}\underline{\psi}\right) = 0 \qquad (3.27)$$

Dimana $\mathbf{X}$ dan $\mathbf{Z}$ merupakan suatu tetapan dikarenakan $\mathbf{X}$ dan $\mathbf{Z}$ tidak mempunyai distribusi. Sehingga dapat ditentukan sifat-sifat penduga parameter regresi eksponensial model kedua sebagai berikut:

3.4.1. Tak bias (*Unbias*)

Untuk $E\left(\hat{\underline{\beta}}\right)$ yang tidak mengandung outlier

$$E\left(\hat{\underline{\beta}}\right) \quad = E\left(\left(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^T\underline{Y}^*\right)$$

$$= \left(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^T E\left(\underline{Y}^*\right)$$

$$= \left(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{X}\underline{\beta}$$

$$= \underline{\beta} \qquad (3.28)$$

dari persamaan (3.28) diperoleh $E\left(\hat{\underline{\beta}}\right) = \underline{\beta}$, maka $\hat{\underline{\beta}}$ yang tidak mengandung outlier merupakan penaksir tak bias. Sedangkan untuk $E\left(\hat{\underline{\beta}}_{out}\right)$ yang mengandung outlier, dimana $\hat{\underline{\beta}}_{out} = \hat{\underline{\beta}} + \hat{\underline{\psi}}$ adalah

$$E\left(\hat{\underline{\beta}}_{out}\right)$$

$$= E\left(\hat{\underline{\beta}} + \hat{\underline{\psi}}\right)$$

$$= E\left[\left(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^T\left(\underline{Y}^* - \mathbf{Z}\hat{\underline{\psi}}\right) + \left(\mathbf{Z}^T\mathbf{Z}\right)^{-1}\mathbf{Z}^T\left(\underline{Y}^* - \mathbf{X}\hat{\underline{\beta}}\right)\right]$$

$$= E\left[(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\underline{Y}^* - (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{Z}\underline{\hat{\psi}} + (\mathbf{Z}^T\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}^T\underline{Y}^* - (\mathbf{Z}^T\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}^T\mathbf{X}\underline{\hat{\beta}}\right]$$

$$= E\left[(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\underline{Y}^* + (\mathbf{Z}^T\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}^T\underline{Y}^* - (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{Z}\underline{\hat{\psi}} - (\mathbf{Z}^T\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}^T\mathbf{X}\underline{\hat{\beta}}\right]$$

$$= E\left[\left((\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T + (\mathbf{Z}^T\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}^T\right)\underline{Y}^* - (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{Z}\underline{\hat{\psi}} - (\mathbf{Z}^T\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}^T\mathbf{X}\underline{\hat{\beta}}\right]$$

$$= E\left(\left((\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T + (\mathbf{Z}^T\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}^T\right)\underline{Y}^*\right) - E\left((\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{Z}\underline{\hat{\psi}}\right) - E\left((\mathbf{Z}^T\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}^T\mathbf{X}\underline{\hat{\beta}}\right)$$

$$= \left((\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T + (\mathbf{Z}^T\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}^T\right)E\left(\underline{Y}^*\right) - (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{Z}E\left(\underline{\hat{\psi}}\right) - (\mathbf{Z}^T\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}^T\mathbf{X}E\left(\underline{\hat{\beta}}\right)$$

$$= \left((\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T + (\mathbf{Z}^T\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}^T\right)\left(\mathbf{X}\underline{\beta} + \mathbf{Z}\underline{\psi}\right) - (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{Z}E\left(\underline{\hat{\psi}}\right) - (\mathbf{Z}^T\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}^T\mathbf{X}E\left(\underline{\hat{\beta}}\right)$$

$$= (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{X}\underline{\beta} + (\mathbf{Z}^T\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}^T\mathbf{X}\underline{\beta} + (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{Z}\underline{\psi} + (\mathbf{Z}^T\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}^T\mathbf{Z}\underline{\psi}$$

$$- (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{Z}E\left(\underline{\hat{\psi}}\right) - (\mathbf{Z}^T\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}^T\mathbf{X}E\left(\underline{\hat{\beta}}\right)$$

$$= \underline{\beta} + (\mathbf{Z}^T\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}^T\mathbf{X}\underline{\beta} + (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{Z}\underline{\psi} + \underline{\psi} - (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{Z}E\left(\underline{\hat{\psi}}\right)$$

$$- (\mathbf{Z}^T\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}^T\mathbf{X}E\left(\underline{\hat{\beta}}\right)$$

$$= \underline{\beta} + \underline{\psi} + (\mathbf{Z}^T\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}^T\mathbf{X}\left(\underline{\beta} - E\left(\underline{\hat{\beta}}\right)\right) + (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{Z}\left(\underline{\psi} - E\left(\underline{\hat{\psi}}\right)\right) \quad (3.29)$$

Dari persamaan (3.29) diperoleh $E\left(\underline{\hat{\beta}}_{out}\right) \neq \underline{\hat{\beta}}_{out}$ dan $E\left(\underline{\hat{\beta}} + \underline{\hat{\psi}}\right) \neq \underline{\hat{\beta}} + \underline{\hat{\psi}}$, maka $\underline{\hat{\beta}}_{out}$ yang mengandung outlier bersifat bias. Jadi, penduga parameter $\underline{\hat{\beta}}$ yang tidak mengandung outlier lebih baik dari pada penduga parameter $\underline{\hat{\beta}}_{out}$ yang mengandung outlier.

3.4.2. Efisien

Suatu penduga dikatakan efisien apabila penduga tersebut mempunyai varians yang kecil. Apabila terdapat lebih dari satu penduga, penduga yang efisien adalah penduga yang mempunyai varian terkecil yang di rumuskan dengan

$$R\left(\hat{\theta}_2, \hat{\theta}_1\right) = \frac{\operatorname{var}\hat{\theta}_1}{\operatorname{var}\hat{\theta}_2}$$

sehingga

$$R\left(\underline{\hat{\beta}}_{out}, \underline{\hat{\beta}}\right) = \left(E\left(\underline{\hat{\beta}} - E\left(\underline{\hat{\beta}}\right)\right)\left(\underline{\hat{\beta}} - E\left(\underline{\hat{\beta}}\right)\right)^T \right)\left(E\left(\underline{\hat{\beta}}_{out} - E\left(\underline{\hat{\beta}}_{out}\right)\right)\left(\underline{\hat{\beta}}_{out} - E\left(\underline{\hat{\beta}}_{out}\right)\right)^T \right)^{-1}$$

$$= \left(Var\left(\underline{\hat{\beta}}\right)\right)\left(Var\left(\underline{\hat{\beta}}_{out}\right)\right)^{-1} \tag{3.30}$$

Dari persamaan (3.30) di atas terlebih dahulu ditentukan $Var\left(\underline{\hat{\beta}}\right)$ dan $Var\left(\underline{\hat{\beta}}_{out}\right)$ maka

$$Var(\underline{\hat{\beta}}) = E\left[\left(\underline{\hat{\beta}} - E\left(\underline{\hat{\beta}}\right)\right)\left(\underline{\hat{\beta}} - E\left(\underline{\hat{\beta}}\right)\right)^T\right]$$

$$= E\left[\left(\underline{\hat{\beta}} - \underline{\beta}\right)\left(\underline{\hat{\beta}} - \underline{\beta}\right)^T\right]$$

karena

$$\hat{\beta} = \left(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^T\underline{Y}^*$$

$$= \left(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^T\left(\mathbf{X}\underline{\beta} + \underline{\varepsilon}^*\right)$$

$$= \left(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{X}\underline{\beta} + \left(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^T\underline{\varepsilon}^*$$

$$= \underline{\beta} + \left(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^T\underline{\varepsilon}^*$$

$$\hat{\beta} - \underline{\beta} = \left(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^T\underline{\varepsilon}^*$$

maka

$$Var(\hat{\underline{\beta}}) = E\left[\left(\hat{\underline{\beta}} - \underline{\beta}\right)\left(\hat{\underline{\beta}} - \underline{\beta}\right)^T\right]$$

$$= E\left[\left((\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\underline{\varepsilon}^*\right)\left((\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\underline{\varepsilon}^*\right)^T\right]$$

$$= E\left[(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\underline{\varepsilon}^*\underline{\varepsilon}^{*T}\mathbf{X}(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\right]$$

$$= (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T E\left[\underline{\varepsilon}^*\underline{\varepsilon}^{*T}\right]\mathbf{X}(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}$$

$$= (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\sigma^2 I\mathbf{X}(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}$$

$$= (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{X}(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\sigma^2$$

$$= (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\sigma^2 \tag{3.31}$$

Dan untuk

$$Var\left(\hat{\underline{\beta}}_{out}\right)$$

$$= Var\left(\hat{\underline{\beta}} + \hat{\underline{\psi}}\right)$$

$$= E\left[\left(\left(\hat{\underline{\beta}} + \hat{\underline{\psi}}\right) - E\left(\hat{\underline{\beta}} + \hat{\underline{\psi}}\right)\right)\left(\left(\hat{\underline{\beta}} + \hat{\underline{\psi}}\right) - E\left(\hat{\underline{\beta}} + \hat{\underline{\psi}}\right)\right)^T\right]$$

$$= E\left[\left(\left(\hat{\underline{\beta}} + \hat{\underline{\psi}}\right) - E\left(\hat{\underline{\beta}} + \hat{\underline{\psi}}\right)\right)\left(\left(\hat{\underline{\beta}} + \hat{\underline{\psi}}\right) - E\left(\hat{\underline{\beta}} + \hat{\underline{\psi}}\right)\right)^T\right]$$

$$E\left(\hat{\underline{\beta}} + \hat{\underline{\psi}}\right) = \underline{\beta} + \underline{\psi} + (\mathbf{Z}^T\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}^T\mathbf{X}\left(\underline{\beta} - E\left(\hat{\underline{\beta}}\right)\right) + (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{Z}\left(\underline{\psi} - E\left(\hat{\underline{\psi}}\right)\right)$$

$$E\left(\hat{\underline{\beta}} + \hat{\underline{\psi}}\right) - \left(\underline{\beta} + \underline{\psi}\right) = (\mathbf{Z}^T\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}^T\mathbf{X}\left(\underline{\beta} - E\left(\hat{\underline{\beta}}\right)\right) + (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{Z}\left(\underline{\psi} - E\left(\hat{\underline{\psi}}\right)\right)$$

$$-\left(E\left(\hat{\underline{\beta}} + \hat{\underline{\psi}}\right) - \left(\underline{\beta} + \underline{\psi}\right)\right) = -\left((\mathbf{Z}^T\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}^T\mathbf{X}\left(\underline{\beta} - E\left(\hat{\underline{\beta}}\right)\right) + (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{Z}\left(\underline{\psi} - E\left(\hat{\underline{\psi}}\right)\right)\right)$$

$$\left(\underline{\beta} + \underline{\psi}\right) - E\left(\hat{\underline{\beta}} + \hat{\underline{\psi}}\right) = -(\mathbf{Z}^T\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}^T\mathbf{X}\left(\underline{\beta} - E\left(\hat{\underline{\beta}}\right)\right) - (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{Z}\left(\underline{\psi} - E\left(\hat{\underline{\psi}}\right)\right)$$

$$
\begin{aligned}
Var\left(\hat{\underline{\beta}}_{out}\right) &= E\left[\left(\left(\hat{\underline{\beta}}+\hat{\underline{\psi}}\right)-E\left(\hat{\underline{\beta}}+\hat{\underline{\psi}}\right)\right)\left(\left(\hat{\underline{\beta}}+\hat{\underline{\psi}}\right)-E\left(\hat{\underline{\beta}}+\hat{\underline{\psi}}\right)\right)^{T}\right] \\
&= E\left[\left(-\left(\mathbf{Z}^{T}\mathbf{Z}\right)^{-1}\mathbf{Z}^{T}\mathbf{X}\left(\underline{\beta}-E\left(\hat{\underline{\beta}}\right)\right)-\left(\mathbf{X}^{T}\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^{T}\mathbf{Z}\left(\underline{\psi}-E\left(\hat{\underline{\psi}}\right)\right)\right)\right. \\
&\quad \left.\left(-\left(\mathbf{Z}^{T}\mathbf{Z}\right)^{-1}\mathbf{Z}^{T}\mathbf{X}\left(\underline{\beta}-E\left(\hat{\underline{\beta}}\right)\right)-\left(\mathbf{X}^{T}\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^{T}\mathbf{Z}\left(\underline{\psi}-E\left(\hat{\underline{\psi}}\right)\right)\right)^{T}\right] \\
&= E\left[\left(-\left(\mathbf{Z}^{T}\mathbf{Z}\right)^{-1}\mathbf{Z}^{T}\mathbf{X}\left(\underline{\beta}-E\left(\hat{\underline{\beta}}\right)\right)-\left(\mathbf{X}^{T}\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^{T}\mathbf{Z}\left(\underline{\psi}-E\left(\hat{\underline{\psi}}\right)\right)\right)\right. \\
&\quad \left.\left(-\left(\mathbf{Z}^{T}\mathbf{Z}\right)^{-1}\mathbf{Z}^{T}\mathbf{X}\left(\underline{\beta}-E\left(\hat{\underline{\beta}}\right)\right)-\left(\mathbf{X}^{T}\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^{T}\mathbf{Z}\left(\underline{\psi}-E\left(\hat{\underline{\psi}}\right)\right)\right)^{T}\right] \\
&= E\left[\left(-\left(\mathbf{Z}^{T}\mathbf{Z}\right)^{-1}\mathbf{Z}^{T}\mathbf{X}\left(\underline{\beta}-E\left(\hat{\underline{\beta}}\right)\right)-\left(\mathbf{X}^{T}\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^{T}\mathbf{Z}\left(\underline{\psi}-E\left(\hat{\underline{\psi}}\right)\right)\right)\right. \\
&\quad \left.\left(-\left(\underline{\beta}-E\left(\hat{\underline{\beta}}\right)\right)^{T}\mathbf{X}^{T}\mathbf{Z}\left(\mathbf{Z}^{T}\mathbf{Z}\right)^{-1}-\left(\underline{\psi}-E\left(\hat{\underline{\psi}}\right)\right)^{T}\mathbf{Z}^{T}\mathbf{X}\left(\mathbf{X}^{T}\mathbf{X}\right)^{-1}\right)\right] \\
&= E\left[\left(\mathbf{Z}^{T}\mathbf{Z}\right)^{-1}\mathbf{Z}^{T}\mathbf{X}\sigma^{2}I\mathbf{X}^{T}\mathbf{Z}\left(\mathbf{Z}^{T}\mathbf{Z}\right)^{-1}\right. \\
&\quad +2\left(\mathbf{Z}^{T}\mathbf{Z}\right)^{-1}\mathbf{Z}^{T}\mathbf{X}\left(\underline{\beta}-E\left(\hat{\underline{\beta}}\right)\right)\left(\underline{\psi}-E\left(\hat{\underline{\psi}}\right)\right)^{T}\mathbf{Z}^{T}\mathbf{X}\left(\mathbf{X}^{T}\mathbf{X}\right)^{-1} \\
&\quad \left.+\left(\mathbf{X}^{T}\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^{T}\mathbf{Z}\left(\underline{\psi}-E\left(\hat{\underline{\psi}}\right)\right)\left(\underline{\psi}-E\left(\hat{\underline{\psi}}\right)\right)^{T}\mathbf{Z}^{T}\mathbf{X}\left(\mathbf{X}^{T}\mathbf{X}\right)^{-1}\right] \\
&= \left(\mathbf{Z}^{T}\mathbf{Z}\right)^{-1}\mathbf{Z}^{T}\mathbf{X}E\left(\left(\underline{\beta}-E\left(\hat{\underline{\beta}}\right)\right)\left(\underline{\beta}-E\left(\hat{\underline{\beta}}\right)\right)^{T}\right)\mathbf{X}^{T}\mathbf{Z}\left(\mathbf{Z}^{T}\mathbf{Z}\right)^{-1} \\
&\quad +2\left(\mathbf{Z}^{T}\mathbf{Z}\right)^{-1}\mathbf{Z}^{T}\mathbf{X}E\left(\left(\underline{\beta}-E\left(\hat{\underline{\beta}}\right)\right)\left(\underline{\psi}-E\left(\hat{\underline{\psi}}\right)\right)^{T}\right)\mathbf{Z}^{T}\mathbf{X}\left(\mathbf{X}^{T}\mathbf{X}\right)^{-1} \\
&\quad \left(\mathbf{X}^{T}\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^{T}\mathbf{Z}E\left(\left(\underline{\psi}-E\left(\hat{\underline{\psi}}\right)\right)\left(\underline{\psi}-E\left(\hat{\underline{\psi}}\right)\right)^{T}\right)\mathbf{Z}^{T}\mathbf{X}\left(\mathbf{X}^{T}\mathbf{X}\right)^{-1}\Big) \\
&= \left(\mathbf{Z}^{T}\mathbf{Z}\right)^{-1}\mathbf{Z}^{T}\mathbf{X}\sigma^{2}I\mathbf{X}^{T}\mathbf{Z}\left(\mathbf{Z}^{T}\mathbf{Z}\right)^{-1} \\
&\quad +2\left(\mathbf{Z}^{T}\mathbf{Z}\right)^{-1}\mathbf{Z}^{T}\mathbf{X}E\left(\left(\underline{\beta}-E\left(\hat{\underline{\beta}}\right)\right)\left(\underline{\psi}-E\left(\hat{\underline{\psi}}\right)\right)^{T}\right)\mathbf{Z}^{T}\mathbf{X}\left(\mathbf{X}^{T}\mathbf{X}\right)^{-1} \\
&\quad +\left(\mathbf{X}^{T}\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^{T}\mathbf{Z}E\left(\left(\underline{\psi}-E\left(\hat{\underline{\psi}}\right)\right)\left(\underline{\psi}-E\left(\hat{\underline{\psi}}\right)\right)^{T}\right)\mathbf{Z}^{T}\mathbf{X}\left(\mathbf{X}^{T}\mathbf{X}\right)^{-1}\Big)
\end{aligned}
\tag{3.32}
$$

Persamaan (3.31) dan (3.32) disubtitusi ke persamaan (3.30)

$$R\left(\hat{\underline{\beta}}_{out},\hat{\underline{\beta}}\right) = \left(\left(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)^{-1}\sigma^2\right)\left(\left(\mathbf{Z}^T\mathbf{Z}\right)^{-1}\mathbf{Z}^T\mathbf{X}\sigma^2 I\mathbf{X}^T\mathbf{Z}\left(\mathbf{Z}^T\mathbf{Z}\right)^{-1}\right.$$

$$+2\left(\mathbf{Z}^T\mathbf{Z}\right)^{-1}\mathbf{Z}^T\mathbf{X}E\left(\left(\underline{\beta}-E\left(\hat{\underline{\beta}}\right)\right)\left(\underline{\psi}-E\left(\hat{\underline{\psi}}\right)\right)^T\right)\mathbf{Z}^T\mathbf{X}\left(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)^{-1}$$

$$\left.+\left(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{Z}E\left(\left(\underline{\psi}-E\left(\hat{\underline{\psi}}\right)\right)\left(\underline{\psi}-E\left(\hat{\underline{\psi}}\right)\right)^T\right)\mathbf{Z}^T\mathbf{X}\left(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)^{-1}\right)^{-1} \quad (3.33)$$

Dari persamaan (3.33) didapat

$$R\left(\hat{\underline{\beta}}_{out},\hat{\underline{\beta}}\right) < 1$$

Sehingga

$$\left(\left(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)^{-1}\sigma^2\right)\left(\left(\mathbf{Z}^T\mathbf{Z}\right)^{-1}\mathbf{Z}^T\mathbf{X}\sigma^2 I\mathbf{X}^T\mathbf{Z}\left(\mathbf{Z}^T\mathbf{Z}\right)^{-1}\right.$$

$$+2\left(\mathbf{Z}^T\mathbf{Z}\right)^{-1}\mathbf{Z}^T\mathbf{X}E\left(\left(\underline{\beta}-E\left(\hat{\underline{\beta}}\right)\right)\left(\underline{\psi}-E\left(\hat{\underline{\psi}}\right)\right)^T\right)\mathbf{Z}^T\mathbf{X}\left(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)^{-1}$$

$$\left.+\left(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{Z}E\left(\left(\underline{\psi}-E\left(\hat{\underline{\psi}}\right)\right)\left(\underline{\psi}-E\left(\hat{\underline{\psi}}\right)\right)^T\right)\mathbf{Z}^T\mathbf{X}\left(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)^{-1}\right)^{-1} < 1$$

Maka

$$\left(\left(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)^{-1}\sigma^2\right) < \left(\mathbf{Z}^T\mathbf{Z}\right)^{-1}\mathbf{Z}^T\mathbf{X}\sigma^2 I\mathbf{X}^T\mathbf{Z}\left(\mathbf{Z}^T\mathbf{Z}\right)^{-1}$$

$$+2\left(\mathbf{Z}^T\mathbf{Z}\right)^{-1}\mathbf{Z}^T\mathbf{X}E\left(\left(\underline{\beta}-E\left(\hat{\underline{\beta}}\right)\right)\left(\underline{\psi}-E\left(\hat{\underline{\psi}}\right)\right)^T\right)\mathbf{Z}^T\mathbf{X}\left(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)^{-1}$$

$$+\left(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{Z}E\left(\left(\underline{\psi}-E\left(\hat{\underline{\psi}}\right)\right)\left(\underline{\psi}-E\left(\hat{\underline{\psi}}\right)\right)^T\right)\mathbf{Z}^T\mathbf{X}\left(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)^{-1}$$

$$Var\left(\hat{\underline{\beta}}\right) < Var\left(\hat{\underline{\beta}}_{out}\right) \quad (3.34)$$

Karena $Var\left(\hat{\underline{\beta}}\right)$ dari penduga $\hat{\underline{\beta}}$ yang tidak mengandung outlier lebih kecil dari pada $Var\left(\hat{\underline{\beta}}_{out}\right)$ dari penduga $\hat{\underline{\beta}}_{out}$ yang mengandung outlier maka $\hat{\underline{\beta}}$ yang tidak mengandung outlier lebih efisien dari pada $\hat{\underline{\beta}}_{out}$ yang mengandung outlier

3.4.3. Konsisten

Penduga yang konsisten adalah

$E\left(\hat{\theta} - E\left(\hat{\theta}\right)\right)^2 \to 0$ jika n $\to \infty$

sehingga

Untuk $\hat{\underline{\beta}}$ yang tidak mengandung outlier

$$E\left(\hat{\underline{\beta}} - E\left(\hat{\underline{\beta}}\right)\right)^2 = E\left[\left(\hat{\underline{\beta}} - E\left(\hat{\underline{\beta}}\right)\right)\left(\hat{\underline{\beta}} - E\left(\hat{\underline{\beta}}\right)\right)^T\right]$$

Dari persamaan (3.27) diperoleh $E\left(\hat{\underline{\beta}}\right) = \underline{\beta}$, maka

$$E\left[\left(\hat{\underline{\beta}} - E\left(\hat{\underline{\beta}}\right)\right)\left(\hat{\underline{\beta}} - E\left(\hat{\underline{\beta}}\right)\right)^T\right]$$

$$= E\left[\left(\hat{\underline{\beta}} - \underline{\beta}\right)\left(\hat{\underline{\beta}} - \underline{\beta}\right)^T\right]$$

$$= E\left(\hat{\underline{\beta}} - \underline{\beta}\right)\left(\hat{\underline{\beta}} - \underline{\beta}\right)^T$$

$$= \left(E\left(\hat{\underline{\beta}}\right) - E\left(\underline{\beta}\right)\right)\left(\hat{\underline{\beta}} - \underline{\beta}\right)^T$$

$$= \left(\underline{\beta} - \underline{\beta}\right)\left(\hat{\underline{\beta}} - \underline{\beta}\right)^T$$

$$= (0)\left(\hat{\underline{\beta}} - \underline{\beta}\right)^T = 0 \tag{3.35}$$

Dari persamaan (3.35) diperoleh $E\left[\left(\hat{\underline{\beta}} - E\left(\hat{\underline{\beta}}\right)\right)\left(\hat{\underline{\beta}} - E\left(\hat{\underline{\beta}}\right)\right)^T\right] = 0$, maka untuk $\hat{\underline{\beta}}$ yang tidak mengandung outlier merupakan penduga yang konsisten

Dan untuk $\hat{\underline{\beta}}$ yang mengandung outlier atau $\hat{\underline{\beta}}_{out}$

$$E\left(\hat{\underline{\beta}}_{out} - E\left(\hat{\underline{\beta}}_{out}\right)\right)^2 = E\left[\left(\hat{\underline{\beta}}_{out} - E\left(\hat{\underline{\beta}}_{out}\right)\right)\left(\hat{\underline{\beta}}_{out} - E\left(\hat{\underline{\beta}}_{out}\right)\right)^T\right]$$

Dari persamaan (3.29) diperoleh

$$E\left(\hat{\underline{\beta}}_{out}\right) = \underline{\beta} + \underline{\psi} + \left(\mathbf{Z}^T\mathbf{Z}\right)^{-1}\mathbf{Z}^T\mathbf{X}\left(\underline{\beta} - E\left(\hat{\underline{\beta}}\right)\right) + \left(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{Z}\left(\underline{\psi} - E\left(\hat{\underline{\psi}}\right)\right)$$

maka

$$E\left[\left(\hat{\underline{\beta}}_{out} - E\left(\hat{\underline{\beta}}_{out}\right)\right)\left(\hat{\underline{\beta}}_{out} - E\left(\hat{\underline{\beta}}_{out}\right)\right)^T\right] =$$

$$= E\left[\left(\hat{\underline{\beta}}_{out} - \left(\underline{\beta} + \underline{\psi} + \left(\mathbf{Z}^T\mathbf{Z}\right)^{-1}\mathbf{Z}^T\mathbf{X}\left(\underline{\beta} - E\left(\hat{\underline{\beta}}\right)\right) + \left(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{Z}\left(\underline{\psi} - E\left(\hat{\underline{\psi}}\right)\right)\right)\right)\right.$$

$$\left.\left(\hat{\underline{\beta}}_{out} - \left(\underline{\beta} + \underline{\psi} + \left(\mathbf{Z}^T\mathbf{Z}\right)^{-1}\mathbf{Z}^T\mathbf{X}\left(\underline{\beta} - E\left(\hat{\underline{\beta}}\right)\right) + \left(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{Z}\left(\underline{\psi} - E\left(\hat{\underline{\psi}}\right)\right)\right)\right)^T\right]$$

$$= E\left(\hat{\underline{\beta}}_{out} - \left(\underline{\beta} + \underline{\psi} + \left(\mathbf{Z}^T\mathbf{Z}\right)^{-1}\mathbf{Z}^T\mathbf{X}\left(\underline{\beta} - E\left(\hat{\underline{\beta}}\right)\right) + \left(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{Z}\left(\underline{\psi} - E\left(\hat{\underline{\psi}}\right)\right)\right)\right)$$

$$\left(\hat{\underline{\beta}}_{out} - \left(\underline{\beta} + \underline{\psi} + \left(\mathbf{Z}^T\mathbf{Z}\right)^{-1}\mathbf{Z}^T\mathbf{X}\left(\underline{\beta} - E\left(\hat{\underline{\beta}}\right)\right) + \left(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{Z}\left(\underline{\psi} - E\left(\hat{\underline{\psi}}\right)\right)\right)\right)^T$$

$$= E\left(\hat{\underline{\beta}}_{out}\right) - E\left(\underline{\beta} + \underline{\psi} + \left(\mathbf{Z}^T\mathbf{Z}\right)^{-1}\mathbf{Z}^T\mathbf{X}\left(\underline{\beta} - E\left(\hat{\underline{\beta}}\right)\right)\right) + E\left(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{Z}\left(\underline{\psi} - E\left(\hat{\underline{\psi}}\right)\right)$$

$$\left(\hat{\underline{\beta}}_{out} - \underline{\beta} + \underline{\psi} + \left(\mathbf{Z}^T\mathbf{Z}\right)^{-1}\mathbf{Z}^T\mathbf{X}\left(\underline{\beta} - E\left(\hat{\underline{\beta}}\right)\right) + \left(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{Z}\left(\underline{\psi} - E\left(\hat{\underline{\psi}}\right)\right)\right)^T \quad (3.36)$$

Dari persamaan (3.36) diperoleh $E\left[\left(\hat{\underline{\beta}}_{out} - E\left(\hat{\underline{\beta}}_{out}\right)\right)\left(\hat{\underline{\beta}}_{out} - E\left(\hat{\underline{\beta}}_{out}\right)\right)^T\right] \neq 0$, maka untuk $\hat{\underline{\beta}}$ yang mengandung outlier atau $\hat{\underline{\beta}}_{out}$ merupakan penduga yang tidak konsisten.

Jadi, $\hat{\underline{\beta}}$ yang mengandung outlier lebih konsisten dari pada $\hat{\underline{\beta}}$ yang mengandung outlier atau $\hat{\underline{\beta}}_{out}$.

BAB IV

PENUTUP

3.1. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan di atas, dapat disimpulkan bahwa:

1. Untuk mendeteksi parameter outlier pada model regresi eksponensial terlebih dahulu harus melinierkan model untuk memudahkan dalam pendeteksian, kemudian dilakukan pendeteksian parameter outlier dengan menggunakan metode *Maksimum Likelihood Estimation* yang menghasilkan suatu pendugaan parameter sebagai berikut:
   a. Penduga parameter model pertama yang tidak mengandung outlier

   $$\underline{\hat{\beta}} = \left(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^T \ln \underline{Y} \quad \text{dan} \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\left(\ln \underline{Y} - \mathbf{X}\underline{\hat{\beta}}\right)^T\left(\ln \underline{Y} - \mathbf{X}\underline{\hat{\beta}}\right)$$

   b. Penduga parameter model kedua yang mengandung outlier

   $$\underline{\hat{\beta}} = \left(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^T\left(\ln \underline{Y} - \mathbf{Z}\underline{\hat{\psi}}\right),\ \underline{\hat{\psi}} = \left(\mathbf{Z}^T\mathbf{Z}\right)^{-1}\mathbf{Z}^T\left(\ln \underline{Y} - \mathbf{X}\underline{\hat{\beta}}\right) \text{ dan}$$

   $$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\left(\ln \underline{Y} - \left(\mathbf{X}\underline{\hat{\beta}} + \mathbf{Z}\underline{\hat{\psi}}\right)\right)^T\left(\ln \underline{Y} - \left(\mathbf{X}\underline{\hat{\beta}} + \mathbf{Z}\underline{\hat{\psi}}\right)\right)$$

2. Pendugaan parameter yang dihasilkan model regresi eksponensial yang tidak mengandung outlier ternyata lebih baik dari pada yang mengandung outlier dikarenakan pendugaan parameter yang dihasilkan model regresi eksponensial yang tidak mengandung outlier memenuhi sifat-sifat dari pendugaan parameter yang baik yaitu unbias, efisien dan konsisten. Sedangkan pendugaan parameter yang dihasilkan model regresi eksponensial yang mengandung outlier tidak memenuhi sifat-sifat dari pendugaan parameter tersebut.

3.2. Saran

Didalam penelitian ini peneliti menggunakan model regresi nonlinier eksponensial yang merupakan model linier intrinsik. Bagi pembaca yang ingin melakukan penelitian serupa, peneliti menyarankan menggunakan model nonlinier intrinsik

DAFTAR PUSTAKA

Abdusysyakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN PRESS.

Abtokhi, Ahmad. 2007. *Akankah Al Quran yang Kubaca Menolongku*. Malang: UIN PRESS.

Al-Mahally, Imam Jalalud-din dan As-Suyuthi, Imam Jalalud-din. 1990. *Terjemah Tafsir Jalalain Berikut Asbaabun Nuzul*. Bandung: Sinar Baru.

Ananta, Aris. 1987. *Landasan Ekonometrika*. Jakarta: Gramedia.

Draper, Norman dan Harry Smith. 1992. *Analisis Regresi Terapan*, edisi kedua. Jakarta: PT Gramedia Pustaka Utama.

Dudewich & Mishra. 1995. *Statistik Matematika Modern*. Bandung: ITB.

Harini, Sri. 2007. *Metode Statistika*. Jakarta: Prestasi Pustaka.

Hasan, M. Iqbal. 2002. *Pokok-Pokok Materi Statistik 1(Statistik Deskriptif)*. Jakarta : PT Bumi Aksara.

Mood, M Alexander dkk.1986. *Introduction to the Theory of Statistics*. Mcgraw-Hill Book Company.

Rencher, Alvin C. 2002 .*Methods of Multivariate Analysis*. Canada: WILEY & Sons, Interscience.

Shihab, M Quraish. 2003. *Tafsir Al-Mishbah Volume* 14. Jakarta: Lentera Hati.

Sembiring. 1995. *Analisis Regresi*. Bandung : ITB.

Steel, Robert G.D. and Torri, James H. 1989. *Prinsip dan Prosedur Statistika Suatu Pendekatan Biometrik*. Jakarta: Gramedia.

Soelistyo. 2001. *Dasar-Dasar Ekonometrika*. Yogyakarta: BPFE.

Suparman. 1989. *Statistik Matematik*. CV. Jakarta: Rajawali.

Yitnosumarto, Suntoyo. 1990. *Dasar-Dasar Statistika*. Jakarta: C.V Rajawali.

DEPARTEMEN AGAMA
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jalan Gajayana 50 Malang 65144 Telepon/Faksimile (0341) 558933

BUKTI KONSULTASI

Nama : Aminatus Sakdiyah
NIM : 04510027
Fakultas : Sains dan Teknologi
Jurusan : Matematika
Judul Skripsi : **Pendeteksi Parameter Outlier pada Model Regresi Nonlinier Eksponensial dengan Menggunakan Metode *Maximum Likelihood Estimation***
Pembimbing I : Sri Harini, M.Si
Pembimbing II : Abdul Aziz, M. Si

No.	Tanggal	Yang dikonsultasikan	Tanda Tangan
1.	11 November 2008	Bab I, II, III	1
2.	21 November 2008	Revisi Bab I, II,	2
3.	3 Desember 2008	Revisi Bab I, II,	3
4.	3 Desember 2008	Bab I dan II Agama	4
5.	11 Desember 2008	Revisi Bab I dan II Agama	5
6	12 Desember 2008	Revisi Bab III	6
7	23 Desember 2008	Revisi Bab III	7
8	31 Desember 2008	Revisi Bab I dan II Agama	8
9	1 Januari 2009	Revisi Bab III	9
10	3 Januari 2009	ACC Keagamaan	10
11	3 Januari 2009	Revisi Bab III	11
12	5 Januari 2009	Revisi Bab III	12
13	10 Januari 2009	Revisi Bab III	13
14	15 Januari 2009	Revisi Bab III	14
15	17 Januari 2009	ACC Keseluruhan	15

Mengetahui,
Ketua Jurusan

Sri Harini, M.Si
NIP. 150318321

LAMPIRAN I

MODEL REGRESI EKSPONENSIAL

ANALISIS DATA

Contoh:

Data berikut berasal dari Brownlee (1965), pasal 13.12, dikutip oleh Daniel dan Wood, table 5.1, Draper dan Smith (1981), bab 6, dan Sembiring (2003), bab 7.

Table 1. Data dari pabrik oksidasi amoniak menjadi asam nitrat

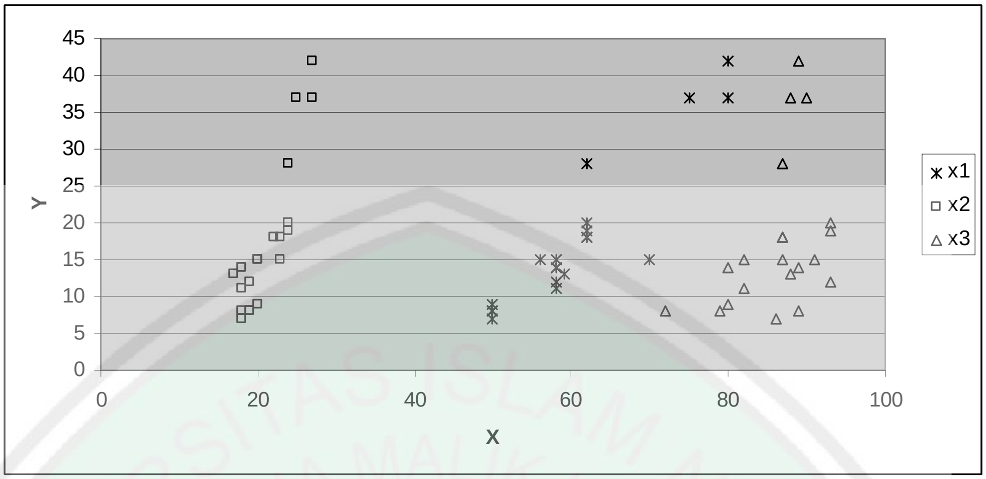
No. Pengamatan	x1	x2	x3	y
1	80	27	89	42
2	80	27	88	37
3	75	25	90	37
4	62	24	87	28
5	62	22	87	18
6	62	23	87	18
7	62	24	93	19
8	62	24	93	20
9	58	23	87	15
10	58	18	80	14
11	58	18	89	14
12	59	17	88	13
13	58	18	82	11
14	58	19	93	12
15	50	18	89	8
16	50	18	86	7
17	50	19	72	8
18	50	19	79	8
19	50	20	80	9
20	56	20	82	15
21	70	20	91	15

x1 = Aliran udara

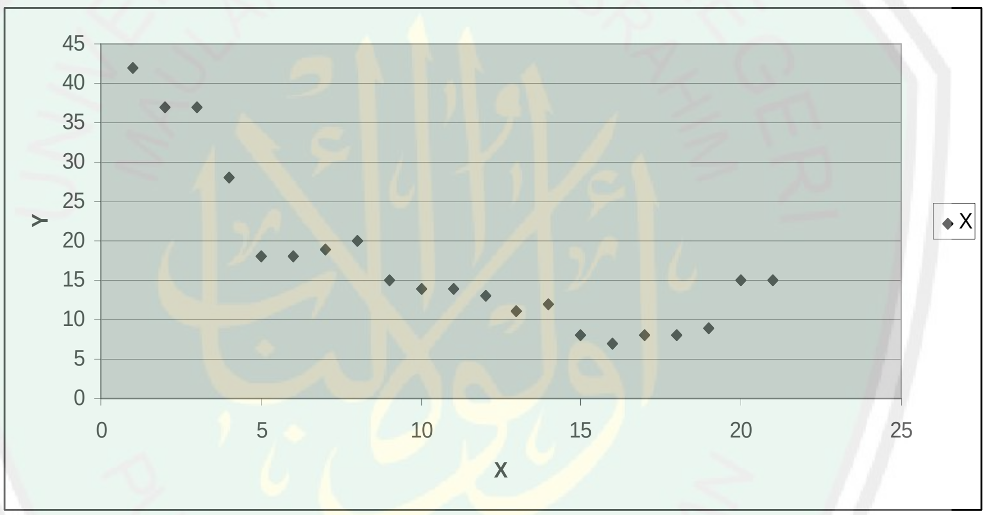
x2 = Suhu air pendingin

x3 = konsentrasi pendingin

y = persentasi amoniak yang hilang yang tak terikat



Gambar 1. Sebaran data pada masing-masing x1, x2, dan x3 terhadap y



Gambar 2. Sebaran data gabungan X ={ x1, x2, x3} terhadap Y = y

Dari gambar 2 di atas model yang paling baik digunakan dalam analisis regresi adalah model regresi nonlinier eksponensial yang telah dilinierkan dengan menggunakan logaritma natural sehingga modelnya berbentuk

$$y_i = e^{\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_k x_n} \varepsilon_i$$

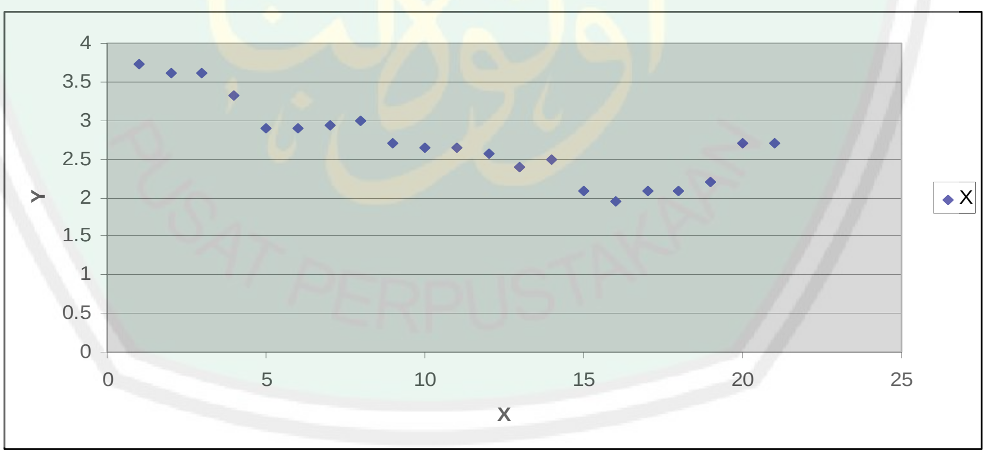
$$\ln y_i = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_k x_n + \ln \varepsilon_i$$

sehingga datanya menjadi

Tabel 2. Data dari pabrik oksidasi amoniak menjadi asam nitrat dengan y = lny

No. Pengamatan	X1	x2	x3	lny
1	80	27	89	3.7377
2	80	27	88	3.6109
3	75	25	90	3.6109
4	62	24	87	3.3322
5	62	22	87	2.8904
6	62	23	87	2.8904
7	62	24	93	2.9444
8	62	24	93	2.9957
9	58	23	87	2.7081
10	58	18	80	2.6391
11	58	18	89	2.6391
12	59	17	88	2.5649
13	58	18	82	2.3979
14	58	19	93	2.4849
15	50	18	89	2.0794
16	50	18	86	1.9459
17	50	19	72	2.0794
18	50	19	79	2.0794
19	50	20	80	2.1972
20	56	20	82	2.7081
21	70	20	91	2.7081

Sehingga gambar 2 menjadi



Gambar 3. Sebaran data gabungan X ={ x1, x2, x3} terhadap Y = lny

PEMBAHASAN

Analisis regresi dari data tabel 2 di atas menggunakan model

$$\ln y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \ln \varepsilon_i \qquad i = 1,2,\ldots,21$$

Di mana telah diketahui bahwa

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{(21)1} & x_{(21)2} & x_{(21)3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 80 & 27 & 89 \\ 1 & 80 & 27 & 88 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 70 & 20 & 91 \end{pmatrix}$$

$$\underline{Y} = \begin{pmatrix} \ln y_1 \\ \ln y_2 \\ \vdots \\ \ln y_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.7377 \\ 3.6109 \\ \vdots \\ 2.7081 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} \qquad \underline{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \ln \varepsilon_1 \\ \ln \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \ln \varepsilon_{21} \end{pmatrix}$$

dan untuk menentukan parameter $\underline{\beta}$ menggunakan rumus penduga parameter $\hat{\underline{\beta}}$ yang diperoleh dari metode maximum likelihood estimation yaitu

$$\hat{\underline{\beta}} = \left(\mathbf{X}^T \mathbf{X}\right)^{-1} \mathbf{X}^T \underline{Y}$$

Sehingga

$$\hat{\underline{\beta}} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 80 & 27 & 89 \\ 1 & 80 & 27 & 88 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 70 & 20 & 91 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 80 & 27 & 89 \\ 1 & 80 & 27 & 88 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 70 & 20 & 91 \end{pmatrix} \right]^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 80 & 27 & 89 \\ 1 & 80 & 27 & 88 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 70 & 20 & 91 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 3.7377 \\ 3.6109 \\ \vdots \\ 2.7081 \end{pmatrix}$$

$$= \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 80 & 80 & \cdots & 70 \\ 27 & 27 & \cdots & 20 \\ 89 & 88 & \cdots & 91 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 80 & 27 & 89 \\ 1 & 80 & 27 & 88 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 70 & 20 & 91 \end{pmatrix} \right]^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 80 & 80 & \cdots & 70 \\ 27 & 27 & \cdots & 20 \\ 89 & 88 & \cdots & 91 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3.7377 \\ 3.6109 \\ \vdots \\ 2.7081 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 21 & 1270 & 443 & 1812 \\ 1270 & 78482 & 27240 & 110076 \\ 443 & 27240 & 9545 & 38357 \\ 1812 & 110076 & 38357 & 156924 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 57,244 \\ 3550,019 \\ 1236,301 \\ 4966,384 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 13,45422319 & 0,027127695 & -0,060817832 & -0,159519073 \\ 0,027127695 & 0,001696415 & -0,003360626 & -0,000681772 \\ -0,060817832 & -0,003360626 & 0,01256511 & -0,000011686 \\ -0,159519073 & -0,000681772 & -0,000011686 & 0,002329431 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 57,244 \\ 3550,019 \\ 1236,301 \\ 4966,384 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -0,94332 \\ 0,034519 \\ 0,064472 \\ 0,002571 \end{pmatrix}$$

Maka

$$\underline{\hat{Y}} = \mathbf{X}\underline{\hat{\beta}} = \begin{pmatrix} 1 & 80 & 27 & 89 \\ 1 & 80 & 27 & 88 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 70 & 20 & 91 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0,94332 \\ 0,034519 \\ 0,064472 \\ 0,002571 \end{pmatrix}$$

Table 3. Data analisis regresi

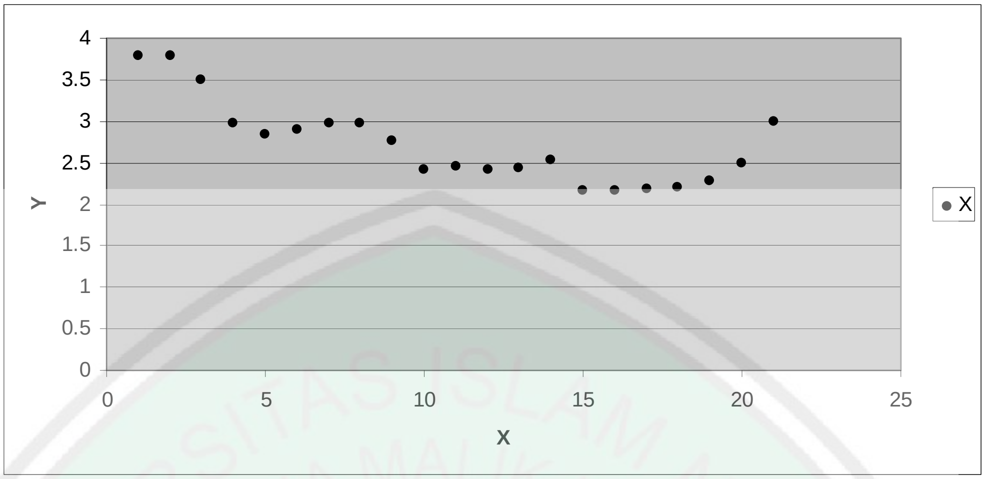
No	x1	x2	x3	lny	$\ln \hat{y} = \mathbf{x}\underline{\hat{\beta}}$	$\ln \varepsilon$ = lny - $\ln \hat{y}$
1	80	27	89	3.7377	3.78782	-0.05015
2	80	27	88	3.6109	3.785249	-0.17433
3	75	25	90	3.6109	3.488851	0.122067
4	62	24	87	3.3322	2.967915	0.36429
5	62	22	87	2.8904	2.83897	0.051401
6	62	23	87	2.8904	2.903443	-0.01307
7	62	24	93	2.9444	2.983343	-0.0389
8	62	24	93	2.9957	2.983343	0.012389
9	58	23	87	2.7081	2.765366	-0.05732
10	58	18	80	2.6391	2.425005	0.214052
11	58	18	89	2.6391	2.448147	0.19091
12	59	17	88	2.5649	2.415623	0.149327
13	58	18	82	2.3979	2.430148	-0.03225
14	58	19	93	2.4849	2.522905	-0.038
15	50	18	89	2.0794	2.171993	-0.09255
16	50	18	86	1.9459	2.164279	-0.21837
17	50	19	72	2.0794	2.192752	-0.11331
18	50	19	79	2.0794	2.210752	-0.13131
19	50	20	80	2.1972	2.277796	-0.08057
20	56	20	82	2.7081	2.490054	0.217997
21	70	20	91	2.7081	2.996465	-0.28841

Sedangkan untuk menentukan parameter σ^2 menggunakan rumus penduga parameter $\hat{\sigma}^2$ yang diperoleh dari metode maximum likelihood estimation yaitu

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\left(\ln \underline{Y} - \mathbf{X}\underline{\hat{\beta}}\right)^T \left(\ln \underline{Y} - \mathbf{X}\underline{\hat{\beta}}\right)$$

$$= \frac{1}{21}\begin{pmatrix} -0.05015 \\ -0.17433 \\ \vdots \\ -0.28841 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -0.05015 \\ -0.17433 \\ \vdots \\ -0.28841 \end{pmatrix} = \frac{1}{21} 0{,}518856$$

= 0,051886



Gambar 4. Model regresi nonlinier eksponensial

LAMPIRAN II

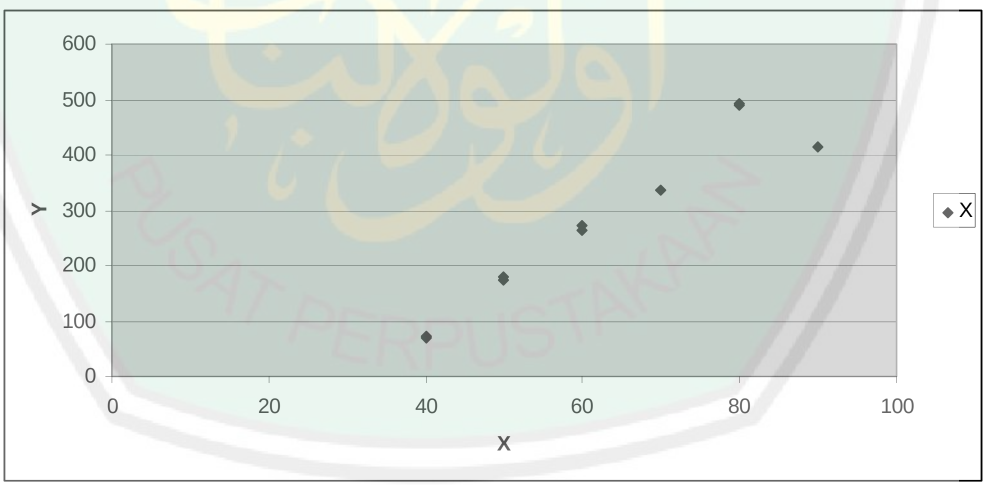
PENDETEKSI OUTLIER PADA REGRESI

ANALISIS DATA

Data berikut berasal dari Draper dan Smith (1992).

Tabel 4. Data banyaknya β-eritroidina dalam larutan encer dan pembacaan turbiditas dalam kolorimeter

No.	Konsentrasi (mg/ml)(x)	pembacaan kolorimeter (y)
1	40	69
2	50	175
3	60	272
4	70	335
5	80	490
6	90	415
7	40	72
8	60	265
9	80	492
10	50	180



Gambar 5. Sebaran data yang mengandung outlier

Dari gambar di atas terdapat data yang menyimpang dari data yang lain yaitu pada (90 ,415) biasanya disebut dengan pencilan (outlier). Data tersebut bisa saja berpengaruh terhadap pendugaa parameter regresinya, salah satu cara mengatasi masalah ini adalah dengan memerikasa data tersebut yaitu dengan analisis regresi yang terdapat outlier dan yang tidak terdapat outlier.

PEMBAHASAN

1. Analisis regresi yang terdapat outlier

Tabel 5. Data yang terdapat outlier

No.	X	y
1	40	69
2	50	175
3	60	272
4	70	335
5	80	490
6	90	415
7	40	72
8	60	265
9	80	492
10	50	180

Analisis regresi dari data di atas menggunakan model

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \varepsilon_i \qquad i = 1,2,\ldots,10$$

Di mana telah diketahui bahwa

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} \\ 1 & x_{21} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_{(10)1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 40 \\ 1 & 50 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 50 \end{pmatrix}$$

$$\underline{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 69 \\ 175 \\ \vdots \\ 180 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \qquad \underline{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_{10} \end{pmatrix}$$

dan untuk menentukan parameter $\underline{\beta}$ menggunakan rumus penduga parameter $\hat{\underline{\beta}}$ yang diperoleh dari metode maximum likelihood estimation yaitu

$$\hat{\underline{\beta}} = \left(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^T\underline{Y}$$

Sehingga

$$\hat{\underline{\beta}} = \begin{pmatrix}\beta_0 \\ \beta_1\end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix}1 & 40 \\ 1 & 50 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 50\end{pmatrix}^T \begin{pmatrix}1 & 40 \\ 1 & 50 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 50\end{pmatrix}\right]^{-1} \begin{pmatrix}1 & 40 \\ 1 & 50 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 50\end{pmatrix}^T \begin{pmatrix}69 \\ 175 \\ \vdots \\ 180\end{pmatrix}$$

$$= \left[\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1 \\ 40 & 50 & \cdots & 50\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1 & 40 \\ 1 & 50 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 50\end{pmatrix}\right]^{-1} \begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1 \\ 40 & 50 & \cdots & 50\end{pmatrix} \begin{pmatrix}69 \\ 175 \\ \vdots \\ 180\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}10 & 620 \\ 620 & 41200\end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix}2765 \\ 194970\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{(41200 \times 10) - (620 \times 620)} \begin{pmatrix}41200 & -620 \\ -620 & 10\end{pmatrix} \begin{pmatrix}2765 \\ 194970\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{412000 - 384400} \begin{pmatrix}41200 & -620 \\ -620 & 10\end{pmatrix} \begin{pmatrix}2765 \\ 194970\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{37600} \begin{pmatrix}41200 & -620 \\ -620 & 10\end{pmatrix} \begin{pmatrix}2765 \\ 194970\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{27600} \begin{pmatrix}41200 & -620 \\ -620 & 10\end{pmatrix} \begin{pmatrix}2765 \\ 194970\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1{,}49275 & -0{,}02246 \\ -0{,}02246 & 0{,}000362\end{pmatrix} \begin{pmatrix}2765 \\ 194970\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-252{,}297 \\ 8{,}529\end{pmatrix}$$

Maka

$$\underline{\hat{Y}} = \mathbf{X}\underline{\hat{\beta}} = \begin{pmatrix} 1 & 40 \\ 1 & 50 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -252,297 \\ 8,529 \end{pmatrix}$$

Table 6. Data analisis regresi yang mengandung outlier

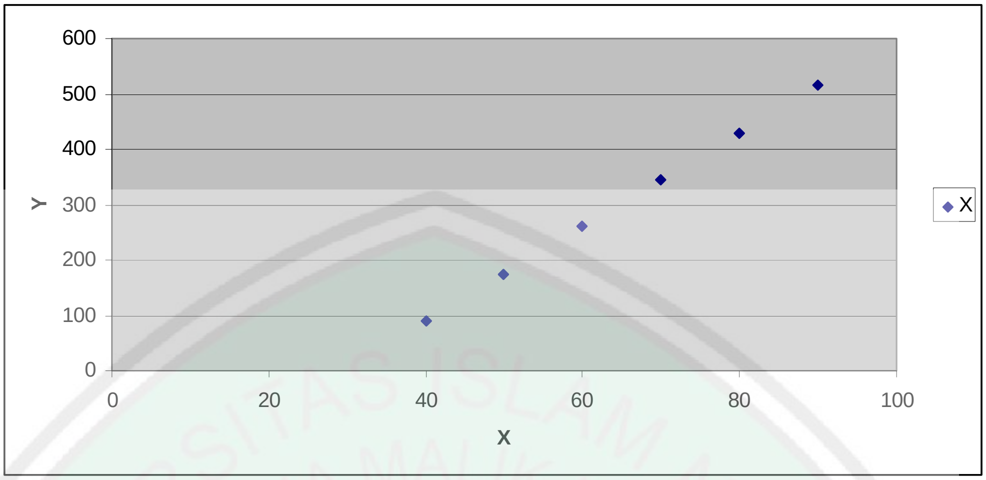
No.	x	y	$\hat{y} = x\underline{\hat{\beta}}$	ε = y - $\hat{y}$
1	40	69	88.863	-19.863
2	50	175	174.153	0.847
3	60	272	259.443	12.557
4	70	335	344.733	-9.733
5	80	490	430.023	59.977
6	90	415	515.313	-100.313
7	40	72	88.863	-16.863
8	60	265	259.443	5.557
9	80	492	430.023	61.977
10	50	180	174.153	5.847

Sedangkan untuk menentukan parameter σ^2 menggunakan rumus penduga parameter $\hat{\sigma}^2$ yang diperoleh dari metode maximum likelihood estimation yaitu

$$\hat{\sigma}^2 \quad = \frac{1}{n}\left(\underline{Y} - \mathbf{X}\underline{\hat{\beta}}\right)^T \left(\underline{Y} - \mathbf{X}\underline{\hat{\beta}}\right)$$

$$= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -19.863 \\ 0.847 \\ 12.557 \\ -9.733 \\ 59.977 \\ -100.313 \\ -16.863 \\ 5.557 \\ 61.977 \\ 5.847 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -19.863 \\ 0.847 \\ 12.557 \\ -9.733 \\ 59.977 \\ -100.313 \\ -16.863 \\ 5.557 \\ 61.977 \\ 5.847 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} 18498,18$$

= 1849,8181

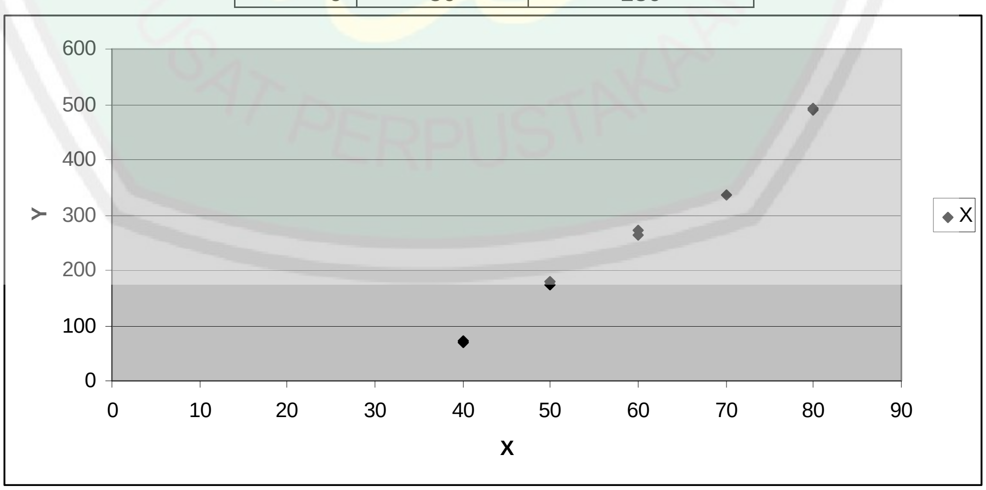


Gambar 6. Model regresi yang mengandung outlier

2. Analisis regresi yang tidak terdapat outlier

Tabel 7. Data yang tidak terdapat outlier (menghilangkan pengamatan no 6)

No.	x	Y
1	40	69
2	50	175
3	60	272
4	70	335
5	80	490
6	40	72
7	60	265
8	80	492
9	50	180



Gambar 7. Sebaran data yang tidak mengandung outlier

Analisis regresi dari data di atas menggunakan model

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \varepsilon_i \qquad i = 1,2,\ldots,9$$

Di mana telah diketahui bahwa

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} \\ 1 & x_{21} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_{(9)1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 40 \\ 1 & 50 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 50 \end{pmatrix}$$

$$\underline{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 69 \\ 175 \\ \vdots \\ 180 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \qquad \underline{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_9 \end{pmatrix}$$

dan untuk menentukan parameter $\underline{\beta}$ menggunakan rumus penduga parameter $\underline{\hat{\beta}}$ yang diperoleh dari metode maximum likelihood estimation yaitu

$$\underline{\hat{\beta}} = \left(\mathbf{X}^T \mathbf{X}\right)^{-1} \mathbf{X}^T \underline{Y}$$

Sehingga

$$\underline{\hat{\beta}} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 40 \\ 1 & 50 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 50 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 40 \\ 1 & 50 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 50 \end{pmatrix} \right]^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 40 \\ 1 & 50 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 50 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 69 \\ 175 \\ \vdots \\ 180 \end{pmatrix}$$

$$
=\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 40 & 50 & \cdots & 50 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 40 \\ 1 & 50 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 50 \end{pmatrix}\right]^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 40 & 50 & \cdots & 50 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 69 \\ 175 \\ \vdots \\ 180 \end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix} 9 & 530 \\ 530 & 33100 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2350 \\ 157620 \end{pmatrix}
$$

$$
=\frac{1}{(33100\times 9)-(530\times 530)}\begin{pmatrix} 33100 & -530 \\ -530 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2350 \\ 157620 \end{pmatrix}
$$

$$
=\frac{1}{297900-280900}\begin{pmatrix} 33100 & -530 \\ -530 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2350 \\ 157620 \end{pmatrix}
$$

$$
=\frac{1}{17000}\begin{pmatrix} 33100 & -530 \\ -530 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2350 \\ 157620 \end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix} 1.94706 & -0.03118 \\ -0.03118 & 0.00053 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2350 \\ 157620 \end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix} -338.45 \\ 10.181 \end{pmatrix}
$$

Maka

$$
\underline{\hat{Y}}=\mathbf{X}\underline{\hat{\beta}}=\begin{pmatrix} 1 & 40 \\ 1 & 50 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 50 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -338.45 \\ 10.181 \end{pmatrix}
$$

Tabel 8. Data analisis regresi yang tidak mengandung outlier

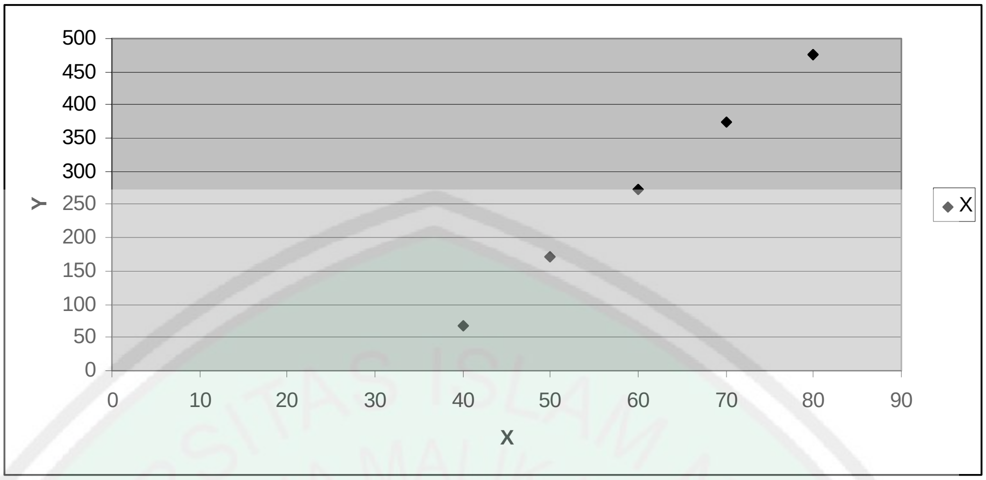
No.	x	y	$\hat{y} = x\underline{\hat{\beta}}$	ε = y - $\hat{y}$
1	40	69	68.8	0.2
2	50	175	170.61176	4.388235
3	60	272	272.42353	-0.423529
4	70	335	374.23529	-39.23529
5	80	490	476.04706	13.95294
6	40	72	68.8	3.2
7	60	265	272.42353	-7.423529
8	80	492	476.04706	15.95294
9	50	180	170.61176	9.388235

Sedangkan untuk menentukan parameter σ^2 menggunakan rumus penduga parameter $\hat{\sigma}^2$ yang diperoleh dari metode maximum likelihood estimation yaitu

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\left(\underline{Y} - \mathbf{X}\underline{\hat{\beta}}\right)^T\left(\underline{Y} - \mathbf{X}\underline{\hat{\beta}}\right)$$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 0.2 \\ 4.388235 \\ -0.423529 \\ -39.23529 \\ 13.95294 \\ 3.2 \\ -7.423529 \\ 15.95294 \\ 9.388235 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0.2 \\ 4.388235 \\ -0.423529 \\ -39.23529 \\ 13.95294 \\ 3.2 \\ -7.423529 \\ 15.95294 \\ 9.388235 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} 2161.553$$

$$= 240.1725$$



Gambar 8. Model regresi yang tidak mengandung outlier

KESIMPULAN LAMPIRAN II

Dari pembahasan analisis regresi yang mengandung outlier dengan yang tidak mengandung outlier diperoleh kesimpulan bahwa

1. Terdapat perbedaan nilai pendugaan parameter antara $\underline{\hat{\beta}}_{outlier}$ yang mengandung outlier dengan $\underline{\hat{\beta}}$ yang tidak mengandung outlier yaitu

   $$\underline{\hat{\beta}}_{outlier} = \begin{pmatrix} -252{,}297 \\ 8{,}529 \end{pmatrix} \quad , \quad \underline{\hat{\beta}} = \begin{pmatrix} -338.45 \\ 10.181 \end{pmatrix}$$

2. galat pendugaan parameter antara $\underline{\hat{\beta}}_{outlier}$ yang mengandung outlier lebih besar dari pada galat pendugaan parameter $\underline{\hat{\beta}}$ yang mengandung outlier

No.	$\varepsilon_{outlier}$ = y - $\hat{y}$	ε = y - $\hat{y}$
1	-19.863	0.2
2	0.847	4.388235
3	12.557	-0.423529
4	-9.733	-39.23529
5	59.977	13.95294
6	-100.313	-
7	-16.863	3.2
8	5.557	-7.423529
9	61.977	15.95294
10	5.847	9.388235

3. Pendugaan parameter $\hat{\sigma}^2_{outlier}$ = 1849.8181 yang mengandung outlier lebih besar dari pada pendugaan parameter $\hat{\sigma}^2$ = 240.1725 yang tidak mengandung outlier sehingga $\hat{\sigma}^2$ yang tidak mengandung outlier lebih efisien dari pada $\hat{\sigma}^2_{outlier}$ yang mengandung outlier

Jadi, dapat disimpulkan bahwa outlier berpengaruh terhadap pendugaan parameter