PENDUGAAN PARAMETER
REGRESI NON LINEAR COBB-DOUGLAS
DENGAN MENGGUNAKAN METODE NEWTON RAPHSON

SKRIPSI

OLEH :

MUHAMMAD ANWARUL HUDA
NIM. 04510053

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
MALANG
2009

PENDUGAAN PARAMETER
REGRESI NON LINEAR COBB-DOUGLAS
DENGAN MENGGUNAKAN METODE NEWTON RAPHSON

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Universitas Islam Negeri Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan Dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh :

MUHAMMAD ANWARUL HUDA
NIM. 04510053

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
MALANG
2009

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama	: Muhammad Anwarul Huda
NIM	: 04510053
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambil alihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri.

Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 17 Januari 2009

Yang membuat pernyataan

Muhammad Anwarul Huda
NIM. 04510053

PENDUGAAN PARAMETER
REGRESI NON LINEAR COBB-DOUGLAS
DENGAN MENGGUNAKAN METODE NEWTON RAPHSON

SKRIPSI

Oleh :

MUHAMMAD ANWARUL HUDA
NIM. 04510053

Telah disetujui untuk diuji
Malang, 17 Januari 2009

Dosen Pembimbing I	Dosen Pembimbing II
Sri Harini, M.Si	**Abdul Aziz, M. Si**
NIP. 150 318 321	**NIP. 150 377 256**

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M.Si
NIP. 150 318 321

PENDUGAAN PARAMETER
REGRESI NON LINEAR COBB-DOUGLAS
DENGAN MENGGUNAKAN METODE NEWTON RAPHSON

SKRIPSI

Oleh

MUHAMMAD ANWARUL HUDA
NIM. 04510053

Telah Dipertahankan Di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains

Tanggal : 20 Januari 2009

Susunan Dewan Penguji:		Tanda Tangan
1. Penguji Utama	: Drs. H. Turmudi, M.Si	( )
2. Ketua	: Usman Pagalay, M.Si	( )
3. Sekretaris	: Sri Harini, M.Si	( )
4. Anggota	: Abdul Aziz, M.Si	( )

Mengetahui dan Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M.Si
NIP. 150 318 321

Motto

Argumen Terbaik Adalah
Sesuatu yang Tampaknya Mirip Seperti Penjelasan
(Dale Carnegie)

بسم الله الرحمن الرحيم

KUPERSEMBAHKAN KARYA KECILKU TERUNTUK:

Ayahanda (H Ali Baqir AR) dan Ibunda (Hj Munawaroh) tercinta

Yang tak pernah lelah untuk mencurahkan kasih sayangnya kepadaku, dan iringan doanya yang selalu menyertai langkahku.

Adek ku tercinta khoirotun nisa’, keluarga besar H asryari dan keluarga H Abd rozak yang selau memberi motivasi dan menjadikan kebersamaan kita sebagai anugrah terindah yang kan selalu terjaga.

Dan tidak lupa pada sayang aq yang setia mendampingi aq

KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيْمِ

Segala puji bagi Allah SWT karena atas rahmat, taufiq dan hidayah-Nya, penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains dalam bidang Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Malang.

Penulis menyadari bahwa banyak pihak yang telah berpartisipasi dan membantu dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Untuk itu, iringan do'a dan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya penulis sampaikan, terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo selaku Rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Malang.
2. Prof. Drs Sutiman Bambang Sumitro, SU., D.Sc selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang.
3. Ibu Sri Harini, M.Si selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang.
4. Ibu Sri Harini, M.Si dan Bapak Abd Aziz M.Si yang telah bersedia meluangkan waktunya untuk memberikan bimbingan dan pengarahan selama penulisan skripsi.
5. Segenap dosen pengajar atas ilmu yang telah diberikan kepada penulis.
6. Bapak dan Ibu tercinta, keluaga besar H Asyari, dan keluara besar H Abd Rozak yang senantiasa memberikan do'a dan dukungan moril serta materil kepada penulis.

7. Adek Aku yang telah sabar menemani, memberikan dukungan dan semangat sehingga penulis dapat menyeleasikan skripsi ini dengan lancar.
8. Ra umam, iqbal, Dimas, Jalil, Zainudin, Ncing ma Ndut plus Mimin dan Imamah tidak ketinggalan mas kokok yang telah memberikan semangat dan dorangan kepada penulis untuk menyelsaikan skripsi ini.
9. Teman-teman Matematika, terutama angkatan 2004 beserta semua pihak yang telah membantu penyelesaian skripsi ini.

Dalam penyusunan skripsi ini tentunya masih terdapat banyak kesalahan dan kekurangan, sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran demi perbaikan skripsi ini. Akhirnya, semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Amin.

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Malang, 17 Januari 2009

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR SIMBOL

Lambang Matematika

$\sim$	: Berdistribusi
$\leq$	: Lebih kecil atau sama dengan
$\geq$	: Lebih besar atau sama dengan
∞	: Tak berhingga
$<$	: Lebih kecil daripada
$>$	: Lebih kecil daripada
$\prod$	: Untuk perkalian
$\sum$	: Untuk penjumlahan

Abjad Yunani

μ	: Mu
Θ θ	: Theta
σ	: Sigma
λ	: Lambda
π	: Pi
ϕ	: Phi
∂	: Dho
ε	: Epsilon

Lambang Khusus

μ	: Nilai Tengah
$\bar{X}$	: Rata-rata pada pengamatan X
$\bar{Y}$	: Rata-rata pada pengamatan Y
$\rightarrow$	: Menuju
s^2	: Ragam untuk sampel
σ^2	: Ragam (varian) untuk populasi
A	: Matrik A yang entri-entrinya merupakan peubah acak
$\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}^*$	: Vektor β yang entri-entrinya terdiri dari parameter ln $\beta_0, \beta_1\, \beta_2$
$\hat{\theta}$	: Penduga dari parameter θ
E	: Expectation (nilai harapan)
T	: Transpose
$L(x_1,...,x_n;\theta)$	: Fungsi likelihood
$f_{X_1,...,X_n}(x_1,...,x_n;\theta)$	: Fungsi padat peluang
$X_1, X_2, X_3, ..., X_n$	: Peubah acak
N	: Normal

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Anwarul Huda, Muhammmad. 2009. Pendugaan Parameter Regresi Non Linear Cobb-Douglas Dengan Menggunakan Metode Newton Raphson
Pembimbing: (I) Sri Harini, M.Si; (II) Abd Aziz M.Si

Kata Kunci: Pendugaan parameter, Regresi Nonlinier Cobb-Douglas, Metode Maksimum Likelihood, Deret Taylor, Newton Rapshon.

Inferensia dalam persoalan model Cobb-Douglas merupakan salah satu bentuk inferensi statistik yang berguna untuk mengatasi beberapa persoalan inferensi yang terkait dengan kombinasi dari beberapa distribusi, dimana bentuk distribusi yang satu merupakan distribusi parametrik, sedang yang lain merupakan distribusi nonparametrik. Untuk melakukan inferensi, misal penentuan model dan statistik uji distribusi non linier Cobb-Douglas, dapat digunakan metode maksimum likelihood dan dilanjutkan dengan metode newton rapshon.

Penduga parameter model regresi nonlinier Cobb-Douglas diperoleh dengan mengunakan metode maksimum likelihood yang diasumsikan berdistribusi normal kemudian menganalisis penduga σ^2 terlebih dahulu, untuk memperoleh penduga model regresi Cobb-Douglas dengan pendekatan deret taylor ordo dua sehingga di peroleh metode Newton Rapshon,

Berdasarkan hasil penelitian diperoleh bahwa bentuk umum dari penduga parameter model regresi non linear ***Cobb-Douglas*** dengan metode iterasi Newton Raphson adalah :

$$\hat{\beta}^{(n-1)} = \hat{\beta}^{(n)} - \left(\left. \frac{\partial^2 L}{\partial \beta \partial \beta^T} \right|_{\beta^{(n)}} \right)^{-1} \left. \frac{\partial L}{\partial \beta} \right|_{\hat{\beta}^{(n)}}$$

dengan

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\left(\underset{\sim}{\mathrm{Y}} - \mathrm{X}\underset{\sim}{\beta} \right)^{\mathrm{T}} \left(\underset{\sim}{\mathrm{Y}} - \mathrm{X}\underset{\sim}{\beta} \right)}{n}$$

maka penduga parameter $\hat{\sigma}^2$ berbentuk skalar.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Statistika adalah ilmu yang mempelajari suatu proses dalam merencanakan, mengumpulkan, menganalisis, menginterpretasi, dan mempresentasikan data. Istilah 'statistika' (bahasa Inggris: *statistics*) berbeda dengan 'statistik' (*statistic*). Statistika merupakan ilmu yang berkenaan dengan data, sedang statistik adalah data, informasi, atau hasil penerapan algoritma statistika pada suatu data dari kumpulan data, statistika dapat digunakan untuk menyimpulkan atau mendeskripsikan data; ini dinamakan statistika deskriptif. Sebagian besar konsep dasar statistika mengasumsikan teori probabilitas. Beberapa istilah statistika antara lain: populasi, sampel, unit sampel, dan probabilitas.

Statistika pada mulanya berkembang karena kebutuhan pemerintah dan pihak penguasa untuk mengumpulkan informasi yang berkaitan dengan data perekonomian, kependudukan dan politik suatu Negara. Istilah statistika pertama kali digunakan oleh *Gottfried Achenwall (1719-1772).* Selain itu statistika berupa sekumpulan konsep dan metode untuk mengumpulkan data, menyajikanya dalam bentuk yang mudah dipahami, menganalisis data, dan mengambil suatu kesimpulan berdasarkan hasil analisis data dalam situasi yang memiliki ketidakpastian dan variasi. Karena statistika bertolak pada cara berfikir probabilistik, hasil pengolahan data yang menggunakan metode statistik bukanlah hasil pasti, tetapi merupakan hasil taksiran adanya ketidakpastian dari variasi yang terjadi dalam fenomena tertentu. Keunikan ilmu statistika adalah menyertakan jaminan tingkat ketidakpastian tertentu, dalam penelitian ini penulis membahas tentang keunikan statistika dengan penaksiran suatu parameter β dan σ^2

Penaksiran parameter yang biasa dilakukan pada sekelompok data sampel untuk memperoleh pendekatan kecenderungan *(trend)* dari suatu persamaan fungsi respon terhadap peubah-peubah bebas adalah dengan menjadikan kedaan khusus (optimal) pada fungsi objektif, seperti penaksiran dengan metoda maksimum likelihood yang berusaha untuk memaksimumkan keadaan fungsi objektif sebagai fungsi peluang gabungan untuk memperoleh nilai-nilai parameter β dan σ^2.

Usaha ini sering dilakukan dan relatif lebih mudah pada model-model linear. Sehingga banyak model-model non linear yang ditransformasikan (direduksi) ke dalam bentuk linear. Salah satunya model regresi non linear *Cobb-Douglas*. Untuk menduga parameter model *Cobb-Douglas* maka diperlukan metode yang tepat. Terdapat banyak metode untuk menduga parameter model non linear, akan tetapi salah satu metode klasik untuk menduga model regresi non linear adalah metode Newton Raphson

Model regresi *non-linear Cobb-Douglas*, penduga parameternya diperoleh secara iteratif. Sedangkan untuk mendapatkan penduga parameternya dari model *linear instrinsik* yaitu dengan mentransformasikan model *non-linear* terlebih dahulu kedalam bentuk linear, yang bertujuan untuk mempermudah mendapatkan penduga dari parameternya. Terdapat suatu asumsi terhadap nilai pengamatan (*variabel random*) dalam pendugaan parameter yaitu pengamatan yang berdistribusi normal.

Terkait dengan masalah estimasi/ pendugaan diatas, telah disinggung dalam Al-Qur'an surat Ash-Shaffaat ayat 147.

وَأَرْسَلْنَٰهُ إِلَىٰ مِا۟ئَةِ أَلْفٍ أَوْ يَزِيدُونَ ﴿١٤٧﴾

Artinya: Dan Kami utus dia kepada seratus ribu orang atau lebih (Qs. Ash-Shaffaat/37:147)

Pada Qs. Ash-Shaffaat ayat 147 tersebut dijelaskan bahwa Nabi Yunus diutus kepada umatnya yang jumlahnya 100.000 orang atau lebih. Jika membaca ayat tersebut secara seksama, maka terdapat rasa atau kesan ketidakpastian dalam menentukan jumlah umat Nabi Yunus. Mengapa harus menyatakan 100.000 atau lebih? Mengapa tidak menyatakan dengan jumlah yang sebenarnya? Bukankah Allah Swt mengetahui yang ghaib dan yang nyata? Bukankah Allah Swt Maha Mengetahui Segala Sesuatu, termasuk jumlah umat Nabi Yunus? (Abdusysyakir, 153: 2007). Dari gambaran diatas diketahui bahwa itulah contoh estimasi/pendugaan dalam Al-Qur'an.

Selain itu estimasi/pendugaan juga disinggung dalam Al-Qur'an Al Jaatsirah ayat 24, yang berbunyi :

وَقَالُوا۟ مَا هِىَ إِلَّا حَيَاتُنَا ٱلدُّنْيَا نَمُوتُ وَنَحْيَا وَمَا يُهْلِكُنَآ إِلَّا ٱلدَّهْرُ ۚ وَمَا لَهُم

بِذَٰلِكَ مِنْ عِلْمٍ ۖ إِنْ هُمْ إِلَّا يَظُنُّونَ ﴿٢٤﴾

Artinya: Dan mereka berkata: "Kehidupan ini tidak lain hanyalah kehidupan di dunia saja, kita mati dan kita hidup dan tidak ada yang akan membinasakan kita selain masa", dan mereka sekali-kali tidak mempunyai pengetahuan tentang itu, mereka tidak lain hanyalah menduga-duga saja.

Dari ayat diatas memberikan penjelasan bahwa konteks estimasi terletak pada hubungan antara kebutuan manusia akan ilmu pengetahuan dengan keterbatasan manusia dalam memperoleh ilmu pengetahuan itu sendiri. Suatu indikasi bahwa dengan adanya keterbatasan manusia, manusia dituntut untuk melakukan estimasi (pendugaan) terhadap segala sesuatunya sebagai fondasi fundamental dalam melakukan pencarian terhadap kebenaran ilmu pengetahuan. Termasuk dalam konteks permasalaan ini adalah melakukan estimasi secara Newton Raphson yang dilakukan untuk mengetahui parameter model *non-linear* khususnya fungsi Cobb-Douglas

Atas dasar uraian diatas, peneliti akan mengkaji masalah model *non-linear*dengan judul ***"Penaksiran Parameter Regresi Non Linear Cobb-Douglas Dengan Menggunakan Metode Newton Raphson"***

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang diatas, maka permasalahan dirumuskan sebagai berikut: bagaimana analisa penaksiran parameter model regresi *non-linear Cobb-Douglas* dengan metode Newton Raphson.

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah untuk mengetahui penaksir parameter model regresi *non-linear Cobb-Douglas* dengan metode Newton Raphson.

1.4 Batasan Masalah

Untuk membatasi batasan masalah pada penelitian ini agar sesuai dengan yang dimaksudkan dan tidak menimbulkan permasalahan yang baru, maka peneliti memberikan batasan adalah menduga parameter β dan σ^2 dengan *Maksimum Likelihood Estimation (MLE)*

1.5 Kegunaan Penelitian

a. Bagi Peneliti

Kegunaan bagi peneliti adalah dapat memperdalam pemahaman peneliti mengenai Statistik inferensi khususnya pendugaan parameter model non linear .

b. Bagi Pembaca

Melalui penelitian ini dapat menambah penguasaan materi, sebagai pengalaman dalam melakukan penelitian dan menyusun karya ilmiah dalam bentuk skripsi, serta media untuk mengaplikasikan ilmu matematika yang telah diterima dalam bidang keilmuannya, khususnya menentukan parameter model *non-linear*secara realistis.

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode penelitian perpustakaan (*library research)* atau kajian pustaka. Kemudian dilakukan Analisa penaksiran Newton Raphson secara *Maksimum Likelihood Estimation* dengan menganalisis model statistik *non-linear*dari bentuk umum.

Berdasarkan penjelasan di atas penulis menyusun beberapa langkah untuk mendapatkan hasil penaksiran *Newton Raphson* yaitu :

1. Menentukan model non linear Cobb-Douglas sebagai bekal awal dalam menganalisis metode penaksiran *Newton Raphson*.
2. Melinearkan persamaan Cobb-Douglas untuk memperoleh persamaan yang berdistribusi normal
3. Menentukan fungsi dengan variabel idependen dari persamaan yang berdistribusi normal
4. Menganalisis fungsi sehingga diperoleh pendugaan parameter β
5. Menganalisis fungsi sehingga diperoleh pendugaan parameter σ^2. Setelah diketahui parameter σ^2 dengan pendekatan taylor peneliti Menentukan Persamaan Iterasi Newton Raphson dalam Persamaan Non Linear Maksimum Likelihood dengan pendekatan L(β) disekitar $\beta^{(1)}$.
6. Merumuskan model regresi Cobb Douglas dengan metode Newton Rapson.

1.7 Sistematika Pembahasan

Agar penulisan skripsi ini lebih terarah, mudah ditelaah dan dipahami, maka digunakan sistematika penulisan yang baik dan benar. Pada bab I penulis mengkaji tentang pendahuluan yang terdiri dari latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, dan sistematika penulisan.

Pada bab II mengenai Tinjauan Pustaka penulis mengkaji tentang konsep-konsep (teori-teori) yang mendukung bagian pembahasan. Konsep-konsep tersebut antara lain Analisis regresi ,Pendugaan Parameter, Model Regresi Non linear, Metode Maksimum Likelihood, , Kajian Tentang regresi dan Estimasi Dalam Al-Qur'an

Dalam bab III penulis mengkaji tentang pembahasan yang terdiri dari bagaimana cara menduga dan menentukan penduga parameter model regresi *non-linear*dengan menggunakan metode Newton Raphson secara *Maksimum Likelihood Estimation* (MLE).

Untuk bab IV penulis menyatakan tentang kesimpulan dan saran yang penulis peroleh dalam melakukan penulisan karya ilmiah sebagai penutup.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Analisis Regresi

Analisis regresi adalah teknik analisis yang mencoba menjelaskan bentuk hubungan antara peubah-peubah yang mendukung sebab akibat. Prosedur analisisnya didasarkan atas distribusi probabilitas bersama peubah-peubahnya. Bila hubungan ini dapat dinyatakan dalam persamaan matematik, maka kita dapat memamfaatkan untuk keperluan-keperluan lain misalnya peramalan (Wibisono, 2005. 529). Tujuan utama dari analisis regresi adalah mendapatkan dugaan (ramalan) dari suatu variabel dengan menggunakan variabel lain yang diketahui. Analisis regresi mempunyai dua jenis pilihan yaitu regresi linier dan regresi non linier. Namun yang akan dibahas dalam Penelitian ini hanyalah mengenai regresi non linier.

2.2 Regresi Non Linier

2.2.1 Pengertian

Regresi non linier adalah regresi yang variabel-variabelnya ada yang berpangkat. Bentuk grafik regresi non linier adalah berupa lengkungan (Hasan, 2002: 279). Sedangkan Menurut Supranto (1994: 262) hubungan fungsi antara dua variabel Xdan Y tidak selalu bersifat linier, akan tetapi bisa juga bukan linier (non linier). Diagram pencar dari hubungan yang linier akan menunjukkan suatu pola yang dapat didekati dengan garis lurus, sedangkan yang bukan linier harus didekati dengan garis lengkung. Dan menurut Sugiarto (1992: 29) hubungan fungsi diantara dua peubah X dan Y dikatakan tidak linier apabila laju perubahan dalam *Y* yang berhubungan dengan perubahan satu satuan *X* tidak konstan untuk suatu jangkauan nilai-nilai X tertentu

2.2.2 . Bentuk-bentuk Regresi Non linier

2.2.2.1 Fungsi Produksi Cobb-Dauglas

Fungsi produksi Cobb-Douglas dibuat oleh matematikawan Charles W. Cobb dan ekonom Faul H. Douglas sekitar tahun 1928. dan dirumuskan sebagai berikut :

$$Y_i = \beta_0 L_i^{\beta_1} K_i^{\beta_2} + \varepsilon_i \qquad (2.1)$$

dengan

Y_i	= Variable tidak bebas pada data ke i
β_0	= Parameter intersep
$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_p$	= Parameter slope
L_i	= variabel bebas pada Data ke i sebagai variabel pertama
K_i	= variabel bebas pada Data ke i sebagai variabel kedua
ε_i	= Galat pada data ke i

Untuk keperluan estimasi persamaan (2.1) dapat dituliskan lagi dalam bentuk persamaan linier logaritma sebagai:

$$\mathrm{Ln}Y_i = \mathrm{Ln}\,\beta_0 + \beta_1 \mathrm{Ln}L_i + \beta_2 \mathrm{Ln}K_i + \mathrm{Ln}\ \varepsilon_i \qquad (2.2)$$

Dengan asumsi β berfungsi linier dalam parameternya dan dengan begitu dapat digunakan sebagai alat pendugaan (Djauhari, 1996)

2.2.2.2 Bentuk Polynomial

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_2 X_i^2 + \beta_3 X_i^3 + \ldots + \varepsilon_i$$

khususnya bentuk parabola dan bentuk polynomial pangkat 3

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_2 X_i^2 + \varepsilon_i$$

dan

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_2 X_i^2 + \beta_3 X_i^3 + \varepsilon_i$$

Contoh:

Kurva biaya rata-rata dan harga total. Transformasi kedalam bentuk linier mudah sekali dijalankan dengan mengganti, misalnya saja, X_i^2 dengan Z_i, yaitu dengan jalan mengkuadratkan data pengamatan variabel X_i sehingga $X_i^2 = Z_i$ untuk model regresi biaya rata-rata. Jika X_i^3 diganti pula dengan W_i untuk model regresi biaya total akan diperoleh model

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_2 Z_i + \beta_3 W_i + \varepsilon_i$$

2.2.2.3 Bentuk Eksponensial

$$Y_i = e^{\beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \ldots + \beta_k X_{ik}} \varepsilon_i$$

Transformasi juga dapat dijalankan dengan mudah dengan mengambil transformasi logarimanya

$$\ln(Y_i) = \ln\left(e^{\beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \ldots + \beta_k X_{ik}} \varepsilon_i\right)$$

$$\ln\left(Y_i\right) = \ln\left(e^{\beta_0+\beta_1 X_{i1}+\beta_2 X_{i2}+\ldots+\beta_k X_{ik}}\varepsilon_i\right)$$

$$\ln\left(Y_i\right) = \ln e^{\beta_0+\beta_1 X_{i1}+\beta_2 X_{i2}+\ldots+\beta_k X_{ik}} + \ln\varepsilon_i$$

$$\ln\left(Y_i\right) = \left(\beta_0+\beta_1 X_{i1}+\beta_2 X_{i2}+\ldots+\beta_k X_{ik}\right)\ln e + \ln\varepsilon_i$$

$$\ln\left(Y_i\right) = \left(\beta_0+\beta_1 X_{i1}+\beta_2 X_{i2}+\ldots+\beta_k X_{ik}\right)(1) + \ln\varepsilon_i$$

$$\ln Y_i = \beta_0+\beta_1 X_{i1}+\beta_2 X_{i2}+\ldots+\beta_k X_{ik} + \ln\varepsilon_i$$

Model seperti ini adalah model linear dalam bentuk semi log yang dapat berupa log-lin atau lin-log

2.2.2.4 Bentuk berkebalikan (Respirokal)

$$Y_i = \frac{1}{\beta_0+\beta_1 X_{i1}+\beta_2 X_{i2}+\ldots+\beta_k X_{ik}+\varepsilon_i}$$

Transformasi modelnya adalah

$$\frac{1}{Y_i} = \beta_0+\beta_1 X_{i1}+\beta_2 X_{i2}+\ldots+\beta_k X_{ik}+\varepsilon_i$$

Bentuk respirokal yang lain adalah

$$Y_i = \beta_0+\beta_1\frac{1}{X_i}+\ldots+\varepsilon_i$$

Contoh:

Dalam bentuk polynomial, $\frac{1}{X_i}$ dapat diganti dengan Z_i sehingga model akan menjadi linear lagi. Bentuk seperti model itu dapat dilihat pada kurva Phillips, yang mencoba membuktikan hubungan antara laju pengangguran dan laju inflasi.

2.2.2.5 Bentuk Semilog

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 \log X_{i1} + \beta_2 \log X_{i2} + ... + \varepsilon_i$$

atau

$$\log Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + ... + \varepsilon_i$$

Contoh:

Penggunaan model semilog adalah untuk perhitungan dengan rumus bunga majemuk dan perhitungan laju pertumbuhan. Setiap model hubungan variabel yang tidak linear tetapi yang secara instrinsik linear tersebut mempunyai sifat seperti model hubungan linear biasa.

2.3 Estimasi Parameter

2.3.1 Pengertian Estimasi Dan Estimator Parameter

Parameter adalah nilai yang mengikuti acuan keterangan atau informasi yang dapat menjelaskan batas-batas atau bagian-bagian tertentu dari suatu system persamaan

Pendugaan (*estimasi*) adalah proses yang menggunakan sampel statistik untuk menduga atau menaksir hubungan parameter populasi yang tidak diketahui. Pendugaan merupakan suatu pernyataan mengenai parameter populasi yang diketahui berdasarkan populasi dari sampel, dalam hal ini sampel random, yang diambil dari populasi yang bersangkutan. Jadi dengan pendugaan ini, keadaan parameter populasi dapat diketahui (Hasan, 2002: 111).

Sedangkan Menurut Yitnosumarto (1990:211-212), penduga (*estimator*) adalah anggota peubah acak dari statistik yang mungkin untuk sebuah parameter (anggota peubah diturunkan). Besaran sebagai hasil penerapan penduga terhadap data dari semua contoh disebut nilai duga (*estimate*).

2.3.2 Sifat-Sifat Penduga

1) Tak bias (*unbias*)

Satu hal yang menjadi tujuan dalam pendugaan adalah penduga harus mendekati nilai sebenarnya dari parameter yang diduga tersebut. Misalkan terdapat parameter θ. Jika $\hat{\theta}$ merupakan penduga tak bias (*unbiased estimator*) dari parameter θ, maka menurut Yitnosumarto (1990: 212) berlaku :

$$E\left(\hat{\theta}\right)=\theta \qquad (2,3)$$

2) Efisien

Suatu penduga (misalkan: $\hat{\theta}$) dikatakan efisien bagi parameter (θ) apabila penduga tersebut mempunyai varians yang kecil. Apabila terdapat lebih dari satu penduga, penduga yang efisien adalah penduga yang mempunyai varian terkecil. Dua buah penduga dapat dibandingkan efisiensinya dengan menggunakan efisiensi relative (*Relative efficiency*). Efisiensi relatif $\hat{\theta}_2$ terhadap $\hat{\theta}_1$ dirumuskan:

$$\mathrm{R}\left(\hat{\theta}_2,\hat{\theta}_1\right)=\frac{E\left(\hat{\theta}_1-\hat{\theta}\right)^2}{E\left(\hat{\theta}_2-\hat{\theta}\right)^2}$$

$$=\frac{E\left(\hat{\theta}_1-E\left(\hat{\theta}_1\right)\right)^2}{E\left(\hat{\theta}_2-E\left(\hat{\theta}_2\right)\right)^2}$$

$$= \frac{\operatorname{var}\hat{\theta}_1}{\operatorname{var}\hat{\theta}_2} \quad (2.4)$$

$R = \frac{\hat{\theta}_1}{\hat{\theta}_2}$, Jika R>1 maka $\hat{\theta}_1 > \hat{\theta}_2$ artinya secara relatif $\hat{\theta}_2$ lebih efisien daripada $\hat{\theta}_1$, dan jika R<1 maka $\hat{\theta}_1 < \hat{\theta}_2$ artinya secara relatif $\hat{\theta}_1$ lebih efisien daripada $\hat{\theta}_2$.

3) Konsisten

Suatu penduga dikatakan konsisten apabila memenuhi syarat sebagai berikut (Hasan, 2002: 113-115) :

1) Jika ukuran sampel semakin bertambah maka penduga akan mendekati parameternya. Jika besar sampel menjadi tak terhingga maka penduga konsisten harus dapat memberi suatu penduga titik yang sempurna terhadap parameternya. Jadi, $\hat{\theta}$ merupakan penduga konsisten, jika dan hanya jika:

$$E\left(\hat{\theta} - E(\theta)\right)^2 \rightarrow 0 \text{ jika } n \rightarrow \infty$$

2) Jika ukuran sampel bertambah besar maka distribusi sampling penduga akan mengecil menjadi suatu garis tegak lurus diatas parameter yang sama dengan probabilitas sama dengan 1.

2.4 Model Regresi dalam Pendekatan Matrik

Model regresi yang paling sederhana adalah model regresi linier. model regresi linier sederhana terdiri dari satu variabel. Model tersebut dapat digeneralisasikan menjadi lebih dari satu atau dalam k variabel. Persamaan bagi model regresi linier dengan k variabel diberikan sebagai berikut:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_2 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_k X_k + \varepsilon \qquad (2.5)$$

Bila pengamatan mengenai $Y, X_1, X_2, \ldots, X_K$ dinyatakan masing-masing dengan $Y_i, X_{i1}, X_{i2}, \ldots, X_{iK}$ dan galatnya ε_i. Maka persamaan (2.5) dapat dituliskan sebagai:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \ldots + \beta_k X_{ik} + \varepsilon_i \,,\ i = 1, 2, \ldots, n$$

Dinotasikan dalam bentuk matrik, sehingga menjadi:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ . \\ . \\ . \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} & . & . & . & X_{1k} \\ 1 & X_{21} & X_{22} & . & . & . & X_{k2} \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} & . & . & . & X_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ . \\ . \\ . \\ \beta_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ . \\ . \\ . \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \qquad (2.6)$$

Misalkan:

$$\underset{\sim}{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ . \\ . \\ . \\ Y_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} & . & . & . & X_{1k} \\ 1 & X_{21} & X_{22} & . & . & . & X_{k2} \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} & . & . & . & X_{nk} \end{bmatrix} \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ . \\ . \\ . \\ \beta_k \end{bmatrix} \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ . \\ . \\ . \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

Persamaan (2.4) dapat dinyatakan sebagai:

$$\underset{\sim}{\mathbf{Y}} = \mathbf{X}\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}} + \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

Dimana:

$\underset{\sim}{\mathbf{Y}}$ adalah vektor respon $n \times 1$

$\mathbf{X}$ adalah matrik peubah bebas ukuran $n \times (k+1)$

$\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}$ adalah vektor parameter ukuran $(k+1)\times 1$ yang tak diketahui

$\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}$ adalah vektor galat ukuran $n \times 1$

(Sembiring,1995: 134-135)

Sistem (2.6) dikenal sebagai penyajian matrik model regresi linier (k-variabel) umum. Sistem tersebut bisa ditulis lebih ringkas sebagai:

$$\underset{n\times 1}{\underset{\sim}{\mathbf{Y}}} = \underset{n\times(k+1)}{\mathbf{X}} \; \underset{(k+1)\times 1}{\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}} + \underset{n\times 1}{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}} \qquad (2.7)$$

2.4.1 Sifat-sifat Transpose

Jika ukuran matrik sedemikian rupa sehingga operasi-operasi berikut dapat dilakukan, (Romper, Antón,51) maka :

(a). $(A^T)^T = A$

(b). $(A + B)^T = A^T + B^T$ dan $(A - B)^T = A^T - B^T$

(c). $(kA)^T = kA^T$

(d). $(AB)^T = B^T A^T$

Ingat bahwa melakukan transpos terhadap suatu matrik adalah mempertukarkan baris-baris dan kolom-kolomnya sehingga bagian (a), (b), dan (c) telah terbukti dengan sendirinya, bagian (a) menyatakan bahwa pertukaran baris-baris dan kolom-kolom sebanyakdua kali akan membuat matrik tidak berubah; bagian (b) menyatakan bahwa penjumlahan kemudian pertukaran baris dan kolom-kolom akan memberikan hasil yang sama dengan jika kita pertama-tama mempertukarkan baris-baris dan kolom-kolom baru kemudian kita menjumlahkan; dan bagian (c) menyatakan bahwa paerkalian dengan sekalardan kemudian pertukaran baris dan kolommemberikan hasil yang sama dengan jika kita pertama-tamamempertukarkan baris baris dan kolom-kolom, kemudian mengalikan dengan scalar. Sedangkan bagian (d) adalah : misalkan A $=[a_{ij}]_{mxr}$ dan B = $[a_{ij}]_{rxn}$ sedemikian sehingga hasil kali AB dan B^T A^T dapat diperoleh. Jadi kita hanya perlu menunjukkan bahwa entri-entrinya yang bersesuaaian dari $(AB)^T = B^T A^T$ adalah sama.

$((AB)^T)_{ij} = (B^T A^T)_{ij}$

Pada ruas kiri persamaan dengan menggunakan definisi perkalian matriks kita peroleh $((AB)^T)_{ij} = ((AB))_{ij} = a_{j1}b_{1i} + a_{j2}b_{2i} + \ldots + a_{jr}b_{ri}$.

Untuk menghitung ruas kanan akan lebih mudah untuk menyatakan entri-entri ke-ij dari A^T dan B^T masing-masing sebagai a_{ij}^T dan b_{ij}^T sehingga $a_{ij}^T = a_{ij}$ dan $b_{ij}^T = b_{ij}$ dari hubungan ini dan definisi p[erkalian matriks kita peroleh :

$$
\begin{aligned}
(B^T A^T)_i &= b_{i1}^T a_{1j}^T + b_{i2}^T a_{2j}^T + \ldots + b_{ir}^T a_{rj}^T \\
&= b_{i1} a_{1j} + b_{i2} a_{2j} + \ldots + b_{ir} a_{rj} \\
&= a_{1j} b_{i1} + a_{2j} b_{i2} + \ldots + a_{rj} b_{ir}
\end{aligned}
$$

Sehingga terbukti $(AB)^T = B^T A^T$

2.5 Metode Maksimum Likelihood

Dalam inferensi statistik terdapat dua persoalan penting yakni pendugaan dan uji hipotesis, kedua inferensi tersebut masing-masing bertujuan untuk membuat pendugaan dan pengujian suatu parameter populasi dan informasi sampel yang diambil dari populasi tersebut. Dalam pendugaan parametrik, penentuan penduga parameter dapat dilakukan dengan banyak metode, salah satu diantaranya adalah metode *maximum likelihood*. Metode ini merupakan metode yang sangat berguna untuk mendapatkan penduga.

Dalam uji hipotesis, untuk mendapatkan statistik uji yang merupakan fungsi dari sampel, dapat dilakukan dengan banyak metode. Salah satu diantaranya adalah metode Newton Rapson. Metode ini sangat kaitannya dengan fungsi *maximum likelihood estimator* (MLE).

Definisi 1. **Fungsi likelihood**

Fungsi likelihood dari n variabel random $X_1, X_2, ..., X_n$ didefinisikan sebagai fungsi kepadatan bersama dari n variabel random. Fungsi kepadatan bersama $f_{X_1,...,X_n}(x_1,...,x_n;\theta)$, yang mempertimbangkan fungsi dari θ. Jika $X_1,...,X_n$ adalah sampel random dari fungsi kepadatan $f(x;\theta)$, maka fungsi likelihoodnya adalah $f(x_1;\theta)f(x_2;\theta),...,f(x_n;\theta)$ (Mood, Graybill and Boes, 1986: 278)

Notasi.

Untuk mengingatkan dalam mempelajari fungsi likelihood sebagai fungsi dari θ, dapat dinotasikan $l(x_1,...,x_n;\theta)$ atau $l(x_1,...,x_n)$

Contoh:

Jika $X_1, X_2, ..., X_n$ adalah random sampel dari distribusi X ~N(0,1), Fungsi likelihoodnya adalah:

$$l(x_1,x_2,...,x_n;\theta) = f(x_1;\theta)f(x_2;\theta)...f(x_n;\theta) \quad \theta \in \Theta \qquad (2.8)$$

Karena berdistribusi Normal, maka fungsi $f(x;\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x_i-\theta)^2}$

fungsi likelihodnya adalah:

$$l(x_1,x_2,...,x_n;\theta)=f(x_1;\theta)f(x_2;\theta)...f(x_n;\theta)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x_1-\theta)^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x_2-\theta)^2}...\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x_n-\theta)^2}$$

$$=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x_1-\theta)^2+\left(-\frac{1}{2}(x_2-\theta)^2\right)+...+\left(-\frac{1}{2}(x_n-\theta)^2\right)}$$

$$=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left\{(x_1-\theta)^2+(x_2-\theta)^2+...+(x_n-\theta)^2\right\}}$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2}$$

$$=\left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\right)^n e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2}$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2} \qquad (2.9)$$

Sehingga fungsi likelihood dapat dituliskan sebagai berikut:

$$l(x_1,x_2,...,x_n;\theta)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2} \qquad (2.10)$$

Definisi 2.

Maksimum likelihood estimator, Misalkan:

$$l(\theta)=l(x_1,x_2,...,x_n;\theta)$$

Merupakan fungsi likelihood dari variabel random $X_1, X_2, ..., X_n$. Jika $\hat{\theta}$ [dimana $\hat{\theta} = \hat{\vartheta}(x_{1,} x_2, ..., x_n)$ merupakan fungsi dari pengamatan $x_1, ..., x_n$] adalah nilai $\hat{\theta}$ pada $\bar{\Theta}$ yang memaksimumkan $l(\theta)$, maka $\hat{\Theta} = \hat{\vartheta}(X_1, X_2, ..., X_n)$ adalah maksimum likelihood estimator dari θ untuk sampel $x_1, x_2, ..., x_n$ (Mood, Graybill and Boes, 279: 1986).

Contoh:

Andaikan bahwa sampel random berukuran n berdistribusi Bernoulli.

$f(x;p) = p^x q^{1-x} I_{(0,1)}(x)$, untuk $0 \le p \le 1$ dan $q = 1 - p$

Nilai sampel $x_1, x_2, ..., x_n$ menjadi barisan bernilai nol dan satu, dan fungsi likelihoodnya adalah

$$l(p) = \prod_{i=1}^{n} p^{x_i} q^{1-x_i} = p^{\sum x_i} q^{n-\sum x_i}$$

dimisalkan :

$$y = \sum xi$$

Maka fungsi likelihoodnya menjadi:

$$l(p) = p^{y_i} q^{n-y_i}$$

Dengan melogaritmakan persamaan diatas, diperoleh:

$$\ln l(p) = y \ln p + (n - y) \ln q \qquad (2.11)$$

Untuk mendapatkan penduga dari p maka dengan mendiferensialkan persamaan (2.25) terhadap p, diperoleh:

$$\frac{\partial \ln l(p)}{\partial p} = \frac{y}{p} - \frac{n-y}{q} \tag{2.12}$$

Karena $\frac{\partial \ln l(p)}{\partial p} = 0$, Persamaan (2.12) menjadi

$$\frac{y}{p} - \frac{n-y}{q} = 0$$

Untuk $q = 1 - p$, maka:

$$\frac{y}{p} - \frac{n-y}{1-p} = 0$$

$$\frac{y}{p} = \frac{n-y}{1-p}$$

$$y - py = p(n-y)$$

$$-py - p(n-y) = -y$$

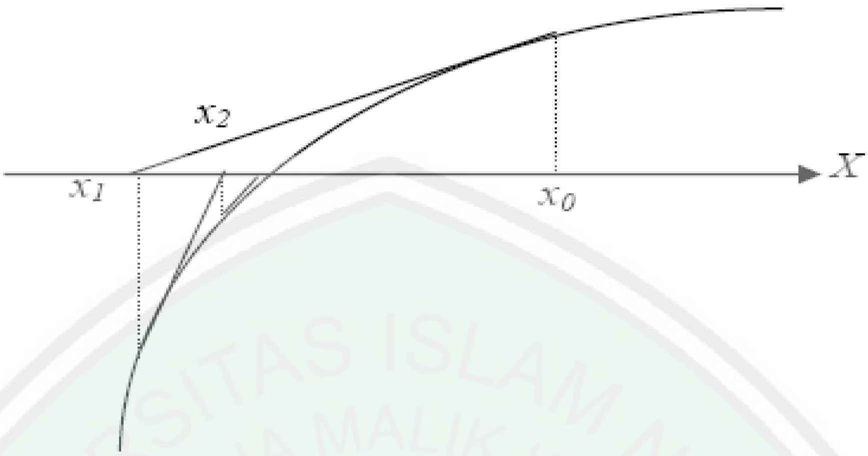
$$-p(y+n-y) = -y$$

$$p = \frac{-y}{-n}$$

$$\hat{p} = \frac{y}{n} = \frac{1}{n}\sum x_i = \bar{x} \tag{2.13}$$

2.6 Methode Newton Rapson

Metode newton raphson adalah metode pendekatan yang menggunakan satu titik awal dan mendekatinya dengan memperhatikan slope atau gradien pada titik tersebut. Metode Newton Rapson dapat digambarkan sebagai berikut (Bambang 30:2002):

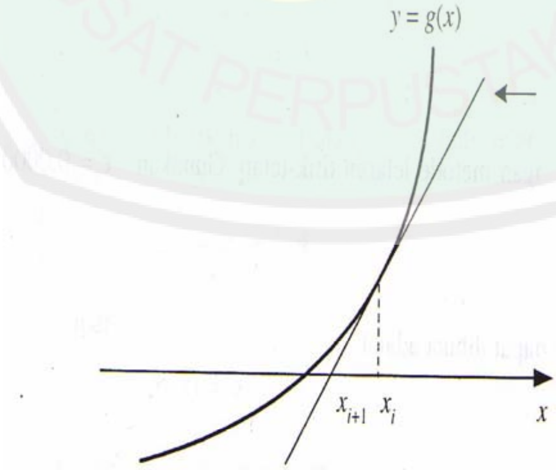


Gambar 2.1 Metode Newton Raphson

Ada dua pendekatan dalm menurunkan rumus metode newton rapshon yaitu :

1. Penurunan rumus Newton Raphson secara geometri,
2. Penurunan rumus Newton Raphson dengan bantuan deret Taylor.

1. Penurunan rumus Newton Raphson secara geometri



Garis singgung kurva di x_i dengan gradient $= f'(x_i)$

Gambar 2.2 Tafsiran Geometri Metode Newton Raphson

(Munir,89-90: 2008)

Dari gambar 2.2 gradien garis singgung di $x_r$adalah

$$m = f'(x_r) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_r) - 0}{x_r - x_{r+1}}$$

atau

$$f'(x_r) = \frac{f(x_r)}{x_r - x_{r+1}}$$

Sehingga prosedur lelaran metode Newton Raphson adalah

$$x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)}{f'(x_r)} \qquad f'(x_r) \neq 0 \qquad (2.14)$$

2. Penurunan rumus Newton Raphson dengan bantuan deret Taylor.

Jika $f \in C^2[a,b], dan\, \bar{x} \in [a,b]$ adalah nilai aproksimasi terhadap *p* sehingga $f'(\bar{x}) \neq 0\, dan\, |\bar{x} - p|$ sangat kecil, maka polynomial taylor dapat di kembangkan untuk $\bar{x}$ sebagai :

$$f(x) = f(\bar{x}) + (x - \bar{x}) f'(\bar{x}) + \frac{(x - \bar{x})^2}{2!} f''(\ \xi(x)\ ) + \ldots$$

$$f(x) = f(\bar{x}) + (x - \bar{x}) f'(\bar{x}) + \frac{(x - \bar{x})^2}{2} f''(\ \xi(x)\ ); \xi(x) \in (x, \bar{x}) \qquad (2.15)$$

Jika *f[p] = 0* maka untuk *x = p persamaan* 2.27 menjadi

$$0 = f(\bar{x}) + (p - \bar{x}) f'(\bar{x}) + \frac{(p - \bar{x})^2}{2!} f''(\ \xi(x)\ )$$

Telah di asumsikan $|\bar{x} - p|$ sangat kecil maka suku ke tiga dapat di abaikan sehingga

$$0 = f(\bar{x}) + (p - \bar{x}) f'(\bar{x})$$

Formulasi untuk p di dapat

$$p \approx \bar{x} - \frac{f(\bar{x})}{f'(\bar{x})}$$

Dengan menggati $\bar{x} = p_{n-1}$ maka formulasi Newton_Raphson dapat diturunkan untuk menggeneralisasi suatu deret $\{p_n\}$ melalui

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})} untuk\ n \geq 1$$

Sama halnya dengan metode bijeksi, untuk pengulangan perhituingan dalam mencari solusi yang akurat harus dikonfirmasikan dengan nilai kesalahan ε yang telah ditentukan sehingga

$$\begin{aligned} |p_n - p_{n-1}| &< e \\ \frac{|p_n - p_{n-1}|}{p_n} &< e\ p_n \neq 0 \\ |f(p_n)| &< e \end{aligned} \qquad (2.16)$$

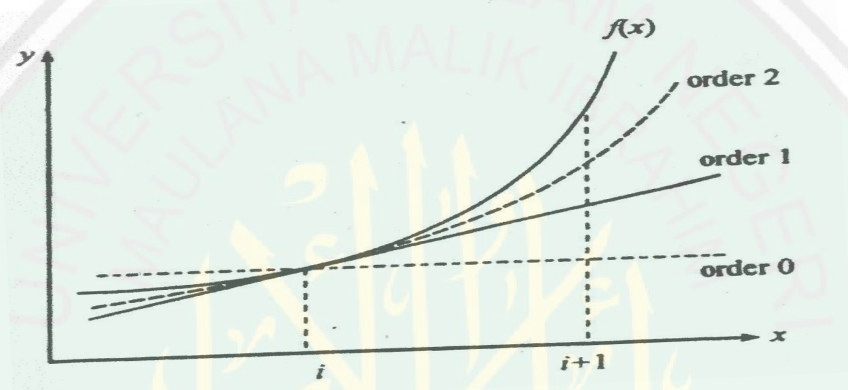
(Bambang, 2002: 30)

2.7 DERET TAYLOR

2.5.1 Persamaan Deret Taylor

Deret taylor merupakan dasar untuk menyelesaikan masalah dalam metode numerik terutama penyelesaiaan persamaan diferensial. Jika suatu fungsi f(x) diketahu titik x_i dan semua turunan dari semua f terhadap x diketahui pada titik tersebut, mak deret taylor (persamaan 1.3) dapat dinyatakan nilai f pada titik x_{1+i} yang terletak pada jarak Δx dari titik x_i

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)\frac{\Delta x}{1!} + f''(x_i)\frac{\Delta x^2}{2!} + \ldots + f^{(n)}(x_i)\frac{\Delta x^n}{n!} + R_n \qquad (2.17)$$



Gambar 2.2 Perkiraan Suatu Fungsi Dengan Deret Taylor

Dengan

$f(x_i)$	: fungsi di titik x_i
$f(x_{i+1})$	: fungsi di titik x_{i+1}
$f', f'', \ldots f^n$	: turunan pertama, kedua, ...*ke n* dari fungsi
Δx	: langkah ruang, yaitu jarak antara x_i dan x_{i+1}
R_n	: kesalahan pemotongan

Dalam persamaan (1.3) kesalahan pemotongan R_n diberikan dalam bentuk ini

$$R_n = f^{(n+1)}(x_i)\frac{\Delta x^{n+1}}{(n+1)!} + f^{n+2}(x_i)\frac{\Delta x^{n+2}}{(n+2)!} + \ldots \qquad (2.18)$$

Persamaan (2.18) yang mempuanyai suku sebanyak tak terhingga akan memberikan perkiraan niali suatu fungsi sesuai dengan penyelesaiaan eksaknya.

1. ***Memperhitungkan Suku Pertama (Orde Nol)***

Apabila hanya diperhitungkan satu suku pertama dari ruas kanan maka persamaan (2.18) dapat ditulis dalam bentuk :

$$f(x_i) \approx f(x_{i+1}) \qquad (2.19)$$

pada persamaan (2.18) yang disebut sebagai perkiraan order nol, nilai *f* pada titik (x_{i+1}) sama dengan nilai (xi), perkiraan tersebut adalah benar jika fungsi yang diperkirakan adalah suatu konstan. Jika fungsi tidak konstan maka diperkirakan fungsi-fungsi berikutnya dari deret taylor

2. ***Memperhitungkan Suku Pertama (Orde 1)***

bentuk deret taylor orde satu, yang memperhitungkan dua suku pertama, dapat ditulis dalam bentuk :

$$f(x_{i+1}) \approx f(x_i) + f'(x_i)\frac{\Delta x}{1!} \qquad (2.20)$$

yang merupakan bentuk persamaan garis lurus (linier)

3. ***Memperhitungkan Suku kedua (Orde 2)***

$$f(x_{i+1}) \approx f(x_i) + f'(x_i)\frac{\Delta x}{1!} + f''(x_i)\frac{(\Delta x)^2}{2!} \qquad (2.21)$$

(Bambang,2002 7)

2.8 Kajian Al-Quran tentang Analisis Regresi dan Estimasi

2.8.1 Analisis Regresi

Dalam Al-Quran, analisis regresi sudah ada dan disebutkan dalam surat Ali Imron Ayat 190-191. Pada ayat tersebut bisa memuat suatu analisis regersi dengan cara mempartisinya (membagi-bagi) dan hasil partisian ayat-ayat tersebut dimisalkan dengan sebuah variabel, yaitu:

إِنَّ فِي خَلْقِ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضِ وَٱخْتِلَٰفِ ٱلَّيْلِ وَٱلنَّهَارِ لَءَايَٰتٍ لِّأُو۟لِى ٱلْأَلْبَٰبِ
١٩٠ ٱلَّذِينَ يَذْكُرُونَ ٱللَّهَ قِيَٰمًا وَقُعُودًا وَعَلَىٰ جُنُوبِهِمْ وَيَتَفَكَّرُونَ فِى خَلْقِ
ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضِ رَبَّنَا مَا خَلَقْتَ هَٰذَا بَٰطِلًا سُبْحَٰنَكَ فَقِنَا عَذَابَ ٱلنَّارِ ١٩١

Artinya : *Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi, dan silih bergantinya malam dan siang terdapat tanda-tanda bagi orang-orang yang berakal, (yaitu) orang-orang yang mengingat Allah sambil berdiri atau duduk atau dalam keadan berbaring dan mereka memikirkan tentang penciptaan langit dan bumi (seraya berkata): "Ya Tuhan kami, tiadalah Engkau menciptakan Ini dengan sia-sia, Maha Suci Engkau, Maka peliharalah kami dari siksa neraka.*

Dalam ayat tersebut terpartisi sebanyak tiga bagian. Yaitu :

لِّأُو۟لِى ٱلْأَلْبَٰبِ .... (Y)

ٱلَّذِينَ يَذْكُرُونَ ٱللَّهَ .... (L)

وَيَتَفَكَّرُونَ فِى خَلْقِ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضِ...................... **(K)**

Dalam ayat tersebut dijelaskan bahwa penciptaan langit dan bumi serta pergantian siang dan malam merupakan tanda-tanda kebesaran Allah yang melekat pada diri seorang *ulul albab.* Sedangkan kreteria *ulul albab* itu adalah gabungan dari orang-orang yang mempunyai karater "mengingat Allah sambil berdiri atau duduk atau dalam keadan berbaring" dan "memikirkan tentang penciptaan langit dan bumi". Hal ini dapat diinterpretasikan dalam bentuk matematika yaitu analisis untuk membuktikan apakah variabel

ٱلَّذِينَ يَذۡكُرُونَ ٱللَّهَ .... **(L)**

atau variabel

وَيَتَفَكَّرُونَ فِي خَلۡقِ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلۡأَرۡضِ...................... **(K)**

Berpengaruh terhadap pembentukan karekter seorang *ulul albab.* Dari hasil partisi pada ayat tersebut dapat diketahui bahwa masing-masing variabel L dan K mempunyai pengaruh yang sangat besar dalam pembentukan karakter *ulul albab***.** Yakni seseorang bisa mempunyai karakter *ulul albab* jika orang tersebut mempunyai dua komponen variabel L dan K, dan tidak cukup hanya pada satu variabel saja. Hal ini dikarenakan oleh tidak berfungsinnya kedua variabel dalam pembentukan karakter *ulul albab* jika hanya terdapat satu variabel saja yakni seseorang itu tidak akan termasuk orang yang mempunyai karakter *ulul albab* jika hanya mempunyai salah satu variabel (L) atau (K) saja maka diperoleh kesalahan (galat) yang disimbolkan dengan ε. Dalam ayat tersebut terdapat gabungan dari dua kalimat majemuk yang digabung dengan memakai huruf *'ataf* (*wawu*) yang mempunyai arti *musytarokah baina amraini* yakni mempunyai arti bersamaan dan tidak boleh disebutkan salah satu saja(Musthofa Ghilayaini: 2004), sehingga dapat disimpulkan bahwa masing-masing dari kedua variabel tersebut mempunyai pengaruh yang sangat besar dalam penetuan karakter *ulul albab.* Dari paparan diatas dapat dinyatakan dalam persamaan regresi matematika yaitu :

$$Y = \beta_0 + \beta_1 L + \beta_2 K + \varepsilon$$

dengan

Y	: Variabel tidak bebas
L dan K	: Variable bebas
$Y = \beta_0, \beta_1, \beta_2, \varepsilon$	: Parameter.
ε	: galat

2.8.2 Estimasi

Dari persamaan matemátika diatas variabel β_0, β_1 dan $, \beta_2$ merupakan estimasi yang mempengaruhi terhadap variabel bebas, sehingga dalam surat Ali Imran diatas dapat dikatagorikan sebagai estimasi karena pada ayat tersebut parameter dari variabel yang berupa kalimat

ٱلَّذِينَ يَذۡكُرُونَ ٱللهَ

yang berarti jumlah dari para penyebut nama Allah adalah tidak terhingga dan begitu juga variabel dari kalimat

وَيَتَفَكَّرُونَ فِي خَلۡقِ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلۡأَرۡضِ

sama-sama tidak terhingga karena dari kedua variabel (kalimat majemuk) tersebut tidak menyebutkan jumlah subjek (*fa'il*) yang tidak terbatas, sehingga dari variabel kalimat ٱلَّذِينَ يَذۡكُرُونَ ٱللَّهَ dan وَيَتَفَكَّرُونَ فِي خَلۡقِ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلۡأَرۡضِ

diperlukan parameter untuk menduga karakter dari *ulul albab.*

Dalam ayat Al-Qur'an yang lain estimasi juga terdapat pada surat Ash-Shaffaat yang menyinggung masalah matematika,. Surat Ash-Shaffaat adalah Makiyah, yakni turun sebelum Nabi hijrah ke Madinah. Ash-Shaffaat berarti yang berbaris baris, kalimat yang pertama dari ayat yang pertama. Yang disebutkan berbaris-baris itu adalah Malaikat-Malaikat Tuhan dialam malakut, yang tidak tahu berapa jutakah bilangannya, kecuali Allah Swt sendiri. Sedangkan bintang dilangit, yang dapat dilihat mata. Sedangkan pasir dipantai yang v dapat ditampung tangan. Sedangkan daun dirimba yang dapat dilihat ketika berpucuk, berdaun dan tanggal dari tampuknya, lagi tidak dapat kita manusia menghitungnya, apatah lagi Malaikat yang ghaib (Amrullah, 1981:106).

Pendugaan dalam matematika disinggung dalam surat Ash-Shaffaat ayat 147, yaitu:

وَأَرۡسَلۡنَٰهُ إِلَىٰ مِاْئَةِ أَلۡفٍ أَوۡ يَزِيدُونَ ١٤٧

Artinya: Dan Kami utus dia kepada seratus ribu orang atau lebih (Qs. Ash-Shaffaat/37:147)

Kata (أَو) auw/atau pada firman-Nya: (أَوۡ يَزِيدُونَ) dari kitab asshawi menjelaskan

لپ ىنمپ كاردالؤإ yaitu “bahkan”, yakni jumlah mereka (kaum banainawa) lebih dari seratus ribu. Dalam satu riwayat dinyatakan lebih dari 100 ribu sampai bilangan 200 rb atau 300 ribu atau 700 ribu.

Abdusysyakir (2007:155-156) mengatakan bahwa pendugaan (estimasi) adalah keterampilan untuk menentukan sesuatu tanpa melakukan proses perhitungan secara eksak. Dalam matematika terdapat tiga jenis estimasi yaitu estimasi banyak/jumlah (numerositas), estimasi pengukuran dan estimasi komputasional.Estimasi banyak/ jumlah

1. Estimasi banyak adalah menentukan banyaknya objek tanpa menghitung secara eksak. Objek disini maknanya sangat luas. Objek dapat bermakna orang, uang kelereng, titik, dan mobil. Estimasi pada Qs. Ash-Shaffaat ayat 147 adalah estimasi banyak yaitu banyaknya orang.
2. Estimasi pengukuran

   Estimasi pengukuran adalah menentukan ukuran sesuatu tanpa menghitung secara eksak. Ukuran disini maknanya sangat luas. Ukuran dapat bermakna ukuran waktu, panjang, luas, usia dan volume. Ketika melihat orang berjalan tanpa menanyakan tanggal lahirnya, pembaca dapat menebak/menaksir usianya. Atau pembaca menaksir waktu yang diperlukan untuk melakukan perjalanan dari malang ke jakarta menggunakan sepeda motor. Pembaca juga dapat menaksir berat suatu bendahany melihat suatu bentuknya
3. Estimasi komputasional

   Estimasi komputasional adalah menentukan hasil suatu operasi hitung tanpa menghitungnya secara eksak. Ketika diminta menentukan hasil 97 x 23 dalam waktui sepuluh detik, seorang mungkin akan melihat puluhannya saja sehingga memperoleh hasil 90 x 20 =1800 inilah estimasi komputasional. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa Seseorang mungkin akan menghitung dengan cara membulatkan kepuluhan terdekat.

Dari pengertian diatas, maka dapat diketahui kaitan ayat diatas dengan pendugaan terletak pada kalimat مِاْئَةِ أَلْفٍ أَوْ يَزِيدُونَ, Karena ayat tersebut dalam menentukan jumlah umat Nabi Yunus tidak dengan perhitungan secara eksak,

Dari dua kajian diatas bahwa Al Quran sebagai imam dari Ummat islam tidak hanya menjelaskan tentang agama saja, tetapi juga menjelaskan tentang Matematika dalam hal ini tentang analisis regresi dan estimasi (pendugaan). Secara garis besar Al Quran berbicara tentang matemtika tidak seperti berbicara tentang agama yang mana secara gamlang dijelaskannya, ketika berbicara tentang matematika kita perlu penafsiran secara mendalam.

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Penentuan Penduga Parameter Model Regresi Nonlinier *Cobb-Douglas*

Dalam menentukan penduga parameter regresi non linier cobb-douglas dengan menggunakan metode Newton Raphson, terlebih dahulu harus mengasumsikan variabel indepedent dengan distribusi yang akan digunakan. Penelitian ini mengasumsikan variabel indepedent β berdistribusi normal namun penelitian ini akan mencari penaksir L(β) disekitar Nilai awal $\beta^{(1)}$ dengan menggunakan metode iterasi Newton Rapson secara *Maksimum Likelihood Estimation (MLE)*

3.1.1. Menentukan Penduga Parameter β Model Regresi Nonlinier *Cobb-Douglas*

Regresi nonlinier cobb-douglas dinyatakan dalam bentuk:

$$Y_i = \beta_0 L_i^{\beta_1} K_i^{\beta_2} + \varepsilon_i \qquad (3.1)$$

dari persamaan 3.1 dimana ε ~N (0,) sehingga dapat di cari fungsi sebaran dari y dengan cara menjadikan fungsi logaritma

$$\ln(Y_i) = \ln(\beta_0 L_i^{\beta_1} K_i^{\beta_2} + \varepsilon_i)$$

$$\ln(Y_i) = \ln(\beta_0 L_i^{\beta_1} K_i^{\beta_2}) + \ln(\varepsilon_i)$$

$$\ln(Y_i) = \left(\ln \beta_0 + \beta_1 \ln L_i + \beta_2 \ln K_i \right) + (\ln \varepsilon_i)$$

$$\ln(Y_i) = \ln \beta_0 + \beta_1 \ln L_i + \beta_2 \ln K_i + \ln \varepsilon_i \qquad (3.2)$$

dari persamaan 3.2 didapat persamaan $\ln(Y_i) = \ln\beta_0 + \beta_1 \ln L_i + \beta_2 \ln K_i + \ln\varepsilon_i$ dimana

$$\ln\left(Y_i\right) \sim N\left(\ln\beta_0 + \beta_1 \ln L_i + \beta_2 \ln K_i\right), \sigma^2\right)$$

Dengan menggunakan pendekatan matrik, maka persamaan (3.2) dapat dinotasikan dalam bentuk matrik, sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \ln y_1 \\ \ln y_2 \\ \vdots \\ \ln y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \ln L_1 & \ln K_1 \\ 1 & \ln L_2 & \ln K_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \ln L_n & \ln K_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ln\beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \ln\varepsilon_1 \\ \ln\varepsilon_2 \\ \vdots \\ \ln\varepsilon_n \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

Misalkan

$$\underset{\sim}{\mathrm{Y}} = \begin{bmatrix} \ln y_1 \\ \ln y_2 \\ \vdots \\ \ln y_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & \ln L_1 & \ln K_1 \\ 1 & \ln L_2 & \ln K_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \ln L_n & \ln K_n \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\beta} = \begin{bmatrix} \ln\beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \ln \varepsilon_1 \\ \ln \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \ln \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

Dengan demikian, Bentuk linier Regresi Nonlinier Cobb-douglas dengan pendekatan matrik adalah:

$$\underset{n \times 1}{\underset{\sim}{\mathrm{Y}}} = \underset{n \times 3}{\mathbf{X}} \; \underset{3 x 1}{\underset{\sim}{\beta}} + \underset{n \times 1}{\underset{\sim}{\varepsilon}} \tag{3.4}$$

Sehingga persamaan Regresi nonlinier Cobb-douglas yang telah ditransformasikan kedalam bentuk linier dan diasumsikan dalam bentuk normal adalah:

$$\underset{\sim}{\mathrm{Y}} = \mathbf{X} \, . \underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\varepsilon} \tag{3.5}$$

Karena persamaan (3.5) berdistribusi normal, maka Fungsi Kepadatan Bersama dengan ε_i variabel indepedent berdistribusi normal, Sehingga fungsi distribusi peluang dari $\underset{\sim}{\mathrm{Y}}^*$ adalah :

$$f(\underset{\sim}{\beta}, \sigma^2 \mid \underset{\sim}{\mathrm{Y}}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\left(\underset{\sim}{\mathrm{Y}} - \mathbf{X} \underset{\sim}{\beta}\right)\sigma^{-1}\right)^T \left(\left(\underset{\sim}{\mathrm{Y}} - \mathbf{X} \underset{\sim}{\beta}\right)\sigma^{-1}\right)} \tag{3.6}$$

Fungsi likelihood (L) didefinisikan sebagai fungsi kepadatan bersama dari random eror. Ketika random eror diasumsikan independent, maka distribusi peluang dari Y_i terhadap $,\underset{\sim}{\beta}$ dan σ^2 merupakan hasil dari fungsi tersendiri (marjinal), dimana i = 1,2,3…n, yang dirumuskan sebagai berikut:

$$f(\underset{\sim}{\beta},\sigma^2 \mid \underset{\sim}{Y}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\left(\underset{\sim}{Y} - \mathbf{X}\underset{\sim}{\beta}\right)\sigma^{-1}\right)^T \left(\left(\underset{\sim}{Y} - \mathbf{X}\underset{\sim}{\beta}\right)\sigma^{-1}\right)}$$

$$= \left[\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{1}{2}}}\right]^n e^{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\left(\underset{\sim}{Y} - \mathbf{X}\underset{\sim}{\beta}\right)\sigma^{-1}\right)^T \left(\left(\underset{\sim}{Y} - \mathbf{X}\underset{\sim}{\beta}\right)\sigma^{-1}\right)}$$

$$= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\left(\underset{\sim}{Y} - \mathbf{X}\underset{\sim}{\beta}\right)\sigma^{-1}\right)^T \left(\left(\underset{\sim}{Y} - \mathbf{X}\underset{\sim}{\beta}\right)\sigma^{-1}\right)}$$

$$= (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\left(\sigma^2\right)^{-\frac{n}{2}} e^{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\left(\underset{\sim}{Y} - \mathbf{X}\underset{\sim}{\beta}\right)\sigma^{-1}\right)^T \left(\left(\underset{\sim}{Y} - \mathbf{X}\underset{\sim}{\beta}\right)\sigma^{-1}\right)}$$

$$= (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\left(\sigma^2\right)^{-\frac{n}{2}} e^{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\left(\sigma^{-1}\right)^T\left(\underset{\sim}{Y} - \mathbf{X}\underset{\sim}{\beta}\right)^T\left(\underset{\sim}{Y} - \mathbf{X}\underset{\sim}{\beta}\right)\sigma^{-1}\right)} \tag{3.7}$$

Sehingga fungsi likelihood diperoleh:

$$L(\underset{\sim}{\beta},(\sigma)^{T}\sigma \mid \underset{\sim}{Y}) = \quad =(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\left(\sigma^{2}\right)^{-\frac{n}{2}} e^{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\left(\sigma^{-1}\right)^{T}\left(\underset{\sim}{Y}-\mathbf{X}\underset{\sim}{\beta}\right)^{T}\left(\underset{\sim}{Y}-\mathbf{X}\underset{\sim}{\beta}\right)\sigma^{-1}\right)} \tag{3.8}$$

Untuk menyelesaikan persamaan (3.8), maka menggunakan logaritma natural, sehingga didapatkan:

$$L(\underset{\sim}{\beta},(\sigma)^{T}\sigma \mid \underset{\sim}{Y}) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\left(\sigma^{2}\right)^{-\frac{n}{2}} e^{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\left(\sigma^{-1}\right)^{T}\left(\underset{\sim}{Y}-\mathbf{X}\underset{\sim}{\beta}\right)^{T}\left(\underset{\sim}{Y}-\mathbf{X}\underset{\sim}{\beta}\right)\sigma^{-1}\right)}$$

$$= \ln\left[(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\left(\sigma^{2}\right)^{-\frac{n}{2}} e^{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\left(\sigma^{-1}\right)^{T}\left(\underset{\sim}{Y}-\mathbf{X}\underset{\sim}{\beta}\right)^{T}\left(\underset{\sim}{Y}-\mathbf{X}\underset{\sim}{\beta}\right)\sigma^{-1}\right)}\right]$$

$$= \ln\left((2\pi)^{-\frac{n}{2}}\right) + \ln\left(\left(\sigma^{2}\right)^{-\frac{n}{2}}\right) + \ln\left(e^{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\left(\sigma^{-1}\right)^{T}\left(\underset{\sim}{Y}-\mathbf{X}\underset{\sim}{\beta}\right)^{T}\left(\underset{\sim}{Y}-\mathbf{X}\underset{\sim}{\beta}\right)\sigma^{-1}\right)}\right)$$

$$= -\frac{n}{2}\ln((2\pi)) - \frac{n}{2}\left(\ln\left(\sigma^{2}\right)\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\left(\sigma^{-1}\right)^{T}\left(\underset{\sim}{Y}-\mathbf{X}\underset{\sim}{\beta}\right)^{T}\left(\underset{\sim}{Y}-\mathbf{X}\underset{\sim}{\beta}\right)\sigma^{-1}\right)\ln(e)$$

$$= -\frac{n}{2}\ln((2\pi)) - \frac{n}{2}\left(\ln\left(\sigma^{2}\right)\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\underbrace{\left(\left(\sigma^{-1}\right)^{T}\left(\underset{\sim}{Y}-\mathbf{X}\underset{\sim}{\beta}\right)^{T}\left(\underset{\sim}{Y}-\mathbf{X}\underset{\sim}{\beta}\right)\sigma^{-1}\right)}_{H}(1)$$

$$= -\frac{n}{2}\ln((2\pi)) - \frac{n}{2}\left(\ln\left(\sigma^{2}\right)\right)\left(-\frac{1}{2}\right)(H)$$

Dimana

$$H \qquad = \left(\left(\sigma^{-1}\right)^{T}\left(\underset{\sim}{Y} - \mathbf{X}\underset{\sim}{\beta}\right)^{T}\left(\underset{\sim}{Y} - \mathbf{X}\underset{\sim}{\beta}\right)\sigma^{-1}\right)$$

$$= \left[\left(\sigma^{-1}\right)^{T}\left(\underset{\sim}{Y}^{T}\underset{\sim}{Y} - 2\underset{\sim}{Y}^{T}X\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\beta}^{T}X^{T}X\underset{\sim}{\beta}\right)\sigma^{-1}\right]$$

$$= \left[\left(\sigma^{-1}\right)^{T}\left(\underset{\sim}{Y}^{T}\underset{\sim}{Y}\right)\sigma^{-1}\right] + \left[\left(\sigma^{-1}\right)^{T}\left(2\underset{\sim}{Y}^{T}X\underset{\sim}{\beta}\right)\sigma^{-1}\right] - \left[\left(\sigma^{-1}\right)^{T}\left(\underset{\sim}{\beta}^{T}X^{T}X\,\underset{\sim}{\beta}\right)\sigma^{-1}\right]$$

$$= \left[\left(\sigma^{-1}\right)^{T}\left(\underset{\sim}{Y}^{T}\underset{\sim}{Y}\right)\sigma^{-1}\right] + (2)\left[\left(\sigma^{-1}\right)^{T}\left(\underset{\sim}{Y}^{T}X\underset{\sim}{\beta}\right)\sigma^{-1}\right] - \left[\left(\sigma^{-1}\right)^{T}\left(\underset{\sim}{\beta}^{T}X^{T}X\,\underset{\sim}{\beta}\right)\sigma^{-1}\right]$$

Sehingga dapat di tulis

$$= -\frac{n}{2}\ln((2\pi)) - \frac{n}{2}\left(\ln\left(\sigma^{2}\right)\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left[\left(\sigma^{-1}\right)^{T}\left(\underset{\sim}{Y}^{T}\underset{\sim}{Y}\right)\sigma^{-1}\right] +$$

$$\left[\left(\sigma^{-1}\right)^{T}\left(\underset{\sim}{Y}^{T}X\underset{\sim}{\beta}\right)\sigma^{-1}\right] - \left[\left(\sigma^{-1}\right)^{T}\left(\underset{\sim}{\beta}^{T}X^{T}X\,\underset{\sim}{\beta}\right)\sigma^{-1}\right] \quad (3.9)$$

Dari persamaan diatas untuk mendapatkan penduga $\underset{\sim}{\beta}$ dengan metode maksimum likelihood yaitu dengan memaksimumkan persamaan tersebut terhadap $\underset{\sim}{\beta}$ dengan menurunkan fungsi terhadap fungsi $\underset{\sim}{\beta}$.

$$\frac{\partial \ln L(\underset{\sim}{\beta},(\sigma)^T \sigma^2 | \underset{\sim}{Y})}{\partial \underset{\sim}{\beta}} = 0-(0)\left\{(0) + \left[\left(\sigma^{-1}\right)^T \underset{\sim}{Y}^T X\sigma^{-1}\right] - \frac{1}{2}2\left[\left(\sigma^{-1}\right)^T \underset{\sim}{\beta}^T X^T X\sigma^{-1}\right]\right\} \quad (3.10)$$

Karena $\dfrac{\partial \ln L(\underset{\sim}{\beta},(\sigma)^T \sigma^2 | \underset{\sim}{Y}))}{\partial \underset{\sim}{\beta}} = 0$

Maka

$$\left[\left(\sigma^{-1}\right)^T \left(\underset{\sim}{Y}^T X\right)\sigma^{-1}\right] = \left[\left(\sigma^{-1}\right)^T \underset{\sim}{\hat{\beta}}^T X^T X\,\sigma^{-1}\right]$$

$$\left(\underset{\sim}{Y}^T X\right)\left[\left(\sigma^{-1}\right)^T \sigma^{-1}\right] = \left(\underset{\sim}{\hat{\beta}}^T X^T X\right)\left[\left(\sigma^{-1}\right)^T \sigma^{-1}\right]$$

$$\left(X \;\; \underset{\sim}{Y}^T\right) = \left(\underset{\sim}{\hat{\beta}}^T X^T X\right)\frac{\left[\left(\sigma^{-1}\right)^T \sigma^{-1}\right]}{\left[\left(\sigma^{-1}\right)^T \sigma^{-1}\right]}$$

$$\left(X \;\; \underset{\sim}{Y}^T\right) = \left(\underset{\sim}{\hat{\beta}}^T X^T X\right)(1)$$

$$X \;\; \underset{\sim}{Y}^T = \underset{\sim}{\hat{\beta}}^T X^T X$$

$$\underset{\sim}{\hat{\beta}} = \left(\underset{\sim}{X}\underset{\sim}{X}^T\right)^{-1} \underset{\sim}{X}^T \underset{\sim}{Y} \quad (3.11)$$

3.1.2. Menentukan Penduga Parameter σ^2 Model Regresi Nonlinier *Cobb-Douglas*

Untuk menentukan penduga parameter σ^2, yaitu memaksimumkan persamaan 3.9, dengan cara mendiferensialkan terhadap σ^2 **dan** meryamakannya dengan nol

$$\ln l\left(\beta,\sigma^2 \mid \underset{\sim}{Y}\right)=$$

$$= -\frac{n}{2}\ln\left((2\pi)\right) - \frac{n}{2}\left(\ln\left(\sigma^2\right)\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left[\left(\sigma^{-1}\right)^{T}\left(\underset{\sim}{Y}^{T}\,\underset{\sim}{Y}\right)\sigma^{-1}\right] + \left[\left(\sigma^{-1}\right)^{T}\left(\underset{\sim}{Y}^{T}\,X\underset{\sim}{\beta}\right)\sigma^{-1}\right] - \left[\left(\sigma^{-1}\right)^{T}\left(\underset{\sim}{\beta}^{T}\,X^{T}X\,\underset{\sim}{\beta}\right)\sigma^{-1}\right]$$

$$= -\frac{n}{2}\ln\left((2\pi)\right) - \frac{n}{2}\left(\ln\left(\sigma^2\right)\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left[\left(\sigma^{-1}\right)(I)^{T}\left(\underset{\sim}{Y}^{T}\,\underset{\sim}{Y}\right)\sigma^{-1}(I)\right] + \left[\left(\sigma^{-1}\right)(I)^{T}\left(\underset{\sim}{Y}^{T}\,X\underset{\sim}{\beta}\right)\sigma^{-1}(I)\right] - \left[\left(\sigma^{-1}\right)(I)^{T}\left(\underset{\sim}{\beta}^{T}\,X^{T}X\,\underset{\sim}{\beta}\right)\sigma^{-1}(I)\right]$$

$$= -\frac{n}{2}\ln\left((2\pi)\right) - \frac{n}{2}\left(\ln\left(\sigma^2\right)\right) - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sigma^2}\left(\underset{\sim}{Y}^{T}\,\underset{\sim}{Y}\right)\right] + \left[\frac{1}{\sigma^2}\left(\underset{\sim}{\beta}\;X\;\underset{\sim}{Y}^{T}\right)\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sigma^2}\left(\underset{\sim}{\beta}^{T}\,X^{T}X\;\underset{\sim}{\beta}\right)\right]$$

$$= -\frac{n}{2}\ln\left((2\pi)\right) - \frac{n}{2}\left(\ln\left(\sigma^2\right)\right)\left[\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\underset{\sim}{Y}^{T}\,\underset{\sim}{Y}\right) + \left(\frac{1}{2\sigma^2}2\left(\underset{\sim}{\beta}^{T}\,\underset{\sim}{X}^{T}\,\underset{\sim}{Y}\right)\right) - \left(\frac{1}{2\sigma^2}\underset{\sim}{\beta}^{T}\,\underset{\sim}{X}^{T}\,\underset{\sim}{X}\underset{\sim}{\beta}\right)\right]$$

Atau

$$\ln l\left(\beta,\sigma^2 \mid \underset{\sim}{Y}\right) == -\frac{n}{2}(\ln(2\pi)+\ln(\sigma^2))\frac{1}{2\sigma^2}\left[\left(\underset{\sim}{Y}-X\underset{\sim}{\beta}\right)^T\left(\underset{\sim}{Y}-X\underset{\sim}{\beta}\right)\right] \quad (3.12)$$

maka

$$\ln l\left(\beta,\sigma^2 \mid \underset{\sim}{Y}\right) = -\frac{n}{2}(\ln(2\pi)+\ln(\sigma^2))-\frac{1}{2\sigma^2}Q \quad (3.13)$$

jika

$$Q=\left(\underset{\sim}{Y}-X\underset{\sim}{\beta}\right)^T\left(\underset{\sim}{Y}-X\underset{\sim}{\beta}\right)$$

Diturunkan terhadap σ^2, karena untuk memaksimumkan L sehingga didapat :

$$\ln l\left(\beta,\sigma^2 \mid \underset{\sim}{Y}\right) = -\frac{n}{2}(\ln(2\pi)+\ln(\sigma^2))-\frac{1}{2\sigma^2}Q$$

$$\frac{\partial \ln l\left(\beta,\sigma^2 \mid \underset{\sim}{Y}\right)}{\sigma^2} = \frac{n}{2}\left(0+\frac{1}{\sigma^2}\right)+\left(\frac{1}{2}\left(\sigma^{-2-2}\right)\right)Q$$

$$\frac{\partial \ln l\left(\beta,\sigma^2 \mid \underset{\sim}{Y}\right)}{\sigma^2} = \frac{n}{2}\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\sigma^{-4}\right)\ Q$$

$$\frac{\partial \ln l\left(\beta,\sigma^2 \mid \underset{\sim}{Y}\right)}{\sigma^2} = \frac{n}{2}\left(\frac{1}{\sigma^2}\right) + \frac{1}{2}\frac{1}{\sigma^4}Q$$

$$\frac{\partial \ln l\left(\beta,\sigma^2 \mid \underset{\sim}{Y}\right)}{\sigma^2} = \frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}Q \tag{3.14}$$

Menyamakan dengan nol akan diperoleh.

$$\frac{\partial \ln l\left(\beta,\sigma^2 \mid \underset{\sim}{Y}\right)}{\sigma^2} = 0$$

$$0 = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}Q$$

$$\frac{n}{2\sigma^2} = \frac{1}{2\sigma^4}Q$$

$$n\frac{1}{2\sigma^2} = \frac{1}{2\sigma^2}\frac{1}{\sigma^2}Q$$

$$n = \frac{1}{\sigma^2}Q$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{Q}{n}$$

Atau

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\left(\underset{\sim}{Y} - X\underset{\sim}{\hat{\beta}}\right)^T \left(\underset{\sim}{Y} - X\underset{\sim}{\hat{\beta}}\right)}{n} \tag{3.15}$$

3.2 Menentukan Iterasi Penduga β Model Regresi Non Linear Cobb-Douglas dengan Menggunakan Newton Rapshon

Sedangkan untuk menentukan Persamaan Iterasi Newton Raphson d alam Persamaan Non Linier Maksimum Likelihood dapat diketahui dengan pendekatan L(β) disekitar nilai awal $\beta^{(1)}$ dengan deret taylor. Maka dari itu persamaan (3.13) disubtitusi ke persamaan (3.15) sehingga diperoleh.

$$L(\underset{\sim}{\beta}) \quad = L = -\frac{n}{2}\left(\ln(2\pi) + \ln\left(\frac{Q}{n}\right)\right) - \frac{1.Q}{2\left(\frac{Q}{n}\right)}$$

$$= -\frac{n}{2}\left(\ln(2\pi) + \ln\left(\frac{Q}{n}\right)\right) - \frac{Q.1}{2\left(\frac{Q}{n}\right)}$$

$$= -\frac{n}{2}\left(\ln(2\pi) + \ln\left(\frac{Q}{n}\right)\right) - \frac{Q}{2}\frac{1}{\left(\frac{Q}{n}\right)}$$

$$= -\frac{n}{2}\left(\ln(2\pi) + \ln\left(\frac{Q}{n}\right)\right) - \frac{Q}{2}\left(\frac{Q}{n}\right)^{-1}$$

$$= -\frac{n}{2}\left(\ln(2\pi) + \ln\left(\frac{Q}{n}\right)\right) - \frac{Q}{2}\left(\frac{n}{Q}\right)$$

$$= -\frac{n}{2}\left(\ln(2\pi) + \ln\left(\frac{Q}{n}\right)\right) - \frac{Qn}{2Q}$$

$$= -\frac{n}{2}\left(\ln(2\pi) + \ln\left(\frac{Q}{n}\right)\right) - \frac{nQ}{2Q}$$

$$= -\frac{n}{2}\left(\ln(2\pi) + \ln\left(\frac{Q}{n}\right)\right) - \frac{n}{2}\frac{Q}{Q}$$

$$= -\frac{n}{2}\left(\ln(2\pi) + \ln\left(\frac{Q}{n}\right)\right) - \frac{n}{2}.1$$

$$= -\frac{n}{2}\left(\ln(2\pi) + \ln\left(\frac{Q}{n}\right)\right) - \frac{n}{2}$$

$$= -\frac{n}{2}\left(\ln(2\pi) + \ln\left(\frac{Q}{n}\right)\right) - \frac{n}{2}$$

$$= -\frac{n}{2}\left(\ln(2\pi) + \ln\left(\frac{\left(\underset{\sim}{Y} - X\underset{\sim}{\beta}\right)^{T}\left(\underset{\sim}{Y} - X\underset{\sim}{\beta}\right)}{n}\right)\right) - \frac{n}{2} \qquad (3.16)$$

Pendekatan L(β) disekitar $\beta^{(1)}$ dengan deret taylor orde 2, yaitu

$$f(x_{i+1}) \approx f(x_i) + f'(x_i)\,\frac{\Delta x}{1!} + f''(x_i)\,\frac{(\Delta x)^2}{2!}$$

Δx : langkah ruang, yaitu jarak antara $\underset{\sim}{\beta} - \underset{\sim}{\beta}^{(1)}$

(1) : permisalan data ke-1

Karena $\left(\underset{\sim}{\beta} - \underset{\sim}{\beta}^{(1)}\right)$ berbentuk matrik maka $\left(\underset{\sim}{\beta} - \underset{\sim}{\beta}^{(1)}\right)^{2} = \left(\underset{\sim}{\beta} - \underset{\sim}{\beta}^{(1)}\right)^{T}\left(\underset{\sim}{\beta} - \underset{\sim}{\beta}^{(1)}\right)$

sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut :

$$L(\underset{\sim}{\beta}) = L\left(\underset{\sim}{\beta}^{(1)}\right) + \frac{\partial L}{\partial \underset{\sim}{\beta}^{T}}\bigg|_{\underset{\sim}{\beta}^{(1)}} \frac{\left(\underset{\sim}{\beta} - \underset{\sim}{\beta}^{(1)}\right)}{1!} + \frac{\partial^2 L}{\partial \underset{\sim}{\beta}\, \partial \underset{\sim}{\beta}^{T}}\,\bigg|_{\underset{\sim}{\beta}^{(1)}} \frac{\left(\underset{\sim}{\beta} - \underset{\sim}{\beta}^{(1)}\right)^{T}\left(\underset{\sim}{\beta} - \underset{\sim}{\beta}^{(1)}\right)}{2!}$$

$$L(\underset{\sim}{\beta}) = L\left(\underset{\sim}{\beta}^{(1)}\right) + \frac{\partial L}{\partial \underset{\sim}{\beta}^{T}}\bigg|_{\underset{\sim}{\beta}^{(1)}} \frac{\left(\underset{\sim}{\beta} - \underset{\sim}{\beta}^{(1)}\right)}{1!} + \frac{1}{2}\left(\underset{\sim}{\beta} - \underset{\sim}{\beta}^{(1)}\right)^{T} \frac{\partial^2 L}{\partial \underset{\sim}{\beta}\, \partial \underset{\sim}{\beta}^{T}}\,\bigg|_{\underset{\sim}{\beta}^{(1)}} \left(\underset{\sim}{\beta} - \underset{\sim}{\beta}^{(1)}\right)$$

$$L(\underset{\sim}{\beta}) = L\left(\underset{\sim}{\beta}^{(1)}\right) + \frac{\partial L}{\partial \underset{\sim}{\beta}^{T}}\Bigg|_{\underset{\sim}{\beta}^{(1)}} \left(\underset{\sim}{\beta} - \underset{\sim}{\beta}^{(1)}\right) + \frac{1}{2}\left(\underset{\sim}{\beta} - \underset{\sim}{\beta}^{(1)}\right)^{T} \frac{\partial^2 L}{\partial \underset{\sim}{\beta}\, \partial \underset{\sim}{\beta}^{T}} \Big|_{\underset{\sim}{\beta}^{(1)}} \left(\underset{\sim}{\beta} - \underset{\sim}{\beta}^{(1)}\right) \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial L(\underset{\sim}{\beta})}{\partial \underset{\sim}{\beta}} = 0 + \left(\frac{\partial L}{\partial \underset{\sim}{\beta}^{T}}\Bigg|_{\underset{\sim}{\beta}^{(1)}}\right)^{T} + \frac{\partial^2 L}{\partial \underset{\sim}{\beta}\, \partial \underset{\sim}{\beta}^{T}} \Big|_{\underset{\sim}{\beta}^{(1)}} \left(\underset{\sim}{\beta} - \underset{\sim}{\beta}^{(1)}\right)$$

Sehingga diperoleh

$$\frac{\partial L(\underset{\sim}{\beta})}{\partial \underset{\sim}{\beta}} = \left(\frac{\partial L}{\partial \underset{\sim}{\beta}^{T}}\Bigg|_{\underset{\sim}{\beta}^{(1)}}\right)^{T} + \frac{\partial^2 L}{\partial \underset{\sim}{\beta}\, \partial \underset{\sim}{\beta}^{T}} \Big|_{\underset{\sim}{\beta}^{(1)}} \left(\underset{\sim}{\beta} - \underset{\sim}{\beta}^{(1)}\right) \qquad (3.18)$$

Karena

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \underset{\sim}{\beta}^{T}} \Big|_{\underset{\sim}{\beta}^{(1)}}\right)^{T} = \left(\frac{\partial L}{\partial \underset{\sim}{\beta}} \Big|_{\underset{\sim}{\beta}^{(1)}}\right) \qquad (3.19)$$

Maka

$$\frac{\partial L\left(\underset{\sim}{\beta}\right)}{\partial \underset{\sim}{\beta}} = \frac{\partial L}{\partial \underset{\sim}{\beta}} \Big|_{\underset{\sim}{\beta}^{(1)}} + \frac{\partial^2 L}{\partial \underset{\sim}{\beta}\, \partial \underset{\sim}{\beta}^{T}} \Big|_{\underset{\sim}{\beta}^{(1)}} \left(\underset{\sim}{\beta} - \underset{\sim}{\beta}^{(1)}\right) \qquad (3.20)$$

Dengan menyamakan dengan nol akan diperoleh

$$0 = \frac{\partial L}{\partial \underset{\sim}{\beta}} \Big|_{\beta^{(1)}} + \frac{\partial^2 L}{\partial \underset{\sim}{\beta} \partial \underset{\sim}{\beta}^T} \Big|_{\underset{\sim}{\beta}^{(1)}} \left(\underset{\sim}{\beta}^{(2)} - \underset{\sim}{\beta}^{(1)} \right) \tag{3.21}$$

Atau

$$\beta^{(2)} = \beta^{(1)} - \frac{\partial L}{\partial \beta} \Big|_{\beta^{(1)}} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \beta \partial \beta^T} \Big|_{\beta^{(1)}} \right)^{-1} \tag{3.22}$$

Pada umumnya dapat diperoleh model iterasi

$$\beta^{(n-1)} = \beta^{(n)} - \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \beta \partial \beta^T} \Bigg|_{\beta^{(n)}} \right)^{-1} \frac{\partial L}{\partial \beta} \Bigg|_{\beta^{(n)}}$$

$$\beta^{(n-1)} = \beta^{(n)} - \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \frac{\partial^2 L}{\partial \beta \partial \beta^T} \Bigg|_{\beta^{(n)}} \right)^{-1} \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \frac{\partial L}{\partial \beta} \Bigg|_{\beta^{(n)}} \right)$$

$$\beta^{(n-1)} = \beta^{(n)} - \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \beta \partial \beta^T} \Bigg|_{\beta^{(n)}} \right)^{-1} \frac{\partial L}{\partial \beta} \Bigg|_{\beta^{(n)}} \tag{3.23}$$

Sedangkan untuk menentukan penduga parameter σ^2 tidak dapat menggunakan metode newton rapshon karena penduga parameter σ^2 adalah konstan berapapun perubahan nilai β maka σ^2 adalah tetap.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Dari uraian yang telah dibahas pada bab tiga maka dapat disimpulkan sebagai berikut :

1. Pendugaan parameter $\underset{\sim}{\hat{\beta}}$ untuk model regresi nonlinier Cobb-Douglas dengan menggunakan metode Newton Rapshon secara *Maksimum Likelihood Estimation (MLE)* adalah :

$$\underset{\sim}{\hat{\beta}} = \underset{\sim}{X}^T \underset{\sim}{Y} \left(\underset{\sim}{X} \underset{\sim}{X}^T \right)^{-1}$$

2. Pendugaan $\hat{\sigma}^2$ diperoleh dari memaksimamumkan fungsi Likelihood dan mendiferensialkan sehingga di peroleh :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\left(\underset{\sim}{Y} - X \underset{\sim}{\hat{\beta}} \right)^T \left(\underset{\sim}{Y} - X \underset{\sim}{\hat{\beta}} \right)}{n}$$

3. Model regresi Cobb-Douglas dengan metode newton raphson diperoleh dari subtitusi fungsi Likelihood dengan Pendugaan $\hat{\sigma}^2$:

$$\beta^{(n-1)} = \beta^{(n)} - \left(\left. \frac{\partial^2 L}{\partial \beta \partial \beta^T} \right|_{\beta^{(n)}} \right)^{-1} \left. \frac{\partial L}{\partial \beta} \right|_{\beta^{(n)}}$$

4. Pendugaan $\hat{\sigma}^2$ untuk newton raphson adalah σ^2

4.2 Saran

Memperhatikan hasil pembahasan, nampaknya model regresi non linear Cobb-Douglas dapat diterapakan dalam kehidupan nyata, oleh karena itu bagi pembaca yang ingin melakukan aplikasi model non linear ke hidupan sehari, peneliti menyarankan untuk mengikuti alur yang ada pada penelitian ini yaitu melinierkan persamaan Cobb-Douglas tersebut.

DAFTAR PUSTAKA

Abdusysyakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. UIN-Malang press: Malang.

Aziz, Abd . 2006 *Ekonometrika teori dan praktek eksperimen dengan Matlab*. Malang.

Bambang.2002 *Metode numerik dilengkapi dengan program komputer* Beta Offset Yogyakarta

Depag RI. 1989. *Al-Qur'an dan Terjemahannya*. Surabaya: CV. Jaya Sakti.

Draper, Norman and Smith, Harry. 1992. *Analisi Regresi Terapan*. PT. Gramedia Pustaka Utama: Jakarta.

Ghilayaini, Mustofa.2004. *Jami'uddurusul Lughah Al-Arabiyah.*Bairut

Hasan, Iqbal. 2002. *Pokok-Pokok Materi Statistik 1 (Statistik Deskriptif)*. Bumi Aksara: Jakarta.

Mood, M Alexander dkk.1986. *Introduction to the Theory of Statistics*. Mcgraw-Hill Book Company.

Rorres Anton.2004. *Aljabar linier elermenter Versi Aplikasi.* Erlangga:Jakarta

Sembiring, R.K. 1995. *Analisis Regresi*. ITB: Bandung.

Soelistyo. 2001. *Dasar-Dasar Ekonometrika*. BPFE: Yogyakarta.

Spiegel, Murray R.1984. *Kalkulus Lanjutan*. Erlangga: Jakarta.

Steel, Robert G.D. and Torri, James H. 1989. *Prinsip dan Prosedur Statistika Suatu Pendekatan Biometrik.* Gramedia: Jakarta.

Yitnosumarto, Suntoyo. 1990. *Dasar-Dasar Statistika*. C.V Rajawali: Jakarta.

DEPARTEMEN AGAMA
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jalan gajayana 50 Malang 65144 Telepon/faksimile (0341)558933

BUKTI KONSULTASI

Nama : Muhammad Anwarul Huda
NIM : 04510053
Fakultas : Sains Dan Teknologi
Jurusan : Matematika
Judul Skripsi : Pendugaan Parameter Regresi Non Linear Cobb-Douglas Dengan Menggunakan Metode Newton Raphson
Pembimbing I : Sri Harini, M.Si.
Pembimbing II : Abd Aziz M.Si

:

No.	Tanggal	Yang Dikonsultasikan	Tanda Tangan
1.	21 Pebruari 2008	Proposal	1.
2.	17 September 2008	Bab I	2.
3.	10 Oktober 2008	Bab I , Bab II	3.
4.	15 Oktober 2008	Revisi Bab I , Bab II	4.
5.	20 Oktober 2008	Bab III	5.
6.	20 Oktober 2008	Revisi Bab III	6.
7	24 November 2008	Revisi Bab I, II dan III	7.
8.	19 Desember 2008	Revisi Bab III	8.
9.	2 Januari 2009	Kajian Agama	9.
10.	5 Januari 2009	Revisi Kajian Agama	10
11	6 Januari 2009	Acc Kajian Agama	11.
12	14 Januari 2009	Revisi Bab I, II, III, IV dan Abstrak	12.
13	17 Januari 2009	Acc keseluruhan	13.

Mengetahui,
Ketua Jurusan

Sri Harini, M.Si
NIP. 150 318 321