

**PENJUMLAHAN LANGSUNG PADA MODUL**

**SKRIPSI**

Oleh:

**YUNITA WILDANIATI  
NIM. 05510001**



**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI  
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG  
MALANG  
2009**

**PENJUMLAHAN LANGSUNG PADA MODUL**

**SKRIPSI**

**Diajukan Kepada:**

**Fakultas Sains dan Teknologi  
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang  
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan Dalam  
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)**

**Oleh:**

**YUNITA WILDANIATI  
NIM. 05510001**

**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI  
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG  
MALANG  
2009**

**PENJUMLAHAN LANGSUNG PADA MODUL**

**SKRIPSI**

Oleh:  
**YUNITA WILDANIATI**  
**NIM. 05510001**

**Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji:**  
**Tanggal: 15 Juli 2009**

**Dosen Pembimbing I,**

**Dosen Pembimbing II,**

**Abdussakir, M.Pd**  
**NIP. 150 327 247**

**Ahmad Barizi, M.A**  
**NIP. 150 283 991**

**Mengetahui,**  
**Ketua Jurusan Matematika**

**Sri Harini, M.Si**  
**NIP. 150 318 321**

**PENJUMLAHAN LANGSUNG PADA MODUL**

**SKRIPSI**

Oleh:  
**YUNITA WILDANIATI**  
**NIM. 05510001**

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan Dinyatakan Diterima  
sebagai Salah Satu Persyaratan untuk  
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal 28 Juli 2009

<b>Susunan Dewan Penguji:</b>	<b>Tanda Tangan</b>
1. Penguji Utama : <u>Wahyu H. Irawan, M.Pd</u> NIP. 150 300 415	( )
2. Ketua : <u>Evawati Alisah, M.Pd</u> NIP. 150 291 271	( )
3. Sekertaris : <u>Abdussakir, M.Pd</u> NIP. 150 327 247	( )
4. Anggota : <u>Ahmad Barizi, M.A</u> NIP. 150 283 991	( )

**Mengetahui dan Mengesahkan**  
**Ketua Jurusan Matematika**

Sri Harini, M.Si  
NIP. 150 318 321

## PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : YUNITA WILDANIATI

Nim : 05510001

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri.

Apabila di kemudian hari terbukti terdapat unsur-unsur jiplakan, maka saya bersedia untuk mempertanggung jawabkan, serta diproses sesuai paraturan yang berlaku.

Malang, 15 Juli 2009  
Yang membuat pernyataan

Yunita Wildaniati  
NIM. 05510001

## MOTTO

*"Ilmu untuk mengetahui dan Agama untuk merasai.*

*Ilmu untuk bendanya dan Agama untuk jiwanya."*

*"Kecantikan yang abadi terletak pada keelokkan adab dan ketinggian ilmu seseorang, bukan terletak pada wajah dan pakaiannya."*

## PERSEMBAHAN

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Dengan segenap kemurnian cinta kasih dan ketulusan dharma bakti penulis,  
Penulis persembahkan skripsi ini untuk orang-orang yang penulis cintai dan  
sayangi selamanya.

.....Ayahanda Ruslan Abidin & ibunda Siti Alfiah tercinta  
Sebagai bakti suci penulis yang selalu memancarkan sinar kasih sayangnya pada  
penulis, yang tak pernah usai dalam membesarkan dan mendidik penulis.  
Tanpa keduanya penulis tak berarti di dunia ini.  
Semoga Allah SWT senantiasa memberikan ketabahan dan kebahagiaan jiwa.  
Untaian do'a dan karya kecil ini penulis persembahkan kepadanya.

.....Saudara-saudara di Lampung  
Mbak Fia & Mas Marwan, Mbak Anis & Mas Umam serta keponakan  
penulis (fira, faza dan kaela)  
Yang telah memberikan dorongan serta motivasi dalam hidup penulis.

## KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

*Assalamu'alaikum Wr.Wb*

Alhamdulillah, puji syukur yang sedalam-dalamnya penulis panjatkan kehadirat Allah SWT. Karena berkat rahmat, kehendak, kekuatan, pertolongan, petunjuk dan bimbingan-Nya penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “Penjumlahan Langsung Pada Modul”.

Shalawat serta salam semoga tetap tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW, beserta keluarga dan sahabat-sahabatnya, yang telah memberikan jalan terang bagi umat islam.

Penulisan skripsi ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak yang telah memberikan informasi dan inspirasi, sehingga penulis dapat menyusun dan menyelesaikan skripsi ini. Oleh karena itu, penyusun mengucapkan banyak terimakasih kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU. D.Sc., selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Sri Harini, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Abdussakir, M.Pd, selaku Dosen Pembimbing I, yang dengan sabar membimbing dan memberi arahan serta masukan yang amat berguna, sehingga skripsi ini bisa diselesaikan dengan baik.
5. Ahmad Barizi, M.A selaku Dosen Pembimbing II, terima kasih atas bimbingan yang telah diberikan sehingga skripsi ini bisa diselesaikan dengan baik.

6. Segenap dosen UIN Maulana Malik Ibrahim Malang, khususnya dosen Matematika, yang telah memberikan ilmunya tanpa pamrih demi masa depan penulis.
7. Ayahanda Ruslan Abidin dan ibunda Siti Alfiah tercinta, serta semua saudara penulis, yang selalu memberi dorongan dan bantuan, baik spiritual maupun material, sehingga skripsi ini bisa terselesaikan.
8. Sahabat-sahabatku (Vivi Aida F., Salimatul Fuada, Imarotul Muhibah, Sarah Luthfiah Y., Siti Khamidah dan Siti mahmudah), teman seperjuanganku (Nilna Niswatin Azizah), serta teman-teman matematika angkatan 2005, yang selalu memberikan dorongan, inspirasi dan selalu menemaniku dalam suka dan duka.
9. Serta semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu, yang telah membantu penyelesaian skripsi ini.

Semoga skripsi ini dapat menjadi informasi yang bermanfaat bagi semua pihak.

*Wassalamu'alaikum Wr.Wb*

Malang, 15 Juli 2009

Penulis

## DAFTAR ISI

<b>HALAMAN JUDUL</b>	
<b>HALAMAN PENGAJUAN</b>	
<b>HALAMAN PERSETUJUAN</b>	
<b>HALAMAN PENGESAHAN</b>	
<b>HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN</b>	
<b>HALAMAN MOTTO</b>	
<b>HALAMAN PERSEMBAHAN</b>	
<b>KATA PENGANTAR</b> .....	i
<b>DAFTAR ISI</b> .....	iii
<b>DAFTAR SIMBOL</b> .....	v
<b>ABSTRAK</b> .....	vi
<b>BAB I : PENDAHULUAN</b>	
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	5
1.3 Tujuan Penelitian.....	5
1.4 Manfaat Penelitian.....	5
1.5 Batasan Masalah.....	5
1.6 Metode Penelitian.....	6
1.7 Sistematika Penulisan.....	7
<b>BAB II : KAJIAN PUSTAKA</b>	
2.1 Pengertian Dasar Ring.....	9
2.1.1 Ring.....	12
2.1.2 Sifat-Sifat Ring.....	18
2.1.3 Subring.....	22
2.1.4 Perkalian Bilangan Bulat.....	26
2.1.5 Homomorfisme Ring.....	27

2.2 Pengertian Dasar Modul .....	30
2.2.1 Modul .....	30
2.2.2 Submodul.....	35
2.2.3 Homomorfisme Modul.....	36
2.2.4 Sifat-Sifat Homomorfisme Modul .....	46
<b>BAB III: PEMBAHASAN</b>	
3.1 Penjumlahan Langsung pada Modul.....	54
3.1.1 Penjumlahan Langsung Luar .....	54
3.1.2 Penjumlahan Langsung Dalam .....	62
3.1.3 Submodul-Submodul Bebas .....	63
3.2 Sifat-Sifat Penjumlahan Langsung pada Modul.....	63
<b>BAB IV: PENUTUP</b>	
4.1 Kesimpulan .....	70
4.2 Saran .....	71
<b>DAFTAR PUSTAKA</b>	

## DAFTAR SIMBOL

Simbol	Keterangan
$\forall$	Untuk setiap
$\in$	Elemen untuk suatu himpunan
$\exists$	Terdapat/ada
$\Rightarrow$	Sehingga
$\neq$	Tidak sama dengan
$\cong$	isomorfik
$\emptyset$	Himpunan kosong
$\subseteq$	Himpunan Bagian/subset
$\oplus$	Penjumlahan Langsung
$\cap$	Irisan
$\cup$	Gabungan
$\Rightarrow$	Implikasi
$\Leftrightarrow$	Biimplikasi

## ABSTRAK

Wildaniati, Yunita. 2009. **Penjumlahan Langsung Pada Modul**. Skripsi, Program S-I Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.  
Pembimbing I: Abdussakir, M.Pd.  
Pembimbing II: Ahmad Barizi, M.A

Kata Kunci: Penjumlahan Langsung, Modul.

Pada struktur aljabar dibahas mengenai dua himpunan tak kosong dengan dua operasi biner yang disebut dengan modul. Selanjutnya dari modul sendiri dapat dikembangkan menjadi beberapa sub pembahasan, di antaranya adalah penjumlahan langsung. Perkalian langsung dari kumpulan R-modul disebut dengan penjumlahan langsung luar dan penjumlahan langsung dari kumpulan submodul disebut dengan penjumlahan langsung dalam. Tetapi penjumlahan langsung luar dan penjumlahan langsung dalam menggunakan notasi yang sama. Berdasarkan latar belakang tersebut penelitian dilakukan dengan tujuan untuk menjelaskan tentang penjumlahan langsung pada modul dan sifat-sifatnya.

Penelitian ini dilakukan dengan menggunakan metode kajian kepustakaan atau studi literatur. Data yang di gunakan dalam penelitian ini adalah teorema homomorfisme modul, teorema dasar isomorfisme modul dan definisi submodul-submodul bebas dari modul M.

Berdasarkan pembahasan dapat diperoleh bahwa penjumlahan langsung pada modul ada dua jenis yaitu penjumlahan langsung luar dan penjumlahan langsung dalam. Di antara sifat-sifat penjumlahan langsung pada modul adalah :

- (1) Jika  $\sum_1^k n_i = \sum_1^k m_i$ , maka  $n_i = m_i$  dengan  $n_i, m_i \in N_i$  dan  $N_i$  merupakan submodul-submodul bebas M, untuk setiap  $i = 1, 2, \dots, k$ .
- (2) Jika  $L_1 = N_1 + \dots + N_{r_1}$ ,  $L_2 = N_{r_1+1} + \dots + N_{r_1+r_2}$ ,  $\dots$ ,  $L_t = N_{r_1+r_2+r_3+\dots+1} + \dots + N_k$ , maka  $L_1, L_2, L_3, \dots, L_t$  adalah modul bebas, dengan  $N_1, N_2, \dots, N_k$  submodul-submodul bebas M.
- (3) Misal submodul-submodul bebas, dan  $N_i = N_{i1} \oplus N_{i2} \oplus \dots \oplus N_{ir_i}$ . Akan berlaku jika  $N_{ij}$  adalah submodul-submodul  $N_i$ , maka submodul-submodul  $N_{11}, \dots, N_{1r_1}, N_{21}, \dots, N_{2r_2}, N_{n1}, \dots, N_{nr_n}$  adalah bebas.
- (4)  $M = \bigoplus N_i$ , dengan  $N_i$  submodul M. Jika  $L_1 = N_1 + \dots + N_{r_1}$ ,  $L_2 = N_{r_1+1} + \dots + N_{r_1+r_2}$ ,  $\dots$ ,  $L_k = N_{r_1+r_2+\dots+1} + \dots + N_k$ , maka  $M = \bigoplus L_i$ . Jika  $N_i = \bigoplus N_{ij}$ , maka  $M = \bigoplus N_{ij}$ .

## BAB I

### PENDAHULUAN

#### 1.1 Latar Belakang

Alam semesta memuat bentuk-bentuk dan konsep matematika, meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Alam semesta serta segala isinya diciptakan Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan, dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi (Abdusysyagir, 2007:79).

Semua yang ada di alam ini ada ukurannya, ada hitung-hitungannya, ada rumusnya, atau ada persamaannya. Rumus-rumus yang ada sekarang bukan diciptakan manusia sendiri, tetapi sudah disediakan. Manusia hanya menemukan dan menyimbolkan dalam bahasa matematika. (Abdusysyagir.2007:80)

Secara umum beberapa konsep dari disiplin ilmu telah dijelaskan dalam al-Qur'an, salah satunya adalah matematika. Konsep dari disiplin ilmu matematika yang ada dalam al-Qur'an diantaranya adalah masalah logika, statistik, himpunan, dan lain-lain.

Aljabar merupakan salah satu cabang dari ilmu matematika. Sedangkan cabang dari ilmu aljabar itu sendiri antara lain aljabar linier dan aljabar abstrak. Aljabar abstrak memiliki banyak materi yang dibahas dan dikembangkan. Struktur aljabar merupakan salah satu materi dalam aljabar abstrak. Selain pemetaan, materi yang dibahas pada struktur aljabar pada dasarnya tentang himpunan dan operasinya. Sehingga dalam mempelajari materi ini selalu identik dengan sebuah himpunan yang tidak kosong yang mempunyai elemen-elemen yang dapat

sebuah himpunan yang tidak kosong yang mempunyai elemen-elemen yang dapat dikombinasikan dengan penjumlahan, perkalian, ataupun keduanya dan juga oleh operasi biner yang lainnya. Hal tersebut berarti pembahasan-pembahasannya melibatkan objek-objek abstrak yang dinyatakan dalam simbol-simbol.

Kajian mengenai himpunan sudah ada dalam al-quran misalnya, kehidupan manusia yang terdiri dari berbagai macam golongan. Dimana golongan merupakan bagian dari himpunan karena himpunan sendiri merupakan kumpulan objek-objek yang terdefinisi. Dalam al-qur'an surat al-fatihah ayat 7 disebutkan:

صِرَاطَ الَّذِينَ أَنْعَمْتَ عَلَيْهِمْ غَيْرِ الْمَغْضُوبِ عَلَيْهِمْ وَلَا الضَّالِّينَ ﴿٧﴾

*Artinya: (yaitu) jalan orang-orang yang telah Engkau beri nikmat kepada mereka; bukan (jalan) mereka yang dimurkai dan bukan (pula jalan) mereka yang sesat. (QS:Al-fatihah.ayat 7)*

Dalam ayat 7 surat al-fatihah dijelaskan manusia terbagi menjadi tiga kelompok yaitu (1) kelompok yang mendapatkan nikmat dari Allah SWT, (2) kelompok yang dimurkai, dan (3) kelompok yang sesat. (Abdusysykir, 2006:47).

Berbicara tentang himpunan selain himpunan manusia, dalam al-Qur'an juga disebutkan himpunan-himpunan yang lain. Seperti disebutkan dalam surat al-faathir ayat 1.

Struktur aljabar dengan satu operasi biner yang memenuhi sifat-sifat tertentu disebut dengan grup. Sedangkan kajian himpunan dengan satu operasi biner dalam konsep Islam yaitu, bahwa manusia diciptakan secara berpasang-pasangan. Perhatikan firman Allah SWT dalam surat al-faathir ayat 11.

وَاللَّهُ خَلَقَكُمْ مِنْ تُرَابٍ ثُمَّ مِنْ نُطْفَةٍ ثُمَّ جَعَلَكُمْ أَزْوَاجًا وَمَا تَحْمِلُ مِنْ أُنْثَىٰ وَلَا تَضَعُ  
إِلَّا بِعِلْمِهِ ۗ وَمَا يُعَمَّرُ مِنْ مُعَمَّرٍ وَلَا يُنْقَصُ مِنْ عُمرِهِ إِلَّا فِي كِتَابٍ إِنَّ ذَلِكَ عَلَى  
اللَّهِ يَسِيرٌ ﴿١١﴾

*Artinya: Dan Allah menciptakan kamu dari tanah Kemudian dari air mani, Kemudian dia menjadikan kamu berpasangan (laki-laki dan perempuan). dan tidak ada seorang perempuanpun mengandung dan tidak (pula) melahirkan melainkan dengan sepengetahuan-Nya. dan sekali-kali tidak dipanjangkan umur seorang yang berumur panjang dan tidak pula dikurangi umurnya, melainkan (sudah ditetapkan) dalam Kitab (Lauh mahfuzh). Sesungguhnya yang demikian itu bagi Allah adalah mudah(QS:Al-Faathir. Ayat 11).*

Dari surat al-faathir ayat 11 diatas disebutkan, bahwa manusia adalah berpasang-pasangan yaitu laki-laki dengan perempuan dengan cara menikah. Biasanya dalam matematika disimbolkan  $(G,*)$ , dengan G adalah himpunan tak kosongnya yaitu himpunan manusia (laki-laki,perempuan) dan \* adalah operasi binernya yaitu pernikahan.

Sedangkan struktur aljabar dengan dua operasi biner yang memenuhi sifat tertentu disebut ring. Sedangkan kajian himpunan dengan dua operasi biner dalam konsep Islam yaitu, manusia adalah diciptakan secara berpasang-pasangan dan cara memasangkannya dengan hukum-hukum tertentu. Seperti dijelaskan dalam firman Allah SWT dalam surat an-nisaa' ayat 23.

حُرِّمَتْ عَلَيْكُمْ أُمَّهَاتُكُمْ وَبَنَاتُكُمْ وَأَخَوَاتُكُمْ وَعَمَّاتُكُمْ وَخَالَاتُكُمْ وَبَنَاتُ الْأَخِ  
وَبَنَاتُ الْأَخْتِ وَأُمَّهَاتُكُمُ اللَّاتِي أَرْضَعْنَكُمْ وَأَخَوَاتُكُم مِّنَ الرَّضَاعَةِ وَأُمَّهَاتُ  
نِسَائِكُمْ وَرَبَائِبُكُمُ اللَّاتِي فِي حُجُورِكُمْ مِّن نِّسَائِكُمُ اللَّاتِي دَخَلْتُم بِهِنَّ فَإِن لَّمْ

تَكُونُوا دَخَلْتُمْ بِهِنَّ فَلَآ جُنَاحَ عَلَيْكُمْ وَّحَلَائِلُ أَبْنَائِكُمُ الَّذِينَ مِنْ أَصْلَابِكُمْ  
وَأَنْ تَجْمَعُوا بَيْنَ الْأُخْتَيْنِ إِلَّا مَا قَدْ سَلَفَ إِنَّ اللَّهَ كَانَ غَفُورًا رَحِيمًا ﴿٢٣﴾

*Artinya: Diharamkan atas kamu (mengawini) ibu-ibumu; anak-anakmu yang perempuan[281]; saudara-saudaramu yang perempuan, Saudara-saudara bapakmu yang perempuan; Saudara-saudara ibumu yang perempuan; anak-anak perempuan dari saudara-saudaramu yang laki-laki; anak-anak perempuan dari saudara-saudaramu yang perempuan; ibu-ibumu yang menyusui kamu; saudara perempuan sepersusuan; ibu-ibu isterimu (mertua); anak-anak isterimu yang dalam pemeliharaanmu dari isteri yang Telah kamu campuri, tetapi jika kamu belum campur dengan isterimu itu (dan sudah kamu ceraikan), Maka tidak berdosa kamu mengawininya; (dan diharamkan bagimu) isteri-isteri anak kandungmu (menantu); dan menghimpunkan (dalam perkawinan) dua perempuan yang bersaudara, kecuali yang Telah terjadi pada masa lampau; Sesungguhnya Allah Maha Pengampun lagi Maha Penyayang.(QS: An-nisaa'. Ayat 23).*

Maka dari firman Allah SWT diatas dijelaskan bahwa manusia adalah berpasang-pasangan antara laki-laki dan perempuan dengan menikah. Akan tetapi cara menikah dengan pasangannya harus secara hukum agama. Dalam matematika biasanya disimbolkan  $(R, *, \bullet)$ , dengan R adalah himpunan tak kosongnya yaitu himpunan manusia (laki-laki, perempuan), \* adalah operasi pertamanya yaitu pernikahan, dan  $\bullet$  adalah operasi keduanya yaitu hukum agamanya.

Sedangkan struktur aljabar yang dikembangkan dengan mempunyai dua himpunan yang tidak kosong dengan dua operasi biner dan memenuhi syarat-syarat tertentu disebut dengan modul. Selanjutnya dari modul sendiri dapat dikembangkan menjadi beberapa sub pembahasan diantaranya homomorfisme modul, isomorfisme modul, penjumlahan langsung pada modul dan lain-lain. Perkalian langsung dari kumpulan R-modul disebut dengan penjumlahan langsung luar dan penjumlahan langsung dari kumpulan submodul disebut dengan penjumlahan langsung dalam. Tetapi penjumlahan langsung luar dan penjumlahan langsung dalam menggunakan notasi yang sama. Oleh karena itu, penulis tertarik

untuk membahasnya. Sehingga skripsi ini oleh penulis diberi judul **“PENJUMLAHAN LANGSUNG PADA MODUL “.**

### **1.2 Rumusan Masalah**

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan di atas, maka rumusan masalahnya adalah :

- 1) Apa yang dimaksud dengan penjumlahan langsung pada modul?
- 2) Bagaimana sifat-sifat penjumlahan langsung pada modul?

### **1.3 Tujuan Penelitian**

Berdasarkan rumusan masalah diatas, tujuan dari penelitian ini adalah:

- 1) Menjelaskan tentang penjumlahan langsung pada modul
- 2) Mendeskripsikan sifat-sifat penjumlahan langsung pada modul

### **1.4 Manfaat Penelitian**

Dari penulisan skripsi ini, penulis berharap pembahasan skripsi ini bisa bermanfaat bagi berbagai kalangan, diantaranya:

- 1) Bagi Penulis

Untuk mempelajari dan lebih memperdalam pemahaman serta mengembangkan wawasan disiplin ilmu khususnya mengenai Penjumlahan Langsung Pada Modul.

- 2) Bagi Pembaca

Sebagai tambahan wawasan dan informasi tentang penjumlahan langsung pada modul.

3) Bagi Instansi

- i. Sebagai bahan informasi tentang pembelajaran mata kuliah Aljabar Abstrak.
- ii. Sebagai tambahan bahan kepustakaan.

### 1.5 Batasan Masalah

Dalam pembahasan skripsi ini tidak dibatasi, karena skripsi ini bekerja pada ruang lingkup bilangan real.

### 1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penulisan skripsi ini adalah studi literatur atau kajian pustaka. Buku utama yang digunakan sebagai literatur utama adalah *Abstract Algebra*, karangan David S. Dummit dan Richard M. Foote. Sedangkan sebagai literatur pendampingnya adalah beberapa buku, skripsi, atau artikel yang dapat mengantarkan kepada tujuan pembahasan yang ditetapkan.

Dalam menyusun skripsi ini, pertama dipelajari terlebih dahulu teori tentang ring dan teori modul, dimana kedua hal tersebut merupakan landasan utama definisi maupun teorema yang ada dalam skripsi ini. Selanjutnya, dipelajari pengertian homomorfisme modul dan teorema dasar isomorfisme modul. Kemudian, dibahas mengenai penjumlahan langsung pada modul dan sifat-

sifatnya. Homomorfisme modul digunakan untuk membuktikan teorema yang berkaitan dengan penjumlahan langsung luar, teorema dasar isomorfisme modul digunakan untuk membuktikan teorema yang menjadi salah satu syarat perlu dan cukup untuk penjumlahan langsung dalam selain itu teorema dasar isomorfisme digunakan untuk menjelaskan alasan penjumlahan langsung dalam dan penjumlahan langsung luar menggunakan notasi yang sama. Selanjutnya definisi submodul-submodul bebas digunakan untuk membuktikan sifat-sifat penjumlahan langsung pada modul.

### 1.7 Sistematika Penulisan

Untuk mempermudah pembaca dan memberikan gambaran secara umum tentang masalah yang diangkat dalam skripsi ini, maka diberikan sistematika penulisan sebagai berikut:

- BAB I Merupakan pendahuluan, yang berisi latar belakang masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penulisan.
- BAB II Berisi dasar teori akan dikemukakan tentang teori-teori yang sesuai dengan masalah yang dibahas, diantaranya adalah definisi ring, sifat-sifat ring, modul, homomorfisme modul, dan isomorfisme modul. Didalamnya juga dibahas mengenai ring yang digunakan dalam tugas akhir ini, yaitu ring komutatif dengan elemen satuan, sehingga cukup jelas nantinya ideal kiri sama dengan ideal kanan dan modul kiri sama dengan modul kanan.

- BAB III Dijelaskan tentang penjumlahan langsung pada modul dan sifat-sifat penjumlahan langsung pada modul.
- BAB IV Merupakan penutup skripsi ini, yang berisi kesimpulan dari keseluruhan pembahasan skripsi ini dan saran.



## BAB II

### KAJIAN TEORI

Pada bagian ini akan dibahas beberapa definisi, sifat, dan teorema yang akan digunakan sebagai dasar pembahasan dalam bab selanjutnya. Teori-teori yang akan dibahas adalah ring, modul, homomorfisme modul dan isomorfisme modul.

#### 2.1 Pengertian Dasar Ring

Suatu struktur aljabar yang terdiri dari satu himpunan tak kosong dengan satu operasi biner disebut dengan grup, yang dinyatakan sebagai  $(G,*)$  dengan  $G$  tidak sama dengan himpunan kosong ( $G \neq \emptyset$ ) dan  $*$  adalah operasi biner pada  $G$  yang memenuhi sifat-sifat tertutup, asosiatif, ada identitas, dan ada invers dalam grup tersebut. Himpunan-himpunan dalam grup mempunyai elemen atau anggota yang juga merupakan makhluk dari ciptaan-Nya. Sedangkan operasi biner merupakan interaksi antara makhluk-makhluk Nya, dan sifat-sifatnya harus dipenuhi dan itu merupakan aturan yang telah ditetapkan oleh Allah artinya sekalipun makhluknya berinteraksi dengan sesama makhluk ia harus tetap berada dalam koridor yang telah ditetapkan Allah.

Struktur aljabar dengan satu operasi biner yang memenuhi sifat-sifat tertentu disebut dengan grup. Sedangkan kajian himpunan dengan satu operasi biner dalam konsep Islam yaitu, bahwa manusia diciptakan secara berpasang-pasangan. Perhatikan firman Allah SWT dalam surat al-faathir ayat 11.

وَحَلَقَكُمْ مِنْ تُرَابٍ ثُمَّ مِنْ نُطْفَةٍ ثُمَّ جَعَلَكُمْ أَزْوَاجًا وَمَا تَحْمِلُ مِنْ أُنْثَىٰ وَلَا تَضَعُ إِلَّا بِعِلْمِهِ وَمَا يُعَمَّرُ مِنْ مُعَمَّرٍ وَلَا يُنْقَصُ مِنْ عُمرِهِ إِلَّا فِي كِتَابٍ إِنَّ ذَلِكَ عَلَى اللَّهِ يَسِيرٌ

Artinya: Dan Allah menciptakan kamu dari tanah Kemudian dari air mani, Kemudian dia menjadikan kamu berpasangan (laki-laki dan perempuan). dan tidak ada seorang perempuanpun mengandung dan tidak (pula) melahirkan melainkan dengan sepengetahuan-Nya. dan sekali-kali tidak dipanjangkan umur seorang yang berumur panjang dan tidak pula dikurangi umurnya, melainkan (sudah ditetapkan) dalam Kitab (Lauh mahfuzh). Sesungguhnya yang demikian itu bagi Allah adalah mudah. (QS: al-Faathir ayat 11).

Dari firman di atas bahwa manusia adalah berpasangan-pasangan yaitu laki-laki dengan perempuan, sehingga laki-laki dan perempuan harus berpasangan, dan dengan berpasangan (nikah) manusia dapat mengandung dan melahirkan seorang anak dan kemudian anak tersebut juga akan berpasangan dengan anak yang lain. Biasanya dalam matematika disimbolkan  $(G,+)$ , dengan  $G$  adalah himpunan tak kosongnya yaitu himpunan manusia (laki-laki,perempuan) dan  $*$  adalah operasi binernya yaitu pernikahan.

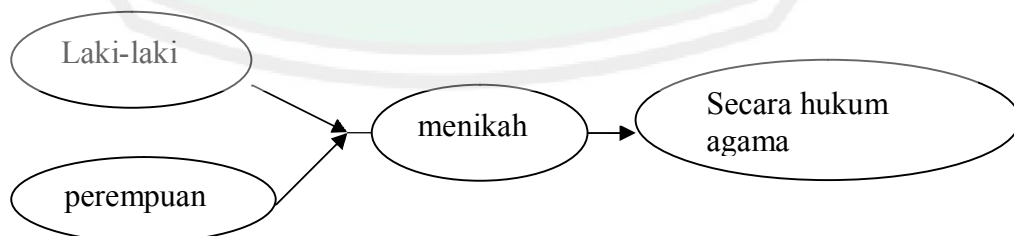
Sedangkan definisi dari ring adalah misalkan  $R$  adalah himpunan tak kosong dengan dua operasi biner  $+$  dan  $\bullet$  disebut ring jika memenuhi pernyataan berikut  $(R,+)$  adalah grup abelian, operasi  $\bullet$  bersifat assosiatif dan distributif terhadap pertama. Jika dikaitkan dengan konsep Islam, maka perhatikan firman Allah SWT dalam surat an-nisaa' ayat 23 berikut:

حُرِّمَتْ عَلَيْكُمْ أُمَّهَاتُكُمْ وَبَنَاتُكُمْ وَأَخَوَاتُكُمْ وَعَمَّاتُكُمْ وَخَالَاتُكُمْ وَبَنَاتُ الْأَخِ وَبَنَاتُ الْأَخْتِ وَأُمَّهَاتُكُمُ اللَّاتِي أَرْضَعْنَكُمْ وَأَخَوَاتُكُم مِّنَ الرَّضَاعَةِ وَأُمَّهَاتُ

نَسَائِكُمْ وَرَبَائِكُمْ الَّتِي فِي حُجُورِكُمْ مِّنْ نِّسَائِكُمُ الَّتِي دَخَلْتُمْ بِهِنَّ فَإِن لَّمْ  
تَكُونُوا دَخَلْتُمْ بِهِنَّ فَلَا جُنَاحَ عَلَيْكُمْ وَحَلْتِلُ أَبْنَائِكُمُ الَّذِينَ مِّنْ أَصْلَابِكُمْ  
وَأَن تَجْمَعُوا بَيْنَ الْأُخْتَيْنِ إِلَّا مَا قَدْ سَلَفَ إِنَّ اللَّهَ كَانَ غَفُورًا رَّحِيمًا ﴿٢٣﴾

*Artinya: Diharamkan atas kamu (mengawini) ibu-ibumu; anak-anakmu yang perempuan; saudara-saudaramu yang perempuan, Saudara-saudara bapakmu yang perempuan; Saudara-saudara ibumu yang perempuan; anak-anak perempuan dari saudara-saudaramu yang laki-laki; anak-anak perempuan dari saudara-saudaramu yang perempuan; ibu-ibumu yang menyusui kamu; saudara perempuan sepersusuan; ibu-ibu isterimu (mertua); anak-anak isterimu yang dalam pemeliharaanmu dari isteri yang Telah kamu campuri, tetapi jika kamu belum campur dengan isterimu itu (dan sudah kamu ceraikan), Maka tidak berdosa kamu mengawininya; (dan diharamkan bagimu) isteri-isteri anak kandungmu (menantu); dan menghimpunkan (dalam perkawinan) dua perempuan yang bersaudara, kecuali yang Telah terjadi pada masa lampau; Sesungguhnya Allah Maha Pengampun lagi Maha Penyayang. (QS: An-nisaa'. Ayat 23).*

Maka dari firman di atas diketahui bahwa manusia adalah berpasangan antara laki-laki dan perempuan dengan menikah. Akan tetapi cara menikah dengan pasangannya harus secara hukum agama dan apabila tidak sesuai dengan hukum agama, maka diharamkan bagi kedua pasangan yang akan menikah padahal tujuan dalam pernikahan tersebut adalah agar halal. Jadi menikahlah dengan pasangan kamu sesuai dengan hukum agama. Seperti gambar berikut:



Secara matematika biasanya disimbolkan  $(R, +, \bullet)$ , dengan R adalah himpunan tak kosong/himpunan manusia (laki-laki, perempuan), + sebagai operasi pertama yaitu pernikahan, dan  $\bullet$  sebagai operasi keduanya yaitu aturan hukum agama.

### 2.1.1 Ring

#### Definisi 1

$R$  adalah himpunan tak kosong dengan dua operasi biner yang dilambangkan dengan  $+$  dan  $\bullet$  disebut ring jika memenuhi syarat-syarat berikut:

- i.  $(R, +)$  adalah grup abelian,
- ii. Operasi  $\bullet$  bersifat assosiatif:

$$(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c), \forall a, b, c \in R$$

- iii. Operasi  $\bullet$  bersifat distributif terhadap operasi  $+$  di  $R$ :

$$\forall a, b, c \in R$$

$$(a+b) \bullet c = (a \bullet c) + (b \bullet c) \quad (\text{distributif kanan})$$

$$a \bullet (b+c) = (a \bullet b) + (a \bullet c) \quad (\text{distributif kiri})$$

(Dummit & Foot, 1991: 225)

Sebenarnya operasi yang digunakan tidak harus sama seperti itu, masih bisa menggunakan operasi yang lain, hanya saja pada penulisan skripsi ini penulis menggunakan operasi  $+$  dan  $\bullet$ . Untuk selanjutnya, notasi ring dengan operasi  $+$  dan operasi  $\bullet$  tersebut ditulis dengan  $(R, +, \bullet)$ .

#### Contoh 1

Misalkan  $S = \{ (x, y) : x, y \in \mathbb{Z} \}$

Pada  $S$  didefinisikan dua operasi  $(+)$  dan operasi  $(\circ)$  sebagai berikut:

$$(i) (x, y) + (z, u) = (x + z, y + u)$$

$$(ii) (x, y) \circ (z, u) = (x \circ z, y \circ u)$$

Selidiki apakah  $(S, +, \circ)$  ring atau bukan ?

Jawab :

Misalkan  $a, b$  dan  $c$  di  $S$  dengan  $a = (x_1, y_1)$ ,  $b = (x_2, y_2)$  dan

$c = (x_3, y_3)$  dimana  $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3 \in \mathbb{Z}$ .

$$(i) \quad a + b = (x_1, y_1) + (x_2, y_2)$$

$$= (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

Karena  $x_1 + x_2, y_1 + y_2 \in \mathbb{Z}$ ,

maka  $a + b = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in S$ .

$$(ii) \quad a + (b + c) = (x_1, y_1) + \{(x_2, y_2) + (x_3, y_3)\}$$

$$= (x_1, y_1) + (x_2, y_2) + (x_3, y_3)$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3)$$

$$= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) + (x_3, y_3)$$

$$= \{(x_1, y_1) + (x_2, y_2)\} + (x_3, y_3)$$

$$= (a + b) + c$$

$$(iii) \quad a + b = (x_1, y_1) + (x_2, y_2)$$

$$= (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$= (x_2 + x_1, y_2 + y_1)$$

$$= b + a$$

(iv) Ada  $0 = (0, 0) \in S$  sedemikian hingga untuk setiap  $a \in S$

berlaku:

$$a + 0 = (x_1, y_1) + (0, 0) \quad \text{dan} \quad 0 + a = (0, 0) + (x_1, y_1)$$

$$= (x_1 + 0, y_1 + 0)$$

$$= (0 + x_1, 0 + y_1)$$

$$\begin{aligned}
 &= (x_1, y_1) &&= (x_1, y_1) \\
 &= a &&= a
 \end{aligned}$$

(v) Untuk sebarang  $a \in S$  ada  $-a = (-x_1, -y_1) \in S$

sedemikian hingga:

$$\begin{aligned}
 a + (-a) &= (x_1, y_1) + (-x_1, -y_1) \\
 &= (0, 0)
 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
 -a + a &= (-x_1, -y_1) + (x_1, y_1) \\
 &= (0, 0)
 \end{aligned}$$

(vi)  $a \circ b = (x_1, y_1) \circ (x_2, y_2)$

$$= (x_1 \circ x_2, y_1 \circ y_2)$$

Karena  $x_1 \circ x_2, y_1 \circ y_2 \in Z$  maka  $a \circ b \in S$

(vii) Untuk sebarang  $a, b, c \in Z$  akan berlaku:

$$\begin{aligned}
 a \circ (b \circ c) &= (x_1, y_1) \circ \{(x_2, y_2) \circ (x_3, y_3)\} \\
 &= (x_1, y_1) \circ (x_2 \circ x_3, y_2 \circ y_3) \\
 &= (x_1 \circ x_2 \circ x_3, y_1 \circ y_2 \circ y_3) \\
 &= (x_1 \circ x_2, y_1 \circ y_2) \circ (x_3, y_3) \\
 &= \{(x_1, y_1) \circ (x_2, y_2)\} \circ (x_3, y_3) \\
 &= (a \circ b) \circ c
 \end{aligned}$$

(viii) Untuk sebarang  $a, b, c \in S$ , berlaku

$$a \circ (b + c) = (x_1, y_1) \circ \{(x_2, y_2) + (x_3, y_3)\}$$

$$\begin{aligned}
&= (x_1, y_1) \circ (x_2 + x_3, y_2 + y_3) \\
&= (x_1 \circ (x_2 + x_3), y_1 \circ (y_2 + y_3)) \\
&= (x_1 \circ x_2 + x_1 \circ x_3, y_1 \circ y_2 + y_1 \circ y_3) \\
&= (x_1 \circ x_2, y_1 \circ y_2) + (x_1 \circ x_3, y_1 \circ y_3) \\
&= \{(x_1, y_1) \circ (x_2, y_2)\} + \{(x_1, y_1) \circ (x_3, y_3)\} \\
&= a \circ b + a \circ c
\end{aligned}$$

Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan bahwa :

$$(b + c) \circ a = b \circ a + c \circ a$$

Karena semua syarat sudah dipenuhi maka  $(S, +, \circ)$  merupakan ring.

### Definisi 2

$(R, +, \bullet)$  disebut ring komutatif jika ring tersebut memenuhi hukum komutatif terhadap operasi kedua atau berlaku  $a \bullet b = b \bullet a, \forall a, b \in R$ . (Dummit & Foot, 1991:225).

### Contoh 2

Bilangan bulat  $Z$  merupakan suatu ring komutatif terhadap operasi penjumlahan dan perkalian.

Jawab :

Dengan mudah dapat diperiksa bahwa  $(Z, +)$  merupakan grup komutatif.

Ambil sebarang  $a, b, c \in Z$ , maka  $(Z, +, \times)$  memenuhi:

- i. Tertutup, yaitu  $a \times b \in Z, \forall a, b \in Z$
- ii. Asosiatif, yaitu  $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c, \forall a, b, c \in Z$

iii. Distributif, yaitu  $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c), \forall a, b, c \in Z$

Karena  $(Z, \times)$  juga memenuhi hukum komutatif, yaitu  $a \times b = b \times a$  untuk  $\forall a, b \in Z$ , maka  $Z$  merupakan ring komutatif.

### Definisi 3

Suatu ring  $R$  dengan operasi pada ring dilambangkan dengan  $(R, +, \bullet)$  disebut memiliki pembagi nol (*zero divisor*), jika ada dua elemen  $a$  dan  $b$  anggota  $R$  dengan  $a \neq 0, b \neq 0$  sedemikian sehingga  $a \bullet b = 0$  (Raisinghanian & Aggarwal. 1980: 314)

### Contoh 3

Diketahui  $R = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$  adalah ring dengan operasi penjumlahan dan perkalian bilangan modulo enam. Tentukan unsur di  $R$  yang merupakan pembagi nol.

Jawab

Sebelum mencari pembagi nol, harus dicari apakah ring ini membentuk ring komutatif. Perhatikan tabel perkalian bilangan modulo enam dibawah ini:

$\times$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3

4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

Berdasarkan tabel dapat dilihat bahwa setiap  $a, b \in R, a \times b = b \times a$ . Oleh karena itu  $R$  merupakan ring komutatif.

Sekarang perhatikan, dari tabel terlihat bahwa  $2 \neq 0$  dan  $3 \neq 0$ , tetapi  $2 \times 3 = 0$ . Dengan demikian dapat dikatakan bahwa 2 merupakan pembagi nol, karena ada  $3 \neq 0$  sehingga  $2 \times 3 = 0$ . Begitu juga dengan 3 dan 4.

#### Definisi 4

Jika  $(R, +, \cdot)$  adalah ring dan ada elemen  $1 \in R$  sehingga  $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ , untuk setiap  $a \in R$ , maka  $R$  dinamakan ring dengan elemen satuan.

(Kusaeri & Abidin, 2003:48).

#### Contoh 4

Selidiki apakah untuk  $R$  ring bilangan bulat dengan operasi penjumlahan dan perkalian merupakan ring dengan elemen satuan.

#### Jawab

$R$  yang merupakan ring bilangan bulat dengan operasi penjumlahan dan perkalian memiliki elemen satuan, yaitu bilangan 1 karena untuk setiap  $a \in R$ , berlaku  $a \times 1 = 1 \times a = a$ . Jadi ring bilangan bulat dengan operasi penjumlahan dan perkalian merupakan ring dengan elemen satuan.

#### 2.1.2 Sifat- Sifat Ring

**Teorema 1**

Misal  $(R, +, \bullet)$  adalah ring, maka  $a \bullet 0 = 0 \bullet a = 0, \forall a \in R$  dan 0 adalah identitas operasi pertama di R. (Raisinghania & Aggarwal. 1980:325)

Bukti

$(R, +, \bullet)$  adalah ring dengan dua operasi yang dinotasikan + (operasi pertama) dan  $\bullet$  (operasi kedua). Identitas operasi pertama adalah nol dan identitas operasi kedua adalah satu.

$$a \bullet 0 = a \bullet (0 + 0) \quad (\text{sifat dari 0 di R})$$

$$a \bullet 0 = a \bullet 0 + a \bullet 0 \quad (\text{distributif kanan})$$

$$0 + a \bullet 0 = a \bullet 0 + a \bullet 0 \quad (\text{sifat identitas 0 di R})$$

$$0 = a \bullet 0 \quad (\text{kanselasi kanan})$$

$$\therefore a \bullet 0 = 0 \quad \dots\dots(1)$$

$$0 \bullet a = (0 + 0) \bullet a \quad (\text{sifat dari 0 di R})$$

$$0 \bullet a = 0 \bullet a + 0 \bullet a \quad (\text{distributif kiri})$$

$$0 + 0 \bullet a = 0 \bullet a + 0 \bullet a \quad (\text{sifat identitas 0 di R})$$

$$0 = 0a \quad (\text{kanselasi kiri})$$

$$\therefore 0 \bullet a = a \quad \dots\dots(2)$$

Dari (1) dan (2) didapat  $a \bullet 0 = 0 \bullet a = 0, \forall a \in R$ .

**Teorema 2**

Misal  $(R, +, \bullet)$  adalah ring, maka  $a \bullet (-b) = (-a) \bullet b = -(a \bullet b), \forall a, b \in R$   
(Raisinghania & Aggarwal. 1980:325)

Bukti:

$$a \bullet (-b) + a \bullet b = a \bullet (-b + b) \quad (\text{sifat distributif kanan})$$

$$a \bullet (-b) + a \bullet b = a \bullet 0 \quad (\text{invers terhadap operasi } +)$$

$$a \bullet (-b) + a \bullet b = 0 \quad (\text{teorema 1})$$

$$a \bullet (-b) + a \bullet b + (- (a \bullet b)) = 0 + (- (a \bullet b)) \quad (\text{kedua ruas ditambah } -(a \bullet b))$$

$$a \bullet (-b) = -(a \bullet b) \quad (\text{invers terhadap operasi } +)$$

$$a \bullet (-b) = -(a \bullet b) \quad \dots\dots(1)$$

Selanjutnya

$$(-a) \bullet b + a \bullet b = (-a + a) \bullet b \quad (\text{sifat distributif kanan})$$

$$(-a) \bullet b + a \bullet b = 0 \bullet b \quad (\text{invers terhadap operasi } +)$$

$$(-a) \bullet b + a \bullet b = 0 \quad (\text{hasil operasi } \bullet \text{ dengan } 0 \text{ di } R)$$

$$(-a) \bullet b + a \bullet b + (- (a \bullet b)) = 0 + (- (a \bullet b)) \quad (\text{kedua ruas ditambahkan } -(a \bullet b))$$

$$(-a) \bullet b + 0 = -(a \bullet b) \quad (\text{invers terhadap operasi } +)$$

$$(-a) \bullet b = -(a \bullet b) \quad \dots\dots(2)$$

Dari (1) dan (2) diperoleh  $a \bullet (-b) = (-a) \bullet b = -(a \bullet b), \forall a, b \in R$ .

### Teorema 3

Misal  $(R, +, \bullet)$  ring, maka  $-(a + b) = (-a) + (-b), \forall a, b \in R$ .

(Raisinghania & Aggarwal. 1980:325).

Bukti:

$$[(-a) + (-b)] + (a + b) = (-a) + [(-b) + (a + b)] \quad (\text{sifat asosiatif})$$

$$= (-a) + [(-b) + (b + a)] \quad (\text{sifat komutatif } +)$$

$$= (-a) + [((-b) + b) + a] \quad (\text{sifat asosiatif } +)$$

$$= (-a) + [0 + a] \quad (\text{sifat invers } +)$$

$$= (-a) + a \quad (\text{sifat identitas } +)$$

$$= 0$$

$$[(-a) + (-b)] + (a + b) = 0$$

$$[(-a) + (-b)] + (a + b) + [-(a + b)] = 0 + [-(a + b)] \quad (\text{kedua ruas ditambah } -(a+b))$$

$$[(-a) + (-b)] + 0 = -(a + b) \quad (\text{sifat invers pada } +)$$

$$(-a) + (-b) = -(a + b)$$

Didapat bahwa  $-(a + b) = (-a) + (-b), \forall a, b \in R$ .

#### Teorema 4

Misal  $(R, +, \cdot)$  adalah ring maka  $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c, \forall a, b, c \in R$ .

(Raisinghania & Aggarwal. 1980:325).

Bukti:

$$a \cdot (b - c) = a \cdot [b + (-c)]$$

$$= a \cdot b + a \cdot (-c) \quad (\text{sifat distributif kiri})$$

$$= a \cdot b + (-(a \cdot c)) \quad (\text{teorema 2})$$

$$= a \cdot b - a \cdot c$$

#### Teorema 5

Misal  $(R, +, \cdot)$  adalah ring maka  $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b, \forall a, b \in R$ .

(Raisinghania & Aggarwal. 1980:325).

Bukti:

$$\begin{aligned}
 (-a) \bullet (-b) &= -(a \bullet (-b)) \quad (\text{sifat asosiatif}) \\
 &= -(- (a \bullet b)) \quad (\text{teorema 2}) \\
 &= a \bullet b \quad (\text{teorema 3})
 \end{aligned}$$

### Teorema 6

Misal  $(R, +, \bullet)$  adalah ring, maka  $(b - c) \bullet a = b \bullet a - c \bullet a, \forall a, b, c \in R$ .  
(Raisinghania & Aggarwal. 1980:325).

Bukti:

$$\begin{aligned}
 (b - c) \bullet a &= [b + (-c)] \bullet a \\
 &= b \bullet a + (-c) \bullet a \quad (\text{hukum distributif kanan}) \\
 &= b \bullet a - (c \bullet a) \quad (\text{teorema 2}) \\
 &= b \bullet a - c \bullet a
 \end{aligned}$$

### Teorema 7

Misal  $(R, +, \bullet)$  adalah ring, maka  $(-a) \bullet 1 = -a, \forall a \in R$ , (Raisinghania & Aggarwal. 1980:325)

Bukti:

$$\begin{aligned}
 (-a) \bullet 1 &= -1 \bullet (a) \quad (\text{sifat komutatif}) \\
 &= -(1 \bullet a) \quad (\text{teorema 2}) \\
 &= -a \quad (\text{sifat identitas di R})
 \end{aligned}$$

### 2.1.3 Subring

#### Definisi 5

Misalkan  $S \subset R$ ,  $(R, +, \bullet)$  suatu ring .

S dinamakan subring dari R bila S sendiri merupakan suatu ring terhadap operasi yang sama dengan R. (Hartley & Hawkes, 1970)

#### Teorema 8

Misalkan R suatu ring dan  $S \subset R$ ,  $S \neq \emptyset$  .

S disebut subring R jika dan hanya jika memenuhi:

- i.  $a - b \in S, \forall a, b \in S$
- ii.  $a \bullet b \in S, \forall a, b \in S$

(Soebagio & Sukirman, 1995:367)

Bukti:

$\Rightarrow$  Misalkan S subring dari R , maka S adalah suatu ring sehingga, jika  $a, b \in S$  maka  $a, -b \in S$  dan  $a - b \in S$  serta  $ab \in S$  .

$\Leftarrow$  Sebaliknya, jika  $S \subset R$  dn  $S \neq \emptyset$  dengan sifat bahwa  $\forall a, b \in S$  berlaku (i)  $a - b \in S$  dan (ii)  $ab \in S$  , harus ditunjukkan bahwa S adalah subring dari R. ambil  $a \in S$  , menurut (i), maka  $a - a = 0 \in S$  dan menurut (i) lagi,  $0 - a = -a \in S$  dan (ii)  $ab \in S$  , maka  $a, -b \in S$  dan  $a - (-b) = a + b \in S$ . Selanjutnya karena  $S \subset R$  dan R suatu ring, maka elemen-elemen S memenuhi sifat-sifat asosiatif pada operasi pertama, komutatif pada operasi pertama, asosiatif pada operasi kedua, distributif kanan dan distributif kiri kedua terhadap operasi pertama.

Jadi  $S$  suatu ring, karena  $S \subset R, S \neq \emptyset$  dan  $R$  suatu ring maka  $S$  adalah subring dari  $R$ .

Dari teorema 8 tersebut dapat diambil kesimpulan bahwa  $-b$  merupakan invers dari  $a$ .

Contoh 5

Diketahui  $(Z, +, \cdot)$  suatu ring. Pandang himpunan  $2Z = \{2x : x \in Z\}$ .

Tunjukkan bahwa  $2Z$  merupakan subring dari  $Z$ .

Jawab:

Ambil  $x \in Z$ , maka  $x = 2x_1$ , dengan  $x_1 \in Z$ , karena  $2, x_1 \in Z$  maka  $2x_1 \in Z$ . Jadi  $2Z \subset Z, 2Z \neq \emptyset$  karena  $e \in 2Z$  yakni  $e = 0 = 2 \cdot 0 \in 2Z$ .

Selanjutnya akan diselidiki sifat-sifat berikut:

i. Ambil  $x, y \in 2Z$

$$x \in 2Z \Rightarrow x = 2x_1 \text{ dengan } x_1 \in Z$$

$$y \in 2Z \Rightarrow y = 2x_2 \text{ dengan } x_2 \in Z$$

$$\begin{aligned} x - y &= 2x_1 - 2x_2 \\ &= 2(x_1 - x_2) \in 2Z \end{aligned}$$

ii.  $x \cdot y = (2x_1) \cdot (2x_2)$

$$= 4(x_1 \cdot x_2)$$

$$= 2(2 \cdot x_1 \cdot x_2)$$

Karena  $2Z \subset Z, Z \neq \emptyset$ , dan  $2Z$  memenuhi sifat (i) dan (ii) maka terbukti bahwa  $2Z$  subring dari  $Z$ .

**Definisi 6**

Diberikan  $(R, +, \cdot)$  adalah ring komutatif. Suatu subring tak kosong  $I$  dari  $R$  disebut Ideal dari  $R$  jika memenuhi aksioma berikut:

- a)  $a - b \in I, \forall a, b \in I$
- b)  $a \cdot r \in I$  dan  $r \cdot a \in I, \forall a \in I$  dan  $r \in R$

(Kusaeri & Abidin, 2003:77)

Sama halnya dengan teorema 8, pada definisi 6 ini yang dimaksud dengan  $-b$  adalah invers dari  $a$

**Contoh 6**

Misalkan  $A$  dan  $B$  ideal dari ring  $R$  dengan operasi  $+$  dan  $\cdot$ . Tunjukkan bahwa  $A \cap B$  ideal dari  $R$ .

Jawab:

$e \in A$  dan  $e \in B$ , sehingga  $e \in A \cap B$ . Dengan demikian  $A \cap B \neq \emptyset$ .

$A$  ideal dari  $R$  dan  $B$  ideal dari  $R$ , maka  $A \subset R$  dan  $B \subset R$ .

Karena  $A \subset R$  dan  $B \subset R$  maka  $A \cap B \subset R$ .

- i. Ambil sebarang  $x, y \in A \cap B$ .

Jika  $x \in A \cap B$ , maka  $x \in A$  dan  $x \in B$ .

Jika  $y \in A \cap B$ , maka  $y \in A$  dan  $y \in B$ .

$x \in A$ ,  $y \in A$  dan  $A$  ideal, maka  $x - y \in A$ .

$x \in B$ ,  $y \in B$  dan  $B$  ideal, maka  $x - y \in B$ .

Karena  $x - y \in A$  dan  $x - y \in B$ , diperoleh  $x - y \in A \cap B$ .

ii. Ambil sebarang  $x \in A \cap B$ , dan  $r \in R$

Untuk  $x \in A$  dan  $A$  ideal, didapat  $r \circ x \in A$ .

Untuk  $x \in B$  dan  $B$  ideal, didapat  $r \circ x \in B$ .

Karena  $r \circ x \in A$  dan  $r \circ x \in B$  disimpulkan  $r \circ x \in A \cap B$ .

Karena sebelumnya sudah ditetapkan bahwa dalam penulisan tugas akhir ini menggunakan ring komutatif dengan elemen satuan maka sudah pasti bahwa  $x \circ r \in A$  dan  $x \circ r \in B$ , dan disimpulkan  $x \circ r \in A \cap B$ .

Berdasarkan i dan ii,  $A \cap B \neq \emptyset$ , dan  $A \cap B \subset R$ , disimpulkan bahwa  $A \cap B$  ideal dari  $R$ .

### Teorema 9

Diberikan  $(R, +, \bullet)$  adalah ring. Setiap ideal dalam suatu ring  $R$  adalah subring. (Kusaeri & Abidin, 2003:78)

Bukti:

Diketahui  $(R, +, \bullet)$  adalah ring dan  $I$  ideal dalam  $R$ .

$I \neq \emptyset$  karena  $I$  suatu ideal dan  $I \subset R$  karena  $I$  ideal dalam  $R$ .

a) Ambil  $x, y \in I$ .

Jika  $x, y \in I$  maka  $x - y \in I$  (karena  $I$  ideal)

b) Ambil  $x, y \in I$

Jika  $x \in I$  maka  $x \in R$  (karena  $I$  ideal dalam  $R$ ).

Sedangkan dari hipotesa diketahui bahwa  $I$  ideal dari  $R$  berakibat bahwa jika  $x \in R$  dan  $y \in I$  maka  $x \bullet y \in I$  dan  $y \bullet x \in I$ . Jadi untuk setiap  $x, y \in I$ , berakibat  $x \bullet y \in I$ .

Berdasarkan (a), (b),  $I \neq \emptyset$  dan  $I \subset R$  maka terbukti bahwa  $I$  subring.

#### 2.1.4 Perkalian Bilangan Bulat

##### Definisi 7

Misal  $a$  adalah sebarang elemen suatu ring  $R$  dengan operasi biner penjumlahan dan perkalian. Dan misalkan  $m$  adalah bilangan bulat positif, maka dapat ditulis sebagai berikut:

$$ma = a + a + \cdots + a \quad (m \text{ kali})$$

dan  $(-ma) = (-a) + (-a) + \cdots + (-a) \quad (m \text{ kali})$

$$= m(-a) \quad (\text{teorema 2})$$

$$= -(ma) \quad (\text{teorema 2})$$

Sedangkan

$$0a = 0 \quad (0 \text{ disebelah kiri sebagai bilangan bulat nol, sedangkan } 0 \text{ disebelah kanan adalah identitas penjumlahan di } R.)$$

Akibat dari notasi tersebut, untuk sebarang bilangan bulat  $m$  dan  $n$ , serta untuk sebarang elemen  $a$  dan  $b$  di ring  $R$  memiliki sifat sebagai berikut:

$$\begin{aligned} 1) \quad (m+n)a &= a + a + \cdots + a [(m+n) \text{ kali}] \\ &= [a + a + \cdots + a (m \text{ kali})] + \{a + a + \cdots + a (n \text{ kali})\} \\ &= ma + na \end{aligned}$$

$$2) \quad m(a+b) = (a+b) + (a+b) + \cdots + (a+b) \quad (m \text{ kali})$$

$$= \{(a + a + \dots + a \text{ (} m \text{ kali)})\} + \{(b + b + \dots + b \text{ (} m \text{ kali)})\} \text{ (komutatif + di } R)$$

$$= ma + mb$$

$$3) \quad m(na) = na + na + \dots + na \quad (m \text{ kali})$$

$$= \{a + a + \dots + a \quad (n \text{ kali})\} + \{a + a + \dots + a \quad (n \text{ kali})\} +$$

$$\dots + \dots \text{ (sampai } m \text{ kali)}$$

$$= \{a + a + \dots + a \quad (mn \text{ kali})\}$$

$$= (mn)a$$

(Raisinghania & Aggarwal. 1980:327)

### 2.1.5 Homomorfisme Ring

#### Definisi 8

Suatu homomorfisma dari ring  $R$  dengan operasi  $+$  dan  $\bullet$  ke dalam ring  $S$  dengan operasi  $\circ$  dan  $\otimes$  adalah suatu pemetaan  $\phi: R \rightarrow S$  sedemikian hingga :

$$i. \quad \phi(x + y) = \phi(x) \circ \phi(y)$$

$$ii. \quad \phi(x \bullet y) = \phi(x) \otimes \phi(y)$$

Untuk setiap  $x, y \in R$ . (Hartley & Hawkes, 1970:18)

Berdasarkan definisi 7, operasi pada  $R$  dan  $S$  tidak harus sama.  $R$  bisa menggunakan operasi lain dan  $S$  juga bisa menggunakan operasi lain atau bisa saja operasi  $R$  dan  $S$  sama. Homomorfisme adalah memetakan hasil operasi sama dengan mengoperasikan hasil pemetaan. Dan untuk menjadi homomorfisme harus memenuhi syarat perlu dan cukupnya.

## Contoh 7

Misalkan  $D\sqrt{2} = \{m + n\sqrt{2} : m, n \in x\}$  suatu ring terhadap operasi penjumlahan dan perkalian. Didefinisikan pemetaan  $\phi : J(\sqrt{2}) \rightarrow J(\sqrt{2})$  dengan  $\phi(m + n\sqrt{2}) = m - n\sqrt{2}$ . Tunjukkan bahwa  $\phi$  merupakan homomorfisme dari  $J(\sqrt{2})$  ke  $J(\sqrt{2})$ .

Jawab:

Ambil sebarang  $x, y \in J(\sqrt{2})$ , maka  $x = m_1 + n_1\sqrt{2}$  untuk bilangan bulat  $m_1$  dan  $n_1$ ,  $y = m_2 + n_2\sqrt{2}$  untuk bilangan bulat  $m_2$  dan  $n_2$ .

$$\begin{aligned}
 \text{i. } \phi(x + y) &= \phi\{(m_1 + n_1\sqrt{2}) + (m_2 + n_2\sqrt{2})\} \quad (\text{memetakan hasil operasi}) \\
 &= \phi\{(m_1 + m_2) + (n_1 + n_2)\sqrt{2}\} \quad (\text{sifat asosiatif operasi } +) \\
 &= (m_1 + m_2) - (n_1 + n_2)\sqrt{2} \quad (\text{definisi dari pemetaan } \phi) \\
 &= (m_1 + m_2) - (n_1\sqrt{2} + n_2\sqrt{2}) \quad (\text{sifat distributif kanan}) \\
 &= (m_1 - n_1\sqrt{2}) + (m_2 - n_2\sqrt{2}) \quad (\phi(m + n\sqrt{2}) = m - n\sqrt{2}) \\
 &= \phi(m_1 + n_1\sqrt{2}) + \phi(m_2 + n_2\sqrt{2}) \quad (\text{mengoperasikan hasil pemetaan}) \\
 &= \phi(x) + \phi(y)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ii. } \phi(x \times y) &= \phi\{(m_1 + n_1\sqrt{2}) \times (m_2 + n_2\sqrt{2})\} \quad (\text{memetakan hasil operasi}) \\
 &= \phi\{(m_1 \times m_2 + 2 \times n_1 \times n_2) + (m_1 \times n_2 + m_2 \times n_1) \times \sqrt{2}\} \\
 &\quad (\text{sifat distributif kanan}) \\
 &= (m_1 \times m_2 + 2 \times n_1 \times n_2) - ((m_1 \times n_2 + m_2 \times n_1) \times \sqrt{2})
 \end{aligned}$$

(definisi pemetaan  $\phi$ )

$$= (m_1 \times m_2 + 2 \times n_1 \times n_2) - ((m_1 \times n_1 \times \sqrt{2}) + (m_2 \times n_2 \times \sqrt{2}))$$

(sifat distributif kanan)

$$= (m_1 - n_1 \sqrt{2}) \times (m_2 - n_2 \sqrt{2}) \quad (\phi(m + n\sqrt{2}) = m - n\sqrt{2})$$

$$= \phi(m_1 + n_1 \sqrt{2}) \times \phi(m_2 + n_2 \sqrt{2}) \text{ (mengoperasikan hasil pemetaan)}$$

$$= \phi(x) \times \phi(y)$$

Karena berlaku untuk sebarang  $x, y \in J(\sqrt{2})$  berarti berlaku untuk setiap anggota  $J(\sqrt{2})$ . Dengan demikian  $\phi$  merupakan homomorfisme dari  $J(\sqrt{2})$  ke  $J(\sqrt{2})$ .

Epimorfisma adalah suatu homomorfisme yang surjektif. Monomorfisme adalah suatu homomorfisme yang injektif. Isomorfisme adalah homomorfisme yang bijektif. Endomorfisme adalah suatu homomorfisme dari ring R ke ring R. Automorfisme adalah suatu isomorfisme dari ring R ke R. Ring R dan S dikatakan *isomorfik* dan dinotasikan  $R \cong S$  jika terdapat isomorfisme dari R ke S. (Hartley & Hawkes, 1970:19).

Demikian beberapa pengertian dasar seputar ring. Beberapa hal yang diuraikan diatas digunakan untuk mempelajari dan mengerti sub bahasan berikutnya, yaitu modul, submodul, homomorfisme modul dan isomorfisme modul. Tambahan materi tentang teori ring ini dapat ditemui dalam literatur-literatur yang digunakan dalam menyusun skripsi ini.

## 2.2 Pengertian Dasar Modul

Suatu struktur aljabar dengan satu himpunan tak kosong dengan satu operasi biner disebut dengan grup. Sedangkan struktur aljabar dengan satu himpunan tak kosong dengan dua operasi biner disebut dengan ring. Ada lagi struktur aljabar dengan dua himpunan tak kosong dengan dua operasi biner yang disebut dengan modul. Jika suatu modul merupakan modul kiri dan modul kanan, maka secara umum disebut modul. Jika dikaitkan dengan konsep Islam seperti firman Allah SWT dalam surat al-waqi'ah ayat 7-10 berikut:

أَزْوَاجًا ثَلَاثَةً ﴿٧﴾ فَأَصْحَابُ الْمَيْمَنَةِ مَا أَصْحَابُ الْمَيْمَنَةِ ﴿٨﴾ وَأَصْحَابُ الْمَشْأَمَةِ مَا أَصْحَابُ الْمَشْأَمَةِ ﴿٩﴾ وَالسَّابِقُونَ السَّابِقُونَ ﴿١٠﴾

*Artinya: 7).Dan kamu menjadi tiga golongan. 8)Yaitu golongan kanan. alangkah mulianya golongan kanan itu. 9.) Dan golongan kiri. alangkah sengsaranya golongan kiri itu. 10). Dan orang-orang yang beriman paling dahulu (QS: surat al-waqi'ah ayat 7-10).*

Berdasarkan ayat tersebut di jelaskan bahwa Allah membagi manusia menjadi tiga golongan,yaitu (1) golongan kanan ialah mereka yang menerima buku catatan amal dengan tangan kanan dimana golongan ini merupakan golongan yang sangat mulia, (2) golongan kiri ialah mereka yang menerima buku catatan amal dengan tangan kiri, dimana golongan ini merupakan golongan yang amat sengsara, dan (3) orang-orang yang beriman paling dahulu beriman.

### 2.2.1 Definisi Modul

#### Definisi 8

Diberikan  $R$  adalah ring dengan operasi  $+$  dan  $\bullet$  serta diberikan  $M$  adalah grup komutatif dengan operasi  $+$  yang memetakan  $R \times M \rightarrow M$  dengan  $(r, m) \rightarrow rm$ . Maka  $M$  disebut  $R$ -modul kiri jika memenuhi aksioma-aksioma berikut ini:

- i.  $r(m_1 + m_2) = rm_1 + rm_2$
- ii.  $(r_1 + r_2)m = r_1m + r_2m$
- iii.  $(r_1r_2)m = r_1(r_2m)$
- iv.  $1m = m$

Untuk setiap  $r, r_1, r_2 \in R$  dan  $m, m_1, m_2 \in M$ .

Selanjutnya  $M$  disebut  $R$ -modul kanan jika hanya jika terdapat pemetaan  $M \times R \rightarrow M$ , dengan  $(m, r) \rightarrow mr$  yang memenuhi aksioma-aksioma berikut:

- i.  $(m_1 + m_2)r = m_1r + m_2r$
- ii.  $m(r_1 + r_2) = mr_1 + mr_2$
- iii.  $m(r_1r_2) = (mr_1)r_2$
- iv.  $ml = m$

Untuk setiap  $r, r_1, r_2 \in R$  dan  $m, m_1, m_2 \in M$ .

(Bhattacharya, 1986:239)

Pada modul, operasi untuk grup komutatif harus sama dengan operasi pertama pada ring.

Jika ring  $R$  adalah komutatif dan  $M$  adalah  $R$ -modul kiri maka  $M$  juga langsung menjadi  $R$ -modul kanan. Modul yang memenuhi aksioma (iv) disebut modul unital. (Dummit & Foot, 1991:318).

Untuk pembahasan selanjutnya, diasumsikan bahwa ring  $R$  yang diberikan adalah ring komutatif dengan elemen satuan. Akibatnya dalam skripsi ini tidak ada pembeda antara modul kiri dan modul kanan.

Contoh 8

Misalkan  $M_6$  adalah grup abelian terhadap operasi  $+$ . Maka  $M_6$  adalah suatu modul atas himpunan semua bilangan bulat  $Z$ .

Jawab:

Diketahui  $(M_6, +)$  adalah grup abelian dan  $(Z, +, \cdot)$  merupakan ring.

$M_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ . Akan dibuktikan  $M_6$  adalah suatu  $Z$ -modul.

Diberikan pemetaan  $Z \times M_6 \rightarrow M_6$  yang didefinisikan oleh

$$(n, m) \mapsto nm = \underbrace{m + m + \dots + m}_n$$

Ambil sebarang  $n = 4, n_1 = 3, n_2 = 5 \in Z$  dan  $m = 2, m_1 = 4, m_2 = 3 \in M_6$

$$\text{i. } 4(4+3) = \underbrace{(4+3) + (4+3) + (4+3) + (4+3)}_4 \quad (4 \text{ kali})$$

$$= \underbrace{(4+4+4+4)}_4 + \underbrace{(3+3+3+3)}_4$$

$$= 4(4) + 4(3)$$

$$4(7) = 16 + 12$$

$$28 = 4 + 0$$

$$4 = 4$$

$$\text{ii. } (3+5)2 = \underbrace{(2+2+2+2+2+2+2+2)}_{(3+5)\text{suku}} \quad (8 \text{ kali})$$

$$= \underbrace{2+2+2}_{3\text{suku}} + \underbrace{2+2+2+2+2}_5\text{suku}$$

$$= 3(2) + 5(2)$$

$$(8) = 6 + 10$$

$$16 = 0 + 4$$

$$4 = 4$$

$$\text{iii. } (3 \times 5)2 = \underbrace{2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2}_{(3 \times 5)\text{suku}}$$

$$= \underbrace{2+2+2+2+2}_{5\text{suku}}_{3\text{suku}}$$

$$= \underbrace{5(2)}_{3\text{suku}}$$

$$= 3(5 \times 2)$$

$$15 \times 2 = 3(10)$$

$$30 = 30$$

$$0 = 0$$

$$\text{iv. } 1 \times 2 = 2 \quad (\text{sifat identitas})$$

Jadi dari i), ii), iii) dan iv)  $M_6$  adalah suatu  $Z$ -modul.

#### Contoh 9

Misal modulo 3 adalah grup abel dengan operasi  $+$ , dan  $(Z, +, \bullet)$  adalah ring. Maka modulo 3  $(M_3, +)$  adalah modul atas semua himpunan bilangan bulat  $Z$ .

Jawab:

Diketahui  $(M_3, +)$  adalah grup abelian,  $(Z, +, \bullet)$  adalah ring.

$$M_3 = \{0, 1, 2\}.$$

Akan dibuktikan  $M_3$  adalah  $Z$  modul.

Diberikan pemetaan  $Z \times M_3 \rightarrow M_3$  yang didefinisikan oleh

$$(n, m) \mapsto nm = \underbrace{m + m + \dots + m}_n$$

Ambil sebarang  $n = 2, n_1 = 4, n_2 = 3 \in Z, m = 2, m_1 = 1, m_2 = 2 \in M_3$

$$\begin{aligned} \text{i. } 2(1+2) &= \underbrace{(1+2) + (1+2)}_2 \\ &= \underbrace{(1+1)}_2 + \underbrace{(2+2)}_2 \\ &= 2(2) + 2(4) \end{aligned}$$

$$2(3) = 4 + 8$$

$$6 = 12$$

$$0 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{ii. } (4+3)2 &= \underbrace{(2+2+2+2+2+2+2+2)}_{(4+3\text{suku})} \\ &= \underbrace{(2+2+2+2)}_4 + \underbrace{(2+2+2)}_3 \\ &= 4(2) + 3(2) \end{aligned}$$

$$(7)2 = 8 + 6$$

$$14 = 2 + 0$$

$$2 = 2$$

$$\text{iii. } (4 \times 3)2 = \underbrace{(2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2)}_{(4 \times 3 \text{suku})}$$

$$= \underbrace{(2 + 2 + 2)}_3$$

$$= \underbrace{3(2)}_4$$

$$12(2) = 4(3 \times 2)$$

$$24 = 4(6)$$

$$0 = 0$$

$$\text{iv. } 1 \times 2 = 2$$

Jadi dari i), ii), iii) dan iv)  $M_3$  adalah  $Z$  modul.

### 2.2.2 Submodul

#### Definisi 9

Suatu subset tak kosong  $N$  dari  $R$ -modul  $M$  disebut suatu submodul dari  $M$

jika :

- i.  $a - b \in N, \forall a, b \in N$
- ii.  $ra \in N, \forall a \in N, r \in R$ .

(Bhattacharya, 1986:241)

#### Contoh 10

Misal  $M$  adalah  $R$ -modul, dengan operasi ring  $R$  adalah  $+$  dan  $\bullet$  dan operasi grup  $M$  adalah  $+$  dan  $x \in M$ , maka himpunan  $Rx = \{r \bullet x \mid r \in R\}$  adalah submodul dari  $M$ .

Jawab:

Diketahui  $M$  adalah  $R$ -modul dan  $x \in M$ .

Akan dibuktikan  $Rx = \{r \bullet x \mid r \in R\}$  adalah submodul  $M$ .

Untuk :

$$r_1 \bullet x - r_2 \bullet x = (r_1 - r_2) \bullet x \in R$$

$$r_1 \bullet (r_2 \bullet x) = (r_1 \bullet r_2) \bullet x \in R, \forall r_1, r_2 \in R$$

Suatu pemetaan dari suatu modul  $M$  ke modul  $N$  yang mengawetkan kedua operasi yang ada dalam modul tersebut dinamakan pemetaan homomorf atau homomorfisme modul. Definisi secara formal sebagai berikut.

#### 2.2.4 Homomorfisme Modul

##### Definisi 10

1. Misalkan  $R$  adalah ring dan misalkan  $M$  dan  $N$  adalah  $R$ -modul suatu pemetaan  $\varphi : M \rightarrow N$  adalah homomorfisme modul, jika pemetaan itu memenuhi struktur  $R$ -modul dari  $M$  ke  $N$ , yaitu:

$$\text{a) } \varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y), \quad \forall x, y \in M$$

$$\text{b) } \varphi(\alpha x) = \alpha \varphi(x), \quad \forall \alpha \in R, x \in M$$

2. Misalkan  $M$  dan  $N$  adalah  $R$ -modul.  $\text{Hom}_R(M, N)$  didefinisikan sebagai himpunan semua homomorfisme  $R$ -modul dari  $M$  ke  $N$ .

(Dummit & Foot, 1991: 326)

Homomorfisme R-modul adalah juga homomorfisme grup penjumlahan dimana penjumlahan adalah merupakan operasi pertama, tetapi belum tentu semua homomorfisme grup adalah homomorfisme modul (karena kondisi yang kedua mungkin tidak dipenuhi).

Contoh 11

- 1) Jika R adalah ring,  $M = R$  adalah modul atas dirinya sendiri. Suatu pemetaan  $\varphi : M \rightarrow M$  yang didefinisikan oleh  $\varphi(x) = 0$  adalah homomorfisme R-modul karena:

$$\begin{aligned} \varphi(x + y) &= 0 && \text{(definisi } \varphi(x) = 0 \text{)} \\ &= 0 + 0 \\ &= \varphi(x) + \varphi(y) && \text{(mengoperasikan hasil pemetaan)} \\ \varphi(\alpha x) &= 0 \\ &= \alpha \cdot 0 && \text{(teorema 1)} \\ &= \alpha \cdot \varphi(x) && (\varphi(x) = 0) \end{aligned}$$

- 2) Jika R adalah ring dan  $M = R$  adalah modul atas dirinya sendiri, maka belum tentu homomorfisme ring, dan homomorfisme ring belum tentu homomorfisme R-modul. Seperti contoh ketika  $R = \mathbb{Z}$ , maka suatu pemetaan  $f : x \rightarrow 2x$  hanyalah homomorfisme R-modul karena:

$$\begin{aligned} f(x + y) &= 2(x + y) && (f : x \rightarrow 2x) \\ &= 2(x) + 2(y) && \text{(sifat distributif kiri)} \\ &= f(x) + f(y) && \text{(mengoperasikan hasil pemetaan)} \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} f(\alpha x) &= 2(\alpha x) && (f : x \rightarrow 2x) \\ &= 2.\alpha(x) && (\text{sifat asosiatif}) \\ &= \alpha(2(x)) && (\text{sifat komutatif}) \\ &= \alpha f(x) && (f(x)=2x) \end{aligned}$$

Tetapi bukan homomorfisme ring, karena:

$$f(x.y) = 2xy \quad (\text{dari definisi } f : x \rightarrow 2x)$$

dan

$$\begin{aligned} f(x).f(y) &= 2x.2y && (\text{dari definisi } f : x \rightarrow 2x) \\ &= 4xy \end{aligned}$$

Jadi  $f(xy) \neq f(x)f(y)$

3) Jika  $R$  adalah ring,  $n \in \mathbb{Z}^+$ ,  $M = R^n$ ,  $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$  maka pemetaan proyeksi

$\pi_i : R^n \rightarrow R$  yang didefinisikan oleh

$$\pi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_i$$

Adalah homomorfisme  $R$ -modul yang surjektif. Penjelasan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \pi_i : R^n &\rightarrow R \\ \pi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) &= x_i \end{aligned}$$

Yang berarti

$$\begin{aligned} \pi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= x_1 \\ \pi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= x_2 \\ &\dots \\ \pi_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= x_n \end{aligned}$$

Maka

$$\begin{aligned}\pi_i((x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n)) &= \pi_i(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \\ &= x_i + y_i \\ &= (\pi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) + \pi_i(y_1, y_2, \dots, y_n))\end{aligned}$$

Berarti  $\pi_i(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) = \pi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) + \pi_i(y_1, y_2, \dots, y_n)$

$$\begin{aligned}\pi_i(\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n)) &= \pi_i(\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n) \\ &= \alpha x_i \\ &= \alpha \pi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)\end{aligned}$$

Jadi  $\pi_i(\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n)) = \alpha \pi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Sekarang akan ditunjukkan  $\pi_i$  bersifat surjektif.

Ambil sebarang  $y \in R$

Pilih  $x \in R^n$ , dengan  $x = (y, y, \dots, y) = y$

Maka  $\pi_i(x) = \pi_i(y, y, \dots, y) = y$

$$\pi_i(x) = y$$

Jadi  $\pi_i$  bersifat surjektif.

### Teorema 10

Misalkan  $M$  dan  $N$  adalah  $R$ -modul. Sebuah pemetaan  $\varphi: M \rightarrow N$  adalah

homomorfisme  $R$ -modul jika dan hanya jika

$$\varphi(\alpha x + y) = \varphi(\alpha x) + \varphi(y), \forall x, y \in M, \alpha \in R.$$

Bukti:

$\Rightarrow$  Jika  $\varphi$  adalah homomorfisme R-modul, maka berlaku

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha x + y) &= \varphi(\alpha x) + \varphi(y) && ((\varphi(\alpha x + y) = \varphi(\alpha x) + \varphi(y))) \\ &= \alpha\varphi(x) + \varphi(y) && (\text{definisi 10})\end{aligned}$$

$\Leftarrow$  misalkan  $\alpha = 1$ , untuk menentukan bahwa  $\varphi$  adalah komutatif penjumlahan maka:

$$\begin{aligned}\varphi(x + y) &= \varphi(1 \cdot x + y) && (\text{teorema 7}) \\ &= 1 \cdot \varphi(x) + \varphi(y) && (\varphi \text{ homomorfisme}) \\ &= \varphi(x) + \varphi(y) && (\text{teorema 7})\end{aligned}$$

Jika diberikan  $y = 0$  untuk menentukan bahwa  $\varphi$  adalah komutatif dari R ke M (yaitu bersifat homogen) maka:

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha x) &= \varphi(\alpha x + 0) && (\text{sifat dari 0 di R}) \\ &= \alpha\varphi(x) + 0 && (\varphi \text{ homomorfisme}) \\ &= \alpha\varphi(x) && (\text{sifat dari 0 di R})\end{aligned}$$

Jadi  $\varphi$  adalah homomorfisme R-modul.

### Definisi 11

Kernel homomorfisme  $f : M \rightarrow N$  ditulis  $\text{Ker}(f)$  adalah himpunan semua unsur di M yang dipetakan oleh  $f$  ke 0, yaitu  $\text{ker}(f) = \{x \in M \mid f(x) = 0\}$ .

(Bhattacharya. 1994:247)

**Definisi 12**

Image homomorfisme  $f : M \rightarrow N$  ditulis  $\text{Im}(f)$  adalah himpunan semua unsur di  $N$  yang menjadi bayangan suatu unsur di  $M$ , yaitu  $\text{Im}(f) = \{y \in N \mid y = f(x)\}$ . (Bhattacharya. 1994:247)

**Teorema 11**

Misalkan  $M$  dan  $N$  adalah  $R$ -modul dan misalkan  $\varphi, \psi$  adalah elemen dari

$\text{Hom}_R(M, N)$  didefinisikan  $\varphi + \psi$  dengan

$$(\varphi + \psi)(m) = \varphi(m) + \psi(m), \quad \forall m \in M$$

Maka  $\varphi + \psi \in \text{Hom}_R(M, N)$  dan dengan operasi ini  $\text{Hom}_R(M, N)$  adalah grup abelian. (Dummit & Foot, 1991:327).

Bukti:

1. Misal  $H = \text{Hom}_R(M, N) = \{\varphi : M \rightarrow N \mid \varphi \text{ Homomorfisme modul}\}$

Ambil  $\varphi, \psi \in H$ , maka

$$\varphi(m+n) = \varphi(m) + \varphi(n) \quad \text{dan} \quad \psi(m+n) = \psi(m) + \psi(n)$$

$$\varphi(\alpha m) = \alpha \varphi(m) \quad \text{dan} \quad \psi(\alpha m) = \alpha \psi(m)$$

$$(\varphi + \psi)(m+n) = \varphi(m+n) + \psi(m+n)$$

$$= [\varphi(m) + \varphi(n)] + [\psi(m) + \psi(n)] \quad (\varphi, \psi \text{ homomorfisme})$$

$$= [\varphi(m) + \psi(m)] + [\varphi(n) + \psi(n)] \quad (\text{assosiatif } +)$$

$$= (\varphi + \psi)(m) + (\varphi + \psi)(n) \quad (\text{penjumlahan dua fungsi})$$

$$(\varphi + \psi)(\alpha m) = \varphi(\alpha m) + \psi(\alpha m) \quad (\psi(\alpha m) = \alpha \psi(m))$$

$$= \alpha \varphi(m) + \alpha \psi(m) \quad (\varphi(\alpha m) = \alpha \varphi(m), \psi(\alpha m) = \alpha \psi(m))$$

$$= \alpha(\varphi + \psi)(m) \quad (\text{penjumlahan dua fungsi})$$

Untuk setiap  $\alpha \in R$  dan  $m, n \in M$ .

Jadi  $\varphi + \psi$  homomorfisme modul dari  $M$  ke  $N$ . Jadi  $\varphi + \psi \in \text{Hom}_R(M, N)$ .

2. Akan dibuktikan  $\text{Hom}_R(M, N)$  adalah grup abel.

i. Operasi penjumlahan bersifat assosiatif

$$\begin{aligned} (\varphi + (\psi + \phi))(m) &= \varphi(m) + (\psi + \phi)(m) \quad (\varphi, \psi, \phi \text{ homomorfisme}) \\ &= \varphi(m) + (\psi(m) + \phi(m)) \quad (\psi, \phi \text{ homomorfisme}) \\ &= \varphi(m) + \psi(m) + \phi(m) \quad (\text{sifat assosiatif } +) \\ &= (\varphi + \psi)(m) + \phi(m) \quad (\text{penjumlahan 2 fungsi}) \\ &= ((\varphi + \psi) + \phi)(m) \quad (\text{penjumlahan 3 fungsi}) \end{aligned}$$

ii. Ada identitas yaitu  $0(m) = 0, \forall m \in M$

$$\begin{aligned} (\varphi + 0)(m) &= \varphi(m) + 0(m) \quad (\varphi \text{ homomorfisme}) \\ &= \varphi(m) + 0 \quad (\text{teorema 1}) \\ &= \varphi(m) \quad (\text{sifat dari 0 di } R) \end{aligned}$$

iii. Ada invers, misal  $\varphi \in H$

$$\text{Pilih } \psi(m) = -\varphi(m)$$

$$\begin{aligned} (\varphi + \psi)(m) &= \varphi(m) + \psi(m) \quad (\varphi, \psi \text{ homomorfisme}) \\ &= \varphi(m) + (-\varphi(m)) \quad (\text{diketahui } \psi(m) = -\varphi(m)) \\ &= \varphi(m) - \varphi(m) \quad (\text{teorema 2}) \\ &= 0 \quad (\text{saling invers}) \\ &= 0(m) \quad (\text{identitas yaitu } 0(m) = 0) \end{aligned}$$

iv. Akan dibuktikan H dengan operasi penjumlahan bersifat komutatif

$$\begin{aligned}(\varphi + \psi)(m) &= \varphi(m) + \psi(m) && (\varphi, \psi \text{ homomorfisme}) \\ &= \psi(m) + \varphi(m) && (\text{sifat komutatif}) \\ &= (\psi + \varphi)(m) && (\text{penjumlahan 2 fungsi})\end{aligned}$$

Jadi  $\text{Hom}_R(M, N)$  adalah grup abelian.

### Teorema 12

Misal  $M$  dan  $N$  adalah  $R$ -modul, misal  $\varphi$  adalah elemen dari  $\text{Hom}_R(M, N)$ . Jika  $R$  adalah ring komutatif dan untuk semua  $\alpha \in R$ , didefinisikan  $\alpha\varphi$  dengan

$$(\alpha\varphi)(m) = \alpha(\varphi(m)), \forall m \in M$$

Maka  $\alpha\varphi \in \text{Hom}_R(M, N)$  dan karena ring  $R$  komutatif, maka grup abelian  $\text{Hom}_R(M, N)$  adalah  $R$ -modul. (Dummit & Foot, 1991:328)

Bukti:

$$\begin{aligned}1. \text{ Adib } (\alpha\varphi)(m+n) &= \alpha(\varphi(m+n)) && (\text{definisi } (\alpha\varphi)(m) = \alpha(\varphi(m))) \\ &= \alpha(\varphi(m) + \varphi(n)) && (\varphi \text{ homomorfisme}) \\ &= (\alpha\varphi)(m) + (\alpha\varphi)(n) && (\text{sifat distributif kiri})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\alpha_1\varphi)(\alpha_2m) &= \alpha_1(\varphi(\alpha_2m)) && (\text{sifat asosiatif}) \\ &= \alpha_1(\alpha_2\varphi(m)) && (\text{sifat komutatif}) \\ &= (\alpha_1\alpha_2)\varphi(m) && (\text{sifat asosiatif}) \\ &= \alpha_2(\alpha_1\varphi(m)) && (\text{sifat komutatif})\end{aligned}$$

Untuk setiap  $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \in R$  dan  $m, n \in M$ .

Jadi  $\alpha\varphi \in \text{Hom}_R(M, N)$

2. Adib  $\text{Hom}_R(M, N)$  adalah R-modul.

Ambil  $\alpha_1, \alpha_2 \in R$  dan  $\varphi, \psi \in H$  maka

$$((\alpha_1 + \alpha_2)\varphi)(x) = (\alpha_1 + \alpha_2)(\varphi(x)) \quad (\text{definisi } (\alpha\varphi)(m) = \alpha(\varphi(m)))$$

$$= \varphi((\alpha_1 + \alpha_2)(x)) \quad (\text{definisi 10})$$

$$= \varphi(\alpha_1 x + \alpha_2 x) \quad (\varphi \text{ homomorfisme})$$

$$= \varphi(\alpha_1 x) + \varphi(\alpha_2 x) \quad (\text{definisi 10})$$

$$= \alpha_1 \varphi(x) + \alpha_2 \varphi(x) \quad (\text{definisi 10})$$

$$((\alpha_1 \alpha_2)\varphi)(x) = (\alpha_1 \alpha_2)\varphi(x) \quad (\text{definisi } (\alpha\varphi)(m) = \alpha(\varphi(m)))$$

$$= \varphi(\alpha_1 \alpha_2 x) \quad (\text{definisi 10})$$

$$= \alpha_1 (\varphi(\alpha_2 x)) \quad (\text{sifat asosiatif})$$

$$= \alpha_1 (\alpha_2 \varphi(x)) \quad (\text{definisi } (\alpha\varphi)(m) = \alpha(\varphi(m)))$$

$$(\alpha(\varphi + \psi))(x) = \alpha(\varphi + \psi)(x) \quad (\text{definisi 10})$$

$$= \alpha(\varphi(x) + \psi(x)) \quad (\varphi, \psi \text{ homomorfisme})$$

$$= \alpha\varphi(x) + \alpha\psi(x) \quad (\text{definisi } (\alpha\varphi)(m) = \alpha(\varphi(m)))$$

$$1.\varphi(x) = 1.\varphi(x)$$

$$= \varphi.1(x) \quad (\text{sifat komutatif})$$

$$= \varphi(x) \quad (\text{teorema 7})$$

Jadi  $1.\varphi = \varphi, \forall \varphi \in H$

3. Berdasarkan Teorema 11  $\text{Hom}_R(M, N)$  grup abelian terhadap operasi penjumlahan yang didefinisikan dengan :

$$(\varphi + \psi)(m) = \varphi(m) + \psi(m), \forall m \in M$$

Dari 1, 2 dan 3 maka  $\text{Hom}_R(M, N)$  adalah R-modul.

### Teorema 13

Misalkan  $M$ ,  $N$  dan  $L$  adalah R-modul,  $\varphi \in \text{Hom}_R(L, M)$  dan  $\psi \in \text{Hom}_R(M, N)$ . Maka  $\psi \circ \varphi \in \text{Hom}_R(L, N)$ . (Dummit & Foot, 1991:328)

Bukti:

$$\varphi : L \rightarrow M$$

$$\psi : M \rightarrow N$$

$$\psi \circ \varphi : L \rightarrow N$$

Akan dibuktikan  $(\psi \circ \varphi)$  adalah homomorfisme modul dari  $L$  ke  $N$ .

$$\begin{aligned} (\psi \circ \varphi)(\alpha x + y) &= \psi(\varphi(\alpha x + y)) && \text{(sifat komposisi fungsi)} \\ &= \psi(\varphi(\alpha x) + \varphi(y)) && (\varphi \text{ homomorfisme}) \\ &= \psi(\alpha \varphi(x) + \varphi(y)) && \text{(teorema 10)} \\ &= \psi(\alpha \varphi(x)) + \psi(\varphi(y)) && (\psi \text{ homomorfisme}) \\ &= \alpha \psi(\varphi(x)) + \psi(\varphi(y)) && \text{(definisi 10)} \\ &= \alpha(\psi \circ \varphi)(x) + (\psi \circ \varphi)(y) \end{aligned}$$

Jadi  $(\psi \circ \varphi)$  adalah homomorfisma R-modul dari  $L$  ke  $N$ .

Jadi  $\psi \circ \varphi \in \text{Hom}_R(L, N)$ .

### 2.2.4 Sifat-sifat Homomorfisme Modul

#### Definisi 13

1. Misalkan  $R$  adalah ring,  $M$  dan  $N$  adalah modul. Jika homomorfisme modul dari  $M$  ke  $N$  bersifat injektif (1-1) maka disebut monomorfisme modul.
2. Misalkan  $R$  adalah ring,  $M$  dan  $N$  adalah modul, jika homomorfisme modul dari  $M$  ke  $N$  tersebut bersifat surjektif (onto) maka disebut epimorfisme modul.
3. Misalkan  $R$  adalah ring,  $M$  dan  $N$  adalah  $R$ -modul. Jika homomorfisme modul dari  $M$  ke  $N$  tersebut bersifat injektif dan surjektif (bijektif) maka disebut isomorfisme modul.

(Dummit & Foot, 1991:326).

#### Teorema 14. (Isomorfisme Modul)

- 1) Teorema pertama Isomorfisme modul

Misal  $M, N$  adalah  $R$ -modul dan ada suatu pemetaan  $\varphi : M \rightarrow N$  adalah homomorfisme  $R$ -modul. Maka  $\ker \varphi$  adalah submodul dari  $M$  dan  $M / \ker \varphi \cong \varphi(M)$ .

Bukti:

Diketahui  $M, N$  adalah  $R$ -modul

$$\varphi : M \rightarrow N$$

- a. Adib  $\ker \varphi$  adalah submodul dari  $M$

$$\ker \varphi = \{m \in M \mid \varphi(m) = 0\}$$

ambil  $\alpha \in R, \psi \in \ker \varphi$

$$\begin{aligned} (\alpha\psi)(m) &= \alpha(\psi(m)) \quad (\text{sifat asosiatif}) \\ &= \alpha \cdot 0 \quad (\varphi(m) = 0) \\ &= 0 \quad (\text{teorema 1}) \end{aligned}$$

Jadi  $\alpha\psi \in \ker \varphi$ .

Karena  $\alpha\psi \in \ker \varphi, \forall \alpha \in R$  dan  $\ker \varphi \leq M$ , maka  $\ker \varphi$  adalah submodul dari  $M$ .

- b. Akan dibuktikan  $M/\ker \varphi \cong \varphi(M)$  atau  $M/\ker \varphi$  isomorfik dengan  $\varphi(M)$ .

$$\text{Misal } K = \ker \varphi = \{m \in M \mid \varphi(m) = 0\}$$

$$\varphi(M) = \{n \in N \mid n = \varphi(m), m \in M\}$$

$$M/\ker \varphi = M/k = \{K + m \mid m \in M\}$$

Didefinisikan pengaitan  $\psi$  dari  $M/k$  ke  $\varphi(M)$  dengan

$$\psi(K + m) = \varphi(m)$$

Misalkan

$$\psi : M/\ker \varphi \rightarrow \varphi(M) \text{ dengan } \psi(K + m) = \varphi(m),$$

Dimana  $\psi$  harus memenuhi sifat:

- i. Akan dibuktikan  $\psi$  adalah homomorfisme modul.

$$\begin{aligned} \psi[(K + a) + (K + b)] &= \psi(K + (a + b)) \quad (K = \ker \varphi, m = a + b) \\ &= \psi(a + b) \quad (K = 0) \\ &= \psi(a) + \psi(b) \quad (\text{sifat distributif kiri}) \end{aligned}$$

$$= \psi(K + a) + \psi(K + b)$$

$$\psi(\alpha(K + a)) = \psi(\alpha(K) + \alpha(a)) \quad (\psi \text{ homomorfisme})$$

$$= \psi(\alpha a) \quad (K = \ker \varphi = 0)$$

$$= \alpha \cdot \psi(a) \quad (\text{definisi 10})$$

$$= \alpha \psi(K + a)$$

Jadi  $\psi$  adalah homomorfisme modul

ii.  $\psi$  bersifat satu-satu (injektif)

Misal  $K + a, K + b \in M / \ker \varphi$

Dan  $\psi(K + a) = \psi(K + b)$

karena  $\psi(K + a) = \psi(K + b)$

maka  $\varphi(a) = \varphi(b)$

$$\varphi(a) - \varphi(b) = 0$$

$$\varphi(a - b) = 0, a - b \in K$$

Jadi  $\psi$  bersifat satu-satu.

iii.  $\psi$  bersifat onto (surjektif)

Adib  $\psi$  bersifat onto

Ambil sebarang  $n \in N$

Berarti  $n = \varphi(m)$  untuk suatu  $m \in M$

Pilih  $z = K + m \in M / \ker \varphi$

Maka  $\psi(K + m) = \varphi(m)$

$$= n$$

Sehingga terdapat isomorfisme dari  $M / \ker \varphi$  ke  $\varphi(M)$

Jadi  $M / \ker \varphi \cong \varphi(M)$ .

2) Teorema kedua isomorfisme modul.

Missal  $A, B$  adalah submodul dari  $R$ -modul  $M$ . maka

$$(A + B) / B \cong A / (A \cap B)$$

Bukti:

Dibuat pengait  $\psi : A \rightarrow (A + B) / B$

Dengan  $\varphi(a) = a + B, \forall a \in A$

i. Akan dibuktikan  $(A + B) / B$  adalah  $R$ -modul

Diketahui  $A$  dan  $B$  adalah  $R$ -submodul. Jadi  $A$  dan  $B$  adalah  $R$ -modul.

$$(A + B) / B = \{(a + b) + B \mid a \in A, b \in B\}$$

Misal  $y = (a + b) + B \in (A + B) / B$  dan  $\alpha \in R$

$$\begin{aligned} \text{Maka } \alpha y &= \alpha[(a + b) + B] \\ &= (\alpha a + \alpha b) + B \end{aligned}$$

Karena  $A$  dan  $B$  adalah  $R$ -submodul maka,  $\alpha a \in A$  dan  $\alpha b \in B$

Jadi  $\alpha y = (\alpha a + \alpha b) + B \in (A + B) / B$

Dengan kata lain  $(A + B) / B$  adalah  $R$ -modul.

ii. Akan dibuktikan  $f$  homomorfisme  $R$ -modul.

Ambil  $x, y \in A$  dan  $\alpha \in R$  maka

$$f(\alpha x + y) = (\alpha x + y) + B$$

$$= (\alpha x + B) + (y + B) \quad (\text{assosiatif } +)$$

$$= \alpha(x + B) + (y + B)$$

$$= \alpha f(x) + f(y)$$

$$f(\alpha x) = \alpha(x + B)$$

$$= \alpha f(x) \quad (\text{definisi 10})$$

Jadi  $f$  adalah homomorfisme modul.

iii. Akan dibuktikan  $A \cap B$  adalah kernel  $f(\ker f)$ .

Ambil  $x \in A \cap B$ , maka  $x \in A$  dan  $x \in B$

$$f(x) = x + B$$

$$= 0 + B \quad , \text{ karena } x \in B$$

$$= B$$

Jadi  $A \cap B = \ker f$

Karena  $A$  dan  $(A + B)/B$   $R$ -modul,  $f$  homomorfisme modul dari  $A$  ke

$(A + B)/B$ , maka teorema kedua isomorfisme modul

$$(A + B)/B \cong A/(A \cap B) \quad \text{atau} \quad A/(A \cap B) \cong (A + B)/B.$$

3) Teorema ketiga isomorfisme modul.

Misal  $M$  adalah  $R$ -modul, dan misal  $A$  dan  $B$  adalah submodul dari  $M$

dengan  $A \subseteq M$ , maka  $(M/A)/(B/A) \cong M/B$ .

Bukti:

i. Adib  $M/A$  dan  $M/B$  modul

$$\text{Misal } M/A = \{m + A \mid m \in M\}$$

$$M/B = \{m + B \mid m \in M\}$$

Karena  $M$  adalah  $R$ -modul maka  $(M,+)$  grup abelian. Didefinisikan

$$r(m + A) = (rm) + A, \forall r \in R, m + A \in M/A.$$

Akan ditunjukkan  $M/A$  memenuhi sifat-sifat modul yang empat,

misal untuk setiap  $r_1, r_2 \in R$  dan  $m + A \in M/A$ , maka

$$\begin{aligned} \text{a. } (r_1 + r_2)(m + A) &= ((r_1 + r_2)m) + A \\ &= ((r_1 + r_2)m) + A \\ &= r_1(m + A) + r_2(m + A) \text{ (distributif kanan)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } (r_1 r_2)(m + A) &= (r_1 r_2 m) + A \\ &= r_1(r_2 m + A) \\ &= r_1(r_2(m + A)) \text{ (asosiatif)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c. } r((m_1 + A) + (m_2 + A)) &= r((m_1 + m_2) + A) \\ &= (r(m_1 + m_2) + A) \\ &= (rm_1 + rm_2) + A \text{ (distributif kiri)} \\ &= (rm_1 + A) + (rm_2 + A) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d. } 1(m + A) &= (1m + A) \text{ (identitas)} \\ &= (m + A) \end{aligned}$$

Terbukti bahwa  $M/A$  adalah  $R$ -modul.

Dengan cara yang sama maka akan didapat bahwa  $M/B$  adalah  $R$ -modul.

ii. Buat pemetaan  $\psi : M/A \rightarrow M/B$

Dengan  $\psi(m+A) = m+B$

Adib  $\psi$  homomorfisme modul,

Ambil  $x, y \in M/A$  dan  $r \in R$

$x, y \in M/A$  maka  $x = m_1 + A$  dan  $y = m_2 + A$

$$\begin{aligned} \psi(\alpha x + y) &= \psi(\alpha(m_1 + A) + (m_2 + A)) \quad (\psi \text{ fungsi}) \\ &= \psi((\alpha m_1 + m_2) + A) \quad (\text{assosiatif } +) \\ &= (\alpha m_1 + m_2) + B \\ &= (\alpha m_1 + B) + (m_2 + B) \quad (\text{assosiatif } +) \\ &= \alpha(m_1 + B) + (m_2 + B) \\ &= \alpha\psi(m_1 + A) + \psi(m_2 + A) \\ &= \alpha\psi(x) + \psi(y) \end{aligned}$$

Jadi  $\psi$  homomorfisme modul.

iii. Adib  $\ker \psi = B/A$

$$\text{Ker } \psi = \{x \in M/A \mid \psi(x) = B = 0 + B\}$$

Ambil  $x \in B/A$  maka  $x = b + A$  untuk suatu  $b \in B$

Karena  $B \subseteq M$  maka  $b \in M$

Jadi  $x = b + A \subset M / A$

$$\psi(x) = \psi(b + A)$$

$$= b + B, \quad \text{karena } b \in B$$

$$= B$$

Jadi  $\ker \psi = B / A$

Karena  $M/A$  dan  $M/B$  modul,  $\psi$  homomorfisme modul dari  $M/A$  ke  $M/B$  dan  $\ker \psi = B/A$ , maka sesuai teorema pertama isomorfisme modul diperoleh  $(M/A)/(B/A) \cong M/B$ .

## BAB III

### PEMBAHASAN

Dalam bab ini dibahas tentang penjumlahan langsung pada modul beserta sifat-sifatnya.

#### 3.1 Penjumlahan Langsung Pada Modul

Penjumlahan langsung dengan penjumlahan biasa tidak sama. Pada penjumlahan biasa tidak memperhatikan urutan komponennya, tetapi pada penjumlahan langsung memperhatikan urutan komponennya. Penjumlahan langsung pada modul itu ada dua jenis, yaitu penjumlahan langsung luar dan penjumlahan langsung dalam. Penjumlahan langsung luar adalah perkalian langsung dari kumpulan modul. Sedangkan penjumlahan langsung dalam adalah penjumlahan langsung dari submodul-submodul. Berikut ini akan diuraikan definisi secara formal tentang penjumlahan langsung luar dan penjumlahan langsung dalam.

##### 3.1.1. Penjumlahan Langsung Luar

###### Definisi 1

Misal  $M_1, \dots, M_n$  adalah kumpulan dari R-modul. Dan misal M adalah perkalian dari  $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$  yang memuat  $n$ -tuples  $(m_1, m_2, \dots, m_n)$  dengan  $m_i \in M_i$ .

Penjumlahan langsung dan perkalian langsung pada M didefinisikan sebagai berikut:

$$(m_1, m_2, \dots, m_n) + (n_1, n_2, \dots, n_n) = (m_1 + n_1, m_2 + n_2, \dots, m_n + n_n)$$

$$0 = (0, 0, \dots, 0)$$

$$a(m_1, m_2, \dots, m_n) = (am_1, am_2, \dots, am_n)$$

dengan  $m_i, n_i \in M_i$  dan  $a \in R$ . selanjutnya perkalian langsung dari  $M_1, \dots, M_n$  disebut dengan penjumlahan langsung luar pada  $M_i$  dan biasanya di notasikan dengan:

$$M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_n \text{ atau } \bigoplus_{i=1}^n M_i.$$

(Jacobson, 1991:175)

Berikut ini akan diuraikan teorema yang berkaitan dengan definisi penjumlahan langsung luar.

### Teorema 1

Misal  $\varphi_i$  adalah homomorfism modul dari  $M_i$  ke  $N$  bersifat injektif dengan  $1 \leq i \leq n$  maka pemetaan  $\varphi$  dari  $\bigoplus M_i$  ke  $N$  yang didefinisi dengan:

$$\varphi : (x_1, \dots, x_n) \rightarrow \sum_{i=1}^n \varphi_i(x_i)$$

adalah homomorfisme dari  $\bigoplus M_i$  ke  $N$ .

(Jacobson, 1991:177)

Bukti:

Ambil  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  dan  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ ,

maka :

$$\varphi(x+y) = \varphi(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

$$= \sum_{i=1}^n \varphi_i(x_i + y_i) \quad (\text{diketahui } \varphi : (x_1, \dots, x_n) \rightarrow \sum_1^n \varphi_i(x_i))$$

$$= \sum_1^n \varphi_i(x_i) + \sum_1^n \varphi_i(y_i) \quad (\text{sifat distributif kiri})$$

$$= \varphi(x_1, \dots, x_n) + \varphi(y_1, \dots, y_n) \quad (\varphi : (x_1, \dots, x_n) \rightarrow \sum_1^n \varphi_i(x_i))$$

dan

$$\varphi(ax) = a\varphi(x) \quad (\text{definisi 10})$$

$$\varphi(ax_1, \dots, ax_n) = \sum_1^n \varphi_i(ax_i) \quad (\varphi : (x_1, \dots, x_n) \rightarrow \sum_1^n \varphi_i(x_i))$$

$$= \sum_1^n a\varphi_i(x_i) \quad (\text{sifat komutatif})$$

$$= a \sum_1^n \varphi_i(x_i) \quad (\text{definisi 10})$$

Maka  $\varphi$  adalah sebuah homomorfisma dari  $\oplus M_i$  ke  $\mathbb{N}$ .

Jadi teorema terbukti.

Contoh

Berdasarkan contoh 8 dan 9 pada bab kajian teori, diketahui bahwa  $M_3, M_6$  adalah  $\mathbb{Z}$  modul. Tentukan penjumlahan langsung dari kedua modul tersebut.

Jawab:

Diketahui  $M_6 = \{0,1,2,3,4,5\}$  dan  $M_3 = \{0,1,2\}$ , adalah  $\mathbb{Z}$  modul. Maka penjumlahan langsung dari kedua modul tersebut adalah:

$$M_6 \oplus M_3 = \{0,1,2,3,4,5\} \oplus \{0,1,2\}$$

$$= \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2), (2,0), (2,1), (2,2), (3,0), (3,1), (3,2), (4,0), (4,1), (4,2), (5,0), (5,1), (5,2)\}$$

Selanjutnya akan dijelaskan tentang penjumlahan langsung dalam, tetapi sebelum menguraikan tentang penjumlahan langsung dalam, penulis terlebih dahulu akan membuktikan teorema yang menjadi syarat perlu dan cukup untuk penjumlahan langsung dalam. Untuk lebih jelasnya akan diuraikan sebagai berikut.

### **Teorema 2**

Misal  $M$  adalah modul dan misal  $N_1, N_2, \dots, N_k$  adalah submodul-submodul  $M$ . Pernyataan berikut ini adalah ekuivalen:

(1) Pemetaan

$$\pi : N_1 \times N_2 \times \cdots \times N_k \rightarrow N_1 + N_2 + \cdots + N_k$$

yang didefinisikan dengan

$$\pi(a_1, a_2, \dots, a_k) = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$$

adalah isomorfisma modul, atau

$$N_1 + N_2 + \cdots + N_k \cong N_1 \times N_2 \times \cdots \times N_k.$$

(2)  $N_j \cap (N_1 + N_2 + \cdots + N_{j-1} + N_{j+1} + \cdots + N_k) = 0, \forall j \in \{1, 2, \dots, k\}$

(3) Untuk setiap  $x \in N_1 + N_2 + \cdots + N_n$  dapat ditulis secara tunggal

dengan bentuk  $a_1 + a_2 + \cdots + a_k$  dengan  $a_i \in N_i$ , untuk

$i = 1, 2, \dots, k$ .

(Dummit & Foot, 1991:334)

Bukti:

(1)  $\rightarrow$  (2)

Diketahui bahwa :

$$\pi(a_1, a_2, \dots, a_k) = a_1 + a_2 + \dots + a_k$$

Adalah isomorfisme modul.

Akan dibuktikan bahwa :

$$N_j \cap (N_1 + N_2 + \dots + N_{j-1} + N_{j+1} + \dots + N_k) = 0$$

Andaikan ada  $a_j \in N_j \cap (N_1 + N_2 + \dots + N_{j-1} + N_{j+1} + \dots + N_k)$

dengan  $a_j \neq 0$ , maka:

$$a_j = a_1 + a_2 + \dots + a_{j-1} + a_{j+1} + \dots + a_k$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{j-1} + a_j + a_{j+1} + \dots + a_k = 0$$

$$\begin{aligned} \pi(a_1, a_2, \dots, a_{j-1}, -a_j, a_{j+1}, \dots, a_k) &= a_1 + a_2 + \dots + a_{j-1} + (-a_j) + a_{j+1} + \dots + a_k \\ &= 0 \end{aligned}$$

Karena  $\pi$  isomorfisme modul, maka:

$$\ker \pi = 0, \text{ atau } \pi(0) = 0$$

Jadi

$$(a_1, a_2, \dots, a_{j-1}, -a_j, a_{j+1}, \dots, a_k) = (0, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0)$$

$$\text{Jadi } -a_j = 0$$

Ini kontradiksi dengan pengandaian  $a_j \neq 0$ . Sehingga  $a_j = 0$

Jadi Tidak ada  $a_j \in N_j \cap (N_1 + N_2 + \dots + N_{j-1} + N_{j+1} + \dots + N_k)$

dengan  $a_j \neq 0$

Jadi  $N_j \cap (N_1 + N_2 + \dots + N_{j-1} + N_{j+1} + \dots + N_k) = 0$

(2)  $\rightarrow$  (3)

Ambil  $x \in N_1 + N_2 + \dots + N_n$

Misal  $x = a_1 + a_2 + \dots + a_k$ , dan  $x = b_1 + b_2 + \dots + b_k$

Akan dibuktikan bahwa  $a_j = b_j, \forall j = 1, 2, \dots, k$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k = b_1 + b_2 + \dots + b_k$$

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_k) - (b_1 + b_2 + \dots + b_k) = 0$$

$$(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \dots + (a_{j-1} - b_{j-1}) + (a_j - b_j) + (a_{j+1} - b_{j+1}) + \dots + (a_k - b_k) = 0$$

$$a_j - b_j = -(a_1 - b_1) - (a_2 - b_2) - \dots - (a_{j-1} - b_{j-1}) - (a_{j+1} - b_{j+1}) - \dots - (a_k - b_k)$$

$$a_j - b_j = (b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + \dots + (b_{j-1} - a_{j-1}) + (b_{j+1} - a_{j+1}) + \dots + (b_k - a_k)$$

Karena  $a_j - b_j \in N_j$ , dan

$$(b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + \dots + (b_{j-1} - a_{j-1}) + (b_{j+1} - a_{j+1}) + \dots + (b_k - a_k) \in N_1 + N_2 + \dots + N_{j-1} + N_{j+1} + \dots + N_k$$

Maka :

$$a_j - b_j \in N_j \cap (N_1 + N_2 + \dots + N_k) = 0$$

Sehingga :

$$a_j - b_j = 0$$

Dengan kata lain:

$$a_j = b_j$$

Jadi  $x$  dapat dinyatakan secara tunggal dalam bentuk:

$$x = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$$

(3)  $\rightarrow$  (1)

Misal  $x = (a_1, a_2, \dots, a_k)$  dan  $y = (b_1, b_2, \dots, b_k)$

Akan dibuktikan bahwa  $\pi$  isomorfisme modul.

i. Akan dibuktikan  $\pi$  adalah homomorfisme modul.

$$\begin{aligned} \pi(x + y) &= \pi(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_k + b_k) \\ &= (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_k + b_k) \\ &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_k) + (b_1 + b_2 + \cdots + b_k) \\ &= \pi(a_1 + a_2 + \cdots + a_k) + \pi(b_1 + b_2 + \cdots + b_k) \\ &= \pi(x) + \pi(y) \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \pi(\alpha x) &= \pi(\alpha(a_1, a_2, \dots, a_k)) \\ &= \pi(\alpha a_1, \alpha a_2, \dots, \alpha a_k) \\ &= \alpha a_1 + \alpha a_2 + \cdots + \alpha a_k \\ &= \alpha \pi(a_1, a_2, \dots, a_k) \\ &= \alpha \pi(x) \end{aligned}$$

Jadi  $\pi$  adalah homomorfisme modul.

ii.  $\pi$  bersifat onto (surjektif)

Ambil  $y \in N_1 + N_2 + \cdots + N_k$ ,

Maka:

$$y = y_1 + y_2 + \cdots + y_k$$

dengan  $y_i \in N_i$ .

Pilih  $x = (y_1, y_2, \dots, y_k) \in N_1 \times N_2 \times \cdots \times N_k$ .

$$\begin{aligned} \text{Maka } \pi(x) &= \pi(y_1, y_2, \dots, y_n) \\ &= y_1 + y_2 + \cdots + y_k \\ &= y \end{aligned}$$

Jadi terbukti  $\pi$  bersifat onto

iii.  $\pi$  bersifat satu-satu (injektif)

Ambil  $x, y \in N_1 \times N_2 \times \cdots \times N_k$ .

Dengan  $\pi(x) = \pi(y)$

Akan dibuktikan  $x = y$

Misal  $x = (a_1, a_2, \dots, a_k)$ , dan  $y = (b_1, b_2, \dots, b_k)$

Karena  $\pi(x) = \pi(y)$

Maka :

$$\pi(x) = \pi(y)$$

$$\pi(a_1, a_2, \dots, a_k) = \pi(b_1, b_2, \dots, b_k)$$

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k = b_1 + b_2 + \cdots + b_k$$

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_k) - (b_1 + b_2 + \cdots + b_k) = 0$$

$$(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \cdots + (a_k - b_k) = 0$$

Karena setiap anggota  $N_1 + N_2 + \dots + N_k$  adalah tunggal, maka:

$$0 = 0 + 0 + \dots + 0$$

$$0 = (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \dots + (a_k - b_k)$$

Sehingga berlaku:

$$a_1 - b_1 = 0, a_2 - b_2 = 0, \dots, a_k - b_k = 0$$

Dengan kata lain :

$$a_i = b_i$$

Sehingga diperoleh :

$$x = y$$

Jadi terbukti bahwa  $\pi$  isomorfisme.

### 3.1.2. Penjumlahan Langsung Dalam

#### Definisi 2

Misal  $M$  adalah modul dan  $N_1, N_2, \dots, N_k$  submodul -submodul  $M$ .  $M$  disebut penjumlahan langsung (internal) pada  $N_1, N_2, \dots, N_k$  jika memenuhi Teorema 3.2 dan dapat ditulis dengan :

$$M = N_1 \oplus N_2 \oplus \dots \oplus N_k.$$

(Dummit & Foot, 1991:335)

Berdasarkan definisi dari penjumlahan langsung dalam, diketahui bahwasanya untuk menjadi penjumlahan langsung dalam, maka harus memenuhi syarat cukup dan syarat perlu yaitu teorema 3.2.

Berdasarkan definisi penjumlahan langsung luar dan penjumlahan langsung dalam diketahui bahwasanya, keduanya menggunakan notasi yang sama, padahal penjumlahan langsung luar adalah perkalian langsung dari kumpulan modul sedangkan penjumlahan langsung dalam adalah penjumlahan langsung dari kumpulan submodul. Alasan penjumlahan langsung luar dan penjumlahan langsung dalam menggunakan notasi yang sama, karena penjumlahan langsung dalam isomorfik dengan penjumlahan langsung luar. Ini sesuai dari pernyataan teorema 3.2 bagian 1.

Selanjutnya akan dibahas tentang definisi yang berkaitan dengan sifat-sifat penjumlahan langsung pada modul. Definisi secara formal sebagai berikut.

### 3.1.3 Submodul-Submodul Bebas

#### Definisi 3

Misal  $M$  adalah modul dan  $N_1, N_2, \dots, N_k$  adalah submodul-submodul  $M$ .  $N_1, N_2, \dots, N_k$  adalah submodul-submodul bebas  $M$  jika  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = 0$ , dengan  $n_i \in N_i$  maka  $n_1 = n_2 = \dots = n_k = 0$ .

Selanjutnya akan dibahas mengenai sifat-sifat penjumlahan langsung pada modul dengan menggunakan definisi submodul-submodul bebas. Untuk lebih jelasnya akan diuraikan sebagai berikut.

## 3.2 Sifat-Sifat Penjumlahan Langsung pada Modul

Pada bagian ini akan diuraikan tentang sifat-sifat penjumlahan langsung pada modul beserta pembuktiannya.

**Teorema 3**

Misal  $N_1, N_2, \dots, N_k$  adalah submodul-submodul bebas  $M$ . Maka akan berlaku jika:

$$\sum_1^k n_i = \sum_1^k m_i$$

dengan  $n_i, m_i \in N$ , maka  $n_i = m_i$ , untuk setiap  $i = 1, 2, \dots, k$ .

Bukti:

Ambil sebarang  $c \in M$

Karena  $c \in M$  dan  $M = N_1 + N_2 + \dots + N_k$ , maka  $c$  dapat dinyatakan

dalam bentuk  $c = n_1 + n_2 + \dots + n_k$  dengan  $n_i \in N_i$ . Misalkan

$c = m_1 + m_2 + \dots + m_k$  dengan  $m_i \in N_i$  adalah penulisan yang lain untuk  $c$ ,

maka didapatkan:

$$(n_1 + n_2 + \dots + n_k) = (m_1 + m_2 + \dots + m_k)$$

$$(n_1 + n_2 + \dots + n_k) - (m_1 + m_2 + \dots + m_k) = 0$$

$$(n_1 - m_1) + (n_2 - m_2) + \dots + (n_k - m_k) = 0$$

Menurut Definisi submodul-submodul bebas, jika  $N_1, N_2, \dots, N_k$

submodul-submodul bebas  $M$  dengan  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = 0$  maka

$n_1 = n_2 = \dots = n_k = 0$ . Sedangkan :

$$\underbrace{(n_1 - m_1)}_{p_1} + \underbrace{(n_2 - m_2)}_{p_2} + \dots + \underbrace{(n_k - m_k)}_{p_k} = 0$$

dengan

$$\begin{aligned}
 p_1 &= n_1 - m_1 = 0 \\
 p_2 &= n_2 - m_2 = 0 \\
 &\vdots \\
 p_t &= n_k - m_k = 0
 \end{aligned}$$

sehingga  $n_1 = m_1, n_2 = m_2, \dots, n_k = m_k$

dengan kata lain, jika  $\sum_1^k n_i = \sum_1^k m_i$

maka  $n_i = m_i$ , untuk setiap  $i = 1, 2, \dots, k$ .

Jadi teorema terbukti.

#### Teorema 4

Misal  $N_1, N_2, \dots, N_k$  adalah submodul-submodul bebas M. Akan berlaku

jika:

$$L_1 = N_1 + \dots + N_{r_1}$$

$$L_2 = N_{r_1+1} + \dots + N_{r_1+r_2}$$

$$L_3 = N_{r_1+r_2+1} + \dots + N_{r_1+r_2+r_3}$$

$\vdots$

$$L_t = N_{r_1+r_2+r_3+\dots+1} + \dots + N_k$$

Maka  $L_1, L_2, L_3, \dots, L_t$  adalah bebas.

(Jacobson, 1991:178)

Bukti:

Diketahui  $N_1, N_2, \dots, N_k$  adalah submodul-submodul bebas M dan

$n_1 + n_2 + \dots + n_k = 0$ , maka  $n_1 = n_2 = \dots = n_k = 0$ , untuk  $n_i \in N_i$ , dan

untuk setiap  $i = 1, 2, \dots, k$ .

$$L_1 = N_1 + \cdots + N_{r_1}$$

$$L_2 = N_{r_1+1} + \cdots + N_{r_1+r_2}$$

$$\vdots$$

$$L_t = N_{r_1+r_2+r_3+\dots+1} + \cdots + N_k$$

Akan dibuktikan bahwa  $L_1, L_2, L_3, \dots, L_t$  adalah bebas.

Ambil  $l_j \in L_j$ , untuk  $j = 1, 2, \dots, t$  dan  $L_1 = N_1 + N_2 + \cdots + N_{r_1}$ ,

$L_2 = N_{r_1+1} + \cdots + N_{r_1+r_2}$ ,  $\dots$ ,  $L_t = N_{r_1+r_2+r_3+\dots+1} + \cdots + N_k$ , maka

$$l_1 = n_1 + n_2 + \cdots + n_{r_1}$$

$$l_2 = n_{r_1+1} + \cdots + n_{r_1+r_2}$$

$$\vdots$$

$$l_t = n_{r_1+r_2+r_3+\dots+1} + \cdots + n_k$$

Untuk  $n_i \in N_i$ .

Jika  $l_1 + l_2 + \cdots + l_t = 0$ , maka:

$$n_1 + \cdots + n_{r_1} + n_{r_1+1} + \cdots + n_{r_1+r_2} + \cdots + n_{r_1+r_2+\dots+1} + \cdots + n_k = 0$$

$$\underbrace{n_1 + \cdots + n_{r_1}}_{l_1} + \underbrace{n_{r_1+1} + \cdots + n_{r_1+r_2}}_{l_2} + \cdots + \underbrace{n_{r_1+r_2+\dots+1} + \cdots + n_k}_{l_t} = 0$$

Padahal  $n_1 = n_2 = \cdots = n_k = 0$ , oleh karena itu  $l_1 = l_2 = \cdots = l_t = 0$ . Karena

$l_i \in L_i$ , maka terbukti bahwa  $L_1, L_2, L_3, \dots, L_t$  bebas.

**Teorema 5.**

Misal  $N_1, N_2, \dots, N_k$  adalah bebas, dan  $N_i = N_{i1} \oplus N_{i2} \oplus \dots \oplus N_{ir_i}$ , untuk  $i = 1, 2, \dots, k$ . Akan berlaku jika  $N_{ij}$  adalah submodul-submodul  $N_i$ , maka submodul-submodul  $N_{11}, \dots, N_{1r_1}, N_{21}, \dots, N_{2r_2}, N_{k1}, \dots, N_{kr_k}$  adalah bebas.

(Jacobson, 1991;178)

Bukti:

Diketahui  $N_1, N_2, \dots, N_k$  bebas.

$N_i = N_{i1} \oplus N_{i2} \oplus \dots \oplus N_{ir_i}$ . Untuk  $i = 1, 2, \dots, k$ , dan  $N_{ij}$  submodul dari  $N_i$  dengan  $j = 1, 2, \dots, r_i$ . Akan dibuktikan bahwa:

$N_{11}, \dots, N_{1r_1}, N_{21}, \dots, N_{2r_2}, N_{k1}, \dots, N_{kr_k}$  adalah bebas.

Misal  $P_i \in N_{ij}$ , dan

$$\begin{aligned} P_1 &= N_{11} + N_{12} + \dots + N_{1r_1} \\ P_2 &= N_{21} + N_{22} + \dots + N_{2r_2} \\ P_3 &= N_{31} + N_{32} + \dots + N_{3r_3} \\ &\vdots \\ P_k &= N_{k1} + N_{k2} + \dots + N_{kr_k} \end{aligned}$$

Karena  $M = \bigoplus N_i$ ,  $N_i = \bigoplus N_{ij}$  dan  $P_i \in N_{ij}$ .

Padahal sudah diketahui bahwa  $N_1, N_2, \dots, N_k$  bebas.

Maka:

$P_1, P_2, P_3, \dots, P_k$  bebas.

Dengan kata lain  $N_{11}, \dots, N_{1r_1}, N_{21}, \dots, N_{2r_2}, N_{k1}, \dots, N_{kr_k}$  juga bebas.

**Teorema 6**

Misal  $M = \bigoplus N_i$ ,

Dengan  $N_i$  submodul  $M$ .

Jika:

$$L_1 = N_1 + \cdots + N_{r_1}, L_2 = N_{r_1+1} + \cdots + N_{r_1+r_2}$$

$$\dots, L_k = N_{r_1+r_2+\dots+1} + \cdots + N_k .$$

Maka  $M = \bigoplus L_i$ .

Begitu juga jika  $N_i = \bigoplus N_{ij}$ , untuk setiap  $i = 1, 2, \dots, k$  dan setiap

$$j = 1, 2, \dots, r_i . \text{ maka } M = \bigoplus N_{ij} .$$

(Jacobson, 1991:178)

Bukti:

Diketahui  $M = \bigoplus N_i$ , dengan  $N_i$  submodul  $M$ .

Dan

$$L_1 = N_1 + \cdots + N_{r_1}$$

$$L_2 = N_{r_1+1} + \cdots + N_{r_1+r_2}$$

⋮

⋮

$$L_k = N_{r_1+r_2+\dots+1} + \cdots + N_k$$

Akan dibuktikan bahwa  $M = \bigoplus L_i$ .

Berdasarkan definisi penjumlahan langsung dalam pada submodul jika

$$M = \bigoplus N_i \text{ maka berlaku:}$$

$$\begin{aligned}
M &= N_1 + \cdots + N_k \\
&= N_1 + N_2 + \cdots + N_{r_1} + N_{r_1} + \cdots + N_{r_1+r_2} + \cdots + N_{r_1+r_2+\dots+1} + \cdots + N_k \\
&= \underbrace{N_1 + N_2 + \cdots + N_{r_1}}_{L_1} + \underbrace{N_{r_1+1} + \cdots + N_{r_1+r_2}}_{L_2} + \cdots + \underbrace{N_{r_1+r_2+\dots+1} + \cdots + N_k}_{L_k} \\
&= L_1 + L_2 + \cdots + L_k \\
&= \oplus L_i
\end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa  $M = \oplus L_i$ .

Sekarang akan dibuktikan bahwa  $M = \oplus N_{ij}$ , dan sudah diketahui bahwa

$$N_i = \oplus N_{ij} \text{ untuk } i = 1, 2, \dots, k \text{ dan untuk } j = 1, 2, \dots, r_i.$$

Seperti di atas tadi  $N_i = \oplus N_{ij}$ , dan

$$N_1 = N_{11} + N_{12} + \cdots + N_{1r_1}$$

$$N_2 = N_{21} + N_{22} + \cdots + N_{2r_2}$$

$\vdots$

$$N_k = N_{k1} + N_{k2} + \cdots + N_{kr_k}$$

Maka akan berlaku sama seperti  $M = \oplus N_i$ , yaitu:

$$\begin{aligned}
M &= N_1 + \cdots + N_k \\
&= N_{11} + N_{12} + \cdots + N_{1r_1} + N_{21} + N_{22} + \cdots + N_{2r_2} + \cdots + N_{k1} + N_{k2} + \cdots + N_{kr_k} \\
&= \underbrace{N_{11} + N_{12} + \cdots + N_{1r_1}}_{N_1} + \underbrace{N_{21} + N_{22} + \cdots + N_{2r_2}}_{N_2} + \cdots + \underbrace{N_{k1} + N_{k2} + \cdots + N_{kr_k}}_{N_k} \\
&= \oplus N_{ij}
\end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa  $M = \oplus N_{ij}$

## BAB IV

### PENUTUP

#### 4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan mengenai penjumlahan langsung pada modul, penulis dapat menyimpulkan bahwa:

1. Penjumlahan langsung pada modul ada dua jenis, yaitu penjumlahan langsung luar dan penjumlahan langsung dalam. Penjumlahan langsung luar yaitu perkalian langsung dari kumpulan modul  $M_i$  yang memuat  $n$ -tuples  $(m_1, m_2, \dots, m_n)$  dengan  $m_i \in M_i$  dan biasanya di notasikan dengan:  $M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_n$  atau  $\bigoplus_{i=1}^n M_i$ . Sedangkan penjumlahan langsung dalam yaitu penjumlahan langsung dari kumpulan submodul dsri modul  $M$  dengan memenuhi sarat cukup dan sarat perlunya, penjumlahan langsung dalam dapat ditulis dengan  $M = N_1 \oplus N_2 \oplus \dots \oplus N_k$ . atau  $M = \bigoplus N_i$ . Karena penjumlahan langsung dalam isomorfik dengan penjumlahan langsung luar maka notasi yang digunakan sama yaitu  $\oplus$ .
2. Sifat-sifat penjumlahan langsung pada modul meliputi.
  - i. Misal  $N_1, N_2, \dots, N_k$  adalah submodul-submodul bebas  $M$ . Maka akan berlaku jika  $\sum_1^k n_i = \sum_1^k m_i$ , maka  $n_i = m_i$  dengan  $n_i, m_i \in N_i$  untuk setiap  $i = 1, 2, \dots, k$ .
  - ii. Misal  $N_1, N_2, \dots, N_k$  adalah submodul-submodul bebas  $M$ . akan berlaku jika:

$$L_1 = N_1 + \cdots + N_{r_1}, L_2 = N_{r_1+1} + \cdots + N_{r_1+r_2},$$

$$L_3 = N_{r_1+r_2+1} + \cdots + N_{r_1+r_2+r_3}, \dots, L_t = N_{r_1+r_2+r_3+\dots+1} + \cdots + N_k, \quad \text{maka}$$

$L_1, L_2, L_3, \dots, L_t$  adalah bebas.

- iii. Misal  $N_1, N_2, \dots, N_k$  adalah bebas, dan  $N_i = N_{i1} \oplus N_{i2} \oplus \cdots \oplus N_{ir_i}$  untuk  $i = 1, 2, \dots, k$ . Akan berlaku jika  $N_{ij}$  adalah submodul-submodul  $N_i$  dengan  $j = 1, 2, \dots, r_i$ . maka submodul-submodul  $N_{11}, \dots, N_{1r_1}, N_{21}, \dots, N_{2r_2}, N_{n1}, \dots, N_{nr_n}$  adalah bebas.

- iv. Misal  $M = \bigoplus N_i$ , Dengan  $N_i$  submodul  $M$ , Jika:  
 $L_1 = N_1 + \cdots + N_{r_1}, \quad L_2 = N_{r_1+1} + \cdots + N_{r_1+r_2},$   
 $\dots, L_k = N_{r_1+r_2+\dots+1} + \cdots + N_k$ , Maka  $M = \bigoplus L_i$ . Begitu juga jika  $N_i = \bigoplus N_{ij}$  maka  $M = \bigoplus N_{ij}$ , untuk setiap  $i = 1, 2, \dots, k$ . dan setiap  $j = 1, 2, \dots, r_i$ .

#### 4.2 Saran

Dalam skripsi ini hanya menjelaskan tentang penjumlahan langsung pada modul dan sifat-sifat penjumlahan langsung suatu modul. Setelah penulis menjelaskan tentang penjumlahan langsung pada modul dan sifat-sifatnya, maka disarankan kepada peneliti yang lain untuk mengadakan penelitian secara umum, yaitu keterkaitan antara modul bebas dengan modul mengenai sifat-sifat penjumlahan langsung pada modul

## DAFTAR PUSTAKA

- Abdusysykir. 2006. *Ada Metematika Dalam Al-Qur'an*. Malang: UIN Press
- Abdusysykir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Press
- Battacharya, P.B. dkk. 1994. *Basic Abstract Algebra*. New York: Cambridge University Press.
- Dummit. David S dan Foote. Richard M. 1991. *Abstract Algebra*. New York: Prentice- Hall International, Inc.
- Hartley, B dan Hawkes, T.O. 1970. *Rings, Modules and Linear Algebra*. London: Chapman dan Hall LTD.
- Kusaeri dan Abidin, Zainal. 2003. *Struktur Aljabar*. Malang: UNISMA Malang.
- Raisinghania, M, D. dan Aggarwal, R, S. 1980. *Modern Algebra*. New Delhi: Ram Nager.
- Soebagio A, Suharti dan Sukirman. 1994. *Struktur Aljabar*. Jakarta: Universitas Terbuka.



**DEPARTEMEN AGAMA RI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN)  
MALIK IBRAHIM MALANG  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang (0341)551345  
Fax. (0341)572533**

### **BUKTI KONSULTASI SKRIPSI**

Nama : Yunita Wildaniati  
NIM : 05510001  
Fakultas/ Jurusan : Sains Dan Teknologi/ Matematika  
Judul skripsi : Penjumlahan Langsung Pada Modul  
Pembimbing I : Abdussakir, M.Pd  
Pembimbing II : Ahmad Barizi, M.A

No	Tanggal	HAL	Tanda Tangan	
1	21 April 2009	Proposal	1.	
2	27 April 2009	ACC Proposal		2.
3	06 Mei 2009	Konsultasi BAB III	3.	
4	12 Mei 2009	Revisi BAB III		4.
5	19 Mei 2009	Revisi BAB III	5.	
6	26 Mei 2009	Konsultasi BAB I dan II		6.
7	15 Juni 2009	Kajian Keagamaan	7.	
8	30 Juni 2009	Revisi Keagamaan		8.
9	03 Juli 2009	Revisi Keagamaan	9.	
10	06 Juli 2009	Revisi BAB I dan II		10.
11	10 Juli 2009	ACC Keagamaan	11.	
12	13 Juli 2009	ACC BAB I, II, dan III		12.
13	15 Juli 2009	ACC Keseluruhan	13.	

Malang, 15 Juli 2009  
Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M.Si  
NIP. 150 318 321