ESTIMATOR TAK BIAS TERBAIK PADA FUNGSI DISTRIBUSI KONTINU DENGAN TEOREMA BATAS BAWAH RAO CRAMER

SKRIPSI

Oleh :

IZZAH FANANI RUSYDA
NIM. 02510024

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2009

ESTIMATOR TAK BIAS TERBAIK PADA FUNGSI DISTRIBUSI KONTINU DENGAN TEOREMA BATAS BAWAH RAO CRAMER

SKRIPSI

Diajukan Kepada:

Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri (UIN)
Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan Dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh :

IZZAH FANANI RUSYDA
NIM. 02510024

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2009

ESTIMATOR TAK BIAS TERBAIK PADA FUNGSI DISTRIBUSI KONTINU DENGAN TEOREMA BATAS BAWAH RAO CRAMER

SKRIPSI

Oleh :

IZZAH FANANI RUSYDA
NIM. 02510024

Telah disetujui oleh:

Dosen Pembimbing ,

Usman Pagalay.M,Si
NIP. 150 327 240

Tanggal: 25 Juli 2009

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M. Si
NIP. 150 318 321

ESTIMATOR TAK BIAS TERBAIK PADA FUNGSI DISTRIBUSI KONTINU DENGAN TEOREMA BATAS BAWAH RAO CRAMER

SKRIPSI

Oleh :

IZZAH FANANI RUSYDA
NIM. 02510024

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal:
28 Juli 2009

Susunan Dewan Penguji:		Tanda Tangan
1. Penguji Utama	: Sri Harini, M.Si NIP.150 318 321	( )
2. Ketua	: Abdussakir, M.Pd NIP.150 327 247	( )
3. Sekretaris	: Usman Pagalay, M.Si NIP.150 327 240	( )

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M. Si
NIP. 150 318 321

Motto

"Barang siapa yang mengerjakan kebaikan seberat dzarrahpun, niscaya dia akan melihat (balasan) nya. Dan barang siapa yang mengerjakan kejahatan seberat dzarrahpun, niscaya dia akan melihat (balasan) nya pula"

(Q.S. Az-Zalzalah: 7-8)

"Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan. Maka apabila kamu telas selesai (dari sesuatu urusan), kerjakanlah dengan sunguh-sungguh (urusan yang lain) dan hanya kepada Tuhanmulah hendaknya kamu berharap" (Qs. Alam Nasyrah, ayat 6-8)

SURAT PERNYATAAN
ORISINALITAS PENELITIAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama	: IZZAH FANANI RUSYDA
NIM	: 02510024
Fakultas/Jurusan	: Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Penelitian	: Estimator Tak Bias Terbaik pada Fungsi Distribusi Kontinu dengan Teorema Batas Bawah Rao Cramer

Menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa hasil penelitian yang saya tulis ini tidak terdapat unsure-unsur penjiplakan karya penelitian atau karya ilmiah yang pernah dilakukan atau dibuat oleh orang lain, kecuali yang secara tertulis dikutip dalam naskah ini dan disebutkan dalam sumber kutipan dan daftar pustaka.

Apabila ternyata hasil penelitian ini terbukti terdapat unsur-unsur jiplakan, maka saya bersedia untuk mempertanggung jawabkan, serta diproses sesuai peraturan yang berlaku.

Malang, 28 Juli 2009
Yang Membuat Pernyataan.

IZZAH FANANI RUSYDA
NIM. 02510024

PERSEMBAHAN

Skripsi ini aku persembahkan kepada:

Ayah Bunda tercinta dan kakak-kakakku serta yang terhormat kedua mertua yang selalu memberikan motivasi dan mendoakan kesuksesanku.

Suami tercinta Mas'udin Eko Wahyudi dan ananda tersayang Wani Prasojo Rusyda Wahyudi, yang selalu menemani serta memberi motivasi dan semangat dalam meyelesaikan tugas akhir.

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadirat Ilahi Rabbi yang senantiasa memberikan rahmat, taufiq, hidayah serta inayah-Nya kepada kita, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini sebagai syarat untuk mendapatkan gelar sarjana sains dengan judul **” Estimator Tak bias Terbaik Pada fungsi Distribusi kontinu dengan Teorema Batas Bawah Cramer-Rao”.**

Shalawat serta salam semoga tetap tercurahkan kepada Baginda Rasul Muhammad SAW yang telah mengangkat kita dari jurang kenistaan menuju samudera yang terang benderang yakni agama Islam.

Kesekian kalinya penulis haturkan terima kasih kepada berbagai pihak yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini. Berhasilnya proses penyusunan skripsi ini juga tak lepas dari tanggung jawab, bimbingan, motivasi dan segala macam bantuan dari mereka baik moril maupun materiil. Oleh karena itu pada kesempatan ini penulis sampaikan terimakasih kepada:

1. Bapak Prof. Dr. H. Imam Suprayogo selaku Rektor Universitas Islam Negeri Malang.
2. Bapak Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU., D.Sc. selaku Dekan Fakultas Saintek.
3. Bapak Usman Pagalay, M.Si sebagai dosen Pembimbing yang telah mngorbankan waktunya untuk membimbing, mengarahkan, dan memberikan masukan hingga terselesainya skripsi ini.
4. Ibu Sri Harini, M.Si selaku Ketua Jurusan Matematika.
5. Kedua orang tua penulis yang senantiasa mendoakan kesuksesan bagi penulis.

6. Suami tercinta Mas’udin Eko Wahyudi tercinta dan putra tersayang Wani Prasojo Rusyda Wahyudi, yang selalu memberi motivasi dan selalu menemani selama proses penulisan skripsi hingga selesai
7. Para sahabat khususnya Gus Ahmad Rodhi yang telah membantu dan memberi saran atas penulisan skripsi ini hingga selesai.

Kepada semua pihak yang telah membantu dalam penyelesaian laporan ini kami ucapkan terimakasih, semoga Allah memberikan imbalan atas segala kebaikannya dan dicatat sebagai amal yang sholeh. Amin.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih terdapat kekurangan, sehingga penulis mengharapkan saran dan kritik yang konstruktif demi kesempurnaan skripsi ini.

Akhirnya penulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat, khususnya bagi penulis dan pembaca pada umumnya. Amin Ya Rabbal Alamin.

Malang, 25 Juli 2009

Penulis

Izzah Fanani Rusyda
Nim: 02510024

DAFTAR ISI

ABSTRAK

Rusyda, Izzah Fanani. 2009. *Estimator Tak Bias Terbaik pada Fungsi Distribusi Kontinu dengan Teorema Batas Bawah Cramer Rao*, Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: Usman Pagalay, M.Si

Kata kunci: Fungsi distribusi, keluarga eksponsial, Estimasi maksimum, Cramer-Raou Lower Bound (CRLB), estimator tak bias terbaik (UMVUE)

Dalam statistik matematika, suatu distribusi dikatakan eksponsial, apabila fungsi densitas peluangnya dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$f\left(x|\theta\right)=h\left(x\right)\mathrm{c}\left(\theta\right)\exp\left[\sum_{i=1}^{n} wi\left(\theta\right)ti\left(x\right)\right].$$

Adapun yang termasuk dalam fungsi distribusi eksponensial adalah distribusi diskret dan distribusi kontinu. distribusi diskret mencakup distribusi Bernoulli, distribusi poisson, dan distribusi binomial. Sedangkan distribusi kontinu mencakup distribusi normal, distribusi eksponensial,distribusi gamma, distribusi seragam, distribusi beta, distribusi normal baku, distribusi khi kuadrat, dan distribusi weibul

Fungsi distribusi yang dibahas adalah fungsi distribusi kontinu yaitu distribusi normal, distribusi eksponensial, distribusi gamma.Dari fungsi distribusi tersebut dapat dicari estimasi parameter berbagai metode, salah satunya dengan menggunakan metode maksimum Likelihood. Untuk menentukan ukuran kebaikan suatu estimator pada distribusi eksponensial, dapat digunakan Teorema Cramer-Rao Lower Bound.

Batas bawah Cramer-Rao atau Cramer-Rao lower bound (CRLB) untuk variansi θ adalah.

$$Var(T)\geq\frac{[g'(\theta)]^2}{-nE\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln f(X|\theta)\right]}\ g(\theta)=\theta; g'(\theta)=1$$

Sebelum menentukan variansi θ terlebih dahulu dibuktikan ketakbiasan esminator θ, dengan ketentuan: statistik θ dikatakan estimator tak bias parameter θ bila $\mathrm{E}\left(\theta\right)=\theta$. Jika estimator θ adalah estimator tak bias, dapat diilanjutkan menentukan variansi θ. Estimator tak bias terbaik (UMVUE) diperoleh jika setiap estimator tak bias mencapai batas bawah variansi.

Beberapa estimator distribusi kontinu yang didasarkan pada parameter dengan metode maksimum Likelihood mencapai batas bawah Cramer-Rao sehingga merupakan estimator tak bias terbaik (UMVUE).Namun tidak semua estimator distribusi eksponensial mencapai batas bawah Cramer-Rao sehingga bukan merupakan estimator tak bias terbaik (UMVUE).

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Salah satu permasalahan dalam statistika adalah pengambilan kesimpulan tentang karakteristik populasi berdasarkan informasi sampel. Hal ini dikarenakan tujuan dari pengunaan statistika adalah untuk mendapatkan kesimpulan dari populasi yang diamati. Dalam hal ini statistika inferensial sangat dibutuhkan selain statistika deskriptif. Statistika inferansial/induktif adalah bidang ilmu pengetahuan statistik yang mempelajari tata cara penarikan kesimpulan mengenai keseluruhan populasi berdasarkan data yang ada dalam suatu bagian dari populasi tersebut (Djarwanto dan Subagyo, 1996:1).

Pada ruang sampel suatu eksperimen dapat ditentukan probabilitas dari nilai-nilai variabel acak X, yang selanjutnya dapat digunakan untuk menentukan fungsi probabilitas X. Dari distribusi peluang tersebut, dapat ditetukan suatu fungsi distribusi tertentu dengan cara mengetahui eksperimen yang medasari.

Estimasi harga parameter merupakan salah satu cakupan statistika inferensial/induktif. Berbagai cara untuk mengestimasi parameter telah dipelajari dalam statistik matematika, misalnya Maksimum Likelihood, Metode Bayes, dan Metode Momen. Pada keluarga eksponensial dapat ditentukan estimasi paramter dengan menggunakan Metode Maksimum likelihood (Dewi, 2005:32). Namun nilai estimasi pada distribusi keluarga eksponensial dengan menggunakan Metode Maksimum Likelihood belum dapat dikatakan sebagai estimator yang baik.

Harus dilakukan suatu penyelidikan untuk menentukan bahwa estimator atau nilai estimasi likelihood pada distribusi keluarga eksponensial adalah estimator yang baik dengan berpedoman pada kriteria estimator yang baik. Ada dua kriteria yang harus dipenuhi untuk mendapatkan estimator terbaik yaitu tak bias dan mempunyai variansi minimum.

Penaksir yang tak bias dan bervariansi mnimum dinamakan penaksir terbaik (Sudjana, 1996:199). Estimator T^* di sebut estmator tak bias terbaik C bila $ET^* = g(\theta)$ dan untuk sebarang estimator lain T yang memenuhi $ET = g(\theta)$ maka berlaku $VarT^* \leq VarT$ untuk setiap θ. T^* disebut "estimator tak bias variansi minimum seragam" atau UMVUE dari $g(\theta)$ (Subanar,1996:36).

Untuk menentukan estimator tak bias terbaik bukanlah pekerjaan yang mudah, diperlukan penanganan yang menyeluruh. Salah satunya adalah melalui batas bawah Rao Cramer. Misalnya ingin dicari penaksir tak bias dengan ragam minimum dari $g(\theta)$, θ parameter sebaran tertentu. Dengan menggunakan ketidaksamaan Rao Cramer dapat ditentukan batas bawah variansi semua penaksir tak bias dari $g(\theta)$. Jika kemudian dapat ditemukan suatu statistik yang nilai harapannya sama dengan $g(\theta)$ dan ragamnya sama dengan batas bawah variansi yang ditentukan dari ketidaksamaan Rao Cramer, maka statistik ini adalah estimator tak bias dengan variansi minimum yang dicari.

Dengan demikian Teorema Batas Bawah Rao Cramer dapat juga di gunakan untuk menentukan estimator tak bias terbaik pada keluarga eksponensial. Sehingga berdasarkan uraian diatas, maka penulis mengambil judul *" Estimator Tak bias Terbaik Pada Fungsi Distribusi Kontinu dengan Teorema Batas Bawah Rao Cramer".*

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka dirumuskan permasalahan yaitu, bagaimana cara menentukan estimator tak bias terbaik pada fungsi distribusi kontinu dengan menggunakan Teorema Batas Bawah Rao Cramer .

1.3 Tujuan Penulisan

Dari rumusan masalah diatas, maka kajian ini bertujuan untuk menjelaskan atau mengkaji cara menentukan estimator tak bias terbaik pada fungsi distribusi kontinu dengan menggunakan Teorema Batas Bawah Rao Cramer.

1.4 Manfaaat Penulisan

Sebagaimana yang telah dikemukakan dalam latar belakang dan rumusan masalah, serta tujuan penulisan diatas, maka kajian ini diharapkan bagi penulis dan pembaca dapat bermanfaat dalam menambahkan pengetahuan yaitu dalam menentukan ekstimator tak bias terbaik pada fungsi distribusi kontinu dan juga menambah perbendaharaan pengetahuan untuk memperdalam bidang matematika khususnya, serta bidang-bidang lain pada umumnya. Kajian ini juga dapat dijadikan sebagai referensi bagi pembaca mengenai penentuan estimator tak bias terbaik pada fungsi distribusi kontinu dengan menggunakan Teorema Batas Bawah Rao Cramer, serta dapat digunakan sebagai tambahan wawasan disamping ilmu pengetahuan yang didapatkan dari bangku kuliah.

1.5 Batasan Masalah

Untuk membatasi permasalahan agar sesuai dengan yang dimaksud dan tidak menimbulkan permasalahan yang baru, maka pada penelitian ini dibatasi pada fungsi distribusi kontinu yang terdiri dari fungsi distribusi normal, eksponensial dan gamma. Sedangkan cara menentukan estimator tak bias terbaiknya dikerjakan secara manual tanpa menggunakan program.

1.6 Metode Kajian

Metode yang digunakan dalam pembahasan ini adalah menggunakan studi literatur atau studi kepustakaan . Pada pembahasan masalah diatas penulis mendapatkan materi atau bahan dalam bentuk informasi dari menghimpun literatur-literatur yang termuat dalam teks book. Selanjutnya, penulis mempelajari semua materi atau bahan yang terkumpul yaitu tentang fungsi distribusi kontinu, estimator tak bias atau UMVUE estimator dan Teorema Batas Bawah Rao Cramer.

Adapun pengujian hasil pembahasan, dalam hal ini dilakukan dengan cara mengkomunikasikan atau mendiskusikan hasil pembahasan dengan para ahli di bidang matematika, khususnya dosen pembimbing sehingga akan dihasilkan gambaran pembahasan yang jelas sebagaimana yang diharapkan.

BAB II

KAJIAN TEORI

Pada kajian teori akan dibahas beberapa teori yang menunjang pembahasan pada bab selanjutnya, yaitu mengenai fungsi distribusi, macam-macam fungsi distribusi, estimasi parameter, dan estimator tak bias terbaik (UMVUE).

Variabel acak X dibedakan menjadi dua jenis, yaitu varibel acak diskrit dan variabel acak kontinu. Variabel acak diskrit adalah variabel acak yang mempunyai nilai-nilai terhingga. Jadi, variabel acak diskrit X dapat bernilai $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \in R$. Sedangkan variabel acak kontinu adalah variabel acak yang nilai-nilainya tak terhingga. Jadi nilai-nilai vaiabel acak kontinu X dapat merupakan semua nilai dalam satu interval terhingga, yaitu (-∞,∞), dimana banyaknya bilangan yang terkandung pada interval tersebut adalah tak terhingga atau tak terbilang.

2.1 Fungsi Distribusi

2.1.1 Pengertian Fungsi Distribusi

Fungsi distribusi merupakan kumpulan himpunan berbagai asumsi dari pasangan nilai-pasangan nilai yang saling berhubungan tiap obyek dari variasi acak. Dalam hal diskret suatu fungsi distribusi dapat dinyatakan sebagai jumlah yang menyangkut fungsi peluang titik, sedangkan dalam hal kontinu suatu fungsi distribusi dapat dinyatakan sebagai integral dari apa yang disebut fungsi padat peluang.

Pada ruang sampel *S* yang merupakan kumpulan semua hasil yang mungkin terjadi, kita dapat menentukan probabilitas dari nilai-nilai variabel acak *X*, sebab titik sampel-tiik sampel *S* mempunyai nilai probabilitas. kumpulan pasangan nilai-nilai dari variabel acak *X*, yaitu *P*(*X* –*x*) di sebut distribusi probabilitas *X* atau fungsi peluang dan disingkat distribusi *X*, yang dapat dituliskan dalam bentuk tabel atau dalam bentuk pasangan terurut (Boediono dan Koster,2001:286).

Himpunan pasangan terurut $\{x, f(x)\}$ merupakan fungsi peluang atau distribusi peluang peubah acak diskrit *X* jika untuk setiap kemungkinan hasil *x* memenuhi:

1. $f(x) \geq 0$.

2 $\sum_x f(x) = 1$

3. $P(X = x) = f(x)$

Maka distribusi peluang dari X tersebut disebut distribusi peluang peubah àcak diskrit X (Walpole dan Myers, 1995:77).

Fungsi *f*(x) adalah distribusi peluang peubah acak kontinu X, yang didefinisikan di atas himpunan semua bilangan real R, bila:

1. $f(x) \geq 0$ *untuk semua* $x \in R$.

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

3. $P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)$ (Walpole dan Myers, 1995:85).

Dalam banyak soal diperlukan menghitung peluang bahwa nilai amatan peubah acak X akan lebih kecil atau sama dengan suatu bilangan real x. bila $F(x) = P(X \leq x)$ untuk setiap bilangan real x, maka $F(x)$ di sebut sebagai fungsi distribusi (kumulatif) peubah acak X (Walpole dan Myers, 1995;79)

Distribusi kumulatif $F(x)$ suatu peubah acak diskrit X dengan distribusi peluang $f(x)$ dinyatakan oleh:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} f(t)$$

Untuk $-\infty < x < \infty$ (Walpole dan Myers, 1995:79)

Distribusi kumulatif F(x) suatu peubah acak kontinu X dengan fungsi peluang $f(x)$ diberikan oleh:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

Untuk $-\infty < x < \infty$ (Walpole dan Myers, 1995:87)

2.1.2 Jenis-jenis Fungsi Distribusi

Bermacam-macam fungsi distribusi yang dapat digunakan menyatakan pasangan nilai-pasangan nilai yang merupakan distribusi keluarga eksponensial. Distribusi keluarga eksponensial mempunyai tanda kekeluargaan/ symbol keluarga, yaitu:

$f(x|\theta) = h(x)\,c(\theta)\exp\left[\sum_{i=1}^{n} wi(\theta)ti(x)\right]$ (Dewi, 2005:19).

Distribusi keluarga eksponensial sendiri terdiri dari beberapa fungsi distribusi, yaitu: fungsi distribusi deskrit (terhingga), dan fungsi distribusi kontinu (tak terhingga).

2.1.2.1 Fungsi Distribusi Deskrit

Fungsi distribusi dari suatu peubah acak X sembarang bermatra 1 sebagai $F_x(x)$ = P[$X \leq x$] untuk semua $x \in (-\infty, +\infty)$. Peubah acak seperti itu disebut diskret, pada dasarnya jika dan hanya jika (untuk semua x)

$$F_x(x) = \sum_{x' \leq x} Px(x') \quad dengan \quad Px(x') > 0$$

Fungsi distribusi deskrit (terhingga) sendiri ada beberapa macam, antara lain:

a. Distribusi Bernoulli

Distribusi bernoulli diperoleh dari percobaan Bernoulli, yaitu suatu percobaan random yang hanya menghasilkan dua keluaran yang biasanya dikategorikan sebagai sukses $\{S\}$ dan gagal $\{G\}$. untuk masing-masing percobaan kita mendapatkan :

E_j = kejadian suatu percobaan (ke-j) dan diselidiki hasilnya

$S_j = \{S,G\}$

b. Distribusi Binomial

Distribusi binomial dihasilkan dan pengulangan percobaan Bernoulli (*p*) sebanyak *m* kali

c. Distribusi Poisson

Distribusi poisson adalah distribusi peluang peubah acak poisson X, yang menyatakan banyaknya sukses yang terjadi dalam suatu selang waktu atau daerah tertentu

2.1.2.2 Fungsi Distribusi Kontinu

Disebut peubah acak kontinu (mutlak) bila fungsi distribusi $F_x(x)$ dapat dinyatakan sebagai

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{x} fx(y)dy \quad (-\infty < x < +\infty)$$

Disini $f_x(y)$ menyatakan fungsi padat peluang (f.p.p) yakni menurut definisi, $f_x(y) \geq 0$ untuk semua y

dan $\int_{-\infty}^{\infty} fx(y)dy = 1$

Dalam *hal* ini $f_x(x)$ disebut fungsi distribusi kontinu (mutlak). Distribusi kontinu sendiri juga mempunyai beberapa macam, antara lain:

a. Distribusi Normal

b. Distribusi Eksponensial

c. Distribusi Gamma

d. Distribusi Seragam

e. Distribusi Beta

f. Distribusi Normal Baku

g. Distribusi Khi Kuadrat

h. Distribusi Weibul

Dalam penelitian ini difokuskan hanya pada fungsi distribusi kontinu yang mencakup distribusi normal, distribusi eksponensial dan distribusi gamma.

2.2 Fungsi Distribusi Kontinu

2.2.1 Distribusi Normal

Distribusi Normal adalah fungsi distribusi peubah acak normal *X*, dengan rataan μ dan variansi σ^2.

Bentuk fungsi densitasnya adalah:

$$f(x|\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}[(x-\mu)/\sigma]^2} \qquad -\infty < x < \infty$$

Distribusi normal merupakan salah satu anggota keluarga eksponensial,

karena $f(x|\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}[(x-\mu)/\sigma]^2}$

memenuhi syarat keluarga eksponensial, yaitu

$$f(x|\theta) = h\ (x)\,c\,(\theta)\exp\left[\sum_{i=1}^{n} wi(\theta)ti(x)\right]$$ (Dewi, 2005:25)

Teorema:

Distribusi Normal $(X|\mu, \sigma^2)$ mempunyai rataan dan variansi

$E(X) = \mu$ dan $Var(X) = \sigma^2$ (Walpole dan Myers, 1995 : 272)

2.2.2 Distribusi Eksponensial

Densitas distribusi eksponensial berhubungan erat dengan distribusi poisson, yaitu peubah acak kontinu berdistribusi eksponensial dengan parameter λ.

$f(t) = \lambda.e^{-\lambda,t}$.

Dimisalkan $\lambda = \dfrac{1}{\theta}$ dengan menyatakan variabel acak X mempunyai distribusi eksponensial, jika didefinisikan dengan:

$$f(x) = \frac{1}{\theta}e^{\frac{-x}{\theta}} \qquad x \geq 0$$

Dimana parameternya $\theta \geq 0$. Jadi, waktu sampai perubahan pertama dalam proses poisson mempunyai distribusi eksponensial dengan $\theta = \dfrac{1}{\lambda}$

$$f(x|\theta) = \frac{1}{\theta}e^{\frac{-x}{\theta}} \qquad x \geq 0$$

Distribusi eksponensial merupakan salah satu anggota keluarga eksponensial, karena

$$f(x) = \frac{1}{\theta} e^{\frac{-x}{\theta}}$$

memenuhi syarat keluarga eksponensial, yaitu

$$f(x|\theta) = h(x)\,c(\theta)\exp\left[\sum_{i=1}^{n} wi(\theta)ti(x)\right] \quad \text{(Dewi, 2005:26)}$$

Teorema:

Distribusi Eksponensial ($x \mid \Theta$) mempunyai rataan dan variansi:

$E(X) = \mu$ dan $Var(X) = \Theta^2$ (Walpole dan Myers, 1995 : 273)

2.2.3 Distribusi Gamma

Distribusi gamma adalah peubah acak kontinu X berdistribusi gamma, parameter a dan β, bila fungsi densitasnya berbentuk:

$$f(x) = \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} \qquad x > 0$$

Dimisalkan $\beta = \Theta$ sehingga menjadi

$$f(x|\theta,\alpha) = \frac{1}{\theta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\theta} \qquad x > 0$$

Distribusi gamma merupakan salah satu anggota keluarga eksponensial, karena

$$f(x|\theta,\alpha) = \frac{1}{\theta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\theta}$$

memenuhi syarat keluarga eksponensial, yaitu

$$f(x|\theta) = h(x)\,c(\theta)\exp\left[\sum_{i=1}^{n} wi(\theta)ti(x)\right] \qquad \text{(Dewi, 2005:27)}$$

Teorema:

Distribusi gamma $(x|\theta,\alpha)$ mempunyai rataan dan variansi $E(X) = \mu$ dan $Var(X) = \theta\alpha^2$ (Walpole dan Myers, 1995 : 272)

2.3 Estimasi Parameter

2.3.1 Pengertian Estimasi Parameter

Melakukan estimasi berarti menakar keadaan parameter dengan menggunakan statistik. Dari sebuah populasi dapat diperoleh berbagai macam parameter, demikian juga dari suatu sample juga dapat dihitung statistiknya. Oleh karena itu dengan sebuah sample dapat ditaksir dengan berbagai macam parameter, yang perlu diperhatikan adalah bahwa statistik penaksir itu harus sejenis dengan parameternya.

Pada umumnya estimasi parameter menempuh langkah-langkah sebagai berikut:

a. Menetapkan besaran parameter yang akan diestimasi
b. Memilih kerangka estimasi, yaitu distribusi sampling yang sejenis dengan besaran parameter yang akan diestimasi
c. Menentukan taraf kepercayaan
d. Proses perhitungan
e. Membuat kesimpulan berdasarkan proses perhitungan

Statistik induktif atau inferensial adalah proses memperoleh informasi dari data sampel yang digunakan untuk menarik kesimpulan tentang populasi dari sampel yang dipilih. Teknik statistik induktif dapat dibagi dalam dua bagian besar, yaitu estimasi parameter dan pengujian hipotesis. Namun, dalam pembahasan ini hanya mengenai estimasi parameter. Cara-cara mengestimasi parameter ada tiga metode, yaitu metode Momen, metode bayes, dan metode maksimum Likelihood.

Suatu estimasi dari suatu parameter populasi θ adalah suatu nilai tunggal $\hat{\theta}$ dari suatu titik $\hat{\theta}$ (Walpole dan Myers, 1995 : 226). Untuk lebih jelasnya, jika $X_1, X_2, \ldots\ldots\ldots, X_n$ sebuah sampel random yang besarnya n dari X, maka statistik $\hat{\theta} = n(X_1, X_2, \ldots\ldots\ldots, X_n)$ yang berhubungan dengan θ disebut estimator θ. Perhatikan bahwa estimator $\hat{\theta}$ adalah sebuah variabel random, karena estimator tersebut merupakan sebuah fungsi data sampel. Setelah sampel di pilih, $\hat{\theta}$ diperoleh berdasarkan nilai tertentu yang disebut estimasi tunggal θ.

Proses penarikan kesimpulan dari suatu sampel disebut sampling. Salah satu alasan dasar untuk sampling adalah bahwa informasi yang terkandung dalam sampel berguna untuk mengestimasi parameter populasi (Bruce dan Clifford, 1990:91).

2.3.2 Jenis-Jenis Metode Estimasi

Dalam estimasi parameter terdapat tiga metode estimasi, yaitu: metode momen, metode maksimum, dan metode bayes.

2.3.2.1 Metode Momen

Dalam metode momen sendiri terdiri dari dua macam, yaitu metode momen I dan metode momen II.

a. Metode momen 1

Misalkan $x^1, x^2, \ldots x^n$ sampel random dari populasi dengan densitas $f(x|\theta^1, \ldots \theta^k)$

$m^1 =$, $\mu^1 = E(X)$

$m^2 =$, $\mu^2 = E(X^2)$

$m^k =$, $\mu^k = E(X^k)$

b. Metode momen II

Estimator metode momen $(\hat{o}^1, \ldots, \hat{o}^k)$ dari $(\theta^1, \ldots, \theta^K)$ didapat dengan menyelesaikan sistem persamaan

$m^1 = \mu^1(\theta^1, \ldots, \theta^K)$

$m^2 = \mu^2(\theta^1, \ldots, \theta^K)$

$m^{k =} \mu^K(\theta^1, \ldots, \theta^K)$

2.3.2.2 Metode Maksimum Likelihood

Sejauh ini metode maksimum likelihood adalah metode yang paling populer dalam menghasilkan estimasi. Misalkan $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ adalah sampel dan populasi dengan densitas $f(X_1 \mid \Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_n)$ dimana parameter tunggal 0 tidak diketahui. Misalkan $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ menjadi nilai yang diobservasi didalam suatu sampel random yang besarnya *n,* maka fungsi likelihood didefinisikan sebagai:

$$L(\theta \mid X) = L(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n \mid X_1, X_2, \ldots, X_n) = f(x_1, \theta), \ldots, f(x_n, \theta)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} f(X_i \mid \theta_1, \ldots, \theta_n)$$

Definisi:

Untuk setiap titik sampel, misalkan adalah harga parameter dimana $L(\theta \mid X)$ sebagai fungsi θ dengan menganggap X konstan mencapai maksimumnya. estimasi maksimum likelihood dari parameter berdasarkan sampel X adalah $\hat{\theta}$ (X) (Subanar, 1996:23)

Perhatikan bahwa dari konstruksinya, jelajah dari estimasi maksimum likelihood berimpit dengan jelajah dari parameter. Secara intuitif, estimasi maksimum likelihood adalah estimasi yang masuk akal, karena estimasi maksimum likelihood adalah titik parameter dengan sampel terobservasi paling mungkin terjadi.

Jika fungsi likelihood terdefinisikan (dalam θ_1) maka calon estimasi maksimum likelihood yang mungkin adalah harga-harga (Θ_1, Θ_2,…, Θ_k) sedemikian hingga

$$\frac{\partial \ln L(\theta|X)}{\partial \theta_i} = 0; i = 1,2,.....,k$$

2.4 Estimator Tak Bias Terbaik (UMVUE)

Suatu estimasi titik dari suatu parameter populasi θ adalah suatu nilai tunggal θ dari suatu titik $\hat{\theta}$ (Walpole dan Myers 1995:226). Sehingga dapat dilakukan estimasi dengan berbagai metode yang sudah tersedia. Tidak diharapkan suatu estimator akan mengestimasi parameter tanpa kesalahan. Tidak beralasan mengharapkan $\overline{X}$ akan menaksir μ dengan tepat, tetapi tentunya diharapkan bahwa estimator yang dihasilkan tidak terlalu jauh menyimpang. Agar dapat melakukan pemilihan metode estimasi parameter yang baik, maka diberikan kriteria dan syarat-syarat untuk mendapatkan estimator terbaik. Estimator terbaik adalah estimator yang bersifat tak bias dan bervariansi minimum (Sudjana. 1996:199)

Definisi:

Statistik $\hat{\theta}$ dikatakan estimator tak bias parameter θ bila $E(\hat{\theta})=\theta$ (Walpole dan Myers, 1995:388).

Definisi:

Estimator bervariansi minimum ialah estimator dengan variansi terkecil diantara semua estimator untuk parameter yang sama. Jika $\hat{\theta}_1$ dan $\hat{\theta}_2$ dua estimator untuk θ dimana variansi untuk $\hat{\theta}_1$ lebih kecil dari variansi untuk $\hat{\theta}_2$, maka $\hat{\theta}_1$ merupakan penaksir bervariansi minimum (Sudjana,1996:199).

Definisi:

Estimator T^* disebut estimator tak bias terbaik untuk $g(\theta)$ bila $ET^* = g(\theta)$ dan untuk sebarang estimator lain T yang memenuhi $ET = g(\theta)$ maka berlaku $VarT^* \leq VarT$ untuk setiap θ. T^* disebut "estimator tak bias variansi minimum seragam" atau "a unifonn minimum variance unbiased estimator" atau UMVUE dan $g(\theta)$ (Subanar, 1996:36).

Untuk menentukan estimator tak bias terbaik diperlukan penanganan yang menyeluruh. Salah satunya adalah melalui batas bawah Rao Cramer (Cramer-Rao Lower Bound / CRLB). Misalkan dalam melakukan estimasi $g(\theta)$ dari densitas $f(x|\theta)$ ditentukan estimator tak bias, kemudian dapat ditentukan batas bawah variansi dari setiap estimator tak bias. Katakanlah $b(\theta)$, maka setiap estimator tak bias yang mencapai batas bawah variansi ini adalah estimator tak bias terbaik dari $g(\theta)$ (Subanar, 1996:36).

Teorema:

Jika T adalah sebuah estimator tak bias dari $g(\theta)$, maka batas bawah Rao Cramer atau Cramer-Rao Lower Bound (CRLB) untuk variansi T pada sebuah sampel random adalah,

$$Var(T) \geq \frac{[g'(\theta)]^2}{-nE\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(X|\theta)\right]^2}, g(\theta)=\theta; g'(\theta)=1$$

(Bain dan Engelhardt, 1991:305)

Bukti:

Diberikan fungsi yang didefinisikan dengan

$$u(x_1,......,x_n|\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x_1,......,x_n|\theta)$$

Juga dapat dituliskan

$$u(x_1,......,x_n|\theta) = \frac{1}{f(x_1,....,x_n|\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x_1,......,x_n|\theta)$$

Jika didefinisikan sebuah variabel random $U = u\,(x_1,...,x_n \mid \Theta)$, maka

$$E(U) = \int...\int u(x_1,....,x_n|\theta) f(x_1,....,x_n|\theta)dx_1...dx_n$$

$$= \int...\int \frac{\partial}{\partial\theta} f(x_1,....,x_n|\theta)dx_1...dx_n$$

$$= \frac{\partial}{\partial\theta}\int...\int f(x_1,....,x_n|\theta)dx_1...dx_n$$
$$= \frac{d}{d\theta}1$$
$$= 0$$

Catat juga bahwa jika $T = l$ (X_1 ,...,X_n) adalah estimator tak bias untuk $g(\theta)$, maka

$g(\Theta) = E(T) = \int\ldots\int l(x_1,\ldots,x_n \mid \Theta)\, f(x_1,\ldots,x_n \mid \Theta)\, dx_1\ldots dx_n$

Jika didefferensialkan terhadap θ, maka

$$g'(\Theta) = \int\ldots\int l(x_1,\ldots,x_n \mid \Theta)\, \frac{\partial}{\partial\theta} f(x_1,\ldots,x_n \mid \Theta)\, dx_1\ldots dx_n$$

$$= \int\ldots\int l(x_1,\ldots,x_n \mid \Theta)\, u(x_1,\ldots,x_n)\, f(x_1,\ldots,x_n \mid \Theta)\, dx_1\ldots dx_n$$

$$= E(TU)$$

Mengikuti $E(U) = 0$,maka $Var(U) = E(U^2)$ dan $Cov(T,U) = E(TU)$

Dengan memakai ketaksamaan Cauchy-Schwrz, maka berlaku:

$[Cov(T,U)]^2 \leq Var(T)\, Var(U)$

Bila ketaksamaan itu disusun kembali, akan didapatkan batas bawah dari variasi T.

$$Var(T) \geq \frac{[Cov(T,U)]^2}{Var(U)}$$

$$Var(T) \geq \frac{[g'(\theta)]^2}{E\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(X_1,\ldots,X_n|\theta)\right]^2}$$

Ketika $X_{1,\ldots}X_n$ mewakili sebuah sampel random,

$f(x_1,\ldots,x_n \mid \Theta) = f(x_1 \mid \Theta),\ldots.f(x_1 \mid \Theta)$

Sehingga

$$u(x_1,\ldots,x_n \mid \Theta) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial\theta} \ln f(x_i|\theta)$$

Dalam kasus ini,

$$E(U^2) = Var(U) = nVar\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(X|\theta)\right] = nE\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(X|\theta)\right]^2$$

Jadi $Var(T) \geq \dfrac{[g'(\theta)]^2}{E\left[\dfrac{\partial}{\partial\theta}\ln f(X_1,\dots,X_n|\theta)\right]^2}$

$$Var(T) \geq \frac{[g'(\theta)]^2}{E\left[\dfrac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x|\theta)\right]^2}$$

Teroma terbukti.

Yang perlu di ketahui, bahwa:

$$E\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(X|\theta)\right]^2 = -E\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln f(X|\theta)\right]$$

(Bain dan Engelhardt 1991:306).

Sehingga

$$Var(T) \geq \frac{[g'(\theta)]^2}{-nE\left[\dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln f(X|\theta)\right]}, g(\theta) = \theta; g'(\theta) = 1$$

BAB III

PEMBAHASAN

Dalam bab ini akan dibahas tentang aplikasi Teorema Batas Bawah Rao Cramer untuk menentukan estimator tak bias terbaik pada fungsi distribusi kontinu. Fungsi distribusi kontinu yang diambil dalam penelitian ini terbatas pada distribusi Normal, distribusi Eksponensial dan distribusi Gamma.

3.1 Distribusi Normal

Pada bab sebelumnya telah dijelaskan bahwa fungsi distribusi peluang dari distribusi normal dengan parameter μ, σ^2 adalah:

$$f(x|\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}[(x-\mu)/\sigma]^2} \qquad -\infty < x < \infty$$

Estimator Maksimum Likelihood adalah

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \overline{X}$$

Untuk menentukan estimator tak bias terbaik (UMVUE) dari μ , terlebih dulu akan ditentukan nilai dari:

$$\frac{[g'(\mu)]^2}{-nE\left[\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}\ln f(X|\mu)\right]},$$

kemudian dibuktikan bahwa estimator $\hat{\mu}$ adalah estimator tak bias.

Jika estimator $\hat{\mu}$ adalah estimator tak bias, maka langkah selanjutnya adalah menentukan variansi dari estimator $\hat{\mu}$. Estimator tak bias terbaik (UMVUE) diperoleh jika setiap estimator tak bias mencapai batas bawah variansi.

Batas Bawah Rao Cramer atau Cramer-Rao Lower Bound (CRLB) untuk variansi μ adalah,

$$Var(\hat{\mu}) \geq \frac{[g'(\mu)]^2}{-nE\left[\frac{\partial^2}{\partial \mu^2} \ln f(X|\mu)\right]}, g(\mu) = \theta; g'(\mu) = 1$$

$$f(x|\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}[(x-\mu)/\sigma]^2} \qquad -\infty < x < \infty$$

$$f(x|\mu, \sigma^2) = \ln \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} + \ln e^{-\frac{1}{2}[(x-\mu)/\sigma]^2}$$

$$= \ln \sigma^{-1} + \ln\left(\sqrt{2\pi}\right)^{-1} + \ln e^{-\frac{1}{2}[(x-\mu)/\sigma]^2}$$

$$= -\ln \sigma - \ln\left(\sqrt{2\pi}\right) - \left[\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \ln e$$

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \ln f(x|\mu, \sigma^2) = 0 - 0 - 0 + \frac{2x}{2\sigma^2} - \frac{2\mu}{2\sigma^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \ln f(x|\mu, \sigma^2) = \frac{x}{\sigma^2} - \frac{\mu}{\sigma^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \mu^2} \ln f(x|\mu, \sigma^2) = -\frac{1}{\sigma^2}$$

$$E\left[\frac{\partial^2}{\partial \mu^2} \ln f(x|\mu, \sigma^2)\right] = E\left[-\frac{1}{\sigma^2}\right]$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}$$

$$\frac{[g'(\mu)]^2}{-nE\left[\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}\ln f(X|\mu)\right]} = \frac{1}{-n\left[-\frac{1}{\sigma^2}\right]}$$

$$= \frac{\sigma^2}{n}$$

Pembuktian ketakbiasan estimator $\hat{\mu}$:

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \overline{X}$$

$$E(\hat{\mu}) = E(\overline{X})$$

$$= \mu$$

Karena $E(\hat{\mu}) = E(\overline{X}) = \mu$ memenuhi syarat estimator tak bias yaitu $E(\hat{\theta}) = \theta$ maka $\hat{\mu} = \overline{X}$ adalah estimator tak bias.

$$Var(\hat{\mu}) = Var(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Estimator tak bias $\hat{\mu} = \overline{X}$ mencapai batas bawah variansi, yaitu :

$$Var(\hat{\mu}) \geq \frac{[g'(\mu)]^2}{-nE\left[\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}\ln f(X|\mu)\right]}$$

$$\frac{\sigma^2}{n} = \frac{\sigma^2}{n}$$

Sehingga

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \overline{X}$$ estimator tak bias terbaik (UMVUE) dari μ.

3.2 Distribusi Eksponensial

Pada bab sebelumnya telah dijelaskan bahwa fungsi distribusi peluang dari distribusi eksponensial dengan parameter θ adalah.

$$f(x|\theta) = \frac{1}{\theta} e^{\frac{-x}{\theta}} \qquad x \geq 0$$

Sedangkan Estimator Maksimum Likelihood adalah

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \overline{X}$$

Untuk menentukan estimator tak bias terbaik (UMVUE) dari θ, terlebih dulu akan ditentukan nilai dari

$$\frac{[g'(\theta)]^2}{-nE\left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln f(X|\theta)\right]},$$

kemudian dibuktikan bahwa estimator $\hat{\theta}$ adalah estimator tak bias.

Jika estimator $\hat{\theta}$ adalah estimator tak bias maka langkah selanjutnya adalah menentukan variansi dari estimator $\hat{\theta}$. Estimator tak bias terbaik (UMVUE) diperoleh jika setiap estimator tak bias mencapai batas bawah variansi.

Batas Bawah Rao Cramer atau Cramer-Rao Lower Bound (CRLB) untuk variansi $\hat{\theta}$ adalah:

$$Var(\hat{\theta}) \geq \frac{[g'(\theta)]^2}{-nE\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln f(X|\theta)\right]}, g(\theta)=\theta; g'(\theta)=1$$

$$f(x|\theta)=\frac{1}{\theta}e^{\frac{-x}{\theta}} \qquad x \geq 0$$

$$\ln f(x|\theta)=\ln\frac{1}{\theta}+\ln e^{\frac{-x}{\theta}}$$

$$\ln f(x|\theta)=-\ln\theta+\frac{-x}{\theta}\ln e$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x|\theta)=-\frac{1}{\theta}+\frac{x}{\theta^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln f(x|\theta)=\frac{1}{\theta^2}-\frac{2x}{\theta^3}$$

$$\begin{aligned}E\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln f(x|\theta)\right] &= E\left[\frac{1}{\theta^2}-\frac{2x}{\theta^3}\right]\\ &= \frac{1}{\theta^2}-\frac{2}{\theta^3}E(x)\\ &= \frac{1}{\theta^2}-\frac{2}{\theta^3}\theta\\ &= \frac{1}{\theta^2}-\frac{2}{\theta^2}\\ &= -\frac{1}{\theta^2}\end{aligned}$$

$$\frac{[g'(\theta)]^2}{-nE\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln f(X|\theta)\right]} = \frac{1}{-n\left[-\frac{1}{\theta^2}\right]}$$

$$= \frac{\theta^2}{n}$$

Pembuktian ketakbiasan estimator $\hat{\theta}$:

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \overline{X}$$

$$E(\hat{\theta}) = E\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right]$$

$$= E(\overline{X})$$
$$= \theta$$

Karena $E(\hat{\theta}) = E(X) = \theta$ memenuhi syarat estimator tak bias yaitu $E(\hat{\theta}) = \theta$,

maka $\hat{\theta} = X$ adalah estimator tak bias.

$$Var(\hat{\theta}) = Var(\overline{X}) = \frac{\theta^2}{n}$$

Estimator tak bias $\hat{\theta} = X$ mencapai batas bawah variansi, yaitu

$$Var(\hat{\theta}) \geq \frac{[g'(\theta)]^2}{-nE\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln f(X|\theta)\right]}, g(\theta) = \theta; g'(\theta) = 1$$

$$\frac{\theta^2}{n} = \frac{\theta^2}{n}.$$

Sehingga

$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \overline{X}$ estimator tak bias terbaik (UMVUE) dari θ.

3.3 Distribusi Gamma

Pada sub bab sebelumnya telah dijelaskan bahwa fungsi distribusi peluang dari distribusi gamma dengan parameter θ, α adalah:

$$f(x|\theta,\alpha) = \frac{1}{\theta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\theta} \qquad x > 0$$

Sedangkan Estimator maksimum Likelihood adalah

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n\hat{\alpha}}$$

Untuk menentukan estimator tak bias terbaik (UMVUE) dari θ ,terlebih dulu akan di tentukan nilai dari

$$\frac{[g'(\theta)]^2}{-nE\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \ln f(X|\theta)\right]},$$

kemudian dibuktikan bahwa estimator $\hat{\theta}$ adalah estimator tak bias.

Jika estimator $\hat{\theta}$ adalah estimator tak bias maka langkah selanjutnya adalah menentukan variansi dari estimator $\hat{\theta}$. Estimator tak bias terbaik (UMVUE) diperoleh jika setiap estimator tak bias mencapai batas bawah variansi.

Batas Bawah Rao Cramer atau Cramer-Rao Lower Bound (CRLB) untuk variansi $\hat{\theta}$ adalah

$$Var(\hat{\theta}) \geq \frac{[g'(\theta)]^2}{-nE\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln f(X|\theta)\right]}, g(\theta)=\theta; g'(\theta)=1$$

$$f(x|\theta,\alpha) = \frac{1}{\theta^\alpha\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-x/\theta} \qquad x>0$$

$$\ln f(x|\theta,\alpha) = \ln\frac{1}{\theta^\alpha\Gamma(\alpha)} + \ln x^{\alpha-1} + \ln e^{-x/\theta}$$

$$= \ln\theta^{-\alpha} + \ln\Gamma(\alpha)^{-1} + \ln x^{\alpha-1} + \ln e^{-x/\theta}$$

$$= -\alpha\ln\theta - \ln\Gamma(\alpha) + (\alpha-1)\ln x - \frac{x}{\theta}\ln e$$

$$\ln f(x|\theta,\alpha) = -\alpha\ln\theta - \ln\Gamma(\alpha) + (\alpha-1)\ln x - \frac{x}{\theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x|\theta,\alpha) = -\frac{\alpha}{\theta} - 0 + 0 + \frac{x}{\theta^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x|\theta,\alpha) = -\frac{\alpha}{\theta} + \frac{x}{\theta^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln f(x|\theta,\alpha) = \frac{\alpha}{\theta^2} - \frac{2x}{\theta^3}$$

$$E\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln f(x|\theta,\alpha)\right] = E\left[\frac{\alpha}{\theta^2} - \frac{2x}{\theta^3}\right]$$

$$= \frac{\alpha}{\theta^2} - \frac{2}{\theta^3} E(x)$$

$$= \frac{\alpha}{\theta^2} - \frac{2}{\theta^3} \theta\alpha$$

$$= \frac{\alpha}{\theta^2} - \frac{2\alpha}{\theta^2}$$

$$= -\frac{\alpha}{\theta^2}$$

$$\frac{[g'(\theta)]^2}{-nE\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \ln f(X|\theta)\right]} = \frac{1}{-nE\left[-\frac{\alpha}{\theta^2}\right]}$$

$$= \frac{1}{\frac{n\alpha}{\theta^2}}$$

$$= \frac{\theta^2}{n\alpha}$$

Pembuktian ketakbiasan estimator $\hat{\theta}$:

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n\hat{\alpha}}$$

$$E(\hat{\theta}) = E\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n\hat{\alpha}}\right]$$

$$= \frac{1}{\alpha} E\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right]$$

$$= \frac{1}{\alpha} E(\overline{X})$$

$$= \frac{1}{\alpha} \alpha\theta$$

$$= \theta$$

Karena $E(\hat{\theta}) = \theta$ memenuhi syarat estimator tak bias yaitu $E(\hat{\theta}) = \theta$,

maka $\hat{\theta}$ adalah estimator tak bias.

$$Var(\hat{\theta}) = Var\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n\hat{\alpha}}\right]$$

$$= Var\left[\frac{1}{\hat{\alpha}} \overline{X}\right]$$

$$= \frac{1}{\alpha^2} Var(\overline{X})$$

$$= \frac{1}{\alpha^2}\left[\frac{\alpha\theta^2}{n}\right]$$

$$= \frac{\theta^2}{n\alpha}$$

Estimator tak bias $\hat{\theta}$ mencapai batas bawah variansi, yaitu

$$Var(\hat{\theta}) \geq \frac{[g'(\theta)]^2}{-nE\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln f(X|\theta)\right]}$$

$$\frac{\theta^2}{n\alpha} = \frac{\theta^2}{n\alpha}$$

Sehingga

$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n\hat{\alpha}}$ estimator tak bias terbaik (UMVUE) dari θ.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Dari hasil pembahasan pada bab-bab sebelumnya dapat diambil kesimpulan bahwa:

Suatu distribusi dikatakan distribusi keluarga eksponensial, apabila fungsi distribusi tersebut dapat dinyatakan sebagai:

$$f(x|\theta) = h(x)\,c(\theta)\exp\left[\sum_{i=1}^{n} wi(\theta)ti(x)\right]$$ (Subanar, 1996:3).

Dengan $h(x) \geq 0; t_i$(x) fungsi real x;c $(\theta) \geq 0$; dan $w_i\ (\theta)$ fungsi real dari θ.

Jika diberikan sampel random X1, X, ,..., X_n,n sampel dan populasi yang berdistribusi identik dan independen, maka dapat dilakukan estimasi parameter distribusi fungsi kontinu.

Untuk menentukan ukuran kebaikan suatu estimator, yaitu estimator tak bias terbaik (UMVUE) pada distribusi fungsi kontinu, dapat digunakan Teorema Cramer-Rao Lower Bound. Terlebih dulu akan ditentukan nilai dari

$$\frac{[g'(\theta)]^2}{-nE\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln f(X|\theta)\right]},$$

kemudian dibuktikan bahwa estimator θ adalah estimator tak bias.

Jika estimator θ adalah estimator tak bias, maka langkah selanjutnya adalah menentukan variansi dari estimator θ. Estimator tak bias terbaik (UMVUE) diperoleh jika setiap estimator tak bias mencapai batas bawah variansi.

Batas bawah Rao Cramer atau Cramer-Rao Lower Bound (CRLB) untuk variansi θ adalah,

$$Var(\hat{\theta}) \geq \frac{[g'(\theta)]^2}{-nE\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln f(X|\theta)\right]}, g(\theta)=\theta; g'(\theta)=1$$

Beberapa estimator distribusi kontinu yang didasarkan pada estimasi parameter mencapai batas bawah Rao Cramer sehingga merupakan estimator tak bias terbaik (UMVUE) yaitu normal, eksponensial dan gamma.

4.2 Saran

Pada distribusi fungsi kontinu dapat ditentukan estimator tak bias terbaik (UMVUE) dengan menggunakan teorema Cramer-Rao Lower Bound, tetapi kemungkinan ada anggota baru yang merupakan distribusi fungsi kontinu selain yang tertera pada pembahasan dan distribusi yang lain yang juga dapat ditentukan estimator tak bias terbaiknya dengan teorema Cramer-Rao Lower Bound. Selain itu untuk anggota keluarga eksponensial yang bukan merupakan estimator tak bias terbaik (UMVUE) dan anggota baru yang merupakan distribusi keluarga eksponensial, dapat dilakukan estimasi parameter dengan metode lain.

Oleh karena itu, jika ada yang tertarik untuk mengkajinya, maka disarankan untuk membahasnya pada anggota baru yang merupakan keluarga eksponensial, pada distribusi yang bukan keluarga eksponensial dan melakukan estimasi parameter dengan metode lain untuk anggota keluarga eksponensial yang bukan merupakan estimator tak bias terbaik (UMVUE) dan anggota baru yang merupakan distribusi keluarga eksponensial.

DAFTAR PUSTAKA

Bain, L.J dan, M. 1991. *Introduction to Probability and Mathematical Statistics.* California: Duxbury Press.

Boediono dan Koster, Wayan. 2002. *Teori dan Aplikasi Statistika* dan Probabilitas. Bandung: Remaja Rosdakarya.

Bruce dan Cllifford. 1990. *Mathematical Statistics*. California: Duxbury Press.

Dewi. 2005. *Estimasi Parameter Distribusi Keluarga Eksponensial dengan Menggunakan Metode Maksimum Likelihood*. Malang: UMM.

Djarwanto, Ps dan Subagyo.1996. *Statistik Induktif*. Yogyakarta: BPFE.

Sudjana. 1996. *Metoda statistika.* Bandung: Tarsito.

Subanar.1992. *Prohabilitas, Variabel Random, dan Proses Stokastik*. Yogyakarta: UGM.

Subanar.1996. *Statistik malematika II* . Yogyakarta: UGM.

Walpole dan Myers. 1995. *Ilmu Peluang dan Statistika untuk Insinyur dan ilmuwan*. Bandung: ITB.

Estimasi Parammeter. http://www. Mercubuana.ac.id. Diakses Tanggal 29 juli 2009