FACE COLOURING PADA LIMAS, PRISMA, DAN GABUNGAN LIMAS DAN PRISMA

SKRIPSI

Oleh:
RIRIN SALUSININGSIH
NIM: 04510002

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN)
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
MALANG
2009

HALAMAN PENGAJUAN

FACE COLOURING PADA LIMAS, PRISMA, DAN GABUNGAN LIMAS DAN PRISMA

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan
Dalam Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
RIRIN SALUSININGSIH
NIM. 04510002

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN)
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
MALANG
2009

HALAMAN PERSETUJUAN

FACE COLOURING PADA LIMAS, PRISMA, DAN GABUNGAN LIMAS DAN PRISMA

SKRIPSI

Oleh:
RIRIN SALUSININGSIH
NIM. 04510002

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji

Tanggal: 23 Juli 2009

Dosen Pembimbing I	Dosen Pembimbing II
Evawati Alisah, M.Pd	**Ahmad Barizi, M.A**
NIP. 150 291 271	**NIP. 150 283 991**

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M. Si
NIP. 150 318 321

FACE COLOURING PADA LIMAS, PRISMA, DAN GABUNGAN LIMAS DAN PRISMA

SKRIPSI

Oleh:
RIRIN SALUSININGSIH
NIM. 04510002

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal 28 Juli 2009

Susunan Dewan Penguji		Tanda Tangan
1. Penguji Utama	: Wahyu H. Irawan, M. Pd NIP. 150 300 415	( )
2. Ketua	: Abdussakir, M. Pd NIP. 150 327 247	( )
3. Sekretaris	: Evawati Alisah, M. Pd NIP. 150 291 271	( )
4. Anggota	: Ahmad Barizi, M. A NIP. 150 283 991	( )

Mengetahui dan Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M. Si
NIP. 150 318 321

SURAT PERNYATAAN

Yang bertanda tangan di bawah ini:
Nama : Ririn Salusiningsih
NIM : 04510002
Fakultas : Sains dan Teknologi
Judul Skripsi : *Face Colouring* pada Limas, Prisma, dan Gabungan Limas dan Prisma

Menyatakan bahwa skripsi tersebut adalah karya saya sendiri dan bukan karya orang lain, baik sebagian maupun keseluruhan, kecuali dalam bentuk kutipan yang telah disebutkan sumbernya.

Selanjutnya apabila dikemudian hari ada "klaim" dari pihak lain, bukan menjadi tanggung jawab Dosen Pembimbing atau Pengelola Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Malang, tetapi menjadi tanggung jawab saya sendiri.

Demikian surat pernyataan ini saya buat dengan sebenar-benarnya dan apabila pernyataan ini tidak benar, saya bersedia mendapat sanksi akademis.

Malang, 23 Juli 2009
Menyatakan,

Ririn Salusiningsih

MOTTO

"Orang yang cerdas adalah yang berpikir setiap kali berzikir dan berzikir setiap kali berpikir. Dengan demikian, kalbu mereka bersih, sehingga semua ucapan yang keluar dari lidah, pasti mengandung hikmah." (Hasan al-Bashri)

PERSEMBAHAN

Untuk Ibunda Masturoh dan Ayahanda Parmin serta kakak-kakak (Yuni, Agus, Nurrahim, Aminatun).

KATA PENGANTAR

بِسْمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحْمَـٰنِ ٱلرَّحِيمِ

Syukur Alhamdulillah ke hadirat Allah SWT, yang telah melimpahkan rahmat dan hidayahNya kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi dengan judul ***Face Colouring* pada Limas, Prisma, dan Gabungan Limas dan Prisma.**

Shalawat serta salam semoga tercurahkan kepada Nabi besar Muhammad SAW yang telah menunjukkan dari jalan yang gelap gulita menuju jalan yang terang benderang yaitu ad-Dinul Islam.

Dalam penulisan skripsi ini, penulis menyadari bahwa tidak akan mendapatkan hasil yang baik tanpa adanya bimbingan, bantuan, dorongan, saran serta do'a dari berbagai pihak. Maka dalam kesempatan ini, penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo selaku Rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim malang.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU., DSc selaku Dekan Fakultas Saintek Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim malang.
3. Sri Harini, M.Si selaku Ketua Jurusan matematika Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim malang.
4. Evawati Alisah, M.Pd selaku dosen pembimbing yang selalu memberikan bimbingannya kepada kami.
5. Ahmad Barizi, M.A selaku dosen pembimbing Integrasi Sains dan Agama.

6. Abdussakir, M. Pd yang telah memberikan masukan-masukan untuk penulis.
7. Bapak dan Ibu tercinta dan seluruh keluarga besar yang tiada lelah memberikan do'a dan kasih sayang serta kepercayaan.
8. Teman-teman Matematika angkatan 2004 yang telah mewarnai hari-hariku dan selalu memberikan keceriaan selama kuliah di UIN Malang.
9. Teman-teman kost Kerto Pamuji IA yang telah memberikan motivasi dan bantuan.
10. Semua pihak yang tidak bisa disebutkan satu persatu, terima kasih sudah bersedia mendengarkan keluhan penulis dan telah membantu dalam menyelesaikan laporan ini.

Semoga Allh SWT membalas kebaikan mereka semua. Penulis berharap, semoga skripsi ini bermanfaat. Amin….

Malang, 30 Juli 2009

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Salusiningsih, Ririn. 2009. ***Face Colouring* pada Limas, Prisma, dan Gabungan Limas dan Prisma.** Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: Evawati Alisah, M. Pd
Ahmad Barizi, M.A

Kata Kunci: *Face Colouring*, Limas, Prisma, Gabungan Limas dan Prisma.

Salah satu permasalahan dalam graf adalah *face colouring. Face colouring* pada graf bidang G adalah permberian warna pada setiap permukaan di G sedemikian hingga tidak ada dua permukaan yang dipisahkan atau dibatasi oleh sebuah sisi mempunyai warna sama.

Penelitian ini dilakukan dengan tujuan untuk menentukan bilangan kromatik permukaan *(face chromatic number)* pada limas, prisma, dan gabungan limas dan prisma. Bilangan kromatik permukaan pada G adalah bilangan k terkecil sehingga permukaan di G dapat diwarnai dengan k warna, dan dilambangkan dengan $\chi''(G)$. Langkah-langkah yang dilakukan adalah: a. Menentukan bilangan kromatik pada beberapa kasus; b. Mencari pola dari bilangan kromatik pada langkah (a); c. Pola yang diperoleh dinyatakan sebagai konjektur; d. Konjektur tersebut dinyatakan sebagai teorema dan dibuktikan.

Berdasarkan hasil pembahasan dapat diperoleh bilangan kromatik permukaan *(face chromatic number)* pada limas adalah

$$\chi''(L_n) = \begin{cases} 4, \text{untuk n ganjil} \\ 3, \text{untuk n genap} \end{cases} ,\forall\, n \in N, n \geq 3$$

Bilangan kromatik permukaan *(face chromatic number)* pada prisma adalah

$$\chi''(P_n) = \begin{cases} 4, \text{untuk n ganjil} \\ 3, \text{untuk n genap} \end{cases} ,\forall\, n \in N, n \geq 3$$

Bilangan kromatik permukaan *(face chromatic number)* pada gabungan limas dan prisma adalah

$$\chi''(G_n) = \begin{cases} 4, \text{untuk n ganjil} \\ 3, \text{untuk n genap} \end{cases} ,\forall\, n \in N, n \geq 3$$

Untuk penulisan skripsi selanjutnya diharapkan untuk mengkaji masalah *face colouring* pada graf-graf yang lain atau komputasi pemprograman sehingga hasil lebih cepat, akurat, dan tampilannnya bagus.

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan disiplin ilmu yang mempunyai sifat yang khas jika dibandingkan dengan ilmu yang lain. Hal ini sangat dimungkinkan karena matematika mempunyai struktur dengan keterkaitan yang kuat dan jelas antara satu dengan yang lainnya serta pola pikir yang bersifat deduktif dan konsisten.

Matematika bukan hanya ilmu warisan dari para ahli matematika pada zaman dahulu melainkan ilmu yang berkembang mengikuti perkembangan zaman. Cabang dari ilmu matematika yang masih berkembang di antaranya adalah Matematika Diskrit, Numerik, Analisis Real, dan lain-lain. Dari berbagai cabang ilmu matematika, Matematika Diskrit adalah cabang ilmu yang mengkaji obyek-obyek diskrit. Obyek diskrit merupakan obyek yang terdiri dari sejumlah berhingga elemen berbeda dan tidak bersambungan.

Materi yang terkandung dalam Matematika Diskrit mencakup beberapa hal, salah satunya adalah teori graf. Teori graf adalah cabang matematika yang cukup penting karena mempunyai segi di banyak bidang ilmu, misalnya di bidang fisika, kimia, ilmu komunikasi, teknologi komputer, rekayasa listrik dan sipil, arsitektur, penelitian operasional (*operational research*) genetika, psikologi, sosiologi, ekonomi, antropologi, dan linguistik. Teori graf juga berkaitan erat dengan beberapa cabang matematika yang lain, misalnya teori "grup", teori matriks, analisis numerik, teori peluang, topologi, dan kombinatorika (Suryanto, 1986:1). Representasi visual dari graf adalah dengan menyatakan obyek sebagai titik sedangkan hubungan antara obyek dinyatakan dengan garis/sisi.

Dalam Islam, himpunan titik dapat dianalogikan sebagai himpunan orang-orang mukmin sedangkan garis atau sisi yang menghubungkan titik-titik tersebut dianalogikan sebagai kesabaran. Adanya garis yang menghubungkan titik-titik tersebut adanya sifat kesabaran yaitu pada orang-orang mukmin tersebut. Jika orang-orang mukmin yang bersabar tersebut disatukan atau dikumpulkan maka mereka mampu menciptakan suatu kekuatan yang luar biasa sehingga mampu mengalahkan kekuatan orang kafir yang sepuluh kali lipat jumlahnya. Seperti yang tercantum dalam QS. al-Anfal ayat 65:

يَٰٓأَيُّهَا ٱلنَّبِيُّ حَرِّضِ ٱلۡمُؤۡمِنِينَ عَلَى ٱلۡقِتَالِۚ إِن يَكُن مِّنكُمۡ عِشۡرُونَ صَٰبِرُونَ يَغۡلِبُواْ مِاْئَتَيۡنِۚ وَإِن يَكُن مِّنكُم مِّاْئَةٞ يَغۡلِبُوٓاْ أَلۡفٗا مِّنَ ٱلَّذِينَ كَفَرُواْ بِأَنَّهُمۡ قَوۡمٞ لَّا يَفۡقَهُونَ ٦٥

Artinya*: Hai nabi, Kobarkanlah semangat para mukmin untuk berperang. jika ada dua puluh orang yang sabar diantaramu, niscaya mereka akan dapat mengalahkan dua ratus orang musuh. dan jika ada seratus orang yang sabar diantaramu, niscaya mereka akan dapat mengalahkan seribu dari pada orang kafir, disebabkan orang-orang kafir itu kaum yang tidak mengerti.* (QS. al-Anfaal:65)

Maksud dari orang-orang kafir yang tidak mengerti adalah mereka tidak mengerti bahwa perang itu haruslah untuk membela keyakinan dan mentaati perintah Allah. Mereka berperang hanya semata-mata mempertahankan tradisi Jahiliyah dan maksud-maksud duniawiyah lainnya.

Para ahli matematika mulai mempelajari teori graf sejak diperkenalkan oleh Leonard Euler seorang matematikawan dari Swiss pada tahun 1736, saat dia mendiskusikan mungkin atau tidaknya melintasi semua jembatan Konisberg (sebelah timur Prussia, Jerman) yang sekarang bernama Kaliningrad dengan hanya melewatinya satu kali. Di Kaliningrad terdapat sungai Pregal yang mengitari pulau Kneiphof, kemudian bercabang menjadi dua anak sungai. Ada tujuh jembatan yang menghubungkan daratan yang dibelah sungai tersebut. Permasalahannya adalah "apakah mungkin melintasi ketujuh jembatan tersebut masing-masing tepat satu kali dan kembali ke tempat semula?". Eulerpun membuat model masalah tersebut dalam bentuk graf. Daratan dinyatakannya sebagai titik (*vertex*) dan jembatan dinyatakannya sebagai sisi (*edge*). Jawaban yang dinyatakannya adalah seseorang tidak mungkin melalui ketujuh jembatan tersebut masing-masing satu kali dan kembali ke tempat semula jika derajat setiap titik tidak seluruhnya genap yaitu banyaknya sisi pada setiap titik (Suryanto, 1986:2).

Dalam kehidupan sehari-hari banyak permasalahan yang memerlukan pemecahan. Sering dengan bantuan matematika, permasalahan tersebut menjadi lebih mudah dipahami, lebih mudah dipecahkan, atau bahkan dapat ditunjukkan bahwa suatu persoalan tidak mempunyai penyelesaian. Untuk keperluan tersebut, perlu dicari pokok permasalahannya dan kemudian dibuat rumusan atau model matematikanya. Dengan menggunakan rumusan atau model teori graf yang tepat, suatu permasalahan menjadi lebih jelas, sehingga mudah menganalisanya. Permasalahan yang dirumuskan dengan teori graf dibuat sederhana, yaitu diambil aspek-aspek yang diperlukan dan dibuang aspek-aspek lainnya (Purwanto, 1998:1).

Salah satu permasalahan dalam teori graf adalah pewarnaan titik, sisi, dan permukaan pada suatu graf. Permasalahan pewarnaan pada graf muncul pada tahun 1852 ketika seorang mahasiswa di Inggris bernama Francis Guthrie menulis surat kepada saudaranya, yaitu Frederick Guthrie, untuk memberitahukan pendapatnya (pendapat Francis) bahwa cukup empat warna untuk mewarnai peta sedemikian sehingga setiap wilayah terhubung dari suatu negara mendapat satu warna, dan setiap dua wilayah yang bersekutu perbatasan mendapat warna yang berbeda. Francis minta kepada Frederick bukti matematis tentang kebenaran pendapatnya itu. Karena tidak dapat membuktikan kebenaran itu, maka Frederic menanyakan kepada dosennya, seorang ahli matematika pada abad itu yaitu de Morgan. Sejak saat itu telah banyak ahli matematika yang berusaha menyelidiki apakah pendapat Francis tadi benar. Baru pada tahun 1976 ada yang berhasil membuktikan bahwa pendapat Francis itu benar. Tetapi tidak setiap orang puas dengan bukti yang telah diperoleh itu, karena bukti itu sangat tergantung kepada bantuan komputer. Benar atau salahnya bukti itu tidak dapat diuji tanpa bantuan komputer (Suryanto, 1986:154).

Suatu pewarnaan permukaan (*face colouring*) untuk graf bidang G adalah suatu penggunaan sebagian atau semua k warna untuk mewarnai semua permukaan di graf bidang G sehingga setiap ada dua permukaan dipisahkan oleh sebuah sisi diberi warna yang berbeda. Jika graf bidang G mempunyai pewarnaan permukaan k, maka dikatakan permukaan di graf bidang G diwarnai dengan k warna. Sedangkan bilangan kromatik didefinisikan sebagai banyaknya warna terkecil yang diberikan pada permukaan di graf bidang G sedemikian hingga untuk dua permukaan dipisahkan oleh sebuah sisi diberi warna yang berbeda (Bondy, 1982:158).

Pewarnaan permukaan dapat juga diberikan kepada bangun ruang, seperti limas dan prisma. Limas adalah suatu bangun ruang yang dibatasi oleh sebuah segitiga atau segibanyak sebagai alas dan beberapa buah bidang berbentuk segitiga sebagai bidang tegak yang bertemu pada satu titik puncak. Sedangkan prisma adalah suatu bangun ruang yang dibatasi oleh dua bidang berhadapan yang sama dan sebangun atau kongruen dan sejajar, serta bidang-bidang lain yang berpotongan menurut rusuk-rusuk yang sejajar.

Ada beberapa pewarnaan dalam suatu graf, yaitu pewarnaan titik, pewarnaan sisi, dan pewarnaan permukaan. Dalam penulisan skripsi ini penulis akan mengambil salah satu topik dari pewarnaan-pewarnaan pada graf tersebut yaitu pewarnaan permukaan. Pewarnaan permukaan adalah salah satu masalah mendasar pada graf, sehingga tidak ada dua permukaan yang dipisahkan oleh sebuah sisi mempunyai warna sama. Pada pewarnaan ini akan ditentukan berapa minimal angka yang dapat digunakan dalam mewarnai permukaan suatu graf (bilangan kromatik). Permukaan yang akan diwarna adalah limas, prisma, dan gabungan limas dan prisma.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam penulisan skripsi ini adalah bagaimana *face colouring* pada limas, prisma, dan gabungan limas dan prisma serta bagaimana menentukan bilangan kromatiknya dan membuktikannya?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah tersebut maka, tujuan penulisan skripsi ini adalah mengetahui bagaimana *face colouring* pada limas, prisma, dan gabungan limas dan prisma, serta mengetahui bagaimana menentukan bilangan kromatiknya dan membuktikannya.

1.4 Batasan Masalah

Agar pembahasan dalam skripsi ini tidak meluas maka penulis membatasi objek kajian pada limas segi-n (L_n), prisma segi-n (P_n), dan gabungan limas segi-n dan prisma segi-n (G_n), dimana $3 \leq n \leq 6$.

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penulisan skripsi ini adalah:

1. Bagi penulis, sebagai sarana dan latihan untuk menambah pemahaman dan penguasaan tentang materi yang dibahas dalam penulisan skripsi ini.
2. Bagi pembaca, sebagai tambahan pengetahuan pada bidang Matematika khususnya teori graf mengenai cara menentukan bilangan kromatik *face colouring* pada limas, prisma, dan gabungan limas dan prisma.
3. Bagi lembaga UIN MMI Malang, untuk bahan kepustakaan yang dijadikan sarana pengembangan wawasan keilmuan khususnya di jurusan Matematika untuk mata kuliah Teori Graf.

1.6 Metode Penelitian

Dalam penyusunan skripsi ini, penulis menggunakan penelitian perpustakaan, yaitu penelitian yang dilakukan dengan mengumpulkan data-data dan informasi dengan bantuan bermacam-macam material yang ada di perpustakaan, seperti buku-buku, dokumen, jurnal, catatan, artikel, dan sebagainya yang berkaitan dengan pembahasan skripsi ini. Adapun langkah-langkah umum yang dilakukan penulis adalah:

a. Merumuskan masalah yang akan dibahas.
b. Mengumpulkan sumber-sumber dan informasi dengan cara membaca dan memahami literatur yang berkaitan dengan pewarnaan graf khususnya pewarnaan permukaan.
c. Menganalisa permasalahan yang telah diperoleh dengan menjabarkan definisi dan teorema yang berkaitan.
d. Merumuskan kesimpulan dari hasil analisis contoh yang telah diberikan.
e. Langkah terakhir dari penelitian ini adalah menyusun laporan dari penelitian dalam bentuk tugas akhir.

Analisis data merupakan bagian yang sangat penting dalam metode ilmiah, karena dengan analisislah data tersebut dapat diberi arti dan makna yang berguna dalam memecahkan masalah penelitian. Adapun analisis isi (*content analysis*) dengan menelaah struktur pewarnaan graf yaitu *face colouring* pada limas, prisma, dan gabungan limas dan prisma. Langkah-langkahnya yaitu:

1. Menentukan bilangan kromatik dari *face colouring* pada limas, prisma, dan gabungan limas dan prisma.

2. Mencari pola bilangan kromatik *face colouring* pada limas, prisma, dan gabungan limas dan prisma.
3. Pola yang diperoleh dinyatakan sebagai konjektur
4. Konjektur tersebut dinyatakan sebagai teorema dan dibuktikan.

1.7 Sistematika Pembahasan

Agar penulisan skripsi ini lebih terarah, mudah ditelaah dan dipahami, maka digunakan sistematika penulisan skripsi ini yang terdiri dari empat bab. Masing-masing bab dibagi ke dalam beberapa subbab dengan rumusan sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN

Pendahuluan meliputi: latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika pembahasan.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Bagian ini terdiri dari konsep-konsep atau teori-teori yang mendukung bagian pembahasan. Konsep-konsep tersebut antara lain membahas tentang pengertian graf, derajat suatu titik, graf terhubung, graf dengan nama tertentu, macam-macam bangun ruang, pewarnaan pada graf, dan teori graf dalam al-Qur’an.

BAB III PEMBAHASAN

Pembahasan berisi tentang bagaimana menentukan bilangan kromatik *face colouring* pada limas, prisma, dan gabungan limas dan prisma.

BAB IV PENUTUP

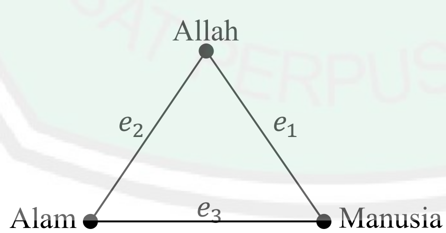
Pada bab ini akan berisi tentang kesimpulan dan saran.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Konsep Graf dalam Islam

Graf merupakan himpunan titik-titik dan sisi-sisi. Titik-titik dalam suatu graf dapat diasumsikan menurut keperluan dalam menyelesaikan suatu benda dan dihubungkan dengan suatu sisi, maka hal ini memiliki artian bahwa dua benda tersebut mempunyai suatu hubungan tertentu. Jika dua titik dalam suatu graf diasumsikan sebagai kejadian dan dihubungkan dengan suatu sisi, maka dapat diambil suatu pengertian bahwa ada dua kejadian yang mempunyai hubungan. Dalam teori Islam elemen-elemen yang dimaksud meliputi pencipta (Allah), manusia, dan alam, sedangkan sisi atau garis yang menghubungkan elemen-elemen tersebut adalah bagaimana hubungan antara Allah dengan manusia, Allah dengan alam, dan manusia dengan alam. Sehingga dengan demikian, hal ini menunjukkan adanya suatu hubungan atau keterkaitan antara titik yang satu dengan titik yang lain. Graf tiga hubungan tersebut digambarkan sebagai berikut:



Keterangan:
e_1 = makhluk (ciptaan Allah)
e_2= eksistensi Tuhan
e_3= pemanfaatan alam

Gambar 2.1.1 Representasi Graf Hubungan antara Allah, Manusia, dan Alam

Sisi e_1 yang mengilustrasikan hubungan antara Allah dan manusia menggambarkan bahwa Allah kedudukannya sebagai sang Khalik dan manusia sebagai makhluk yang diciptakan-Nya. Manusia diciptakan Allah dengan dua tujuan yaitu sebagai khalifah Allah dan sebagai hamba Allah. Manusia sebagai khalifah Allah artinya manusia sebagai wakil-Nya yang memakmurkan bumi. Seperti yang tertulis dalam al-Qur'an surat al-Baqarah ayat 30 yaitu:

وَإِذْ قَالَ رَبُّكَ لِلْمَلَٰٓئِكَةِ إِنِّي جَاعِلٌ فِي ٱلْأَرْضِ خَلِيفَةً ۖ قَالُوٓاْ أَتَجْعَلُ فِيهَا مَن يُفْسِدُ
فِيهَا وَيَسْفِكُ ٱلدِّمَآءَ وَنَحْنُ نُسَبِّحُ بِحَمْدِكَ وَنُقَدِّسُ لَكَ ۖ قَالَ إِنِّيٓ أَعْلَمُ مَا لَا
تَعْلَمُونَ ٣٠

Artinya: *“Ingatlah ketika Tuhanmu berfirman kepada para malaikat: "Sesungguhnya Aku hendak menjadikan seorang khalifah di muka bumi." Mereka berkata: "Mengapa Engkau hendak menjadikan (khalifah) di bumi itu orang yang akan membuat kerusakan padanya dan menumpahkan darah, padahal kami senantiasa bertasbih dengan memuji Engkau dan mensucikan Engkau?" Tuhan berfirman: "Sesungguhnya Aku mengetahui apa yang tidak kamu ketahui."* (QS. al-Baqarah : 30).

Manusia sebagai hamba Allah artinya manusia harus mengabdi dan tunduk kepada aturan-aturan yang diberikan oleh Allah kepada manusia. Bahwasanya manusia diciptakan di dunia ini hanya untuk mengabdi (menghambakan diri) kepada Allah SWT. Seperti dalam firmanNya dalam al-Qur'an surat adz-Dzariyaat ayat 56, yaitu:

وَمَا خَلَقْتُ ٱلْجِنَّ وَٱلْإِنسَ إِلَّا لِيَعْبُدُونِ ٥٦

Artinya : *“Dan Aku tidak menciptakan jin dan manusia melainkan supaya mereka mengabdi kepada-Ku”*.(QS. adz-Dzariyaat: 56).

Yang dimaksud dengan *“menciptakan mereka untuk beribadah”* adalah menciptakan mereka memiliki potensi untuk beribadah yaitu menganugerahkan mereka kebebasan memilih, akal, dan kemampuan (Shihab, 2003:358).

Sisi e_2 mengilustrasikan hubungan antara Allah dan alam. Tujuan utama penciptaan alam semesta menurut hadis qudsi adalah untuk mengetahui adanya Allah. Artinya Allah tidak mungkin diketahui tanpa melalui ciptaan-Nya. Menurut al-Qur'an, alam semesta dan berbagai fenomena yang ada, adalah sebuah tanda, eksistensi, dan kebesaran penciptaNya. Alam ibarat sebuah buku, menjelaskan tentang penciptanya (Allah) (Masruri, 2007:44).

Sisi e_3 mengilustrasikan suatu hubungan antara manusia dan alam. Hubungan manusia dan alam bertujuan untuk memanfaatkan alam, memakmurkan bumi, dan menyelenggarakan kehidupan pada umumnya.

Dalam al-Quran surat Fushshilat ayat 10 disebutkan :

وَجَعَلَ فِيهَا رَوَٰسِيَ مِن فَوۡقِهَا وَبَٰرَكَ فِيهَا وَقَدَّرَ فِيهَآ أَقۡوَٰتَهَا فِيٓ أَرۡبَعَةِ أَيَّامٖ سَوَآءٗ لِّلسَّآئِلِينَ ١٠

Artinya: *"Dan Dia menciptakan di bumi itu gunung-gunung yang kokoh di atasnya. Dia memberkahinya dan dia menentukan padanya kadar makanan-makanan (penghuni)nya dalam empat masa. (Penjelasan itu sebagai jawaban) bagi orang-orang yang bertanya."* (QS. Fushshilat : 10).

2.2 Definisi Graf

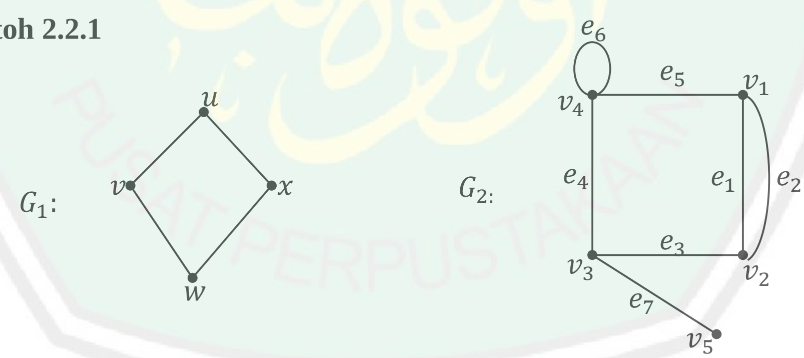
Definisi 1

Graf G adalah pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari obyek-obyek yang disebut sebagai titik dan E adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di G yang disebut sebagai sisi. Himpunan titik di G dinotasikan dengan $V(G)$ dan himpunan sisi dinotasikan dengan $E(G)$. Sedangkan banyaknya unsur di V disebut order dari G dan dilambangkan dengan $p(G)$ dan banyaknya unsur di E disebut ukuran dari G dan dilambangkan dengan $q(G)$. Jika graf yang dibicarakan hanya graf G, maka order dan ukuran dari G tersebut cukup ditulis dengan p dan q (Chartrand dan Lesniak, 1986:4).

Suatu graf tidak boleh mempunyai sisi rangkap dan loop. Sisi rangkap dari suatu graf adalah jika dua titik yang dihubungkan oleh lebih dari satu sisi. Sedangkan yang disebut dengan loop adalah suatu sisi yang menghubungkan suatu titik dengan dirinya sendiri. Graf yang mempunyai sisi rangkap dan loop disebut dengan *multigraf.*

Sebagai contoh, misal $V(G_1) = \{u, v, w, x\}$, $E(G_1) = \{uv, ux, vw, wx\}$ dan $V(G_2) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $E(G_2) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7,\}$ digambarkan pada gambar 2.2.1. Pada gambar 2.2.1, G_1 merupakan graf karena tidak memuat loop dan sisi ganda sedangkan G_2 merupakan *multigraf* karena memuat loop yaitu e_6 dan memuat sisi ganda yaitu e_1 dan e_2.

Contoh 2.2.1



a. Graf **b. Multigraf**

Gambar 2.2.1 Graf dan Multigraf

Definisi 2

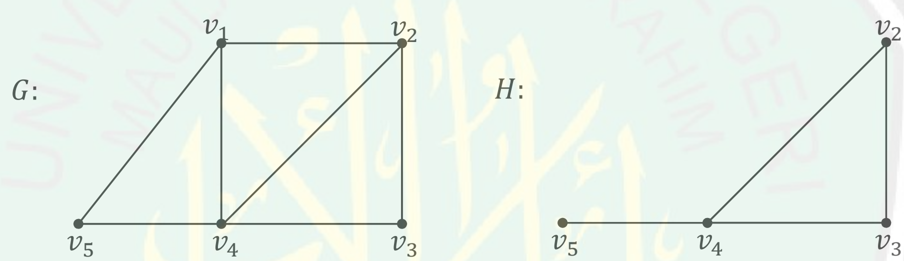
Sisi $e = (u, v)$ dikatakan menghubungkan titik u dan v. Jika $e = (u, v)$ adalah sisi di graf G, maka u dan v disebut terhubung langsung (*adjacent*), u dan e

serta v dan e disebut terkait langsung (*incident*). Untuk selanjutnya, sisi $e = (u, v)$ akan ditulis $e = uv$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:4).

Definisi 3

Graf H disebut subgraf dari G jika himpunan titik di H adalah subset dari himpunan titik-titik di G dan himpunan sisi-sisi di H adalah subset dari himpunan sisi di G. Dapat ditulis $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$. Jika H adalah subgraf G, maka dapat ditulis $H \subseteq G$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:8).

Contoh 2.2.



Gambar 2.2.2 Graf dan Subgraf

$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan $E(G) = \{v_1v_2, v_1v_4, v_1v_5, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4, v_4v_5\}$ sedangkan $V(H) = \{v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan $E(H) = \{v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4, v_4v_5\}$. Oleh karena itu H adalah subgraf dari G atau dapat ditulis seperti $G \subseteq H$.

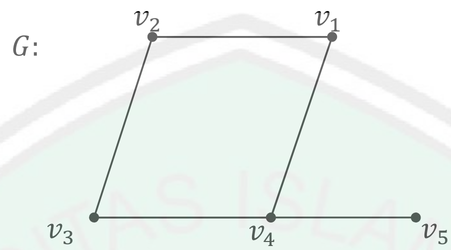
2.3 Derajat Suatu Titik

Definisi 4

Derajat suatu titik v pada sebuah graf G, ditulis dengan $\deg(v)$, adalah jumlah sisi yang *incident* pada v. Dengan kata lain, jumlah sisi yang memuat v sebagai titik ujung. Titik v dikatakan genap atau ganjil tergantung dari jumlah *deg* (v) genap atau ganjil (Chartrand dan Lesniak, 1986:8).

Derajat minimum dan derajat maksimum titik-titik di G berturut-turut dinyatakan dengan $\delta(G)$ dan $\Delta(G)$ (Purwanto, 1998:7).

Contoh 2.3.1



Gambar 2.3.1 Derajat suatu titik pada graf

$deg\ v_1 = 2$, $deg\ v_2 = 2$, $deg\ v_3 = 2$, $deg\ v_4 = 3$, dan $deg\ v_5 = 1$.

Pada contoh 2.3.1, $deg\ v_1 = 2$, karena banyaknya sisi dari graf G yang terkait langsung dengan v_1 adalah 2, yaitu sisi v_1v_2 dan v_1v_4, sedangkan $deg\ v_2 = 2$, karena banyaknya sisi dari graf G yang terkait langsung dengan v_2 adalah 2, yaitu sisi v_1v_2 dan v_2v_3, sedangkan $deg\ v_3 = 2$, karena banyaknya sisi dari graf G yang terkait langsung dengan v_3 adalah 2, yaitu sisi v_2v_3 dan v_3v_4, sedangkan $deg\ v_4 = 3$, karena banyaknya sisi dari graf G yang terkait langsung dengan v_4 adalah 3, yaitu sisi $v_1v_4, v_3v_4,$ dan v_4v_5, sedangkan $deg\ v_5 = 1$, karena banyaknya sisi dari graf G yang terkait langsung dengan v_5 hanya 1, yaitu sisi v_4v_5.

Graf yang semua titiknya berderajat sama disebut graf beraturan (*regular graph*). Suatu graf dikatakan beraturan-r (*r-regular*) jika setiap titiknya berderajat r. Gambar 2.3.2 merupakan graf beraturan-2 dan graf beraturan-3.

Contoh 2.3.2

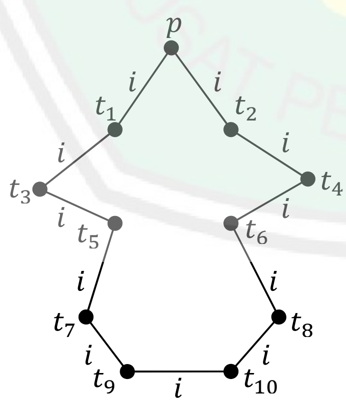
a. Graf beraturan-2 **b. Graf beraturan-3**

Gambar 2.3.2 Graf Beraturan

Gambar 2.3.2.a merupakan graf beraturan-2 karena masing-masing titiknya berderajat 2 sedangkan Gambar 2.3.2 b merupakan graf beraturan 3 karena masing-masing titiknya berderajat 3.

Dalam Islam titik-titik pada graf beraturan diibaratkan sebagai orang-orang yang beriman yang berperang di jalan Allah. Mereka membentuk suatu formasi / barisan yang beraturan yang seakan-akan mereka seperti suatu bangunan yang tersusun kokoh.

Misalkan graf beraturan 2 dengan 11 titik adalah gambaran orang-orang beriman yang berperang di jalan Allah, seperti yang digambarkan sebagai berikut:



Keterangan:

p = panglima atau pemimpin perang
$t_1, t_2, t_3, \ldots, t_{10}$ = tentara perang
i = iman
t_1 dan t_2 = pasukan perang barisan pertama
t_3 dan t_4 = pasukan perang barisan kedua
t_5 dan t_6 = pasukan perang barisan ketiga
t_7 dan t_8 = pasukan perang barisan keempat
t_9 dan t_{10} = pasukan perang barisan kelima
t_1, t_3, t_5, t_7, t_9 = pasukan perang sayap kiri
$t_2, t_4, t_6, t_8, t_{10}$ = pasukan perang sayap kanan

Gambar 2.3.3 Ilustrasi Graf dari Suatu Barisan atau Formasi Orang-orang mukmin yang berperang

Dari Gambar 2.3.5 terlihat bahwa ada suatu graf yang terdiri dari 11 titik dengan masing-masing titik berderajat 2 (beraturan 2). Titik-titiknya adalah $p, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8, t_9,$ dan t_{10}. Titik p mengilustrasikan sebagai panglima perang yang memimpin pasukannya. Titik $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8, t_9,$ dan t_{10} mempresentasikan tentara dari pasukan perang tersebut. Titik-titik tersebut saling terhubung karena adanya rasa iman pada pasukan perang tersebut. Barisan tentara-tentara itu diatur dengan sangat rapi dan dipimpin oleh seorang panglima yang sangat tangguh. Formasi atau barisan yang beraturan seakan-akan seperti bangunan yang tersusun kokoh dan mampu mengalahkan musuh. Seperti yang tertulis dalam al-Qur'an surat ash-Shaff ayat 4 yaitu:

إِنَّ ٱللَّهَ يُحِبُّ ٱلَّذِينَ يُقَٰتِلُونَ فِي سَبِيلِهِۦ صَفًّا كَأَنَّهُم بُنْيَٰنٌ مَّرْصُوصٌ ﴿٤﴾

Artinya: *"Sesungguhnya Allah menyukai orang-orang yang berperang di jalan-Nya dalam barisan yang teratur seakan-akan mereka seperti suatu bangunan yang tersusun kokoh."* (QS. ash-Shaff : 4)

Kata *shaffan* atau barisan adalah sekelompok dari sekian banyak anggotanya yang sejenis dan kompak serta berada dalam satu wadah yang kukuh lagi teratur. Kata *"marshush"* berarti berdempet dan tersusun dengan rapi. Yang dimaksud ayat tersebut adalah kekompakan anggota barisan, kedisiplinan mereka yang tinggi, serta kekuatan mental mereka menghadapi ancaman dan tantangan (Shihab, 2003: 191).

Teorema 1

Jika G adalah suatu graf dengan $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ maka $\sum_{i=1}^{p} deg_G\,(v_i) = 2q$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:7).

Bukti:

Setiap sisi adalah terkait langsung dengan 2 titik, jika setiap derajat titik dijumlahkan, maka setiap sisi dihitung dua kali.

Akibat 1:

Pada sebarang graf, jumlah derajat titik ganjil adalah genap.

Bukti:

Misalkan graf G dengan ukuran q. Maka ambil W yang memuat himpunan titik ganjil pada G serta U yang memuat himpunan titik genap di G. Dari teorema 1 maka diperoleh:

$$\sum_{v \in v(G)} deg_G\, v = \sum_{v \in W} deg_G\, v + \sum_{v \in U} deg_G v = 2q$$

dengan demikian karena $\sum_{v \in U} deg_G v$ genap, maka $\sum_{v \in W} deg_G\, v$ juga genap. Sehingga $|W|$ adalah genap.

2.4 Graf Terhubung

Definisi 5

Sebuah jalan (*walk*) $u - v$ di graf G adalah barisan berhingga (tak kosong). $W: u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_n, v_n = v$ yang berselang-seling antara titik dan sisi, yang dimulai dari titik dan diakhiri dengan titik sedemikian hingga untuk $0 \le i \le n$. Dengan $e_i = v_{i-1}v_i$ adalah sisi di G.

v_0 disebut titik awal, v_n disebut titik akhir, $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ disebut titik interval, dan n menyatakan panjang dari W (Chartrand dan Lesniak, 1986:26).

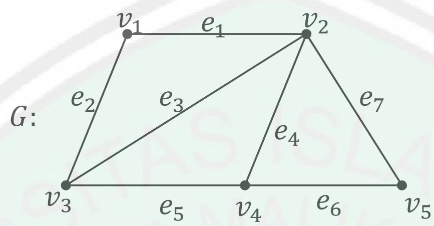
Definisi 6

Jalan $u - v$ yang semua sisinya berbeda disebut *trail* $u - v$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:26).

Definisi 7

Jalan $u - v$ yang semua titiknya berbeda disebut lintasan (*path*) $u - v$. Dengan demikian, semua lintasan adalah *trail* (Chartrand dan Lesniak, 1986:26).

Contoh 2.4.1



Gambar 2.4.1 Jalan pada Graf

Dari graf pada Gambar 2..4.1 $v_1, e_1, v_2, e_3, v_3, e_5, v_4, e_6, v_5$ disebut sebagai *trail*, sedangkan $v_1, e_1, v_2, e_4, v_4, e_6, v_5$ disebut sebagai *lintasan*.

Definisi 8

Sebuah trail tertutup (*closed trail*) yang tak trivial pada graf G disebut *sirkuit* G (Chartrand dan Lesniak, 1986:28).

Dari graf pada Gambar 2.4.1 contoh dari sirkuit adalah $v_3, e_3, v_2, e_7, v_5, e_6, v_4, e_4, v_2, e_1, v_1, e_2, v_3$.

Definisi 9

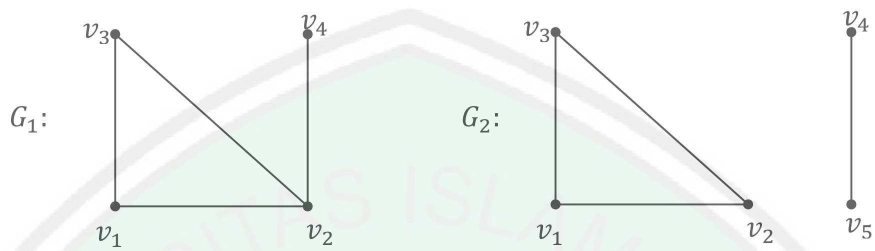
Sirkuit $v_1, v_2, \dots v_n, v_1$ $(n \geq 3)$ dengan v_i adalah titik-titik berbeda $1 \leq i \leq n$ disebut sikel (*cycle*) (Chartrand dan Lesniak, 1986:28).

Dari graf pada Gambar 2.4.1 contoh dari sikel adalah $v_1, e_1, v_2, e_4, v_4, e_5, v_3, e_2, v_1$.

Definisi 10

Misalkan u dan v titik berbeda pada graf G. Maka titik u dan v dapat dikatakan terhubung (*connected*), jika terdapat lintasan $u - v$ di G. Sedangkan suatu graf G dapat dikatakan terhubung, jika untuk setiap titik u dan v di G terhubung (Chartrand dan Lesniak, 1986:28).

Contoh 2.4.2



Gambar 2.4.2 Graf Terhubung dan Graf Tak Terhubung

Pada Gambar 2.4.2, G_1 adalah graf terhubung karena setiap titiknya terhubung, yaitu terdapat lintasan dari setiap titik ke tiap titik yang lain, sedangkan G_2 adalah graf tak terhubung karena terdapat titik yang tidak terhubung dengan titik yang lain, yaitu v_1, v_2, dan v_3 tidak terhubung dengan v_4 dan v_5.

2.5 Graf dengan Nama Tertentu

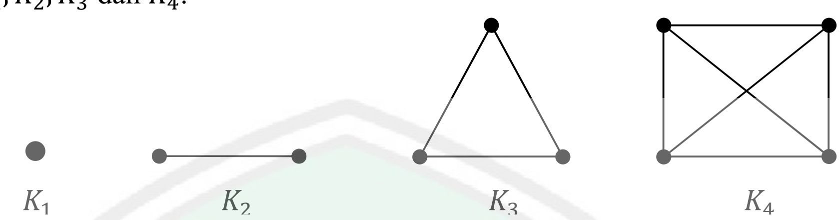
2.5.1 Graf Komplit

Definisi 11

Graf komplit (*complete graph*) adalah graf dengan setiap pasang titik yang berbeda dihubungkan oleh satu sisi. Graf komplit dengan n titik dinyatakan dengan K_n (Purwanto, 1998:21).

Contoh 2.5.1

Graf K_1, K_2, K_3 dan K_4.



Gambar 2.5.1 Graf Komplit

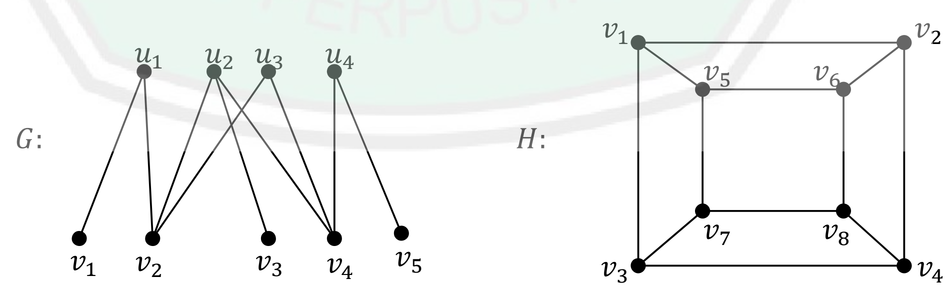
2.5.2 Graf Bipartisi

Definisi 12

Graf bipartisi (*bipartite graph*) adalah graf yang himpunan titiknya dapat dipisahkan menjadi dua himpunan tak kosong X dan Y sehingga masing-masing sisi di graf tersebut menghubungkan satu titik di X dan satu titik di Y, X dan Y disebut himpunan partisi (Purwanto, 1998:21).

Contoh 2.5.2

G adalah graf bipartisi dengan himpunan partisi $X = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ dan $Y = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ demikian juga H adalah graf bipartisi dengan himpunan partisi $X = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $Y = \{v_5, v_6, v_7, v_8\}$.



Gambar 2.5.2 Graf Bipartisi

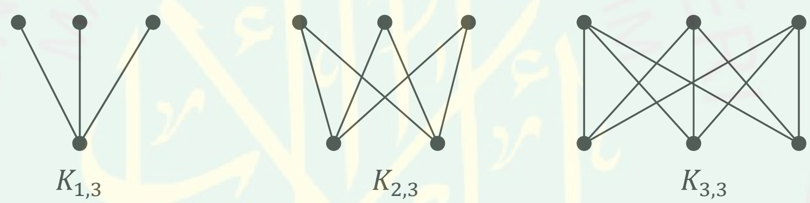
2.5.3 Graf Bipartisi Komplit

Definisi 13

Graf bipartisi komplit (*complete bipartite graph*) adalah graf bipartisi dengan himpunan bipartisi X dan Y sehingga masing-masing titik di X dihubungkan dengan masing-masing titik di Y oleh tepat satu sisi. Jika $|X| = m$ dan $|Y| = n$, maka graf bipartisi tersebut dinyatakan dengan $K_{m,n}$ (Purwanto, 1998:22).

Contoh 2.5.3

Graf $K_{1,3}, K_{2,3}$, dan $K_{3,3}$.



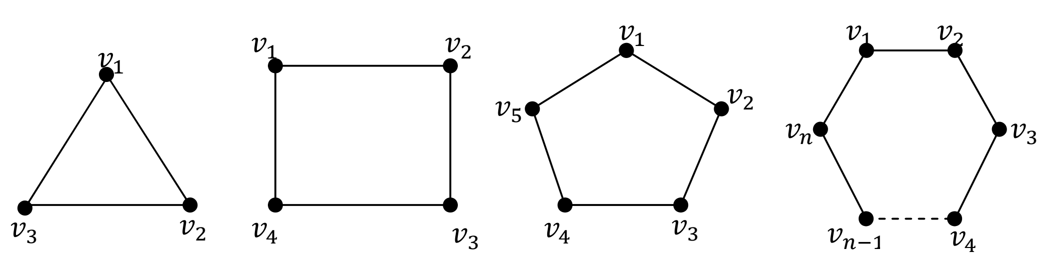
Gambar 2.5.3 Graf Bipartisi Komplit

2.5.4 Graf Sikel

Definisi 14

Graf sikel adalah graf yang terdiri dari satu sikel (Purwanto, 1998:22). Graf sikel dinotasikan dengan C_n.

Contoh 2.5.4

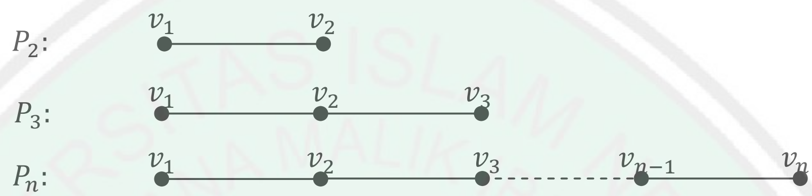


Gambar 2.5.4 Graf Sikel

2.5.5 Graf Lintasan

Graf yang terdiri dari satu lintasan disebut graf lintasan (Purwanto, 1998:22). Graf lintasan dengan n titik dinotasikan dengan P_n, dengan n bilangan asli.

Contoh 2.5.5



Gambar 2.5.5 Graf Lintasan

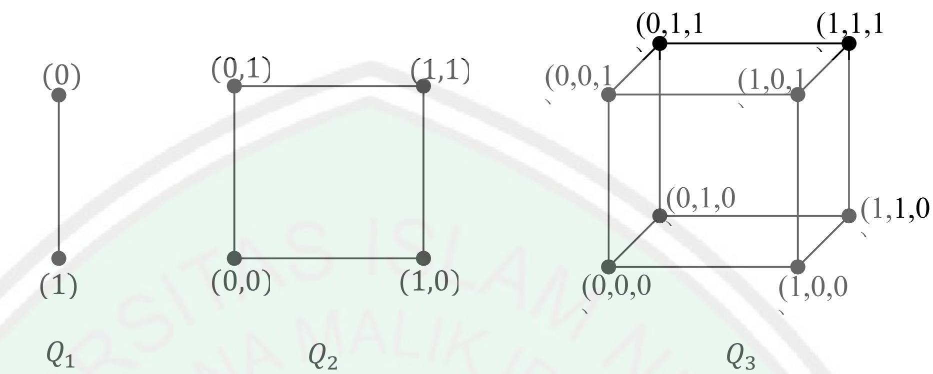
2.5.6 Graf Kubus

Definisi 15

Graf kubus (*cube graph*) adalah graf sederhana yang himpunan titiknya berupa himpunan tupel-n (*binary n-tupel*) $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, yaitu a_i adalah 0 atau 1 , $i = 1,2,3, \dots, n$, dan dua titik terhubung langsung jika dan hanya jika dua tupel yang bersesuaian berbeda tepat di satu tempat. Graf kubus yang diperoleh dinyatakan dengan Q_n (Purwanto, 1998:23).

Contoh 2.5.6

Berikut ini adalah contoh graf Q_1, Q_2, dan Q_3.



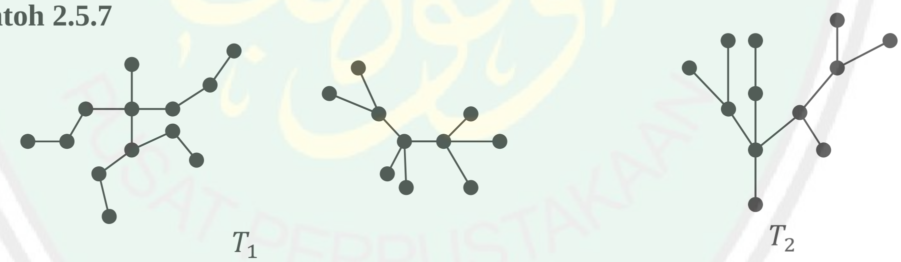
Gambar 2.5.6 Graf Kubus

2.5.7 Hutan (*forest*)

Definisi 16

Hutan (*forest*) adalah graf yang tidak memuat sikel. Hutan yang terhubung disebut pohon (*tree*) (Purwanto, 1998:23).

Contoh 2.5.7



Gambar 2.5.7 Hutan (*forest*) dan Pohon (*tree*)

Pada Gambar 2.5.7, T_1 merupakan hutan karena pada T_1 tidak memuat sikel sedangkan T_2 merupakan pohon karena memuat hutan yang terhubung.

2.6 Macam-macam Bangun Ruang

2.6.1 Prisma

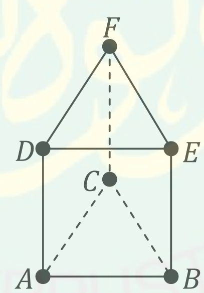
Prisma adalah suatu bangun ruang yang dibatasi oleh dua bidang berhadapan yang sama, sebangun atau kongruen dan sejajar, serta bidang-bidang lain yang berpotongan menurut rusuk-rusuk yang sejajar (www.crayonpedia.org).

Prisma diberi nama berdasarkan bentuk segi-n pada bidang alas atau bidang atas. Contoh: prisma segiempat, karena bidang alas dan atas berbentuk segiempat.

Rusuk-rusuk pada prisma tegak lurus terhadap bidang alas maupun bidang atas, sehingga disebut dengan prisma tegak. Bidang-bidang tegak berbentuk persegi panjang.

Contoh 2.6.1

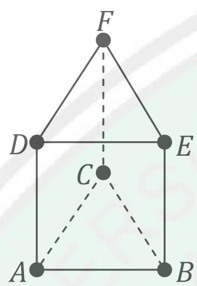
Prisma Segitiga $ABCDEF$



Gambar 2.6.1 Prisma Segitiga $ABCDEF$

Pada Gambar 2.6.1 diperoleh, bidang ABC merupakan bidang alas dan bidang DEF merupakan bidang atas, dan kedua bidang tersebut berbentuk segitiga. Bidang-bidang tegaknya adalah $ABED, ACFD,$ dan $BCFE$, dan ketiga bidang tersebut berbentuk persegi panjang.

Prisma segitiga $ABCDEF$ dengan 6 titik yaitu titik $A, B, C, D, E,$ dan F, dapat mengilustrasikan rukun iman yang berjumlah 6, yaitu iman kepada Allah, iman kepada para malaikat, iman kepada kitab-kitab Allah, iman kepada para rasul, iman kepada hari akhir, dan iman kepada qada' dan qadar (takdir).



Keterangan:
A = iman kepada Allah
B = iman kepada para malaikat
C = iman kepada kitab-kitab Allah
D = iman kepada para rasul
E = iman kepada hari akhir
F = iman kepada qada' dan qadar

Gambar 2.6.2 Ilustrasi Rukun Iman

Iman kepada Allah artinya merealisasikan pengesaan Allah SWT sehingga tidak menggantungkan harapan kepada selain Allah, tidak takut kepada yang lain, dan tidak menyembah kepada yang lain (Muhammad, 2003:34).

Iman kepada malaikat artinya mengimani wujud mereka, mengimanai mereka yang dikenali nama-namanya, mengimani sifat-sifat mereka yang dikenali, dan mengimani tugas-tugas yang diperintahkan Allah kepada mereka (Muhammad, 2002:36-37).

Iman kepada kitab-kitab Allah artinya mengimani bahwa benar-benar diturunkan dari Allah, mengimani kitab-kitab yang sudah dikenali namanya (Zabur, Taurat, Injil, dan al-Qur'an), membenarkan seluruh beritanya yang benar, dan mengerjakan seluruh hukum yang belum dinasakh (dihapus) serta rela da pasrah pada hukum itu (Muhammad, 2003:42).

Iman kepada para rasul artinya mengimani bahwa risalah mereka benar-benar dari Allah, mengimani para nabi yang sudah dikenali nama-namanya, membenarkan berita-berita mereka yang benar, dan mengamalkan syariat dari mereka yang diutus kepada manusia, yaitu nabi terakhir Muhammad SAW yang diutus Allah kepada seluruh manusia (Muhammad, 2003:49-51).

Iman kepada hari akhir artinya mengimani *ba'ats* (kebangkitan) yaitu menghidupkan kembali orang-orang yang sudah mati ketika tiupan sangkakala yang kedua kali, mengimani hisab (perhitungan) dan jaza' (pembalasan) dengan meyakini bahwa seluruh perbuatan manusia akan dihisab dan dibalas, dan mengimani surga dan neraka sebagai tempat manusia yang abadi (Muhammad, 2003:54).

Iman kepada qada' dan qadar artinya mengimani bahwa Allah mengetahui segala sesuatu secara global maupun terperinci, azali dan abadi, baik yang berkaitan dengan perbuatanNya maupun perbuatan para hambaNya, mengimani bahwa Allah telah menulis hal itu di "Lauh Mahfuzh", mengimani bahwa seluruh yang ada tidak akan ada kecuali dengan kehendak Allah, dan mengimani bahwa seluruhnya yang ada, zatnya, sifatnya, dan geraknya diciptakan oleh Allah (Muhammad, 2003:77).

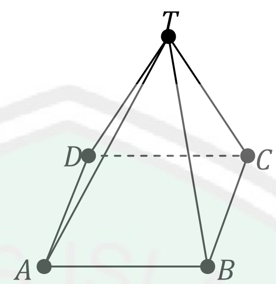
2.6.2 Limas

Limas adalah bangun ruang yang dibatasi oleh sebuah segitiga ataupun segibanyak sebagai alas dan beberapa buah bidang berbentuk segitiga sebagai bidang tegak yang bertemu pada satu titik puncak (www.crayonpedia.org).

Limas diberi nama berdasarkan bentuk segi-n pada bidang alas.

Contoh 2.6.2

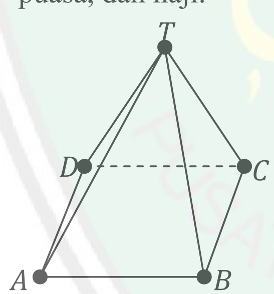
Limas Segiempat $\boldsymbol{T.ABCD}$



Gambar 2.6.3 Limas Segiempat $\boldsymbol{T.ABCD}$

Pada Gambar 2.16 diperoleh, bidang $ABCD$ sebagai bidang alas berbentuk segiempat dan titik T sebagai titik puncak. Bidang-bidang tegaknya adalah TAB, TBC, TCD, dan TAD, dan keempat bidang tersebut berbentuk segitiga.

Limas segiempat $T.ABCD$ dengan 5 titik yaitu titik T, A, B, C, dan D dapat mengilustrasikan rukun Islam yang berjumlah 5, yaitu syahadat, shalat, zakat, puasa, dan haji.



Keterangan:
T = Syahadat
A = Shalat
B = Zakat
C = Puasa
D = Haji

Gambar 2.6.4 Ilustrasi Rukun Islam

Islam didirikan atas lima dasar, sebagaimana yang tersebut dalam sebuah hadits yang diriwayatkan oleh Ibnu Umar:

"Islam didirikan atas lima dasar, yaitu: (1) Bersaksi bahwa tiada Tuhan yang berhak disembah selain Allah, dan Muhammad adalah hamba dan Rasul-Nya; (2)

mendirikan shalat; (3) mengeluarkan zakat; (4) puasa ramadhan; dan (5) beribadah haji ”. (HR. Al-Bukhari dan Muslim).

2.6.3 Bola

Bola adalah suatu bangun ruang yang dibatasi oleh sebuah sisi lengkung/ kulit bola (www.crayonpedia.org).

2.7 Pewarnaan pada Graf

Ada tiga macam pewarnaan pada graf, yaitu pewarnaan titik, pewarnaan sisi, dan pewarnaan peta.

2.7.1 Pewarnaan Titik (*Vertex Colouring*)

Definisi 17

Pewarnaan titik dari graf G adalah sebuah pemetaan warna-warna ke titik-titik dari G sedemikian hingga titik yang terhubung langsung mempunyai warna-warna yang berbeda. Graf G berwarna n jika terdapat sebuah pewarnaan dari G yang menggunakan n warna (Purwanto, 1998:73).

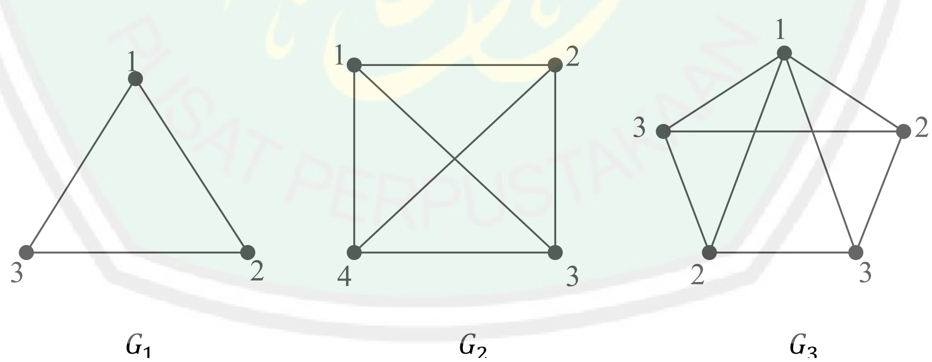
Dalam pewarnaan titik erat kaitannya dengan penentuan bilangan kromatik, yaitu masalah menentukan banyak warna minimum yang diperlukan untuk mewarnai titik-titik pada graf sehingga dua titik yang terhubung langsung mempunyai warna yang berbeda.

Bilangan kromatik (*chromatic number*) dari graf G, dinyatakan dengan $\chi(G)$, adalah bilangan k terkecil sehingga G dapat diwarnai dengan k warna. Biasanya warna-warna yang digunakan untuk mewarnai suatu graf dinyatakan dengan $1,2,3,\dots,k$. Jelas bahwa $\chi(G) \leq |V(G)|$. Sedangkan cara yang mudah untuk menentukan batas bawah dari $\chi(G)$ adalah dengan cara mencari graf bagian komplit yang terbesar di G (Purwanto, 1998:73).

Beberapa graf tertentu dapat langsung ditentukan bilangan kromatiknya. Graf kosong N_n memiliki $\chi(N_n) = 1$. Karena semua titik tidak terhubung, jadi untuk mewarnai semua titik cukup dibutuhkan satu warna saja. Graf lengkap K_n memiliki $\chi(K_n) = n$ sebab semua titik saling terhubung sehingga diperlukan n warna.

Contoh 2.7.1

Pada gambar 2.7.1 dapat dilihat bahwa untuk graf G_1, karena $|V(G_1)| = 3$, maka $\chi(G_1) \leq 3$. Untuk G_2, karena $|V(G_2)| = 4$, maka $\chi(G_2) \leq 4$. Sedangkan semua titik pada G_1 dan G_2 saling terhubung langsung, akibatnya $\chi(G_1) \geq 3$ dan $\chi(G_1) \geq 4$. Jadi, $\chi(G_1) = 3$ dan $\chi(G_1) = 4$. Untuk graf G_3, $\chi(G_3) \leq 3$, Karena 3 warna cukup untuk mewarnainya seperti pada gambar 2.7.1. Karena graf G_3 memuat graf komplit K_3, maka $\chi(G_3) \geq 3$, akibatnya $\chi(G_3) = 3$.



Gambar 2.7.1 Pewarnaan Titik pada G_1, G_2 dan G_3

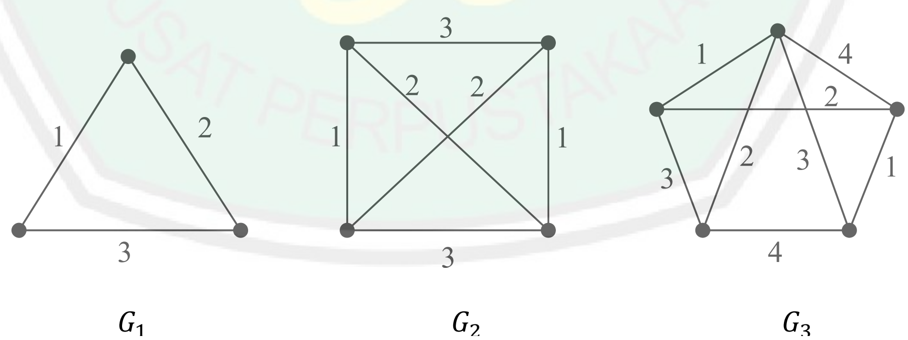
2.7.2 Pewarnaan Sisi (*Edge Colouring*)

Definisi 18

Suatu pewarnaan sisi-k untuk graf G adalah suatu penggunaan sebagian atau semua k warna untuk mewarnai semua sisi di G sehingga setiap pasang sisi yang mempunyai titik persekutuan diberi warna yang berbeda. Jika G mempunyai pewarnaan sisi-k, maka dikatakan sisi-sisi di G diwarnai dengan k warna (Purwanto, 1998:80).

Indeks kromatik (*chromatic index*) dari graf G dinyatakan dengan $\chi'(G)$, adalah bilangan k terkecil sehingga sisi di G dapat diwarnai dengan k warna. Biasanya warna-warna yang digunakan untuk mewarnai sisi-sisi suatu graf dinyatakan dengan $1,2,3,\ldots,k$. Jelas bahwa $\chi'(G) \leq |E(G)|$, dan jika derajat titik maksimum di G adalah $\Delta(G)$, maka $\chi'(G) \geq \Delta(G)$. Untuk graf sikel dengan n titik, misalkan C_n, jelas bahwa $\chi'(C_n) = 2$ untuk n genap dan $\chi'(C_n) = 3$ untuk n ganjil (Purwanto, 1998:80).

Contoh 2.7.2



Gambar 2.7.2 Pewarnaan Sisi G_1, G_2 dan G_3

Untuk graf G_1 jelas bahwa $\chi'(G_1) = 3$. Untuk G_2, $\chi'(G_2) \geq 3$ karena $\Delta(G_2) = 3$, dan $\chi'(G_2) \leq 3$ karena sisi-sisi di G_2 dapat diwarnai dengan 3 warna seperti pada gambar 2.7.2. Akibatnya $\chi'(_2) = 3$.

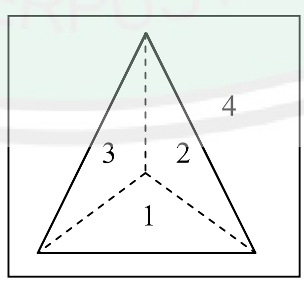
Untuk G_3, $\chi'(G_3) \geq 4$ karena $\Delta(G_3) = 4$ dan $\chi'(G_3) \leq 4$ karena sisi-sisi di G_3 dapat diwarnai dengan 4 warna seperti pada gambar 2.7.1. Akibatnya, $\chi'(G_3) = 4$.

2.7.3 Pewarnaan Permukaan (*Face Colouring*)

Definisi 19

k- *face colouring* pada graf bidang G adalah pemberian k warna $1,2,3,\dots,k$ pada permukaan di G; pewarnaannya tepat jika tidak ada dua permukaan dipisahkan oleh sebuah sisi yang berwarna sama. G dapat diwarna k-permukaan jika memenuhi pewarnaan k −permukaan, dan bilangan k terkecil sehingga permukaan di G dapat diwarnai dengan k warna adalah bilangan kromatik permukaan pada G, dilambangkan dengan $\chi^*(G)$ atau $\chi''(G)$ (Bondy, 1982:158).

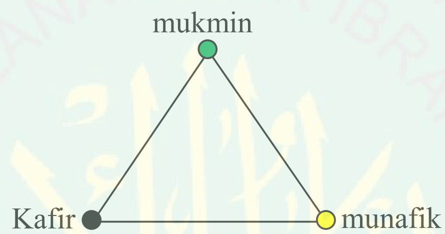
Contoh 2.7.3



$\chi''(G) = 4$

Gambar 2.7.3 *Face Colouring* Graf *G*

Pewarnaan pada suatu graf jika dianalogikan dalam Islam merupakan suatu warna atau identitas oleh setiap orang. Manusia terbagi menjadi 3 identitas, yaitu mukmin, munafik, dan kafir. Misalkan orang mukmin, orang munafik, dan orang kafir digambarkan dalam suatu graf. Orang mukmin digambarkan dengan suatu titik dengan warna hijau, orang munafik dengan warna kuning, dan orang kafir dengan warna hitam. Misalkan graf pada gambar 2.7.4 mempresentasikan ke-3 macam identitas tersebut.



Gambar 2.7.4 Representasi Graf dari Pewarnaan untuk suatu Identitas Manusia

Seorang manusia beridentitas mukmin jika dia mempunyai ciri-ciri yaitu apabila disebut nama Allah gemetarlah hatinya, dan apabila dibacakan kepada dia ayat-ayatNya, bertambahlah imannya. Seperti yang terdapat dalam al-Qur'an surat al-Anfaal ayat 2:

إِنَّمَا ٱلْمُؤْمِنُونَ ٱلَّذِينَ إِذَا ذُكِرَ ٱللَّهُ وَجِلَتْ قُلُوبُهُمْ وَإِذَا تُلِيَتْ عَلَيْهِمْ ءَايَٰتُهُۥ
زَادَتْهُمْ إِيمَٰنًا وَعَلَىٰ رَبِّهِمْ يَتَوَكَّلُونَ ﴿٢﴾

Artinya: : *"Sesungguhnya orang-orang yang beriman ialah mereka yang bila disebut nama Allah gemetarlah hati mereka, dan apabila dibacakan ayat-ayatNya bertambahlah iman mereka (karenanya), dan hanya kepada Tuhanlah mereka bertawakkal."* (Qs. al-Anfaal : 2)

Seorang manusia beridentitas munafik jika dia mempunyai ciri-ciri yaitu jika dia berbicara berbohong, jika dia berjanji dia ingkar, dan jika dipercaya dia berkhianat. Rasul SAW bersabda: *"Tanda-tanda orang munafik ada 3, apabila dia berkata dia bohong, apabila dia berjanji dia ingkar, dan apabila dia diamanahi dia berkhianat"* (HR. Bukhari dan Muslim dari Abu Hurairah).

Seorang manusia beridentitas kafir jika dia mempunyai ciri-ciri yaitu dia tidak melaksanakan syariat Allah. Dia tidak dapat memperhatikan dan memahami ayat-ayat al-Qur'an yang dia dengar dan tidak dapat mengambil pelajaran dari tanda-tanda kebesaran Allah. Seperti dalam firman Allah dalam al-Qur'an surat al-Baqarah ayat 6-7:

إِنَّ ٱلَّذِينَ كَفَرُواْ سَوَآءٌ عَلَيۡهِمۡ ءَأَنذَرۡتَهُمۡ أَمۡ لَمۡ تُنذِرۡهُمۡ لَا يُؤۡمِنُونَ ٦ خَتَمَ ٱللَّهُ
عَلَىٰ قُلُوبِهِمۡ وَعَلَىٰ سَمۡعِهِمۡۖ وَعَلَىٰٓ أَبۡصَٰرِهِمۡ غِشَٰوَةٞۖ وَلَهُمۡ عَذَابٌ عَظِيمٞ ٧

Artinya: *"Sesungguhnya orang-orang kafir, sama saja bagi mereka, kamu beri peringatan atau tidak kamu beri peringatan, mereka tidak juga akan beriman. Allah Telah mengunci-mati hati dan pendengaran mereka, dan penglihatan mereka ditutup, dan bagi mereka siksa yang amat berat."* (QS. al-Baqarah : 6-7)

BAB III

PEMBAHASAN

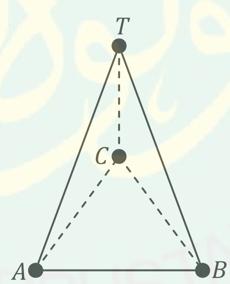
Pada bab III akan dibahas mengenai pewarnaan permukaan (*face colouring*) pada limas, prisma, dan gabungan limas dan prisma. Gabungan limas dan prisma didefinisikan bahwa bidang alas limas berimpit dengan bidang atas prisma.

3.1 Pewarnaan Permukaan (*face colouring*) pada Limas Segi-n (L_n)

Berikut ini adalah beberapa contoh pewarnaan permukaan pada bangun ruang limas. Langkah-langkahnya adalah sebagai berikut:

1. Menentukan Bilangan Kromatik dari Pewarnaan Permukaan pada Limas Segi-n, $n = 3, 4, 5, 6$

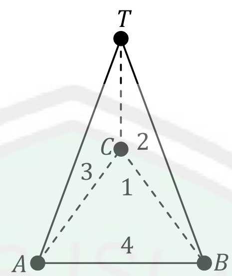
a. Limas Segitiga (L_3)



Gambar 3.1.1 Limas Segitiga $T.ABC$

Pada bangun limas segitiga $T.ABC$ diperoleh bidang ABC sebagai bidang alas yang berbentuk segitiga dan titik T sebagai titik puncak. Bidang-bidang tegaknya adalah $TAB, TBC,$ dan TAC, ketiga bidang tersebut berbentuk segitiga.

Pada bangun limas segitiga $T.ABC$ tersebut akan diwarna masing-masing permukaan atau bidangnya dan harus mendapat tepat satu warna serta dua bidang yang berpotongan atau berbatasan langsung berwarna berbeda. Pewarnaan permukaan (bidang) pada limas segitiga $T.ABC$ adalah sebagai berikut:

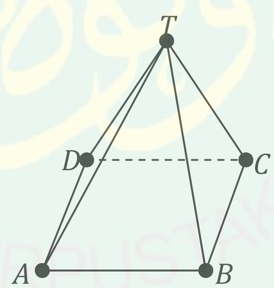


$$\chi''(L_3) = 4$$

Gambar 3.1.2 *Face Colouring* pada Limas Segitiga $T.ABC$

Pada Gambar 3.1.2 diperoleh pewarnaan permukaan pada limas segitiga $T.ABC$ yaitu warna 1 untuk bidang tegak TAB, warna 2 untuk bidang tegak TBC, warna 3 untuk bidang tegak TAC, dan warna 4 untuk bidang alas ABC. Jadi, warna minimal yang dibutuhkan (bilangan kromatik) untuk mewarnai permukaan limas segitiga $T.ABC$ adalah sebanyak 4.

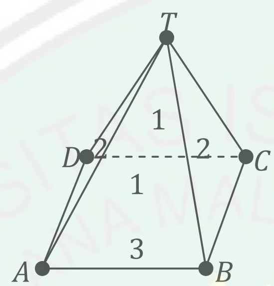
b. Limas Segiempat (L_4)



Gambar 3.1.3 Limas Segiempat $T.ABCD$

Pada bangun limas segiempat $T.ABCD$ diperoleh bidang $ABCD$ sebagai bidang alas yang berbentuk segiempat dan titik T sebagai titik puncak. Bidang-bidang tegaknya adalah TAB, TBC, TCD dan TAD, keempat bidang tersebut berbentuk segitiga.

Pada bangun limas segiempat $T.ABCD$ tersebut akan diwarna masing-masing permukaan atau bidangnya dan harus mendapat tepat satu warna serta dua bidang yang berpotongan atau berbatasan langsung berwarna berbeda. Pewarnaan permukaan (bidang) pada limas segiempat $T.ABCD$ adalah sebagai berikut:

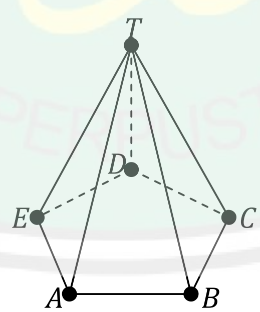


$\chi''(L_4) = 3$

Gambar 3.1.4 *Face Colouring* pada Limas Segiempat $T.ABCD$

Pada Gambar 3.1.4 diperoleh pewarnaan permukaan pada limas segiempat $T.ABCD$ yaitu warna 1 untuk bidang tegak TAB dan TCD, warna 2 untuk bidang tegak TBC dan TAD, dan warna 3 untuk bidang alas $ABCD$. Jadi, warna minimal yang dibutuhkan (bilangan kromatik) untuk mewarnai permukaan limas segiempat $T.ABCD$ adalah sebanyak 3.

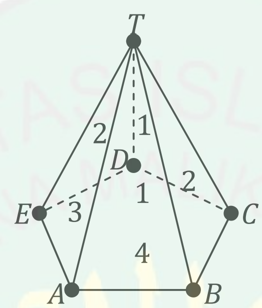
c. Limas Segilima (L_5)



Gambar 3.1.5 Limas Segilima $T.ABCDE$

Pada bangun limas segilima $T.ABCDE$ diperoleh bidang $ABCDE$ sebagai bidang alas yang berbentuk segilima dan titik T sebagai titik puncak. Bidang-bidang tegaknya adalah TAB, TBC, TCD, TDE dan TAE berbentuk segitiga.

Pada bangun limas segilima $T.ABCDE$ tersebut akan diwarna masing-masing permukaan atau bidangnya dan harus mendapat tepat satu warna serta dua bidang yang berpotongan atau berbatasan langsung berwarna berbeda. Pewarnaan permukaan (bidang) pada limas segiempat $T.ABCDE$ adalah sebagai berikut:

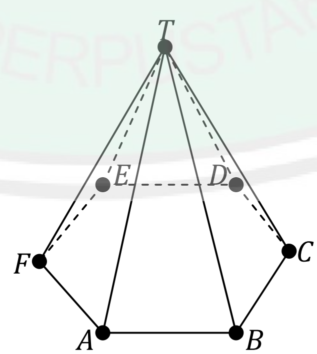


$\chi''(L_5) = 4$

Gambar 3.1.6 *Face Colouring* pada Limas Segilima $T.ABCDE$

Pada Gambar 3.1.6 diperoleh pewarnaan permukaan pada limas segilima $T.ABCDE$ yaitu warna 1 untuk bidang tegak TAB dan TCD, warna 2 untuk bidang tegak TBC dan TDE, warna 3 untuk bidang tegak TAE, dan warna 4 untuk bidang alas $ABCDE$. Jadi, warna minimal yang dibutuhkan (bilangan kromatik) untuk mewarnai permukaan limas segitiga $T.ABCDE$ adalah sebanyak 4.

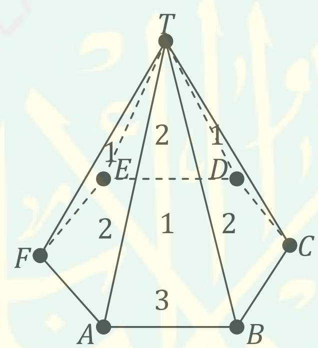
d. Limas Segienam (L_6)



Gambar 3.1.7 Limas Segienam $T.ABCDEF$

Pada bangun limas segienam $T.ABCDEF$ diperoleh bidang $ABCDEF$ sebagai bidang alas yang berbentuk segienam dan titik T sebagai titik puncak. Bidang-bidang tegaknya adalah TAB, TBC, TCD, TDE, TEF dan TAF, keenam bidang tersebut berbentuk segitiga.

Pada bangun limas segienam $T.ABCDEF$ tersebut akan diwarna masing-masing permukaan atau bidangnya dan harus mendapat tepat satu warna serta dua bidang yang berpotongan atau berbatasan langsung berwarna berbeda. Pewarnaan permukaan (bidang) pada limas segienam $T.ABCDEF$ adalah sebagai berikut:



$\chi''(L_6) = 3$

Gambar 3.1.8 *Face Colouring* pada Limas Segienam $T.ABCDEF$

Pada Gambar 3.1.8 diperoleh pewarnaan permukaan pada limas segienam $T.ABCDEF$ yaitu warna 1 untuk bidang tegak TAB, TCD dan TEF, warna 2 untuk bidang tegak TBC, TDE dan TAF, dan warna 3 untuk bidang alas $ABCDEF$. Jadi, warna minimal yang dibutuhkan (bilangan kromatik) untuk mewarnai permukaan limas segienam $T.ABCDEF$ adalah sebanyak 3.

2. Mencari Pola Bilangan Kromatik Pewarnaan Permukaan Limas Segi-n (L_n)

Dari beberapa contoh pewarnaan permukaan pada bangun ruang limas segi-n diperoleh bilangan kromatiknya yaitu

$\chi''(L_3) = 4$

$\chi''(L_4) = 3$

$\chi''(L_5) = 4$

$\chi''(L_6) = 3$

Dari data di atas terlihat pola yang dapat dinyatakan secara umum sebagai berikut:

$$\chi''(L_n) = \begin{cases} 4, \text{untuk } n \text{ ganjil} \\ 3, \text{untuk } n \text{ genap} \end{cases}, \forall n \in N, n \geq 3$$

3. Pola yang Diperoleh Dinyatakan sebagai Konjektur

$$\chi''(L_n) = \begin{cases} 4, \text{untuk } n \text{ ganjil} \\ 3, \text{untuk } n \text{ genap} \end{cases}, \forall n \in N, n \geq 3$$

Konjektur tersebut bersifat induktif dan belum diterima kebenarannya dalam matematika.

4. Konjektur Tersebut Dinyatakan sebagai Teorema dan Dibuktikan

Teorema 3.1

Bilangan kromatik untuk pewarnaan permukaan (*face colouring*) pada limas segi-n (L_n) adalah

$$\chi''(L_n) = \begin{cases} 4, \text{untuk } n \text{ ganjil} \\ 3, \text{untuk } n \text{ genap} \end{cases}, \forall n \in N, n \geq 3$$

Bukti:

a. Kasus I, untuk n Ganjil

Setiap limas segi-n dimana n ganjil mempunyai $n + 1$ bidang (permukaan) yaitu n bidang tegak dan 1 bidang alas. Misalkan bidang alas diberi nama b_0 dan bidang tegak diberi nama $b_i, i = 1,2,3, \dots, n$.

Terlihat bahwa b_i dimana i ganjil dan $i \neq n$ tidak saling berbatasan langsung (tidak berpotongan) maka dapat diberi warna sama. Demikian juga b_i dimana i genap tidak saling berbatasan langsung (tidak berpotongan) maka dapat diberi warna sama.

Pilih warna 1 untuk $b_i$dimana i ganjil dan $i \neq n$. Karena b_i dimana i genap berbatasan langsung (berpotongan) dengan b_i dimana i ganjil, maka b_i dimana i genap tidak boleh diberi warna 1, maka diberi warna 2. Karena $b_i, i = n$ berbatasan langsung (berpotongan) dengan b_1 dan b_{n-1} yang masing-masing berwarna 1 dan 2, maka $b_i, i = n$ tidak boleh diwarna 1 dan 2, maka diberi warna 3. Karena bidang alas (b_0) berbatasan langsung (berpotongan) dengan $b_i, i = 1,2,3, \dots n$ yang berwarna 1,2, dan 3, maka b_0 tidak boleh diberi warna-warna tersebut, maka b_0 diberi warna 4. Jadi, warna minimal yang diperlukan untuk pewarnaan permukaan (*face colouring*) pada limas segi-n, dimana n ganjil adalah sebanyak 4. Jadi, terbukti $\chi''(L_n) = 4,$ untuk n ganjil.

b. Kasus II, untuk n Genap

Setiap limas segi-n dimana n genap mempunyai $n+1$ bidang (permukaan) yaitu n bidang tegak dan 1 bidang alas. Misalkan bidang alas diberi nama b_0 dan bidang tegak diberi nama $b_i, i = 1,2,3,\ldots,n$.

Terlihat bahwa b_i dimana i ganjil tidak saling berbatasan langsung (tidak berpotongan) maka dapat diberi warna sama. Demikian juga b_i dimana i genap tidak saling berbatasan langsung (tidak berpotongan) maka dapat diberi warna sama.

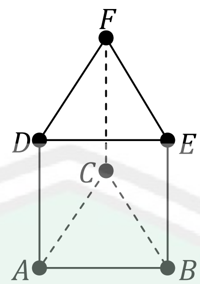
Pilih warna 1 untuk b_i dimana i ganjil. Karena b_i dimana i genap berbatasan langsung (berpotongan) dengan b_i dimana i ganjil, maka b_i dimana i genap tidak boleh diberi warna 1, maka diberi warna 2. Karena bidang alas (b_0) berbatasan langsung (berpotongan) dengan $b_i, i = 1,2,3,\ldots n$ yang berwarna 1 dan 2, maka b_0 tidak boleh diberi warna-warna tersebut, maka b_0 diberi warna 3. Jadi, warna minimal yang diperlukan untuk pewarnaan permukaan (*face colouring*) pada limas segi-n, dimana n genap adalah sebanyak 3. Jadi, terbukti $\chi''(L_n) = 3,$ untuk n genap.

3.2 Pewarnaan Permukaan (*face colouring*) pada Prisma Segi-n (P_n)

Berikut ini adalah beberapa contoh pewarnaan permukaan pada bangun ruang prisma. Langkah-langkahnya adalah sebagai berikut:

1. Menentukan Bilangan Kromatik dari Pewarnaan Permukaan pada Prisma Segi-n, $n = 3, 4, 5, 6$

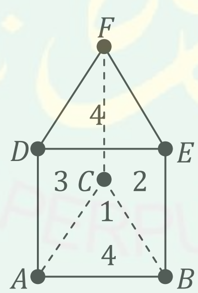
a. Prisma Segitiga (P_3)



Gambar 3.2.1 Prisma Segitiga $ABCDEF$

Pada bangun prisma segitiga $ABCDEF$ diperoleh bidang ABC sebagai bidang alas dan DEF sebagai bidang atas, kedua bidang tersebut berbentuk segitiga. Bidang-bidang tegaknya adalah $ABED, BCFE,$ dan $ACFD$, ketiga bidang tersebut berbentuk persegi panjang.

Pada bangun prisma segitiga $ABCDEF$ tersebut akan diwarna masing-masing permukaan atau bidangnya dan harus mendapat tepat satu warna serta dua bidang yang berpotongan atau berbatasan langsung berwarna berbeda. Pewarnaan permukaan (bidang) pada prisma segitiga $ABCDEF$ adalah sebagai berikut:

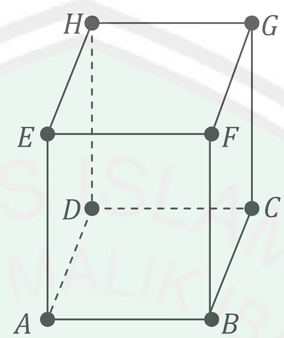


$$\chi''(P_3) = 4$$

Gambar 3.2.2 *Face colouring* pada Prisma Segitiga $ABCDEF$

Pada Gambar 3.2.2 diperoleh pewarnaan permukaan pada prisma segitiga $ABCDEF$ yaitu warna 1 untuk bidang tegak $ABED$, warna 2 untuk bidang tegak $BCFE$, warna 3 untuk bidang tegak $ACFD$, dan warna 4 untuk bidang alas ABC dan bidang atas DEF. Jadi, warna minimal yang dibutuhkan (bilangan kromatik) untuk mewarnai permukaan prisma segitiga $ABCDEF$ adalah sebanyak 4.

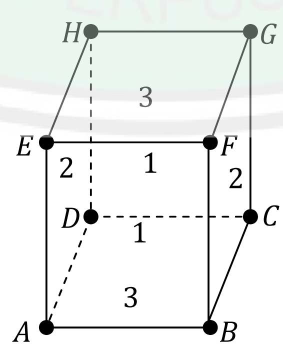
b. Prisma Segiempat (P_4)



Gambar 3.2.3 Prisma Segiempat $ABCDEFGH$

Pada bangun prisma segiempat $ABCDEFGH$ diperoleh bidang $ABCD$ sebagai bidang alas dan $EFGH$ sebagai bidang atas, kedua bidang tersebut berbentuk segiempat. Bidang-bidang tegaknya adalah $ABFE, BCGF, CDHG$ dan $ADHE$, keempat bidang tersebut berbentuk persegi panjang.

Pada bangun prisma segiempat $ABCDEFGH$ tersebut akan diwarna masing-masing permukaan atau bidangnya dan harus mendapat tepat satu warna serta dua bidang yang berpotongan atau berbatasan langsung berwarna berbeda. Pewarnaan permukaan (bidang) pada prisma segiempat $ABCDEFGH$ adalah sebagai berikut:

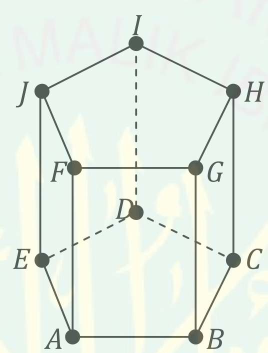


$\chi''(P_4) = 3$

Gambar 3.2.4 *Face Colouring* pada Prisma Segiempat $ABCDEFGH$

Pada Gambar 3.2.4 diperoleh pewarnaan permukaan pada prisma segiempat $ABCDEFGH$ yaitu warna 1 untuk bidang tegak $ABFE$ dan $CDHG$, warna 2 untuk bidang tegak $BCGF$ dan $ADHE$, dan warna 3 untuk bidang alas $ABCD$ dan bidang atas $EFGH$. Jadi, warna minimal yang dibutuhkan (bilangan kromatik) untuk mewarnai permukaan prisma segiempat $ABCDEFGH$ adalah sebanyak 3.

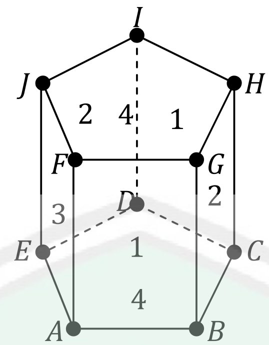
c. Prisma Segilima (P_5)



Gambar 3.2.5 Prisma Segilima $ABCDEFGHIJ$

Pada bangun prisma segilima $ABCDEFGHIJ$ diperoleh bidang $ABCDE$ sebagai bidang alas dan $FGHIJ$ sebagai bidang atas, kedua bidang tersebut berbentuk segilima. Bidang-bidang tegaknya adalah $ABGF$, $BCHG$, $CDIH$, $DEJI$, dan $AEJF$, kelima bidang tersebut berbentuk persegi panjang.

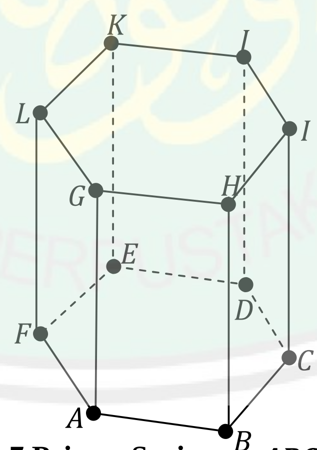
Dari bangun prisma segilima $ABCDEFGHIJ$ tersebut akan diwarna masing-masing permukaan atau bidangnya dan harus mendapat tepat satu warna serta dua bidang yang berpotongan atau berbatasan langsung berwarna berbeda. Pewarnaan permukaan (bidang) pada prisma segilima $ABCDEFGHIJ$ adalah sebagai berikut:



Gambar 3.2.6 *Face Colouring* pada Prisma Segilima $ABCDEFGHIJ$

Pada Gambar 3.2.6 diperoleh pewarnaan permukaan pada prisma segilima $ABCDEFGHIJ$ yaitu warna 1 untuk bidang tegak $ABGF$ dan $CDIH$, warna 2 untuk bidang tegak $BCHG$ dan $DEJI$, warna 3 untuk bidang tegak $AEJF$,dan warna 4 untuk bidang alas $ABCDE$ dan bidang atas $FGHIJ$. Jadi, warna minimal yang dibutuhkan (bilangan kromatik) untuk mewarnai permukaan prisma segilima $ABCDEFGHIJ$ adalah sebanyak 4.

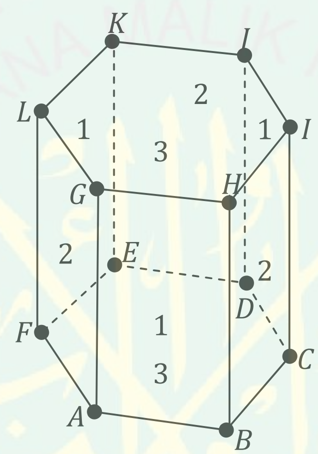
d. Prisma Segienam (P_6)



Gambar 3.2.7 Prisma Segienam $ABCDEFGHIJKL$

Pada bangun prisma segienam $ABCDEFGHIJKL$ diperoleh bidang $ABCDEF$ sebagai bidang alas dan $GHIJKL$ sebagai bidang atas, kedua bidang tersebut berbentuk segienam. Bidang-bidang tegaknya adalah $ABHG$, $BCIH$, $CDJI$, $DEKJ$, $EFLK$ dan $AFLG$, keenam bidang tersebut berbentuk persegi panjang.

Pada bangun prisma segienam $ABCDEFGHIJKL$ tersebut akan diwarna masing-masing permukaan atau bidangnya dan harus mendapat tepat satu warna serta dua bidang yang berpotongan atau berbatasan langsung berwarna berbeda. Pewarnaan permukaan (bidang) pada prisma segienam $ABCDEFGHIJKL$ adalah sebagai berikut:



$\chi''(P_6) = 3$

Gambar 3.2.8 *Face Colouring* pada Prisma Segienam $ABCDEFGHIJKL$

Pada Gambar 3.2.8 diperoleh pewarnaan permukaan pada prisma segienam $ABCDEFGHIJKL$ yaitu warna 1 untuk bidang tegak $ABHG$, $CDJI$, dan $EFLK$ warna 2 untuk bidang tegak $BCIH$, $DEKJ$ dan $AFLG$, dan warna 3 untuk bidang alas $ABCDEF$ dan bidang atas $GHIJKL$. Jadi, warna minimal yang dibutuhkan (bilangan kromatik) untuk mewarnai permukaan prisma segienam $ABCDEFGHIJKL$ adalah sebanyak 3.

2. **Mencari Pola Bilangan Kromatik Pewarnaan Permukaan Prisma Segi-n (P_n)**

Dari beberapa contoh pewarnaan permukaan pada bangun ruang prisma segi-n diperoleh bilangan kromatiknya yaitu

$$\chi''(P_3) = 4$$

$$\chi''(P_4) = 3$$

$$\chi''(P_5) = 4$$

$$\chi''(P_6) = 3$$

Dari data di atas terlihat pola yang dapat dinyatakan secara umum sebagai berikut:

$$\chi''(P_n) = \begin{cases} 4, \text{untuk } n \text{ ganjil} \\ & , \forall\, n \in N, n \geq 3 \\ 3, \text{ untuk } n \text{ genap} \end{cases}$$

3. **Pola yang Diperoleh Dinyatakan sebagai Konjektur**

$$\chi''(P_n) = \begin{cases} 4, \text{untuk } n \text{ ganjil} \\ & , \forall\, n \in N, n \geq 3 \\ 3, \text{ untuk } n \text{ genap} \end{cases}$$

Konjektur tersebut bersifat induktif dan belum diterima kebenarannya dalam matematika.

4. **Konjektur Tersebut Dinyatakan sebagai Teorema dan Dibuktikan**

Teorema 3.2

Bilangan kromatik untuk pewarnaan permukaan (*face colouring*) pada prisma segi-n (P_n) adalah

$$\chi''(P_n) = \begin{cases} 4, \text{untuk } n \text{ ganjil} \\ & , \forall\, n \in N, n \geq 3 \\ 3, \text{ untuk } n \text{ genap} \end{cases}$$

Bukti:

a. Kasus I, untuk n Ganjil

Setiap prisma segi-n dimana n ganjil mempunyai $n+2$ bidang (permukaan) yaitu n bidang tegak, 1 bidang alas dan 1 bidang atas. Misalkan bidang atas diberi nama b_0 dan bidang alas diberi nama $b_0{}'$, sedangkan bidang tegaknya diberi nama $b_i, i = 1,2,3,\dots,n$.

Terlihat bahwa b_i dimana i ganjil dan $i \neq n$ tidak saling berbatasan langsung (tidak berpotongan) maka dapat diberi warna sama. Demikian juga b_i dimana i genap tidak saling berbatasan langsung (tidak berpotongan) maka dapat diberi warna sama. Dan juga b_0 dan $b_0{}'$ tidak saling berbatasan langsung (tidak berpotongan) maka dapat diberi warna sama.

Pilih warna 1 untuk b_i dimana i ganjil dan $i \neq n$. Karena b_i dimana i genap berbatasan langsung (berpotongan) dengan b_i dimana i ganjil, maka b_i dimana i genap tidak boleh diberi warna 1, maka diberi warna 2. Karena $b_i, i = n$ berbatasan langsung (berpotongan) dengan b_1 dan b_{n-1} yang masing-masing berwarna 1 dan 2, maka $b_i, i = n$ tidak boleh diwarna 1 dan 2, maka diberi warna 3. Karena bidang alas (b_0) dan bidang atas $(b_0{}')$ berbatasan langsung (berpotongan) dengan $b_i, i = 1,2,3,\dots n$ yang berwarna 1,2, dan 3, maka b_0 dan $b_0{}'$tidak boleh diberi warna-warna tersebut, maka b_0 dan $b_0{}'$ diberi warna 4. Jadi, warna minimal yang diperlukan untuk pewarnaan permukaan (*face colouring*) pada prisma segi-n, dimana n ganjil adalah sebanyak 4. Jadi, terbukti $\chi''(P_n) = 4$, untuk n ganjil.

b. Kasus II, untuk n genap

Setiap prisma segi-n dimana n genap mempunyai $n + 2$ bidang (permukaan) yaitu n bidang tegak, 1 bidang alas, dan 1 bidang atas. Misalkan bidang atas diberi nama b_0 dan bidang alas diberi nama b_0', sedangkan bidang tegak diberi nama $b_i, i = 1,2,3, \dots, n$.

Terlihat bahwa b_i dimana i ganjil tidak saling berbatasan langsung (tidak berpotongan) maka dapat diberi warna sama. Demikian juga b_i dimana i genap tidak saling berbatasan langsung (tidak berpotongan) maka dapat diberi warna sama. Dan juga b_0 dan b_0' tidak saling berbatasan langsung (tidak berpotongan) maka dapat diberi warna sama.

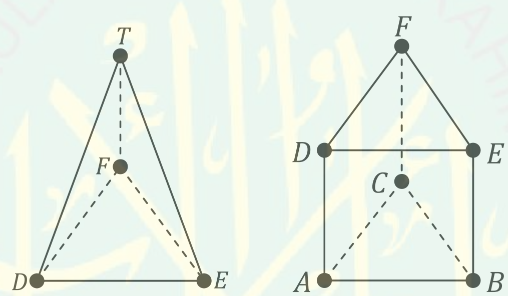
Pilih warna 1 untuk b_i dimana i ganjil. Karena b_i dimana i genap berbatasan langsung (berpotongan) dengan b_i dimana i ganjil, maka b_i dimana i genap tidak boleh diberi warna 1, maka diberi warna 2. Karena bidang alas (b_0) dan bidang atas (b_0') berbatasan langsung (berpotongan) dengan $b_i, i = 1,2,3, \dots n$ yang berwarna 1 dan 2, maka b_0 dan b_0'tidak boleh diberi warna-warna tersebut, maka b_0 dan b_0'diberi warna 3. Jadi, warna minimal yang diperlukan untuk pewarnaan permukaan (*face colouring*) pada prisma segi-n, dimana n genap adalah sebanyak 3. Jadi, terbukti $\chi''(P_n) = 3$, untuk n genap.

3.3 Pewarnaan Permukaan (*face coloring*) pada Gabungan Limas Segi-n dan Prisma Segi-n (G_n)

Berikut ini adalah beberapa contoh pewarnaan permukaan pada bangun ruang gabungan limas segi-n dan prisma segi-n. Langkah-langkahnya adalah sebagai berikut:

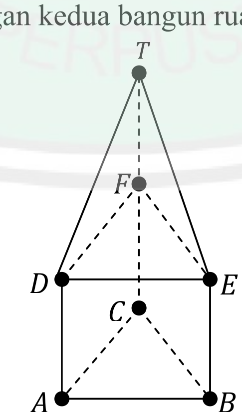
1. Menentukan Bilangan Kromatik dari Pewarnaan Permukaan pada Gabungan Limas Segi-n Dan Prisma Segi-$n, n = 3, 4, 5, 6$

a. Gabungan Limas Segitiga $T.DEF$ dan Prisma Segitiga $ABCDEF$ (G_3)



Gambar 3.3.1 Limas Segitiga $T.DEF$ dan Prisma Segitiga $ABCDEF$

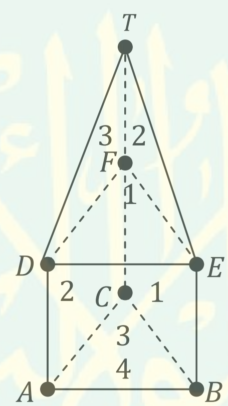
Kedua bangun ruang pada Gambar 3.3.1 akan digabung, yaitu bidang alas DEF dari limas segitiga $T.DEF$ diimpitkan dengan bidang atas DEF dari prisma segitiga $ABCDEF$. Gabungan kedua bangun ruang tersebut adalah sebagai berikut:



Gambar 3.3.2 Gabungan Limas Segitiga $T.DEF$ dan Prisma Segitiga $ABCDEF$

Pada Gambar 3.3.2 diperoleh suatu bangun ruang $T.ABCDEF$ dengan titik puncak T, bidang alas ABC yang berbentuk segitiga, 3 bidang tegak atas $TDE, TEF,$ dan TDF yang berbentuk segitiga, dan 3 bidang tegak bawah $ABED, BCFE,$ dan $ACFD$ yang berbentuk persegi panjang.

Dari bangun ruang $T.ABCDEF$ tersebut akan diwarna masing-masing permukaan atau bidangnya dan harus mendapat tepat satu warna serta dua bidang yang berpotongan atau berbatasan langsung berwarna berbeda. Pewarnaan permukaan (bidang) pada bangun ruang $T.ABCDEF$ adalah sebagai berikut:

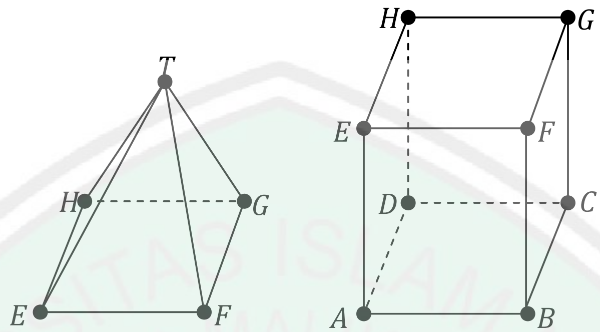


$\chi''(G_3) = 4$

Gambar 3.3.3 *Face Colouring* pada Bangun Ruang $T.ABCDEF$

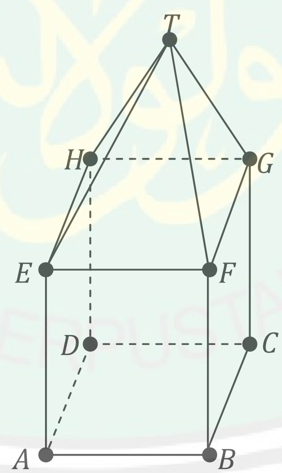
Pada Gambar 3.3.3 diperoleh pewarnaan permukaan pada bangun ruang $T.ABCDEF$ yaitu warna 1 untuk bidang tegak atas TDE dan bidang tegak bawah $BCFE$, warna 2 untuk bidang tegak atas TEF dan bidang tegak bawah $ACFD$, warna 3 untuk bidang tegak atas TDF dan bidang tegak bawah $ABED$, dan warna 4 untuk bidang alas ABC. Jadi, warna minimal yang dibutuhkan (bilangan kromatik) untuk mewarnai permukaan bangun ruang $T.ABCDEF$ adalah sebanyak 4.

b. Gabungan Limas Segiempat $\boldsymbol{T.EFGH}$ dan Prisma Segiempat $\boldsymbol{ABCDEFGH}$ $(\boldsymbol{G_4})$



Gambar 3.3.4 Limas Segiempat $\boldsymbol{T.EFGH}$ dan Prisma Segiempat $\boldsymbol{ABCDEFGH}$

Kedua bangun ruang pada Gambar 3.3.4 akan digabung, yaitu bidang alas $EFGH$ dari limas segiempat $T.EFGH$ diimpitkan dengan bidang atas $EFGH$ dari prisma segiempat $ABCDEFGH$. Gabungan kedua bangun ruang tersebut adalah sebagai berikut:

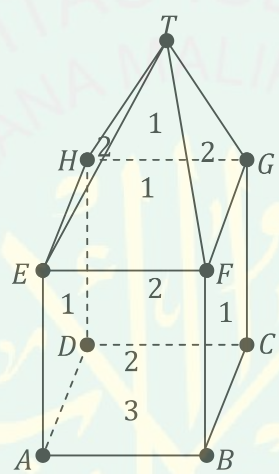


Gambar 3.3.5 Gabungan Limas Segiempat $\boldsymbol{T.EFGH}$ dan Prisma Segiempat $\boldsymbol{ABCDEFGH}$

Pada Gambar 3.3.5 diperoleh suatu bangun ruang $T.ABCDEFGH$ dengan titik puncak T, bidang alas $ABCD$ yang berbentuk segiempat, 4 bidang tegak atas

TEF, TFG, TGH dan TEH yang berbentuk segitiga, dan 4 bidang tegak bawah $ABFE, BCGF, CDHG$ dan $ADHE$ yang berbentuk persegi panjang.

Dari bangun ruang $T.ABCDEFGH$ tersebut akan diwarna masing-masing permukaan atau bidangnya dan harus mendapat tepat satu warna serta dua bidang yang berpotongan atau berbatasan langsung berwarna berbeda. Pewarnaan permukaan (bidang) pada bangun ruang $T.ABCDEFGH$ adalah sebagai berikut:

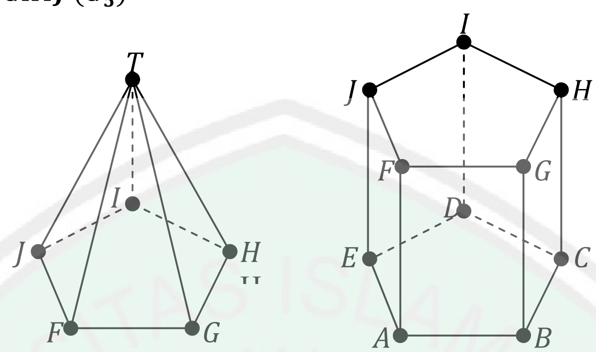


$$\chi''(G_4) = 3$$

Gambar 3.3.6 *Face Colouring* pada Bangun Ruang $T.ABCDEFGH$

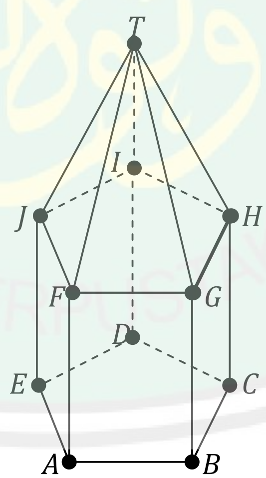
Pada Gambar 3.3.6 diperoleh pewarnaan permukaan pada bangun ruang $T.ABCDEFGH$ yaitu warna 1 untuk bidang tegak atas TEF dan TGH dan bidang tegak bawah $BCGF$ dan $ADHE$, warna 2 untuk bidang tegak atas TFG dan TEH dan bidang tegak bawah $CDHG$ dan $ABFE$, dan warna 3 untuk bidang alas $ABCD$. Jadi, warna minimal yang dibutuhkan (bilangan kromatik) untuk mewarnai permukaan bangun ruang $T.ABCDEFGH$ adalah sebanyak 3.

c. Gabungan Limas Segilima $\boldsymbol{T.FGHIJ}$ dan Prisma Segilima $\boldsymbol{ABCDEFGHIJ}$ $(\boldsymbol{G_5})$



Gambar 3.3.7 Limas Segilima $\boldsymbol{T.FGHIJ}$ dan Prisma Segilima $\boldsymbol{ABCDEFGHIJ}$

Kedua bangun ruang pada Gambar 3.3.7 akan digabung, yaitu bidang alas $FGHIJ$ dari limas segilima $T.FGHIJ$ diimpitkan dengan bidang atas $FGHIJ$ dari prisma segilima $ABCDEFGHIJ$. Gabungan kedua bangun ruang tersebut adalah sebagai berikut:

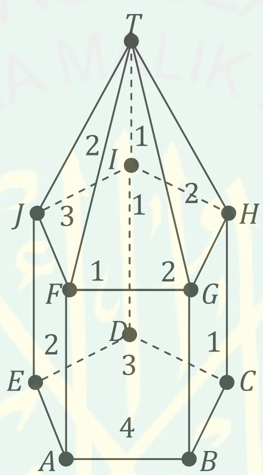


Gambar 3.3.8 Gabungan Limas Segilima $\boldsymbol{T.FGHIJ}$ dan Prisma Segilima $\boldsymbol{ABCDEFGHIJ}$

Pada Gambar 3.3.8 diperoleh suatu bangun ruang $T.ABCDEFGHIJ$ dengan titik puncak T, bidang alas $ABCDE$ yang berbentuk segilima, 5 bidang tegak atas

TFG, TGH, THI, TIJ dan TFJ yang berbentuk segitiga, dan 5 bidang tegak bawah $ABGF, BCHG, CDIH, DEJI$ dan $AEJF$ yang berbentuk persegi panjang.

Pada bangun ruang $T.ABCDEFGHIJ$ tersebut akan diwarna masing-masing permukaan atau bidangnya dan harus mendapat tepat satu warna serta dua bidang yang berpotongan atau berbatasan langsung berwarna berbeda. Pewarnaan permukaan (bidang) pada bangun ruang $T.ABCDEFGHIJ$ adalah sebagai berikut:

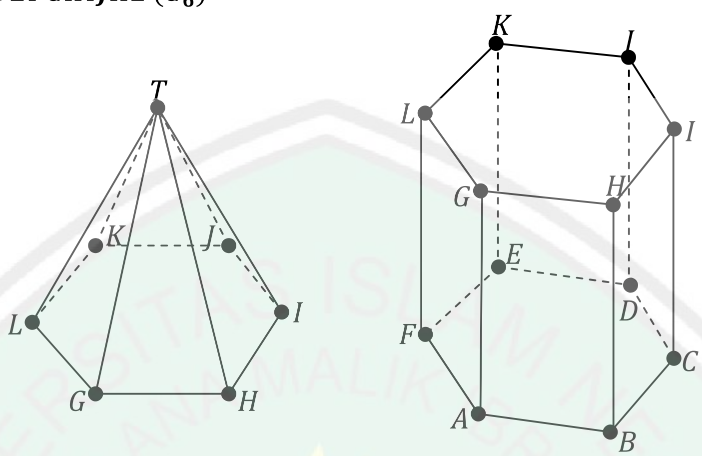


$\chi''(G_5) = 4$

Gambar 3.3.9 *Face Colouring* pada Bangun Ruang $T.ABCDEFGHIJ$

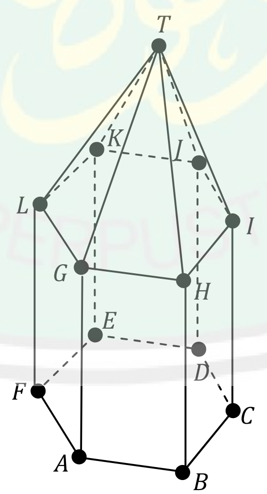
Pada Gambar 3.3.9 diperoleh pewarnaan permukaan pada bangun ruang $T.ABCDEFGHIJ$ yaitu warna 1 untuk bidang tegak atas TFG dan THI dan bidang tegak bawah $BCHG$ dan $DEJI$, warna 2 untuk bidang tegak atas TGH dan TIJ dan bidang tegak bawah $CDIH$ dan $AEJF$, warna 3 untuk bidang tegak atas TFJ dan bidang tegak bawah $ABGF$, dan warna 4 untuk bidang alas $ABCDE$. Jadi, warna minimal yang dibutuhkan (bilangan kromatik) untuk mewarnai permukaan bangun ruang $T.ABCDEFGH$ adalah sebanyak 4.

d. Gabungan Limas Segienam $T.GHIJKL$ dan Prisma Segienam $ABCDEFGHIJKL$ (G_6)



Gambar 3.3.10 Limas Segienam $T.GHIJKL$ dan Prisma Segienam $ABCDEFGHIJKL$

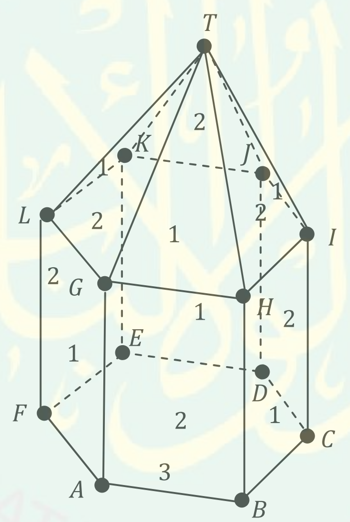
Kedua bangun ruang pada Gambar 3.3.10 akan digabung, yaitu bidang alas $GHIJKL$ dari limas segienam $T.GHIJKL$ diimpitkan dengan bidang atas $GHIJKL$ dari prisma segienam $ABCDEFGHIJKL$. Gabungan kedua bangun ruang tersebut adalah sebagai berikut:



Gambar 3.3.11 Gabungan Limas Segienam $T.GHIJKL$ dan Prisma Segienam $ABCDEFGHIJKL$

Pada Gambar 3.3.11 diperoleh suatu bangun ruang $T.ABCDEFGHIJKL$ dengan titik puncak T, bidang alas $ABCDEF$ yang berbentuk segienam, 6 bidang tegak atas TGH, THI, TIJ, TJK, TKL dan TGL yang berbentuk segitiga, dan 6 bidang tegak bawah $ABHG, BCIH, CDBI, DEKJ, EFLK$ dan $AFLG$ yang berbentuk persegi panjang.

Pada bangun ruang $T.ABCDEFGHIJKL$ tersebut akan diwarna masing-masing permukaan atau bidangnya dan harus mendapat tepat satu warna serta dua bidang yang berpotongan atau berbatasan langsung berwarna berbeda. Pewarnaan permukaan (bidang) pada bangun ruang $T.ABCDEFGHIJKL$ adalah sebagai berikut:



$\chi''(G_6) = 3$

Gambar 3.3.12 *Face Colouring* pada Bangun Ruang $T.ABCDEFGHIJKL$

Pada Gambar 3.3.12 diperoleh pewarnaan permukaan pada bangun ruang $T.ABCDEFGHIJKL$ yaitu warna 1 untuk bidang tegak atas TGH, TIJ dan TKL dan bidang tegak bawah $BCIH, DEKJ$ dan $AFLG$, warna 2 untuk bidang tegak atas THI, TJK dan TGL dan bidang tegak bawah $CDJI, EFLK$ dan $AFLG$, dan warna 3 untuk bidang alas $ABCDEF$. Jadi, warna minimal yang dibutuhkan (bilangan kromatik) untuk mewarnai permukaan bangun ruang $T.ABCDEFGHIJKL$ adalah sebanyak 3.

2. Mencari Pola Bilangan Kromatik Pewarnaan Permukaan Gabungan Limas Segi-n dan Prisma Segi-n (G_n)

Dari beberapa contoh pewarnaan permukaan pada bangun ruang gabungan limas segi-n dan prisma segi-n (G_n) diperoleh bilangan kromatiknya yaitu

$$\chi''(G_3) = 4$$

$$\chi''(G_4) = 3$$

$$\chi''(G_5) = 4$$

$$\chi''(G_6) = 3$$

Dari data di atas terlihat pola yang dapat dinyatakan secara umum sebagai berikut:

$$\chi''(G_n) = \begin{cases} 4, \text{untuk } n \text{ ganjil} \\ 3, \text{ untuk } n \text{ genap} \end{cases} , \forall n \in N, n \geq 3$$

3. Pola yang Diperoleh Dinyatakan sebagai Konjektur

$$\chi''(G_n) = \begin{cases} 4, \text{untuk } n \text{ ganjil} \\ 3, \text{ untuk } n \text{ genap} \end{cases} , \forall n \in N, n \geq 3$$

Konjektur tersebut bersifat induktif dan belum diterima kebenarannya dalam matematika.

4. Konjektur Tersebut Dinyatakan sebagai Teorema dan Dibuktika

Teorema 3.3

Bilangan kromatik untuk pewarnaan permukaan (*face colouring*) pada gabungan limas segi-n dan prisma segi-n (G_n) adalah

$$\chi''(G_n) = \begin{cases} 4, \text{untuk } n \text{ ganjil} \\ & , \forall\, n \in N, n \geq 3 \\ 3, \text{ untuk } n \text{ genap} \end{cases}$$

Bukti:

a. Kasus I, untuk n Ganjil

Setiap gabungan limas segi-n dan prisma segi-n (G_n) dimana n ganjil mempunyai $2n + 1$ bidang (permukaan) yaitu n bidang tegak atas, n bidang tegak bawah, dan 1 bidang alas. Misalkan bidang tegak atas diberi nama $b_i, i = 1,2,3, \ldots n$, bidang tegak bawah diberi nama $b_i{}', i = 1,2,3, \ldots n$ dan bidang alas diberi nama b_0. $b_i{}'$ dimulai dari bidang yang berbatasan langsung (berpotongan) dengan bidang tegak atas b_2 dan berakhir pada bidang yang berbatasan langsung (berpotongan) dengan dengan bidang tegak atas b_1.

Terlihat bahwa b_i dan $b_i{}'$ dimana i ganjil dan $i \neq n$ tidak saling berbatasan langsung (tidak berpotongan) maka dapat diberi warna sama. Demikian juga b_i dan $b_i{}'$ dimana i genap tidak saling berbatasan langsung (tidak berpotongan) maka dapat diberi warna sama.

Pilih warna 1 untuk b_i dan $b_i{}'$ dimana i ganjil dan $i \neq n$. Karena b_i dan $b_i{}'$ dimana i genap berbatasan langsung (berpotongan) dengan b_i dan $b_i{}'$ dimana i ganjil, maka b_i dan $b_i{}'$ dimana i genap tidak boleh diberi warna 1, maka diberi warna 2. Karena b_n dan $b_n{}'$ berbatasan langsung (berpotongan) dengan b_i dan $b_i{}'$ dimana $i = 1, n-1$ yang masing-masing berwarna 1 dan 2, maka b_n dan $b_n{}'$ tidak boleh diwarna 1 dan 2, maka diberi warna 3. Karena bidang alas (b_0) berbatasan langsung (berpotongan) dengan $b_i{}', i = 1,2,3, \dots n$ yang berwarna 1,2, dan 3, maka b_0 tidak boleh diberi warna-warna tersebut, maka b_0 diberi warna 4. Jadi, warna minimal yang diperlukan untuk pewarnaan permukaan (*face colouring*) pada bangun ruang gabungan limas segi-n dan prisma segi-n, dimana n ganjil adalah sebanyak 4. Jadi, terbukti $\chi''(G_n) = 4$, untuk n ganjil.

b. Kasus II, untuk n Genap

Setiap gabungan limas segi-n dan prisma segi-n (G_n) dimana n genap mempunyai $2n + 1$ bidang (permukaan) yaitu n bidang tegak atas, n bidang tegak bawah, dan 1 bidang alas. Misalkan bidang tegak atas diberi nama $b_i, i = 1,2,3, \dots n$, bidang tegak bawah diberi nama $b_i{}', i = 1,2,3, \dots n$ dan bidang alas diberi nama b_0. $b_i{}'$ dimulai dari bidang yang berbatasan langsung (berpotongan) dengan bidang tegak atas b_2 dan berakhir pada bidang yang berbatasan langsung (berpotongan) dengan dengan bidang tegak atas b_1.

Terlihat bahwa b_i dan $b_i{}'$ dimana i ganjil tidak saling berbatasan langsung (tidak berpotongan) maka diberi warna sama. Demikian juga b_i dan $b_i{}'$ dimana i genap tidak saling berbatasan langsung (tidak berpotongan) maka dapat diberi warna sama.

Pilih warna 1 untuk b_i dan $b_i{}'$ dimana i ganjil. Karena b_i dan $b_i{}'$ dimana i genap berbatasan langsung (berpotongan) dengan b_i dan $b_i{}'$ dimana i

ganjil, maka b_i dan $b_i{}'$ dimana i genap tidak boleh diberi warna 1, maka diberi warna 2. Karena bidang alas (b_0) berbatasan langsung (berpotongan) dengan $b_i{}', i = 1,2,3, \dots n$ yang berwarna 1 dan 2, maka b_0 tidak boleh diberi warna-warna tersebut, maka b_0 diberi warna 3. Jadi, warna minimal yang diperlukan untuk pewarnaan permukaan (*face colouring*) pada bangun ruang gabungan limas segi-n dan prisma segi-n, dimana n genap adalah sebanyak 3. Jadi, terbukti $\chi''(G_n) = 3,$ untuk n genap.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan pada bab III, maka dapat diambil kesimpulan, yaitu:

1. Untuk menentukan bilangan kromatik permukaan *(face chromatic number)* pada limas dilakukan dengan langkah-langkah berikut:
   a. Menentukan bilangan kromatik pada beberapa kasus yaitu $L_3, L_4, L_5,$ dan L_6,
   b. Mencari pola bilangan kromatik pada langkah (a),
   c. Pola yang diperoleh dinyatakan sebagai konjektur,
   d. Konjektur tersebut dinyatakan sebagai teorema dan dibuktikan.

   Berdasarkan langkah-langkah di atas diperoleh:

$$\chi''(L_n) = \begin{cases} 4, \text{ untuk n ganjil} \\ 3, \text{ untuk n genap} \end{cases} , \forall\, n \in N, n \geq 3$$

2. Untuk menentukan bilangan kromatik permukaan *(face chromatic number)* pada prisma dilakukan dengan langkah-langkah berikut:
   a. Menentukan bilangan kromatik pada beberapa kasus yaitu pada $P_3, P_4, P_5,$ dan P_6,
   b. Mencari pola bilangan kromatik pada langkah (a),
   c. Pola yang diperoleh dinyatakan sebagai konjektur,
   d. Konjektur tersebut dinyatakan sebagai teorema dan dibuktikan.

Berdasarkan langkah-langkah di atas diperoleh:

$$\chi''(P_n) = \begin{cases} 4, \text{untuk n ganjil} \\ 3, \text{untuk n genap} \end{cases} \quad , \forall\, n \in N, n \geq 3$$

3. Untuk menentukan bilangan kromatik permukaan *(face chromatic number)* pada gabungan limas dan prisma dilakukan dengan langkah-langkah berikut:
   a. Menentukan bilangan kromatik pada beberapa kasus yaitu G_3, G_4, G_5, dan G_6.
   b. Mencari pola bilangan kromatik pada langkah (a),
   c. Pola yang diperoleh dinyatakan sebagai konjektur,
   d. Konjektur tersebut dinyatakan sebagai teorema dan dibuktikan.

Berdasarkan langkah-langkah di atas diperoleh:

$$\chi''(G_n) = \begin{cases} 4, \text{untuk n ganjil} \\ 3, \text{untuk n genap} \end{cases} \quad , \forall\, n \in N, n \geq 3$$

4.2 Saran

Pada skripsi ini, penulis hanya memfokuskan pada pokok bahasan mengenai *face colouring* pada limas, prisma, dan gabungan limas dan prisma. Oleh karena itu, untuk penulisan skripsi selanjutnya, penulis menyarankan kepada pembaca untuk mengkaji masalah *face colouring* pada graf-graf yang lain atau komputasi pemprograman sehingga hasilnya lebih cepat, akurat, dan tampilannnya bagus.

DAFTAR PUSTAKA

Bondy, J.A dan Murty, U.S.R. 1982. *Graph Therory with Application*. Canada:Department of Combinatorics and Optimization, University of Waterloo.

Chartrand, G. dan Lesniak, L. 1986. *Graph and Digraph* 2^{nd} *Edition*. California: Wadsworth.Inc.

Masruri, M. Hadi dan Rossidy Imron. 2007. *Filsafat Sains dalam Al-qur'an*. Malang: UIN Malang Press.

Muhammad, Syaikh. 2003. *Syarhu Ushulil Iman: Prinsip-prinsip Dasar Keimanan.*Riyadh: Ha'iatul Iqhatsah Al-Islamiah Al-Alamiah.

Purwanro. 1998. *Matematika Diskrit.* Malang: IKIP Malang.

Shihab, Quraish. 2003. *Tafsir Al-Mishbah: Pesan, Kesan, dan Keserasian Al-Qur'an*. Jakarta: Lentera Hati.

Suryanto. 1986. *Materi Pokok Pengantar Teori Graph*. Jakarta: Karunika Universitas terbuka.

http://www.crayonpedia.org/mw/ Kubus Balok Prisma Tegak dan Limas 8.2 # C. Prisma. Diakses pada tanggal 9 Juli 2009 pukul 06.00 WIB

http://www.crayonpedia.org/mw/ Bola dan Kerucut. Diakses pada tanggal 24 Juli 2009 pukul 06.00 WIB

DEPARTEMEN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM (UIN MMI) MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang (0341)551345
Fax. (0341)572533

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : **Ririn Salusiningsih**
NIM : **04510002**
Fakultas/ jurusan : **Sains Dan Teknologi/ Matematika**
Judul skripsi : ***FACE COLOURING* PADA LIMAS, PRISMA, DAN GABUNGAN LIMAS DAN PRISMA**
Pembimbing I : **Evawati Alisah, M.Pd**
Pembimbing II : **Ahmad Barizi, M.A**

No	Tanggal	HAL	Tanda Tangan	
1	2 Juli 2009	Proposal	1.	
2	3 Juli 2009	ACC Proposal		2.
3	16 Juli 2009	Konsultasi BAB III	3.	
4	17 Juli 2009	Revisi BAB III		4.
5	18 Juli 2009	Konsultasi BAB I dan II	5.	
6	18 Juli 2009	Kajian Keagamaan		6.
7	21 Juli 2009	Revisi BAB I dan II	7.	
8	21 Juli 2009	Kajian Keagamaan		8.
9	22 Juli 2009	Kajian Keagamaan	9.	
10	22 Juli 2009	ACC BAB I, II, dan III		10.
11	23 Juli 2009	ACC Keseluruhan	11.	

Malang, 23 Juli 2009
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M.Si
NIP. 150 318 321