MODEL LOGISTIK DENGAN PENUNDAAN PADA SPESIES TUNGGAL

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim (UIN MMI) Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan Dalam Memperoleh Gelar
Strata Satu Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:

ARIEF WAHYULLAH
NIM. 04510024

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2009

LEMBAR PERSETUJUAN

SKRIPSI

MODEL LOGISTIK DENGAN PENUNDAAN PADA SPESIES TUNGGAL

Oleh:

Arief Wahyullah
NIM. 04510024

Telah disetujui pada tanggal 06 Oktober 2009

Oleh

Pembimbing I	**Pembimbing II**
Usman Pagalay,M.Si	**Achmad Nashichuddin, MA**
NIP. 19650414 200312 1001	**NIP. 19730705 200003 1002**

Mengetahui
Ketua Jurusan Matematika
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang

Abdussakir, M. Pd.
NIP. 19751006 200312 1001

MODEL LOGISTIK DENGAN PENUNDAAN PADA SPESIES TUNGGAL

SKRIPSI

Oleh:

ARIEF WAHYULLAH
NIM. 04510024

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persayaratan Untuk Memperoleh Gelar Strata Satu Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal 10 Oktober 2009

Susunan Dewan Penguji :		Tanda Tangan
1. Penguji Utama	: Wahyu Henky I., M.Pd	( )
2. Ketua	:Evawati Alisah, M.Pd	( )
3. Sekretaris	: Usman Pagalay, M.Si	( )
4. Anggota	:Achmad Nashichuddin, M.A	( )

Mengetahui
Ketua Jurusan Matematika
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang

Abdussakir, M. Pd.
NIP. 19751006 200312 1001

PERSEMBAHAN

Dengan memanjatkan syukur Alhamdullillah kehadirat Allah SWT, Tuhan penguasa alam semesta atas Rahmat dan restu-Nya, sehingga saya bisa berdiri menapaki kehidupan di dunia ini.

Nabi Muhammad SAW, penerang kehidupan yang telah menunjukkan jalan yang benar kepada umatnya.

Kupersembahkan karya kecilku kepada:

Kedua orangtua-ku tercinta, terimakasih atas segalanya. terimakasih atas kasih sayang, kepercayaan, spirit, wejangan, doa yang selalu mengalir untuk ananda

Istriku Tercinta yang menemaniku disaat suka,duka, sehat sakit , senang susah ,

Untuk anakku Nanda alm, maafkan papa titak bisa menjaga kamu dengan baik

Dan untuk baby kecilku yang masih dirahim bunda, terima kasih sudah menjadi spirit buat papa.

Untuk adikku misni mustika dan Dwi maftuh Ahnan jadilah anak yang berbakti pada orang tua dan bahagialah , semoga cita-citamu tercapai

Kedua mertuaku terimakasih telah memberi support dan doa restu

Seluruh keluarga besar abah nawawi, :abah Toni , wa Sofyan, wa Idin, wa Solikha, wa haji Napiah dan banyak lagi yang belum tersebut

Keluarga besar haji ismail : gagong Walam, gagong Supandi. Dan banyak lagi yang belum tersebut

Teman –teman Ikawiradharma : Didik Himmawan, Ihya Ulumuddin, Maulana, Barok, Sihab, A. mujahid, Budi taryono, Syakur, Samsul khan, Nasruddin, Asep Saifullah, Nurullah , om Bero Ahmad Fuadi, Nurul Mubarok, dan yang tidak tersebut jangan marah.

Untuk sahabat-sahabati PMII: Agus S, Okta, Khoiron, Zainal Abiding, mas Bambang, M. izza, Arif ayik, Majid, Mufit, dan banyak yang tidak bisa disebutkan

Untuk saudara-saudaraku Mapala Tursina: Ahmad Jamil, Farhan Apetatu, Tri Azhari, Sultonul Huda, Saiful Hadi, Rahdiansyah, Sri Cahyaningsih, Zakiyatul Izzah, dan saudara-saudara tursina yang lainnya

Teman-temen matematika angkatan 2004 semuanya terima kasih atas suportnya

Motto:

HIDUP ADALAH PERJUANGAN DAN PENCARIAN

BEKERJALAH
SEAKAN KAMU
HIDUP SELAMANYA

BERIBADAHLAH
SEAKAN KAMU
MATI BESOK

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr.Wb.

Puji syukur Allah tuhan semesta alam, berkat rahmat dan izin-Nya penulis dapat menyelesaikan tugas akhir perkuliahan dengan lancar. Sholawat dan salam penulis persembahkan kepada nabi Muhammad S.A.W, berkat perjuangannya yang telah mengahadirkan pencerahan untuk umat manusia dan menjadi motivasi bagi penulis untuk belajar, berusaha dan menjadi yang terbaik..

Dalam merampungkan tugas akhir perkuliahan penulis berusaha dengan sekuat tenaga dan pikiran, namun penulis menyadari bahwa tanpa partisipasi dari banyak pihak tugas akhir ini dapat terselesaikan. Dengan iringan do'a dan kerendahan hati izinkanlah penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Malang
2. Prof. Drs. Sutiman B. Sumitro, SU., DSc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang
3. Abdussakir, M.Pd. selaku ketua jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang.
4. Usman Pagalay M.Si. selaku dosen pembimbing
5. Achmad Nashichuddin. M.A. salaku pembimbing agama
6. Bapak/Ibu dosen jurusan Matematika yang telah banyak memberikan pelajaran dan didikan, Bapak Abdussyakir, M.Si, terima kasih atas masukan dan arahannya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini.
7. Kedua orang tua (Bapak Moch Amien S.Pdi dan Ibu Kapsah), dan istri tercinta (Puji Mindarwati), yang tak henti-hentinya memanjatkan doa serta bekerja memeras keringat untuk pendidikan, kebahagiaan dan kesuksesan masa depan penulis.
8. Adikku tersayang (Misni Mustika), semangat dan kerja kerasmu serta membuang rasa malu untuk hal yang halal akan menjadi inspirasi dalam setiap langkah hidupku.
9. Kedua mertuaku (bapak Mahmudi dan ibu Mutiah) serta adik (Dwi Maftuh Ahnan) yang telah memberi support.

10. Sahabatku Okta Tririan Fanani, Agus Syaifurrokhim semua kebaikanmu akan mengingatkan aku akan sosok sahabat terbaik, serta sahabat-sahabatku di PMII Koms. Malang yang senantiasa mengisi hari-hariku selama di Malang.
11. Teman-teman Matematika 2004, canda tawa kalian kan selalu terngiang dalam benakku.
12. Semua pihak yang tidak mungkin penulis sebut satu persatu, atas keiklasan bantuan moril dan spirituil penulis ucapkan terima kasih.

Semoga Tugas Akhir ini bermanfaat dan dapat menambah wawasan keilmuan Matematika model logistik spesies tunggal dengan penuudaan, Tentunya koreksi, saran, dan kritik konstruktif senantiasa penulis harapkan demi kesempurnaan dalam penulisan tugas akhir ini.

Wassalamu'alaikum Wr.Wb

Malang, 10 Oktober 2009

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR LAMPIRAN

ABSTRAK

Wahyullah, Arief.2009. Analisis Model Logistik Spesies Tunggal dengan Penundaan.Jurusan Matematika Fakultas sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing : Usman Pagalay, M.Si

Kata kunci: Model Logistik spesies tunggal, persamaan defferensial linier, titik equilibrium

Model logistik adalah suatu modifikasi model Malthus. Model logistik terlebih dulu yang diselidiki oleh Verhults pada 1830 dan yang ditemukan kembali oleh Pear dan Reed pada 1920, Haberman (1998). Model ini menganalisis laju pertumbuhan dan daya dukung lingkungan. Tujuan penulis dapat menganalisis model logistik spesies tunggal yang di gabungkan dengan persamaan penundaan.Model logistik merupakan konsep dasar dari pemodelan matematika meliputi konstanta, variabel, fungsi, persamaan pertidaksamaan dan sebagainya

Dalam menganalisis model logistik diperlukan dasar teori yang meliputi: persamaan defferensial biasa, persamaan defferensial linier oro satu, pemodelan matematika, titik kritis.

Dalam skripsi ini menganalisis model logistik spesies tunggal dengan penundaan memperoleh persamaan differensial dengan bentuk:

$$\frac{dx(t)}{dt} = rx(t)\left(1 - \frac{x(t-\tau)}{K}\right)$$

τ adlah diasumsikan positif. K adalah daya dukung lingkungan (carryng capacity), r adalah laju pertumbuhan. Sehingga ketika $0 < \tau < \tau_0$, nol titik keseimbangan adalah asimtotik stabilketika $\tau > \tau_0$, tidak stabil. Penyelesaian model ini menggunakan pendekatan nomerik yang dieksplorasi dengan program MATLAB.

Dengan adanya pembahasan yang menunjukan pemodelan suatu model logistik dengan sistem delay sehingga perlu perlu pengembangan kembali agar dapat digunakan dalam sebuah perencanaan kehidupan yang lebih baik

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang.

Dalam kehidupan di dunia, manusia tidak lepas dari berbagai macam permasalahan. Permasalahan-permasalahan tersebut menyangkut berbagai aspek, dimana dalam penyelesaiannya diperlukan sebuah pemahaman melalui suatu metode dan ilmu bantu tertentu. Salah satu ilmu bantu yang dapat digunakan adalah matematika. Sedangkan Matematika sendiri merupakan alat untuk menyederhanakan penyajian dan pemahaman dan analisis masalah. Karena dalam bahasan matematika, suatu masalah dapat menjadi lebih sederhana untuk disajikan, dipahami, dianalisis, dan dipecahkan. Untuk keperluan tersebut, maka pertama dicari pokok masalahnya, kemudian dibuat rumusan atau model matematikanya, sehingga masalah lebih mudah dipecahkan (Purwanto, 1998:1).

Dalam bidang matematika biologi, matematika digunakan untuk mencoba memahami berbagai gejala biologi. Salah satu dari gagasan-gagasan yang paling tua di adalah karena matematika bisa digunakan untuk model perubahan-perubahan di dalam ukuran dari berbagai populasi. model populasi Malthus meramalkan pertumbuhan pemusnahan populasi tanpa batas atau tak bisa terelakkan. Itu bergantung pada laju pertumbuhan dari populasi.

Model logistik adalah suatu modifikasi model Malthus. Model logistik terlebih dulu yang diselidiki oleh PF. Verhults pada 1830. Model ini menganalisis laju pertumbuhan dan daya-dukung lingkungan. PF. Verhults mempelajari gagasan ini menggunakan data dari Amerika Serikat untuk meramalkan populasi US., Lipkin dan Tukang besi (2006).

Model logistik dapat digunakan untuk model laju pertumbuhan dari populasi, seperti populasi manusia, binatang, ikan di danau, dan pohon-pohon di hutan.

Waktu Tunda atau penyimpangan waktu penting bagi modeling dunia nyata karena sering kali membuat berdasar pada informasi historis. untuk mempertimbangkan model populasi di mana laju pertumbuhan populasi tidak hanya bergantung pada ukuran populasi pada waktu t tetapi juga bergantung pada ukuran populasi di masa lalu

model Logistik dengan dan tanpa waktu tunda sudah dipelajari oleh banyak pengarang. Nicholson di Barnes dan Fulford (2002) dalam jurnal *stability analysis of logistic population model*

Karena populasi itu adalah pengaruh baik bagi manusia, populasi itu kemudian dipanen. Pemanenan boleh juga digambarkan sebagai kepindahan dari jenis populasi dari tempat kediaman karena populasi ukuran sedang terkendali. Pemanenan yang umum.

logistik bergantung pada kedua-duanya ukuran populasi dan tingkat usaha. Clark (1985) dipertimbangkan memanen logistik dalam kaitan dengan menggunakan istilah usaha oleh hubungan $H = qEx$

di mana E menandakan usaha pemanenan dan q adalah suatu koefisien catchabilas.

Untuk meneliti stabilitas titik keseimbangan dari model dengan penundaan, kita linierisasi model di sekitar titik keseimbangan dan lalu menyelidiki nilai eigen dari persamaan karakteristik. Titik keseimbangan adalah stabil asimptotis jika dan hanya jika akar dari persamaan karakteristik mempunyai bagian real negatif, Bellman dan Cooke (1963).

Matematika adalah salah satu ilmu pasti yang mengkaji abstraksi ruang, waktu, dan angka. Matematika juga mendeskripsikan realitas alam semesta dalam bahasa lambang, sehingga suatu permasalahan dalam realitas alam akan lebih mudah dipahami (Aziz, 2006:v).

Sumber studi matematika, sebagaimana sumber ilmu pengetahuan dalam Islam, adalah konsep tauhid, yaitu ke-Esaan Allah (Rahman, 1992:92). Namun, Al-Qur'an tidak mengangkat metode baru atau teknik baru dalam masalah ini, melainkan telah titikkan tentang adanya eksistensi dari sesuatu yang ada di balik alam semesta (Rahman, 1992:92). Alam semesta sendiri memuat bentuk-bentuk dan konsep matematika, meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Alam semesta serta segala isinya diciptakan Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan, dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi (Abdusysyakir, 2007:79). Suatu bentuk penerapan ilmu tidak terlepas dari kebenaran Al-Quran, sebagaimana dalam (Q.S. Al-Furqaan: 2)

ٱلَّذِى لَهُۥ مُلْكُ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضِ وَلَمْ يَتَّخِذْ وَلَدًا وَلَمْ يَكُن لَّهُۥ شَرِيكٌ فِى

ٱلْمُلْكِ وَخَلَقَ كُلَّ شَىْءٍ فَقَدَّرَهُۥ تَقْدِيرًا ﴿٢﴾

Artinya: "Yang kepunyaan-Nya-lah kerajaan langit dan bumi, dan dia tidak mempunyai anak, dan tidak ada sekutu baginya dalam kekuasaan(Nya), dan dia Telah menciptakan segala sesuatu, dan dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan *serapi-rapinya"*
(Q.S. Al-Furqaan: 2).

Maksudnya adalah segala sesuatu yang diciptakan oleh Allah telah diberi-Nya perlengkapan-perlengkapan dan persiapan-persiapan, sesuai dengan naluri, sifat-sifat dan logistiknya masing-masing dalam hidup. Jadi adanya fenomena alam Allah juga telah melengkapinya dengan penyelesaiaan dalam bentuk suatu penerapan ilmu pengetahuan.

Selain itu alah juga menerangkan konsep keseimbangan dalam al-qur'an

يَٰٓأَيُّهَا ٱلَّذِينَ ءَامَنُوا۟ ٱتَّقُوا۟ ٱللَّهَ وَلْتَنظُرْ نَفْسٌ مَّا قَدَّمَتْ لِغَدٍ ۖ وَٱتَّقُوا۟ ٱللَّهَ ۚ

إِنَّ ٱللَّهَ خَبِيرٌۢ بِمَا تَعْمَلُونَ ﴿١٨﴾

Artinya:. Hai orang-orang yang beriman, bertakwalah kepada Allah dan hendaklah setiap diri memperhatikan apa yang Telah diperbuatnya untuk hari esok (akhirat); dan bertakwalah kepada Allah, Sesungguhnya Allah Maha mengetahui apa yang kamu kerjakan.(Q.S.HASR :18)

Dewasa ini semakin banyak muncul penggunaan model matematika maupun penalaran matematika sebagai alat bantu dalam menyelesaikan permasalahan yang dihadapi dalam berbagai disiplin ilmu. Persamaan differensial merupakan suatu methode mathematika yang sering digunakan dalam memecahkan berbagai masalah dalam kehidupan sehari-hari yang biasa disebut dengan pemodelan, dalam pemodelan ini matematika masuk dalam berbagai bidang, baik fisika, kimia, biologi, kedokteran, dan lain sebagainya. Terkait dengan masalah diatas, persamaan differensial merupakan suatu method yang penting untuk membantu dalam memecahkan permasalahan, terlebih dalam bidang kedokteran dan biologi, dengan mengkaji suatu permasalahan yang muncul maka dapat dimasukkan dalam suatu persmaan, sehingga kita dapat menganalisis suatu kejadian.

Bentuk persamaan defferensial ordo satu adalah:

$$\frac{dx}{dt} = v\left(x, t, f\right)$$

Dengan syarat awal $x = x_0$ pada waktu $t = 0$.

Berdasarkan latar belakang diatas, dalam skripsi ini penulis mengambil judul "analisis model logistik spesies tunggal dengan penundaan".

1.2 Rumusan Masalah

Dalam masalah ini diberikan suatu rumusan masalah tentang bagaimanakah implikasi macam-macam model logistik dengan penundaan spesies tunggal

1.3. Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah diatas, maka tujuan penulisan skripsi ini adalah analisis model logistik spesies tunggal dengan penundaan

1.4. Batasan Masalah

Berdasarkan hal tersebut, penulisan skripsi ini diberikan batasan masalah sebagai berikut:

- Analisis model logisik dengan spesies tunggal,

  Langkah-langkah menganalisis model sebagai berikut

  1. Diberikan model logistik spesies tunggal

     $$\frac{dx(t)}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

     Keterangan:

     x(t)= jumlah populasi saat t

     r = laju pertumbuhan

     K = daya dukung lingkungan (carryng capacity)

     Model penundaan:

     $$\frac{dx(t)}{dt} = f\left(x(t), x(t-\tau)\right)$$

     Dimana $\tau > 0$, adalah sebuah penundaan

  2. Tabulasi,termasuk dalam tabulasi ini,

     a. Memberikan skor terhadapitem-item yang perlu di beri skor
     b. Memberikan kode terhadap item-itemyang tidak diberi skor.

  3. Penerapan data sesuai dengan pendekatan penelitian

- Model logistik dengan bentuk persamaan differensial linier ordo Satu
- Penyelesaian persamaan model logistik dilakukan dengan menentukan solusi karakteristik.

1.5. Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah:

- Bagi peneliti, sebagai tambahan informasi dan wawasan mengenai solusi model logistik spesies tunggal dengan penundaan
- Bagi pemerhati matematika, sebagai tambahan pengetahuan bidang matematika, khususnya pemodelan mengenai persamaan model logistik spesies tunggal dengan penundaan.
- Bagi lembaga UIN Malang, untuk bahan kepustakaan yang dijadikan sarana pengembangan wawasan keilmuan khususnya di jurusan matematika untuk pemodelan matematika

1.6. Metode Penelitian

1. Jenis Penelitian (penelitian kepustakaan)

Dengan pendekatan penelitian deskriptif kualitatif ini maka penulis menggunakan metode penelitian kepustakaan *(Library Research)*, yaitu penelitian yang dilakukan di dalam perpustakaan untuk mengumpulkan data dan informasi dengan bantuan bermacam material yang terdapat di ruang perpustakaan seperti buku-buku, majalah dan dokumen (Mardalis, 1958:28).

2. Data dan Sumber Data

Data yang digunakan penulis dalam rangka penyusunan skripsi ini adalah bilangan-bilangan, algoritma dan bahasa pemrograman. Sumber data diperoleh melalui survey buku-buku yaitu model loistik, persamaan defferensial linier, persamaan karakteristik, pemodelan matematika Pemrograman dengan MATLAB. Dan data tambahan yang releven yang mendukung penulisan skripsi ini diperoleh dari buku-buku lain. Data-data tersebut dapat digunakan untuk memperoleh generalisasi yang bersifat ilmiah atau memperoleh pengetahuan ilmiah baru, dan dapat berguna sebagai pelengkap informasi yang telah dikumpulkan oleh peneliti. Dan akhirnya data tersebut dapat juga memperkuat penemuan pengetahuan yang telah ada.

3. Teknik Pengumpulan Data

Pengumpulan data tidak lain adalah salah satu dari proses pengadaan data untuk keperluan penelitian. Pengumpulan data adalah prosedur yang sistematis dan standar untuk memperoleh data yang diperlukan. Untuk memperoleh data, penulis menggunakan langkah-langkah *Library Research* yaitu setiap penelitian memerlukan bahan yang bersumber dari perpustakaan. Penulis menggunakan metode dokumenter, yaitu mencari data mengenai hal-hal atau variabel yang berupa catatan, buku-buku, jurnal penelitian yang releven dengan permasalahan yang penulis bahas.

4. Teknik Analisis Data

Dalam menganalisis data, penulis melakukan persiapan dengan menjabarkan algoritma yang berkaitan. Selanjutnya membuat model matematikanya dan menginterpretasikannya kedalam suatu model. Selanjutnya membuat program komputer dengan bahasa pemrograman MATLAB

1.7. Sistematika Penulisan

Agar penulisan skripsi ini lebih terarah, mudah ditelaah dan dipahami, maka digunakan sistematika pembahasan yeng terdiri dari empat bab. Masing-masing bab dibagi ke dalam beberapa subbab dengan rumusan sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN

Pendahuluan meliputi: latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II DASAR TEORI

Bagian ini terdiri atas konsep-konsep (teori-teori) yang mendukung bagian pembahasan. Konsep-konsep tersebut antara lain membahas tentang pengertian persamaan differensial linier ordo satu,titik kritis, model logistik, method karakteristik.

BAB III PEMBAHASAN

Pembahasam berisi tentang solusi persamaan gelombang pada persamaan differensial parsial quasilinier dengan metode karakteristik, serta kajian tentang agama mengenai masalah model logistk dan filsafatnya.

BAB IV PENUTUP

Pada bab ini akan dibahas tentang kesimpulan dan saran.

BAB II

DASAR TEORI

2.1. Pengertian persamaan defferensial

Persamaan yang menyangkut satu atau lebih fungsi (peubah tak bebas) beserta turunannya terhadap satu atau lebih peubah bebes disebut persamaan deferensial . (pamuntjak,1990:1-12)

2.2 persamaan defferensial biasa

persamaan defferensial biasa adalah persamaan defferensial yang terdiri dari satu atau lebih variabel terikat dengan satu variable bebas (ross,1984:4)

Contoh:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$$

$$\frac{d^4x}{dt^4} + 5\frac{d^2x}{dt^2} + 3x = \sin t$$

2.3 Model matematika

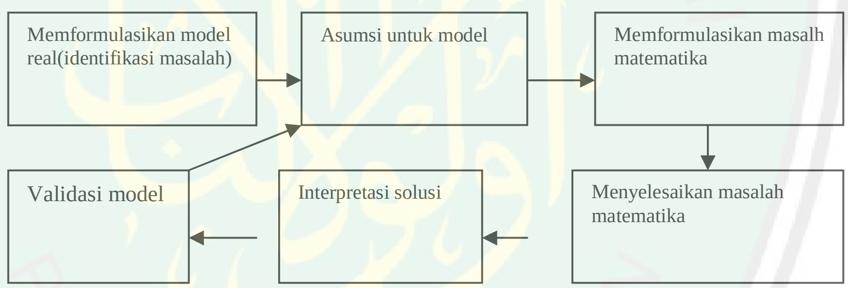
Definisi 4:

Model adalah suatu konsep atau objek yang digunakan untuk menggambar suatu kenyataan untuk mendapatkan suatu bentuk yang dapat dipahami.(mayer, 1985:2)

Definisi 5:

Model matematika adalah sebuah model yang bagian – bagiannya merupakan konsep matematika, seperti konstanta, variable, fungsi, persamaan pertidaksamaan dan sebagainya.(mayer, 1985:2)

Dari definisi diatas dapat disimpulkan bahwa model matematika yang dapat menggambarkan perilaku dari system. Dalam menyusun sebuah model harus mengetahui hubungan antara matematika dengan system yang akan didekati, khususnya factor-faktor yang berkaitan dengan system tersebut. Pendekatan model yang digunakan sangat bergantung pada pendekatan yang ingin di capai.(nugroho,2000:1).



Langkah- langkah pemodelan dapat dijelaskan sebagai berikut:

Langkah 1: identifikasi masalah

Pemodelan harus mempunyai kemampuan yang cukup dalam formulasi ferbal agar masalah bisa tranlasikan kedalam bahasa matematika. Tranlasi ini akan terus diselesaikan pada langkah berikutnya.

Langkah 2: menyelesaikan atau menginterpretasi model

Sekarang perhatikan semua sub model untuk melihat apakah model yang disusun sudah cukup. Selanjutnya model tersebut akan diselesaikan secara matematika. Dalam hal ini model yang digunakan dan penyelesaiannya menggunakan persamaan deferensial. Seringkali disini mengalami kesulitan untuk menyelesaikan model dan interpretasi model. Dalam kondisi ini kembali kelangkah 2 dan membuat asumsi sederhana tambahan atau kembali kelangkah 1 untuk membuat definisi ulang dari permasalahan penyederhanaan atau definisi ulang sebuah model merupakan bagian yang penting dalam matematika modern.

Langkah 3: Verifikasi Model

Sebelum menggunakan model untuk menyimpulkan kejadian dunia nyata model tersebut mesti diuji. Ada beberapa pertanyaan yang diperlukan yang diajukan sebelum melakukan uji dan pengumpulan data. Pertama, apakah model menjawab masalah yang telah diidentifikasi pada langkah 1 atau apakah menyimpang dari isu utama seperti yang dikontruksi dalam model? Kedua, apakah model membuat pemikiran yang sehat? Ketiga, bisakah mengumpulkan data untuk menguji dan mengoperasikan model dan apakah model memenuhi syarat bila diuji? Dalam membuat desain sebuah tes untuk model yang dibuat sebaiknya menggunakan data actual yang diperoleh dari observasi empirik. (Baiduri,2002: dalam skripsi Fakhrina Amaliyah: 20-21)

Banyak masalah lain diluar matematika dapat diselesaikan dengan menggunakan ilmu matematika kebanyakan kejadian, fenomena dan atau pengalaman dinyatakan dalam besaran kuantitatif, disimbulkan dengan kosakata matematika.

2.4. Titik kritis

Definisi 6:

$$x = f(x,y), y = g(x,y) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.4)$$

Titik kritis (x_0, y_0) disebut stabil dari (2.4) jika $f(x_0, y_0) = 0$ dan $g(x_0, y_0) = 0$. Karena turunan suatu konstanta sama dengan nol, akibatnya jika titik (x_0, y_0) meropakan titik kritis dsari (2.4) maka penyelesanan dari (2.4) untuk semua t adalah fungsi konstanta

$$x(t) \equiv x_0, y(t) \equiv y_0$$

2.5. Model Logistik

Suatu populasi seringkali meningkat secara eksponensial pada awalnya tetapi melambat pada akhirnya dan mendekati kapasitas tampungnya karna sumer daya yang terbatas . Pertumbuhan populasi yang disebut sebagai model pertumbuhan logistik, yaitu:

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt} = r - \frac{x}{K}$$

Atau setelah dikalikan dengan x, kita peroleh model untuk pertumuhan populasi yang dikenal dengan persamaan differensial logistik

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

Keterangan:

x(t)= jumlah populasi saat t

r = laju pertumbuhan

K = daya dukung lingkungan (carryng capacity)

Model penundaan:

model Logistik, adalah suatu model pertumbuhan populasi. Model itu adalah kontinu pada persamaan diferensial Jika ditambahkan syarat awal x(0) = x_0 , maka diperoleh solusi khusus persamaan diferensial ini, yaitu:

$$x(t) = \frac{K}{\left(\frac{K}{x_0} - 1\right)e^{-rt} + 1}$$

Untuk r > 0 berlaku $\lim_{t\to\infty} x(t) = K$ Konstan r, diasumsikan positif. positif K konstan biasanya dikenal sebagai daya-dukung yang lingkungan, yaitu.,

populasi yang dapat maksimum, atau kejenuhan tingkat populasi. populasi mengukur K kadang-kadang disebut tingkatan kejenuhan, karena untuk populasi-populasi besar ada lebih banyak kematian-kematian dibanding kelahiran-kelahiran. Solusi model logistik adalah sama dengan syarat awal $x(0) = x_0 > 0$ tanpa sekuritas atau Hama

$$x(t) = \frac{x_0 K}{x_0 + (K - x_0)e^{-rt}}$$

.Model logistik mempunyai dua poin-poin keseimbangan, yaitu., *x=0* dan *x=K* titik keseimbangan tidak stabil selagi titik keseimbangan yang kedua serentak stabil asimptotis.

Solusi Analitik

Persamaan lpogistik merupakan persamaan deffferensial terpisahkan sehingga kita kita menyelesaikannya secara ekplisit

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

Kita peroleh

$$\int \frac{dx}{x(1 - p / K)} = \int kdt$$

Untuk menghitung integral diruas kiri kita tuliskan

$$\frac{1}{x(1 - x / K)} = \frac{K}{x(K - x)}$$

Dengan fraksi parsial kita mendapatkan

$$\frac{1}{x(K - x)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{(K - x)}$$

Sehingga kita dapat menuliskan

$$\int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{(K - x)}\right) dx = \int kdt$$

$$\ln|x| - \ln|K - x| = kt + C$$

$$\ln\left|\frac{K - x}{x}\right| = -kt - C$$

$$\left|\frac{K - x}{x}\right| = e^{-kt - C} = e^{-C} e^{-kt}$$

$$\left|\frac{K-x}{x}\right| = Ae^{kt}$$

Dengan $A = \pm e^{-C}$ dengan persamaan diatas untuk x kita mendapatkan

$$\frac{K}{x} - 1 = Ae^{-kt} \Rightarrow \frac{x}{K} - \frac{1}{1+Ae^{-kt}}$$

Sehingga $x - \dfrac{K}{1+Ae^{-kt}}$

Kita tentukan nilai A dengan mensubtitusikan t=0. jika t=0 maka $x=x_0$ (populasi awal) sehingga

$$\left|\frac{K-x_0}{x_0}\right| = Ae^{0} = A$$

Jadi solusi persamaan logistic adalah

$$x(t) = \frac{K}{1+Ae^{-kt}} \, dengan A = \frac{K-x_0}{x_0}$$

Menggunakan rumus x(t) pada persamaan diatas kita melihat bahwa

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = K$$

2.6.1. Model logistik penundaan yang tunggal adalah

$$\frac{dx(t)}{dt} = rx(t)\left(1 - \frac{x(t-\tau)}{K}\right) \qquad (3.1)$$

di mana τ adalah waktu tunda dan diasumsikam positif. Titik equilibrium positif dimodelkan dengan K. Itu sudah diusulkan oleh Hutchinson di Gopalsamy (1992)

dari model (3.1) dapat digunakan untuk model yang dinamis dari populasi jenis yang tunggal K dengan suatu laju pertumbuhan konstan r.

bentuk $\left(1-\frac{x(t-\tau)}{K}\right)$ di dalam model (3.1) tandakan suatu umpan balik kepadatan tergantung istilah mekanisme yang mengambil τ unit-unit dari waktu untuk bereaksi terhadap perubahan di dalam populasi kepadatan mewakili di dalam model (3.1) oleh x.

2.6.2 Model Logistik penundaan tunggal dengan usaha yang tetap dari memanen adalah

$$\frac{dx(t)}{dT}=rx(t)\left(1-\frac{x(t-\tau)}{K}\right)-Ex(t)$$

di mana E suatu usaha dari memanen yang diasumsikan untuk menjadi positif tetap. Di model ini tingkat pemanenan sebanding dengan ukuran dari populasi pada waktu sesaat tertentu t. Keseimbangan titik untuk model ini adalah *x(t)=* $\frac{K}{r}$ *(r-E)=K.* Untuk tujuan mendapatkan suatu titik keseimbangan nonnegative, kita berasumsi bahwa r > E .

Karena meneliti stabilitas dari keseimbangan titik, kita linearisasi model di sekitar keseimbangan titik. Misalkan . u(t) = x(t) - K dan mensubtitusikan ke dalam model (3.6) untuk mendapatkan

$$\frac{du(t)}{dt}=(r-E(u(t)+K.)-\frac{r}{K}\left(u(t)+K.\right)(u(t-\tau)+K.)$$

Karena kita mempunyai

$$\frac{du(t)}{dt}=-(r-E)(u(t-\tau)$$

Persamaan karakteristik dari model (3.7) adalah

$$\lambda + (r - E)e^{-\lambda\tau} = 0$$

Model (3.7) adalah serupa dengan model (3.2).

2.6.3. Model logistik dengan usaha yang tetap dari memanen dan dengan waktu tunda di memanen terminal Model adalah

$$\frac{dx(t)}{dt} = rx(t)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) - Ex(t - \tau) \qquad (3.9)$$

di mana E adalah suatu usaha dari memanen yang diasumsikan sebagai positif tetap. Di model ini tingkat pemanenan adalah sebanding dengan ukuran dari populasi pada waktu t - τ. Keseimbangan titik untuk model ini adalah

x(t)=$\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{r}}(r - E) = K$ Untuk tujuan mendapatkan suatu titik keseimbangan nonnegative, kita berasumsi bahwa $r > E$.

Karena meneliti stabilitas dari keseimbangan titik, kita linearisasi model di sekitar keseimbangan titik. Misalkan . $u(t) = x(t) - K$ dan mensubtitusikan ke dalam model (3.9) untuk mendapatkan

$$\frac{du(t)}{dt} = r(u(t) + K.) - \frac{r}{K}(u(t) + K)^2 - E(u(t - \tau) + K,)$$

Atau

$$\frac{du(t)}{dt} = ru(t) + rK. - \frac{r}{K}u(t)^2 - \frac{2r}{K}K.u(y) - \frac{r}{K}K^2 - Eu(t - \tau) - EK.$$

Setelah melalaikan terminologi produk dan penyederhanaan, kita memperoleh

$$\frac{du(t)}{dt} = (2E - r)u(t) - Eu(t-\tau)$$

Persamaan karakteristik untuk model yang linier (3.10) adalah

$$\lambda - (2E - r) + Ee^{-\lambda\tau} = 0$$

Karena r > E , kemudian λ = 0 bukanlah suatu akar dari persamaan karakteristik (3.11).

2.6.4. Model logistik penundaan tunggal dengan kuota yang tetap dari memanen. Populasi dipanen pada tingkat tarip yang tetap. Model adalah

$$\frac{dx(t)}{dt} = rx(t)\left(1 - \frac{x(t-\tau)}{K}\right) - H, \qquad (3.16)$$

di mana H adalah suatu kuota dari memanen yang diasumsikan untuk menjadi hal positif tetap. Di model ini tingkat pemanenan adalah tetap pada waktu t.

jika $H > \frac{rK}{4}$ tidak ada keseimbangan titik, sedang jika $H \leq \frac{rK}{4}$ ada satu atau dua poin-poin keseimbangan yang positif untuk model (3.16). Karena meneliti stabilitas dari keseimbangan titik, kita akan mempertimbangkan dua kasus.3.26

2.7. Persamaan Diferensial Linier

Definisi :

Persamaan defferensial linier adalah persamaan defferensial yang berpangkat satu dalam peubah bebes dan turunan-turunannya, yaitu persamaan defferensial yang dapat dinyatakan dalam bentuk :

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y=f(x)$$

Diasumsikan bahwa $a_0, a_1, \ldots a_n$ dan fungsi-fungsi $f(x)$ merupakan fungsi-fungsi yang kontinu pada suatu selang *I* dan koefisien pertama $a_n(x)\neq 0$ untuk setiap $x\in I$.

(pamuntjak dan widiarti santoso, 1990:1-15)

Definisi 7:

Suatu persamaan yang mengandung satu atau beberapa turunan dari suatu logistik yang tidak diketahui disebut dengan persamaan differensial. Khususnya suatu persamaan berbentuk

$$F\left(x, y, y^1, y^2, \ldots, y^{(n)}\right) \qquad (2.7.1)$$

Dimana y^k menyatakan turuan y ke - k terhadap x yang disebut dengan persamaan differensial biasa berorde n.

Definisi 8:

Jenis turunan tertinggi yang terjadi dalam persamaan diferensial dinamakan orde dari persamaan diferensian.

Sebagai contoh persamaan diferensial berorde 1,2 dan 3 berturut-turut

$$y'+2\sin x=0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}+3x\frac{dy}{dx}-2y=0$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-e^x=0$$

Jika pada waktu $f(x)$ disubtitusikan untuk y dalam persamaan diferensial, persamaan yang dihasilkan merupakan suatu kesamaan untuk semua x dalam satu selang, maka $f(x)$ disebut penyelesaian persamaan diferensial. Jadi,

$f(x)=2\cos x+10$ adalah suatu penyelesaian terhadap

$y'+2\sin x=0$ karena

$f'(x)=2\sin x=-2\sin x+2\sin x=0$

Dalam hal ini, kita meninjau persamaan diferensial linier, yaitu persamaan yang berbentuk

$$a^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=k(x)$$

(2.7.2)

Karena y dan semua turunannya muncul dalam pangkat satu, maka disebut persamaan linier, jika dituliskan dalam bentuk

$$\left[D^n{}_x+a_1(x)D_x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}(x)D_x+a_n(x)\right]y=k(y)$$

(2.7.3)

Operator dalam kurung siku adalah operator linier. Jadi jika L menyatakan operator ini f dan g adalah logistik dan c adalah konstanta,

$$L(f+g)=L(f)+L(g)$$

(2.7.4)

$$L(cf)=cL(f)$$

(2.7.5)

2.7. Persamaan Diferensial Linier Ordo Satu

Kita lihat satu persamaan Linier Orde Pertama dalam bentuk

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$$

(2.8.1)

Untuk menyelesaikannya, pertama kita kalikan kedua ruas dengan factor integral

$$e^{\int p(x)dx}$$

Dan menghasilkan

$$e^{\int p(x)dx}\frac{dy}{dx}+e^{\int p(x)dx}P(x)y=Q(x)-e^{\int p(x)dx}$$

(2.8.2)

Ruas kiri kita kenali sebagai turunan dari

$$ye^{\int p(x)dx}$$

Sehingga persamaan menjadi

$$\frac{d}{dx}\left(ye^{\int p(x)dx}\right)=Q(x)-e^{\int p(x)dx}$$

$$ye^{\int p(x)dx}=\int Q(x)-e^{\int p(x)dx}$$

$$y = e^{-\int p(x)dx} \int \left(Q(x) - e^{\int p(x)dx} \right) dx$$

(2.8.3)

Contoh 1:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x} y = \frac{\sin 3x}{x^2}$$

Jawab:

Dari persamaan tersebut, faktor integralnya adalah

$$e^{\int (2/x)dx} = e^{2\ln x|x|} = e^{\ln x 2} = x^2$$

Maka

$$x^2 \frac{dy}{dx} + 2xy = \sin 3x$$

atau

$$\frac{dy}{dx} + x^2 y = \sin 3x$$

$$x^2 y = \int \sin 3x dx$$

$$= -\frac{1}{3} \cos 3x + c$$

$$y = \left(-\frac{1}{3} \cos 3x + c \right) x^{-2}$$

Contoh 2:

$$\frac{dy}{dt} = r.y(t), y(0) = y_0 \qquad (2.8.4)$$

Diasumsikan r > 0sedemikian sehingga r positif

$$\frac{dy}{y(t)} = r.dt$$

$$\int \frac{dy}{y(t)} = \int r.dt$$

Sehingga diperoleh hasil

$$\ln y = rt + c$$

Dari persamaan (2.8.4) apabila diketahui r < 0 atau diasunsikan negative. Maka diperoleh

$$\frac{dy}{y(t)} = -r.dt$$

$$\int \frac{dy}{y(t)} = \int -r.dt$$

Syarat pada saat t = 0 , y(0) = y_0 sedemikian sehingga

$$\ln y - C = rt$$

$$\ln y - \ln y_0 = rt$$

$$\ln \frac{y}{y_0} = rt$$

$$\frac{y}{y_0} = e^{rt}$$

(Edwin J. Purcell, 1987: 433)

2.9. Kajian Agama Tentang (Surat Al-Hasr :18)

يَٰٓأَيُّهَا ٱلَّذِينَ ءَامَنُواْ ٱتَّقُواْ ٱللَّهَ وَلۡتَنظُرۡ نَفۡسٞ مَّا قَدَّمَتۡ لِغَدٖۖ وَٱتَّقُواْ ٱللَّهَۚ

إِنَّ ٱللَّهَ خَبِيرُۢ بِمَا تَعۡمَلُونَ ١٨

Artinya:. Hai orang-orang yang beriman, bertakwalah kepada Allah dan hendaklah setiap diri memperhatikan apa yang Telah diperbuatnya untuk hari esok (akhirat); dan bertakwalah kepada Allah, Sesungguhnya Allah Maha mengetahui apa yang kamu kerjakan.(Q.S.HASR :18)

Firman allah :. *Hai orang-orang yang beriman, bertakwalah kepada Allah*, merupakan perintah untuk senantisa bertakwa kkepada-nya dan itu mencakup semua perintah-nya dan semua larangan-nya.

Dan firman allah *hendaklah setiap diri memperhatikan apa yang Telah diperbuatnya untuk hari esok* maksudnya hisalah diri kalian sebelum dihisab allah dan lihatlah apa yang telah kalian tabung untuk diri kalian sendiri berupa amal solehuntuk hari kemudian ketika bertemu rob-mu.

dan bertakwalah kepada Allah, merupakan sebuah penegasan kedua. *Sesungguhnya Allah Maha mengetahui apa yang kamu kerjakan* karna sesungguhnya allah mengerti semua keadaan-mu

Dalam Al-qur'an juga manusia diperintahkan untuk merencanakan apa yang akan kita lakukan hari esok. Sehingga semua yang kita rencanakan dapat terlaksana dengan rapi. Ketika kita sudah mempunyai perencanaaan untuk masa depan berarti kita sudah punya arah dan tujuan yang jelas dan dapat menuai hasil yang optimal.(tafsir ibnu katsir:)

Dari ayat *dan hendaklah setiap diri memperhatikan apa yang Telah diperbuatnya untuk hari esok (akhirat)* ungkapan dari kalimat ini juga memiliki nuansa dan sentuhan yang sangat luas dari lafadznya sendiri. Kalimat ini hanya seekedar terlintas dalam hati saja, terbukalah dihadapan manusia lembaran aml-amalnya bahkan lembaran seluruh kehidupannyamanusia pasti akan mengarahkan pandangannya kepada segala kata-katanya untuk merenungkan dan membayangkan hisab amalnya beserta perincian-perincianya satu-persatuguna melihat dan mengecek apakah yang telah dipersiapkan untuk menghadapi hari esok itu.(tafsir fi zhila;ill quran 11:220)

*dan hendaklah setiap diri memperhatikan apa yang Telah diperbuatnya untuk hari esok (*yakni untuk mempersiapkan untuk hari esok*)* (tafsir jalalain 2:1053).

*Ma qaddamat :*apa yanh telah dilakukannya

Ghat: hari kiamat ia dinamakan ghat (esok hari) karena dekatnya sebab segala yang akan terjadi adalah dekat sebagaimana dikatakan "sesungguhnya besok hari itu bagi oraang-orang yang menantinya adalah dekat.'.(tafsir al-magribi 28:86)

Ayat-ayat yang sebelumnya berbicara tentang orang-orang yahudi dan munafik yang kesudahan mereka adalah siksa dunuawi dan ukhrowi.

Ayat diatas mengajak kaum muslimin untuk berhati-hati jangan sampai mengalami nasib seperti mereka.allah berfirman: *Hai orang-orang yang beriman, bertakwalah kepada Allah,* yakni hindarilah siksa yang dapat dijatuhkan allah dalam kehidupan didunia dan akhirat dengan jalan melaksanakan perintahnya dengan sekuat tenaga kamu dan menjauhi larangannya *dan hendaklah setiap hari memperhatikan apa yang telah dikedepankannya* yakni amal soleh yang telah diperbuatnya *untuk hari esok* yang dekat yakni akhirat.(tafsir Al-mishbah 14 :129).

Ayat ini memerintahkan orang-orang yang beriman agar bertakwa kepada Allah, yaitu dengan melaksanakan perintah-perintah dan menjauhi larangan-larangan-Nya. Termasuk melaksanakan perintah-perintah Allah ialah memurnikan ketaatan dan menundukkan diri hanya kepada-Nya saja, tidak sedikit pun terdapat unsur syirik di dalamnya, melaksanakan ibadat-ibadat yang diwajibkan-Nya dan mengadakan hubungan baik sesama manusia.

Dalam ayat yang lain Allah SWT menerangkan tanda-tanda orang bertakwa

Allah telah bersabda kepada umat manusia untuk merencanakan sesuatu untuk hari esok karna seperti pepatah mengatakan hari esok harus lebih baik dai hari sekarang.

Manusia dalah mahluk yang paling mulia karena mempunyai akal. Oleh karna itu wajib hukumnya bagi manusia untuk berfikar karna sesungguhnya allah telah mencip takan mahluk dengan sesuai ukurannya

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Model Logistik Penundaan

Model logistik penundaan yang tunggal adalah

$$\frac{dx(t)}{dt} = rx(t)\left(1 - \frac{x(t-\tau)}{K}\right) \tag{3.1}$$

di mana τ adalah waktu tunda dan diasumsikam positif. K adalah Titik equilibrium positif dari model (3.1) dapat digunakan untuk model yang dinamis dari pertumbuhan populasi jenis tunggal ke arah suatu kejenuhan level K dengan suatu laju pertumbuhan konstan (rate) r.

bentuk $\left(1 - \frac{x(t-\tau)}{K}\right)$ di dalam model (3.1) menandakan suatu umpan balik kepadatan tergantung istilah mekanisme yang mengambil τ unit-unit dari waktu untuk bereaksi terhadap perubahan di dalam populasi kepadatan mewakili di dalam model (3.1) oleh x. model Logistik penundaan (3.1)

Kita akan menganalisis titik equilibrium stabilitas lokal. Dengan menggunakan metode yang standar, yaitu., metoda liniarisasi di sekitar titik equilibrium. dimisalkan $u(t) = x(t) - K$,lalu kita mempunyai $\frac{dt(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}$. disubtitusi $u(t) = x(t) + K$ Kedalam persamaan (3.1) untuk mendapatkan

$$\frac{du(t)}{dt} = r(u(t)+K)\left(1-\frac{u(t-\tau)+K}{K}\right)$$

$$\frac{du(t)}{dt} = r(u(t)+K)\left(1-\frac{u(t-\tau)}{K}-1\right)$$

$$\frac{du(t)}{dt} = r(u(t))\left(1-\frac{u(t-\tau)}{K}\right)$$

menjadi

$$\frac{du(t)}{dt} = \frac{-r}{K}(u(t)u(t-\tau)-ru(t-\tau)$$

Karena *x(t)* tertutup bagi K, istilah *u(t) u(t - τ)* dapat diabaikan. Sekarang kita mempunyai suatu model linier

$$\frac{du(t)}{dt} = -ru(t-\tau)$$

(3.2)

untuk memahami model stabilitas dari titik equilibrium nol (3.2) kita mempertimbangkan model persamaan karakteristik (3.2). mensubtitusi di test fungsi *x(t)* = $e^{\lambda\tau}$ ke dalam model (3.2) menghasilkan persamaan karakteristik

$$\lambda e^{\lambda\tau} = -re^{\lambda(t-\tau)}$$

Karena $e^{\lambda\tau} \neq 0$ kita mempunyai

$$\lambda + e^{-\lambda\tau} = 0 \qquad (3.3)$$

Lemma 3.1 misalkan $r > 0$ dan $\lambda > 0$. Akar dari persamaan karakteristik (3.3) adalah negative jika $\lambda \le \frac{1}{re}$

bukti. misal $F(\lambda) = \lambda + re^{-\lambda\tau}$. Kita mencatat dari (3.3) bahwa λ tidak bisa nonnegatif riil. Kita akan titikkan akar dari $F(\lambda)$ bukan angka-angka yang kompleks. Kita mempunyai $F'(\lambda) = 1 - re^{-\lambda\tau}$ dan $\lambda. = \frac{1}{\tau} - \ln(rt)$. r adalah suatu titik-kritis untuk $F(\lambda)$.selanjutnya, Kita mempunyai $F''(\lambda) = rt^2 e^{-\lambda\tau}$ adalah positif. Ini berarti bahwa nilai dari titik-kritis memberi nilai minimum untuk $F(\lambda)$.

Sekarang, kita mempunyai $F(\lambda.) = \frac{1}{\tau} - (\ln(rt) + 1)$ yang mana sama dengan nol jika $rt = \frac{1}{e} or (\tau = \frac{1}{re})$, dan kurang dari nol jika $\tau < \frac{1}{re}. jika \tau < \frac{1}{re}$ kita hanya mempunyai satu akar, yaitu., $\lambda = \frac{1}{\tau}\ln(r\tau)$ dan jika $\tau < \frac{1}{re}$ kita mempunyai dua akar negatif yang riil.

Jika $F(\lambda.) > 0, yaitu, rt > \frac{1}{e}$ dengan ini mengikuti sebagai berikut bahwa tidak ada akar yang riil dari persamaan karakteristik (3.3) Di kondisi ini persamaan karakteristik mempunyai akar penghubung kompleks. Jika kita misalkan $\lambda = \rho + i\omega, \rho \in R, \omega \in [0, \infty)$ sebagai akar dari (3.3), kemudian kita mempunyai.

$$\rho + i\omega = -re^{-(\rho+i\omega)} = -re^{-\rho\tau}(\cos(\omega\tau) - i\sin(\omega\tau))$$

kemudian kita mendapat/kan persamaan keduanya untuk bagian riil dan imajiner

$$\rho = -re^{-\rho\tau}(\cos(\omega\tau)$$

(3.4.a)

$$\omega = re^{-\rho\tau}\sin(\omega\tau)$$

(3.4.b)

Lemma 3.2 Misalkan r >0 dan $\tau > 0$ Akar dari persamaan karakteristik (3.3) adalah kompleks menghubungkan dengan bagian hal negatif yang riil jika $\frac{1}{re} < \tau < \frac{\pi}{2r}$

Bukti. Misalkan $F(\lambda) = \lambda + e^{-\lambda\tau}$ Kita mencatat dari (3.3) bahwa λ tidak bisa jadilah nonnegative riil. Kita mempunyai $F'(\lambda) = 1 - rte^{-\lambda\tau}$ dan λ $\frac{1}{\tau}\ln(rt)$ adalah suatu titik-kritis untuk $F(\lambda)$ Kita lebih lanjut mempunyai $F''(\lambda) = rt^2e^{-\lambda\tau}$ yang mana adalah positif. Ini berarti bahwa nilai dari titik-kritis memberi nilai minimum untuk $F(\lambda)$., fungsi $F(\lambda)$ tidak punya akar riil ketika $F(\lambda.) = \frac{1}{\tau}(\ln(rt)+1) > 0$ dan ini terjadi ketika $\frac{1}{re} < \tau$ Sekarang, kita akan menunjukkan bahwa akar dari $F(\lambda)$ adalah suatu jumlah yang kompleks dengan bagian negatif yang riil.

Mengira bahwa (3.3) mempunyai suatu akar $\lambda = \rho + i\omega$ dengan $\rho \geq 0$ sejak λ=0 bukanlah suatu akar dari persamaan karakteristik (3.3) kita dapat berasumsi bahwa ω> 0 dan ini menyiratkan, dari (3.4.b) bahwa

$$0 < \omega\tau = re^{-\rho\tau} \sin \omega\tau < \frac{\pi}{2}$$

mempertunjukkan bahwa sisi sebelah kiri dari persamaan (3.4.a), yaitu.,

$$\rho = -re^{-\rho\tau} \cos \omega\tau$$

adalah nonnegative, sedang sebelah kanan adalah negatif. Pertentangan ini membuktikan bahwa ρ < 0 . Catat bahwa menghubungkan dari λ juga membuat puas persamaan karakteristik (3.3).

Sekarang kita mempertimbangkan lalat hijau Australian studi kasus, lihat Gudang dan Fulford (2002). Nicholson di Fulford dan Barnes (2002) eksperimen yang diselenggarakan yang jenis-tunggal di populasi lalat hijau-domba-domba Australian ini (Lucilia cuprina). Hasil nya sungguh baik didekati oleh model diuraikan oleh suatu persamaan-diferensi, yang dapat didekati oleh duanya persamaan perbedaan

$$x_{n+1} = x_n + rx_n\left(1 - \frac{x_{n+\tau}}{K}\right)$$

Dan persamaan penundaan yang diferensi, model (3.1). Di sini x adalah ukuran populasi, r reproduksi nilainya dan K (carryng capacity) daya-dukung nya. Nilai-Nilai parameter adalah r = 0.106 day$_{-1}$, K = 2800 lalat, dan τ = 17 hari.

Dari kondisi stabilitas, Lemma 3.1 dan 3.2, kondisi stabilitas dari waktu tunda harus bergerak di interval (0, 14.8188). Karena waktunya penundaan adalah τ = 17 hari, itu tidak termasuk intervalnya, sehingga keseimbangan menunjuk K = 2800 tidaklah asimtotik stabil..

Dengan teorema 2.8, kita mengetahui bahwa jika stabilitas dari solusi sepele u(t) = 0 dari model (3.2) tombol pada $\tau = \overline{\tau}$, kemudian persamaan karakteristik (3.3) harus mempunyai sepasang menghubungkan akar murni yang imajiner ketika $\tau = \overline{\tau}$. Sesungguhnya, oleh karena Theorem 2.8, kita dapat berpikir tentang akar dari persamaan karakteristik (3.3) ketika fungsi yang berlanjut dalam hal dari penundaan τ adalah $\lambda(\tau)$ + r $e^{-\lambda(\tau)\tau}$ = 0 Oleh karena itu, untuk tujuan memahami tombol stabilitas dari model (3.2) kita harus menentukan nilai dari $\overline{\tau}$. di mana persamaan karakteristik (3.3) mungkin punya sepasang menghubungkan imajiner penundaan akar

Kita berasumsi $\lambda = i\omega, \omega > 0$ ke dalam persamaan karakteristik (3.3), kita mempunyai

$$r\cos\omega\tau = 0$$

$$r\sin\omega\tau = \omega \qquad (3.5)$$

Kemudian kita memperoleh $\omega = r > 0$

Dari persamaan karakteristik (3.3), kita mempunyai

$$\frac{d\lambda}{d\tau} - re^{-\lambda\tau}\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\tau + \lambda\right) = 0$$

Dari (3.3) kita mengetahui bahwa $-re^{\lambda\tau} = \lambda$ kemudian

$$\frac{d\lambda}{d\tau} + \lambda\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\tau + \lambda\right) = 0$$

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = \frac{-\lambda^2}{1+\lambda\tau}$$

Seperti itu

$$sign\left\{\frac{d(\mathrm{Re}\lambda)}{d\tau}\right\}_{\lambda - i\omega} = sign\left\{\mathrm{Re}\frac{\omega^2}{1+i\omega\tau}\right\}$$

$$= sign\left\{\mathrm{Re}\frac{\omega^2 - i\omega^3\tau}{1+i\omega^2\tau^2}\right\}$$

$$= sign\left\{\frac{\omega^2}{1+\omega^2\tau^2}\right\} > 0$$

Ini menggambarkan bahwa semua akar yang melewati khatulistiwa sumbu imaginer pada $i\omega$ menyeberang dari kiri ke kanan sebagai τ peningkatan,

Kita juga mengetahui bahwa untuk $\tau = 0, \lambda(0) = -r < 0$ yaitu., nol titik keseimbangan adalah asimtotik yang stabil walaupun tidak ada waktu tunda. Dari persamaan (3.5) dan ω=r. kita mempunyai cos $\omega\tau$ =0 dan sin $\omega\tau$. Kaarenanya $\omega\tau\frac{\pi}{2}$. Kita menandakan $\tau_0 = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{2r}$ Kemudian argumentasi yang terdahulu bersama-sama dengan tanda bukti Theorem 2.8 menunjukkan bahwa ketika $0 < \tau < \tau_0$, nol titik keseimbangan adalah asimtotik stabil, dan ketika $\tau > \tau_0$, tidak stabil.

Ada suatu stabilitas tombol pada $\tau\frac{\pi}{2r}$ Pencabangan dua Hopf terjadi pada $\tau\frac{\pi}{2r}$ dan nol keseimbangan menunjuk stabilitas kertas WC dalam posisi ini.

3.2. Model logistik Penundaan dengan Usaha yang tetap dari Memanen

Model logistik spesies tunggal penundaan dengan usaha yang tetap dari memanen adalah

$$\frac{dx(t)}{dT} = rx(t)\left(1 - \frac{x(t-\tau)}{K}\right) - Ex(t)$$

(3.6)

di mana E suatu usaha dari memanen yang diasumsikan untuk menjadi positif tetap. Di model ini tingkat pemanenan sebanding dengan ukuran dari populasi pada waktu sesaat tertentu t. Keseimbangan titik untuk model ini adalah $x(t)= \frac{K}{r}(r\text{-}E)=K$. Untuk tujuan mendapatkan suatu titik keseimbangan nonnegative, kita berasumsi bahwa r > E.

Karena meneliti stabilitas dari keseimbangan titik, kita linearisasi model di sekitar keseimbangan titik. Misalkan . u(t) = x(t) - K dan mensubtitusikan ke dalam model (3.6) untuk mendapatkan

$$\frac{du(t)}{dt} = (r - E(u(t) + K.) - \frac{r}{K}(u(t) + K.)(u(t-\tau) + K.)$$

Karena kita mempunyai

$$\frac{du(t)}{dt} = -(r-E)(u(t-\tau) \qquad (3.7)$$

Persamaan karakteristik dari model (3.7) adalah

$$\lambda + (r-E)e^{-\lambda\tau} = 0 \qquad (3.8)$$

Model (3.6) adalah serupa dengan model (3.2).

Lemma 3.2 misalkan r > E > 0 dan τ > 0 . Akar dari persamaan karakteristik (3.8) adalah hal negatif jika $\max\left\{0, r\frac{1}{\tau e}\right\} < E < r$

Bukti. Dari Lemma 3.1 kita mempunyai $r - E < \frac{1}{\tau e}$ dan kemudian $0 < r - E < \frac{1}{\tau e}$ Kita lebih lanjut mempunyai $E < r$ dan $E > r - \frac{1}{\tau e}$ karena kita mempunyai $\max\left\{0, r - \frac{1}{\tau e}\right\} < E < r$

jika, $E = r - \frac{1}{\tau e} > 0$ kemudian ada hanya satu akar dari persamaan karakteristik untuk model (3.7). Dalam hal ini keseimbangan titik untuk model (3.6) adalah stabil.secara asimtot di tempat itu **Lemma 3.4** misalkan r > E > 0 dan τ > 0 . Akar dari persamaan karakteristik (3.8) adalah kompleks menghubungkan dengan bagian hal negatif yang riil jika

$$\max\left\{0, r - \frac{\pi}{2\tau} > 0\right\} < E < r - \frac{1}{\tau e}$$

Bukti. Dari Lemma 3.2 kita mempunyai $\frac{1}{e} < \tau(r-E) < \frac{\pi}{2}$ Kita lebih lanjut mempunyai $E < r - \frac{1}{\tau e}$ dan $E > r - \frac{\pi}{2\tau}$ Karena E > 0 , kemudian kita mempunyai $\max\left\{0, r - \frac{\pi}{2\tau}\right\} < E < r - \frac{1}{\tau e}$

Ketika keseimbangan menunjuk untuk model tanpa memanen tidaklah asimtotik yang stabil dan jika populasi dipanen dengan usaha yang tetap dari memanen di mana usaha adalah di sekitar $\max\left\{0, r - \frac{\pi}{2\tau}\right\} < E < r - \frac{1}{\tau e}$ kemudian keseimbangan menunjuk untuk model dengan pemanenan menjadi stabil asimtot. Di kata-kata yang lain, ketika titik keseimbangan untuk model tanpa pemanenan tidaklah stabil, tetapi populasi dipanen dengan usaha yang tetap dari memanen, populasi adalah bias stabil.

Kita juga mengetahui bahwa untuk τ = 0 , λ (0) = - (r - E) < 0 ; yaitu., nol titik keseimbangan adalah asimtotik yang stabil walaupun tidak ada waktu tunda.Karena ω = r - E , kemudian kita mempunyai $\omega\tau = \frac{\pi}{2}$ = . Kita menandakan $\tau_0 = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{2(r-E)}$ Kemudian argumentasi yang terdahulu bersama-sama dengan tanda bukti Theorem 2.8 menunjukkan bahwa ketika $0 \le \tau < \tau_0$, nol titik keseimbangan adalah asimtotik stabil, dan ketika $\tau > \tau_0$, adalah tidak stabil.. Ada suatu titik stabilitas pada

$\tau = \dfrac{\pi}{2(r-E)}$ pencabangan dua Hopf terjadi pada $\tau = \dfrac{\pi}{2(r-E)}$ dan titik keseimbangan nol stabilitasnya hilang dalam posisi ini.

Kita sekarang mempertimbangkan kondisi E < r untuk model (3.6) di mana keseimbangan menunjuk $x = \dfrac{K}{r}(r-E)$ adalah di tempat itu asimtotik yang stabil untuk $0 \le \tau < \dfrac{\pi}{2(r-E)}$ Kita bermaksud menghubungkan keseimbangan ini menunjuk laba yang maksimum atau masalah sewa maksimum yang ekonomi. Kita berasumsi bahwa total biaya adalah sebanding dengan usaha dari memanen. Kemudian fungsi biaya adalah $TC = c_1 - c_2 E$ Pendapatan dari penghisapan, menulis ketika total pendapatan, $TR = p\ E\ x$. Fungsi laba adalah

$$\pi = TR - TC = pEK\left(\frac{r-E}{r}\right) - c_1 - c_2 E$$

atau

$$\pi = -\frac{pK}{r}E^2 + (pK - c_2)E - c_1$$

Dari laba berfungsi kita mempunyai $\dfrac{d\pi}{dE} = -\dfrac{pKE}{r} + pK - c_2$ dan titik-kritis adalah $E_c = -\dfrac{(pK - c_2)r}{2pK}$ Untuk tujuan mendapatkan suatu titik-kritis yang positif kita mengasumsikan 2 pK > c .

Asumsi ini telah dipertimbangkan oleh Clark (1990). Laba yang maksimum terjadi pada $E = E_c$ karena $\frac{d^2\pi}{dE^2} = -\frac{2pK}{r} < 0$ Sebagai konsekwensi, jika kita pilih usaha dari memanen pada $E = E_c = \frac{(pK - c_2)r}{2pK}$ dan waktunya menunda membuat puas $0 \le \tau < \frac{\pi}{2(r-E)}$ kemudian titik keseimbangan adalah di tempat itu asimtotik yang stabil dan juga memaksimalkan fungsi laba.

Kita mempertimbangkan lagi model (3.6) dengan parameter r = 2 dan K = 100. Keseimbangan menunjuk untuk model adalah x = 100 - 50E . Mengambil $c_1 = 1, c_2 = 0,5$ dan p = 1. Kemudian fungsi laba menjadi

$\pi = -50E2 + 99.50E - 1.$

Kita lebih lanjut memperoleh titik-kritis $E = E_c$ = 0.9950 . Adalah mudah untuk melihat bahwa fungsi laba adalah cekung mengarah ke bawah.. Karenanya, titik-kritis E_c = 0.9950 memberi laba yang maksimum, yaitu., π_{max} =48.50125 max, dan keseimbangan menunjuk x= 100 - 50 E_c = 50.25 adalah juga asimtotik stabil. Garis tepi penundaan untuk stabilitas dari titik keseimbangan adalah τ = 1.56298.

3.3 Model logistik dengan waktu Penundaan dalam istilah Memanen

Kita sekarang mempertimbangkan fungsi model dengan usaha yang tetap dari memanen dan dengan waktu tunda di memanen terminal Model adalah

$$\frac{dx(t)}{dt} = rx(t)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) - Ex(t-\tau) \tag{3.9}$$

di mana E adalah suatu usaha dari memanen yang diasumsikan sebagai positif tetap. Di model ini tingkat pemanenan sebanding dengan ukuran dari populasi pada waktu tertentu t - τ. Keseimbangan titik untuk model ini adalah $x(t) = \frac{K}{r}(r-E) = K$ Untuk mendapatkan suatu titik keseimbangan nonnegative, kita berasumsi bahwa $r > E$.

Karena meneliti stabilitas dari titik keseimbangan, kita linearisasi model di sekitar titik keseimbangan. misalkan . $u(t) = x(t) - K$ dan mensubtitusikan ke dalam model (3.9) untuk mendapatkan

$$\frac{du(t)}{dt} = r(u(t)+K.) - \frac{r}{K}(u(t)+K)^2 - E(u(t-\tau)+K,)$$

Atau

$$\frac{du(t)}{dt} = ru(t) + rK. - \frac{r}{K}u(t)^2 - \frac{2r}{K}K.u(y) - \frac{r}{K}K^2 - Eu(t-\tau) - EK.$$

Setelah mengabaikan terminologi produk dan penyederhanaan, kita memperoleh

$$\frac{du(t)}{dt} = (2E-r)u(t) - Eu(t-\tau) \tag{3.10}$$

Persamaan karakteristik untuk model yang linier (3.10) adalah

$$\lambda-(2E-r)+Ee^{-\lambda\tau}=0 \tag{3.11}$$

Karena r > E , kemudian λ = 0 bukanlah suatu akar dari persamaan karakteristik (3.11).

Teorema 3.5 misal $r > E$. Nol titik keseimbangan dari model (3.10) adalah stabil secara asimtot jika kondisi yang berikut dicukupi

(i) $\tau<\dfrac{1}{E}$.

Dan

(ii) $\ln(E\tau)-(2E-r)\tau+1\leq 0$

Bukti. misalkan $F(\lambda)=\lambda-(2E-r)+Ee^{-\lambda\tau}$ kemudian kita mempunyai $F'(\lambda)=1-Ee^{-\lambda\tau}$ dan $\lambda.=\dfrac{\ln(E\tau)}{\tau}$ adalah titik-kritis untuk F(λ) Karena $F''(\lambda)=E\tau^2e^{-\lambda\tau}>0$ untuk λ, kemudian *F(λ)* adalah cekung yang menaik dan $F(\lambda.)=\dfrac{\ln(E\tau)-(2E-r)\tau+1}{\tau}$ adalah minimum.Dari (i), kita mempunyai $\lambda.=\dfrac{\ln(E\tau)}{\tau}<0$ dan dari (ii) kita memperoleh

$$F(\lambda.)=\frac{\ln(E\tau)-(2E-r)\tau+1}{\tau}\leq 0$$

Catat bahwa $F(0)$ = -(E - r) > 0 dan kemudian F(λ) adalah positif untuk beberapa λ , (λ < 0). Oleh karena itu untuk ln(Eτ) - (2E – r)τ + 1 < 0 , kita mempunyai λ_2 dan λ_1 dengan $\lambda_2 < \lambda. < \lambda_1 < 0$. memuaskan F (λ_2)= F (λ_1) =0 . Dalam kasus ln(Eτ) - (2E - r) τ + 1 = 0 , kita hanya mempunyai satu akar negatif yang riil, yaitu., $\lambda. = \frac{\ln(E\tau)}{\tau}$ ini berarti bahwa titik keseimbangan nol dari model (3.10) adalah stabil secara asimtot.. Kita juga menyimpulkan bahwa titik keseimbangan $x = \frac{K}{r}(r - E)$ adalah di tempat itu asimtotik yang stabil ketika kondisi-kondisi di Theorem 3.5 dicukupi.

Dari bukti Theorem 3.5, F(λ) = λ - (2E- r)+ $Ee^{-\lambda\tau}$ adalah mungkin dijadikan positif, nol, atau negatif. Itu tergantung pada nilai dari titik-kritis $\lambda. = \frac{\ln(E\tau)}{\tau}$ Ketika nilai yang minimum dari F(λ) = λ - (2E- r)+ $Ee^{-\lambda\tau}$ adalah positif, ini menyiratkan bahwa tidak ada akar yang riil tentangnya, tetapi nomor yang kompleks akan ada.

Teorema 3.6 jika $E < \frac{E}{3}$ dan $\ln(E\tau) - (2E - r)\tau + 1 > 0$ kemudian akar dari persamaan karakteristik (3.11) adalah kompleks menghubungkan dengan bagian negatif yang riil.

Bukti. Dari bukti teorema 3.5 kita mempunyai

$$F(\lambda_{\bullet}) = \frac{\ln(E\tau) - (2E - r)\tau + 1}{\tau}$$

Karena $\ln(E\tau) - (2E - r)\tau + 1 > 0$, kemudian $F(\lambda) > 0$ Ini berarti bahwa tidak ada akar yang riil dari $F(\lambda) = \lambda - (2E - r) + Ee^{-\lambda\tau}$. Misalkan $\lambda = \rho + i\omega$, $\omega > 0$, adalah akar dari $F(\lambda)$, kemudian kita mempunyai

$$\rho + i\omega - (2E - r) + Ee^{-\rho\tau}(\cos\omega\tau - i\sin\omega\tau) = 0$$

Memisahkan bagian riil dan imajiner kita mempunyai

$$\rho\text{-}(2E\text{-}r) = \text{-}Ee^{-\rho\tau}\cos\omega\tau$$

$$\omega = Ee^{-\rho\tau}\sin\omega\tau$$

Kita mengetahui bahwa ada suatu unik $\omega\tau$ di interval $(0, \pi)$ memuaskan persamaan kedua-duanya. Persamaan kuadratik kedua-duanya dan menambahkannya menghasilkan persamaan

$$(\rho\text{-}(2E\text{-}r))^2 + \omega^2 = E^2e^{-2\rho\tau}$$

$$\rho^2\text{-}2\rho(2E\text{-}r) + (2E\text{-}r)^2 + \omega^2 = E^2e^{-2\rho\tau}$$

misalkan $F_1(\rho) = \rho^2\text{-}2\rho(2E\text{-}r) + (2E\text{-}r)^2 + \omega^2$ dan $F_2(\rho) = E^2e^{-2\rho\tau}$.

Karena $r > 3E$ dan mempertimbangkan dengan nyata kita memperoleh persimpangan antara $F_1(\rho)$ dan $F_2(\rho)$ terjadi untuk $\rho < 0$ Kita lebih lanjut mengenal baik jumlah yang kompleks $\lambda = \rho + i\omega$ dengan bagian negatif yang riil. bahwa $\lambda = \rho - i\omega$ adalah juga suatu akar dari $F(\lambda)$.

Teorema 3.6 dengan kata-kata sebagai berikut bahwa jika r > 3E dan ln(E τ) - (2E . r) τ + 1 > 0 kemudian nol keseimbangan titik untuk model (3.11) adalah asimtotik yang stabil dan titik keseimbangan $x = \frac{K}{r}(r-e)$ adalah di tempat itu stabil secara asimtot.

Dengan Theorem 2.8, kita mengetahui bahwa jika stabilitas dari solusi sepele *u(t) = 0* dari model (3.10) tombol pada $\tau = \overline{\tau}$, kemudian persamaan karakteristik (3.11) harus mempunyai sepasang menghubungkan akar murni yang imajiner ketika $\tau = \overline{\tau}$. Sesungguhnya, oleh karena Theorem 2.8, kita dapat berpikir tentang akar dari persamaan karakteristik (3.11) sebagai fungsi yang berlanjut dalam hal dari penundaan τ , yaitu.,

$$\lambda(\tau) - (\text{2E-r}) + \text{Ee}^{-\lambda(\tau)\tau} = 0$$

Oleh karena itu, untuk tujuan memahami tombol stabilitas dari model (3.10), kita harus menentukan nilai dari $\overline{\tau}$ di mana persamaan karakteristik (3.11) mungkin punya sepasang menghubungkan akar murni imajiner

Kita mengasumsikan $\lambda = i\omega, \omega > 0$ adalah suatu akar dari persamaan karakteristik (3.11) karena $\tau = \overline{\tau}, \overline{\tau} \geq 0$. menggantikan $\lambda = i\omega$ ke dalam persamaan karakteristik (3.11), kita mempunyai

$$i\omega - (2E-r) + Ee^{-i\omega\tau} = 0,$$

$$i\omega - (2E-r) + E\cos\omega\tau - E\sin\omega\tau = 0$$

Memisahkan bagian riil dan imajiner kita mendapatkan persamaan keduanya untuk bagian riil dan yang imajiner, yaitu.,

$$(2E-r) = E\cos\omega\tau$$

$$\omega = E\sin\omega\tau$$

(3.12)

Persamaan kuadratik keduanya dan menggabungkannya, kita memperoleh

$$\omega^2 = E^2 - (2E-r)^2$$

(3.13)

Jika $E^2 - (2E-r)^2$ atau dengan setara $E < r < 3E$ kemudian kita lihat bahwa akar yang semata-mata imajiner dari persamaan karakteristik (3.11) ada.

Dari persamaan (3.12) kita mempunyai $\cos\omega\tau = \frac{(2E-r)}{E}$ dan $\sin\omega\tau = \frac{\omega}{E}$ Karenanya, ada suatu unik $\omega\tau, 0 < \omega\tau < 2\pi$, yang seperti $\omega\tau$ membuat kedua-duanya $\cos\omega\tau = \frac{(2E-r)}{E}$ dan $\sin\omega\tau = \frac{\omega}{E}$ pegangan., Kita lebih lanjut mempunyai

$$\tau_0 = \frac{\theta}{\omega}$$

(3.14)

Dimana $0 < \theta < 2\pi$ dan

$$\cos\theta = \frac{2E-r}{\omega}$$

Dan ω memuaskan (3.13)

Membedakan persamaan karakteristik (3.11) berkenaan dengan τ , kita mempunyai

$$\frac{d\lambda}{d\tau} - Ee^{-\omega\tau}\left(\tau\frac{d\lambda}{d\tau} + \lambda\right) = 0,$$

Dari persamaan karakteristik (3.11), kita mengetahui bahwa $-Ee^{-\omega\tau} = \lambda - (2E-r)$, karenanya kita mempunyai

$$\frac{d\lambda}{d\tau} + (\lambda - (2E-r))\left(\tau\frac{d\lambda}{d\tau} + \lambda\right) = 0$$

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = \frac{-\lambda^2 + \lambda(2E-r)}{1 + \lambda\tau - (2E-r)\tau}$$

(3.15)

Seperti itu, kondisi E < r < 3E menyiratkan bahwa akar yang semata-mata imajiner dari persamaan karakteristik (3.10) ada. Dari persamaan (3.14), kita mempunyai

$$sign\left(\frac{d(\operatorname{Re}\lambda)}{d\tau}\right)_{\lambda-i\omega} = sign\left(\operatorname{Re}\frac{d\lambda}{d\tau}\right)_{\lambda-i\omega}$$

$$= sign\left(\operatorname{Re}\frac{\omega^2 - i\omega(2E-r)}{1 + i\omega\tau - (2E-r)\tau}\right)$$

$$= sign\left(\operatorname{Re}\frac{\omega^2 + i\omega^3 + i\omega(2E-r)(1-(2E-r)\tau)}{(1-(2E-r)\tau)^2 + \omega^2\tau^2}\right)$$

$$= sign\left(\operatorname{Re}\frac{\omega^2}{(1-(2E-r)\tau)^2+\omega^2\tau^2} \right)$$

Oleh karena itu kita lihat bahwa tanda adalah selalu positif. Ini menyiratkan bahwa semua akar yang melewati khatulistiwa sumbu imajiner pada iω menyeberang dari kiri ke kanan sebagai τ peningkatan.

Untuk τ = 0 , kita mempunyai λ = E - r < 0 yang berarti bahwa titik keseimbangan adalah stabil secara asimtot. Kemudian argumentasi yang terdahulu bersama-sama dengan tanda bukti terhadap Theorem 2.8 titikkan bahwa ketika $0 \le \tau < \tau_0$, nol titik keseimbangan dari model (3.10) adalah stabil secara asimtot, dan ketika $\tau > \tau_0$, titik keseimbangan nol tidak stabil. Stabilitas terjadi pada $\tau = \tau_0$. Pencabangan dua Hopf terjadi dalam posisi ini.

Di kasus r = 3*E* , kita mengetahui bahwa ω = 0 adalah satu-satunya solusi dari (3.13). Bagaimanapun λ = 0 bukanlah akar dari persamaan karakteristik (3.11) karena r > E . Karenanya, tidak ada stabilitas juga. lihat bahwa jika r > 3E , kemudian tidak ada akar murni yang imajiner dari persamaan karakteristik (3.11). Di kata-kata yang lain, tidak ada akar dari persamaan karakteristik (3.11) memotong sumbu imajiner ketika τ peningkatan. Oleh karena itu, tidak ada tombol stabilitas, tak peduli bagaimana penundaan τ terpilih.

Kita sekarang mempertimbangkan kondisi E < r untuk model (3.9) di mana keseimbangan titik $x=\frac{K}{r}(r-E)$ adalah serentak asimtotik yang stabil untuk $\tau = 0$. Kita bermaksud menghubungkan titik keseimbangan untuk laba yang maksimum. Fungsi biaya adalah $TC = c_1 + c_2 E$, total pendapatan, $TR = p\ E\ x$, dan fungsi laba adalah

$$\pi = TR - TC = pEK\left(\frac{r-E}{r}\right) - c_1 + c_2 E$$

Atau

$$\pi = \frac{pK}{r} E^2 \left(pK - c_2 \right) E - c_1$$

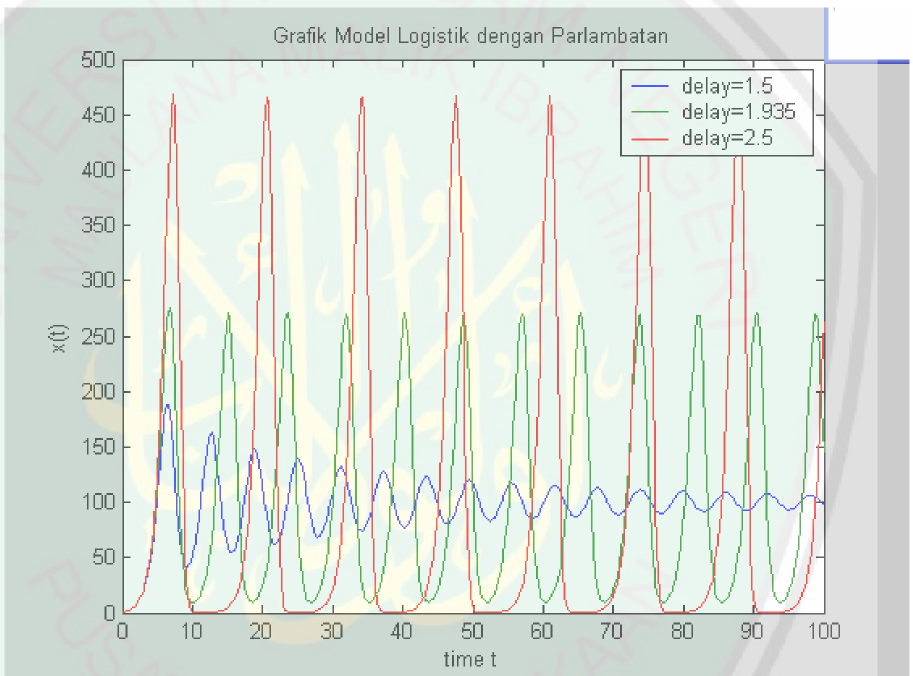
Fungsi Laba sama dengan fungsi laba di bagian yang sebelumnya.Kita menyimpulkan bahwa jika kita pilih usaha dari memanen pada $E = E_c = \frac{\left(pK - c_2 \right) r}{2pK}$ dan waktu tundanya memuaskan $0 < \tau < \tau_0$, di mana τ_0 mengacu pada (3.14), kemudian titik keseimbangan adalah stabil secara asimtot dan juga memaksimalkan fungsi laba

Kita mempertimbangkan model (3.9) dengan parameter r = 2 dan K = 100. Keseimbangan titik untuk model adalah x = 100 - 50E . ambil $c_1 = 1$, $c_2 = 0,5$, dan p = 1. Kemudian fungsi laba menjadi

$\pi_{max} = -50E^2 + 99.50E - 1$.

Kita lebih lanjut memperoleh titik-kritis $E = E_c =$ 0.9950. Adalah mudah lihat bahwa fungsi laba adalah cekung mengarah ke bawah.. Karenanya, titik-kritis E_c= 0.9950 memberi laba yang maksimum, yaitu.,

$\pi_{max} = 48.50125$, dan titik keseimbangan x =100 – 50E$_c$ = 50.25 adalah juga stabil secara asimtot. Garis tepi penundaan untuk stabilitas dari titik keseimbangan adalah τ = 1.58887 . Pencabangan dua Hopf terjadi pada τ = 1.58887 . Jalan peluru di sekitar keseimbangan titik x = 50.25 dengan beberapa nilai-nilai dari waktu tunda disampaikan dalam gambar 3.4.



Gambar 3.4: Jalan peluru dari model (3.9) dengan τ = 1.5; 1.935;dan 2.5

Gambar 3.4 dengan nilai awal x_0 = 50 , jalan peluru bergerak-gerak di sekitar titik keseimbangan. Karena τ = 1.5 , jalan peluru menuju ke titik keseimbangan, dan untuk τ = 2.5, jalan peluru bergerak-gerak dan menyimpang. Bagaimanapun, karena τ = 1.935 , jalan peluru pada waktu tertentu bergerak-gerak dan pencabangan dua Hopf terjadi karena jika kita mengganggu nilai dari waktu tunda, jalan peluru akan memusat pada titik keseimbangan atau menyimpang

3.4 Model logistik Penundaan dengan Kuota yang tetap dari Memanen

Kita mempertimbangkan fungsi penundaan model dengan kuota yang tetap dari memanen. Populasi dipanen pada tingkat tarip yang tetap. Model adalah

$$\frac{dx(t)}{dt} = rx(t)\left(1 - \frac{x(t-\tau)}{K}\right) - H, \tag{3.16}$$

di mana H adalah suatu kuota dari memanen yang diasumsikan untuk menjadi hal positif tetap. Di model ini tingkat pemanenan adalah tetap pada waktu t.

jika $H > \frac{rK}{4}$ tidak ada keseimbangan titik, sedang jika $H \leq \frac{rK}{4}$ ada satu atau dua titik keseimbangan yang positif untuk model (3.16). Karena meneliti stabilitas dari titik keseimbangan, kita akan mempertimbangkan dua kasus.

Kasus 1 $H > \frac{rK}{4}$

Model (3.15) menjadi

$$\frac{dx(t)}{dt} = rx(t)\left(1 - \frac{x(t-\tau)}{K}\right) - \frac{rK}{4}$$

yang mempunyai suatu keseimbangan titik $x(t) = \frac{K}{2}$ dan $u(t) = x(t) = \frac{K}{2}$ kemudian mensubtitusikan ke dalam model di atas untuk mendapatkan

$$\frac{du(t)}{dt} = r\left(u(t) + \frac{K}{2}\right)\left(1 - \frac{u(t-\tau)\frac{K}{2}}{K}\right) - \frac{rK}{4}$$

Karenanya kita mempunyai model linier

$$\frac{du(t)}{dt} = \frac{r}{2}\left(u(t) - u(t-\tau)\right) \qquad (3.17)$$

Persamaan karakteristik untuk model (3.17) adalah $\lambda - \frac{r}{2}\left(1 - e^{-\lambda\tau}\right) = 0$. lihat bahwa $\lambda = 0$ adalah suatu akar dari persamaan karakteristik. Persamaan karakteristik ini mungkin mempunyai dua akar yang riil.

Lemma 3.7 misal r > 0 dan τ > 0 . Akar dari persamaan karakteristik untuk model (3.16) adalah negatif dan nol jika $0 < r\tau < 2$.

Bukti masalkan $F(\lambda) = \lambda - \frac{r}{2} + \frac{r}{2}e^{-\lambda\tau}$ dan $F'(\lambda) = 1 - \frac{r\tau}{2}e^{-\lambda\tau}$ dan titik-kritis untuk fungsi ini adalah $\lambda_* = \frac{1}{\tau}\ln\left(\frac{r\tau}{2}\right)$ dan secara grafik kita lihat bahwa $F(\lambda_*) \le 0$

Kita juga mengetahui bahwa $F''(\lambda)=\frac{r\tau^2}{2}e^{-\lambda\tau}$ adalah hal positif untuk semua $\lambda.$. Ini berarti bahwa $F(\lambda.)$ adalah minimum dan $F(\lambda)$ adalah cekung menaik. Kemudian jika 0 < $r\tau$ < 2 kita mempunyai $\lambda.$. < 0 .dan $F(\lambda.)$ < 0 Karenanya kita mempunyai dua akar, yaitu $\lambda_1=0$ dan yang lain adalah λ_2 dengan $\lambda_2<\lambda_1=0$. Dalam hal ini, nol solusi untuk model (3.17) tidaklah stabil secara asimtot.

Jika $r\tau$ = 2 , kita lihat bahwa $F(\lambda.)$ = 0, karenanya ada hanya satu titik keseimbangan, yaitu., $\lambda.$. = 0 Dalam hal ini solusi membengkok untuk model (3.17) adalah tetap.. Kemudian nol keseimbangan titik untuk model (3.16) tidaklah stabil secara asimtot.

Lemma 3.8 misal r > 0 dan τ > 0 . Akar dari persamaan karakteristik untuk model (3.17) adalah positif dan nol jika $r\tau$ > 2.

Bukti. Misalkan $F(\lambda)=\lambda-\frac{r}{2}+\frac{r}{2}e^{-\lambda\tau}$ dan $F'(\lambda)=1-\frac{r\tau}{2}e^{-\lambda\tau}$ dan titik-kritis untuk fungsi ini adalah $\lambda.=\frac{1}{\tau}\ln\left(\frac{r\tau}{2}\right)$ dan dengan grafik kita lihat bahwa $F(\lambda.)\leq 0$ Dan juga kita mempunyai $F''(\lambda)=\frac{r\tau^2}{2}e^{-\lambda\tau}$ adalah positif untuk semua $\lambda_1=0$. Ini berarti bahwa $F(\lambda.)$ adalah minimum dan $F(\lambda)$ adalah cekung menaik.. Kemudian jika $r\tau$ > 2 kita mempunyai $\lambda.$. > 0 dan

$F(\lambda.) < 0$. Karenanya kita mempunyai dua akar, yaitu., $\lambda_1 = 0$ dan yang lain adalah λ_2 dengan $\lambda_2 < \lambda_1 = 0$ Dalam kasus ini titik keseimbangan tidaklah stabil scara asimtot.

Kasus 2 $H < \frac{rK}{4}$

Di kasus ini kita mempunyai dua keseimbangan titik, yaitu. $x_1(t) = \frac{K - K.}{2}$ dan $x_2(t) = \frac{K + K.}{2}$ dimana $K. = \sqrt{K^2 - \frac{4HK}{r}}$ dan kita mengetahui bahwa $x_2(t) > x_1(t) > 0$.

Di Analisa Stabilitas ini dari Keseimbangan Titik $x_1(t) = \frac{K - K.}{2}$

Di order ini untuk memahami kemantapan setempat dari keseimbangan adalah titik x_1 kita misalkan $u(t) = x(t) - x_1$ dan kemudian mensubtitusikan ke dalam model (3.16) untuk mendapatkan

$$\frac{du(t)}{dt} = r\left(u(t) + x_1\right)\left(1\frac{u(t) + x_1}{K}\right) - H$$

setelah menyederhanakan dan melalaikan format u(t) u(t- τ) kita mempunyai suatu model yang linier

$$\frac{du(t)}{dt} = Cu(t) - Du(t - \tau)$$

Dimana $C = \frac{rx_2}{K}$ dan $D = \frac{rx_1}{K}$

Di Ini persamaan karakteristik untuk yang tersebut di atas model adalah

$$\lambda - C + De^{-\lambda\tau} = 0$$

(3.18)

Teorema 3.9 ini .The keseimbangan titik x_1 untuk model (3.15) adalah

Bukti. Misalkan $F(\lambda) = \lambda - C + De^{-\lambda\tau}$, $P(\lambda) = \lambda$, dan $Q(\lambda) = C - De^{-\lambda\tau}$.. Mempertimbangkan dengan nyata $P(\lambda)$ dan $Q(\lambda)$ mempunyai dua yang persimpangan terjadi pada λ_1 (hal negatif) dan λ_2 (hal positif). Kemudian kita menyimpulkan bahwa titik keseimbangan tidaklah stabil.

Analisa Stabilitas dari Titik Keseimbangan $x_2(t) = \dfrac{K + K.}{2}$

Untuk tujuan memahami kemantapan setempat dari keseimbangan titik x_1 kita misalkan $u(t) = x(t) - x_2$ dan kemudian menggantinya ke dalam model (3.15) untuk mendapatkan

$$\frac{du(t)}{dt} = r\left(u(t) + x_2\right)\left(1 \frac{u(t) + x_2}{K}\right) - H$$

setelah menyederhanakan dan mengabaikan format u(t) - u(t - τ) kita mempunyai suatu model yang linier

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t) - Bu(t - \tau)$$

Dimana $A = \dfrac{rx_1}{K}$ dan $B = \dfrac{rx_1}{K}$

Persamaan karakteristik untuk yang tersebut di atas model adalah

$$\lambda - A + Be^{-\lambda\tau} = 0 \tag{3.19}$$

Teorema 3.10 misalkan r > 0 , K > 0, 0 < rτ < 2, dan x_2 salah satu dari titik keseimbangan untuk model (3.16). Jika kuota yang tetap dari memanen H sesuai kondisi

(i) $\max\left\{0, \frac{K}{\tau}\left(1-\frac{1}{r\tau}\right)\right\} < H < \frac{rK}{4}$ dan

(ii.a) $\frac{1}{\tau}\ln\left\{, \frac{r\left(K+\sqrt{K^2-4HK/r}\right)}{2K}\right\} - \frac{r(K-\sqrt{K^2-4HK/r}}{2K} + \frac{1}{\tau}(\ln(\tau)+1) = 0$

kemudian ada satu akar hal negatif yang riil dari persamaan karakteristik (3.19). Jika (ii.a) ubah untuk

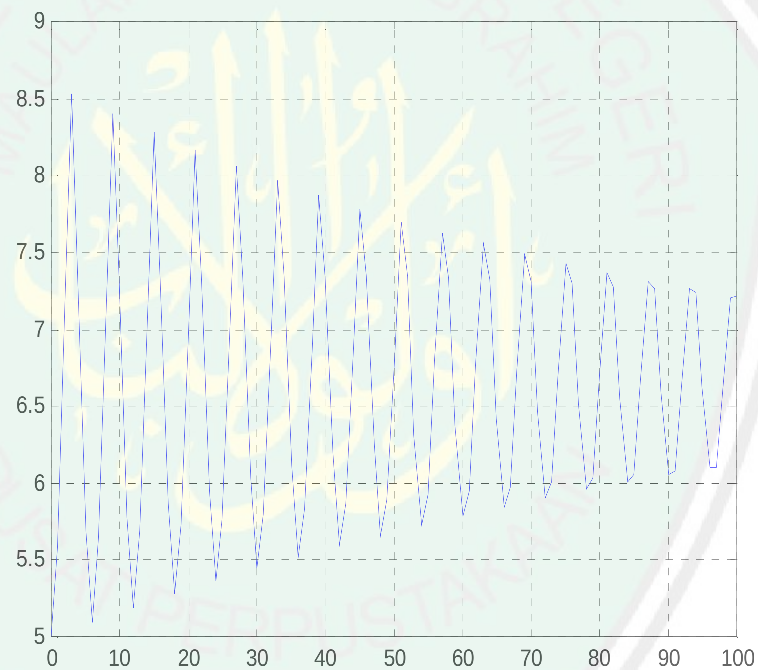
(ii.b) $\frac{1}{\tau}\ln\left\{, \frac{r\left(K+\sqrt{K^2-4HK/r}\right)}{2K}\right\} - \frac{r(K-\sqrt{K^2-4HK/r}}{2K} + \frac{1}{\tau}(\ln(\tau)+1) < 0$

kemudian ada dua akar hal negatif yang riil dari persamaan karakteristik (3.19).

bukti misalkan $F(\lambda) = \lambda - A + Be^{-\lambda\tau}$ kemudian kita memiliki $F'(\lambda) = 1 - Be^{-\lambda\tau}$ dan $\lambda. = \frac{1}{\tau}\ln(B\tau)$ adalah titik-kritis untuk $F(\lambda)$. Karena $F''(\lambda) = B\tau^2 e^{-\lambda\tau}$ adalah hal positif untuk semua λ , ini berarti bahwa $F(\lambda.) = \frac{1}{\tau}(\ln(B\tau)+1) - A$ adalah minimum dan $F(\lambda)$ adalah cekung menaik.. Karena 0 < rτ < 2 , kemudian kondisi (i) dapat ditulis dalam format dari ketidaksamaan $H > \frac{K}{\tau}\left(1 - \frac{1}{r\tau}\right)$ Setelah melakukan manipulasi kita dapat tuliskan Bτ < 1. Ini dengan kata-kata sebagai berikut $\lambda. = \frac{1}{\tau}\ln(B\tau)$ adalah negatif. Sekarang kita akan titikkan bahwa $F(\lambda.)$ = 0 Kondisi (ii.a) dapat ditulis ulang menjadi $\frac{1}{\tau}(\ln(B\tau)+1) - A = 0$ yang berarti bahwa $F(\lambda.) = 0$ Kondisi (ii.b) adalah setara dengan $\frac{1}{\tau}(\ln(B\tau)+1) - A < 0$ atau $F(\lambda.) < 0$ Misalkan $F_1(\lambda) = A - \lambda$ dan $F_2(\lambda) = Be^{-\lambda\tau}$. Kemudian $F_1'(\lambda) = -1$ dan $F_2'(\lambda) = -Be^{-\lambda\tau}$ Dari (i) kita mempunyai Bτ < 1 dan $\lambda. = \frac{1}{\tau}\ln(B\tau)$ adalah negatif. catat bahwa F(0) = .A+ B adalah positif dan *F(λ)* adalah juga positif untuk beberapa λ (λ < 0) . Dari Calculus kita mempunyai λ_2 dan λ_1 dengan $\lambda_2 < \lambda. < \lambda_1 < 0$ memuaskan $F(\lambda_2) = F(\lambda_1) = 0$.

Sekarang kita mempertimbangkan model (3.16) dengan parameter r = 1.5 , τ = 0.5 , dan K = 100. Air menghirup hawa sejuk tingkat kuota yang tetap dari memanen H sebagai 0 (tidak (ada) pemanenan), 15, dan 35. Untuk H = 35 kita mempunyai keseimbangan titik untuk model adalah x_1=37.090055 dan x_2=62.909944 Kuota dari ini memanen membuat puas kondisi-kondisi dengan akar dari persamaan karakteristik adalah -0.790346 dan - 2.857288.

Jalan peluru dengan populasi awal x(0) = 60 untuk model nonlinear disampaikan dalam figur 3.5. Ketika kondisi-kondisi tidaklah dicukupi, tidak berarti bahwa populasi tidaklah stabil. sebab kita hanya meneliti kemantapan setempat dari titik keseimbangan itu. Di figur kita lihat bahwa dua jalan peluru (orang) yang lain juga cenderung kepada suatu ;jumlah yang spesifik, tetapi mereka tidak cenderung pada titik keseimbangan x_2.



Gambar 3.5: Beberapa jalan peluru dari model logistik penundaan dengan beberapa nilai-nilai dari H

Dari bukti terhadap Theorem 3.10 kita mengetahui bahwa $F(\lambda) = \lambda - A + Be^{-\lambda\tau}$ Apakah mungkin untuk menjadi nol atau negatif tergantung pada nilai dari titik-kritis itu. Ketikanilai yang minimum dari $F(\lambda)=\lambda-A+Be^{-\lambda\tau}$ Apakah x positif, ini menyiratkan tidak ada akar yang riil, tetapi jumlah yang kompleks akan ada.

Teorema 3.11 misalkan r > 0 , K > 0, dan x_2 jadilah salah satu dari titik keseimbangan untuk model (3.16). Jika yang berikut kondisi-kondisi memegang

$$\frac{1}{\tau}\ln\left\{,\frac{r\left(K+\sqrt{K^2-4HK/r}\right)}{2K}\right\}-\frac{r(K-\sqrt{K^2-4HK/r}}{2K}+\frac{1}{\tau}(\ln(\tau)+1)>0$$

dan

$$\frac{1}{\tau}\arccos\left(\frac{K-\sqrt{K^2-4HK/r}}{K+\sqrt{K^2-4HK/r}}\right)-\left(\frac{r^2}{K}\sqrt{K^2-\frac{4HK}{r}}\right)^{1/2}>0$$

kemudian titik keseimbangan x_2 adalah

Bukti. Misalkan $F(\lambda)=\lambda-A+Be^{-\lambda\tau}$. Kemudian kita mempunyai $F'(\lambda)=1-B\tau e^{-\lambda\tau}$ dan $\lambda.=\frac{1}{\tau}\ln(B\tau)$ adalah titik-kritis untuk $F(\lambda)$. Karena $F''(\lambda)=B\tau^2e^{-\lambda\tau}$ adalah hal positif untuk semua λ, ini berarti bahwa $F(\lambda.)=\frac{1}{\tau}(\ln(B\tau)+1)-A$ adalah minimum dan F(ë) adalah cekung menaik.. Dari (i) kita mempunyai $F(\lambda.)=\frac{1}{\tau}(\ln(B\tau)+1)-A$ adalah [alat/ makna] yang

yang positif tidak ada akar yang riil dari $F(\lambda) = \lambda - A + Be^{-\lambda\tau}$.

Misalkan $\lambda = \rho + i\omega, \rho \in R, \omega \in [0, \infty)$ sebagai akar dari persamaan karakteristik (3.19), kita mempunyai

$$\rho + i\omega = A - Be^{-(\rho + i\omega)} = A - Be^{-\rho\tau}(\cos(\omega\tau) - i\sin(\omega\tau))$$

kemudian kita mendapat/kan persamaan keduanya untuk bagian riil dan imajiner

$$\rho - A = -Be^{-\rho\tau}(\cos(\omega\tau) \qquad (3.20a)$$

$$\omega = Be^{-\rho\tau}\sin(\omega\tau)$$

(3.20.b)

Asumsi bahwa $0 < \omega\tau < \frac{\pi}{2}$ persamaan Squaring keduanya (3.20.a) dan (3.20.b) dan menambahkannya sehingga menghasilkan persamaan

$$(\rho - A)^2 + \omega^2 = B^2 e^{-2\rho\tau}$$

(3.21)

Dari persamaan (3.19.a) kita mempunyai $\omega\tau = \arccos\left(\frac{A - p}{Be^{-2\rho\tau}}\right)$

atau $\omega = \frac{1}{\tau}\arccos\left(\frac{A - p}{Be^{-2\rho\tau}}\right)$ Dengan grsfik,itu mudah mencari bahwa $\frac{A - p}{Be^{-2\rho\tau}} \leq \frac{A}{B}$ karena $0 < \omega\tau < \frac{\pi}{2}$ dan $0 < A < B$, kemudian kita mempunyai $\arccos\left(\frac{A - p}{Be^{-\rho\tau}}\right) \geq \arccos\left(\frac{A}{B}\right)$ Dari (ii), kita mempunyai suatu ketidaksamaan

$$\omega = \frac{1}{\tau}\arccos\left(\frac{A-p}{Be^{-2\rho\tau}}\right) \geq \frac{1}{\tau}\arccos\left(\frac{A}{B}\right) > \sqrt{B^2 - A^2}$$

Ketidaksamaan dapat ditulis seperti

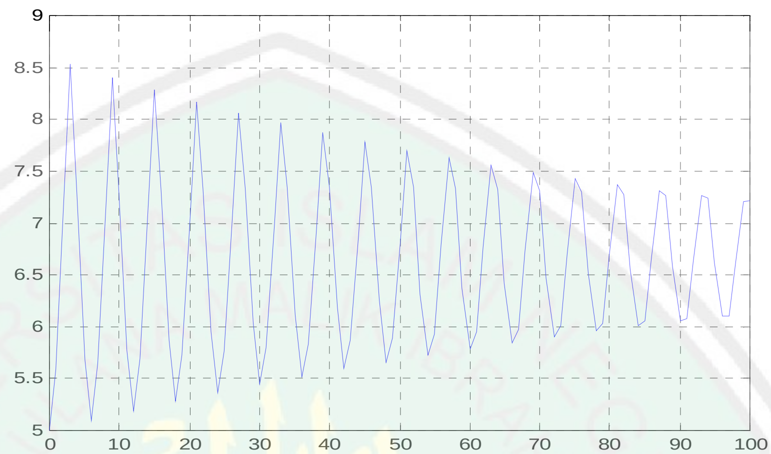
$A^2 + \omega^2 > B^2$.

Dengan kondisi (3.22), mempertimbangkan dengan persamaan (3.21), kita tiba di

$\rho < 0$. Kemudian kita mengenal baik nomor;jumlah yang kompleks dari persamaan karakteristik (3.19)

dengan bagian negatif yang riil. Menghubungkan dari akar yang kompleks adalah juga suatu akar dari persamaan karakteristik (3.19). Ini dengan kata-kata sebagai berikut bahwa keseimbangan titik x_2 adalah stabil secara asimtot.

Kita mempertimbangkan lagi model (3.16) dengan parameter r = 1.0 , τ = 1.7 , dan K = 100. Untuk/Karena H = 10 , kita mempunyai keseimbangan titik x_2 = 88.728933 dengan akar dari persamaan karakteristik adalah 0.016038 ± 0.858005i . Untuk H = 20 , kita mempunyai keseimbangan titik x_2 = 72.360679 dengan akar dari persamaan karakteristik adalah - 0.017890 ± 0.685450i . Untuk/Karena H = 24 , kita mempunyai keseimbangan titik x_2 =60 dengan akar dari persamaan karakteristik adalah - 0.053962 ± 0.475831i . Jalan peluru dengan populasi awal x(0) = 60 untuk nonlinear model dengan H = 10 , 20 dan 24 disampaikan dalam figur 3.6. Untuk/Karena H = 10 , keseimbangan titik tidaklah stabil,, [selagi/sedang] untuk H = 20 dan H = 24 , keseimbangan titik kukuh stabil.



Gambar 3.6: Beberapa jalan peluru dari fungsi penundaan model dengan beberapa nilai-nilai dari H

Ketika populasi dipanen dengan kuota yang tingkat rendah dari memanen,

H = 10 , populasi tidaklah stabil. Tetapi populasi adalah mungkin yang stabil ketika populasi dipanen dengan tingkat tinggi,, sebagai contoh, H = 20 atau H = 24.

Daerah dari suatu pasangan (τ , H), di mana keseimbangan titik x_2 untuk model (3.16)

3.5 Kajian Matematika Menurut Perspektif Islam

Dari dasar teori yang telah di tuliskan di atas kita coba untuk mengkaji pembahasan analisis model logistik spesies tunggal dengan penundaan menurut perspektif islam. Sebelumnya kita mencoba mengetahui rumusan dasar dari pembahasan dalam skripsi ini:

model pertumbuhan logistik, yaitu:

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt} = r - \frac{x}{K}$$

Atau

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

model Logistik, adalah suatu model pertumbuhan populasi. Model itu adalah kontinu pada persamaan diferensial Jika ditambahkan syarat awal $x(0) = x_0$

dari keterangan diatas kita kita tahu model diatas adalah sebuah perencanaan pertumbuhan populasi dimana sifatnya kontinu. Sebagai mana dalam islam kita di anjurkan untuk bersifat kontini dalam pertumbuhan Karena Allah Subhanahu wa Ta'ala mensyariatkan untuk hamba-Nya sebab-sebab untuk mendapatkan keuturunan dan memperbanyak jumlah umat. Rasulullah Shallallahu 'alaihi wa sallam bersabda.

Artinya : *"Nikahilah wanita yang banyak anak lagi penyayang, karena sesungguhnya aku berlomba-lomba dalam banyak umat dengan umat-umat yang lain di hari kiamat (dalam riwayat yang lain : dengan para nabi di hari kiamat)"*. [Hadits Shahih diriwayatkan oleh Abu Daud 1/320, Nasa'i 2/71, Ibnu Hibban no. 1229, Hakim 2/162 (lihat takhrijnya dalam Al-Insyirah hal.29 Adazbuz Zifaf hal 60) ; Baihaqi 781, Abu Nu'aim dalam Al-Hilyah 3/61-62]

Karena umat itu membutuhkan jumlah yang banyak, sehingga mereka beribadah kepada Allah, berjihad di jalan-Nya, melindungi kaum muslimin -dengan ijin Allah-, dan Allah akan menjaga mereka dan tipu daya musuh-musuh mereka.

Yang kedua adalah ketika model yang pertama digabungkan dengan model Penundaan Salah satu dari defisiensi dari populasi model yang tunggal seperti di bawah adalah karena angka kelahiran itu adalah yang dipertimbangkan untuk bertindak dengan segera sedangkan mungkin ada suatu waktu tunda untuk memperhatikan dari waktu itu untuk menjangkau kedewasaan, masa persiapan yang terbatas dan seterusnya. Kita dapat menyertakan keterlambatan seperti itu dengan mempertimbangkan model-model persamaan diferensial penundaan dari wujud

$$\frac{dN(t)}{dt} = f\left(N(t)\right), N\left(t-T\right)$$

di mana T > 0, penundaan, adalah suatu parameter

model ini adalah suatu model yang digunakan untuk memperlambat dari suatu model pertumbuhan.

Firman allah :. *Hai orang-orang yang beriman, bertakwalah kepada Allah,* merupakan perintah untuk senantisa bertakwa kkepada-nya dan itu mencakup semua perintah-nya dan semua larangan-nya.

Dan firman allah *hendaklah setiap diri memperhatikan apa yang Telah diperbuatnya untuk hari esok* maksudnya hisablah diri kalian sebelum dihisab allah dan lihatlah apa yang telah kalian tabung untuk diri kalian sendiri berupa amal solehuntuk hari kemudian ketika bertemu rob-mu.

dan bertakwalah kepada Allah, merupakan sebuah penegasan kedua. *Sesungguhnya Allah Maha mengetahui apa yang kamu kerjakan* karna sesungguhnya allah mengerti semua keadaan-mu

Dalam Al-qur'an juga manusia diperintahkan untuk merencanakan apa yang akan kita lakukan hari esok. Sehingga semua yang kita rencanakan dapat terlaksana dengan rapi. Ketika kita sudah mempunyai perencanaaan untuk masa depan berarti kita sudah punya arah dan tujuan yang jelas dan dapat menuai hasil yang optimal.(tafsir ibnu katsir:)

Dari ayat di atas kita mencoba menghubungkan dengan pembahasan diatas yaitu Urgensitas membangun keluarga sejahtera semakin kita rasakan bila kita melihat dari sudut pandang atau perpektif agama. Pada dasarnya membangun keluarga sejahtera menjadi sebuah kewajiban yang tidak bisa ditawar-tawar oleh seluruh umat manusia dalam fitrahnya sebagai khalifah di muka bumi ini.

Agama Islam memiliki prinsip bahwa membangun keluarga sejahtera merupakan upaya yang wajib ditempuh oleh setiap pasangan (keluarga) yang telah diawali dengan pernikahan Islami. Dalam agama Islam, keluarga sejahtera disubstansikan dalam bentuk Keluarga Sakinah yang memiliki lima tahapan mulai dari Keluarga Pra Sakinah, Keluarga Sakinah I, II, III, dan Keluarga Sakinah III Plus. Dasar utama membangun keluarga sejahtera ini adalah ayat-ayat dalam Surat Ar Ruum, di mana dinyatakan bahwa tujuan berkeluarga adalah untuk mencapai tenteraman dan kebahagiaan dengan dasar kasih sayang. Yaitu keluarga yang saling cinta mencintai dan penuh kasih sayang sehingga setiap anggota keluarga merasa aman, tenteram, tenang dan damai, bahagia dan sejahtera namun dinamis menuju kehidupan yang lebih baik di dunia maupun di akhirat.

Pada dasarnya manusia harus mempunyai sebuah parencanaan untuk hari esok yang lebih baik dalam mencapai kehidupan akhirat yang abadi. Model diatas bisa dijadikan sebuah target perencanaan kehidupan kedepan dengan tujuan menciptakan kehidupan yang lebih baik.

BAB VI
PENUTUP

A. Kesimpulan

Berdasarkan pada perumusan masalah diatas, maka dapat disimpulkan bahwa sebagai berikut: Model logistik penundaan yang tunggal adalah

$$\frac{dx(t)}{dt} = rx(t)\left(1 - \frac{x(t-\tau)}{K}\right) \qquad (3.1)$$

di mana τ adalah waktu tunda dan diasumsikam positif. Titik equilibrium positif dimodelkan dengan K. Ketika populasi dipanen dengan kuota yang tingkat rendah dari memanen,

H = 10 , populasi tidaklah stabil. Tetapi populasi adalah mungkin yang stabil ketika populasi dipanen dengan tingkat tinggi,, sebagai contoh, H = 20 atau H = 24.

B. Saran

1. Berdasarkan kesimpulan diatas,maka beberapa saran dapat diajukan sebagai berikut:dengan adanya pembahasan yang menunjukan pemodelan suatu model logistik dengan sistem delay sehingga perlu perlu pengembangan kembali agar dapat digunakan dalam sebuah perencanaan kehidupan yang lebih baik
2. Dalam penulisan skripsi ini jauh belum sempurna itu perlu dikaji lebih dalam lagi. Berhubungan dengan model matematika sehubungan deengan berkembangnya kmu kedokteran. Bagi para pembaca yang berminat dimungkinkan mengkaji bidang yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

Arhani, Muhammad & Desiani, Anita. 2005. *Pemrograman MATLAB*. Yogyakarta: Andi.

Baiduri. 2002. *Persamaan Defferensial & Matematika Model*. Malang: Universitas Muhammadiyyah Madang Press.

Fanizio N, Ladas G. 1982. *Persamaan Deferensial Biasa.* Jakarta: Erlangga.

Murray, J.D.,2000. *Mathematical Biologi: I.An Introduction Third Edition.*springer. new York.

Pamuntjak R,J Santoso, Widiarti. 1990. *Persamaan Defferensial Biasa*. Bandung: ITB.

Purcell j Edwin Varberg Dale. 1999. *Kalkulus dan Geometri Analitis.* Jakarta: Erlangga.

Weber E jean. 1999. *Analisis Matematik Penerapan Bisnis dan Ekonomi.* Jakarta: Erlangga.

Mayer, J. walter. 1985. *Concepts of mathematical modeling.* Mcgrow—hill book company. New York.

Baisuni, Hasyim. 1986. *Kalkulus.* Jakarta: Universitas Indonesia Pers.

Munir, Rinaldi. 2003. *Matematika Diskrit*. Bandung: Informatika.

Ladas G, Finizio N. 1988. *Persamaan Deferensial Biasa dengan Penerapan Modern.* Jakarta: Erlangga.

Amaliyah, Fakhrina. 2007. *Pemodelan Penyebaran Penyakit Tuberculosis dengan Sistem Persamaan Deferensial*. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: UIN.

Hawari, Dadang. .2004. *Alqur'an Ilmu Kedokteran dan Kesehatan Jiwa*. Jogjakarta: PT Dhana Bhakti Prima Yasa.

Al-mahalli, J. Imam, As-Suyuti, J. Imam.2009. *Tafsir Jalalain 2.* Bandung: Sinar Baru Algensindo.

Sihab, M Quraish. 2002. *Tafsir al-Mishbah:pesan, kesan, dan keserasian al-quran*. Jakarta: lentera hati.

Abdusysyakir. 2007. *Ketika Kiai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press.

Purwanto, 1998. *Matematika Diskrit*. Malang: IKIP Malang.

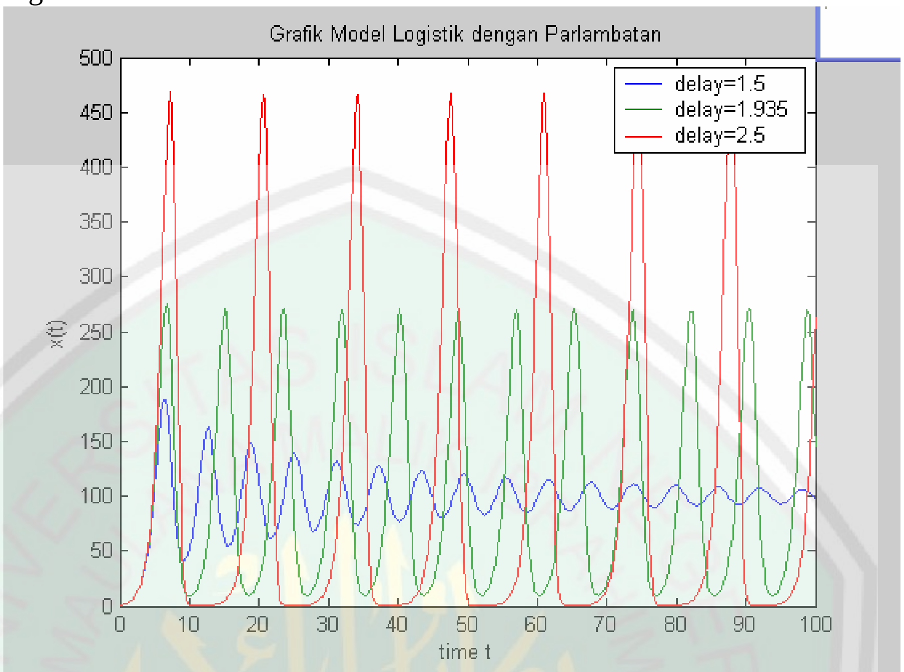
Al-maraghi, M. Ahmad. 1974. *Terjemah Tafsir al-Maraghi*. Semarang: CV.Toha Putra.

Quthb, sayyid.2004.*Tafsir fi zhilalil-Qur'an di bawah naungan al-quran jilid 11*. Penerjemah: As'ad Yasin,dkk. Jakarta: Gema Insani.

E.M, Ghoffar, Abdul, M; dkk. 2004. *Tafsir ibnu katsir* bogor. Pustaka imam asy-syafi'i.

```
clear,clc
f=inline('1*u*(1-w/250)-0.15*u*v','u','v','w')
g=inline('-1*v+0.1*u*v','u','v')
uo=9;
vo=5;
i=1;
U(1)=uo; V(1)=vo; W(1)=2;
for t=0:100
U(i+1)=U(i)+f(U(i),V(i),W(i))
V(i+1)=V(i)+g(U(i+1),V(i));
W(i+1)=(U(i+1)-U(i))/2
i=i+1;
end
t=0:100;
figure(1)
plot(t,U(t+1)), grid
figure(2)
plot(t,V(t+1)), grid



function ddex1

sol = dde23(@ddex1de,[1.5 1.935 2.5],@ddex1hist,[0,100]);
figure;
plot(sol.x,sol.y)
title('Grafik Model Logistik dengan Parlambatan');
xlabel('time t');
ylabel('x(t)');
legend('delay=1.5','delay=1.935','delay=2.5')
% ----------------------------------------------------------------
----------

function s = ddex1hist(t)
s = ones(1,3);

% ----------------------------------------------------------------
----------

function dydt = ddex1de(t,y,Z)
ylag1 = Z(:,1);
ylag2 = Z(:,2);
ylag3 = Z(:,3);
dydt = [ y(1)*(1-ylag1(1)/100)
         y(2)*(1-ylag2(2)/100)
        y(3)*(1-ylag3(3)/100)]
```

Figure 1



Grafik Model Logistik dengan Parlambatan
delay=1.5
delay=1.935
delay=2.5
x(t)
time t
500
450
400
350
300
250
200
150
100
50
0
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100

Figure 2

Figure 3