GRAF GARIS (*LINE GRAPH*) DARI GRAF LINTASAN, GRAF SIKEL, DAN GRAF BINTANG

SKRIPSI

Oleh :
FIFI FRAMELIA NOFANDIKA
NIM. 04510014

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
MALANG
2009

GRAF GARIS (*LINE GRAPH*) DARI GRAF LINTASAN, GRAF SIKEL, DAN GRAF BINTANG

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Universitas Islam Negeri Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan
Dalam Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
FIFI FRAMELIA NOFANDIKA
NIM. 04510014

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
MALANG
2009

GRAF GARIS (*LINE GRAPH*) DARI GRAF LINTASAN, GRAF SIKEL, DAN GRAF BINTANG

SKRIPSI

Oleh:
FIFI FRAMELIA NOFANDIKA
NIM. 04510014

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji

Tanggal: 15 Januari 2009

Pembimbing I	Pembimbing II
Abdussakir, M.Pd	Abdul Aziz, M.Si
NIP. 150 327 247	NIP. 150 377 256

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M.Si
NIP. 150 318 321

GRAF GARIS (*LINE GRAPH*) DARI GRAF LINTASAN, GRAF SIKEL, DAN GRAF BINTANG

SKRIPSI

Oleh:
FIFI FRAMELIA NOFANDIKA
NIM. 04510014

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal 19 Januari 2009

Susunan Dewan Penguji		Tanda Tangan
1. Penguji Utama	: Drs. H. Turmudi, M.Si NIP. 150 209 630	( )
2. Ketua	: Evawati Alisah, M.Pd NIP. 150 291 271	( )
3. Sekretaris	: Abdussakir, M.Pd NIP. 150 327 247	( )
4. Anggota	: Abdul Aziz, M.Si NIP. 150 377 256	( )

Mengetahui dan Mengesahkan
Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M.Si
NIP. 150 318 321

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : FIFI FRAMELIA NOFANDIKA

NIM : 04510014

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri.

Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 15 Januari 2009

Yang membuat pernyataan

Fifi Framelia Nofandika

NIM. 04510014

MOTTO

"Jangan Pernah Putus Asa,
Tapi Kalau Memang Demikian,
Tetaplah Berkarya Dalam Keputusasaan"
(Edmund Burke)

"Sesaat Yang Indah
Dalam Sebuah Karya Yang Salah,
Masih Lebih Baik
Ketimbang Terus-menerus
Dalam Keadaan Sedang-sedang"
(Longinus)

PERSEMBAHAN

Untuk:

Bapak dan Ibu Afandie,

Tiada Kata yang Pantas yang Patut untuk Diucapkan

Selain Terima Kasih Banyak

Atas Segala Pengorbanannya

Suami tercinta Saiful dan Ananda tersayang Zakiyah,

Kalian Berdualah Lentera Hati

yang Selalu Menerangi dan Menemani

Alm. Romo Kyai Saiful Munif

Syafaat dan Lantunan Doa Beliaulah

Yang Selalu Mengiringi Keberhasilan Ini

Kakanda Nia, Adinda Ofan, dan seluruh keponakan-keponakan serta saudara-saudara keluarga besar Tunah.

Terima Kasih Atas Segala

Motivasi dan Dorongan yang Tiada Hingga

KATA PENGANTAR

بسم الله الرحمن الرحيم

Assalamualaikum Wr.Wb.

Segala puja dan puji syukur ke hadirat Allah SWT, karena atas rahmat, taufik serta hidayah-Nya penulisan skripsi yang berjudul *"Graf Garis (Line Graph) Dari Graf Lintasan, Graf Sikel, Dan Graf Bintang*" dapat diselesaikan dengan baik.

Sholawat serta salam yang tak pernah terlupakan semoga tetap tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW, yang telah mengantarkan umat manusia dari zaman jahiliyah menuju zaman yang terang benderang, yaitu agama Islam.

Dalam penyusunan skripsi ini, penulis tidak dapat menyelesaikan sendiri tanpa bantuan dari berbagai pihak, untuk itu penulis mengucapkan rasa hormat dan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Prof. Dr. Imam Suprayogo, selaku Rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU., D.Sc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Malang.
3. Sri Harini, M.Si, selaku Ketua Jurusan Matematika Universitas Islam Negeri (UIN) Malang.
4. Abdussakir, M.Pd, selaku dosen pembimbing yang senantiasa sabar, mengerti dan memahami serta memberikan arahan dan bimbingan dalam penyusunan skripsi ini.

5. Abdul Aziz, M.Si, selaku dosen pembimbing keagamaan yang telah banyak memberikan sumbangsih di dalam penyusunan skripsi ini.
6. Seluruh dosen UIN Malang khususnya para dosen Matematika yang telah memberikan banyak pengalaman dan ilmu pengetahuan yang tiada terkira serta selalu membimbing dan memberikan banyak motivasi agar penulis dapat menyelesaikan studi dengan baik.
7. Bapak Afandie dan Ibu Sumilah tercinta, yang selalu memberikan semangat dan motivasi baik moril maupun spirituil dalam mendidik dan membimbing penulis hingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
8. Saiful Effendi dan Zakiyah Lexa Effendi, kalian berdualah lentera hati yang senantiasa memberikan semangat dalam menjalani kehidupan ini untuk mencapai yang terbaik dan menjadikannya lebih mudah. Motivasi kalian berdua yang tiada kurang suatu apapun dan tak pernah padam mampu menjadikan hati ini teguh dan parcaya untuk segera menyelesaikan penyusunan skripsi ini.
9. Alm. Romo Kyai Saiful Munif, yang selalu melantunkan doa agar penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan baik.
10. Rani Fara Yunia, yang selalu mencarikan bahan dan literatur dan Ofan Prambudi Setiawan yang selalu menjaga ananda Zakiyah Lexa Effendi serta semua keponakan-keponakan dan saudara-saudara yang telah banyak membantu dalam menyelesaikan skripsi ini.
11. Seluruh teman-teman mahasiswa Matematika angkatan 2004 yang telah memotivasi penulis untuk segera menyelesaikan skripsi, khususnya Moh

Nirwan Khamid yang telah banyak sekali membantu dalam penyusunan skripsi ini.

12. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu, yang telah memberikan bantuan baik moril, materiil maupun spiritual bagi penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi dengan baik dan tepat pada waktunya.

Penulis berdoa semoga bantuan dan sumbangsih yang telah diberikan dicatat sebagai amal baik oleh Allah SWT dan mendapatkan balasan yang setimpal. Penulis berharap, semoga skripsi ini bermanfaat. Amin.

Wassalamualaikum Wr.Wb.

Malang, 15 Januari 2009

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

ABSTRAK

Nofandika, Fifi Framelia. 2009. *"**Graf Garis (Line Graph) Dari Graf Lintasan, Graf Sikel, Dan Graf Bintang**"*. Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Malang. Pembimbing: Abdussakir, M.Pd dan Abdul Aziz, M.Si

Kata Kunci: Graf, Graf Garis, Graf Lintasan, Graf Sikel, dan Graf Bintang

Matematika merupakan salah satu disiplin ilmu yang sangat berpengaruh pada disiplin ilmu lainnya. Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang banyak digunakan, karena teori-teorinya dapat diterapkan pada cabang-cabang ilmu matematika yang lain atau untuk memecahkan masalah dalam kehidupan sehari-hari. Salah satu pokok bahasan dalam teori graf yang menarik dan masih jarang dibahas adalah graf garis (*Line Graph*).

Pada penelitian ini dibahas mengenai graf garis dari graf lintasan dengan order $n \geq 2$, graf garis dari graf sikel dengan order $n \geq 3$ dan graf garis dari graf bintang dengan order $n \geq 3$ dengan n bilangan asli.

Graf G adalah pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari obyek-obyek yang disebut sebagai titik dan E adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di G yang disebut sebagai sisi. Graf G dengan $V(G)$ adalah himpunan titik dan $E(G)$ adalah himpunan sisi. Graf garis (*Line Graph*) $L(G)$ adalah graf dengan $V(L(G)) = E(G)$. Dan titik di $L(G)$ akan terhubung langsung jika dan hanya jika sisi yang bersesuaian terhubung langsung di G.

Berdasarkan hasil pembahasan dapat diperoleh kesimpulan bahwa rumus umum untuk graf garis dari graf lintasan dengan order $n \geq 2$ adalah graf lintasan dengan order $n = n\text{-}1$, dengan n adalah bilangan asli. Dan rumus umum untuk graf garis dari graf sikel dengan order $n \geq 3$ adalah graf sikel dengan order n, dengan n adalah bilangan asli. Sedangkan rumus umum untuk graf garis dari graf bintang dengan order $n \geq 3$ adalah graf komplit dengan order $n = n\text{-}1$, dengan n adalah bilangan asli,

Pembahasan mengenai graf garis ini masih terbuka bagi peneliti untuk mengadakan penelitian yang sejenis dengan jenis graf yang berbeda, misal graf komplit, graf bipartit, dan lain sebagainya.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Catatan dari usaha manusia secara *continue* untuk merumuskan konsep-konsep dan unsur-unsur dalam bidang ilmu pengetahuan agar dapat diuraikan ke dalam dunia nyata adalah sebagian dari sejarah ilmu pengetahuan alam. Berbicara tentang ilmu pengetahuan, Al-Qur'an telah memberikan kepada manusia kunci ilmu pengetahuan tentang dunia dan akhirat serta menyediakan peralatan untuk mencari dan meneliti segala sesuatu agar dapat mengungkap dan mengetahui keajaiban dari kedua dunia itu (Rahman, 1992:12). Hal itu menunjukkan keluasan suatu ilmu. Dalam Al-Qur'an hal tersebut telah dijelaskan oleh Allah SWT dengan firman-Nya dalam surat Al-Kahfi ayat 109 yang berbunyi:

قُل لَّوۡ كَانَ ٱلۡبَحۡرُ مِدَادٗا لِّكَلِمَٰتِ رَبِّي لَنَفِدَ ٱلۡبَحۡرُ قَبۡلَ أَن تَنفَدَ كَلِمَٰتُ رَبِّي
وَلَوۡ جِئۡنَا بِمِثۡلِهِۦ مَدَدٗا ﴿١٠٩﴾

Artinya: Katakanlah: sekiranya lautan menjadi tinta untuk (menulis) kalimat-kalimat Tuhanku, sungguh habislah lautan itu sebelum habis (ditulis) kalimat-kalimat Tuhanku, meskipun kami datangkan tambahan sebanyak itu (pula)"(Q. S. Al-Kahfi:109)

Ayat tersebut menjelaskan bahwa hendaknya manusia memahami akan kewajiban untuk menuntut ilmu serta mempelajarinya. Dalam mempelajari ilmu tidak hanya berbekal kemampuan intelektual semata saja, tetapi perlu didukung secara bersamaan dengan kemampuan emosional dan spiritual. Sehingga apabila ia telah mampu memahami suatu ilmu, maka ia dapat menyampaikan ilmu yang telah ia miliki kepada orang yang belum mengetahui dengan disertai metode yang baik, sehingga apa yang disampaikan mudah dipahami oleh orang lain. Sebagaimana firman Allah SWT yang memerintahkan Rasulullah SAW untuk menyampaikan kepada manusia tentang suatu ilmu kepada umat manusia. Firman Allah tersebut terletak pada surat Al-Maidah ayat 99:

مَّا عَلَى ٱلرَّسُولِ إِلَّا ٱلْبَلَٰغُ ۗ وَٱللَّهُ يَعْلَمُ مَا تُبْدُونَ وَمَا تَكْتُمُونَ ﴿٩٩﴾

Artinya: *"Kewajiban Rasul tidak lain hanyalah menyampaikan (ilmu), dan Allah mengetahui apa yang kamu lahirkan dan apa yang kamu sembunyikan* "(Q. S. Al-Maidah: 99).

Dalam kehidupan di dunia, manusia tidak lepas dari berbagai permasalahan. Permasalahan-permasalahan tersebut menyangkut berbagai aspek, yang dalam penyelesaiannya diperlukan suatu pemahaman melalui suatu metode dan ilmu bantu tertentu. Matematika merupakan salah satu cabang ilmu yang mendasari berbagai macam ilmu yang lain dan selalu menghadapi berbagai macam fenomena yang semakin kompleks sehingga penting untuk dipelajari. Matematika merupakan alat untuk menyederhanakan penyajian dan pemahaman masalah. Dalam bahasa matematika, suatu masalah dapat menjadi lebih sederhana untuk disajikan, dipahami, dianalisis, dan dipecahkan. Untuk keperluan tersebut, pertama dicari pokok masalahnya, kemudian dibuat rumusan atau model matematikanya (Purwanto, 1998:1).

Menurut Abdul Aziz dan Abdusysyakir (2006,v), matematika adalah salah satu ilmu pasti yang mengkaji abstraksi ruang, waktu, dan angka. Matematika juga mendeskripsikan realitas alam semesta dalam bahasa lambang, sehingga suatu permasalahan dalam realitas alam akan lebih mudah dipahami.

Sedangkan mempelajari matematika yang sesuai dengan paradigma *ulul albab*, tidak cukup hanya berbekal kemampuan intelektual semata, tetapi perlu didukung secara bersamaan dengan kemampuan emosional dan spiritual. Pola pikir deduktif dan logis dalam matematika juga bergantung pada kemampuan intuitif dan imajinatif serta mengembangkan pendekatan rasionalis, empiris, dan logis (Abdusysyakir, 2007:24). Sebagaimana dalam firman Allah SWT dalam surat Shaad ayat 29:

كِتَـٰبٌ أَنزَلْنَـٰهُ إِلَيْكَ مُبَـٰرَكٌ لِّيَدَّبَّرُوٓا۟ ءَايَـٰتِهِۦ وَلِيَتَذَكَّرَ أُو۟لُوا۟ ٱلْأَلْبَـٰبِ ﴿٢٩﴾

Artinya: "Ini adalah sebuah Kitab yang kami turunkan kepadamu penuh dengan berkah supaya mereka meerhatikan ayat-ayatNya dan supaya mendapat pelajaran orang-orang yang mempunyai fikiran (Q. S. Shaad: 29).

Sumber studi matematika, sebagaimana sumber ilmu pengetahuan dalam Islam, adalah konsep tauhid, yaitu ke-Esaan Allah (Rahman, 1992:92). Namun, Al-Qur'an tidak mengangkat metode baru atau teknik baru dalam masalah ini, melainkan telah menunjukkan tentang adanya eksistensi dari sesuatu yang ada di balik alam semesta dengan cara yang sama seperti yang ia tunjukkan mengenai eksistensi dari alam semesta itu sendiri (Rahman, 1992:15).

Alam semesta memuat bentuk-bentuk dan konsep matematika, meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Alam semesta serta segala isinya diciptakan Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan, dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi (Abdusysyakir, 2007:79).

Dalam Al-Qur'an surat Al-Qamar ayat 49 disebutkan:

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَٰهُ بِقَدَرٍ ﴿٤٩﴾

Artinya: "Sesungguhnya kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran" (Q.S. Al-Qamar: 49).

Ayat di atas menjelaskan bahwa alam dan isinya diciptakan oleh Allah dengan ukuran, takaran, dan hitungan yang seimbang. Jadi matematika sebenarnya telah ada sejak zaman dahulu, manusia hanya menyimbolkan dari fenomena-fenomena yang ada dalam kehidupan sehari-hari.

Shihab (2003:482) menafsirkan bahwa kata *qadar* pada ayat di atas diperselisihkan oleh para ulama. Dari segi bahasa kata tersebut dapat berarti *kadar tertentu* yang tidak bertambah atau berkurang, atau berarti *kuasa*. Tetapi karena ayat tersebut berbicara tentang segala sesuatu yang berada dalam kuasa Allah, maka adalah lebih tepat memahaminya dalam arti *ketentuan* dan *sistem yang telah ditetapkan terhadap segala sesuatu*. Tidak hanya terbatas pada salah satu aspeknya saja. Manusia misalnya, telah ada *kadar yang ditetapkan* Allah baginya. Selaku jenis makhluk hidup ia dapat makan, minum dan berkembang biak melalui *sistem yang ditetapkan-Nya*. Manusia memiliki potensi baik dan buruk. Ia dituntut untuk mempertanggungjawabkan pilihannya. Manusia dianugerahi Allah petunjuk dengan kedatangan sekian rasul untuk membimbing mereka. Akalpun dianugerahkan-Nya kepada mereka, demikian seterusnya yang kesemuanya dan yang selainnya termasuk dalam *sistem* yang sangat tepat, teliti dan akurat yang telah ditetapkan Allah SWT. Demikian juga Allah telah menetapkan *sistem* dan *kadar* bagi ganjaran atau balasan-Nya yang akan diberikan kepada setiap orang.

Dalam ayat lain juga disebutkan:

ٱلَّذِى لَهُۥ مُلْكُ ٱلسَّمَـٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضِ وَلَمْ يَتَّخِذْ وَلَدًا وَلَمْ يَكُن لَّهُۥ شَرِيكٌ فِى ٱلْمُلْكِ وَخَلَقَ كُلَّ شَىْءٍ فَقَدَّرَهُۥ تَقْدِيرًا ﴿٢﴾

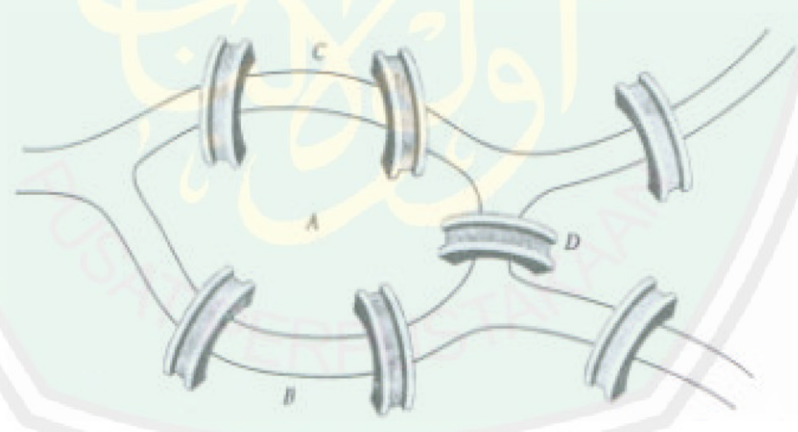
Artinya: *"Yang kepunyaan-Nya-lah kerajaan langit dan bumi, dan dia tidak mempunyai anak, dan tidak ada sekutu baginya dalam kekuasaan(Nya), dan dia Telah menciptakan segala sesuatu, dan dia menetapkan ukuran-ukurannya* dengan *serapi-rapinya" (Q.S. Al-Furqaan: 2).*

Ayat di atas menjelaskan bahwa segala sesuatu yang ada di alam ini ada ukurannya, ada hitungan-hitungannya, ada rumusnya, atau ada persamaannya. Ahli matematika atau fisika tidak membuat suatu rumus sedikitpun. Mereka hanya menemukan rumus atau persamaan, sehingga rumus-rumus yang ada sekarang bukan diciptakan manusia sendiri, tetapi sudah disediakan. Manusia hanya menemukan dan menyimbolkan dalam bahasa matematika (Abdusysyakir, 1997:80).

Dewasa ini semakin banyak muncul penggunaan model matematika maupun penalaran matematika sebagai alat bantu dalam menyelesaikan permasalahan yang dihadapi dalam berbagai disiplin ilmu. Teori graf merupakan salah satu cabang matematika yang penting dan banyak manfaatnya karena teori-teorinya dapat diterapkan untuk memecahkan masalah dalam kehidupan sehari-hari. Dengan mengkaji dan menganalisis model atau rumusan teori graf dapat diperlihatkan peranan dan kegunaannya dalam memecahkan permasalahan.

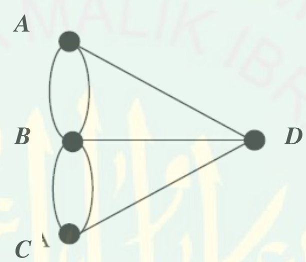
Permasalahan yang dirumuskan dengan teori graf dibuat sederhana, yaitu diambil aspek-aspek yang diperlukan dan dibuang aspek-aspek lainnya (Purwanto, 1998:1).

Menurut catatan sejarah, teori graf pertama kali digunakan oleh seorang ahli matematika dari Swiss yang bernama Euler untuk merepresentasikan Jembatan Konigsberg, dan menyelesaikan permasalahan jembatan tersebut. Konigsberg adalah sebuah kota di sebelah timur Prussia (Jerman sekarang) yang terdapat sungai Pregel dan merupakan tempat tinggal Duke of Prussia pada abad ke-16 (tahun 1736). Kota tersebut saat ini bernama Kaliningrad, dan merupakan pusat ekonomi dan industri utama di Rusia Barat. Sungai Pregel membagi kota menjadi 4 daratan dengan mengalir mengitari pulau Kneiphof lalu bercabang menjadi dua buah anak sungai seperti tampak pada Gambar 1.1:



Gambar 1.1 Jembatan Konigsberg.

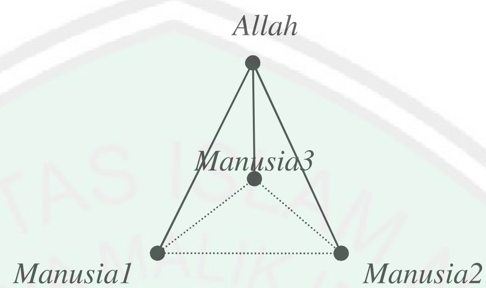
Pada abad ke-18 dibangunlah tujuh jembatan yang menghubungkan keempat daratan tersebut. Pada hari Minggu, masyarakat Konigsberg biasanya berjalan-jalan dari daratan satu ke daratan lainnya melalui jembatan tersebut. Mereka berpikir apakah mungkin untuk berjalan menyeberangi ketujuh jembatan tanpa melalui jembatan yang sama dari suatu daratan dan kembali ke tempat semula. Masalah ini pertama kali dipecahkan oleh Leonhard Euler. Solusi Euler merepresentasikan masalah ini ke dalam suatu graf dengan keempat daratan sebagai titik (*vertex*) dan ketujuh jembatan sebagai sisi (*edge*). Graf yang dibuat Euler diperlihatkan pada Gambar 1.2 (Wirawan, 2008:1).



Gambar 1.2 Graf yang Merepresentasikan Masalah Jembatan Konigsberg.

Dengan graf tersebut, Euler berhasil menemukan jawaban kenapa orang-orang tidak dapat melalui ketujuh jembatan tersebut masing-msing sekali dan kembali ke tempat semula. Jawaban yang ditemukan Euler adalah karena tidak semua titik pada graf tersebut berderajat genap. Simpul *B*, *C*, dan *D* berderajat 3, sedangkan simpul *A* berderajat 5 (Wirawan, 2008:2).

Saat ini teori graf semakin berkembang dan menarik. Hal ini disebabkan teori graf merupakan teori yang unik dan memiliki banyak penerapan. Keunikan teori graf adalah kesederhanaan pokok bahasan yang dipelajarinya, karena dapat disajikan sebagai titik *(vertex)* dan sisi *(edge)*. Dalam al-Qur'an elemen-elemen pada graf yaitu titik dan sisi meliputi Pencipta (Allah) dan hamba-hambanya, sedangkan sisi atau garis yang menghubungkan elemen-elemen tersebut adalah bagaimana hubungan antara Allah dengan hambanya dan juga hubungan sesama hamba yang terjalin, *Hablun min Allah wa Hablun min An-Nas*.



Gambar 1.3 Hubungan antara Allah dengan HambaNya serta Sesama Hamba

Hal ini dikuatkan oleh firman Allah dalam al-Qur’an surat Ali Imran ayat 10 yaitu:

ضُرِبَتْ عَلَيْهِمُ ٱلذِّلَّةُ أَيْنَ مَا ثُقِفُوٓاْ إِلَّا بِحَبْلٍ مِّنَ ٱللَّهِ وَحَبْلٍ مِّنَ ٱلنَّاسِ وَبَآءُو
بِغَضَبٍ مِّنَ ٱللَّهِ وَضُرِبَتْ عَلَيْهِمُ ٱلْمَسْكَنَةُ ۚ ذَٰلِكَ بِأَنَّهُمْ كَانُواْ يَكْفُرُونَ بِـَٔايَٰتِ
ٱللَّهِ وَيَقْتُلُونَ ٱلْأَنۢبِيَآءَ بِغَيْرِ حَقٍّ ۚ ذَٰلِكَ بِمَا عَصَواْ وَّكَانُواْ يَعْتَدُونَ ﴿١١٢﴾

Artinya: *”Mereka diliputi kehinaan di mana saja mereka berada, kecuali jika mereka berpegang kepada tali (agama) Allah dan tali (perjanjian) dengan manusia[218], dan mereka kembali mendapat kemurkaan dari Allah dan mereka diliputi kerendahan. yang demikian itu[219] Karena mereka kafir kepada ayat-ayat Allah dan membunuh para nabi tanpa alasan yang benar. yang demikian itu[220] disebabkan mereka durhaka dan melampaui batas”.*

Dalam Islam diajarkan untuk saling menjaga hubungan silaturrahmi antar sesama manusia. Jika hubungan antar manusia dan manusia dengan Tuhannya tidak sempurna maka tidak akan sempurna pula iman seseorang. Seperti dalam hadist yang mempunyai arti :

> *"Dari Anas bin Malik radhiallâhu 'anhu dari Nabi Shallallahu 'alaihi wasallam, beliau bersabda: "Tidaklah (sempurna) iman seseorang di antara kalian hingga dia mencintai saudaranya sebagaimana dia mencintai dirinya sendiri". (H.R.Bukhari dan Muslim).*

Terkait dengan pernyataan di atas, mencari graf garis dari beberapa graf merupakan salah satu dari materi pada teori graf yang berkembang dan mendapat perhatian. Dengan mengkaji dan menganalisis graf garis, akan didapat suatu perumusan yang akan lebih memudahkan proses pengaplikasiannya ke dunia nyata.

Berkaitan dengan hal ini ada beberapa nilai penting yang berhubungan dalam memahami tafsiran Al-Qur'an, yakni masalah *kadar* dan *sistem* yang telah dijelaskan pada surat Al-Furqaan ayat 2. Artinya, selain mencari graf garisnya ternyata terdapat rumusan atau aturan-aturannya. Rumusan atau aturan-aturan yang dimaksud adalah bagaimana menentukan graf garis dari graf lintasan, graf sikel, dan graf bintang. Begitulah Al-Qur'an menjelaskan dan menjadi sumber dari ilmu pengetahuan yang telah banyak dikembangkan di muka bumi ini, khususnya perkembangan ilmu matematika.

Allah SWT yang telah menciptakan alam semesta ini dengan aturan dan ukuran yang serapi-rapinya, ternyata tidak hanya ada pada firman-Nya saja, tetapi itu semua sudah terbukti, sudah dapat dilihat dan dirasakan secara langsung segala apa yang ada di muka bumi ini yang kesemuanya tertata dengan sempurna.

Demikian pula pada pembahasan yang ada di BAB III nantinya, akan dibuktikan bentuk umum graf garis dari graf lintasan, graf sikel, dan graf bintang.

Allah SWT berfirman dalam Al-Qur'an surat Al-Baqarah ayat 111:

....ۗ قُلۡ هَاتُواْ بُرۡهَٰنَكُمۡ إِن كُنتُمۡ صَٰدِقِينَ ١١١

Artinya: ......Katakanlah: "Tunjukkanlah bukti kebenaranmu jika kamu adalah orang yang benar" (Q.S. Al-Baqarah: 111).

Juga dalam surat Al-An'am ayat 143:

.....ۖ نَبِّـُٔونِي بِعِلۡمٍ إِن كُنتُمۡ صَٰدِقِينَ ١٤٣

Artinya: ".......Terangkanlah kepadaku dengan berdasar pengetahuan jika kamu memang orang-orang yang benar" (Q.S. Al-An'am: 143).

Berkaitan dengan uraian di atas, bahwa segala sesuatu di alam itu sudah ada rumusnya (*qadar*) dan maka penulis tertarik untuk melakukan penelitian dengan judul ***"Graf Garis (Line Graph) dari Graf Lintasan, Graf Sikel, dan Graf Bintang"***.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, maka rumusan masalah dalam penulisan skripsi ini antara lain:

1. Bagaimana bentuk umum graf garis dari graf lintasan?
2. Bagaimana bentuk umum graf garis dari graf sikel?
3. Bagaimana bentuk umum graf garis dari graf bintang?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan penulisan skripsi ini antara lain:

1. Menjelaskan bentuk umum graf garis dari graf lintasan?
2. Menjelaskan bentuk umum graf garis dari graf sikel?
3. Menjelaskan bentuk umum graf garis dari graf bintang?

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penulisan skripsi ini adalah:

1. Bagi peneliti, sebagai tambahan informasi dan wawasan pengetahuan mengenai cara menentukan graf garis dari graf lintasan, graf sikel, dan graf bintang.
2. Bagi pemerhati matematika, sebagai tambahan pengetahuan bidang matematika, khususnya teori graf mengenai cara menentukan graf garis dari graf lintasan, graf sikel, dan graf bintang.
3. Bagi lembaga UIN Malang, untuk bahan kepustakaan yang dijadikan sarana pengembangan wawasan keilmuan khususnya di jurusan matematika untuk mata kuliah teori graf.

1.5 Metode Penelitian

Metode merupakan cara utama yang akan ditempuh untuk menemukan jawaban dari suatu permasalahan. Dalam hal ini, metode yang digunakan adalah metode studi literatur. Studi literatur merupakan penampilan argumentasi penalaran keilmuan yang memaparkan hasil olah pikir mengenai suatu permasalahan atau topik kajian kepustakaan yang berisi satu topik kajian yang di dalamnya memuat beberapa gagasan atau proposisi yang terkait dan harus di dukung oleh data yang diperoleh dari berbagai sumber kepustakaan.

Adapun kajian isi (*Content Analysis*) menurut Weber dalam Moleong (1989:163) adalah metode penelitian yang memanfaatkan seperangkat prosedur untuk menarik kesimpulan yang benar dari sebuah buku atau dokumen. Disini peneliti menekankan pada struktur graf garis (*Line Graph*) dari literatur utama Gary Chartrand dan didukung oleh literatur pendukung lainnya.

Sedangkan langkah-langkah dalam penelitian ini adalah:

1. Merumuskan masalah. Membuat rancangan terlebih dahulu mengenai suatu permasalahan yang akan dibahas.
2. Mengumpulkan data. Mengumpulkan berbagai literatur yang berhubungan dengan permasalahan yang akan dibahas dengan cara mambaca dan mamahami materi yang berkaitan.
3. Menyelesaikan permasalahan dengan menggunakan metode deduktif yaitu cara berfikir yang berangkat dari hal-hal yang umum menuju kesimpulan yang khusus.
4. Membuat kesimpulan. Kesimpulan merupakan jawaban singkat dari permasalahan yang telah dikemukakan dalam pembhasan.

1.6 Sistematika Penulisan

Agar penulisan skripsi ini lebih terarah, mudah ditelaah dan dipahami, maka digunakan sistematika pembahasan yeng terdiri dari empat bab. Masing-masing bab dibagi ke dalam beberapa subbab dengan rumusan sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN

Pendahuluan meliputi: latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Bagian ini terdiri atas konsep-konsep (teori-teori) yang mendukung bagian pembahasan. Konsep-konsep tersebut antara lain membahas tentang pengertian graf, graf terhubung, graf lintasan, graf sikel, graf bintang, dan graf garis serta Kajian Al-Qur'an tentang graf komplit, graf lintasan dan graf sikel.

BAB III PEMBAHASAN

Pembahasan berisi tentang menentukan graf garis dari graf lintasan, graf garis dari graf sikel, dan graf garis dari graf bintang serta mencari dan membuktikan bentuk umumnya.

BAB IV PENUTUP

Pada bab ini disajikan tentang kesimpulan dan saran.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1. Graf

Graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang banyak digunakan untuk menggambarkan berbagai macam struktur yang ada. Graf menggambarkan stuktur tersebut dalam beberapa obyek yang diyatakan dengan noktah, bulatan, atau titik, sedangkan hubungan antara obyek dinyatakan dengan garis.

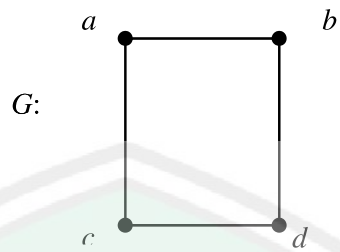
Secara matematis, graf didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 1

Graf G adalah pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari obyek-obyek yang disebut sebagai titik dan E adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di G yang disebut sebagai sisi (Chartrand dan Lesniak, 1986:4).

Himpunan titik di G dinotasikan dengan $V(G)$ dan himpunan sisi dinotasikan dengan E(G). Sedangkan banyaknya unsur di V disebut *order* dari G dan dilambangkan dengan $p(G)$ dan banyaknya unsur di E disebut *size* dari G dan dilambangkan dengan $q(G)$. Jika graf yang dibicarakan hanya graf G, maka *order* dan *size* dari G tersebut cukup ditulis dengan p dan q (Chartrand dan Lesniak, 1986:4).

Contoh



Gambar 2.1 Graf G Berorder 4

Pada Gambar 2.1 Graf G memuat himpunan titik $V(G)$ dan sisi $E(G)$ yaitu

$V(G) = \{a, b, c, d\}$

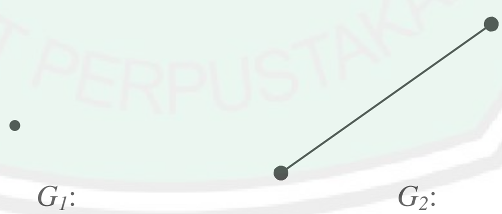
$E(G) = \{(a, b), (b, d), (d, c), (c, a)\}$

Graf G mempunyai 4 titik sehingga order G adalah $p = 4$. Graf G mempunyai 4 sisi sehingga size graf G adalah $q = 4$.

Definisi 2

Graf trivial adalah graf berorder satu dengan himpunan sisinya merupakan himpunan kosong. Graf *non trivial* adalah graf yang berorder lebih dari satu (Chartrand dan Lesniak, 1986:6).

Contoh



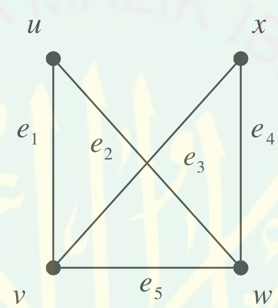
Gambar 2.2 Graf Trivial dan Non Trivial

Pada Gambar 2.2 G_1 merupakan graf trivial karena G_1 hanya memuat satu titik atau berorder satu dan himpunan sisinya merupakan himpunan kosong. Sedangkan G_2 merupakan graf non trivial karena berorder lebih dari satu.

Definisi 3

Sisi $e = (u, v)$ dikatakan menghubungkan titik u dan v. Jika $e = (u, v)$ adalah sisi di graf G, maka u dan v disebut terhubung langsung (*adjacent*), u dan e serta v dan e disebut terkait langsung (*incident*). Untuk selanjutnya, sisi $e = (u,v)$ akan ditulis $e = uv$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:4).

Contoh



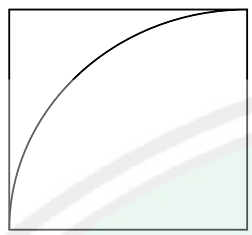
Gambar 2.3 Graf *G*

Dari Gambar 2.3 tersebut, titik u dan e_1 serta e_1 dan v adalah *incident* (terkait langsung) dan titik u dan v adalah *adjacent* (terhubung langsung)

Definisi 4

Misal G adalah graf dengan n titik berlabel *1*, *2*, *3*, ..., *n*. Matriks *adjacency M(G)* adalah matriks n x n yang unsur pada baris i dan kolom j adalah banyaknya sisi yang menghubungkan titik i dan j. (Wilson dan Watkins,1990:32)

Contoh



$$
\begin{array}{cc}
 & \text{kolom} \\
 & \begin{array}{cccc} \mathit{1} & \mathit{2} & \mathit{3} & \mathit{4} \end{array} \\
\text{baris} \begin{array}{c} \mathit{1} \\ \mathit{2} \\ \mathit{3} \\ \mathit{4} \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Gambar 2.4 Graf dan Matriks *Adjacency*nya

Berdasarkan gambar 2.4 di atas, di sebelah kiri terdapat graf dengan empat titik, dan di sebelah kanannya terdapat matriks 4 x 4. Besar angka yang muncul pada matriks menunjukkan banyak sisi yang menghubungkan titik-titik yang sesuai dalam grafnya. Sebagai contoh

Titik *1* dan *2* dihubungkan dengan sisi, sehingga angka 1 muncul di baris *1* kolom *2* dan baris *2* kolom *1*.

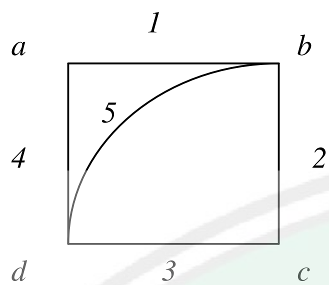
Titik *1* dan *3* dihubungkan dengan 0 sisi, sehingga angka 0 muncul di baris *1* kolom *3* dan baris *3* kolom *1*.

Begitu seterusnya sehingga semua sisi yang terhubung dapat direpresentasikan pada matriksnya.

Definisi 5

Misal G adalah graf dengan n titik berlabel a, b, c, ..., n dan sisi berlabel *1*, *2*, *3*, ..., m. Matriks *incidency* $I(G)$ adalah matriks n x m yang unsur pada baris i dan kolom j adalah 1 jika titik i *incident* dengan sisi j, dan jika tidak demikian adalah 0.

Contoh



kolom

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \text{baris} \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Gambar 2.5 Graf dan Matriks *Incidency*nya

Berdasarkan Gambar 2.5 di atas, di sebelah kiri terdapat graf dengan empat titik dan enam sisi, dan di sebelah kanannya terdapat matriks 4 x 5. Besar angka yang muncul pada matriks menunjukkan banyak sisi yang menghubungkan titik-titik yang sesuai dalam grafnya, angka yang muncul pada matriks ini hanya 1 atau 0 (salah satu saja), tergantung pada apakah titik dan sisi yang sesuai saling ber*incident*. Sebagai contoh

Titik *a incident* dengan sisi *4*, sehingga angka 1 muncul di baris *1* kolom *4*.

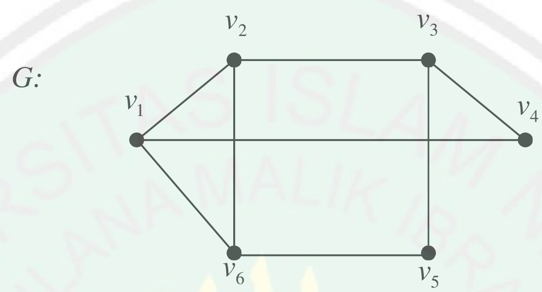
Titik *b* tidak *incident* dengan sisi *4*, sehingga 0 muncul di baris *2* kolom *4*.

Begitu seterusnya sehingga semua yang *incident* dan tidak dapat direpresentasikan pada matriksnya.

Definisi 6

Derajat dari titik v di graf G, ditulis $\deg_G(v)$, adalah banyaknya sisi di G yang terkait langsung (*incident*) dengan v. Jika dalam konteks pembicaraan hanya terdapat satu graf G, maka tulisan $\deg_G(v)$ disingkat menjadi $\deg(v)$. Titik yang berderajat genap sering disebut titik genap (*even vertices*) dan titik yang berderajat ganjil disebut titik ganjil (*odd* *vertices*). Titik yang berderajat nol disebut titik terisolasi (*isolated vértices*) dan titik yang berderajat satu disebut titik ujung (*end vertices*) (Chartrand dan Lesniak, 1986:7).

Contoh



Gambar 2.6 Graf dengan Derajat Titik

Berdasarkan Gambar 2.6, diperolah bahwa:

$deg_G\ (v_1) = 3$

$deg_G\ (v_2) = 3$

$deg_G\ (v_3) = 2$

$deg_G\ (v_4) = 2$

$deg_G\ (v_5) = 1$

$deg_G\ (v_6) = 3$

Titik v_1, v_2 dan v_6 adalah titik ganjil, titik v_3 dan v_4 adalah titik genap, titik v_5 adalah titik ujung. Hubungan antara jumlah derajat semua titik dalam suatu graf G dengan banyak sisi, yaitu q, adalah

$$\sum_{v\in G} \deg(v) = 2q.$$

Hal ini dinyatakan dalam teorema berikut:

Teorema 1

Jika graf G dengan $V(G) = \{ v_1, v_2, ..., v_n\}$

maka $\sum_{i=1}^{n} \deg_G(v_i) = 2q$ (Chartrand dan Lesniak, 1986: 7)

Bukti:

Setiap sisi terkait langsung dengan 2 titik. Bila derajat tiap titik tersebut dijumlahkan maka sisi tersebut dihitung 2 kali.

Akibat Teorema 1

Pada sebarang graf, banyaknya titik yang berderajat ganjil adalah genap (Chartrand dan Lesniak, 1986: 7).

Bukti:

Misalkan graf G dengan titik sebanyak q, maka ambil W yang memuat himpunan titik ganjil di G serta U yang memuat himpunan titik genap di G. Dari teorema 1 maka diperoleh:

$$\sum_{v \in V(G)} \deg_G v = \sum_{v \in W} \deg_G v + \sum_{v \in U} \deg_G v = 2q$$

dengan demikian karena $\sum_{v \in U} \deg_G v$ genap, maka $\sum_{v \in W} \deg_G v$ juga genap. Sehingga $|W|$ adalah genap.

Definisi 7

Graf H disebut subgraf dari G jika himpunan titik di H adalah subset dari himpunan titik-titik di G dan himpunan sisi-sisi di H adalah subset dari himpunan sisi di G. Dapat ditulis $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$. Jika H

adalah subgraf G, maka dapat ditulis $H \subseteq G$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:8).

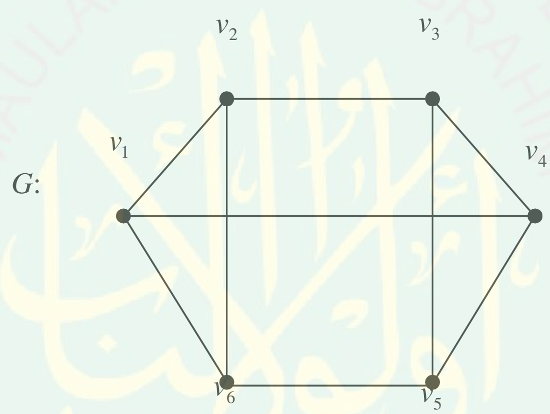
Contoh

Perhatikan graf G yang memuat himpunan titik V dan himpunan sisi E seperti berikut ini.

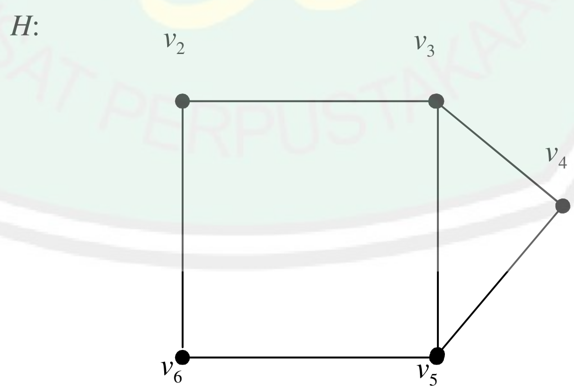
$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan

$E(G) = \{ v_1 v_2, v_1 v_6, v_1 v_4 , v_2 v_3, v_2 v_6, v_3 v_4, v_3v_5, v_4v_5, v_5 v_6\}$

Graf G tersebut dapat digambar sebagai berikut:



Gambar 2.7 Graf G



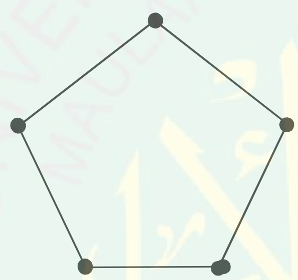
Gambar 2.8 H Subgraf dari G

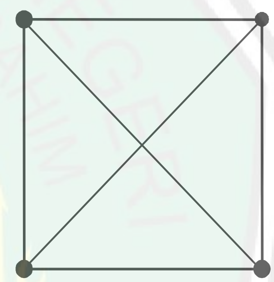
Gambar 2.7 dan 2.8 menunjukkan dua graf, G dan H serta menunjukkan bahwa H subgraf G.

Definisi 8

Graf beraturan-r adalah graf yang semua titiknya berderajat r dengan r adalah bilangan asli, atau $\deg(v) = r$, $\forall\ v\ \in V(G)$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:9).

Contoh



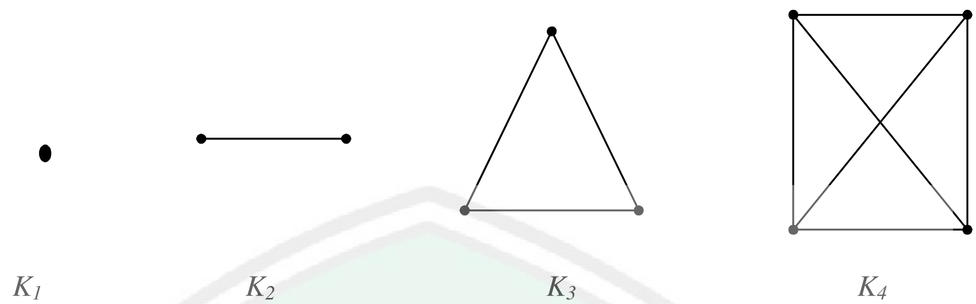


Gambar 2.9 Graf G_1 Beraturan 2 dan Graf G_2 Beraturan 3

Dari Gambar 2.9, graf G_1 disebut graf beraturan-2 karena derajat tiap titiknya adalah 2. Graf G_2 disebut graf beraturan-3 karena derajat tiap titiknya adalah 3.

Definisi 9

Graf komplit (*Complete Graph*) adalah graf dengan setiap pasang titik yang berbeda dihubungkan oleh satu sisi. Graf komplit dengan n titik dinyatakan dengan K_n (Purwanto, 1998:21).



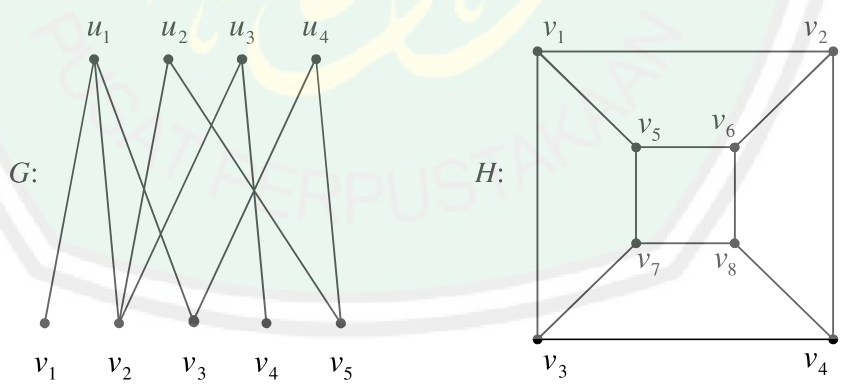
Gambar 2.10 Graf Komplit

Dari Gambar 2.10. K_1, K_2, K_3 dan K_4 adalah graf komplit karena tiap titik dalam graf tersebut selalu *adjecent* dengan semua titik yang lain.

Definisi 10

Graf bipartisi (*bipartite graph*) adalah graf yang himpunan titiknya dapat dipisahkan menjadi dua himpunan tak kosong *X* dan *Y* sehingga masing-masing sisi di graf tersebut menghubungkan satu titik di *X* dan satu titik di *Y; X* dan *Y* disebut himpunan partisi (Purwanto, 1998:21).

Contoh



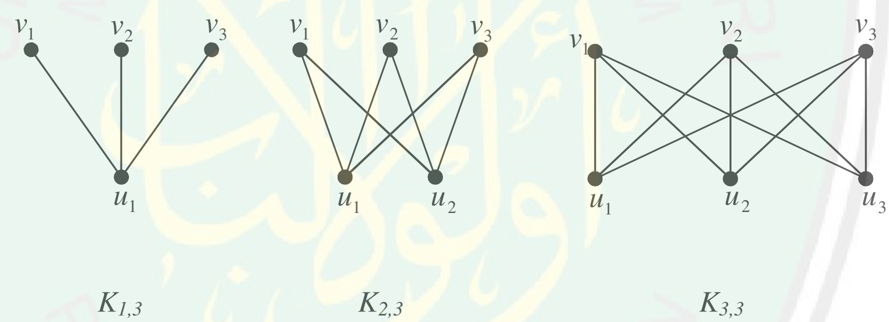
Gambar 2.11 Graf Bipartisi

Pada Gambar 2.11 G adalah graf bipartisi dengan himpunan partisi $X = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ dan $Y = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ demikian juga H adalah graf bipartisi dengan himpunan partisi $X = \{v_1, v_6, v_7, v_4\}$ *dan* $Y = \{v_5, v_3, v_2, v_8\}$.

Definisi 11

Graf bipartisi komplit (*complete bipartite graph*) adalah graf bipartisi dengan himpunan partisi X dan Y sehingga masing-masing titik di X dihubungkan dengan masing-masing titik di Y oleh tepat satu sisi. Jika $|X| = m$ dan $|Y| = n$, maka graf bipartisi tersebut dinyatakan dengan $K_{m,n}$. (Purwanto, 1998:22).

Contoh



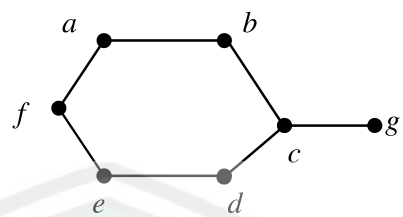
Gambar 2.12 Graf Bipartisi Komplit $K_{1,3}$, $K_{2,3}$, $K_{3,3}$

2.2. Graf Terhubung

Definisi 12

Misalkan u dan v titik berbeda pada graf G. Maka titik u dan v dapat dikatakan terhubung (*connected*), jika terdapat lintasan u–v di G. Sedangkan suatu graf G dapat dikatakan terhubung (*connected*), jika untuk setiap titik u dan v di G terhubung (Chartrand dan Lesniak, 1986:28).

Contoh



Gambar 2.13 Graf Terhubung

Graf pada Gambar 2.13 adalah graf terhubung, karena setiap titik yang terdapat pada graf tersebut terhubung satu sama lain.

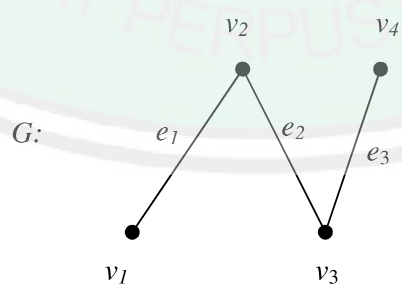
2.3. Graf Lintasan (*Path Graph*)

Definisi 13

Sebuah jalan (*walk*) $u - v$ di graf G adalah barisan berhingga (tak kosong). $W : u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, ..., e_n, v_n = v$ yang berselang seling antara titik dan sisi, yang dimulai dari titik dan diakhiri dengan titik sedemikian hingga untuk $0 \leq i \leq n$, maka $e_i = v_{i-1}v_i$ adalah sisi di G.

v_0 disebut titik awal, v_n disebut titik akhir, $v_1, v_2, ..., v_{n-1}$ disebut titik internal, dan n menyatakan panjang dari W (Chartrand dan Lesniak, 1986:26).

Contoh



Gambar 2.14 Graf dengan Jalan

Jalan pada graf G di Gambar 2.14 adalah W: $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_4$

Definisi 14

Jalan *u-v* disebut *terbuka* atau *tertutup* jika $u \neq v$ atau $u = v$ (Chartrand dan Lesniak, 1986: 26).

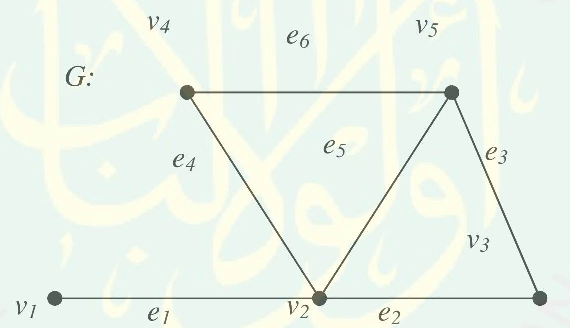
Definisi 15

Jalan $u - v$ yang semua sisinya berbeda disebut *trail* $u - v$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:26).

Definisi 16

Jalan $u - v$ yang semua sisi dan titiknya berbeda disebut *path* (lintasan) $u - v$. Dengan demikian, semua lintasan adalah *trail* (Chartrand dan Lesniak, 1986:26).

Contoh



Gambar 2.15 Jalan pada Graf

Dari gambar 2.15 di atas v_1, e_1, v_2, e_5, v_5, e_6, v_4, e_4, v_2, e_2, v_3 disebut sebagai *trail*, sedangkan v_1, e_1, v_2, e_5, v_5, e_6, v_4 disebut sebagai *path* (lintasan).

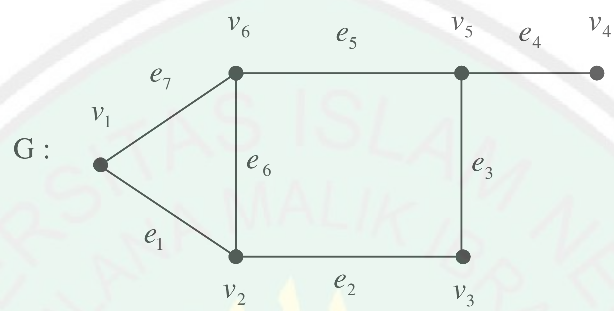
Definisi 17

Suatu titik *u* yang membentuk lintasan *u-u* disebut jalan trivial (Chartrand dan Lesniak, 1986: 26).

Definisi 18

Suatu trail tertutup (*closed trail*) yang tak-trivial pada Graf G disebut Sirkuit G. (Chartrand dan Lesniak, 1986: 28).

Contoh



Gambar 2.16 Graf G

Contoh trail pada graf G dalam Gambar 2.16 adalah :

$$v_5, e_3, v_3, e_2, v_2, e_6, v_6, e_5, v_5, e_4, v_4 .$$

Contoh lintasan pada graf G dalam Gambar 2.16 adalah

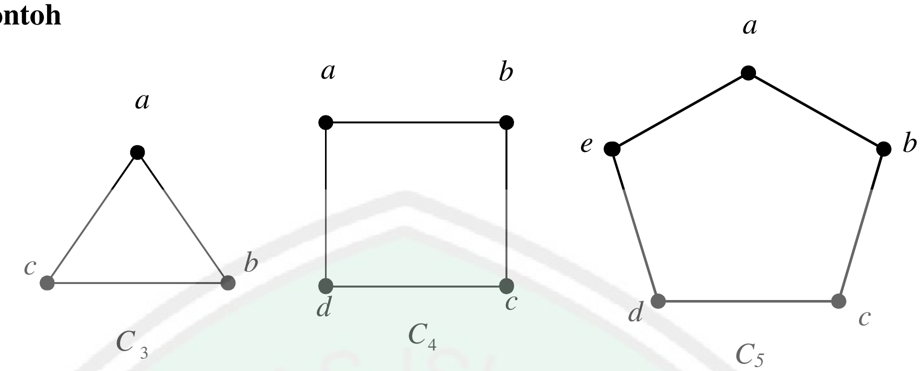
$$v_3, e_2, v_2, e_1, v_1, e_7, v_6, e_5, v_5, e_4, v_4 .$$

2.4. Graf Sikel (*Cycle Graph*)

Definisi 18

Graf sikel (*Cycle Graph*) C_n adalah graf terhubung beraturan 2 yang mempunyai n titik ($n \geq 3$) dan n sisi(Chartrand dan Lesniak, 1986:28).

Contoh



Gambar 2.17 Graf Sikel C_3, C_4, dan C_5

2.5 Graf Bintang (*Star Graph*)

Definisi 23

Graf bintang *(Star Graph)* adalah graf bipartit komplit yang berbentuk $K_{1,n}$, dengan n adalah bilangan asli

Contoh

Gambar 2.18 Graf Bintang $K_{1,3}$ *dan* $K_{1,4}$

2.6 Graf Garis (*Line Graph*)

Definisi 24

Misal graf *G* dengan himpunan titik *V(G)* dan himpunan sisi *E(G)*.

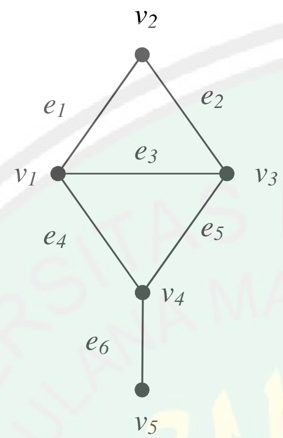
Graf garis (*Line Graph*) *L(G)* adalah graf dengan

$$V(L(G)) = E(G)$$

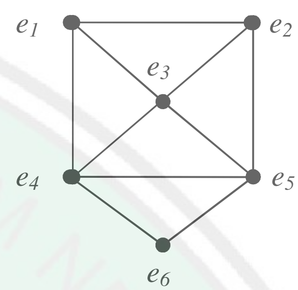
dan titik di $L(G)$ akan terhubung langsung jika dan hanya jika sisi yang bersesuaian terhubung di G (Chartrand dan Lesniak, 1986: 261).

Contoh

G:



$L(G)$:



Gambar 2.19 Graf G dan Graf Garisnya

2.7 Kajian Teori Graf dalam Al-Qur'an

Mempelajari matematika yang sesuai dengan paradigma *ulul albab*, tidak cukup hanya berbekal kemampuan intektual semata, tetapi perlu didukung secara bersamaan dengan kemampuan emosional dan spiritual. Pola pikir deduktif dan logis dalam matematika juga bergantung pada kemampuan intuitif dan imajinatif serta mengembangkan pendekatan rasionalis, empiris, dan logis (Abdusysyakir, 2007:24). Sebagaimana dalam firman Allah SWT dalam surat Shaad ayat 29:

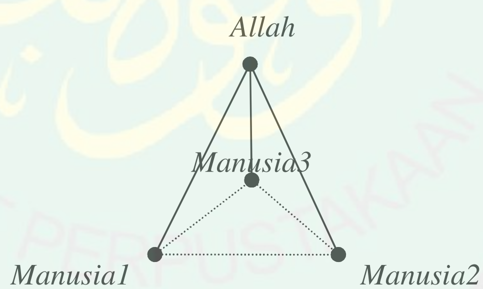
كِتَٰبٌ أَنزَلْنَٰهُ إِلَيْكَ مُبَٰرَكٌ لِّيَدَّبَّرُوٓا۟ ءَايَٰتِهِۦ وَلِيَتَذَكَّرَ أُو۟لُوا۟ ٱلْأَلْبَٰبِ ﴿٢٩﴾

Artinya: "Ini adalah sebuah Kitab yang kami turunkan kepadamu penuh dengan berkah supaya mereka meerhatikan ayat-ayatNya dan supaya mendapat pelajaran orang-orang yang mempunyai fikiran (Q. S. Shaad: 29).

Al-Quran merupakan kitab suci yang banyak menimpan rahasia-rahasia baik dalam dunia nyata maupun ghaib, baik kehidupan masa sekarang ataupun masa yang akan datang dan kini mulai banyak dikaji oleh para ilmuwan. Karena tanpa disadari bahwa Al-Quran sebenarnya menjadi acuan dalam berbagai hal bukan hanya sekedar sebagai pelengkap. Dari Al-Quran banyak ilmu-ilmu yang dapat digali diantaranya ilmu matematika. Matematika serta berbagai cabangnya yang ada dalam Al-Qur'an diantaranya adalah masalah logika, pemodelan, statistik, teori graf dan lain-lain. Salah satu contohnya adalah dalam masalah peperangan. Surat yang berkaitan dengan masalah peperangan salah satunya adalah surat Ali-Imran ayat 13 yang menerangkan bahwa di dalam suatu peperangan terdapat dua golongan. Satu golongan berperang di jalan Allah dan satu golongan lain adalah orang-orang kafir yang dengan mata kepala mereka melihat seakan-akan orang-orang muslimin dua kali jumlah mereka. Dari sini dapat dilihat suatu perhitungan secara matematis yaitu berkaitan dengan operasi perkalian.

Dari uraian di atas, tidak menutup kemungkinan masih banyak topik-topik dalam matematika yang belum dikaji dan peneliti yakin masih banyak yang belum terungkap. Dalam skripsi ini, topik yang diambil adalah salah satu dari teori dalam matematika yang disebut teori graf. Teori graf yang merupakan salah satu cabang dari matematika tersebut menurut definisinya adalah himpunan yang tidak kosong yang memuat elemen-elemen yang disebut titik dan suatu daftar pasangan tidak terurut elemen itu yang disebut sisi.

Titik-titik dalam suatu graf, dapat diasumsikan menurut keperluan dalam menyelesaikan suatu permasalahan. Jika dua titik pada suatu graf diasumsikan sebagai suatu benda dan dihubungkan dengan suatu sisi, maka hal ini memiliki artian bahwa dua benda tersebut mempunyai suatu hubungan tertentu. Jika dua titik dalam suatu graf diasumsikan sebagai suatu kejadian dan dihubungkan dengan suatu sisi, maka dapat diambil suatu pengertian bahwa ada dua kejadian yang mempunyai hubungan. Dalam teori Islam elemen-elemen yang dimaksud meliputi Pencipta (Allah) dan hamba-hambanya, sedangkan sisi atau garis yang menghubungkan elemen-elemen tersebut adalah bagaimana hubungan antara Allah dengan hamba-hambanya dan juga hubungan sesama hamba yang terjalin, *Hablun min Allah wa Hablun min An-Nas*. Sehingga dengan demikian, hal ini menunjukkan adanya suatu hubungan atau keterkaitan antara titik yang satu dengan titik yang lain. Jika dikaitkan dengan kehidupan nyata, maka banyaknya titik yang terhubung dalam suatu graf dapat diasumsikan sebagai banyaknya kejadian tertentu, yang selanjutnya kejadian-kejadian tersebut memiliki keterkaitan dengan titik lainnya yang merupakan kejadian sesudahnya.



Gambar 2.20 Gambaran *Hablun min Allah wa Hablun min An-Nas*

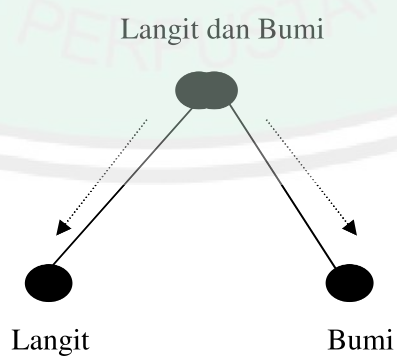
Dari Gambar 2.20 di atas, graf *Hablun min Allah wa Hablun min An-Nas* terdiri dari empat titik dan enam sisi, dan bisa juga disebut sebagai graf komplit. Karena setiap titik yang ada pada graf tersebut terhubung langsung dengan titik yang lainnya.

Salah satu contoh representasi graf yang lainnya adalah kejadian langit dan bumi. Banyak para ilmuwan yang memperdebatkan mengenai kejadian asal usul bumi dan benda-benda langit yang lainnya. Salah satunya adalah mengenai teori big-bang dimana teori ini menyebutkan bahwa dahulu ada satu benda yang sangat besar di langit kemudian karena suatu hal benda tersebut meledak dan menjadi benda-benda yang lebih kecil. Benda yang terbesar disebut matahari dan benda-benda yang lebih kecil menjadi bumi dan planet-planet yang lainnya. Hal ini sesuai dengan firman Allah dalam Al-Qur'an yaitu surat Al-Anbiya ayat 30, yang berbunyi:

أَوَلَمْ يَرَ ٱلَّذِينَ كَفَرُوٓا۟ أَنَّ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضَ كَانَتَا رَتْقًا فَفَتَقْنَٰهُمَا ۖ وَجَعَلْنَا مِنَ
ٱلْمَآءِ كُلَّ شَىْءٍ حَىٍّ ۖ أَفَلَا يُؤْمِنُونَ ﴿٣٠﴾

Artinya: *Dan apakah orang-orang yang kafir tidak mengetahui bahwasanya langit dan bumi itu keduanya dahulu adalah suatu yang padu, kemudian Kami pisahkan antara keduanya. Dan dari air Kami jadikan segala sesuatu yang hidup. Maka mengapakan mereka juga tiada beriman?*

Kejadian tersebut dapat digambarkan dalam suatu teori graf sebagai berikut:



Gambar 2.21 Gambaran Langit dan Bumi

Dari Gambar 2.21 di atas, graf gambaran langit dan bumi terdiri dari tiga titik dan dua sisi, dan bisa juga disebut sebagai graf lintasan. Karena pada graf tersebut membentuk sebuah lintasan, yaitu langit, langit dan bumi, bumi.

Sarang lebah dan laba-laba juga dapat dipandang berdasar teori graf. Terdapat ayat dalam Al-Quran sehubungan dengan lebah dan laba-laba, yaitu Surat An-Nahl ayat 68 dan Surat Al-Ankabuut ayat 41.

وَأَوْحَىٰ رَبُّكَ إِلَى ٱلنَّحْلِ أَنِ ٱتَّخِذِى مِنَ ٱلْجِبَالِ بُيُوتًا وَمِنَ ٱلشَّجَرِ
وَمِمَّا يَعْرِشُونَ ٦٨

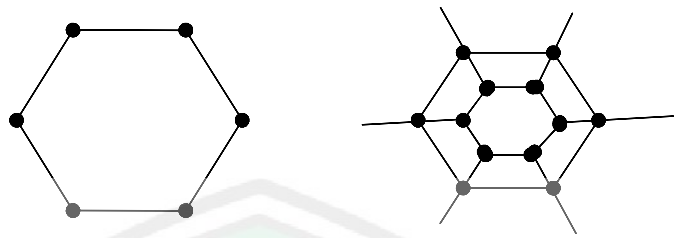
Artinya: " *Dan Tuhanmu mewahyukan kepada lebah: "Buatlah sarang- sarang di bukit-bukit, di pohon-pohon kayu, dan di tempat-tempat yang dibikin manusia*."

مَثَلُ ٱلَّذِينَ ٱتَّخَذُوا۟ مِن دُونِ ٱللَّهِ أَوْلِيَآءَ كَمَثَلِ ٱلْعَنكَبُوتِ ٱتَّخَذَتْ بَيْتًا ۖ
وَإِنَّ أَوْهَنَ ٱلْبُيُوتِ لَبَيْتُ ٱلْعَنكَبُوتِ ۖ لَوْ كَانُوا۟ يَعْلَمُونَ ٤١

Artinya: "*Perumpamaan orang-orang yang mengambil pelindung-pelindung selain Allah adalah seperti laba-laba yang membuat rumah. Dan sesungguhnya rumah yang paling lemah adalah rumah laba-laba kalau mereka mengetahui*."

Sarang lebah dan laba-laba dapat dilihat langsung dari bentuk sarangnya, dimana terdapat sisi-sisi dan titik-titik sebagai pengait sisi-sisinya. Selama jutaan tahun, lebah telah menggunakan struktur segi enam untuk membangun sarangnya.

Sarang lebah dan laba-laba dapat digambarkan sebagai berikut:



(a) Graf Sarang Lebah. (b) Graf Sarang Laba-laba.

Gambar 2.22 Graf Sarang Lebah dan Laba-laba.

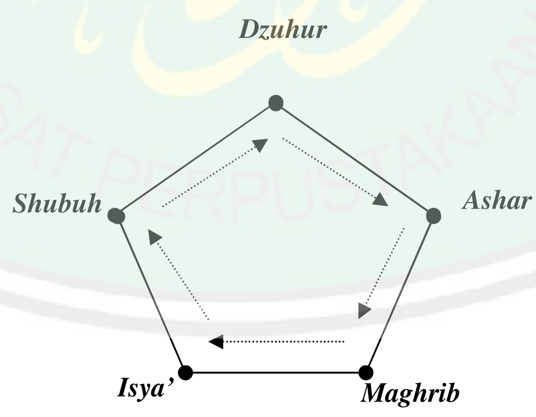
Dari Gambar 2.22 di atas, graf sarang lebah terdiri dari 6 titik dan 6 sisi, dan bisa juga disebut sebagai graf sikel. Pada graf sarang laba-laba banyaknya titik dan sisi tergantung pada besar kecilnya sarang tersebut. Secara umum bila sarangnya semakin besar, maka banyaknya sisi dan titik juga semakin banyak.

Representasi suatu graf yang lainnya adalah shalat. Shalat mempunyai kedudukan yang amat penting dalam Islam dan merupakan pondasi yang kokoh bagi tegaknya agama Islam. Ibadah shalat dalam Islam sangat penting, sehingga shalat harus dilakukan pada waktunya, dimanapun, dan bagaimanapun keadaan seorang muslim yang mukalaf. Dalam kaitannya dengan peribadatan sholat, Allah SWT berfirman:

فَإِذَا قَضَيۡتُمُ ٱلصَّلَوٰةَ فَٱذۡكُرُواْ ٱللَّهَ قِيَٰمٗا وَقُعُودٗا وَعَلَىٰ جُنُوبِكُمۡۚ فَإِذَا
ٱطۡمَأۡنَنتُمۡ فَأَقِيمُواْ ٱلصَّلَوٰةَۚ إِنَّ ٱلصَّلَوٰةَ كَانَتۡ عَلَى ٱلۡمُؤۡمِنِينَ كِتَٰبٗا مَّوۡقُوتٗا ١٠٣

Artinya: "Maka apabila kamu telah menyelesaikan shalat(mu), ingatlah Allah di waktu berdiri, di waktu duduk dan di waktu berbaring. Kemudian apabila kamu telah merasa aman, maka dirikanlah shalat itu (sebagaimana biasa). Sesungguhnya shalat itu adalah fardhu yang ditentukan waktunya atas orang-orang yang beriman" (Q.S. An-Nisaa': 103).

Dalam ayat tersebut dijelaskan bahwa waktu-waktu sholat telah ditentukan waktunya dan telah menjadi suatu ketetapan, baik itu sholat fardhu maupun sholat sunnah. Sholat lima waktu diwajibkan dalam sehari (dhuhur, ‘ashar, maghrib, ‘isya’, dan subuh) merupakan sholat yang wajib ditunaikan dan tidak boleh ditinggalkan. Waktu pelaksanaan antara satu waktu sholat fardhu berbeda dengan empat waktu sholat yang lain dan telah ditetapkan oleh Allah swt. Akan tetapi kelima waktu sholat tersebut saling mengikat dan tidak diperbolehkan hanya melaksanakan satu sholat saja. Adapun hubungan waktu sholat tersebut dengan teori graf adalah bahwa waktu-waktu sholat tersebut merupakan suatu himpunan yang terdiri dari waktu sholat fardhu (dhuhur, ‘ashar, maghrib, ‘isya’ dan subuh) sebagai ekspresi dari himpunan titik dalam graf. Sedangkan keterikatan antara kelima sholat fardhu tersebut yang tidak dapat ditinggalkan salah satunya dalam menunaikannya merupakan ekspresi dari garis atau sisi yang menghubungkan titik-titik dalam graf. Adapun bentuk graf dari waktu-waktu sholat fardhu yaitu



Gambar 2.23 Representasi Waktu-waktu Sholat

Dari Gambar 2.23 di atas, graf representasi waktu-waktu shalat terdiri dari lima titik dan lima sisi, dan bisa juga disebut sebagai graf sikel. Pada graf representasi waktu-waktu shalat menunjukkan bahwa kelima sholat tersebut saling mengikat. Artinya bahwa waktu tiap sholat tersebut telah ditentukan, tidak boleh saling bertukar antara waktu sholat yang satu dengan sholat yang lain. Sebagai contoh apabila waktu sholat dhuhur telah habis, maka seseorang tidak boleh melakukan sholat dhuhur karena telah masuk pada waktu sholat selanjutnya, yaitu sholat ashar. Hal ini akan terus seperti itu untuk waktu sholat yang lain. Titik-titik yang digambarkan oleh waktu-waktu sholat di atas merupakan himpunan titik yang diikat oleh suatu ketetapan yang berantai.

BAB III

PEMBAHASAN

Pada Bab III ini, dibahas mengenai masalah graf garis (*Line Graph*) dari graf lintasan, graf sikel, dan graf bintang. Pembahasan ini lebih lanjut meliputi tiga hal, yaitu:

3.1 Graf Garis dari Graf Lintasan

Graf yang pertama adalah graf lintasan dengan order n dan $n \geq 1$ untuk n bilangan asli yang dinotasikan dengan P_n.

1. Graf lintasan dengan order 1 dapat digambarkan seperti Gambar 3.1.

   P_1 :
   

   Gambar 3.1 Graf P_1

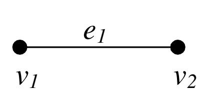
   Misal titiknya diberi nama v_1, atau dengan kata lain dapat dituliskan sebagai berikut:

   $V(G) = \{v_1\}$

   $E(G) = \{\ \}$

   Karena graf tersebut tidak memiliki sisi, maka graf lintasan P_1 ini tidak memiliki graf garis. Dengan demikian tidak ada graf garisnya.

2. Graf lintasan dengan order 2 dapat digambarkan seperti Gambar 3.2.

   P_2:
   

   Gambar 3.2 Graf P_2

Misal titiknya diberi nama v_1 dan v_2 dan sisinya diberi nama e_1 atau dengan kata lain dapat dituliskan sebagi berikut:

$V(G) = \{v_1, v_2\}$

$E(G) = \{e_1\}$

Karena graf P_2 memiliki satu sisi yaitu e_1 sehingga graf P_2 memiliki graf garis. Sisi e_1 akan menjadi titik di dalam graf garis. Matriks keterhubungan sisinya dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{array}{cc} & e_1 \\ e_1 & [0] \end{array}$$

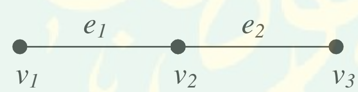
Maka graf garisnya dapat digambarkan seperti Gambar 3.3

$L(P_2)$:

Gambar 3.3 Graf Garis P_2

3. Graf lintasan dengan order 3 dapat digambarkan seperti Gambar 3.4.

P_3:



Gambar 3.4 Graf P_3

Misal titiknya diberi nama v_1, v_2, dan v_3 dan sisinya diberi nama e_1 dan e_2 atau dengan kata lain dapat dituliskan sebagai berikut:

$V(G) = \{v_1, v_2, v_3\}$

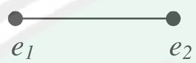
$E(G) = \{e_1, e_2\}$

Karena graf P_3 memiliki dua sisi yaitu e_1 dan e_2 sehingga graf P_3 memiliki graf garis. Sisi e_1 dan e_2 akan menjadi titik di dalam graf garis. Matriks keterhubungan sisinya dapat dituliskan sebagai berikut:

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cc} e_1 & e_2 \end{array} \\
\begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Maka graf garisnya dapat digambarkan seperti Gambar 3.5

$L(P_3)$:



Gambar 3.5 Graf Garis P_3

4. Graf lintasan dengan order 4 dapat digambarkan seperti Gambar 3.6.

P_4:

Gambar 3.6 Graf P_4

Misal titiknya diberi nama v_1, v_2, v_3, dan v_4 dan sisinya diberi nama e_1, e_2, dan e_3 atau dengan kata lain dapat dituliskan sebagai berikut:

$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

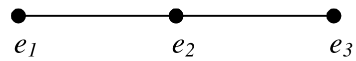
$E(G) = \{e_1, e_2, e_3\}$

Karena graf P_4 memiliki tiga sisi yaitu e_1, e_2, dan e_3 sehingga graf P_4 memiliki graf garis. Sisi e_1, e_2, dan e_3 akan menjadi titik di dalam graf garis. Matriks keterhubungan sisinya dapat dituliskan sebagai berikut:

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \\
\begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Maka graf garisnya dapat digambarkan seperti Gambar 3.7

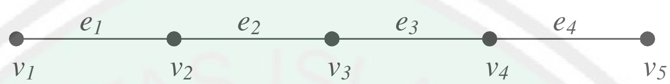
$L(P_4)$:



Gambar 3.7 Graf Garis P_4

5. Graf lintasan dengan order 5 dapat digambarkan seperti Gambar 3.8.

P_5:



Gambar 3.8 Graf P_5

Misal titiknya diberi nama v_1, v_2, v_3, v_4, dan v_5 dan sisinya diberi nama e_1, e_2, e_3, dan e_4 atau dengan kata lain dapat dituliskan sebagai berikut:

$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$

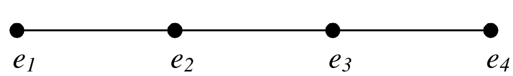
$E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$

Karena graf P_5 memiliki empat sisi yaitu e_1, e_2, e_3, dan e_4 sehingga graf P_5 memiliki graf garis. Sisi e_1, e_2, e_3, dan e_4 akan menjadi titik di dalam graf garis. Matriks keterhubungan sisinya dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Maka graf garisnya dapat digambarkan seperti Gambar 3.9

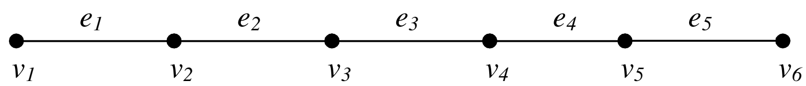
$L(P_5)$:



Gambar 3.9 Graf Garis P_5

6. Graf lintasan dengan order 6 dapat digambarkan seperti Gambar 3.10.

P_6:



Gambar 3.10 Graf P_6

Misal titiknya diberi nama v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, dan v_6 dan sisinya diberi nama e_1, e_2, e_3, e_4, dan e_5 atau dengan kata lain dapat dituliskan sebagai berikut:

$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$

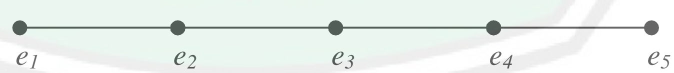
$E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$

Karena graf P_6 memiliki lima sisi yaitu e_1, e_2, e_3, e_4, dan e_5 sehingga graf P_6 memiliki graf garis. Sisi e_1, e_2, e_3, e_4, dan e_5 akan menjadi titik di dalam graf garis. Matriks keterhubungan sisinya dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\
\begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}$$

Maka graf garisnya dapat digambarkan seperti Gambar 3.11

$L(P_6)$:



Gambar 3.11 Graf Garis P_6

Berdasarkan beberapa contoh di atas maka dapat dituliskan kembali ke dalam Tabel 3.1 berikut ini:

Graf	Graf Garis (*Line Graph*)
P_1	-
P_2	P_1
P_3	P_2
P_4	P_3
P_5	P_4
P_6	P_5

Tabel 3.1 Graf Garis dari Graf Lintasan

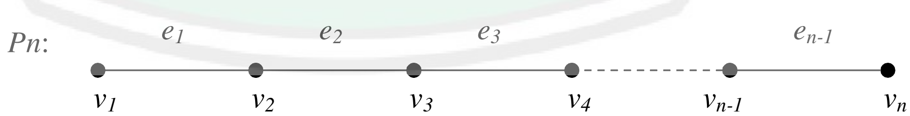
Berdasarkan tabel di atas, maka dapat diambil kesimpulan sementara bahwa graf garis dari graf lintasan (P_n) dengan order $n \geq 2$ adalah graf lintasan P_{n-1} dengan n adalah bilangan asli.

Teorema 3.1

Suatu graf lintasan (P_n) dengan order n ($n \geq 2$) memiliki graf garis yang berbentuk P_{n-1} dengan n adalah bilangan asli.

Bukti :

Graf lintasan dengan order n dapat digambarkan seperti Gambar 3.12.



Gambar 3.12 Graf P_n

Misal titiknya diberi nama $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{n-1}, v_n$, dan sisinya diberi nama $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_{n-1}$, atau dengan kata lain dapat dituliskan sebagai berikut:

$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, \ldots, v_{n-1}, v_n\}$

$E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, \ldots, e_{n-1}\}$

Karena graf lintasan (P_n) memiliki n sisi yaitu e_1, e_2, e_3, ..., e_{n-1}, e_n sehingga graf lintasan (P_n) memiliki graf garis. Sisi e_1, e_2, e_3, ..., e_{n-1}, e_n akan menjadi titik di dalam graf garis. Matriks keterhubungan sisinya dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ \\ e_{n-1} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & & e_{n-1} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Dari matriks di atas terlihat bahwa e_1 terhubung langsung dengan e_2, e_2 terhubung langsung dengan e_3, e_3 terhubung langsung dengan e_4, begitu seterusnya hingga e_n akan terhubung langsung dengan e_{n+1}. Dengan demikian graf garis yang dibentuk adalah graf lintasan (P_{n-1}), atau dapat dituliskan bahwa :

$$L(P_n) = P_{n-1}$$

$L(P_n)$:

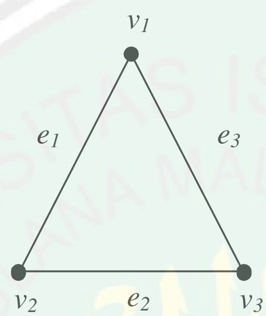
Gambar 3.13 Graf Garis P_n

3.2 Graf Garis dari Graf Sikel

Graf yang kedua adalah graf sikel dengan order n dan $n \geq 3$ untuk n bilangan asli yang dinotasikan dengan C_n.

1. Graf sikel dengan order 3 dapat digambarkan seperti Gambar 3.14.

C_3:



Gambar 3.14 Graf C_3

Misal titiknya diberi nama v_1, v_2, dan v_3 dan sisinya diberi nama e_1, e_2, dan e_3 atau dengan kata lain dapat dituliskan sebagai berikut:

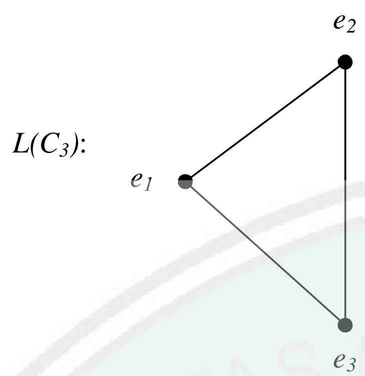
$V(G) = \{v_1, v_2, v_3\}$

$E(G) = \{e_1, e_2, e_3\}$

Karena graf C_3 memiliki tiga sisi yaitu e_1, e_2, dan e_3 sehingga graf C_3 memiliki graf garis. Sisi e_1, e_2, dan e_3 akan menjadi titik di dalam graf garis. Matriks keterhubungan sisinya dapat dituliskan sebagai berikut:

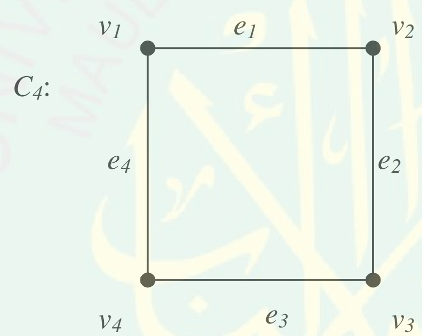
$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Maka graf garisnya dapat digambarkan seperti Gambar 3.15



Gambar 3.15 Graf Garis C_3

2. Graf sikel dengan order 4 dapat digambarkan seperti Gambar 3.16.



Gambar 3.16 Graf C_4

Misal titiknya diberi nama v_1, v_2, v_3, dan v_4 dan sisinya diberi nama e_1, e_2, e_3 dan e_4 atau dengan kata lain dapat dituliskan sebagai berikut:

$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

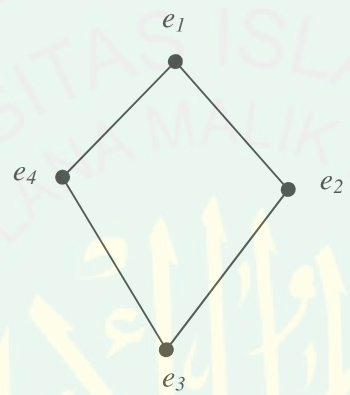
$E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$

Karena graf C_4 memiliki empat sisi yaitu e_1, e_2, e_3, dan e_4 sehingga graf C_4 memiliki graf garis. Sisi e_1, e_2, e_3, dan e_4 akan menjadi titik di dalam graf garis. Matriks keterhubungan sisinya dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{array}{c|cccc} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ \hline e_1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ e_2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ e_3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ e_4 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Maka graf garisnya dapat digambarkan seperti Gambar 3.17

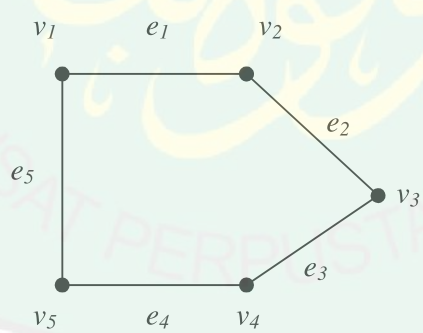
$L(C_4)$:



Gambar 3.17 Graf Garis C_4

3. Graf sikel dengan order 5 dapat digambarkan seperti Gambar 3.18.

C_5:



Gambar 3.18 Graf C_5

Misal titiknya diberi nama v_1, v_2, v_3, v_4, dan v_5 dan sisinya diberi nama e_1, e_2, e_3, e_4, dan e_5 atau dengan kata lain dapat dituliskan sebagai berikut:

$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$

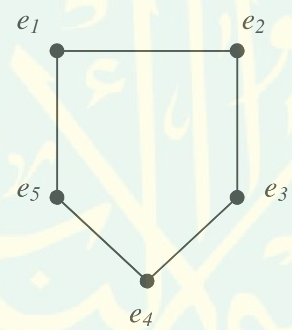
$E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$

Karena graf C_5 memiliki lima sisi yaitu e_1, e_2, e_3, e_4, dan e_5 sehingga graf C_5 memiliki graf garis. Sisi e_1, e_2, e_3, e_4, dan e_5 akan menjadi titik di dalam graf garis. Matriks keterhubungan sisinya dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Maka graf garisnya dapat digambarkan seperti Gambar 3.19

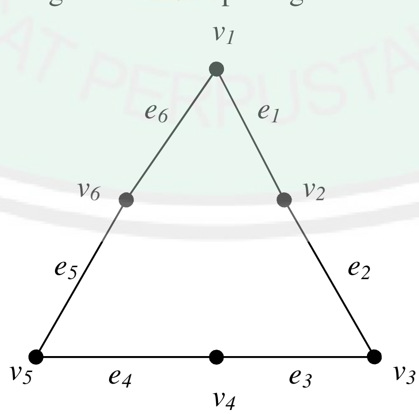
$L(C_5)$:



Gambar 3.19 Graf Garis C_5

4. Graf sikel dengan order 6 dapat digambarkan seperti Gambar 3.20.

C_6:



Gambar 3.20 Graf C_6

Misal titiknya diberi nama v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, dan v_6 dan sisinya diberi nama e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, dan e_6 atau dengan kata lain dapat dituliskan sebagai berikut:

$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$

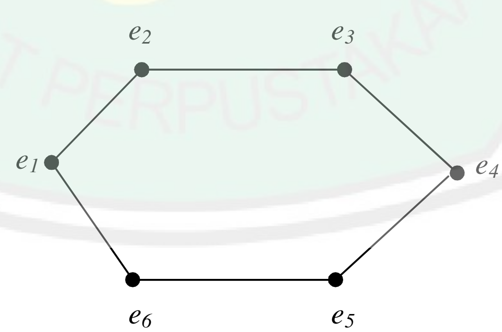
$E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$

Karena graf C_6 memiliki enam sisi yaitu e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, dan e_6 sehingga graf C_6 memiliki graf garis. Sisi e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, dan e_6 akan menjadi titik di dalam graf garis. Matriks keterhubungan sisinya dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Maka graf garisnya dapat digambarkan seperti Gambar 3.21

$L(C_6)$:



Gambar 3.21 Graf Garis C_6

Berdasarkan beberapa contoh di atas maka dapat dituliskan kembali ke dalam Tabel 3.2 berikut ini:

Graf	Graf Garis (*Line Graph*)
C_3	C_3
C_4	C_4
C_5	C_5
C_6	C_6

Tabel 3.2 Graf Garis dari Graf Sikel

Berdasarkan tabel di atas, maka dapat diambil kesimpulan sementara bahwa graf garis dari graf sikel (C_n) dengan order $n \geq 3$ adalah graf C_n dengan n adalah bilangan asli.

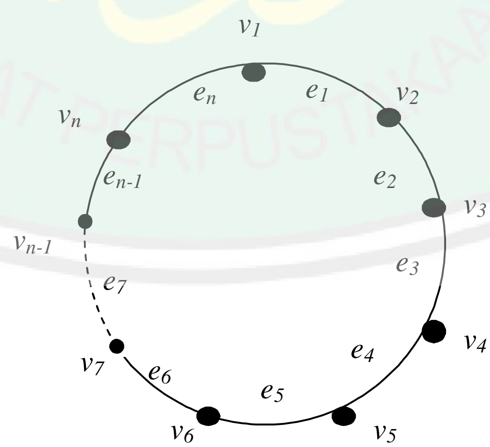
Teorema 3.2

Suatu graf sikel (C_n) dengan order n ($n \geq 3$) memiliki graf garis yang berbentuk C_n dengan n adalah bilangan asli.

Bukti :

Graf sikel dengan order n dapat digambarkan seperti Gambar 3.22.

C_n:



Gambar 3.22 Graf C_n

Misal titiknya diberi nama $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{n-1}, v_n$, dan sisinya diberi nama e_1, $e_2, e_3, \ldots, e_{n-1}, e_n$ atau dengan kata lain dapat dituliskan sebagai berikut:

$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, \ldots, v_{n-1}, v_n\}$

$E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, \ldots, e_{n-1}, e_n\}$

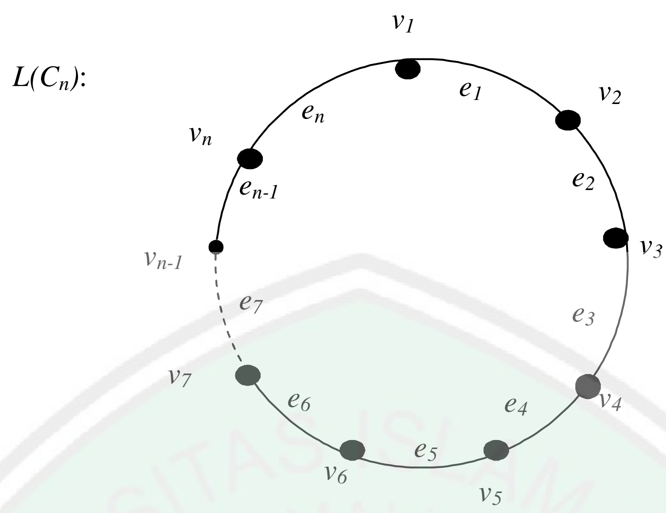
Karena graf C_n memiliki n sisi yaitu $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n$ sehingga graf C_n memiliki graf garis. Sisi $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n$ akan menjadi titik di dalam graf garis. Matriksnya dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ \\ e_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & & e_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Dari matriks di atas terlihat bahwa e_1 terhubung langsung dengan e_2, e_2 terhubung langsung dengan e_3, e_3 terhubung langsung dengan e_4, begitu seterusnya hingga e_{n-1} akan terhubung langsung dengan e_n, dan e_n terhubung langsung dengan e_1. Dengan demikian graf garis yang dibentuk adalah graf sikel (C_n) dengan order n untuk n adalah bilangan asli. Atau dapat dituliskan bahwa :

$$L(C_n) = C_n$$

Maka graf garisnya dapat digambarkan seperti Gambar 3.23

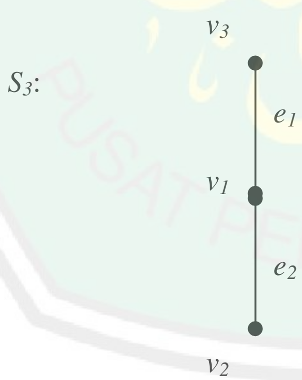


Gambar 3.23 Graf Garis C_n

3.3 Graf Garis dari Graf Bintang

Graf yang ketiga adalah graf bintang dengan order n dan $n \geq 3$ untuk n bilangan asli yang dinotasikan dengan S_n.

1. Graf bintang dengan order 3 dapat digambarkan seperti Gambar 3.24.



Gambar 3.24 Graf S_3

Misal titiknya diberi nama v_1, v_2, dan v_3 dan sisinya diberi nama e_1 dan e_2 atau dengan kata lain dapat dituliskan sebagai berikut:

$V(G) = \{v_1, v_2, v_3\}$

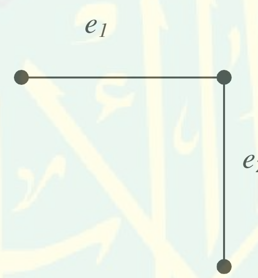
$E(G) = \{e_1, e_2\}$

Karena graf S_3 memiliki dua sisi yaitu e_1 dan e_2 sehingga graf S_3 memiliki graf garis. Sisi e_1 dan e_2 akan menjadi titik di dalam graf garis. Matriks keterhubungan sisinya dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} e_1 & e_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Maka graf garisnya dapat digambarkan seperti Gambar 3.25

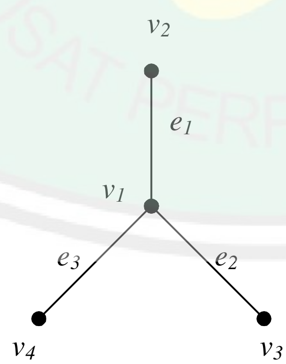
$L(S_3)$:



Gambar 3.25 Graf Garis S_3

2. Graf bintang dengan order 4 dapat digambarkan seperti Gambar 3.26.

S_4:



Gambar 3.26 Graf S_4

Misal titiknya diberi nama v_1, v_2, v_3, dan v_4 dan sisinya diberi nama e_1, e_2, dan e_3 atau dengan kata lain dapat dituliskan sebagai berikut:

$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

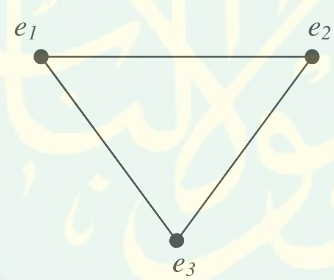
$E(G) = \{e_1, e_2, e_3\}$

Karena graf S_4 memiliki tiga sisi yaitu e_1, e_2, dan e_3 sehingga graf S_4 memiliki graf garis. Sisi e_1, e_2, dan e_3 akan menjadi titik di dalam graf garis. Matriks keterhubungan sisinya dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Maka graf garisnya dapat digambarkan seperti Gambar 3.27

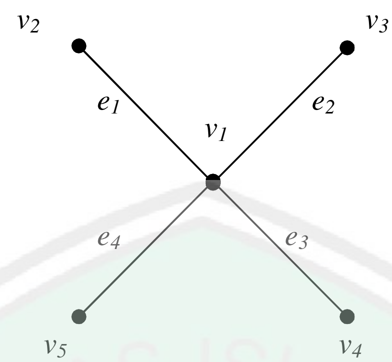
$L(S_4)$:



Gambar 3.27 Graf Garis S_4

3. Graf bintang dengan order 5 dapat digambarkan seperti Gambar 3.28.

S_5:



Gambar 3.28 Graf S_5

Misal titiknya diberi nama v_1, v_2, v_3, v_4, dan v_5 dan sisinya diberi nama e_1, e_2, e_3, dan e_4 atau dengan kata lain dapat dituliskan sebagai berikut:

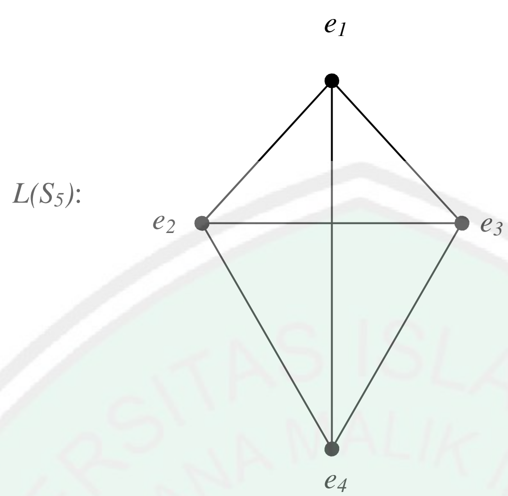
$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$

$E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$

Karena graf S_5 memiliki empat sisi yaitu e_1, e_2, e_3, dan e_4 sehingga graf S_5 memiliki graf garis. Sisi e_1, e_2, e_3, dan e_4 akan menjadi titik di dalam graf garis. Matriks keterhubungan sisinya dapat dituliskan sebagai berikut:

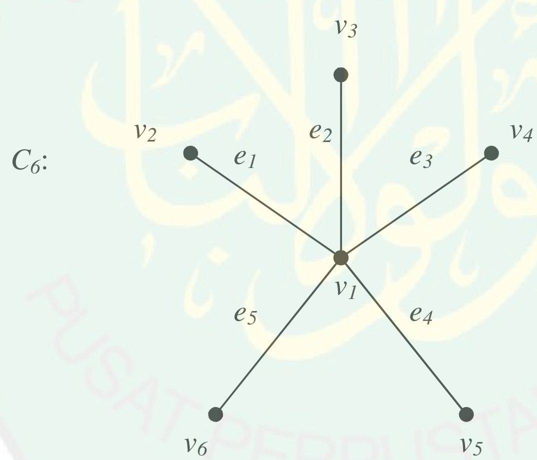
$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Maka graf garisnya dapat digambarkan seperti Gambar 3.29



Gambar 3.29 Graf Garis S_5

4. Graf bintang dengan order 6 dapat digambarkan seperti Gambar 3.30.



Gambar 2.30 Graf S_6

Misal titiknya diberi nama v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, dan v_6 dan sisinya diberi nama e_1, e_2, e_3, e_4, dan e_5 atau dengan kata lain dapat dituliskan sebagai berikut:

$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$

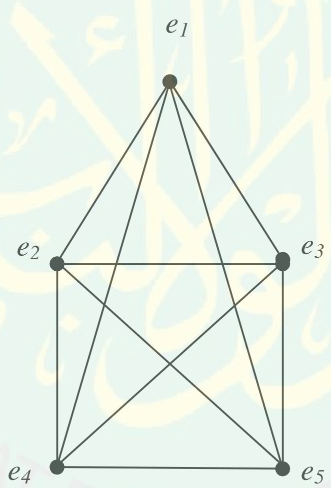
$E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$

Karena graf S_6 memiliki lima sisi yaitu e_1, e_2, e_3, e_4, dan e_5 sehingga graf S_6 memiliki graf garis. Sisi e_1, e_2, e_3, e_4, dan e_5 akan menjadi titik di dalam graf garis. Matriks keterhubungan sisinya dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{array}{c c} & \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Maka graf garisnya dapat digambarkan seperti Gambar 3.31

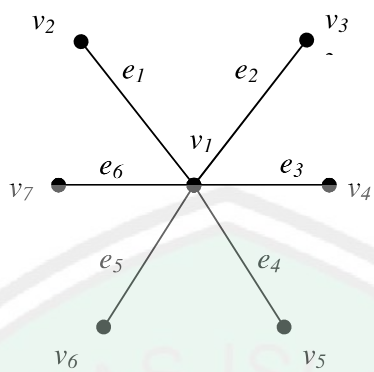
$L(S_6)$:



Gambar 2.31 Graf Garis S_6

5. Graf bintang dengan order 7 dapat digambarkan seperti Gambar 3.32.

S_7:



Gambar 3.32 Graf S_7

Misal titiknya diberi nama v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, dan v_7 dan sisinya diberi nama e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, dan e_6 atau dengan kata lain dapat dituliskan sebagai berikut:

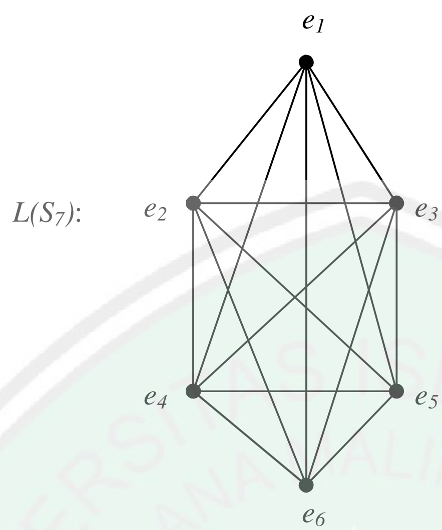
$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$

$E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$

Karena graf S_7 memiliki enam sisi yaitu e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, dan e_6 sehingga graf S_7 memiliki graf garis. Sisi e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 dan e_6 akan menjadi titik di dalam graf garis. Matriks keterhubungan sisinya dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Maka graf garisnya dapat digambarkan seperti Gambar 3.33



Gambar 3.33 Graf Garis S_7

Berdasarkan beberapa contoh di atas maka dapat dituliskan kembali ke dalam Tabel 3.3 berikut ini:

Graf	**Graf Garis (*Line Graph*)**
S_3	K_2
S_4	K_3
S_5	K_4
S_6	K_5
S_7	K_6

Tabel 3.3 Graf Garis dari Graf Bintang

Berdasarkan tabel di atas, maka dapat diambil kesimpulan sementara bahwa graf garis dari graf bintang (S_n) dengan order $n \geq 3$ adalah graf komplit (K_{n-1}) dengan n adalah bilangan asli.

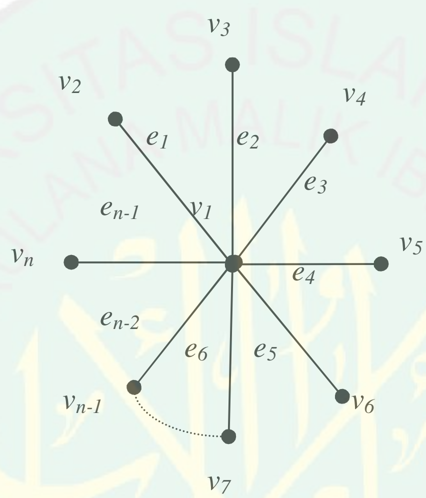
Teorema 3.3

Suatu graf bintang (S_n) dengan order n ($n \geq 3$) memiliki graf garis yang berbentuk Graf Komplit (K_{n-1}) dengan n adalah bilangan asli.

Bukti :

Graf bintang dengan order n dapat digambarkan seperti Gambar 3.34.

S_n:



Gambar 3.34 Graf S_n

Misal titiknya diberi nama v_1, v_2, v_3, …, v_{n-1}, v_n dan sisinya diberi nama e_1, e_2, e_3, …, e_{n-1} atau dengan kata lain dapat dituliskan sebagai berikut:

$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, ..., v_{n-1}, v_n\}$

$E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, ..., e_{n-1}\}$

Karena graf S_n memiliki n sisi yaitu e_1, e_2, e_3, ..., e_n sehingga graf S_n memiliki graf garis. Sisi e_1, e_2, e_3, ..., e_{n-1} akan menjadi titik di dalam graf garis. Matriks keterhubungan sisinya dapat dituliskan sebagai berikut:

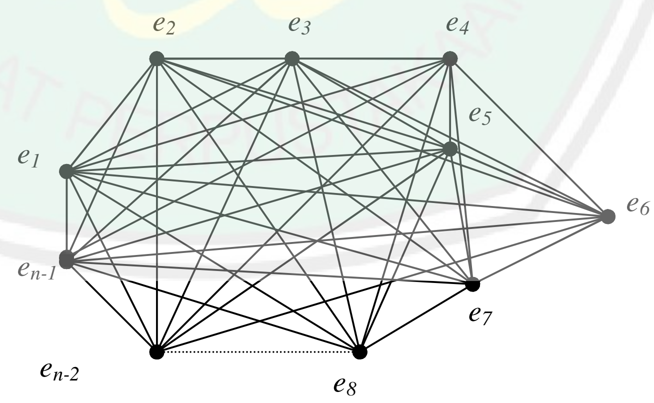
$$
\begin{array}{c|ccccccc}
 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & & e_{n-1} \\
\hline
e_1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\
e_2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\
e_3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\
e_4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & \dots & \\
e_5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\
 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
e_{n-1} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0
\end{array}
$$

Dari matriks di atas terlihat bahwa e_1 terhubung langsung dengan semua titik yaitu e_2, e_3, e_4, ..., e_{n-1}. Dan e_2 terhubung langsung dengan e_3, e_4, e_5, ..., e_{n-1}, e_1. Dan e_3 terhubung langsung dengan e_4, e_5, e_6, e_7, ..., e_{n-1}, e_1, e_2 dan begitu seterusnya hingga semua sisi akan terhubung langsung dengan sisi yang lainnya. Dengan demikian graf garis yang dibentuk adalah graf komplit (K_{n-1}). Atau dapat dituliskan bahwa :

$$L(S_n) = K_{n-1}$$

Maka graf garisnya dapat digambarkan seperti Gambar 3.35

$L(S_n)$:



Gambar 3.35 Graf Garis S_n

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan pada Bab III, maka dapat diambil kesimpulan bahwa bentuk umum untuk mencari graf garis dari:

1. Graf Lintasan (P_n) dengan order $n \geq 2$ adalah Graf Lintasan (P_{n-1}).
2. Graf Sikel (C_n) dengan order $n \geq 3$ adalah Graf Sikel (C_n).
3. Graf Bintang (S_n) dengan order $n \geq 3$ adalah Graf Komplit (K_{n-1}).

dengan n adalah bilangan bulat.

4.2 Saran

Pada skripsi ini, penulis hanya memfokuskan pada pokok bahasan masalah menentukan Graf Garis (Line Graph) dari Graf Lintasan, Graf Sikel dan Graf Bintang. Maka dari itu, untuk penulisan skripsi selanjutnya, penulis menyarankan kepada pembaca untuk mengkaji masalah graf garis terhadap graf yang lainnya.

DAFTAR RUJUKAN

Abdusysyakir. 2007. *Ketika Kiai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press.

Aziz, Abdul. 2007. *Bumi Sholat Secara Matematis*. Malang: UIN Malang Press.

Aziz, Abdul dan Abdusysyakir. 2006. *Analisis Matematis Terhadap Filsafat Al-Qur'an*. Malang: UIN Malang Press.

Chartrand, Gery and Lesniak, Linda. 1986. *Graphs and Digraphs Second Edition*. California: a Division of Wadsworth, Inc.

Moleong, J, Lexy. 2000. *Metodologi Penelitian Kualitatif*. Bandung: Remaja Rosda Karya

Purwanto, 1998. *Matematika Diskrit*. Malang: IKIP Malang.

Rahman, Afzalur. 1992. *Al Qur'an Sumber Ilmu Pengetahuan*. Jakarta: Rineka Cipta.

Roham, Abujamin. 1994. *Al Qur'an Untuk Orang Hidup*. Jakarta: Seri Media Da'wah

Shihab, M. Quraish. 2002. *Tafsir Al-Misbah Volume 1 Pesan, Kesan & Keserasian Al Qur'an*. Ciputat: Lentera Hati.

Shihab, M. Quraish. 2002. *Tafsir Al-Misbah Volume 3 Pesan, Kesan & Keserasian Al Qur'an*. Ciputat: Lentera Hati.

Shihab, M. Quraish. 2002. *Tafsir Al-Misbah Volume 4 Pesan, Kesan & Keserasian Al Qur'an*. Ciputat: Lentera Hati.

Wilson, Robin J dan Watkins John J. 1989. *Graphs: An Introductory approach: A First Course in Discrete Mathematics*. Canada: John Wiley and Sons, Inc.

Wirawan, Teddy P. 2008. *Pemodelan Sistem Lalu Lintas dengan Graf Ganda Berarah Berbobot*. (Online): (http://www. Combinatoric. Com. Diakses tanggal 15 Desember 2008).

DEPARTEMEN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang (0341)551345
Fax. (0341)572533

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : **Fifi Framelia Nofandika**
Nim : **04510014**
Fakultas/ jurusan : **Sains Dan Teknologi/ Matematika**
Judul skripsi : **Graf Garis (Line Graph) dari Graf Lintasan, Graf Sikel, dan Graf Bintang**
Pembimbing I : **Abdussakir, M.Pd**
Pembimbing II : **Abdul Aziz, M.Si**

No	Tanggal	HAL	Tanda Tangan
1	24 Oktober 2008	ACC Proposal	1.
2	7 November 2008	Konsultasi BAB III	2.
3	14 November 2008	Revisi BAB III	3.
4	21 November 2008	Revisi BAB III	4.
5	28 November 2008	ACC BAB III	5.
6	5 Desember 2008	Konsultasi BAB I dan II	6.
7	12 Desember 2008	Revisi BAB I dan II	7.
8	19 Desember 2008	ACC BAB I dan II	8.
9	20 Desember 2008	Konsultasi Keagamaan	9.
10	27 Desember 2008	Revisi Keagamaan	10.
11	3 Januari 2009	ACC Keagamaan	11.
12	8 Januari 2009	Revisi Keseluruhan	12.
13	15 Januari 2009	ACC Keseluruhan	13.

Malang, 15 Januari 2009
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M.Si
NIP. 150 318 321