KAJIAN INTEGRAL-J PADA [a,b]

SKRIPSI

Oleh:
SILVIA ANINDITA
NIM. 05510008

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2009

KAJIAN INTEGRAL-J PADA [*a*,*b*]

SKRIPSI

Oleh:
SILVIA ANINDITA
NIM. 05510008

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2009

KAJIAN INTEGRAL-J PADA [*a*,*b*]

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
SILVIA ANINDITA
NIM. 05510008

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2009

KAJIAN INTEGRAL-J PADA [*a*,*b*]

SKRIPSI

Oleh:
SILVIA ANINDITA
NIM: 05510008

Telah Disetujui untuk Diuji

Malang, 05 Oktober 2009

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Hairur Rahman, S.Pd, M.Si	**Abdussakir, M.Pd**
NIP. 19800429 200604 1 003	**NIP. 19751006 200312 1 001**

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

KAJIAN INTEGRAL-J PADA [*a*,*b*]

SKRIPSI

Oleh:
SILVIA ANINDITA
NIM: 05510008

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal:

09 Oktober 2009

Susunan Dewan Penguji:			**Tanda Tangan**
1. Penguji Utama	:	**Wahyu H. Irawan, M.Pd** **NIP. 19710420 200003 1 003**	( )
2. Ketua	:	**Drs. H. Turmudi, M.Si** **NIP. 19571005 198203 1 006**	( )
3. Sekretaris	:	**Hairur Rahman, M.Si** **NIP. 19800429 200604 1 003**	( )
4. Anggota	:	**Abdussakir, M.Pd** **NIP. 19751006 200312 1 001**	( )

Mengetahui dan Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : SILVIA ANINDITA

NIM : 05510008

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri.

Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 05 Oktober 2009

Yang membuat pernyataan

Silvia Anindita

NIM. 05510008

MOTTO

" من عبد اللّه بغير علم كان ما يفسد أكثر مما يصلح "

"Barangsiapa yang beribadah kepada Allah tanpa ilmu, maka dia akan membuat banyak kerusakan daripada mendatangkan kebaikan."

(Al Amru bil Ma'ruf wan Nahyu 'anil Mungkar)

" If you think you can, you can.
And if you think you can't, you're right"

(Mary Kay Ash)

Dedicated to

My Parents, Drs. H. Misbakhul Ulum & Dra. Khusnul Maziyah

Adinda M. Dikhyak Nurdiansyah

My Strength, Mas Bayu Perwira Harianto, ST.

KATA PENGANTAR

بسم الله الرحمن الرحيم

Assalamu'alaikum Wr.Wb.

Puji syukur kehadirat Allah SWT, karena atas taufik dan hidayah-Nya penulisan skripsi yang berjudul " KAJIAN INTEGRAL-J PADA $[a, b]$" dapat diselesaikan tepat waktu. Sholawat serta salam semoga tetap tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW, yang telah mengantarkan umat manusia dari zaman kebodohan menuju zaman yang terang benderang, yaitu agama Islam.

Dalam penyusunan skripsi ini, penulis tidak dapat menyelesaikan sendiri tanpa bantuan dari berbagai pihak, untuk itu penulis mengucapkan rasa hormat dan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Prof. Dr. Imam Suprayogo, selaku Rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Dr. Sutiman Bambang Sumitro, SU., D.Sc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang serta selaku pembimbing agama yang senantiasa memberikan bimbingan dan arahan dalam penyusunan skripsi ini.

4. Hairur Rahman, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang selalu memberi motivasi serta sabar dalam membimbing dan memberikan penjelasan dalam penyusunan skripsi ini.
5. Seluruh dosen dan staf fakultas Sains dan Teknologi yang telah memberikan ilmunya selama ini.
6. Aba dan Ibu tercinta, adek, buya, umi‘, tante, om dan seluruh keluarga, yang selalu memberikan support dan motivasi baik moril, spirituil serta materiil.
7. MasQ yang selalu ada kapanpun membutuhkan bantuannya.
8. Teman-teman mahasiswa Matematika angkatan 2005, UKM UNIOR, serta HMJ Matematika periode 2007-2008, *Thanks for the great relationship*.
9. *My Best Friends* ”Base Camp Girls” (Amel, Wiwit, Lilis, Nilna, Sita), *Kanca-KancaQ* (Shodiq ’Pencenk’, Donny, Si Mbah Chamim, Navi’, Surur ’Bownenk’), *Cah-Cah* kost Pamuji 34 (Lindhu, Rif’ah, Rere, Melia,Yuli), *Thanks Guys..!!*
10. Semua pihak yang telah membantu penulis, yang tidak dapat disebutkan satu persatu, *Thanks for all..*

Penulis berdo'a semoga bantuan yang telah diberikan dicatat sebagai amal baik oleh Allah SWT dan mendapatkan balasan yang setimpal. Penulis berharap, semoga skripsi ini bermanfaat. Amin.

Wssalamu’alaikum Wr.Wb.

Malang, 02 Oktober 2009

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR SIMBOL

NO	SIMBOL	KETERANGAN
1.	$\subset$	Subset dari
2.	$\subseteq$	Subset dari sama dengan
3.	$\in$	Elemen
4.	$\notin$	Bukan elemen
5.	$\leq$	Kurang dari sama dengan
6.	$\geq$	Lebih dari sama dengan
7.	$\forall$	Untuk setiap
8.	Sup	Supremum
9.	Inf	Infimum
10.	$<$	Kurang dari
11.	$>$	Lebih dari
12.	$\cap$	Irisan
13.	$\cup$	Gabungan
14.	$\mathbb{R}$	Himpunan bil. Riil
15.	$\mathbb{N}$	Himpunan bil. Asli
16.	$\mathbb{Z}$	Himpunan bil. Bulat
17.	x_n atau f_n	Barisan (sampai ke-n)
18.	δ	Delta (besar)
19.	$\mathfrak{J}$	Liput Bagian
20.	ε	Epsilon
21.	$\lvert \dots \rvert$	Harga mutlak
22.	lim	Limit
23.	$\sum$	Sigma
24.	$\int$	Integral
25.	$[\dots]$	Interval tertutup
26.	F'	Turunan fungsi
27.	I	Himpunan interval
28.	$(N)\int$	Integral-Newton
29.	$(J)\int$	Integral-J

ABSTRAK

Anindita, Silvia. 2009. **Kajian Integral-J pada $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$**. Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: (I) Hairur Rahman, M.Si.
(II) Abdussakir, M.Pd.

Kata Kunci: Integral-J, Fungsi Terintegral-J pada $[a, b]$, dan Sifat Integral-J pada $[a, b]$

Integral-J dikenalkan oleh P.Y.Lee dan B.H. Lim setelah adanya konsep integral Newton. Tidak semua fungsi dapat terintegral-J pada $[a, b]$, sebab terdapat syarat-syarat agar fungsi tersebut dapat dikatakan fungsi terintegral-J pada $[a, b]$. Selanjutnya fungsi yang terintegral-J pada $[a, b]$ akan memenuhi sifat-sifat integral-J pada $[a, b]$. Berdasarkan hal tersebut dalam skripsi ini akan dibahas mengenai suatu fungsi yang dapat dikatakan terintegral-J serta sifat-sifat integral-J berupa analisis definisi, pembuktian teorema-teorema serta pemberian contoh.

Suatu fungsi f dikatakan terintegral-J pada $[a, b]$ jika memenuhi syarat berikut: (1) terdapat fungsi F kontinu pada $[a, b]$; (2) $F'(x) = f(x)$ hampir di mana-mana. Integral-J dari suatu fungsi f pada $[a, b]$ didefinisikan:

$$(J)\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

Fungsi yang dikatakan terintegral-J pada $[a, b]$ akan memenuhi sifat-sifat Integral-J di antaranya:

1. Fungsi primitif F dari fungsi yang terintegral-J f adalah tunggal (Sifat Ketunggalan)
2. Jika f dan g adalah fungsi yang terintegral-J pada $[a, b]$, maka $f + g$ dan kf, juga terintegral-J, dan

(1) $$(J)\int_a^b (f(x) + g(x))dx = (J)\int_a^b f(x)dx + (J)\int_a^b g(x)dx$$

(2) $(J)\int_a^b k\, f(x)dx = k\,(J)\int_a^b f(x)dx$, untuk setiap $k \in \mathbb{R}$ (Sifat Kelinieran)

Selain itu juga terdapat sifat-sifat lainnya seperti sifat keterbatasan, sifat perbandingan serta sifat-sifat lainnya berupa teorema-teorema.

Pembahasan mengenai integral-J pada $[a, b]$ ini masih terbuka bagi peneliti lain untuk melanjutkan dengan mengembangkan lagi konsep integral-J serta meneliti sifat-sifat integral-J yang lain.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Sebagian dari sejarah ilmu pengetahuan alam adalah catatan dari usaha manusia secara kontinu untuk merumuskan konsep-konsep dan unsur-unsur dalam bidang ilmu pengetahuan untuk dapat diuraikan ke dalam dunia nyata.

Berbicara tentang ilmu pengetahuan, Al Qur'an telah memberikan kepada manusia kunci ilmu pengetahuan tentang dunia dan akhirat serta menyediakan peralatan untuk mencari dan meneliti segala sesuatu agar dapat mengungkap dan mengetahui keajaiban dari kedua dunia itu (Rahman, 1992: 12). Tidak diragukan lagi bahwa Al-Qur'an dengan anjuran memperhatikan dan berfikir yang diulanginya beberapa kali menjadikan aktivitas studi dan penelitian dalam berbagai bidang sebagai sebuah keharusan bagi umat islam. Karena itu islam memerintahkan manusia untuk beribadah dan berfikir.

Manusia telah diciptakan dengan kelebihan akal dan fikiran, mempunyai peranan sangat penting untuk dapat menggali dan memanfaatkan segala bentuk ciptaannya sebagaimana telah dijelaskan dalam Al-Qur'an. Dengan semua kelebihannya manusia berperan untuk mengembangkan ilmu pengetahuan. Selanjutnya melalui aktivitas studi dan penelitiannya manusia diharuskan mampu memahami kebenaran Al-Qur'an. Dalam islam, seorang muslim ataupun muslimah diwajibkan untuk mencari ilmu walaupun tempat untuk mencari ilmu tersebut jauh.

Allah berfirman:

وَلَا تَقۡفُ مَا لَيۡسَ لَكَ بِهِۦ عِلۡمٌۚ ﴿٣٦﴾

Artinya: *"Dan janganlah kamu mengikuti apa yang kamu tidak mempunyai pengetahuan tentangnya." (QS. Al- Israa': 36)*

Ayat di atas menjelaskan bahwa Islam menghendaki aqidah yang dilandasi oleh dasar pengetahuan yang benar, bukan atas dasar taklid maupun perkiraan. Sehingga menegaskan suatu sistem yang sempurna bagi hati dan akal untuk menyertakan metode-metode ilmiah dan penalaran dalam menjalankan tugasnya yang telah tersebut di atas (Shihab, 2003: 465). Demikian halnya aktivitas manusia dalam memahami konsep matematika memerlukan suatu pengetahuan dasar sehingga mampu menangkap integrasi Al-Qur'an dan sains.

Sebagai sarana ilmiah, matematika merupakan salah satu disiplin ilmu yang tidak hanya terdapat satu keilmuan saja di dalamnya. Akan tetapi masih terdapat ilmu-ilmu lain yang menjadi sarana keilmuan bagi disiplin ilmu lain. Untuk mengetahui semua itu kita sebagai pelajar berkewajiban untuk mempelajari berbagai ilmu sedalam-dalamnya. Matematika sebagai disiplin ilmu dikenal sebagai *Queen Of Science*, dan mempunyai cabang keilmuan seperti ilmu analisis maupun ilmu terapan.

Salah satu ilmu matematika yang termasuk di dalam cabang ilmu analisis adalah integral. Seperti ilmu-ilmu yang lain di dalam matematika, teori integral merupakan ilmu deduktif dan masih tetap berkembang seperti ilmu-ilmu lainnya, baik dari segi teori maupun pemakaiannya.

Konsep integral selalu berdampingan dengan konsep diferensial, sebab integral merupakan kebalikan dari proses diferensiasi. Integral ditemukan menyusul ditemukannya masalah dalam diferensiasi di mana matematikawan harus berpikir bagaimana menyelesaikan masalah yang berkebalikan dengan solusi diferensiasi. Proses pencarian nilai dari sebuah integral dinamakan *pengintegralan* (integration). Lambang dari integral adalah " $\int$ ".

Seorang matematikawan yang pertama kali menyusun suatu teori integral bernama Newton, yang selanjutnya disebut *teori integral Newton*. Teori integral Newton ini kemudian memicu perkembangan teori integral yang terbukti dengan munculnya beberapa nama matematikawan seperti Bernoulli (1700-1783), Euler (1707-1783), Cauchy (1789-1867), Riemann (1826-1866), Stieltjes (1856-1894).

Konsep integral yang pertama kali dikenalkan Newton (1642-1722) kemudian dikembangkan oleh P.Y.Lee pada tahun 1970 dengan mendefinisikan *Integral-J*. Selanjutnya B.H.Lim (1972) mempelajari dan memahami lebih dalam mengenai Integral-J tersebut hingga didapatkan sifat-sifat dari Integral-J.

Integral-J pada selang $[a, b]$ didefinisikan karena adanya syarat khusus pada integral Newton di mana suatu fungsi yang terintegral Newton pada selang $[a, b]$ haruslah *differentiable* di setiap titik pada $[a, b]$, sedangkan pada integral-J tidak harus. Sehingga fungsi yang tidak terintegral Newton bisa terintegral yaitu dengan integral-J.

Suatu fungsi yang dapat diintegralkan disebut *Integrable*. Sehingga suatu fungsi yang dapat diintegralkan dengan Integral-J dapat dikatakan terintegral-J atau *J-Integrable*. Akan tetapi tidak semua fungsi dapat terintegral-J. Sebab ada syarat-syarat khusus yang juga harus dipenuhi agar bisa dikatakan bahwa fungsi tersebut terintegral-J atau *J-Integrable*.

Berdasarkan pemaparan di atas, peneliti sangat tertarik untuk membahas atau mengkaji lebih jauh tentang konsep Integral-J pada $[a, b]$.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut di atas, maka masalah yang akan dicari solusinya dapat dirumuskan sebagai berikut:

1. Bagaimana suatu fungsi dapat terintegral-J pada $[a, b]$?
2. Bagaimana sifat-sifat Integral-J pada $[a, b]$?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah diatas, maka tujuan penelitian adalah:

1. Untuk mengetahui suatu fungsi dapat terintegral-J pada $[a, b]$.
2. Untuk mengetahui sifat-sifat Integral-J pada $[a, b]$.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari pembahasan masalah ini adalah sebagai berikut:

1. Manfaat bagi Penulis

   Untuk memperdalam dan mengembangkan wawasan disiplin ilmu yang telah dipelajari, khususnya Analisis untuk mengkaji lebih lanjut tentang Integral-J.

2. Manfaat bagi Pembaca

   Untuk menambah khazanah keilmuan dan sebagai titik awal pembahasan yang bisa dilanjutkan atau lebih dikembangkan.

3. Manfaat bagi Instansi

   Untuk menambah perbendaharaan karya tulis ilmiah sehingga dapat memberikan informasi ilmiah tentang ilmu Analisis dalam matematika khususnya berkaitan dengan integral-J.

1.7 Batasan Masalah

Untuk menghindari agar permasalahan tidak semakin meluas, maka pembahasan hanya dibatasi pada

1. Penjelasan konsep integral-J pada $[a, b]$ dengan analisa definisi, pembuktian teorema dan pemberian contoh saja.
2. Fungsi yang digunakan adalah fungsi polinomial.

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode "studi literatur", sebab skripsi ini merupakan bentuk kajian. Pengumpulan data dilakukan dengan mencari bahan-bahan kepustakaan sebagai landasan teori yang ada hubungannya dengan permasalahan yang dijadikan obyek penelitian. Pembahasan dilakukan dengan mempelajari berbagai literatur seperti buku-buku cetak, *e-book*, karya tulis yang disajikan dalam bentuk jurnal, laporan penelitian serta konsultasi dengan dosen pembimbing. Kemudian data yang didapatkan akan di analisis dan ditarik kesimpulan.

Langkah-langkah analisis:

1. Mengumpulkan bahan kajian dari literatur-literatur
2. Menyusun konsep atau pengertian Integral-J yang meliputi definisi, teorema serta sifat-sifat Integral-J pada $[a, b]$
3. Menentukan syarat suatu fungsi yang terintegral-J pada $[a, b]$

4. Memberikan contoh fungsi yang terintegral-J dan fungsi yang tidak terintegral-J
5. Membuktikan teorema-teorema Integral-J pada $[a, b]$

1.7 Sistematika Penulisan

Untuk mempermudah pembaca dalam memahami tulisan ini, maka tulisan ini akan dibagi ke dalam empat bab sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN

Dalam bab ini dijelaskan latar belakang masalah, rumusan masalah, tujuan, manfaat, batasan masalah, metodologi penelitian dan sistematika pembahasan.

BAB II KAJIAN TEORI

Dalam bab ini dikemukakan teori-teori yang meliputi definisi, teorema dan contoh, ataupun hal-hal yang mendasari dan mendukung permasalahan yang dikaji.

BAB III PEMBAHASAN

Dalam bab ini dipaparkan hasil-hasil kajian meliputi analisis definisi dengan memaparkan syarat suatu fungsi dapat terintegral-J pada $[a, b]$, identifikasi fungsi yang terintegral-J pada $[a, b]$ dan fungsi yang tidak terintegral-J pada $[a, b]$, pembuktian teorema yang merupakan sifat-sifat integral-J, serta pemberian contoh-contoh.

BAB IV PENUTUP

Dalam bab ini dikemukakan kesimpulan akhir dan diajukan saran.

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Himpunan Denumerable dan Countable

Definisi 2.1.1

Misalkan A himpunan.

(1) *A disebut finite (berhingga) jika* $A = \emptyset$ *atau* $A \approx \mathbb{N}_n, \mathbb{N}_n \coloneqq \{1,2,\dots,n\}$, *untuk suatu* $n \in \mathbb{N}$. *Selain itu A disebut* ***infinite*** *(takberhingga).*

(2) *A disebut* ***denumerable*** *(enumerable) jika* $A \approx \mathbb{N}$.

(3) *A disebut* ***countable*** *jika A finite atau A denumerable*

(Bartle & Sherbert, 2000:18).

Contoh 2.1.2

Misalkan $S = \{1^2, 2^2, 3^2, \dots\}$ Maka fungsi $f(n) = n^2$ adalah fungsi satu-satu dari S pada $\mathbb{N}$. Jadi $S \approx \mathbb{N}$ dan dengan demikian S *countable*. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ adalah *countable*. Untuk menunjukkan bahwa $\mathbb{N} \approx \mathbb{Z}$, dapat juga dilakukan dengan menunjukkan bahwa $\mathbb{Z} \approx \mathbb{N}$. Definisikan fungsi f dari $\mathbb{Z}$ ke $\mathbb{N}$ dengan

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & , (n \text{ genap}) \\ -\dfrac{(n-1)}{2} & , (n \text{ ganjil}) \end{cases}$$

Maka fungsi f adalah bijeksi dari $\mathbb{Z}$ ke $\mathbb{N}$. Dengan demikian, maka $\mathbb{Z} \approx \mathbb{N}$. Jadi $\mathbb{Z}$ adalah *countable*.

2.2 Interval Susut (Nested Intervals)

Teorema 2.2.1

Jika $I_n = [a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$ *dan* $I_n \supseteq I_{n+1}$ *untuk setiap* $n \in \mathbb{N}$ *(interval susut), maka*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$$

$$I_1 \cap I_2 \cap I_3 \dots \cap I_\infty \neq \emptyset$$

yaitu terdapat $\xi \in \mathbb{R}$ *sedemikian hingga* $\xi \in I_n$ *untuk setiap* $n \in \mathbb{N}$. *Selanjutnya, jika panjang* $I_n = b_n - a_n$ *memenuhi* $inf\{b_n - a_n : n \in \mathbb{N}\} = 0$, *maka elemen berserikat* ξ *tersebut tunggal* (Riyanto, 2008:29).

Bukti:

Dibentuk himpunan $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Jelas $A \neq \emptyset$ sebab $a_1 \in A$, dan $A \subset \mathbb{R}$. Himpunan A terbatas ke atas, sebab $I_n \supseteq I_{n+1}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Sehingga diperoleh bahwa

$$a_n \leq b_n$$

untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, yang berarti b_1 batas atas A. Menggunakan Sifat Lengkap $\mathbb{R}$, maka supremum A ada, yaitu terdapat $\xi \in \mathbb{R}$ sedemikian hingga $\xi = \sup A$. Jelas bahwa

$$a_m \leq \xi$$

untuk setiap $m \in \mathbb{N}$. Selanjutnya, untuk sebarang m,$n \in \mathbb{N}$ berlaku

$$a_n \leq a_{n+m} \leq b_{n+m} \leq b_m \;\text{ atau }\; a_n \leq b_m$$

Hal ini berakibat

$$\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \leq b_m \text{ atau } \xi \leq b_m$$

Karena $a_m \leq \xi$ dan $\xi \leq b_m$, maka diperoleh $a_m \leq \xi \leq b_m$ untuk setiap $m \in \mathbb{N}$, berarti $\xi \in I_n = [a_n, b_n]$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Sehingga

$$\xi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$$

$$\xi \in I_1 \cap I_2 \cap I_3 \dots \cap I_\infty$$

yang berakibat $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$. Jika $\eta = \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$, maka dengan cara yang sama (sebelumnya), diperoleh $\eta \in I_m$ untuk setiap $m \in \mathbb{N}$. Sehingga diperoleh

$$\eta \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$$

$$\xi \in I_1 \cap I_2 \cap I_3 \dots \cap I_\infty$$

Akan dibuktikan ketunggalannya, yaitu $\eta = \xi$. Diambil sebarang $\varepsilon > 0$. Jika $\inf\{b_n - a_n : n \in \mathbb{N}\} = 0$, maka terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga

$$0 \leq \eta - \xi \leq bn_0 - an_0 < \varepsilon \text{ atau } 0 \leq \eta - \xi < \varepsilon$$

Karena berlaku untuk sebarang $\varepsilon > 0$, maka $\eta - \xi = 0$ atau $\eta = \xi$. Jadi, terbukti bahwa $\eta = \xi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ tunggal.

2.3 Himpunan Kekompakan

Koleksi himpunan bagian c di dalam R disebut ***Liput*** (cover) himpunan $A \subset \mathbb{R}$ jika $A \subset \bigcup_{u \in c} U$. Setiap $\mathfrak{I} \subset c$ sehingga $\mathfrak{I}$ masih meliput A disebut ***liput-***

bagian (subcover) himpunan *A*. Jika setiap anggota *c* itu merupakan himpunan terbuka maka *c* disebut ***liput terbuka*** (open cover) himpunan *A*.

Definisi 2.3.1

Himpunan $A \subset \mathbb{R}$ *dikatakan kompak* (*compact*) *jika setiap liput terbukanya memuat liput-bagian yang banyak anggotanya hingga* (Bartle, 1964:84).

Contoh 2.3.2

$K = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}$ merupakan himpunan kompak, sebab jika $\mathfrak{I} = \{G_c\,; c \in \lambda\}$, dengan λ himpunan indeks dan G_c himpunan terbuka, merupakan liput terbuka himpunan K, $K \subset \bigcup_{c\in\lambda} G_c$ dapat dipilih liput bagian yang banyaknya anggota hingga, yaitu sebagai berikut. Karena $x_i \in K \subset \bigcup_{c\in\lambda} G_c$ tentu ada himpunan $G_i \in \mathfrak{I}$ sehingga $x_i \in G_i$ untuk setiap *i*. diperoleh $\{G_1, G_2, \dots, G_n\} \subset \mathfrak{I}$ merupakan liput-bagian yang banyak anggotanya hingga dan $K = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\} \subset \bigcup_{i=1}^{n} G_c$.

Teorema 2.3.3

Jika $K \subset \mathbb{R}$ *kompak, maka K tertutup dan terbatas* (Bartle, 1964:84).

Bukti:

Dibuktikan dahulu *K* terbatas. Untuk setiap bilangan $n \in \mathbb{N}$ dibentuk himpunan terbuka $H_n = (-n,n)$. Jelas bahwa $\mathfrak{I} = \{H_n\,; n \in \mathbb{N}\}$ merupakan liput terbuka *K* sebab H_n terbuka untuk setiap *n* dan $K \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$. Karena *K* kompak tentu ada $c \subset \mathfrak{I}$ yang banyak anggotanya hingga, tulis

$$c = \{H_1, H_2, \dots, H_n\}$$

sehingga

$$K \subset H_{n_1} \cup H_{n_2} \cup \dots \cup H_{n_p}$$

Namakan

$$m = \text{maks}\ \{n_1, n_2, \dots, n_p\}$$

Diperoleh

$$K \subset H_{n_1} \cup H_{n_2} \cup \dots \cup H_{n_p} = H_m = (-m, m)$$

sehingga K terbatas. Lebih lanjut diperlihatkan bahwa K tertutup atau K^c terbuka. Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dan $u \in K^c$ dibentuk himpunan $G_n = \left\{g \in \mathbb{R};\ |g-u| > \frac{1}{n}\right\}$. Mudah dipahami bahwa G_n terbuka untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dan $\{G_n\ ; n = 1,2,\dots\}$ merupakan liput terbuka himpunan kompak K. oleh karena itu ada terdapat bilangan asli m (seperti diatas) sehingga $c \in I_k \subset (c-\delta_0, c+\delta_0) \subset G$. Hal ini berakibat G meliput $I_k \cap K$, suatu kontradiksi dan bukti selesai.

Teorema 2.3.4 (Teorema Heine-Borel)

$K \subset \mathbb{R}$ kompak jika dan hanya jika K tertutup dan terbatas (Bartle, 1964:85).

Bukti:

(Syarat Perlu) terbukti berdasarkan teorema 2.3.3

(Syarat cukup) Andaikan tedapat liput terbuka $\mathfrak{I}$ himpunan tertutup dan terbatas K yang tak mempunyai liput bagian yang banyak anggotanya hingga. Karena K terbatas tentu ada bilangan nyata r $>$ 0 sehingga

$$K \subset [-r, r] = I_1$$

Diambil I_1 menjadi dua selang tertutup $I_1{}'$ dan $I_1"$ sehingga $I_1{}' \cap I_1"$ mempunyai satu anggota. Sehingga $\mathfrak{I}$ merupakan liput terbuka $K \cap I_1{}'$ maupun $K \cap I_1"$. Tentu tidak terdapat liput bagian yang banyak anggotanya hingga yang masih meliput $K \cap I_1{}'$; demikian pula untuk $K \cap I_1"$. Sebab jika ada untuk keduanya, gabungan dua liput bagian itu mednjadi liput bagian K yang banyak anggotanya hingga. Jadi paling tidak salah satu $K \cap I_1{}'$ atau $K \cap I_1"$ yang tak terliput oleh liput bagian yang banyaknya anggota hingga. Katakana yang dimaksud itu $K \cap I_1{}'$ dan ditulis $I_2 = I_1{}'$. Potong I_2 menjadi dua selang tertutup $I_2{}'$ dan $I_2"$ dengan $I_2{}' \cap I_2"$ sehingga sisngleton. Proses selanjutnya seperti di atas dilakukan terus menerus. $\{I_n\}$merupakan barisan selang tertutup yang mepunyai sifat-sifat $I_{n+1} \subset I_n$ dan $\lim_{n\to\infty}|I_n| = 0$. Menurut teorema selang susut, terdapat tepat satu titik $c \in \mathbb{R}$ sehingga $c \in I_n$ untuk setiap n . selanjutnya c merupakan titik limit himpunan K, sebab untuk setiap bilangan r > 0 terdapat I_m sehingga

$$c \in I_m \subset (c - r, c + r)$$

dan $\mathfrak{I}$ tak mempunyai liput bagian yang bayaknya hingga yang masih meliput $I_m \subset K$. Hasil ini berarti

$$K \cap (c - r, c + r) - \{c\} \neq \emptyset$$

atau c merupakan titik limit himpunan K yang tertutup. Sehingga $c \in K$. Selanjutnya, karena $\mathfrak{I}$ liput terbuka himpunan K tentu ada $G \in \mathfrak{I}$ sehingga $c \in G$ karena G terbuka tentu ada r_0 sehingga

$$N_r(c) = (c - r_0, c + r_0) \subset G$$

dan karena $\lim_{n\to\infty}|I_n| = 0$, m,aka terdapat bilangan asli k sehingga

$$c \in I_k \subset (c - r_0, c + r_0) \subset G$$

Sehingga berakibat G meliputi $I_k \cap K$, suatu kontradiksi dan bukti selesai.

2.4 Barisan dan Limit Barisan

Definisi 2.4.1

Barisan bilangan Real adalah suatu fungsi yang didefinisikan pada himpunan $\mathbb{N}$ *dengan range dalam* $\mathbb{R}$ (Riyanto, 2008:38).

Dengan kata lain, barisan dalam $\mathbb{R}$ mengawankan setiap bilangan asli n=1,2,3,… kepada suatu bilangan real. Jika $X : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ merupakan barisan, maka biasanya dituliskan dengan nilai dari X pada n dengan notasi x_n. Barisan sering dinotasikan dengan X atau (x_n) atau $(x_n : n \in \mathbb{N})$ atau $\{x_n\}$ atau $\{x_n\}_{n\geq 1}$. Apabila diketahui suatu barisan Y, artinya $Y = (y_k)$.

Contoh 2.4.2

1. Barisan (x_n) dengan x_n=$(-1)^n$ adalah barisan -1,1,-1,1,-1,1,…, $(-1)^n$,…
2. Barisan (x_n) dengan $x_n = \frac{1}{2^n}$, $\left(\frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N}\right) = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$

Definisi 2.4.3 (Limit Barisan)

Diketahui (x_n) *barisan bilangan real. Suatu bilangan real* x *dikatakan limit barisan* (x_n) *jika untuk setiap* $\varepsilon > 0$ *terdapat* $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *sedemikian hingga untuk setiap* $n \in \mathbb{N}$ *dengan* $n \geq K(\varepsilon)$ *berlaku* $|x_n - x| < \varepsilon$ (Riyanto, 2008:39).

Jika x adalah limit suatu barisan (x_n), maka dikatakan (x_n) **konvergen** ke x, atau (x_n) mempunyai limit x. Dalam hal ini ditulis $\lim_{n\to\infty}(x_n) = x$ atau $\lim(x_n) = x$ atau $x_n \to x$. Jika (x_n) tidak konvergen, maka (x_n) dikatakan **divergen**.

Teorema 2.4.4

Jika barisan (x_n) konvergen, maka (x_n) mempunyai paling banyak satu limit (limitnya tunggal) (Riyanto, 2008:39).

Bukti:

Andaikan $\lim_{n\to\infty}(x_n) = x'$ dan $\lim_{n\to\infty}(x_n) = x''$ dengan $x' \neq x''$. Maka untuk sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat K' sedemikian hingga $|x_n - x'| < \frac{\varepsilon}{2}$ untuk setiap $n \geq K'$, dan terdapat K'' sedemikian hingga $|x_n - x''| < \frac{\varepsilon}{2}$ untuk setiap $n \geq K''$. Dipilih $K = \text{maks}\{K', K''\}$. Menggunakan Ketaksamaan Segitiga, maka untuk $n \geq K$ diperoleh

$$\begin{aligned} |x' - x''| &= |x' - x_n + x_n - x''| \\ &\leq |x' - x_n| + |x'' - x_n| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Karena berlaku untuk setiap $\varepsilon > 0$,maka $x' - x'' = 0$ yang berarti $x' = x''$. Kontradiksi dengan pengandaian. Jadi, terbukti bahwa limitnya tunggal.

Teorema 2.4.5

Jika (x_n) barisan bilangan real dan $x \in \mathbb{R}$, maka empat pernyataan berikut ekivalen.

a. *Barisan* (x_n) *konvergen ke* x.

b. *Untuk setiap* $\varepsilon > 0$ *terdapat* $K \in \mathbb{N}$ *sedemikian hingga untuk setiap* $n \geq K$ *berlaku* $|x_n - x| < \varepsilon$.

c. *Untuk setiap* $\varepsilon > 0$ *terdapat* $K \in \mathbb{N}$ *sedemikian hingga untuk setiap* $n \geq K$ *berlaku* $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$.

d. *Untuk setiap persekitaran* $V_\varepsilon(x)$ *dari* x, *terdapat* $K \in \mathbb{N}$ *sedemikian hingga untuk setiap* $n \geq K$ *berlaku* $x_n \in V_\varepsilon(x)$ (Riyanto, 2008:40).

Bukti:

(a) $\Rightarrow$ (b) Jelas (dari definisi)

(b) $\Rightarrow$ (c) $|x_n - x| < \varepsilon \iff -\varepsilon < x_n - x < \varepsilon \iff x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$.

(c) $\Rightarrow$ (d) $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon \iff x_n \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \iff x_n \in V_\varepsilon(x)$.

(d) $\Rightarrow$ (a) $x_n \in V_\varepsilon(x) \iff x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon \iff |x_n - x| < \varepsilon$.

Contoh 2.4.6

Tunjukkan bahwa $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Penyelesaian:

Akan ditunjukkan bahwa $(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ konvergen ke 0, yaitu $\frac{1}{n} \to 0$. Harus dibuktikan bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq K(\varepsilon)$ berlaku $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$.

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$, maka $\frac{1}{\varepsilon} > 0$. Menurut sifat Archimedes, maka terdapat $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $\frac{1}{\varepsilon} < K(\varepsilon)$, atau $\frac{1}{K(\varepsilon)} < \varepsilon$.

Akibatnya untuk setiap $n \geq K(\varepsilon)$ berlaku $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{K(\varepsilon)} < \varepsilon$.

Jadi, terbukti bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq K(\varepsilon)$ berlaku $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$, atau $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

2.5 Limit Fungsi dan Kekontinuan

Definisi 2.5.1

Misalkan fungsi $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dan $\in A$. Suatu bilangan Real L disebut limit f di c jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ sedemikian hingga jika $x \in A$ dan $0 < |x - c| < \delta$ maka

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

Jika L adalah limit dari fungsi f di c maka dapat dikatakan f konvergen ke L di c. Ditulis $L = lim_{x\to c} f(x)$ atau $L = lim_{x\to a} f$ (Bartle & Sherbert, 2000:98).

Contoh 2.5.2

Tunjukkan bahwa $\lim_{x\to c} k = k$, dengan k konstan dan $c \in \mathbb{R}$.

Penyelesaian:

Misal $f(x) \coloneqq k$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$, akan ditunjukkan bahwa $\lim_{x\to c} k = k$. Diberikan $\varepsilon > 0$ pilih $\delta \coloneqq 1$ sedemikian hingga $0 < |x - c| < 1$ maka $|f(x) - k| = |k - k| = 0 < \varepsilon$. Karena untuk sebarang $\varepsilon > 0$, dari definisi 2.5.1 didapatkan $\lim_{x\to c} f(x) = k$.

Teorema 2.5.3

Jika fungsi $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dan $g: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, untuk setiap $c \in \mathbb{R}$ berlaku

a. $\lim_{x \to c} k\, f(x) = k \lim_{x \to c} f(x)$.

b. $\lim_{x \to c} f(x) + g(x) = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x)$

(Setiawan, 2004:4).

Bukti:

a. Misalkan $\lim_{x \to c} f(x) = L$

Jika diberikan $\varepsilon > 0$, kita harus mendapatkan $\delta > 0$ sedemikian hingga $0 < |x - c| < \delta$ berakibat $|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{|k|}$ (mengingat $\frac{\varepsilon}{|k|} > 0$ juga).

Sekarang dengan telah ditetapkan δ, kita dapat menyatakan bahwa untuk setiap x yang terletak $0 < |x - c| < \delta$ berlaku :

$|k\, f(x) - kL| = |k||f(x) - L| < |k| \frac{\varepsilon}{|k|} = \varepsilon$. Ini menunjukkan bahwa:

$\lim_{x \to c} k\, f(x) = k\, L = k \lim_{x \to c} f(x)$.

b. Andaikan $\lim_{x \to c} f(x) = L$ dan $\lim_{x \to c} g(x) = M$.

Jika ε sebarang bilangan positif yang diberikan, maka $\frac{\varepsilon}{2}$ adalah positif.

Karena $\lim_{x \to c} f(x) = L$, maka terdapat suatu bilangan posotif δ_1, sedemikian hingga: $0 < |x - c| < \delta_1 \;\; \Rightarrow \;\; |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Karena $\lim_{x \to c} g(x) = M$, maka terdapat suatu bilangan positif δ_2, sedemikian hingga: $0 < |x - c| < \delta_2 \;\; \Rightarrow \;\; |f(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Pilih $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, yaitu pilih δ sebagai yang terkecildi antara δ_1 dan δ_2, maka $0 < |x - c| < \delta$ menunjukkan

$$\left|\left(f(x) + g(x)\right) - (L + M)\right| = |(f(x) - L) + (g(x) - M)|$$

$$\leq |f(x) - L| + |g(x) - M|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Jadi $\lim_{x\to c} (f(x) + g(x))$ = L + M = $\lim_{x\to c} f(x)$ + $\lim_{x\to c} g(x)$.

Definisi 2.5.4

Fungsi $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dikatakan

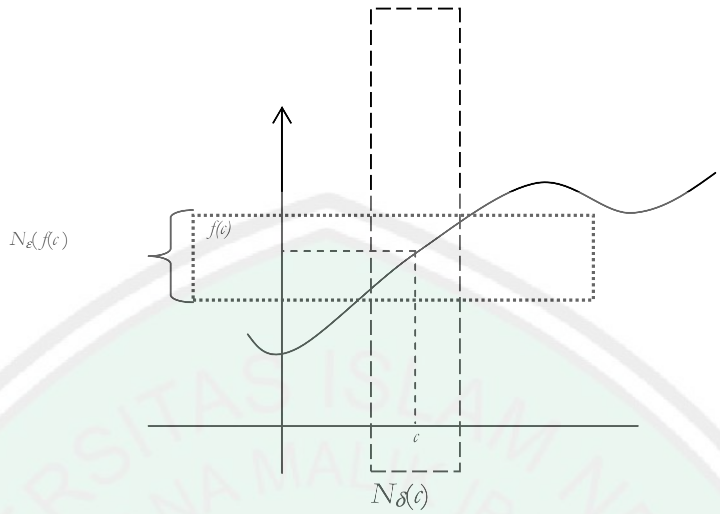
(i) ***Kontinu di*** *(continous at) jika $c \in A$ Fungsi $f : A \to \mathbb{R}$ dikatakan kontinu di $c \in A$ dengan c titik limit A, jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ sehingga jika $x \in A \cap N_\delta(c)$ dan $|x - c| < \delta$ berakibat $f(x) \in N_\varepsilon(f(c))$ maka*

$$|f(x) - f(c)| < \varepsilon$$

atau

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$$

(ii) *Fungsi f dikatakan* ***kontinu pada*** *(continous on) $B \subset A$ jika f kontinu di setiap titik di B* (Bartle & Sherbert, 2000:120).



Gambar 2.5.4.1 Ilustrasi Kontinu

Dari definisi tersebut secara implisit mensyaratkan tiga hal agar fungsi f kontinu di c, yaitu:

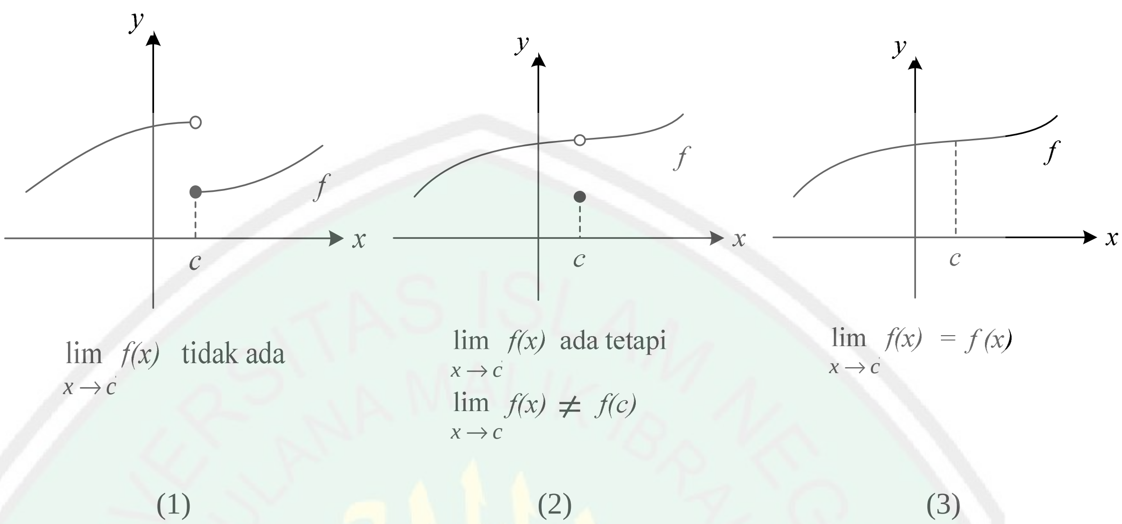
(i). $f(c)$ ada atau terdefinisi

(ii). $\lim_{x \to c} f(x)$ ada, dan

(iii). $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

Jika salah satu dari syarat ini tidak terpenuhi, maka f tak kontinu (diskontinu) di c. Jadi fungsi yang diwakili oleh grafik pertama dan kedua di atas tak kontinu di c, tetapi kontinu di titik-titik lain di daerah asalnya (Zuhair, 2009:2).

Berikut disajikan beberapa grafik, tetapi hanya grafik (3) yang menunjukkan kekontinuan di c.



Gambar 2.5.4.2 Ilustrasi Fungsi Kontinu dan Tidak Kontinu

Contoh 2.5.5

a. Fungsi f dengan rumus $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$ diskontinu di $x = 1$ karena $f(1)$ tidak terdefinisi.

b. Fungsi konstan $f(x) \coloneqq k$ adalah kontinu pada $\mathbb{R}$.

Dari Contoh 2.5.2 jika $c \in \mathbb{R}$ $\lim_{x \to c} f(x) = k$. Karena $f(c) = k$ maka $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$. Sehingga f kontinu di setiap titik $c \in \mathbb{R}$. Jadi f kontinu pada $\mathbb{R}$ (Bartle & Sherbert, 2000:121).

Teorema 2.5.6

Misalkan fungsi f dan g kontinu di suatu $c \in A$ dan $k \in \mathbb{R}$ maka

a. $f + g$ *kontinu di* c

b. kf *kontinu di* c (Bartle & Sherbert, 2000:125).

Bukti:

a. Karena f dan g kontinu di c maka

$f(c) = \lim_{x \to c} f$ dan $g(c) = \lim_{x \to c} g$

$(f+g)(c) = f(c) + g(c) = \lim_{x \to c} f + \lim_{x \to c} g = \lim_{x \to c}(f+g)$

Jadi $f + g$ kontinu di c.

b. Karena f kontinu di c dan $k \in \mathbb{R}$ maka

$f(c) = \lim_{x \to c} f$

$(kf)(c) = k\, f(c) = k \lim_{x \to c} f = \lim_{x \to c} kf$

Jadi kf kontinu di c.

Teorema 2.5.7

Misalkan fungsi f dan g kontinu pada $A \subseteq \mathbb{R}$ dan $k \in \mathbb{R}$ maka

a. $f + g$ *kontinu pada* A

b. kf *kontinu pada* A (Bartle & Sherbert, 2000:126).

Bukti:

a. Seperti pembuktian pada teorema 2.5.6 dan karena f dan g kontinu di setiap titik di A atau $\forall\, c \in A$ maka $f + g$ kontinu di setiap titik $c \in A$.

Jadi $f + g$ kontinu pada A.

b. Seperti pembuktian pada teorema 2.5.6, karena f kontinu di setiap titik di atau $\forall\, c \in A$ dan fungsi konstan k kontinu pada $\mathbb{R}$ (Contoh 2.5.5) maka kf kontinu di setiap titik $c \in A$.

Jadi kf kontinu pada A.

2.6 Kontinuitas dalam Interval

Definisi 2.6.1

Fungsi $f(x)$ *dikatakan kontinu pada interval buka* (a, b) *bila* $f(x)$ *kontinu pada setiap titik di dalam interval tersebut. Sebuah fungsi* $f(x)$ *dikatakan kontinu di dalam sebuah interval* (a, b) *jika dan hanya jika* $lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ *untuk* $a < c < b$ (Murray, 1984:26).

Sedangkan $f(x)$ *dikatakan kontinu pada interval tutup* $[a, b]$ *bila :*

1. $f(x)$ *kontinu pada* (a, b)
2. $f(x)$ *kontinu kanan di* $x = a$ $(\, lim_{x \to a^+} f(x) = f(a))$
3. $f(x)$ *kontinu kiri di* $x = b$ $(\, lim_{x \to b^-} f(x) = f(b))$

Bila $f(x)$ *kontinu untuk setiap nilai* $x \in \mathbb{R}$ *maka dikatakan* $f(x)$ *kontinu di mana-mana.*

2.7 Fungsi Monoton

Jika suatu fungsi yang daerah asalnya berbentuk selang, maka daerah nilainya juga akan berbentuk selang. Kemonotonan fungsi pada suatu selang dapat dilihat dengan membandingkan nilainya di setiap titik pada selang itu. Secara intuitif, suatu fungsi yang nilainya semakin besar adalah monoton naik, sedangkan fungsi yang nilainya semakin kecil adalah monoton turun. Selain itu dikenal juga fungsi yang monoton tak turun dan monoton tak naik. Kemonotonan fungsi pada suatu selang didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.7.1

Fungsi f *dikatakan:*

- *Monoton Naik pada selang I jika* $u < v \;\; \Rightarrow \;\; f(u) < f(v), \; \forall\, u, v \in I$

- *Monoton Tak Turun pada selang I jika* $u < v \;\Rightarrow\; f(u) \le f(v)$, $\forall\, u, v \in I$
- *Monoton Turun pada selang I jika* $u < v \;\Rightarrow\; f(u) > f(v)$, $\forall\, u, v \in I$
- *Monoton Tidak Naik pada selang I jika* $u < v \;\Rightarrow\; f(u) \ge f(v)$, $\forall\, u, v \in I$ (Martono, 1999:65).

Contoh 2.7.2

1. Fungsi $f(x) = x^3$ monoton naik pada $\mathbb{R}$, karena $u < v \;\Rightarrow\; u^3 < v^3$, $\forall\, u, v \in I$
2. Fungsi $f(x) = \frac{1}{x}$ monoton turun pada $\mathbb{R}$, karena $u < v \;\Rightarrow\; \frac{1}{u} < \frac{1}{v}$, $\forall\, u, v \in I$

2.8 Turunan Fungsi

Istilah lain dari turunan suatu fungsi adalah diferensial. Proses penurunan suatu fungsi disebut diferensiasi dan fungsi yang dapat diturunkan disebut *differentiable*. Dalam notasi matematika, salah satu simbol yang umumnya dipakai untuk menyatakan turunan dari sebuah fungsi adalah *apostrofi*, maka turunan dari f adalah f'. Pengertian turunan suatu fungsi disusun berdasarkan pengertian limit suatu fungsi di suatu titik. Sebagai akibatnya suatu fungsi memiliki sifat-sifat khusus di suatu titik jika ia mempunyai turunan di titik itu.

Definisi 2.8.1

Jika diketahui fungsi $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $c \in I$. *Suatu bilangan Real L adalah turunan dari* f *di* c, *jika untuk setiap bilangan* $\varepsilon > 0$ *terdapat bilangan*

$\delta > 0$ *sedemikian hingga jika* $x \in I$ *dan* $0 < |x - c| < \delta$ *maka*

$$\left|\frac{f(x) - f(c)}{x - c} - L\right| < \varepsilon$$

Dengan kata lain f *differentiable di* c, *dan dapat ditulis*

$$f^{'}(c) = lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$ (Bartle & Sherbert, 2000:158).

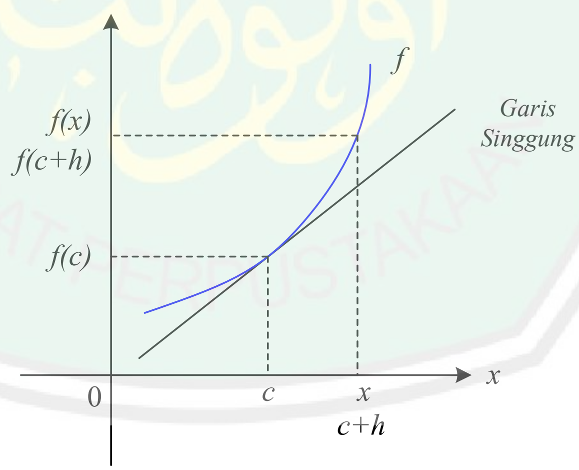
Jadi, menurut definisi tersebut $f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$ jika limitnya ada.

Fungsi f dikatakan mempunyai turunan (*differentiable*) di c jika $f'(c)$ ada.

Dengan penggantian $x = c + h$, yang mengakibatkan $x \to c \Leftrightarrow h \to 0$ dan $x - c = h$ turunan fungsi f di c dapat dituliskan dalam bentuk:

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$ (Martono, 1999:84).

Gambar berikut memperlihatkan suatu geometri turunan fungsi f di titik c.



Gambar 2.8.1.1 Ilustrasi Turunan Fungsi *f* di *c*

Contoh 2.8.2

Jika $f(x) = x^2 - 3x$, hitunglah $f'(2)$.

Penyelesaian:

$$f'(2) = \lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-3x+2}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x-1)}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2} (x-1) = 1$$

Cara Lain :

$$f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^2-3(2+h)+2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^2+h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} (h+1) = 1$$

Teorema 2.8.3

Jika f differentiable di c maka f kontinu di c (Parzynski & Zipse, 1982:128).

Bukti:

Dari definisi 2.5.4 bahwa f kontinu di c jika $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ atau ekivalen dengan $\lim_{x\to c} [f(x) - f(c)] = 0$. Diasumsikan f *differentiable* di c, maka $\lim_{x\to c} [f(x) - f(c)] = \lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \cdot (x-c)$

$$= \lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \cdot \lim_{x\to c} (x-c)$$

$$= f'(c). 0$$

$$= 0$$

Jadi terbukti jika f *differentiable* di c maka f kontinu di c.

2.9 Integral Newton

Integral Newton merupakan konsep integral yang pertama kali dikemukakan. Di sini akan dibahas definisi integral untuk fungsi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ yang terbatas.

Definisi 2.9.1

Suatu fungsi dikatakan dapat diintegralkan dengan integral Newton disebut 'Newton Integrable' atau terintegral-Newton pada $[a, b]$ *jika terdapat fungsi kontinu F sedemikian hingga* $F'(x) = f(x)$ *untuk setiap* x *dalam* $[a, b]$. *Dapat dituliskan*

$$(N)\int_a^b f = F(b) - f(a) \text{(Naak-In, 1976:2)}$$

Misal terdapat fungsi kontinu yang lain G sedemikian hingga untuk setiap x dalam $[a, b]$ maka $G'(x) = f(x)$. Sehingga

$$(F - G)'(x) = F'(x) - G'(x) = 0$$

dan $F(x) - G(x)$ merupakan suatu fungsi konstan.Oleh karena itu

$$F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$$

Jadi dapat dikatakan setiap fungsi yang kontinu adalah *Newton Integrable*.

Contoh 2.9.2

Selesaikan $\int_0^1 x\sqrt{x^2 + 1}\, dx$

Penyelesaian:

Misal $u = x^2 + 1$. Maka $du = 2x\, dx$

Sehingga $\int_0^1 x\sqrt{x^2 + 1}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{u}\, du$

$$= \frac{1}{3}\ u\sqrt{u}\ \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{3}\ (x^2+1)\sqrt{x^2+1}\ \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{3}\ \left[\left((1^2+1)\sqrt{1^2+1}\right) - \left((0^2+1)\sqrt{0^2+1}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{3}\ (2\sqrt{2}-1).$$

2.11 Kewajiban Mempelajari Ilmu Matematika

Kewajiban menuntut ilmu harus dilaksanakan oleh setiap muslim dan muslimah karena *pertama*, **Fardhu 'Ain**, yaitu kewajiban menuntut ilmu yang melekat pada diri sendiri sehingga wajib melaksanakannya. Ada ilmu-ilmu dalam ajaran Islam yang wajib bagi setiap muslim dan muslimah mempelajari sekaligus mengamalkannya. Seperti ilmu yang berkaitan dengan ibadah dan aqidah/akhlak. Setelah belajar dan mengamalkan ilmu-ilmu yang berkaitan dengan masalah ibadah dan aqidah/akhlak kemudian bagaimana membentuk pribadi yang Islami, membangun keluarga yang sakinah dan cara berinteraksi dalam bertetangga dan bermasyarakat agak kehidupan itu benar dan sesuai dengan tuntunan ajaran Islam, sehingga harus terus belajar supaya mengetahui ilmunya. Baru setelah itu seorang muslim dan muslimah menambah pengetahuaan lainnya yang berkaitan dengan kebutuhan atau disiplin ilmunya.

Setiap manusia tentu memiliki kekhususan bidang profesi dalam kehidupannya. Maka diwajibkan bagi seorang muslim memperdalam yang berhubungan dengan keahlian atau tugas kesehariannya itu sehingga diharapkan setiap aktivitasnya sesuai dengan ajaran Islam dalam rangka ibadah kepada Allah SWT. Seperti dalam surat *An-Nahl* ayat 43 sebagai berikut:

...فَسْـَٔلُوٓا۟ أَهْلَ ٱلذِّكْرِ إِن كُنتُمْ لَا تَعْلَمُونَ ﴿٤٣﴾

Artinya: *"… maka bertanyalah kepada orang yang mempunyai pengetahuan jika kamu tidak mengetahui." (QS. An-Nahl : 43)*

Kedua, **Fardhu Kifayah**, yaitu kewajiban yang tidak semua orang harus mempelajarinya, tetapi harus ada yang mewakilinya agar kewajiban secara pribadi menjadi gugur, meski secara pribadi dia tetap belajar menekuni spesialisasinya sesuai minat dan kecenderungan pribadinya. Apakah semua ilmu wajib dipelajari oleh manusia? Jawabnya, yang wajib dipelajari guna diamalkan adalah segala ilmu yang bermanfaat untuk memikul tanggung-jawab, baik untuk kehidupan di dunia maupun di akherat kelak sesuai dengan maksud dan tujuan penciptaannya baik sebagai khalifah di muka bumi maupun untuk mengabdi kepada Penciptanya.

Ada beberapa ilmu yang dikategorikan fardhu kifayah untuk mempelajarinya. Jika salah seorang atau sejumlah orang sudah mempelajarinya maka kewajiban bagi yang lainnya menjadi gugur. Sebaliknya, jika tidak ada seorang muslim pun yang mempelajarinya semua ikut menanggung dosanya terutama pemerintah.

Allah berfirman dalam surat *At-Taubah* ayat 122 sebagai berikut:

وَمَا كَانَ ٱلْمُؤْمِنُونَ لِيَنفِرُوا۟ كَآفَّةً ۚ فَلَوْلَا نَفَرَ مِن كُلِّ فِرْقَةٍ مِّنْهُمْ طَآئِفَةٌ لِّيَتَفَقَّهُوا۟ فِى ٱلدِّينِ وَلِيُنذِرُوا۟ قَوْمَهُمْ إِذَا رَجَعُوٓا۟ إِلَيْهِمْ لَعَلَّهُمْ يَحْذَرُونَ ﴿١٢٢﴾

Artinya: *"Tidak sepatutnya bagi orang-orang yang mukmin itu pergi semuanya (ke medan perang). Mengapa tidak pergi dari tiap-tiap golongan di antara mereka beberapa orang untuk memperdalam pengetahuan mereka tentang agama dan untuk memberi peringatan kepada kaumnya apabila mereka telah kembali kepadanya supaya mereka itu dapat menjaga dirinya." (QS. At-Taubah : 122)*

Yang dimaksud fardhu kifayah di sini adalah tiap sesuatu yang dibutuhkan oleh umat islam dalam agamanya atau dunianya dengan jalan mendalami spesialisasi dalam ilmu-ilmu alam seperti pertanian, perdagangan, pendidikan, kedokteran, politik, teknik, olahraga, astronomi, matematika, kimia, fisika, biologi, geologi, budaya, kemiliteran dan profesi atau disiplin ilmu lainnya yang dibutuhkan oleh kehidupan masyarakat di abad modern ini. Jadi mempelajari ilmu matematika adalah fardhu kifayah, termasuk cabang keilmuan di dalamnya seperti analisis, aljabar, geometri, dan sebagainya.

Dari sini dipahami bahwa ilmu yang dibutuhkan dalam menegakkan segala urusan dunia bernilai fardhu kifayah. Jika semua hal ini tidak ada yang menguasainya maka akan muncullah masalah atau kesusahan bagi mereka. Tetapi bila telah ada seseorang yang melakukannya maka gugurlah kewajiban itu. Sesungguhnya Islam adalah agama yang menghargai ilmu pengetahuan. Dalam Islam, menuntut ilmu itu hukumnya wajib, bahkan Allah SWT dalam Al-Qur'an memberikan penghormatan dengan meninggikan orang-orang yang berilmu dibandingkan orang-orang awam beberapa derajat. (Kurnaedi, 2009)

Dalam Al-Qur'an surat Al-Mujadillah ayat 11 disebutkan bahwa

...يَرۡفَعِ ٱللَّهُ ٱلَّذِينَ ءَامَنُواْ مِنكُمۡ وَٱلَّذِينَ أُوتُواْ ٱلۡعِلۡمَ دَرَجَٰتٖۚ ﴿١١﴾

Artinya: *"…Niscaya Allah akan meninggikan orang-orang yang beriman di antaramu dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat" (QS. Al-Mujaadilah : 11)*

Jika kita ingin selamat di dunia harus dengan ilmu. Jika kita ingin selamat di akherat haruslah dengan ilmu. Jika kita ingin selamat di dunia dan akherat juga harus dengan ilmu. Untuk itu kita tetap harus belajar tentang Islam, belajar Islam secara benar. Allah SWT berfirman:

قُلۡ هَلۡ يَسۡتَوِي ٱلَّذِينَ يَعۡلَمُونَ وَٱلَّذِينَ لَا يَعۡلَمُونَۗ إِنَّمَا يَتَذَكَّرُ أُوْلُواْ ٱلۡأَلۡبَٰبِ ٩

Artinya: *"… Katakanlah : Adakah sama orang-orang yang tidak mengetahui dengan orang-orang yang mengetahui? Sesungguhnya orang-orang yang berakallah yang dapat menerima pelajaran" (QS. Az-Zumar : 9)*

2.12 Konsep Matematika dalam Al-Qur'an

Matematika merupakan ilmu pengetahuan dasar yang dibutuhkan semua manusia dalam kehidupan sehari-hari baik secara langsung maupun tidak langsung. Matematika merupakan ilmu yang tidak terlepas dari alam dan agama semua itu kebenarannya bias kita lihat dalam Al-Qur'an. Alam semesta ini banyak mengandung rahasia tentang fenomena-fenomena alam. Namun keberadaan fenomena-fenomena itu sendiri hanya dapat diketahui oleh orang-orang yang benar mengerti arti kebesaran Allah SWT (Rahman, 2007:1).

Sumber studi matematika, sebagaimana sumber ilmu pengetahuan dalam islam, adalah konsep tauhid, yaitu Ke-Esaan Allah. Namun, Al-Qur'an tidak mengangkat metode baru atau teknik baru dalam masalah ini, melainkan telah menunjukkan tentang adanya eksistensi dari sesuatu yang ada di balik alam semesta dengan cara yang sama seperti yang ia tunjukkan mengenai eksistensi dari alam semesta itu sendiri (Rahman,1992:15).

Alam semesta memuat bentuk-bentuk dan konsep matematika, meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Alam semesta serta segala isinya diciptakan Allah dengan ukuran – ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan, dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi (Abdusysyakir,2007:79).

Dalam Al-Qur'an surat Al-Qamar ayat 49 disebutkan

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَـٰهُ بِقَدَرٍ ﴿٤٩﴾

Artinya: *"…Sesungguhnya kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran." (QS. Al Qamar : 49)*

Demikian juga dalam Al Quran surat Al-Furqan ayat 2

...وَخَلَقَ كُلَّ شَيْءٍ فَقَدَّرَهُۥ تَقْدِيرًا ﴿٢﴾

Artinya: *"...Dan Dia Telah menciptakan segala sesuatu, dan Dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya." (QS. Al Furqan : 2)*

Semua yang ada di alam ini ada ukurannya, ada hitungan-hitungannya, ada rumusnya, atau ada persamaannya. Namun rumus-rumus yang ada sekarang bukan diciptakan manusia sendiri, tetapi sudah disediakan. Manusia hanya menemukan dan menyimbolkan dalam bahasa matematika. (Abdusysyakir, 2007: 80). Jadi matematika sebenarnya telah ada sejak zaman dahulu, manusia hanya menyimbolkan dari fenomena-fenomena yang ada dalam kehidupan sehari-hari.

Salah satu contohnya seperti yang terkandung dalam surat Al Baqarah ayat 261 berikut.

مَّثَلُ ٱلَّذِينَ يُنفِقُونَ أَمْوَٰلَهُمْ فِى سَبِيلِ ٱللَّهِ كَمَثَلِ حَبَّةٍ أَنۢبَتَتْ سَبْعَ سَنَابِلَ فِى كُلِّ
سُنۢبُلَةٍ مِّا۟ئَةُ حَبَّةٍ ۗ وَٱللَّهُ يُضَٰعِفُ لِمَن يَشَآءُ ۗ وَٱللَّهُ وَٰسِعٌ عَلِيمٌ ﴿٢٦١﴾

Artinya: *"Perumpamaan (nafkah yang dikeluarkan oleh) orang-orang yang menafkahkan hartanya di jalan Allah adalah serupa dengan sebutir benih yang menumbuhkan tujuh bulir, pada tiap-tiap bulir seratus biji. Allah melipat gandakan (ganjaran) bagi siapa yang dia kehendaki. dan Allah Maha luas (karunia-Nya) lagi Maha Mengetahui." (QS. Al -Baqarah : 261)*

Pada QS. Al Baqarah ayat 261 tersebut, nampak jelas bahwa Allah menetapkan pahala menafkahkan harta di jalan Allah dengan rumus matematika. Pahala menafkahkan harta adalah tujuh ratus kali. Secara matematika, diperoleh persamaan

$$y = 700\,x$$

dengan x menyatakan nilai nafkah dan y menyatakan nilai pahala yang diperoleh (Abdusysyakir, 2007: 81). Sebenarnya sejak dahulu dalam Al-Qur'an telah terkandung konsep-konsep matematika, hanya saja hanya orang-orang yang berilmulah yang dapat mengambil pelajaran.

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Definisi Integral-J

Integral-J didefinisikan setelah munculnya konsep-konsep integral, salah satunya yakni integral-Newton. Dalam hal ini akan dikemukakan definisi Integral-J suatu fungsi $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Definisi 3.1.1

Suatu fungsi f dikatakan terintegral-J pada $[a,b]$ jika terdapat suatu fungsi F kontinu pada $[a,b]$ sedemikian hingga $F'(x) = f(x)$ (hampir di mana-mana).

Integral-J dari suatu fungsi f pada $[a,b]$ didefinisikan:

$$(J)\int_a^b f = F(b) - F(a) \text{ (Naak-In, 1972:5).}$$

Suatu fungsi yang dapat diintegralkan dengan J-Integral disebut *J-integrable* atau terintegral-J. Fungsi f adalah fungsi yang terintegral-J dan fungsi F disebut fungsi primitif dari f.

Dari definisi di atas dapat dituliskan bahwa suatu fungsi f dapat dikatakan terintegral-J pada $[a,b]$ jika memenuhi syarat:

a. Terdapat fungsi F kontinu pada $[a,b]$, di mana $F'(x) = f(x)$

b. $F'(x) = f(x)$ hampir di mana-mana

Contoh 3.1.2

1. Tunjukkan apakah $f(x) \coloneqq x^2$ terintegral-J pada $[0,1]$?

   Penyelesaian:

a. Akan ditunjukkan apakah terdapat fungsi kontinu F pada [0,1].

Karena $F'(x) = f(x)$ (dari definisi 3.1.1) diperoleh $F'(x) = x^2$

Sehingga $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \boldsymbol{C}$.

"Fungsi $F(x)$ kontinu pada $[a,b]$ jika $\lim_{x\to c} F(x) = F(c)$ untuk $a < c < b$; $\lim_{x\to a^+} F(x) = F(a)$ dan $\lim_{x\to b^-} F(x) = F(b)$"(Definisi 2.6.1).

(i) Akan ditunjukkan bahwa $\lim_{x\to c} F(x) = F(c)$

Ambil sebarang c di mana $0 < c < 1$.

Misal $c = \frac{1}{2}$ di mana $0 < \frac{1}{2} < 1$, maka $\lim_{x\to c} \frac{1}{3}x^3 + \boldsymbol{C} = \frac{1}{3}(c)^3 + \boldsymbol{C}$

Dan untuk $c = \frac{1}{2}$, diperoleh $\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{1}{3}x^3 + \boldsymbol{C} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \boldsymbol{C}$

$$= \frac{1}{24} + \boldsymbol{C}$$

Sehingga memenuhi $\lim_{x\to c} F(x) = F(c)$ untuk $0 < c < 1$ atau $F(x)$ kontinu pada (0,1).

(ii) Akan ditunjukkan bahwa $\lim_{x\to a^+} F(x) = F(a)$

Untuk $a = 0$, diperoleh $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{3}x^3 + \boldsymbol{C} = \frac{1}{3}(0)^3 + \boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}$

Sehingga memenuhi $\lim_{x\to 0^+} F(x) = F(0)$ atau kontinu kanan di $x = 0$.

(iii) Akan ditunjukkan bahwa $\lim_{x\to b^-} F(x) = F(b)$

Untuk $b = 1$, diperoleh $\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{3}x^3 + \boldsymbol{C} = \frac{1}{3}(1)^3 + \boldsymbol{C} = \frac{1}{3} + \boldsymbol{C}$

Sehingga memenuhi $\lim_{x\to 1^-} F(x) = F(1)$ atau kontinu kiri di $x = 1$.

Maka fungsi $F(x)$ kontinu pada [0,1].

b. Akan ditunjukkan apakah $F'(x) = f(x)$ hampir di mana-mana.

Karena $F'(x) = f(x)$

$x^2 = x^2$, $\forall\, x \in [0,1]$

Berarti $F(x)$ mempunyai turunan di mana $F'(x) = f(x)$, di setiap titik pada [0,1].

$\therefore$ Jadi $f(x)$ terintegral-J pada [0,1].

2. Tunjukkan apakah $g(x) \coloneqq 2x^3 + 3$ terintegral-J pada [0,1]?

Penyelesaian:

a. Akan ditunjukkan apakah terdapat fungsi G kontinu pada [0,1].

Karena $G'(x) = g(x)$ (dari definisi 3.1.1) diperoleh $G'(x) = 2x^3 + 3$

Sehingga $G(x) = \frac{1}{2}x^4 + 3x + \boldsymbol{C}$.

"Fungsi $G(x)$ kontinu pada $[a, b]$ jika $\lim_{x\to c} G(x) = G(c)$ untuk $a < c < b$; $\lim_{x\to a^+} G(x) = G(a)$ dan $\lim_{x\to b^-} G(x) = G(b)$"(Definisi 2.6.1).

(i) Akan ditunjukkan bahwa $\lim_{x\to c} F(x) = F(c)$

Ambil sebarang c di mana $0 < c < 1$.

Misal $c = \frac{1}{2}$ di mana $0 < \frac{1}{2} < 1$, mak

$$\lim_{x\to c} \frac{1}{2}x^4 + 3x + \boldsymbol{C} = \frac{1}{2}(c)^4 + 3(c) + \boldsymbol{C}$$

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}} \frac{1}{2}x^4 + 3x + \boldsymbol{C} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^4 + 3\left(\frac{1}{2}\right) + \boldsymbol{C} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{16}\right) + \frac{3}{2} + \boldsymbol{C} = \frac{49}{32} + \boldsymbol{C}$$

Sehingga memenuhi $\lim_{x \to c} G(x) = G(c)$ untuk $0 < c < 1$ atau $G(x)$ kontinu pada $(0,1)$.

(ii) Akan ditunjukkan bahwa $\lim_{x \to a^+} F(x) = F(a)$

Untuk $a = 0$

diperoleh $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{2}x^4 + 3x + \boldsymbol{C} = \frac{1}{2}(0)^4 + 3(0) + \boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}$

Sehingga memenuhi $\lim_{x \to 0^+} G(x) = G(0)$ atau kontinu kanan di $x = 0$.

(iii) Akan ditunjukkan bahwa $\lim_{x \to b^-} F(x) = F(b)$

Untuk $b = 1$, diperoleh $\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{2}x^4 + 3x + \boldsymbol{C} = \frac{1}{2}(1)^4 + 3(1) + \boldsymbol{C}$

$$= \frac{7}{2} + \boldsymbol{C}$$

Sehingga memenuhi $\lim_{x \to 1^-} G(x) = G(1)$ atau kontinu kiri di $x = 1$.

Maka fungsi $G(x)$ kontinu pada $[0,1]$.

b. Akan ditunjukkan apakah $G^{'}(x) = g(x)$ hampir di mana-mana.

Karena $G^{'}(x) = g(x)$

$2x^3 + 3 = 2x^3 + 3$, $\forall\, x \in [0,1]$

Berarti $G(x)$ mempunyai turunan di mana $G'(x) = g(x)$, di setiap titik pada $[0,1]$.

∴ Jadi $g(x)$ terintegral-J pada $[0,1]$.

3. Tunjukkan apakah $h(x) \coloneqq \frac{1}{\sqrt{x}}$ terintegral-J pada $[-1,1]$?

Penyelesaian:

a. Akan ditunjukkan apakah terdapat fungsi H kontinu pada $[-1,1]$.

Karena $H^{'}(x) = h(x)$ (dari definisi 3.1.1) diperoleh $H^{'}(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

Sehingga $H(x) = 2\sqrt{x} + \boldsymbol{C}$.

"Fungsi $H(x)$ kontinu pada $[a, b]$ jika $\lim_{x\to c} H(x) = H(c)$ untuk

$a < c < b$; $\lim_{x\to a^+} H(x) = H(a)$ dan $\lim_{x\to b^-} H(x) = H(b)$"(Definisi 2.6.1).

(i) Akan ditunjukkan bahwa $\lim_{x\to c} F(x) = F(c)$

Ambil sebarang c di mana $-1 < c < 1$.

Misal $c = -\frac{1}{2}$ di mana$-1 < -\frac{1}{2} < 1$,maka $\lim_{x\to c} 2\sqrt{x} + \boldsymbol{C} = 2\sqrt{c} + \boldsymbol{C}$

Dan untuk $c = -\frac{1}{2}$, diperoleh $\lim_{x\to -\frac{1}{2}} 2\sqrt{x} + \boldsymbol{C} = 2\sqrt{-\frac{1}{2}} + \boldsymbol{C} \notin \mathbb{R}$

Sehingga untuk $c = -\frac{1}{2}$, $H(x)$ tidak mempunyai limit. Maka tidak memenuhi $\lim_{x\to c} H(x) = H(c)$ untuk $-1 < c < 1$ atau $H(x)$ tidak kontinu pada $(-1,1)$.

Karena $H(x)$ tidak kontinu pada $(-1,1)$ maka $H(x)$ juga tidak kontinu pada $[-1,1]$.

b. Akan ditunjukkan apakah $H^{'}(x) = h(x)$ hampir di mana-mana.

Karena $H^{'}(x) = h(x)$

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \text{, hampir di mana-mana untuk } x \in [0,1]$$

$h(x)$ tidak terdefinisi di $x = 0$ dan $x = -1$ maka $h(x)$ tidak mempunyai turunan di $x = 0$ dan $x = -1$. Jadi $h(x)$ mempunyai turunan di mana $H'(x) = h(x)$, hampir di mana-mana pada $[-1,1]$ sebab $h(x)$ tidak mempunyai turunan di $x = 0$ dan $x = -1$

∴ Jadi $h(x)$ tidak terintegral-J pada $[-1,1]$.

Teorema 3.1.2

Fungsi F terdeferensial hampir di mana-mana dan kontinu pada $[a,b]$. *Jika* $F'(x) \geq 0$ *hampir di mana-mana. pada* $[a,b]$, *maka F fungsi tidak turun pada* $[a,b]$.

Bukti:

Fungsi S adalah himpunan semua titik x di mana turunan $F'(x)$ tidak ada dan jika ada $F'(x) < 0$. Dengan mengasumsikan S adalah *countable* dan dinotasikan S = $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Kemudian mengkonstruksi liput terbuka $[a,b]$,ambil sebarang $\varepsilon > 0$ dan $x \in [a,b]$. Jika $x \notin$ S, $F'(x) \geq 0$, maka pilih $\delta(x) > 0$ sedemikian hingga karena $x \in [a,b]$ maka $a < x < b$ dan $|u - v| = \delta(x)$, $u, v \in [a,b]$ maka $u < x < v$

$$x - \delta(x) < u < x < v < x + \delta(x)$$

Untuk $v > x - \delta(x)$ atau $v - x > -\delta(x)$

$$F'(v) = \frac{F(v)-F(x)}{v-x} > -\delta(x)$$

$$\frac{F(v)-F(x)}{v-x} > -\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

Untuk $u < x + \delta(x)$ atau $u - x < \delta(x)$

$$-F'(u) = \frac{F(x)-F(u)}{x-u} > -\delta(x)$$

$$\frac{F(x)-F(u)}{x-u} > -\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

Sehingga

$$F(v)-F(u) = \{F(v)-F(x)\}+\{F(x)-F(u)\}$$

$$> -\frac{\varepsilon(v-x)}{2(b-a)} - \frac{\varepsilon(u-x)}{2(b-a)}$$

$$> -\frac{\varepsilon(v-x)-\varepsilon(u-x)}{2(b-a)}$$

$$> -\frac{2\varepsilon(v-u)}{2(b-a)}$$

$$> -\frac{\varepsilon(v-u)}{(b-a)} \quad \text{..................................(1)}$$

Karena F kontinu di $x = x_n$, n = 1, 2, … pilih $\delta(x_n)$ sedemikian hingga untuk

$$x_n - \delta(x_n) < u < x_n < v < x_n + \delta(x_n)$$

$$|F(v) - F(u)| < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \quad \text{.........................(2)}$$

yang merupakan keluarga dari semua interval buka (x - $\delta(x)$, x + $\delta(x)$) membentuk suatu liput terbuka $[a, b]$. Dari Teorema Heine-Borel (Teorema 2.3.4) bahwa terdapat suatu liput-bagian yang berhingga. Maka

$$a = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots.. < y_n = b$$

sedemikian hingga $F(y_i) - F(y_{i-1})$ memenuhi pertidaksamaan (1) dan (2). Akibatnya

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} \{F(y_i) - F(y_{i-1})\} > -\varepsilon.$$

Karena untuk sebarang ε, $F(b) - F(a) \geq 0$. Dengan cara yang sama didapatkan $F(v) - F(u) \geq 0$ atau $F(u) \leq F(v)$ untuk $a \leq u < v \leq b$, maka F tidak turun.

Teorema 3.1.3

Jika F kontinu pada $[a, b]$ dan $F'(x)$ = 0 hampir di mana-mana, maka F *konstan.*

Bukti:

Dari Teorema 3.1.2 didapatkan F tidak turun. Karena $-F'(x) \geq 0$ hampir di mana-mana, sehingga dari Teorema 3.1.2 pula didapatkan –F juga tidak turun atau F tidak naik Suatu fungsi yang tidak turun dan tidak naik adalah fungsi konstan.

3.2 Sifat – Sifat Integral-J pada $[a, b]$

Teorema 3.2.1 (***Sifat Ketunggalan***)

Fungsi primitif F dari fungsi yang terintegral-J f adalah tunggal.

Bukti:

Ambil F_1 dan F_2 adalah fungsi kontinu sedemikian hingga $F'_1(x)$ = $F'_2(x)$ = $f(x)$ hampir di mana-mana. Untuk fungsi $F_1 - F_2$ diperoleh

$$(F_1 - F_2)'(x) = F'_1(x) - F'_2(x) = 0 \text{ hampir di mana-mana.}$$

Dari Teorema 3.1.3 , $F_1 - F_2$ adalah konstan, dapat ditulis

$$F_1 - F_2 = C, \text{ sehingga } F_1 = F_2 + C$$

$$F_1(b) - F_1(a) = F_2(b) + C - (F_2(a) + C)$$

$$= F_2(b) + C - F_2(a) - C$$

$$= F_2(b) - F_2(a)$$

Jadi $F_1 = F_2$, maka fungsi primitif F dari fungsi yang terintegral-J adalah tunggal.

Teorema 3.2.2 *(Sifat Keterbatasan)*

Fungsi F adalah terintegral-J pada $[a, b]$. *Jika* $|f(x)| \leq M$ *untuk* $a \leq x \leq b$ *maka*

$$\left|(J)\int_a^b f(x)dx\right| \leq M(b - a)$$

Bukti:

Dengan mengganti *F* pada Teorema 3.1.2 dengan

$$\mathrm{M}(b - a) \pm (J)\int_a^x f(u)du$$

Diberikan f_n, *n* = 1, 2, …. , adalah terintegral-J pada $[a, b]$ dengan fungsi primitif F_n, *n* = 1, 2, …. .Barisan $\{f_n\}$ dikatakan konvergen total ke fungsi f pada $[a, b]$ jika terdapat suatu himpunan bagian *countable* D pada $[a, b]$ sedemikian sehingga kondisi seperti berikut dipenuhi:

1. Untuk setiap $x \in [a, b]$ – D), terdapat suatu persekitaran *N(x)* sehingga barisan $\{f_n\}$ konvergen seragam ke f pada *N(x)* – D.
2. Untuk setiap $x \in$ D, terdapat suatu persekitaran *N(x)* sedemikian sehingga barisan $\{f_n\}$ konvergen seragam pada *N(x)*.

Karena $\{f_n\}$ konvergen seragam ke f, maka akan konvergen total dengan himpunan D menjadi kosong.

Teorema 3.2.3

Diberikan f_n, *n = 1, 2, …. , adalah terintegral-J pada* $[a, b]$.

Jika barisan f_n konvergen total ke suatu fungsi f pada $[a, b]$, maka f adalah terintegral-J pada $[a, b]$ dan untuk $x \in [a, b]$, berlaku

$$lim_{n\to\infty}(J)\int_a^x f_n = (J)\int_a^x f$$

Bukti:

Diberikan F_n merupakan fungsi primitif dari f_n, untuk setiap n.

Asumsikan bahwa $F_n(a) = 0$ untuk setiap n. Diberikan

$$\text{E} = \{\ \in [a, b];\ F_n(x) \text{ konvergen}\}$$

Karena f_n konvergen total ke , terdapat suatu himpunan *countable* D sedemikian hingga kondisi (1) dan (2) dipenuhi. Dapat dituliskan D ⊆ E, dan untuk $y \in$ D terdapat suatu persekitaran *N(y)* ⊆ E. Diberikan $y \in$ E – D. Maka terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga f_n konvergen seragam ke f pada $(y - \delta, y + \delta)$ – D. Dari Teorema 3.2.2 didapatkan untuk setiap $x \in (y - \delta, y + \delta)$

$$|F_n(x) - F_m(x) - \{F_n(y) - F_m(y)\}|$$

$$\leq |x - y| \sup\left\{|F_n(z) - F_m(z)|;\ z \in (y - \delta, y + \delta) - \text{D}\right\}$$

$$\leq \delta \sup\left\{|F_n(z) - F_m(z)|;\ z \in \left(y - \delta, y + \delta\right) - \text{D}\right\}$$

Karena $F_n(y)$ konvergen maka $F_n(x)$ konvergen untuk setiap $x \in N(y)$. Begitupula jika terdapat $x_1 \in N(y)$ sedemikian hingga $F_n(x_1)$ konvergen, maka $F_n(x)$ konvergen untuk setiap $x \in N(y)$. Oleh karena itu telah dibuktikan bahwa untuk setiap $y \in [a, b]$, terdapat *N(y)* sedemikian hingga jika $\{F_n(x)\}$ konvergen di titik x manapun pada *N(y)*, maka $\{F_n(x)\}$ juga konvergen di setiap titik pada $[a,b]$. Jadi E adalah terbuka.

Selain itu jika $y \in \bar{E}$, maka setiap persekitaran $N(y)$ memuat sebuah titik di E dan oleh karenanya $y \in$ E. Jadi E tertutup.

Tetapi $a \in$ E, karena $F_n(a) = 0$ untuk setiap n, maka E tidak kosong serta himpunan terbuka dan tertutup di $[a, b]$. Karenanya E = $[a, b]$ dan $[a, b]$ terhubung. Telah ditunjukkan bahwa untuk setiap $x \in [a, b]$, $\{F_n(x)\}$ konvergen seragam pada beberapa persekitaran x, karena $[a, b]$ tertutup dan terbatas, maka $\{F_n(x)\}$ merupakan kompak dimana menunjukkan bahwa $F_n(x)$ konvergen seragam ke fungsi $F(x)$. Sehingga F kontinu di mana-mana pada $[a, b]$.

Sekarang akan ditunjukkan bahwa $F'(x) = f(x)$ hampir di mana-mana pada $[a, b]$. Untuk setiap $x \in [a, b]$– D dan terdapat $\varepsilon_1 > 0$, dan r > 0 dan suatu bilangan bulat positif n_0 sedemikian hingga $m \geq n_0$ dan $n \geq n_0$,

$$|f_m(z) - f_n(z)| \leq \varepsilon_1 \quad \text{untuk sebarang z di } [\, x - r \,,\, x + r \,] - D$$

selain itu

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon_1$$

Dari Teorema 3.2.2 diperoleh untuk setiap $y \in [\, x - r \,,\, x + r \,] - D$

$$|F(y) - F(x) - (f_m(y) - f_m(x))|$$

$$\leq |y - x| \sup \{|F(z) - F_m(z)| \,;\; z \in (x - r\,,\, x + r\,) - D\}$$

$$\leq \varepsilon_1 \, |y - x|$$

Di sisi lain, untuk setiap $n \geq n_0$ terdapat $0 <$ r’ $\leq$ r sedemikian hingga untuk $|y - x| \leq$ r’ maka

$$\left|\frac{F_n(y)-F_n(x)}{y-x} - f_n(x)\right| \leq \varepsilon_1$$

$$|F_n(y) - F_n(x) - f_n(x)(y-x)| \leq \varepsilon_1 |y-x|$$

Ini menunjukkan bahwa $|F(y) - F(x) - f(x)(y-x)|$

$= \left|\big(F(y) - F_n(y) + F_n(y) - F_n(x) + F_n(x) - F(x)\big) + (f_n(x)(y-x) - f_n(x)(y-x) - f(x)(y-x))\right|$

$= \left|\big(F(y) - F_n(y) + F_n(y) - F_n(x) + F_n(x) - F(x)\big) - f_n(x)(y-x) + f_n(x)(y-x) - f(x)(y-x)\right|$

$= \left|\big(F(y) - F(x) - F_n(y) + F_n(x)\big) + F_n(y) - F_n(x)) - f_n(x)(y-x) + (f_n(x) - f(x))(y-x)\right|$

$\leq |F(y) - F(x) - (F_n(y) - F_n(x))| + |F_n(y) - F_n(x) - f_n(x)(y-x)| + |f_n(x) - f(x)|\,|y-x|$

$\leq \varepsilon_1 |y-x| + \varepsilon_1 |y-x| + |y-x|\,\varepsilon_1$

$\leq 3\,\varepsilon_1 |y-x|$

Teorema 3.2.4 *(Sifat Kelinieran)*

Jika f dan g adalah fungsi yang terintegral-J pada $[a,b]$, maka $f+g$ dan kf, juga terintegral-J, dan

(3) $(J)\int_a^b (f(x)+g(x))dx = (J)\int_a^b f(x)dx + (J)\int_a^b g(x)dx$

(4) $(J)\int_a^b k\,f(x)dx = k\ (J)\int_a^b f(x)dx$, *untuk setiap $k \in \mathbb{R}$.*

Bukti :

(1) Karena f dan g terintegral-J pada $[a, b]$, maka ada F dan G yang merupakan fungsi primitif dari f dan g. $F(x) + G(x)$ kontinu pada $[a, b]$ dan

$$(F + G)'(x) = F'(x) + G'(x), \quad \text{hampir di mana-mana.}$$

Sehingga

$$(F + G)'(x) = F'(x) + G'(x)$$
$$= f(x) + g(x), \quad \text{hampir di mana-mana.}$$

Jadi $f + g$ juga terintegral-J dan

$$(J)\int_a^b (f(x) + g(x))dx = F(b) + G(b) - F(a) - G(a)$$
$$= F(b) - F(a) + G(b) - G(a)$$
$$= (J)\int_a^b f(x)dx + (J)\int_a^b g(x)dx$$

(2) F adalah fungsi Primitif f maka

$(k\,F)'(x) = k\,F'(x) = k\,f(x)$, hampir di mana-mana.

Jadi $k\,f$ juga terintegral-J dan

$$(J)\int_a^b k\,f(x)dx = k\,F(b) - k\,F(a)$$
$$= k\,(F(b) - F(a))$$
$$= k\,(J)\int_a^b f(x)dx$$

Contoh 3.2.5

1. Tunjukkan bahwa $\int_0^1 (2x^3 + x^2 + 3)\,dx = \int_0^1 x^2\,dx + \int_0^1 2x^3 + 3\,dx$?

Penyelesaian:

Misal $f(x) = x^2$ dan $g(x) = 2x^3 + 3$

Karena $f(x)$ dan $g(x)$ terintegral-J pada $[0,1]$ maka ada $F(x)$ dan $G(x)$ fungsi primitif $f(x)$ dan $g(x)$ di mana $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ dan $G(x) = \frac{1}{2}x^4 + 3x$ (pembuktian pada contoh 3.1.2). $F(x)$ dan $G(x)$ kontinu pada $[0,1]$ sehingga $F(x) + G(x)$ juga kontinu pada $[0,1]$ dan $(F+G)'(x) = F'(x) + G'(x)$, hampir di mana-mana (Lihat Teorema 2.5.7). Maka

$F(x) + G(x) = (F+G)(x) = \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + 3x$, sehingga

$$\begin{aligned}(F+G)'(x) &= 2x^3 + x^2 + 3\\ &= x^2 + (2x^3 + 3)\\ &= f(x) + g(x) \text{ hampir di mana-mana.}\end{aligned}$$

Jadi $x^2 + (2x^3 + 3)$ juga terintegral-J dan

$$\begin{aligned}(J)\int_0^1 (x^2 + 2x^3 + 3)dx &= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^4 + 3x \Big|_0^1\\ &= \left[\left(\frac{1}{3}.1^3\right) + \left(\frac{1}{2}.1^4 + 3.1\right)\right] - \left[\left(\frac{1}{3}.0^3\right) + \left(\frac{1}{2}.0^4 + 3.0\right)\right]\\ &= \left[\left(\frac{1}{3}.1^3\right) - \left(\frac{1}{3}.0^3\right)\right] + \left[\left(\frac{1}{2}.1^4 + 3.1\right) - \left(\frac{1}{2}.0^4 + 3.0\right)\right]\\ &= \left(\frac{1}{3}x^3 \Big|_0^1\right) + \left(\frac{1}{2}x^4 + 3x \Big|_0^1\right)\\ &= (J)\int_0^1 (x^2)dx + (J)\int_0^1 (2x^3 + 3)dx\end{aligned}$$

2. Tunjukkan bahwa $\int_0^1 3(2x^3 + 3)\ dx = 3\int_0^1 2x^3 + 3\ dx$?

Penyelesaian:

Misal $f(x) = 2x^3 + 3$ dan $k = 3,\ k \in \mathbb{R}$.

Karena $f(x)$ terintegral-J pada $[0,1]$ maka ada $F(x)$ fungsi primitif $f(x)$ di mana $F(x) = \frac{1}{2}x^4 + 3x$ (pembuktian pada contoh 3.1.2). $F(x)$ kontinu pada $[0,1]$ dan $k \in \mathbb{R}$ sehingga $kF(x)$ juga kontinu pada $[0,1]$ dan $(kF)'(x) = kF'(x)$, hampir di mana-mana (Lihat Teorema 2.5.7). Maka

$kF(x) = (kF)(x) = 3\left(\frac{1}{2}x^4 + 3x\right) = \frac{3}{2}x^4 + 9x$, sehingga

$$(kF)'(x) = 6x^3 + 9$$

$$= 3(2x^3 + 3) = f(x) + g(x) \text{ hampir di mana-mana.}$$

Jadi $3(2x^3 + 3)$ juga terintegral-J dan

$$(J)\int_0^1 3(2x^3 + 3)dx = \frac{3}{2}x^4 + 9x\ \Big|_0^1$$

$$= \left[\left(\frac{3}{2}.1^4 + 9.1\right)\right] - \left[\left(\frac{3}{2}.0^4 + 9.0\right)\right]$$

$$= \left[3\left(\frac{1}{2}.1^4 + 3.1\right)\right] - \left[3\left(\frac{1}{2}.0^4 + 3.0\right)\right]$$

$$= 3\left[\left(\frac{1}{2}.1^4 + 3.1\right) - \left(\frac{1}{2}.0^4 + 3.0\right)\right]$$

$$= 3\left(\frac{1}{2}x^4 + 3x\ \Big|_0^1\right)$$

$$= 3\ (J)\int_0^1 2x^3 + 3\ dx$$

Teorema 3.2.6 ***(Sifat Perbandingan)***

Jika f dan g adalah fungsi yang terintegral-J pada $[a,b]$ dan $f(x) \leq g(x)$ hampir di mana-mana, maka

$$(J)\int_a^b f(x)dx \leq (J)\int_a^b g(x)dx$$

Bukti :

Diketahui fungsi $f(x) \leq g(x)$ hampir di mana-mana, maka

$f(x) - g(x) \leq 0$ atau $g(x) - f(x) \geq 0$

Sehingga $g(x) - f(x) \geq 0$ juga hampir di mana-mana. Sehingga dari Teorema 3.1.2 didapatkan

$$(J)\int_a^b (g(x) - f(x))dx \geq 0$$

Dan dari Teorema 3.2.4 didapatkan

$$(J)\int_a^b (g(x) - f(x))dx = (J)\int_a^b g(x)dx - (J)\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

$$(J)\int_a^b f(x)dx \leq (J)\int_a^b g(x)dx$$

Teorema 3.2.7

Jika f dan $|f|$ adalah fungsi yang terintegral-J pada $[a,b]$, maka

$$\left|(J)\int_a^b f(x)dx\right| \leq (J)\int_a^b |f(x)|\,dx$$

Bukti :

Karena $f(x) \leq |f(x)|$ pada $[a,b]$, dari Teorema 3.2.6 didapatkan

$$\left|(J)\int_a^b f(x)dx\right| \leq (J)\int_a^b |f(x)|\,dx$$

Sehingga $-f(x) \leq |f(x)|$ untuk setiap $x \in [a,b]$. Dari Teorema 3.2.4 dan 3.2.6 didapatkan

$$-(J)\int_a^b f(x)dx = (J)\int_a^b f(x)dx \leq (J)\int_a^b |f(x)dx|$$

Perlu dicatat bahwa $|f|$ belum tentu terintegral-J ketika f terintegral-J.

Teorema 3.2.8 ***(Teorema Interval)***

Jika f adalah fungsi yang terintegral-J pada $[a,b]$ maka

$$(J)\int_a^b f(x)dx = (J)\int_a^c f(x)dx + (J)\int_c^b f(x)dx \;, \; \forall\, c \in [a,b]$$

Bukti :

Karena F adalah fungsi primitif dari f, maka ambil sebarang c $\in [a,b]$ sedemikian hingga

$$\begin{aligned}(J)\int_a^b f(x)dx &= F(b) - F(a)\\ &= F(b) - F(c) + F(c) - F(a)\\ &= (J)\int_a^c f(x)dx + (J)\int_c^b f(x)dx\end{aligned}$$

Akibat 3.2.9

Jika f fungsi yang terintegral-J pada $[a,b]$, maka

$$(J)\int_a^b f(x)dx = -(J)\int_a^b f(x)dx$$

Bukti :

Karena F adalah fungsi primitif dari f, maka

$(J)\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, atau

$(J)\int_b^a f(x)dx = F(a) - F(b)$,

Sehingga $(J)\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

$= -(F(a) - F(b))$

$= -(J)\int_a^b f(x)dx$

Teorema 3.2.10

Jika f dan g adalah fungsi yang terintegral-J pada $[a, b]$ dan $f = g$ hampir di mana-mana, maka

$$(J)\int_a^b f(x)dx = (J)\int_a^b g(x)dx$$

Bukti:

Diberikan F yang merupakan fungsi primitif dari f dan $F'(x) = f(x)$ hampir di mana-mana., karena $f = g$ maka $F'(x) = g(x)$ hampir di mana-mana. Dari sifat ketunggalan integral-J seperti yang dijelaskan sebelumnya, diperoleh

$$(J)\int_a^b f(x)dx = (J)\int_a^b g(x)dx$$

3.3 Keterkaitan Analisis Integral-J dengan Al-Qur'an

Menuntut ilmu adalah suatu kewajiban bagi umat islam. Ada berbagai macam cara yang dilakukan untuk mendapatkan ilmu, di antaranya dengan membaca, meneliti, dan sebagainya. Dalam surat Al-Alaq Allah memerintahkan kita untuk membaca, yakni sebagai berikut

ٱقۡرَأۡ بِٱسۡمِ رَبِّكَ ٱلَّذِي خَلَقَ ۝١ خَلَقَ ٱلۡإِنسَٰنَ مِنۡ عَلَقٍ ۝٢ ٱقۡرَأۡ وَرَبُّكَ ٱلۡأَكۡرَمُ ۝٣
ٱلَّذِي عَلَّمَ بِٱلۡقَلَمِ ۝٤ عَلَّمَ ٱلۡإِنسَٰنَ مَا لَمۡ يَعۡلَمۡ ۝٥

Artinya: *"Bacalah dengan (menyebut) nama Tuhanmu yang Menciptakan. Dia Telah menciptakan manusia dari segumpal darah. Bacalah, dan Tuhanmulah yang Maha pemurah. Yang mengajar (manusia) dengan perantaran kalam. Dia mengajar kepada manusia apa yang tidak diketahuinya" (QS. Al-Alaq : 1-5)*

"Iqro": Bacalah, demikian setiap insan diperintahkan oleh sang penguasa Semesta. Dan kita dituntut untuk mencoba memaknai dan melaksanakan serta mengambil hikmah dari perintah tersebut. Membaca di sini bukanlah perintah untuk sekedar membaca biasa. Seorang mufasir terkemuka, Quraish Shihab dalam tafsir Al Misbah mengartikan *iqro'* secara istimewa yaitu kegiatan aktif yang meliputi membaca teks, membaca realitas, memahami, meneliti atau riset. Jadi, makna *iqro'* itu teramat luasnya sehingga meliputi dimensi tekstual (buku) dan kesemestaan (jagat alam). Artinya membaca di sini diwarnai dengan semangat daya pikir yang total-menyeluruh, mengingat, menganalisa dan bahkan membayangkan sebuah langkah untuk mengatasi sebuah permasalahan.

Menurut Ir. Bekti Hermawan Handoyo dalam bukunya yang berjudul Matematika Akhlak, *iqro'* sebenarnya bermakna sampaikan, telaah, membaca, mendalami, meneliti, mengkaji, mengetahui ciri-cirinya, dan sebagainya. Kegiatan mengkaji, mengetahui ciri-cirinya serupa dengan kegiatan analisis. Di mana dalam pembahasan skripsi ini dilakukan dengan cara menganalisa. Objek yang di teliti, dikaji dan di analisa adalah integral-J.

Integral-J mempunyai ciri-ciri atau sifat tertentu yang membedakannya dengan integral yang lain. Pengkajian serta analisa dilakukan untuk membuktikan teorema-teorema pada integral-J. Sehingga dapat diketahui bagaimana sebenarnya konsep integral-J itu.

Pada bab sebelumnya telah dijelaskan bahwa mempelajari ilmu matematika hukumnya fardhu kifayah, bukan berarti meskipun telah ada seseorang yang mempelajarinya akan gugur kewajiban yang lainnya. Sebab kita sebagai generasi matematikawan haruslah semakin terpacu untuk memperdalam ilmu kita khususnya matematika dalam mengkaji dan meneliti hal-hal yang baru di antaranya seperti integral-J .

Pembahasan mengenai integral-J dilakukan dengan menganalisa definisi dan teorema yang telah ada dalam literatur. Definisi dianalisa untuk mengetahui bagaimana fungsi yang terintegral-J dan yang tidak terintegral-J. Setelah itu teorema-teorema dibuktikan sehingga dapat diketahui ciri atau sifat-sifat integral-J itu sendiri. Dengan demikian, hal ini sangat sesuai dengan firman Allah dalam surat Al-Alaq yang telah disebutkan sebelumnya, di mana Allah memerintahkan kita sebagai umat dengan kalimat *iqro'*. *Iqro'* dalam arti bukan sekedar membaca, akan tetapi mengkaji, meneliti, mendalami serta mengetahui ciri-ciri. Jadi analisis integral-J ini sangat bersesuaian dengan ajaran dalam Al-Qur'an.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Suatu fungsi f dikatakan terintegral-J pada $[a, b]$ jika memenuhi syarat berikut: (1) terdapat fungsi F kontinu pada $[a, b]$; (2) $F'(x) = f(x)$ hampir di mana-mana. Integral-J dari suatu fungsi f pada $[a, b]$ didefinisikan:

$$(J)\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

Fungsi yang dikatakan terintegral-J akan memenuhi sifat-sifat Integral-J di antaranya sifat ketunggalan, sifat keterbatasan, sifat kelinieran, sifat perbandingan serta beberapa sifat lainnya. Di antara sifat integral-J pada $[a, b]$ sebagai berikut:

1. Sifat Ketunggalan, yaitu Fungsi primitif F dari fungsi yang terintegral-J f adalah tunggal.
2. Sifat Keterbatasan : Fungsi F adalah terintegral-J pada $[a, b]$. Jika $|f(x)| \leq$ M untuk $a \leq x \leq b$ maka $\left|(J)\int_a^b f(x)dx\right| \leq$ M$(b - a)$.
3. Sifat Kelinieran : Jika f dan g adalah fungsi yang terintegral-J pada $[a, b]$, maka $f + g$ dan kf, juga terintegral-J, dan

   (5) $(J)\int_a^b (f(x) + g(x))dx = (J)\int_a^b f(x)dx + (J)\int_a^b g(x)dx$

   (6) $(J)\int_a^b k\, f(x)dx = k\ (J)\int_a^b f(x)dx$, untuk setiap $k \in \mathbb{R}$.

4. Sifat Perbandingan : Jika f dan g adalah fungsi yang terintegral-J pada $[a, b]$ dan $f(x) \leq g(x)$ h.d., maka $(J)\int_a^b f(x)dx \leq (J)\int_a^b g(x)dx$

4.2 Saran

Selaku penulis dan pengamat, maka dalam hal ini ada beberapa saran yang sifatnya konstruktif yang bisa diberikan demi kemajuan dan perkembangan ilmu matematika di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang.

1. Bagi Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang

   Skripsi ini diharapkan dapat menginformasikan dan memberikan ilmu, wawasan, serta pengetahuan kepada lembaga akan pentingnya pengkajian lebih lanjut masalah integral-J. Karena hal ini sangat berguna untuk pengembangan dan kemajuan ilmu analisis. Sehingga lembaga dapat memberikan bahasan tersebut di bangku perkuliahan.

2. Bagi Peneliti Selanjutnya

   Diharapkan mengembangkan dan memperluas masalah yang sudah diteliti dalam skripsi ini, terutama ditekankan pada pembahasan lebih lanjut tentang konsep integral-J. Karena keterbatasan yang ada pada skripsi ini yaitu hanya mengkaji konsep dan sifat-sifat integral-J pada selang $[a, b]$, peneliti selanjutnya dapat melanjutkan untuk meneliti atau mengembangkan integral-J pada ruang $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ atau meneliti keterkaitan integral-J dengan integral yang lain, seperti integral-Newton, integral-Riemann, integral-Lebesgue, dan yang lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Abdusysyakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press.

Bartle, Robert. G. 1964. *The Elements of Real Analysis*. New York: John Wiley & Sonc,Inc.

Bartle, Robert. G & Donald R. Sherbert. 2000. *Introdution to Real Analysis (Third Edition)*. United States of America: John Wiley & Sonc,Inc.

Handoyo, Bekti Hermawan. 2007. *Matematika Akhlak*. Jakarta Selatan: PT Kawan Pustaka.

Kurnaedi, Deden. 2009. *Mari Kita Pelajari Islam dengan Benar. Sriwijaya Post*. 293 Januari.

Martono, Koko.1999. *Kalkulus*. Jakarta: Erlangga.

Mursita, Danang. Matematika Dasar. *http://pdf-search-engine.com/limit-fungsi-matematika-pdf.html*. Diakses tanggal 15 Juli 2009.

Naak-In, Wittaya. 1976. *Nonabsolute Integration On The Real Line*. Philippines: University of The Philippines.

Parzynski, William R & Philip W. Zipse. 1982. *Introduction to Mathematical Analysis*. Tokyo: McGraw-Hill, Inc.

Rahman, Afzalur. 1992. *Al Qur'an Sumber Ilmu Pengetahuan*. Jakarta: Rineka Cipta.

Rahman, Hairur. 2007. *Indahnya Matematika dalam Al-Qur'an*. Malang: UIN Malang Press.

Riyanto, M. Zaki. 2008. Pengantar Analisis Real I. *http://zaki.math.web.id*. Diakses tanggal 18 Juli 2009.

Setiawan. 2004. Diklat Instruktur/Pengembang Matematika SMA Jenjang Dasar. *Pengantar Kalkulus*. Yogyakarta: PPPG Matematika Yogyakarta.

Spiegel, Murray R. 1984. *Kalkulus Lanjutan(Versi SI/Metrik)*. Jakarta: Erlangga.

Quraish Shihab, Muhammad. 2003. *Tafsir Al-Misbakh*. Jakarta: Lentara hati.

Zuhair. 2009. Kalkulus I. *Modul* Tidak Diterbitkan. Jakarta: Jurusan Teknik Informatika Universitas Mercu Buana

DEPARTEMEN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN)
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang (0341)551345 Fax. (0341)572533

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Silvia Anindita
NIM : 05510008
Fakultas/ jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul skripsi : Kajian Integral-J pada [*a*,*b*]
Pembimbing I : Hairur Rahman, M.Si
Pembimbing II : Abdussakir, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan	
1	04 Mei 2009	Konsultasi Masalah	1.	
2	20 Mei 2009	Konsultasi BAB I		2.
3	10 Juni 2009	Revisi BAB I	3.	
4	25 Juni 2009	Konsultasi BAB II dan III		4.
5	16 Juli 2009	Konsultasi Keagamaan	5.	
6	7 Agustus 2009	Konsultasi BAB II		6.
7	8 Agustus 2009	Revisi BAB II dan Konsultasi BAB III	7.	
8	12 Agustus 2009	Revisi BAB II dan III		8.
9	20 Agustus 2009	Revisi BAB III (Contoh)	9.	
10	02 Oktober 2009	Revisi Keagamaan		10.
11	03 Oktober 2009	Konsultasi Keseluruhan	11.	
12	05 Oktober 2009	ACC Keseluruhan		12.

Malang, 05 Oktober 2009
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

CURICULUM VITAE

Nama Lengkap	:	SILVIA ANINDITA
Jenis Kelamin	:	PEREMPUAN
Tempat dan Tgl. Lahir	:	SIDOARJO, 09 DESEMBER 1987
Alamat Asal	:	BANJAR PANJI RT.03 RW.01 NO.13 TANGGULANGIN SIDOARJO
Alamat di Malang	:	JL. KERTO PAMUJI NO. 34 MALANG
Riwayat Pendidikan	:	

TK RAUDLATUL ATHFAL CANDI	(Tahun 1991-1993)
MI AL-ASHRIYAH TANGGULANGIN	(Tahun 1993-1999)
SLTPN 1 SIDOARJO	(Tahun 1999-2002)
SMAN 1 SIDOARJO	(Tahun 2002-2005)
UIN MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG	(Tahun 2005-2009)