KAJIAN KEKONVERGENAN INTEGRAL LEBESGUE

SKRIPSI

Oleh:

SUHARNI
NIM: 05510030

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG

2009

KAJIAN KEKONVERGENAN INTEGRAL LEBESGUE

SKRIPSI

Oleh:

SUHARNI
NIM: 05510030

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2009

KAJIAN KEKONVERGENAN INTEGRAL LEBESGUE

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
SUHARNI
NIM: 05510030

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2009

KAJIAN KEKONVERGENAN INTEGRAL LEBESGUE

SKRIPSI

Oleh:
SUHARNI
NIM: 05510030

Telah Disetujui untuk Diuji
Malang, 25 November 2009

Dosen Pembimbing I,	Dosen Pembimbing II,
Hairur Rahman, M. Si	**Abdussakir, M.Pd**
NIP. 19800429 200604 1 003	**NIP. 19751006 200312 1 001**

Tanggal, 25 November 2009

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

KAJIAN KEKONVERGENAN INTEGRAL LEBESGUE

SKRIPSI

Oleh :
SUHARNI
NIM : 05510030

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal :
25 November 2009

Susunan Dewan Penguji			Tanda Tangan
1. Penguji Utama	:	**Dr. Makbul Muksar, M. Si** NIP. 19681103 199203 1 002	( )
2. Ketua	:	**Usman Pagalay, M. Si** NIP. 19650414 200312 1 001	( )
3. Sekretaris	:	**Hairur Rahman, M. Si** NIP. 19800429 200604 1 003	( )
4. Anggota	:	**Abdussakir, M. Pd** NIP. 19751006 200312 1 001	( )

Mengetahui dan Mengesahkan
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M. Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERSEMBAHAN

Penulis persembahkan karya ilmiah ini kepada :

BAPAK H. ABUBAKAR DAN IBU FATMAH SERTA SAUDARA PENULIS (AMERUDDIN, SYARIFUDDIN DAN ABDURRAHMAN) YANG TERCINTA, YANG SELALU MENYAYANGI DAN MENDO'AKAN PENULIS, MEMBERIKAN BANTUAN MORIL DAN MATERIIL, SEMOGA PENULIS SELALU MENJADI KEBANGGAAN BAGI SEMUANYA.

Bapak Suaib dan Ibu Siti Sarah yang selalu memberi dukungan dan motovasi buat penulis, semoga segala kebaikannya mendapat balasan yang lebih baik dari Allah SWT

MOTTO

يُؤْتِي ٱلْحِكْمَةَ مَن يَشَآءُ ۚ وَمَن يُؤْتَ ٱلْحِكْمَةَ فَقَدْ أُوتِيَ خَيْرًا كَثِيرًا ۗ وَمَا
يَذَّكَّرُ إِلَّآ أُو۟لُوا۟ ٱلْأَلْبَٰبِ ﴿٢٦٩﴾

Allah menganugerahkan Al hikmah (kefahaman yang dalam tentang Al Quran dan As Sunnah) kepada siapa yang dikehendaki-Nya dan barangsiapa yang dianugerahi hikmah, ia benar-benar telah dianugerahi karunia yang banyak dan hanya orang-orang yang berakallah yang dapat mengambil pelajaran (dari firman Allah).

(AL-BAQARAH : 269)

A help in sincerity is not a hope repay

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini :

Nama : Suharni

Nim : 05510030

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri.

Apabila dikemudian hari nanti terdapat unsur jiplakan, maka saya bersedia untuk mempertanggungjawabkan, serta diproses sesuai peraturan yang berlaku.

Malang, 03 November 2009

Yang membuat pernyataan

SUHARNI

Nim.05510030

KATA PENGANTAR

بِسۡمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحۡمَـٰنِ ٱلرَّحِيمِ

Segala puji bagi Allah SWT, atas segala petunjuk, rahmat, hidayah serta karunia-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan Penulisan skripsi yang berjudul "***Kajian Kekonvergenan Integral Lebesgue***". Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada junjungan Nabi Besar Muhammad SAW, yang telah mengantarkan manusia kepada jaman yang terang benderang, yang kaya akan ilmu pengetahuan.

Dalam keadaan yang penuh perjuangan dan suka cita, penulisan skripsi ini banyak pihak yang telah berjasa untuk turut memperlancar proses penyusunan skripsi ini tampa hambatan dan halangan yang berarti. Oleh karena itu penulis mengucapkan terima kasih yang tiada terhingga kepada :

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo selaku Rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Suminto, SU. DSc selaku Dekan Fakultas Sains dan Tekhnologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd selaku Ketua Jurusan Matematika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang serta sebagai pembimbing integrasi agama dan sains dalam menyelesaikan skripsi ini.
4. Hairur Rahman, M,Si selaku dosen pembimbing I yang telah menyempatkan diri dan meluangkan waktunya untuk memberikan bimbingan dan mengarahkan penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.

5. Usman Pagalay, M.Si selaku dosen wali matematika penulis yang setia memberikan pangarahan, dorongan, dan arahan serta dukungan yang kuat dari awal masuk kulyah sampai selesainya penulisan skripsi ini.
6. Segenap dosen jurusan matematika yang telah memberikan ilmu pengetahuan, arahan, dan dorongan dalam menuntut ilmu di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
7. Bapak dan ibu tercinta, yang selalu menyayangi penulis, semoga penulis selalu menjadi kebanggaan bagi bapak dan ibu.
8. Bapak Suaib dan Ibu Siti Sarah yang selalu memberi dukungan dan motivasi serta kesabarannya dalam membimbing penulis.
9. Sahabat-sahabat Matematika angkatan 2005 yang selalu saling memotivasi dan menyelesaikan studi di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibarahim Malang.
10. Kakak dan adik penulis serta semua sepupu penulis (Annisah Mujriyati, Ilyas, Khairunnisah, Miftahus Sa'adah, Nurhidayah, Rafiudin, Fatimah), Nur Arofah, Maftuhal Jannah. Semoga tetap selalu menjaga parsaudaraan, kesederhanaan dan kebersamaan kita di rantauan ini akan selalu terjalin dan tidak terputus sampai di Bima nanti.
11. Sahabat-sahabat penulis (Zulaihah, Iva Septaria, Denok Sanggrahati, Fauziah, Khoirul Ummah). *Thanks you for All.*

Semoga segala kebaikan dijadikan sebagai amalan yang akan mendapatkan balasan yang lebih baik dari Allah SWT dan segala keburukan diampuni oleh Allah SWT, Amiin…

Penulis berharap semoga karya tulis sedikit ini menjadi amalan jariyah dan dapat bermanfaat bagi penulis khususnya dan bagi pembaca pada umumnya serta bagi perkembangan ilmu pengetahuan di bidang Matematika terutama di UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Malang, November 2009

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL
HALAMAN PENGAJUAN
HALAMAN PERSETUJUAN
HALAMAN PENGESAHAN
HALAMAN PERNYTAAN KEASLIAN TULISAN
HALAMAN MOTTO
HALAMAN PERSEMBAHAN
KATA PENGANTAR…………………………………………………..………..…i
DAFTAR ISI……………………………………………………………….........iv
ABSTRAK……………………………………………...………………..……...vi
DAFTAR SIMBOL…………………………………………........……………..…vii
BAB 1 PENDAHULUAN
1.1 Latar Belakang……………………………………………………………1
1.2 Rumusan Masalah…………………………………...…………………4
1.3 Tujuan Penelitian………………………………………………………..4
1.4 Batasan Masalah…………………………………...………...………..4
1.5 Manfaat Penelitian…………………………………………..………………4
1.6 Metode Penelitian……………………………………………..…………..5
1.7 Sistematika Penulisan…………………………………………..………..6

BAB II KAJIAN TOERI
2.1 Sifat Kelengkapan pada $\mathbb{R}$ ……………..……………..……..……………..7
2.2 Barisan…………………………………....……………..………………11
2.3 Fungsi……………………………………………………………………19
2.4 Ukuran ……………………………....………...……………………....20
2.5 Fungsi Terukur…………………………………………………………...22
2.6 Konvergensi Barisan Fungsi Terukur……………………………………....24
2.7 Integral Riemann…………………………………………………………....26

BAB 1I1 PEMBAHASAN

3.1 Kekonvergenan dalam Kajian Keislaman……………….…..…...……..44
3.2 Integral Lebesgue Fungsi Terbatas pada Himpunan Berukuran Berhingga..46
3.3 Integral Fungsi Non Negtaif pada Himpunan Berukuran Berhingga…....57
3.4 Integral Lebesgue Fungsi Terukur Sebarang pada Himpunan Berukuran Berhingga..………......63

BAB IV PENUTUP

4.1 Kesimpulan……………………………..…………………….....…71
4.2 Saran……………………………………………………………..……72

DAFTAR PUSTAKA

LAMPIRAN

DAFTAR SIMBOL

Simbol	Arti Lambang dan Singkatan
$\in$	Anggota
$\notin$	Bukan Anggota
$\ni$	Sedemikian Hingga
$\exists$	Terdapat / Ada
$\forall$	Untuk Setiap
$\cup$	Union / Gabungan
$\cap$	Integrseksi
$\supset$	Memuat
$\subset$	Termuat
A^c	Komplemen Himpunan A
$A \rightarrow B$	Jika A maka B
$A \leftrightarrow B$	A jika dan hanya jika B
$\langle \quad \rangle$	Barisan
$\{ \quad \}$	Himpunan
$\mid \quad \mid$	Harga mutlak
$\mathbb{N}$	Himpunan Semua Bilangan Asli
$\mathbb{R}$	Himpunan Semua Bilangan Real
$\mathcal{R}\,[a,b]$	Koleksi fungsi terintegral Riemann pada $[a,b]$
$\mathcal{L}\,[a,b]$	Koleksi fungsi terintegral Lebesgua pada $[a,b]$
∞	Tak berhingga
$<$	Kurang dari
$>$	Lebih dari
$\leq$	Kurang dari atau sama dengan
$\geq$	Lebih dari atau sama dengan
$\emptyset$	Himpunan kosong
$\sum$	Sigma
inf	Infrimum
sup	Suprimum
$\underline{lim}$	Lemit Inferior
$\overline{lim}$	Limit Superior
$\underline{lim}\, E_n$	Limit inferior dari barisan (E_n)
$\overline{lim}\, E_n$	Limit superior dari barisan (E_n)
$\mu(E)$	Ukuran E
$\mu\big((a,b)\big)$	Ukuran selang terbuka (a,b)
$\mu^*(E)$	Ukuran luar
$\mu_*(E)$	Ukuran dalam
$(\mathcal{L})\int_E f\, d\mu$	Integral Lebesgue fungsi f pada E

DEPARTEMEN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang (0341)551345
Fax. (0341)572533

KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Suharni
Nim : 05510030
Fakultas/ jurusan : Sains dan Teknologi / Matematika
Judul skripsi : Kajian Kekonvergenan Integal Lebesgue
Pembimbing I : Hairur Rahman, M.Si.
Pembimbing II : Abdussakir, M.Pd.

No	Tanggal	HAL	Tanda Tangan	
1	28 Mei 2009	Konsultasi Masalah	1.	
2	15 Juni 2009	Konsultasi Bab I		2.
3	25 Juni 2009	Konsultasi Bab II	3.	
4	20 Juli 2009	Revisi Bab I dan Bab II		4.
5	3 Agustus 2009	Kajian Keagamaan Bab I	5.	
6	24 Agustus 2009	Konsultasi Bab III		6.
7	29 Agustus 2009	Revisi Bab III	7.	
8	02 September 2009	Keagamaan Bab II dan III		8.
9	05 Oktober 2009	Revisi Bab I, II dan III	9.	
10	06 Oktober 2009	Konsultasi Bab IV		10.
11	04 November 2009	Bab I, II, III dan IV	11.	
12	07 November 2009	Acc keseluruhan		12.

Malang, November 2009

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M. Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

CURICULUM VITAE

NAMA LENGKAP : SUHARNI
JENIS KELAMIN : PEREMPUAN
TEMPAT & TGL. LAHIR : BIMA, 24 MARET 1986
ALAMAT ASAL : JLN.PARADO RT/RW 12/04 TANGGA-MONTA-BIMA-NTB
ALAMAT Di MALANG : JLN. RAYA MULYOAGUNG N0.257 SENGKALING DAU MALANG
RIWAYAT PENDIDIKAN :

NAMA SEKOLAH	TAHUN MASUK- TAHUN LULUS
SDN INPRES TANGGA II	1993 - 1998
SLTP NEGERI 1 MONTA BIMA	1998 -2001
MAN 1 KOTA BIMA	2001 - 2004
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG	2005 - 2009

ABSTRAK

Suharni, 2009. **Kajian Kekonvergenan Integral Lebesgue**. Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Pembimbing : (1) Hairur Rahman, M.Si

(2) Abdussakir, M.Pd

Kata Kunci : Kekonvergenan, Integral Lebesgue

Teori Integral adalah salah satu ilmu yang termasuk di dalam kelompok Analisis, seperti ilmu-ilmu yang lain di dalam matematika. Terdapat dua konsep Integral, yaitu integral tentu dan integral tak tentu. Integral Lebesgue merupakan integral yang dikembangkan lewat ukuran lebesgue. Integral Lebesgue di operasikan pada fungsi terbatas yang di definisikan pada suatu himpunan berukuran berhingga, fungsi non negatif dan fungsi-fungsi sebarang.

1. Pada fungsi terbatas yang terukur pada $[a, b]$ terintegral lebesgue jika $(\mathcal{L}) \int_{\underline{a}}^{b} f \, d\mu = (\mathcal{L}) \int_{a}^{\overline{b}} f \, d\mu$
2. Pada fungsi terukur tak negatif terintegral lebesgue pada $[a, b]$ jika $(\mathcal{L}) \int_a^b f < \infty$
3. Pada fungsi terukur sebarang terintegral lebesgue jika kedua fungsi f^+ dan f^- masing-masing terintegral pada $[a, b]$, dan didefinisikan $(\mathcal{L}) \int_a^b f = (\mathcal{L}) \int_a^b f^+ - (\mathcal{L}) \int_a^b f^-$

Masalah kekonvergenan merupakan salah satu masalah cukup penting dalam setiap pembahasan teori Integral, masalah kekonvergenan suatu barisan fungsi yang terdefinisi pada suatu himpunan terukur, maka masalah itulah yang dikenal sebagai kekonvergenan dalam Integral Lebesgue. Dalam integral Lebesgue berlaku teorema kekonvergenan terbatas, teorema kekonvergenan monoton dan kekonvergenan lebesgue. Jika diketahui barisan fungsi $\{f_n\}$ konvergen ke f h.d pada $[a, b]$ dan untuk setiap n, fungsi f_n terintegralkan pada $[a, b]$ maka diperlukan fungsi f terintegralkan pada selang yang sama dan berlaku $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b \lim f_n = \int_a^b f$.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pertumbuhan ilmu pengetahuan telah terjadi sejak Rasulullah SAW mendakwahkan agama Islam, wahyu pertamanya yaitu surat Al-Alaq ayat 1-5 bercerita tentang dasar-dasar ilmu pengetahuan, didalam wahyu tersebut tardapat perintah untuk membaca, Allah pun menegaskan bahwa hakikat ilmu datangnya dari Allah dan awalnya manusia tidak mengetahui apa-apa. Kata Iqra’ pada ayat ke-1 surat Al-Alaq memiliki makna yang beragam, seperti menelaah, mendalami, meneliti, mengetahui ciri sesuatu, membaca baik teks maupun bukan.

Dari hari ke hari kemajuan ilmu pengetahuan dan tekhnologi semakin canggih, kita seolah diperbudak oleh zaman. Tapi tidaklah selalu demikian, hal ini tergantung pada sikap dan mental kita untuk lebih menghadapi dan memahami dampak-dampak dari perkembangan ilmu pengetahuan tersebut dan mesti menempatkannya untuk hal kebaikan dunia dan akherat. Disinilah bukti bahwa Allah SWT, pemilik segala ilmu, menunjukan segala kekuasaan-Nya bagi orang-orang berakal dan beriman untuk lebih giat menuntut ilmu agar manusia mengenal siapa dirinya dan siapa Tuhannya, sehingga ia menjadi manusia yang bertaqwa dan berakhlak mulia. Menuntut ilmu dalam ajaran Islam adalah suatu yang sangat diwajibkan bagi setiap muslim, baik menuntut ilmu agama maupun ilmu pengetahuan lainnya.

Hal ini disebutkan dalam Al-Hadits sebagai berikut bahwa pentingnya menuntut ilmu bagi setiap muslim :

طَلَبُ العِلمِ فَرِيضَةٌ عَلَى كُلِّ مُسلِمٍ وَمُسلِمَةٍ (روه إبن عبد البر)

Artinya : "*Mencari ilmu itu wajib bagi setiap orang islam laki-laki dan perempuan*".

Rasulullah memerintahkan untuk menuntut ilmu sampai ke negeri Cina. Sesuai Al-Hadits

أُطلُبُواالعِلمِ وَلَو بِالصِّين (روه ابد عدى والبيهقى)

Artinya : "*Carilah ilmu walau di negeri cina*".

Ini merupakan indikasi nyata bahwa pentingnya menuntut ilmu pengetahuan. Kalau kita pahami, tentu belajar ke Cina bukanlah belajar tafsir atau agama, pasti adalah belajar dalam ilmu pengetahuan, teknologi, industri, dan perdagangan.

Dalam mempelajari ilmu pengetahuan tentu di dalamnya mempelajari matematika, integral merupakan salah satu topik matematika. Tardapat dua konsep integral, yaitu Integral tentu dan Integral tak tentu. Teori integral memiliki peranan yang sangat signifikan dalam perkembangan teknologi modern. Hal ini karena perkembangan teknologi sering diiringi munculnya masalah-masalah yang berkaitan dengan proses pengintegralan sebagai langkah utama dalam menyelesaikan persamaan-persamaan diferensial di bidang matematika, fisika maupun teknik sebagai ilmu-ilmu yang menopang perkembanagn teknologi (Edwin, 1984).

Newton (1642-1727) adalah seorang matematikawan yang pertama kali menyusun suatu teori integral yang selanjutnya disebut teori Integral Newton. Teori Integral Newton ini kemudian memicu perkembangan teori lain, yang terbukti dengan munculnya beberapa matematikawan seperti Riemann (1826-1866), Stieljes (1856-1894), (Bartle, 1982).

Pada tahun 1902 Lebesgue, seorang matematikawan perancis mencermati ada fungsi yang tidak terintegral Riemann yaitu fungsi yang nilainya 0 dan 1. Selanjutnya Lebesgue menyusun teori ukuran yang dikenal dengan nama Ukuran Lebesgue. Dengan menggunakan teori ukuran tersebut, Lebesgue menyusun teori integral baru yang dikenal dengan nama *Integral Lebesgue*. Integral ini merupakan perluasan dari Integral Riemann karena jika fungsi f terintegral Riemann pada $[a, b]$ maka fungsi f juga terintegral lebesgue pada $[a, b]$. Koleksi fungsi terintegral Riemann pada $[a, b]$ dinyatakan oleh $\mathcal{R}\,[a, b]$ dan koleksi fungsi terintegral Lebesgue dinyatakan oleh $\mathcal{L}\,[a, b]$. Pada Integral Riemann fungsi yang diintegralkan daerah jelajahnya adalah $\mathbb{R}$, yaitu himpunan bilangan real sedangkan pada Integral Lebesgue, fungsi yang diintegralkan daerah jelajahnya adalah himpunan-himpunan terukur (Hutahean, 1989).

Integral Lebesgue merupakan kejadian yang lebih umum daripada Integral Riemann. Integral lebesgue dioperasikan pada fungsi terbatas yang didefinisikan pada suatu himpunan berukuran berhingga, fungsi non negative dan fungsi-fungsi sebarang. Masalah kekonvergenan merupakan salah satu masalah yang cukup penting dalam setiap pembahasan teori Integral, maka masalah kekonvergenan suatu barisan fungsi terdefinisi pada suatu himpunan terukur, masalah itulah yang dikenal sebagai kekonvergenan dalam Integral Lebesgue. Permasalahan tersebut pada prinsipnya mencari syarat cukup agar limit barisan terintegralkan juga terintegralkan Lebsgue.

Berdasarkan uraian di atas, maka masalah utama dalam penulisan skripsi ini adalah mengakaji lebih dalam mengenai **Konvergensi Integral Lebesgue** pada fungsi yang bernilai real.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka permasalahan yang di ambil dalam penulisan ini adalah Bagaimana sifat konvergensi Integral Lebesgue?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan penulisan adalah untuk memahami sifat konvergensi Integral Lebesgue.

1.4 Batasan Masalah

Definisi integral lebesgue dapat dibedakan dari berbagai macam fungsi, yaitu fungsi sederhana untuk fungsi terbatas atas himpunan ukuran berhingga, untuk fungsi non negatif dan untuk fungsi sebarang. Untuk menghindari salah penafsiran terhadap permasalahan yang muncul maka perlu adanya batasan masalah pembahasan ini di fokuskan pada fungsi bernilai real pada $[a, b]$.

1.5 Manfaat Penelitian

1. Manfaat Bagi Penulis

   Dengan tersusunnya skripsi ini, penulis dapat memperdalam dan mengembangkan wawasan disiplin ilmu yang telah dipelajari, khususnya masalah kekonvergenan integral Lebesgue.

2. Manfaat Bagi Pembaca

Sebagai pemula pembahasan yang bisa dilanjutkan serta dapat mengembangkan teorema-teorema yang terkait, berdasarkan hipotesis, definisi serta teorema-teorema yang ada dan contoh-contoh yang ada.

3. Manfaat Bagi Instansi

Untuk menambah perbendaharaan karya tulis ilmiah sehingga dapat memberikan informasi tentang ilmu analisis dalam matematika, khususnya tentang kekonvergenan integral lebesgue.

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah kajian pustaka.

a. Mengumpulkan bahan kajian dari literatur-literatur.

b. Memahami teori-teori yang mendukung dalam mengkaji kekonvergenan Integral Lebesgue.

c. Mempelajari kekonvergenan integral Lebesgue untuk fungsi-fungsi sederhana, integral Lebesgue untuk fungsi-fungsi terbatas, integral Lebesgue untuk fungsi-fungsi non negative dan integral Lebesgue untuk fungsi-fungsi sebarang.

d. Konsultasi dengan dosen pembimbing.

1.7 Sistematika Penulisan

Untuk memperoleh gambaran yang dapat dimengerti dan menyeluruh mengenai rancangan isi dari penulisan skripsi ini secara global dapat dilihat dari sistematika pembahasan dibawah ini :

BAB I PENDAHULUAN

Berisikan tentang Latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II KAJIAN TEORI

Menjelaskan tentang teori-teori yang mendukung pada bab pembahasan. Adapun teori pendukung adalah sifat kelengkapan pada $\mathbb{R}$, barisan, fungsi, ukuran, fungsi terukur, konvergensi barisan fungsi terukur dan Integral Riemann.

BAB III PEMBAHASAN

Membahas mengenai kekonvergenan Integral Lebesgue yang dimulai pada integral lebesgue fungsi terbatas pada himpunsn berukuran berhingga, integral fungsi non negatif pada himpunan berukuran berhingga dan integral Lebesgue fungsi terukur sebarang pada himpunan berukuran berhingga serta kekonvergenan dalam kajian keislaman.

BAB IV PENUTUP

Berisikan kesimpulan dan saran-saran.

BAB II

KAJIAN TEORI

Dalam mengkaji kekonvergenan Integral Lebesgue dibutuhkan teori-teori yang mendukung pembahasan pada bab berikutnya. Adapun teori pendukung adalah sifat kelengkapan pada $\mathbb{R}$, barisan, fungsi, ukuran, fungsi terukur, konvergensi fungsi terukur dan Integral Riemann.

2.1 Sifat Kelengkapan Pada $\mathbb{R}$

Dalam Al-Qur'an surat An-Nuur ayat 45, Allah berfirman :

وَٱللَّهُ خَلَقَ كُلَّ دَآبَّةٖ مِّن مَّآءٖۖ فَمِنۡهُم مَّن يَمۡشِي عَلَىٰ بَطۡنِهِۦ وَمِنۡهُم مَّن يَمۡشِي عَلَىٰ رِجۡلَيۡنِ وَمِنۡهُم
مَّن يَمۡشِي عَلَىٰٓ أَرۡبَعٖۚ يَخۡلُقُ ٱللَّهُ مَا يَشَآءُۚ إِنَّ ٱللَّهَ عَلَىٰ كُلِّ شَيۡءٖ قَدِيرٞ ٤٥

Artinya :*"Dan Allah Telah menciptakan semua jenis hewan dari air, Maka sebagian dari hewan itu ada yang berjalan di atas perutnya dan sebagian berjalan dengan dua kaki sedang sebagian (yang lain) berjalan dengan empat kaki. Allah menciptakan apa yang dikehendaki-Nya, Sesungguhnya Allah Maha Kuasa atas segala sesuatu".*

Dalam ayat 45 surat *An-Nuur* ini dijelaskan sekelompok, segolongan atau sekumpulan makhluk yang disebut hewan. Dalam kelompok hewan tersebut ada sekelompok yang berjalan tanpa kaki, dengan dua kaki, empat, atau bahkan lebih sesuai yang dikehendaki Allah.

Serta dalam surat *Al Faathir ayat 1* juga dijelaskan mengenai himpunan,

Artinya :*"segala puji bagi Allah pencipta langit dan bumi, yang menjadikan malaikat sebagai utusan-utusan (untuk mengurus berbagai macam urusan) yang mempunyai sayap, masing-masing (ada yang) dua, tiga dan empat. Allah menambahkan pada ciptaan-Nya apa yang dikehendaki-Nya. Sesungguhnya Allah Maha Kuasa atas segala sesuatu".*

Berdasarkan dua ayat tersebut, yaitu QS 24:45 dan QS 35:1 terdapat dua konsep yang terkandung di dalamnya dan dapat dikembangkan lebih lanjut. *Pertama,* konsep bilangan yang masing-masing ayat tersebut dinyatakan dalam banyak sayap dan banyak kaki. *Kedua,* konsep mengenai kelompok atau kumpulan objek-objek dengan sifat tertentu yang disebut himpunan.

Himpunan didefinisikan sebagai kumpulan objek-objek yang terdefinisi dengan jelas. Objek yang dimaksud dalam definisi tersebut mempunyai makna yang sangat luas. Objek dapat berwujud benda nyata dan dapat juga berwujud benda akstrak. Objek-objek yang termasuk dalam suatu himpunan disebut unsur atau anggota himpuanan.

Sifat kelengkapan himpunan bilangan $\mathbb{R}$ akan menjamin keberadaan unsur-unsur pada $\mathbb{R}$ terhadap hipotesa tertentu. Sistem bilangan-bilangan rasional $\mathbb{Q}$ memenuhi sifat aljabar dan sifat urutan bilangan, tetapi diketahui bahwa tidak dapat dinyatakan sebagai suatu bilangan rasional, maka tidak termuat pada $\mathbb{Q}$. Untuk menunjukan hal tersebut diperlukan sifat tambahan, sifat kelengkapan (sifat supremum), adalah sifat-sifat istimewa dari $\mathbb{R}$.

Definisi 2.1.1 (Batas Atas dan Batas Bawah)

Misalkan E adalah sebuah himpunan bagian di $\mathbb{R}$.

1. E disebut terbatas (bounded) jika terbatas di atas dan terbatas di bawah.
2. E disebut terbatas di atas (bounded above) jika terdapat $v \in \mathbb{R}$ sehingga $x \leq v$ untuk semua $x \in E$ dan v disebut batas atas (upper bounded) untuk E.

3. E disebut terbatas di bawah (bounded below) jika terdapat $u \in \mathbb{R}$ sehingga $u \leq x$ untuk semua $x \in E$ dan u disebut batas bawah (lower bound) untuk E.

(Bartle,1982)

Contoh 2.1.2

1. Misalkan $A = \{1,2,3,4,5,6\}$. Himpunan A terbatas di atas karena $a \leq 8$, untuk semua $a \in A$ Himpunan A juga terbatas dibawah karena $0 \leq a$, untuk semua $a \in A$. Semua bilangan real $v \geq 6$ merupakan batas atas untuk A dan semua bilangan real $u \leq 1$ merupakan batas bawah untuk A. Jadi himpunan A adalah terbatas.
2. Himpunan bilangan asli $\mathbb{N} = \{1,2,3,4,\ldots\}$ terbatas dibawah dan 1 merupakan batas bawah, tetapi tidak terbatas di atas. Jika diberikan $v \in \mathbb{R}$ maka terdapat $n \in \mathbb{N}$ sehingga $n > v$.

Definisi 2.1.3 (Supremum)

Misalkan $E \subseteq \mathbb{R}, E \neq \emptyset$, dan terbatas di atas, $v \in \mathbb{R}$ disebut batas atas terkeil (supremum) dari E jika

(1). $x \leq v$, untuk semua $x \in E$

(2). $v \leq s$, untuk semua s batas atas dari E.

Definisi di atas menyatakan bahwa agar $v \in \mathbb{R}$ menjadi supremum dari E maka (1) v haruslah batas atas dari E, dan (2) v selalu kurang dari batas atas yang lain di E.

Definisi 2.1.4 (Infimum)

Misalkan $E \subseteq \mathbb{R}, E \neq \emptyset$, dan terbatas di bawah, $u \in \mathbb{R}$ disebut batas bawah terbesar (infimum) dari E jika

(1). $u \leq x$, untuk semua $x \in E$

(2). $s \leq u$, untuk semua s batas bawah dari E.

Definisi di atas menyatakan bahwa agar $u \in \mathbb{R}$ menjadi infimum dari E maka (1) u haruslah batas atas dari E, dan (2) u selalu lebih dari batas bawah yang lain di E (Rahman,2008)

Contoh 2.1.5

1. Himpunan $E = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\} = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$, terbatas di atas oleh sebarang bilangan real $v \geq 1$ dan terbatas di bawah oleh sebarang bilangan real $u \leq 0$. Batas atas terkecil (Supremum) adalah 1 dan batas bawah terbesar (Infimum) adalah 0.
2. Himpunan kosong, yaitu $\emptyset$, terbatas di atas dan terbatas di bawah oleh semua bilangan $x \in \mathbb{R}$. Dengan demikian, $\emptyset$ tidak mempunyai batas atas terkecil dan batas bawah terbesar.

Sesuai dengan definisi mengenai batas atas dan batas bawah suatu himpunan yang dinyatakan pada definisi di atas, berikut ini diberikan contoh himpunan yang terbatas dan himpunan yang tak terbatas.

Contoh 2.1.6

Himpunan $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 5\}$ terbatas di atas, dan Himpunan $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$ terbatas di bawah. Misalkan $A = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$. A adalah himpunan terbatas.

Himpunan bilangan Asli $\mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\}$. $\mathbb{N}$ adalah himpunan tak terbatas, walaupun himpunan tersebut terbatas di bawah.

2.2 Barisan

Definisi 2.2.1

Barisan bilangan real (barisan di $\mathbb{R}$) adalah suatu fungsi dari himpunan asli $\mathbb{N}$ ke himpunan bilangan real $\mathbb{R}$.

Contoh 2.2.2

Diberikan fungsi $X : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan dengan

$$X(n) = n, \quad n \in \mathbb{N},$$

maka x adalah barisan di $\mathbb{R}$

Demikian juga

fungsi $Y : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan dengan

$$Y(n) = \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

adalah barisan di $\mathbb{R}$

Berdasarkan definisi 2.2.1 dapat pula dinyatakan bahwa barisan di $\mathbb{R}$ memasangkan masing-masing bilangan asli $n \in \mathbb{N}$ dengan bilangan real tertentu dan tunggal. Bilangan real yang diperoleh disebut dengan unsur barisan, nilai barisan, atau suku barisan. Bilangan real yang dipasangkan dengan $n \in \mathbb{N}$ biasanya dinotasikan dengan x_n, y_n, atau z_n

Jika $X : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ adalah barisan, maka unsur ke n dari X dinotasikan dengan x_n, tidak dinotasikan dengan $X(n)$. sedangkan barisan itu sendiri dinotasikan dengan $X, (x_n)$ atau $(x_n \mid n \in \mathbb{N})$. Barisan X dan Y pada contoh di atas, masing-masing dapat dinotasikan dengan

$$X = (n \mid n \in \mathbb{N}) \text{ dan } Y = \left(\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right)$$

Penggunaan tanda kurung ini akan membedakan antara barisan $X = (x_n \mid n \in \mathbb{N})$. dengan himpunan $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Sebagai contoh $X = ((-1)^n \mid n \in \mathbb{N})$ adalah barisan yang unsur-unsurnya selang-seling antara -1 dan 1, sedangkan $\{(-1)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ adalah himpunan yang unsur-unsurnya adalah -1 dan 1, yaitu $\{-1,1\}$.

Dalam mendefinisikan barisan, kadang ditulis secara berurutan unsur-unsur dalam barisan, sampai rumus untuk barisan tersebut nampak.

Contoh 2.2.3

Barisan $X = (2,4,6,8,19, \dots, 2n, \dots)$ menyatakan barisan bilangan asli genap. Sedangkan salah satu rumus umumnya adalah

$$X = (2n \mid n \in \mathbb{N}).$$

Barisan

$$Y = \left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right)$$

Menyatakan barisan yang salah satu rumus umumnya adalah

$$X = \left(\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right).$$

Kadang kala, rumus umum suatu barisan dinyatakan secara rekursif, yaitu ditetapkan unsur x_1 dan rumus untuk $x_{n+1} (n \geq 1)$ setelah x_n diketahui.

Sebagai contoh barisan bilangan bulat genap positif dapat dinyatakan dengan rumus

$$x_1 = 2, \; x_{n+1} = x_n + 2, (n \geq 1)$$

Atau dengan rumus

$$x_1 = 2,\;\; x_{n+1} = x_1 + x_n, (n \geq 1)$$

Definisi 2.2.4 (Barisan Konvergen)

Barisan $\{a_n\}$ dikatakan konvergen ke L, notasi $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada bilangan asli $\mathbb{N}$ sehingga $|a_n - L| < \varepsilon$ bila $n > N$.

(Hutahean, 1994)

Contoh 2.2.5

Akan ditunjukkan bahwa $\lim\left(\frac{1}{n}\right) = 0$.

Untuk menunjukan hal ini, ambil sebarang $\varepsilon > 0$, maka $\frac{1}{\varepsilon} > 0$.

Sesuai sifat Archimides, maka terdapat bilangan asli $K > \frac{1}{\varepsilon}$.

Berarti untuk setiap bilangan asli n dengan $n \geq K$

Maka diperoleh $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Berarti jika $n \geq K$, maka

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

Karena $\varepsilon > 0$ diambil sebarang, berarti untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli K Sehingga untuk semua $n \geq K$, maka

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

Contoh 2.2.6

Akan ditunjukan bahwa barisan $X = (1 + (-1)^n | n \in \mathbb{N}\ )$ tidak konvergen ke 0.

Untuk menunjukan bahwa X tidak konvergen ke 0, maka ambil $\varepsilon > 0$ tetapi tidak ada bilangan asli K, sehingga berlaku

$$|x_n - 0| < \varepsilon$$

Jika $n \geq K$ Pilih $\varepsilon = 1 > 0,$ berapapun nilai K dipilih, maka akan ada n bilangan asli genap dengan $n \geq K$ karena n genap, maka x_n=2.

Hal ini berarti bahwa

$$|x_n - 0| = |2 - 0| = 2 > 1 = \varepsilon$$

Hal ini berarti 0 bukan lim dari $\mathbb{Z}$.

Teorema 2.2.7

Limit suatu barisan (jika ada) adalah tunggal.

(Hutahean, 1994)

Bukti

Misalkan $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ dan $\lim_{n\to\infty} a_n = M$ andaikan $L \neq M;$ tanpa mengurangi keumuman pembuktian, misalkan $L > M$.

Ambillh $\varepsilon = \frac{L-M}{2}$, maka ada bilangan asli $\mathbb{N}_1$ dan $\mathbb{N}_2$ sehingga $|a_n - L| < \frac{L-M}{2}$ bila $n > \mathbb{N}_1$ dan $|a_n - M| < \frac{L-M}{2}$ bila $n > \mathbb{N}_2$

Ambillah $\mathbb{N} = maks\,\{\mathbb{N}_1, \mathbb{N}_2\}$.

Bila $n > \mathbb{N},$ maka

$\frac{L+M}{2} = L - \frac{L-M}{2} < a_n < L + \frac{L-M}{2}$ dan $M - \frac{L-M}{2} < a_n < M + \frac{L-M}{2} = \frac{L+M}{2}$ Hal ini mustahil. Jadi pengandaian $L \neq M$ salah, sehingga terbuktilah $L = M$.

Definisi 2.2.8 (Monoton Naik dan Monoton Turun)

Suatu barisan bilangan real $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dikatakan

1. Naik monoton jika $a_n \leq a_{n+1}$ untuk $n \in \mathbb{N}$
2. Turun monoton jika $a_n \geq a_{n+1}$untuk $n \in \mathbb{N}$

3. Barisan yang naik monoton dan barisan yang turun monoton disebut barisan monoton.

(Stoll,2001)

Contoh 2.2.9

1. Barisan $X = (x_n) = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

   Untuk $n = 1$, maka $(x_n) = \left(1 + \frac{2}{1}\right)^1 = 3$

   Untuk $n = 2$, maka $(x_n) = \left(1 + \frac{2}{2}\right)^2 = \left(\frac{4}{2}\right)^2 = 4$

   Untuk $n = 3$, maka $(x_n) = \left(1 + \frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{5}{3}\right)^3 = 4{,}63$

   Untuk $n = 4$, maka $(x_n) = \left(1 + \frac{2}{4}\right)^4 = \left(\frac{6}{4}\right)^4 = 5{,}1$

   Untuk $n = 5$, maka $(x_n) = \left(1 + \frac{2}{5}\right)^5 = \left(\frac{7}{5}\right)^5 = 5{,}4$

   .

   .

   .

   $$X = (x_n) = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

   Jadi $(x_n) = \left(3, 4, (4{,}63), (5{,}1), (5{,}4), \dots, \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n, \dots\right)$

   Karena $x_1 = 3 < x_2 = 4 < x_3 = 4{,}63 < \cdots < x_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n < \cdots$

   Maka barisan monoton naik.

2. Barisan $(x_n) = (1 + 2n)^{\frac{1}{n}}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

   Untuk $n = 1$, maka $(x_n) = (1 + 2.1)^{\frac{1}{1}} = 3$

Untuk $n = 2$, maka $(x_n) = (1 + 2.2)^{\frac{1}{2}} = (5)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5} = 2{,}236$

Untuk $n = 3$, maka $(x_n) = (1 + 2.3)^{\frac{1}{3}} = (7)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{7}$

.

.

.

$(x_n) = (1 + 2n)^{\frac{1}{n}}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

Jadi $(x_n) = \left(3, \sqrt{5}, \sqrt[3]{7}, \sqrt[4]{9}, \dots, (1 + 2n)^{\frac{1}{n}}, \dots\right)$

Karena $x_1 = 3 > x_2 = \sqrt{5} > \cdots > x_n = (1 + 2n)^{\frac{1}{n}} > \cdots$

Maka barisan monoton turun.

Contoh 2.2.10

1. Barisan $X = (x_n) = (2,4,6, \dots, 2n, \dots)$ adalah barisan monoton naik
2. Barisan $Y = (y_n) = (-1, -2, -3, \dots, -n, \dots)$ adalah barisan monoton turun
3. Barisan $Z = (z_n) = (-1,1,-1,1,-1, \dots, (-1)^n)$ adalah barisan tidak monoton naik dan barisan tidak monoton turun

Teorema 2.2.11

Barisan yang monoton adalah konvergen jika dan hanya jika barisan itu terbatas. (Soemantri,1988)

Bukti

Diberikan barisan yang naik monoton $\langle s_n \rangle$. Jadi $s_n \leq s_{n+1}$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$. Dimisalkan derah jangkaunya $\{s_n\} = E$. Diandaikan E terbatas, jadi E tidak kosong dan terbatas ke atas. Karena $\mathbb{R}$ mempunyai sifat batas atas terkecil maka terdapat $s \in \mathbb{R}$ sehingga

$s = \sup E$ dengan demikian berlaku

$$s_n \leq s \text{ untuk semua } n \in \mathbb{N} \qquad (1)$$

Karena $s = \sup E$ maka untuk sembarang $\varepsilon > 0$ terdapat indeks p sehingga

$$s - \varepsilon < s_p \leq s \qquad (2)$$

Karena $\langle s_n \rangle$ naik monoton maka

$$s_p \leq s_n \text{ untuk semua } n \geq p \qquad (3)$$

Mengingat (1),(2) dan (3) maka $n > p$ berlaku $s - \varepsilon < s_p \leq s$.

Jadi $s - \varepsilon < s_n \leq s + \varepsilon$ atau $|s_n - s| < \varepsilon$ untuk semua $n \geq p$.

Dengan demikian terbukti $\langle s_n \rangle$ konvergen.

Jadi jelas bahwa jika $\langle s_n \rangle$ konvergen maka $\langle s_n \rangle$ terbatas.

Contoh 2.2.12

Misalkan $X = (x_n)$ barisan bilangan real dengan

$x_1 = 1$ dan $x_{n+1} = \frac{1}{4}(2x_n + 3) \quad , n \geq 1$

Akan ditunjukan bahwa $\lim x_n = \frac{3}{2}$. Dengan induksi matematika, akan ditunjukan bahwa $X = (x_n)$ adalah monoton naik, untuk $n = 1$,

diperoleh $x_1 = 1 \; dan \; x_2 = \frac{5}{4}$. Jadi, untuk $n = 1$, terbukti bahwa $x_1 \leq x_2$. Asumsikan bahwa untuk $n = k$, berlaku $x_k \leq x_{k+1}$ dan akan dibuktikan bahwa $x_{k+1} \leq x_{k+2}$. Karena $x_k \leq x_{k+1}$

Maka diperoleh

$$2x_k \leq 2x_{k+1}$$

$$2x_k + 3 \leq 2x_{k+1} + 3$$

$$\frac{1}{4}(2x_k + 3) \leq \frac{1}{4}(2x_{k+1} + 3)$$

$$x_{k+1} \leq x_{k+2}.$$

Sesuai prinsip induksi matematika, tebukti bahwa $x_n \leq x_{n+1}$.

Untuk semua $n \in \mathbb{N}$. Jadi, $X = (x_n)$ adalah monoton naik. Kedua akan ditunjukan bahwa $X = (x_n)$ adalah terbetas di atas. Sebelumnya telah diketahui bahwa $x_1 \leq x_2 < 2$. Akan ditunjukan bahwa $x_n < 2$, untuk semua $n \in \mathbb{N}$, untuk $n = 1{,}2$ telah terbukti benar. Asumsikan benar untuk $n = k$ bahwa $x_k < 2$. Akan ditunjukan bahwa $x_{k+1} < 2$. Karena $x_k < 2$, maka diperoleh

$$2x_k < 4$$

$$2x_k + 3 < 7$$

$$\frac{1}{4}(2x_k + 3) < \frac{7}{4} < 2$$

$$x_{k+1} < 2$$

Sesuai prinsip induksi matematika, maka $x_n < 2$, untuk semua $n \in \mathbb{N}$. Karena (x_n) monoton naik dan terbatas di atas, maka (x_n) konvergen. Misalkan (x_n) konvergen ke x. Karena (x_{n+1}) adalah sub barisan dari (x_n), maka (x_{n+1}) juga konvergen ke x. Jadi,

$$\text{Lim } (x_{n+1}) = \lim \left[\frac{1}{4}(2x_n + 3)\right]$$

$$\lim(x_{n+1}) = \frac{1}{4}(2 \lim x_n + 3)$$

$$4x = 2x + 3$$

Diperoleh, $x = \frac{3}{2}$. Jadi, $\lim x_n = \frac{3}{2}$

2.3 Fungsi

Sebuah fungsi f adalah sesuatu aturan korespondensi (padanan) yang menghubungkan setiap obyek x dalam suatu himpunan, yang disebut *daerah asal*, dengan sebuah nilai tunggal $f(x)$ dari suatu himpunan kedua. Himpunan nilai yang diperoleh secara demikian disebut *daerah hasil* fungsi (Rahman, 2007).

Misalnya, A dan B diketahui dua himpunan yang tidak kosong, fungsi f dari A ke B, ditulis $f : A \to B$ adalah cara pengawanan anggota A ke B yang memenuhi aturan bahwa setiap anggota A mempunyai kawan tunggal B, jika x anggota A dikawankan dengan y anggota B, maka y disebut peta dari x dan ditulis $y = f(x)$.

2.3.1 Fungsi Kontinu

Fungsi kontinu memiliki peran yang cukup penting. Hal ini dikarenakan terdapat banyak fungsi yang merupakan fungsi kontinu, misalnya fungsi trigonometri, fungsi logaritma, fungsi eksponensial dan lain sebagainya. Sehingga penerapan-penerapan yang terkait dengan fungi-fungsi tersebut tidak terlepas dari sifat-sifat yag dimiliki oleh fungsi kontinu. Sehubungna dengan hal itu, definisi yang aka diberikan berikut ini berkenaan dengan fungsi yang kontinu di suatu titik dan kontinu pada suatu himpunan.

Definisi 2.3.2

Misalkan $A \subseteq \mathbb{R}, f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ dan $c \in A$. fungsi f dikatakan kontinu di c, jika diberikan sebarang lingkungan $V_\varepsilon\big(f(c)\big)$ dari $f(c)$ maka terdapat lingkungan $V_\delta(c)$ dari c sedemikian hingga, jika x adalah sebarang titik dari $A \cap V_\delta(c)$ maka

$f(x)$ termuat pada $V_\varepsilon(f(c))$. Kemudian, jika $B \subseteq A$, fungsi f dikatakan kontinu pada B jika f kontinu di setiap titik dari B.

Contoh 2.3.3

Misalkan $I = [1,2]$ dan fungsi $f : I \to \mathbb{R}$ dengan $f(x) = 10x$.

Akan ditunjukan bahwa $f(x) = 10x$ kontinu pada $I = [1,2]$. Misalkan $c \in I$. kemudian ambil $\varepsilon > 0$, maka terdapat $\delta = \frac{\varepsilon}{10} > 0$ sedemikian sehingga untuk semua $x \in I$ dengan $|x - c| < \delta$ diperoleh

$$\begin{aligned} |f(x) - f(c)| &= |10x - 10c| \\ &= 10|x - c| \\ &< 10\left(\frac{\varepsilon}{10}\right) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Karena $c \in I$ sebarang maka diperoleh bahwa $f(x) = 10x$ kontinu pada I.

Definisi 2.3.4

Misalkan $A \subseteq \mathbb{R}, f : A \to \mathbb{R}$ Fungsi f dikatakan kontinu seragam pada A jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta(\varepsilon) > 0$ sehingga jika sebarang $x, u \in A$ memenuhi $|x - u| < \delta(\varepsilon)$, maka $|f(x) - f(u)| < \varepsilon$.

2.4 Ukuran

Ukuran suatu selang didefinisikan sebagai panjang selang tersebut. Ukuran suatu himpunan terbuka didefinisikan sebagai jumlah panjang selang-selang komponennya.

Definisi 2.4.1

Ukuran selang terbuka (a, b) dinyatakan dengan $\mu\big((a, b)\big)$ atau dengan $\mu[(a, b)]$ dan didefinisikan oleh

$$\mu(a, b) = b - a$$

Ukuran selang terbuka (a, ∞) atau $(-\infty, b)$ atau $(-\infty, \infty)$ didefinisikan sebagai

$$\mu(a, \infty) = \mu(-\infty, b) = \mu(-\infty, \infty) = \infty$$

Definisi 2.4.2

Himpunan E suatu himpunan terbatas.

Ukuran luar dinyatakan dengan $\mu^*(E)$ dan didefinisikan sebagai

$$\mu^*(E) = \inf_{G \in \varrho, G \supseteq E} \mu(G)$$

Ukuran dalam dinyatakan dengan $\mu_*(E)$ dan didefinisikan sebagai

$$\mu_*(E) = \sup_{G \in \zeta, G \supseteq E} \mu(F)$$

$\varrho =$ koleksi fungsi ukuran pada himpunan terbuka

$\zeta =$ Koleksi fungsi ukuran pada himpunan tertutup.

Definisi 2.4.3

Himpunan E dikatakan terukur, jika $\mu^*(E) = \mu_*(E)$. Jika E terukur, maka ukuran E dinyatakan dengan $\mu(E)$ dan didefinisikan sebagai $\mu(E) = \mu^*(E) = \mu_*(E)$.

Ukuran lebesgue adalah suatu fungsi himpunan bernilai real. Dalam barisan bilangan real suatu barisan adalah konvergen jika limit dan hanya jika infimumnya sama dengan limit supremumnya, maka pada barisan himpunan pun bahwa suatu barisan himpuan adalah konvergen jika dan hanya jika limit inferiornya sama dengan limit superiornya.

2.5 Fungsi Terukur

Integral Lebesgue dari fungsi f meliputi himpunan terukur $E \subseteq \mathbb{R}$ dirumuskan sebagai $\int_E f\, d\mu = \lim_{maks\ \mu(E_i)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\mu(E_i)$

dalam hal ini

$$E_i = \{x \in E :\ y_i \le f(x) < y_{i+1}\}, \quad c = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots \le y_n = d$$

$t_i \in E_i$ dipilih sebarang.

Agar nilai limit ada, jelaslah bahwa E_i harus terukur

$(i = 1,2,3,..,n-1)$ bagaimanapun caranya membagi selang $[c,d]$.

Fungsi seperti inilah yang dinamakan fungsi terukur.

Definisi 2.5.1

Fungsi bernilai real f yang didefinisikan pada himpunan terukur E disebut terukur lebesgue atau lebih sederhananya disebut terukur E jika himpunan $E(f < c)$ terukur untuk semua bilangan real c

Teorema 2.5.2

Keempat peryataan berikut ekuivalen.

1. Untuk setiap c, himpunan $E(f < c)$ terukur.
2. Untuk setiap c, himpunan $E(f \ge c)$ terukur.
3. Untuk setiap c, himpunan $E(f > c)$ terukur.
4. Untuk setiap c, himpunan $E(f \le c)$ terukur.

Bukti

$1 \to 2$ karena $E(f \ge c) = \big(E(f < c)\big)^C$, dan $E(f < c)$ terukur

maka $E(f \ge c) = \big(E(f < c)\big)^C$ terukur.

$2 \to 3$ karena $E(f > c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E\left(f \geq c + \frac{1}{n}\right)$, dan $E\left(f \geq c + \frac{1}{n}\right)$ terukur maka $E(f > c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E\left(f \geq c + \frac{1}{n}\right)$ terukur.

$3 \to 4$ karena $E(f \leq c) = \left(E(f > c)\right)^C$, dan $E(f > c)$ terukur, maka $E(f \leq c)$ terukur.

$4 \to 1$ karena $E(f < c) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E\left(f \geq c - \frac{1}{n}\right)$, dan $E\left(f \geq c - \frac{1}{n}\right)$ terukur $n = 1,2,3, \ldots$, maka $E(f < c) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E\left(f \geq c - \frac{1}{n}\right)$ terukur.

Definisi 2.5.3

Fungsi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ disebut fungsi tangga, jika ada partisi $\{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\}$ dari interval $[a, b]$, sehingga setiap subinterval $[x_{i-1}, x_i]$ fungsi f adalah konstan, yaitu $f(x) = c_i$ untuk setiap x di $[x_{i-1}, x_i]$.

Definisi 2.5.5

Misalkan E himpunan, jika $A \subset E$, maka fungsi karakteristik χ_A dari A adalah fungsi yang didefinisikan pada E. Dengan

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x = A \\ 0, & x \neq A \end{cases}$$

Definisi 2.5.6

Misalkan E_i himpunan terukur, $E_i \cap E_j = \emptyset$ $(i \neq j)$, a_i bilangan real yang diketahui $(i = 1,2,3, \ldots, n)$.

Fungsi $f : \bigcup_{i=1}^{n} E_i \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan oleh $f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i}(x)$ dinamakan fungsi sederhana.

2.6 Konvergensi Barisan Fungsi Terukur.

Definisi 2.6.1

Misalkan $\{f_n\}$ adalah barisan fungsi-fungsi terukur maka limit supremum f_n didefinisikan sebagai $\overline{\lim_{n\to\infty}} f_n$ dan limit infimum f_n didefinisikan sebagai $\underline{\lim}_{n\to\infty} f_n$.

Definisi 2.6.2

Barisan fungsi bernilai real $\{f_n\}$ yang didefiniikan pada himpunan E yang berukuran hingga disebut konvergen ke fungsi f yang bernilai real jika $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, untuk semua $x \in E$.

Contoh 2.6.3

Misalkan $f_n(x) = \frac{1}{nx}$ adalah barisan fungsi bernilai real yang didefinisikan pada himpunan E yang berukuran hingga. Hal ini berarti, $\{ f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{x}, \frac{1}{2x}, \frac{1}{3x}, \frac{1}{4x}, \ldots\right\}$ sehingga $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Karena barisan bilangan real adalah suatu fungsi dari himpunan asli ke himpunan bilangan real, jadi dapat diketahui bahwa fungsi bernilai real $\{f_n\}$ konvergen ke $f(x) = 0$.

Definisi 2.6.4

Barisan fungsi terukur (f_n) dikatakan konvergen titik demi titik ke suatu fungsi $f : A \to \mathbb{R}$, notasi $(f_n) \to f$ (titik pada A), jika $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),\ x \in A$.

Jadi $(f_n) \to f$ (titik pada A), jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ dan untuk setiap $x \in A$ ada $m \in \mathbb{N}$ sehingga $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ bila $n > m$.

Contoh 2.6.5

Diketahui $f_n(x) = x^n$, $x \in \mathbb{R}$.

Tentukan $f : A \to \mathbb{R}$ agar $(f_n) \to f$ (titik pada A).

Penyelesaian :

Dari

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} \infty & bila\ x > 1 \\ 1 & bila\ x = 1 \\ 0 & bila - 1 < x < -1 \\ tak\ ada & bila\ \ x \leq -1 \end{cases}$$

Diperoleh

$$f(x) = \begin{cases} 1 & bila\ x = 1 \\ 0 & bila - 1 < x < 1 \end{cases}$$

Misalkan $\varepsilon > 0$ sebarang diberikan.

bila $x = 1$, maka $|f_n(1) - f(1)| = |1^n - 1| = 0 < \varepsilon$ untuik setiap $n > 1$.

bila $x = 0$, maka $|f_n(0) - f(0)| = |0^n - 1| = 0 < \varepsilon$ untuik setiap $n > 1$.

bila $-1 < x < 1$, maka $|f_n(x) - 0| = |x^n| < \varepsilon$ untuik setiap $n > 1$ bila $\varepsilon \geq 1$.

$|f_n(x) - 0| = |x^n| < \varepsilon$ untuk setip $n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln|x|}$ bila $0 < \varepsilon < 1$;

dalam hal ini $m = \left[\frac{\ln \varepsilon}{\ln|x|}\right]$. Bila $0 < p < q$ maka $m_p < m_q$.

Definisi 2.6.6

Barisan fungsi terukur (f_n) dikatakan konvergen hamper dimana-mana ke suatu fungsi $f : E \to \mathbb{R}$, notasi $(f_n) \to f$ (h.d pada E), jika ada suatu himpunan $E_0 \subseteq E$ dengan $\mu(E_0) = 0$ sehingga (f_n) konvergen titik demi titik ke fungsi f pada $E - E_0$. Jadi $(f_n) \to f$ (h.d pada E). Jika ada suatu himpuan $E_0 \subseteq E, \mu(E_0) = 0$ sehingga utntuk setiap $\varepsilon > 0$ dan untuk setiap $x \in E - E_0$ ada $m \in \mathbb{N}$ sehingga $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ bila $n > m$.

2.7 Integral Riemann

Integral Riemann adalah salah satu ilmu dalam matematika, matematika disebut sebagai ilmu hitung karena pada dasarnya hakikat matematika berkaitan dengan masalah hitung-menghitung. Saat mengerjakan matematika seseorang dituntut untuk mengerjakan dengan teliti dan cermat.

Alam semesta memuat bentuk-bentuk dan konsep matematika, meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Alam semesta serta segala isinya diciptakan oleh Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan, dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi. (Abdussakir, 2007)

Adapun penerapan Al-Qur’an mengenai menghitung dengan teliti dapat disebutkan dalam Al-Qur’an Surat Maryam ayat 84, Allah berfirman :

فَلَا تَعۡجَلۡ عَلَيۡهِمۡۖ إِنَّمَا نَعُدُّ لَهُمۡ عَدّٗا ٨٤

Artinya : *“aka janganlah kamu tergesa-gesa memintakan siksa terhadap mereka, Karena Sesungguhnya kami Hanya menghitung datangnya (hari siksaan) untuk mereka dengan perhitungan yang teliti”.*

Serta disebutkan dalam surat Maryam ayat 94, Allah berfirman :

لَّقَدۡ أَحۡصَىٰهُمۡ وَعَدَّهُمۡ عَدّٗا ٩٤

Artinya : *“Sesungguhnya Allah Telah menentukan jumlah mereka dan menghitung mereka dengan hitungan yang teliti”.*

Matematika juga berkenaan dengan masalah pembuktian. Langkah-langkah dalam pembuktian matematika harus berdasarkan pada hal-hal yang sudah diakui kebenarannya.

Jika $I \coloneqq [a, b]$ adalah interval tertutup pada $\mathbb{R}$ maka partisi dari I adalah himpunan terurut $\mathcal{P} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ sehingga

$a = x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n = b$

Definisi 2.7.1

Misalkan fungsi riil dan terbatas yang didefinisikan pada selang tertutup $[a, b]$. Untuk setiap partisi $\mathcal{P}$ pada $[a, b]$ dibentuk jumlahan atas

$$U = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

dan jumlahan bawah

$$L = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

dengan

$$M_i = \sup f(x) \text{ dan } m_i = inf\ f(x) \qquad i = 1,2,3, \dots, n$$

dengan

$$x_{i-1} \leq x \leq x_n$$

maka dapat dibentuk

$$(\mathcal{R}) \int_a^{\overline{b}} f(x)\ dx = \inf\ U(\mathcal{P}, f)$$

Disebut *Integral Atas Riemann* fungsi f pada $[a, b]$ dan

$$(\mathcal{R}) \int_{\underline{a}}^{b} f(x)\ dx = \sup\ L(\mathcal{P}, f)$$

Disebut *Integral Bawah Riemann* fungsi f pada $[a, b]$.

Dengan infimum dan suprimum diambil meliputi semua partisi $\mathcal{P}$ pada $[a, b]$, jika nilai integral atas dan integral bawah sama, maka dikatakan bahwa f dapat *Terintegral Riemann* pada $[a, b]$ dan dinyatakan Riemann fungsi f pada $[a, b]$

dan dinyatakan dengan pada $f \in [a, b]$. Nilai yang sama ini dinamakan *Integral Riemann* fungsi f pada $[a, b]$ dan ditulis

$$(\mathcal{R}) \int_a^b f(x)\ dx$$

Jadi

$$(\mathcal{R}) \int_a^b f(x)\ dx = (\mathcal{R}) \int_a^{\underline{b}} f(x)\ dx = (\mathcal{R}) \int_{\overline{a}}^b f(x)\ dx$$

(Rahman, 2008)

Contoh 2.7.2

Misalkan $I = [1,2]$ $\ dan\ f : I \to \mathbb{R}$ dengan $f(x) = 2x$

Akan ditunjukan bahwa $f(x) = 2x$ terintegralkan pada [1,2].

Misalkan $\mathcal{P}_n$ merupakan sebarang partisi dari $I = [1,2]$ dalam n subinterval yaitu

$$\mathcal{P}_n = \left(1, 1 + \frac{1}{n}, 1 + \frac{2}{n}, \ldots, 1 + \frac{n-1}{n}, 1 + \frac{n}{n} = 2\right)$$

Infimum dan supremum dari f pada subinterval $\left[1 + \frac{i-1}{n}, 1 + \frac{i}{n}\right]$ adalah

$$m_i = 2\left(1 + \frac{i-1}{n}\right)\ dan\ M_i = 2\left(1 + \frac{i}{n}\right)$$

Juga $x_i - x_{i-1} = \left(\frac{1}{n}\right)$ untuk $i = 1,2,3, \ldots, n$

Sehingga didapat

$$L(\mathcal{P}_n, f)\ = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{i-1}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2}{n} + \frac{2}{n^2} i - \frac{2}{n^2}\right)$$

$$= \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i - \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^{n} 1$$

$$= \frac{2}{n} n + \frac{2}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} - \frac{2}{n^2} n$$

$$= 2 + 1 + \frac{1}{n} - \frac{2}{n}$$

$$= 3 - \frac{1}{n}$$

didapat pula bahwa

$$U(\mathcal{P}_n, f) = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{i}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2}{n} + \frac{2}{n^2} i\right)$$

$$= \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i$$

$$= \frac{2}{n} n + \frac{2}{n^2} \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= 2 + 1 + \frac{1}{n}$$

$$= 3 + \frac{1}{n}$$

Karena himpunan partisi $\{\mathcal{P}_n |\, n \in \mathbb{N}\}\ \wp(I)$, maka

$$3 = \sup\{L(\mathcal{P}_n, f) |\, n \in \mathbb{N}\} \leq \sup\{L(\mathcal{P}, f) |\, \mathcal{P} \in \wp(I)\} = L(f)$$

dan

$$U(f) = \inf\{U(\mathcal{P}, f) \mid \mathcal{P} \in \wp(I)\} \leq inf\{U(\mathcal{P}_n, f) \mid n \in \mathbb{N}\} = 3.$$

Dengan demikian f terintegralkan pada $I = [1,2]$ dan $\int_1^2 f = \int_1^2 2x\, dx = 3.$

Contoh 2.7.3

Misalkan $I = [6,7]$ $dan\, f : I \to \mathbb{R}$ dengan

$$f(x) = \begin{cases} 3, & \text{Jika x rasional} \\ 7, & \text{Jika x irrasional} \end{cases}$$

Akan ditunjukan bahwa $f(x)$ tersebut tidak terintegralkan pada $[6,7]$.

Misalkan $\mathcal{P} = (x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ merupakan sebarang partisi dari $I = [6,7]$.

Infimum dan supremum dari f pada subinterval $[x_{i-1}, x_i]$ adalah $m_i = 3$ dan $M_i = 7$, untuk $i = 1,2,3, \dots, n$

Sehingga didapat

$$\begin{aligned} L(\mathcal{P}, f) &= \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} 3(x_i - x_{i-1}) \\ &= 3\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \\ &= 3(x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + \cdots + x_n - x_{n-1}) \\ &= 3(7-6) \\ &= 3 \end{aligned}$$

didapat pula bahwa

$$U(\mathcal{P}, f) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} 7(x_i - x_{i-1})$$

$$= 7\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})$$

$$= 7(x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + \cdots + x_n - x_{n-1})$$

$$= 7(7 - 6)$$

$$= 7$$

Karena itu $3 = L(f) \neq U(f) = 7$.

Jadi $f(x)$ tersebut tidak terintegralkan pada [6,7].

Teorema 2.7.4

Fungsi $f \in \mathcal{R}[a,b]$ jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat partisi $\mathcal{P}$ pada $[a,b]$ sehingga barlaku

$$U(\mathcal{P},f) - L(\mathcal{P},f) < \varepsilon.$$

Bukti

Untuk setiap partisi $\mathcal{P}$ berlaku

$$L(\mathcal{P},f) \leq (\mathcal{R})\int_{\overline{a}}^{b} f(x)\ dx \leq (\mathcal{R})\int_{a}^{\underline{b}} f(x)\ dx \leq U(\mathcal{P},f)$$

Jadi

$$0 \leq (\mathcal{R})\int_{a}^{\underline{b}} f(x)\ dx - (\mathcal{R})\int_{\overline{a}}^{b} f(x)\ dx \leq U(\mathcal{P},f) - L(\mathcal{P},f)$$

Dengan demikian, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\mathcal{P}$ sehingga $U(\mathcal{P},f) - L(\mathcal{P},f) < \varepsilon$, maka kita mempunyai hubungan

$$0 \leq (\mathcal{R})\int_{a}^{\underline{b}} f(x)\ dx - (\mathcal{R})\int_{\overline{a}}^{b} f(x)\ dx < \varepsilon$$

yang berlaku untuk setiap $\varepsilon > 0$.

Jadi

$$(\mathcal{R})\int_a^{\underline{b}} f(x)\ dx = (\mathcal{R})\int_{\overline{a}}^{b} f(x)\ dx$$

yang berarti $f \in \mathcal{R}[a,b]$.

Sekarang diandaikan $f \in \mathcal{R}[a,b]$ dan diberikan $\varepsilon > 0$

karena

$$(\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,dx = \sup L(\mathcal{P},f) = \inf U(\mathcal{P},f),$$

maka terdapatlah partisi $\mathcal{P}_1$ dan $\mathcal{P}_2$ pada $[a,b]$ sedemikian hingga

$$(\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,dx \le U(\mathcal{P}_1,f) < (\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2} \qquad (*)$$

dan

$$(\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,dx - \frac{\varepsilon}{2} < L(\mathcal{P}_2,f) \le (\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,dx \qquad (**)$$

Jika $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$, maka berlaku

$$(\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,dx \le U(\mathcal{P},f) \le U(\mathcal{P}_1,f) < (\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$(\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,dx - \frac{\varepsilon}{2} < L(\mathcal{P}_2,f) \le L(\mathcal{P},f) \le (\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,dx$$

Jadi diperoleh

$$(\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,dx - \frac{\varepsilon}{2} < L(\mathcal{P},f) \le U(\mathcal{P},f) \le (\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2}$$

Sehingga

$$U(\mathcal{P},f) - L(\mathcal{P},f) < \varepsilon.$$

Fungsi $f \in \mathcal{R}[a,b]$ jika dan hanya jika pada setiap $\varepsilon > 0$ yang diberikan terdapat suatu partisi $\mathcal{P}$ pada $[a,b]$ sedemikian hingga

$$U(\mathcal{P},f) - L(\mathcal{P},f) < \varepsilon.$$

Makin halus partisi $\mathcal{P}$ maka nilai $U(\mathcal{P},f)$ makin mengecil dan $L(\mathcal{P},f)$ makin membesar.

(Soemantri, 1988)

Contoh 2.7.5

Misalkan $I := [-1,3]\ dan\ f : I \to \mathbb{R}\ dengan\ f(x) = 2x^2 - 8$

Selanjutnya akan ditunjukan bahwa $f(x) = 2x^2 - 8$ terintegralkan pada $[-1,3]$ yaitu

$$\mathcal{P}_n = \left(-1, -1 + \frac{1}{n}, -1 + \frac{2}{n}, \dots, -1 + \frac{n}{n} = 0, \frac{2}{n}, \frac{6}{n}, \dots \frac{3(n-1)}{n}, \frac{3n}{n} = 3\right).$$

Infimum dan Suprimum dari f pada subinterval $\left[-1 + \frac{i-1}{n}, -1 + \frac{i}{n}\right]$ misalkan

$$\sup\left\{f(x) \,\middle|\, x \in \left[-1 + \frac{i-1}{n}, -1 + \frac{i}{n}\right]\right\} = M_i{}^1$$

dan

$$\inf\left\{f(x) \,\middle|\, x \in \left[-1 + \frac{i-1}{n}, -1 + \frac{i}{n}\right]\right\} = m_i{}^1$$

Dengan $\Delta x_1 = x_i - x_{i-1}$, maka diperoleh

$$m_i{}^1 = 2\left(-1 + \frac{i}{n}\right)^2 - 8$$

$$M_i{}^1 = 2\left(-1 + \frac{i-1}{n}\right)^2 - 8$$

dan $\Delta x_1 = \frac{1}{n}$.

Kemudian untuk subinterval $\left[\frac{3(i-1)}{n}, \frac{3i}{n}\right]$ misalkan

$$\sup \left\{ f(x) \,\middle|\, x \in \left[\frac{3(i-1)}{n}, \frac{3i}{n}\right] \right\} = M_i^{\,2}$$

dan

$$\inf \left\{ f(x) \,\middle|\, x \in \left[\frac{3(i-1)}{n}, \frac{3i}{n}\right] \right\} = m_i^{\,2}$$

Dengan $\Delta x_2 = x_i - x_{i-1}$, maka diperoleh

$$m_i^{\,2} = 2\left(\frac{3(i-1)}{n}\right)^2 - 8$$

$$M_i^{\,1} = 2\left(\frac{3i}{n}\right)^2 - 8$$

dan $\Delta x_1 = \frac{3}{n}$.

Sehingga didapat

$$L(\mathcal{P}_n, f) = \sum_{i=1}^{n} \left(m_i^{\,1} \Delta x_1 + m_i^{\,2} \Delta x_2\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\left(2\left(-1 + \frac{i}{n}\right)^2 - 8 \right) \frac{1}{n} + \left(2\left(\frac{3(i-1)}{n}\right)^2 - 8 \right) \frac{3}{n} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(-\frac{6}{n} - \frac{4}{n^2} i + \frac{2}{n^3} i^2 + \frac{54}{n^3} i^2 - \frac{108}{n^3} i + \frac{54}{n^3} - \frac{24}{n} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(-\frac{30}{n} - \frac{4}{n^2} i + \frac{54}{n^3} - \frac{108}{n^3} i + \frac{56}{n^3} i^2 \right)$$

$$= -\frac{30}{n} \sum_{i=1}^{n} 1 - \frac{4}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i + \frac{54}{n^3} \sum_{i=1}^{n} 1 - \frac{108}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i + \frac{56}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$= -\frac{30}{n} - \frac{4}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} + \frac{54}{n^3} n - \frac{108}{n^3} \frac{n(n+1)}{n} + \frac{56}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{n}$$

$$= -30 - 2 - \frac{2}{n} + \frac{54}{n} - \frac{54}{n^2} + \frac{56}{3} + \frac{28}{n} + \frac{28}{3n^2}$$

$$= -\frac{40}{3} - \frac{28}{n} + \frac{28}{3n^2}$$

dan

$$U(\mathcal{P}_n, f) = \sum_{i=1}^{n} \left(M_i{}^1 \Delta x_1 + M_i{}^2 \Delta x_2\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\left(2\left(-1 + \frac{i-1}{n}\right)^2 - 8 \right) \frac{1}{n} + \left(2\left(\frac{3i}{n}\right)^2 - 8 \right) \frac{3}{n} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(-\frac{6}{n} - \frac{4}{n^2} i + \frac{4}{n^2} + \frac{2}{n^3} i^2 - \frac{4}{n^3} i + \frac{2}{n^3} + \frac{54}{n^3} i^2 - \frac{24}{n} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(-\frac{30}{n} + \frac{4}{n^2} - \frac{4}{n^2} i + \frac{2}{n^3} - \frac{4}{n^3} i + \frac{56}{n^3} i^2 \right)$$

$$= -\frac{30}{n} \sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{4}{n^2} \sum_{i=1}^{n} 1 - \frac{4}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i + \frac{2}{n^3} \sum_{i=1}^{n} 1 - \frac{4}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i + \frac{56}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$= -\frac{30}{n} + \frac{4}{n^2} n - \frac{4}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2}{n^3} n - \frac{4}{n^3} \frac{n(n+1)}{n} + \frac{56}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{n}$$

$$= -30 + \frac{4}{6} - 2 - \frac{2}{6} - \frac{2}{n^2} - \frac{2}{n} - \frac{2}{n^2} + \frac{56}{3} + \frac{28}{n} + \frac{28}{3n^2}$$

$$= -\frac{40}{3} - \frac{28}{n} + \frac{28}{3n^2}$$

Karena itu

$$\lim\left(U(\mathcal{P}_n, f) - L(\mathcal{P}_n, f)\right) = \lim\left(\left(-\frac{40}{3} - \frac{28}{n} + \frac{28}{3n^2}\right) - \left(\frac{40}{3} + \frac{28}{n} + \frac{28}{3n^2}\right)\right)$$

$$= \lim \frac{56}{n}$$

$$= 56\left(\lim \frac{1}{n}\right) = 0$$

Dengan demikian

$$\int_{-1}^{3} 2x^2 - 8\,dx = \lim U(\mathcal{P}_n, f)$$

$$= lim\left(-\frac{40}{3} - \frac{28}{n} + \frac{28}{3n^2}\right)$$

$$= -\frac{40}{3}$$

Contoh 2.7.6

Misalkan $I := [0,1]\ dan\ f : I \to \mathbb{R}\ dengan\ f(x) = \sqrt{x}$

Fungsi $f(x) = \sqrt{x}$ terintegralkan pada $[0,1]$.

Misalkan $\mathcal{P}_n$ merupakan partisi dari $I = [0,1]$, yaitu

$$\mathcal{P}_n = \left(0, \frac{1}{n^2}, \frac{4}{n^2}, \frac{9}{n^2}, \ldots, \frac{(n-1)^2}{n^2}, \frac{n^2}{n^2} = 1\right).$$

Infimum dan Suprimum dari f pada subinterval $\left[\frac{(i-1)^2}{n^2}, \frac{i^2}{n^2}\right]$ adalah

$$m_i = \sqrt{\frac{(i-1)^2}{n^2}} = \frac{i-1}{n}$$

$$M_i = \sqrt{\frac{i^2}{n^2}} = \frac{i}{n}$$

Juga $x_i - x_{i-1} = \left(\frac{2i-1}{n^2}\right)$ untuk $i - 1,2,3, \ldots\ , n$

Sehingga didapat

$$L(\mathcal{P}_n, f) = \sum_{i=1}^{n} m_i\,(x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{i-1}{n}\left(\frac{2i-1}{n^2}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2}{n^3}i^2 - \frac{3}{n^3}i - \frac{1}{n^3}\right)$$

$$= \frac{2}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{3}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i - \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} 1$$

$$= \frac{2}{n^3}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{3}{n^3}\,\frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{n^3}n$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{1}{n} + \frac{1}{3n^2} - \frac{3}{2n} - \frac{3}{2n^2} + \frac{1}{n^2}$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{6n^2}$$

dan

$$U(\mathcal{P}_n, f) = \sum_{i=1}^{n} M_i\,(x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n}\left(\frac{2i-1}{n^2}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2}{n^3}i^2 - \frac{1}{n^3}i\right)$$

$$= \frac{2}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 - \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i$$

$$= \frac{2}{n^3}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{1}{n^3}\,\frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{1}{n} + \frac{1}{3n^2} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n^2}$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{6n^2}$$

Karena itu

$$\lim\left(U(\mathcal{P}_n,f)-L(\mathcal{P}_n,f)\right)=\lim\left(\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2n}-\frac{1}{6n^2}\right)-\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2n}-\frac{1}{6n^2}\right)\right)$$

$$=\lim\frac{2}{2n}$$

$$=\lim\frac{1}{n}$$

$$=0$$

Dengan demikian

$$\int_0^1\sqrt{x}\,dx=\lim U(\mathcal{P}_n,f)$$

$$=lim\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2n}-\frac{1}{6n^2}\right)$$

$$=\frac{2}{3}$$

Teorema 2.7.7

Diberikan $I := [a,b]$ dan diberikan c sehingga $a<c<b$, diberikan f terintegral Riemann $[a,b]$ jika dan hanya jika f terintegral pada $I_1 := [a,c]$ dan $I_1 := [c,b]$

Pada kasus $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

Bukti

Diberikan $\varepsilon > 0$. Terdapat partisi $\mathcal{P}$ pada $[a,b]$ dengan $\mathcal{P}$ memuat titik c

Sehingga

$$U(\mathcal{P},f)-L(\mathcal{P},f)<\varepsilon.$$

Maka

$Q=\mathcal{P}\cap[a,c]$ dan partisi $[a,c]$, dan $T=\mathcal{P}\cap[c,b]$ dan partisi $[c,b]$,

dan

$$U(\mathcal{P},f)=U(Q,f)+U(T,f) \text{ dan } L(\mathcal{P},f)=L(Q,f)+L(T,f).$$

Jadi

$$U(Q,f)-L(Q,f)<\varepsilon \text{ dan } U(T,f)-L(T,f)<\varepsilon$$

sehingga

$$f\in\mathcal{R}[a,c] \text{ dan } f\in\mathcal{R}[c,b]$$

Untuk sembarang partisi $\mathcal{P}$ pada $[a,b]$dan T pada $[a,b]$

sehinga

$$U(\mathcal{P},f)\geq U(Q,f)+U(T,f)$$

Jadi

$$U(\mathcal{P},f)\geq U(Q,f)+U(T,f)\geq(\mathcal{R})\int_a^c f(x)\,dx+(\mathcal{R})\int_c^b f(x)\,dx$$

yang berlaku untuk setiap partisi $\mathcal{P}$ pada $[a,b]$

Jadi

$$(\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,dx\geq(\mathcal{R})\int_a^c f(x)\,dx+(\mathcal{R})\int_c^b f(x)\,dx$$

Selanjutnya untuk setiap Q dan T pada $[a,c]$ dan pada $[c,a]$ berlaku

$$L(Q,f)+L(T,f)=L(Q\cup T,f)\leq(\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,dx$$

Jadi didapatkan

$$(\mathcal{R})\int_a^c f(x)\,dx+(\mathcal{R})\int_c^b f(x)\,dx\leq(\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,dx$$

Terbukti

$$(\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,dx\geq(\mathcal{R})\int_a^c f(x)\,dx+(\mathcal{R})\int_c^b f(x)\,dx$$

Teorema 2.7.8

Jika $f,g\in\mathcal{R}([a,b])$, dimana $a,b\in\mathcal{R}$ dan $a<b$, maka

1. $f+g \in \mathcal{R}([a,b])$ dan

$$(\mathcal{R})\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,dx = (\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,dx + (\mathcal{R})\int_a^b g(x)\,dx$$

2. Untuk setiap $c \in \mathcal{R}$, $cf \in \mathcal{R}([a,b])$ dan

$$(\mathcal{R})\int_a^b cf(x)\,dx + (\mathcal{R})c\int_a^b f(x)\,dx$$

3. Jika $f(x) \geq 0$ untuk setiap $x \in ([a,b])$ maka

$$(\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$$

4. Jika $f(x) \leq g(x)$ untuk setiap $x \in ([a,b])$ maka

$$(\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,dx \leq (\mathcal{R})\int_a^b g(x)\,dx$$

Bukti

1. Digunakan ketaksamaan :

$$\inf_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x) + \inf_{x\in[x_{k-1},x_k]} g(x) \leq \inf_{x\in[x_{k-1},x_k]} [f(x)+g(x)] \qquad \ldots (*)$$

$$\sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x) + \sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} g(x) \geq \sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} [f(x)+g(x)] \qquad \ldots (**)$$

$$L(\mathcal{P},f) + L(\mathcal{P},f) \leq L(\mathcal{P},f+g)$$

$$U(\mathcal{P},f) + U(\mathcal{P},f) \leq U(\mathcal{P},f+g)$$

Untuk setiap partisi $\mathcal{P}$ dari $[a,b]$

Karena fungsi f dan g masing-masing terintegral Riemann pada $[a,b]$ maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada partisi $\mathcal{P}_{1\varepsilon}$ dan $\mathcal{P}_{2\varepsilon}$ dari $[a,b]$ sehingga

$$U(\mathcal{P}_{1\varepsilon},f) < L(\mathcal{P}_{1\varepsilon},f) + \frac{\varepsilon}{2}\ ,\ \ U(\mathcal{P}_{2\varepsilon},f) < L(\mathcal{P}_{2\varepsilon},f) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Ambil $\mathcal{P}_\varepsilon = \mathcal{P}_{1\varepsilon} \cup \mathcal{P}_{2\varepsilon}$

maka

$$\mathcal{P}_\varepsilon \supseteq \mathcal{P}_{1\varepsilon}\,, \qquad \mathcal{P}_\varepsilon \supseteq \mathcal{P}_{2\varepsilon}$$

sehingga

$$\begin{aligned} U(\mathcal{P}_\varepsilon, f+g) &\le U(\mathcal{P}_\varepsilon, f) + U(\mathcal{P}_\varepsilon, g) \\ &\le U(\mathcal{P}_{1\varepsilon}, f) + U(\mathcal{P}_{2\varepsilon}, g) \\ &< \left[L(\mathcal{P}_{1\varepsilon}, f) + \frac{\varepsilon}{2}\right] + \left[L(\mathcal{P}_{2\varepsilon}, g) + \frac{\varepsilon}{2}\right] \\ &\le \left[L(\mathcal{P}_\varepsilon, f) + \frac{\varepsilon}{2}\right] + \left[L(\mathcal{P}_\varepsilon, g) + \frac{\varepsilon}{2}\right] \\ &\le L(\mathcal{P}_\varepsilon, f+g) + \varepsilon \end{aligned}$$

Jadi

$$U(\mathcal{P}_\varepsilon, f+g) - L(\mathcal{P}_\varepsilon, f+g) \le \varepsilon$$

Sehingga $f+g$ terintegral Riemann pada $[a,b]$

Selanjutnya diperoleh

$$(\mathcal{R})\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,dx = (\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,dx + (\mathcal{R})\int_a^b g(x)\,dx$$

2. Disini digunakan sifat :

Jika $\emptyset \neq A \subseteq \mathcal{R},\ ca = \{cx : x \in A\},$

maka

$c \sup A = \sup cA \qquad c \inf A = \inf cA$

Bardasarkan hal itu diperoleh :

$$\sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} c\,f(x) = c \sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)$$

$$\inf_{x\in[x_{k-1},x_k]} c\,f(x) = c \inf_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)$$

yang berakibat

$$L(\mathcal{P}, cf) = cL(\mathcal{P}, f) \text{ dan } U(\mathcal{P}, cf) = cU(\mathcal{P}, f)$$

Jadi

$$(\mathcal{R}) \int_{\overline{a}}^{b} cf(x)\, dx = (\mathcal{R})c \int_{\overline{a}}^{b} f(x)\, dx$$

$$(\mathcal{R}) \int_{a}^{\underline{b}} cf(x)\, dx = (\mathcal{R})c \int_{a}^{\underline{b}} f(x)\, dx$$

Selanjutnya, karena fungsi f terintegral Riemann pada $[a, b]$

maka

$$(\mathcal{R}) \int_{\overline{a}}^{b} f(x)\, dx = (\mathcal{R}) \int_{a}^{\underline{b}} f(x)\, dx = (\mathcal{R}) \int_{a}^{b} f(x)\, dx$$

Sehingga kita memperoleh

$$(\mathcal{R}) \int_{\overline{a}}^{b} cf(x)\, dx = (\mathcal{R})c \int_{a}^{b} (x)\, dx = (\mathcal{R}) \int_{a}^{\underline{b}} f(x)\, dx$$

yang berarti fungsi cf terintegral Riemann pada $[a, b]$

$$(\mathcal{R}) \int_{a}^{b} cf(x)\, dx = (\mathcal{R})c \int_{a}^{b} (x)\, dx$$

3. Dari $f(x) > 0 \qquad x \in [a, b]$

Diperoleh

$$M_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \geq \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) = m_k \geq 0$$

Sehingga

$$L(\mathcal{P}, f) \geq L(\mathcal{P}, f) \geq 0$$

karena fungsi $f \in \mathcal{R}([a, b])$,

Maka

$$(\mathcal{R}) \int_{a}^{b} (x)\, dx = \inf_{x \in [a,b]} U(\mathcal{P}, f) = \inf_{x \in [a,b]} L(\mathcal{P}, f) \geq 0$$

4. Misalkan $h = g - f = g + (-1)f$

Karena , $f(x) \leq g(x) \qquad x \in [a, b]$

Maka

$$h(x) \leq 0 \qquad x \in [a, b]$$

karena $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ maka $h = g - f \in \mathcal{R}([a, b])$

selanjutnya menurut teorema 2.7.8 bagian 3

$$0 \leq (\mathcal{R}) \int_a^b h(x)\, dx$$

$$= (\mathcal{R}) \int_a^b (g - f)(x)\, dx$$

$$= (\mathcal{R}) \int_a^b g(x)\, dx - (\mathcal{R}) \int_a^b f(x)\, dx$$

Sehingga akhirnya diperoleh

$$(\mathcal{R}) \int_a^b g(x)\, dx \geq (\mathcal{R}) \int_a^b f(x)\, dx$$

atau

$$(\mathcal{R}) \int_a^b f(x)\, dx \leq (\mathcal{R}) \int_a^b g(x)\, dx$$

BAB III

PEMBAHASAN

Dalam Bab ketiga ini akan dibahas tentang Kekonvergenan Integral Lebesgue, yang dimulai dari integral lebegue fungsi terbatas pada himpunan berukuran berhingga, integral lebesgue fungsi non negative pada himpunan berukuran berhingga dan integral lebesgue fungsi terukur sebarang pada himpunan berukuran berhingga. Akan tetapi sebelumnya akan di bahas mengenai kekonvergenan dalam kajian keislaman.

3.1 Kekonvergenan Dalam Kajian Keislaman

Sesungguhnya manusia dan seluruh makhluk hidup di dunia ini adalah milik Allah. Misalnya perjalanan hidup manusia semenjak lahir tentunya ijin dari Allah sampai meninggal pun atas ijin Allah. Setelah diijinkan untuk lahir kedunia ini manusia dilahirkan dengan bentuk yang berbeda satu sama lain, dari fisik, suku bangsa, agama, sifat, jenis kelamin dan lain-lain. Di dalam dunia ini bebas kehendaknya apa yang mereka inginkan. Allah memberikan pilihan bagi manusia keleluasaan untuk memilih apa yang mereka inginkan, karena hidup itu pilihan, maka manusia dibebaskan untuk memilih, apakah mereka menginginkan hidup untuk melakukan perbuatan baik ataupun sebaliknya, itu adalah kehendak mereka sendiri. Akan tetapi ketika Allah memerintahkan kepada manusia, maka manusia wajib melaksanaakannya karena walaupun Allah memberikan kebebasan, tapi Allah juga memberikan perintah dan larangan. Ketika Allah memerintahkan sesuatu perintah maka manusia wajib ikut perintah-Nya dan sebagaima sebaliknya, jika Allah melarangnya maka manusia wajib untuk menghindarinya. Dan perlu di Ingat bahwa sesungguhnya semua yang hidup pasti akan mati. Sesuai Firman Allah dalam surat Ali Imran ayat 185, Allah berfirman :

كُلُّ نَفۡسٖ ذَآئِقَةُ ٱلۡمَوۡتِۗ وَإِنَّمَا تُوَفَّوۡنَ أُجُورَكُمۡ يَوۡمَ ٱلۡقِيَٰمَةِۖ فَمَن زُحۡزِحَ عَنِ ٱلنَّارِ وَأُدۡخِلَ ٱلۡجَنَّةَ فَقَدۡ فَازَۗ وَمَا ٱلۡحَيَوٰةُ ٱلدُّنۡيَآ إِلَّا مَتَٰعُ ٱلۡغُرُورِ ١٨٥

Artinya : *"Tiap-tiap yang berjiwa akan merasakan mati. dan Sesungguhnya pada hari kiamat sajalah disempurnakan pahalamu. barangsiapa dijauhkan dari neraka dan dimasukkan ke dalam syurga, Maka sungguh ia Telah beruntung. kehidupan dunia itu tidak lain hanyalah kesenangan yang memperdayakan".*

Dan disebutkan juga dalam surat Al-Anbiyaa' ayat 35, Allah berfirman :

كُلُّ نَفۡسٖ ذَآئِقَةُ ٱلۡمَوۡتِۗ وَنَبۡلُوكُم بِٱلشَّرِّ وَٱلۡخَيۡرِ فِتۡنَةٗۖ وَإِلَيۡنَا تُرۡجَعُونَ ٣٥

Artinya : "*Tiap-tiap yang berjiwa akan merasakan mati. kami akan menguji kamu dengan keburukan dan kebaikan sebagai cobaan (yang sebenar-benarnya). dan Hanya kepada kamilah kamu dikembalikan".*

Setelah makhluk-makhluk itu mati pasti kembali kepada-Nya, karena sesungguhnya semua adalah milik Allah dan pasti akan kembali kepada-Nya, walaupun di dunia ini manusia melupakan-Nya, tak menghiraukan-Nya, mendua-Nya atau pun menyekutu-Nya manusia pasti akan kembali kepada-Nya. Harta-harta mereka, suami-suami mereka, istri-istri mereka, anak-anak mereka serta apa-apa yang ada di dunia ini bukanlah milik manusia bahkan diri dan jiwa pun bukanlah milik manusia, semuanya milik Allah dan pada akhirnya akan kembali kepada-Nya.

Sesuai dengan firman Allah dalam surat Al-Baqarah ayat 156, Allah berfirman :

إِنَّا لِلَّهِ وَإِنَّآ إِلَيۡهِ رَٰجِعُونَ ١٥٦

"Inna lillaahi wa innaa ilaihi raaji'uun"

Artinya: *''Sesungguhnya Kami adalah milik Allah dan kepada-Nya-lah Kami kembali''.*

Sebagaimana pembahasan sebelumnya, manusia adalah milik Allah baik secara jasmani mapun rohani. Jadi semua manusia pada akhirnya akan kembali / konvergen kepada Allah.

3.2 Integral Lebesgue Fungsi Terbatas pada Himpunan Berukuran Berhingga

Definisi 3.2.1

Misalkan $f : E \to \mathbb{R}$ adalah fungsi sederhana,

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathcal{X}_{E_i}.$$

Integral Lebesgue fungsi f pada E dinyatakan dengan notasi $(\mathcal{L})\int_E f\,d\mu$ atau $(\mathcal{L})\int_E f$ dan didefinisikan oleh $(\mathcal{L})\int_E f\,d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i\,\mu(E_i)$.

Contoh 3.2.2

Diketahui

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 1 < x < 3 \\ 0, & 0 < x \leq 1 \\ 2, & -4 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

Merupakan suatu fungsi sederhana, f dapat dituliskan sebagai

$$f = 1.\mathcal{X}_{(1,3)} + 0.\mathcal{X}_{(0,1]} + 2.\mathcal{X}_{[-4,0]}$$

Representasi kanonik fungsi f adalah

$$f = 1.\mathcal{X}_{(1,3)} + 2.\mathcal{X}_{[-4,0]}$$

untuk fungsi f kita memperoleh

$$(\mathcal{L})\int_E f\,d\mu = 1.\mu\big((1,3)\big) + 0.\mu\big((0,1]\big) + 2.\mu([-4,0])$$

$$= 1(3-1) + 0(1-0) + 2\{0-(-4)\}$$

$$= 10$$

Jika digunakan representasi kanonik fungsi f maka diperoleh

$$(\mathcal{L})\int_E f d\mu = 1.\mu\big((1,3)\big) + 2.\mu([-4,0])$$

$$= 1(3-1) + 2\big(0-(-4)\big)$$

$$= 10$$

Teorema 3.2.3

Misalkan E suatu himpunan terukur yang diketahui, $\mu(E) < \infty$.

Jika $f : E \to \mathbb{R}$ dan $g : E \to \mathbb{R}$ dua fungsi sederhana, α bilangan real yang diketahui, maka

1. $(\mathcal{L})\int_E (f+g)\, d\mu = (\mathcal{L})\int_E f\, d\mu + (\mathcal{L})\int_E g\, d\mu$
2. $(\mathcal{L})\int_E \alpha f\, d\mu = (\mathcal{L})\alpha\int_E f\, d\mu$
3. Jika $f \geq g$ maka $(\mathcal{L})\int_E f\, d\mu \geq (\mathcal{L})\int_E g\, d\mu$

Bukti

1. Misalkan

$$f = \sum_{i=1}^{m} a_i \mathcal{X}_{E_i} \quad , \quad g = \sum_{i=1}^{m} b_i \mathcal{X}_{F_i}$$

$$G_{ij} = E_i \cap E_j \qquad (i = 1,2,3,\dots,m\ ;\quad j = 1,2,3,\dots,n)$$

maka

$$E_i = \bigcup_{j=1}^{m} G_{ij} \quad , \quad F_i = \bigcup_{j=1}^{m} G_{ij}$$

$$a_{ij} = a_i\ \ (j = 1,2,3,\dots,n) \qquad , \quad b_{ij} = b_j\ \ (i = 1,2,3,\dots,m)$$

$$(f+g)(x) = a_i + b_j = a_{ij} + b_{ij} \qquad ,x \in G_{ij}$$

$$(\mathcal{L})\int_E f\, d\mu = \sum_{i=1}^{m} a_i \mu(E_i) = \sum_{i=1}^{m} a_i \mu\left(\bigcup_{j=1}^{m} G_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mu(G_{ij})$$

$$(\mathcal{L})\int_E g\, d\mu = \sum_{i=1}^{m} b_j \mu(F_j) = \sum_{i=1}^{m} b_j \mu\left(\bigcup_{i=1}^{m} G_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} b_{ij}\mu(G_{ij})$$

sehingga

$$(\mathcal{L})\int_E (f+g)\, d\mu = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}+b_{ij})\mu(G_{ij})$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mu(G_{ij}) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\mu(G_{ij})$$

$$= (\mathcal{L})\int_E f\, d\mu + (\mathcal{L})\int_E g\, d\mu.$$

2. Misalkan

$$f = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathcal{X}_{E_i} \qquad \alpha_i \in \mathbb{R} \qquad (i = 1,2,3, \ldots . n)$$

maka

$$(\mathcal{L})\int_E \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f\right) d\mu = \sum_{i=1}^{n}\left(\alpha_i \int_E f\ \ d\mu\right)$$

Ini berarti

$$(\mathcal{L})\int_E \alpha f\, d\mu = \alpha(\mathcal{L})\int_E f\, d\mu$$

3. Misalkan

$$f = \sum_{i=1}^{m} a_i \mathcal{X}_{E_i} \qquad , \quad g = \sum_{i=1}^{m} b_i \mathcal{X}_{E_i}$$

$$G_{ij} = E_i \cap E_j \qquad (i = 1,2,3, \dots, m \ ; \ \ j = 1,2,3, \dots, n)$$

maka

$$E_i = \bigcup_{j=1}^{m} G_{ij} \qquad , \qquad F_i = \bigcup_{j=1}^{m} G_{ij}$$

$$a_{ij} = a_i \ \ (j = 1,2,3, \dots, n) \qquad , \quad b_{ij} = b_j \ \ (i = 1,2,3, \dots, m)$$

karena

$f(x) \geq g(x)$ $(x \in E)$ maka $a_{ij} \geq b_{ij}$ $(i = 1,2,3, \dots, m \ ; \ \ j = 1,2,3, \dots, n)$

sehingga

$$(\mathcal{L})\int_E f\, d\mu = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mu(G_{ij}) \geq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mu(G_{ij}) = (\mathcal{L})\int_E g\, d\mu.$$

Ini berarti

$$(\mathcal{L})\int_E f\, d\mu \geq (\mathcal{L})\int_E g\, d\mu.$$

Misalkan E suatu himpunan terukur, $\mu(E) < \infty, f : E \to \mathbb{R}$ suatu fungsi terbatas, jadi ada c, d , $c < d$ sehingga $c \leq f(x) \leq d$. Jika selang $[c, d]$ dibagi menjadi n selang bagian oleh titik-titik $y_0 = c < y_1 < y_2 < \cdots < y_n = d$; $\mathcal{P} = [y_0, y_1, y_2, \dots, y_n]$ dinamakan partisi dari $[c, d]$ Koleksi dari semua partisi dari $[c, d]$ dinyatakan dengan $\mathcal{P}_{[c,d]}$.

Misalkan $m_i = y_{i-1}$ $\quad , M_i = y_i$ $\quad , E_i = \big((y_{i-1}, y_i)\big)$

Didefinisikan dua fungsi sederhana

$$\varphi(x) = m_i \qquad , x \in E_i \ \ \text{dan} \ \ \psi(x) = M_i \qquad , x \in E_i$$

$$i = 1,2,3, \dots \dots \dots$$

maka

$$\varphi(x) \le f(x) \le \psi(x) \qquad , x \in [a,b]$$

Didefinisikan

$$L(\mathcal{P}, f) = (\mathcal{L}) \int_a^b \varphi \; d\mu, \qquad U(\mathcal{P}, f) = (\mathcal{L}) \int_a^b \psi \; d\mu$$

$L(\mathcal{P}, f)$ dinamakan *Jumlah Lebesgue Bawah* dan $U(\mathcal{P}, f)$ dinamakan *Jumlah Lebesgue Atas* dari fungsi f menurut partisi $\mathcal{P}$. Seperti pada pembahasan Integral Riemann di atas.

dengan

$$\{L(\mathcal{P}, f) \mid P \in \mathcal{P}_{[c,d]}\} \text{terbatas di atas oleh } d(b-a)$$

$$\{U(\mathcal{P}, f) \mid P \in \mathcal{P}_{[c,d]}\} \text{ terbatas di bawah oleh } c(b-a)$$

sehingga

$$\sup \{L(\mathcal{P}, f) \mid P \in \mathcal{P}_{[c,d]}\} \quad \text{dan} \quad \inf \{U(\mathcal{P}, f) \mid P \in \mathcal{P}_{[c,d]}\} \text{ ada.}$$

$\sup \{L(\mathcal{P}, f) \mid P \in \mathcal{P}_{[c,d]}\}$ dinamakan *Integral Lebesgue Bawah* dari fungsi f pada $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ dan dinyatakan dengan $(\mathcal{L}) \int_{\overline{a}}^{b} f \; d\mu$ dan $\inf \{U(\mathcal{P}, f) \mid P \in \mathcal{P}_{[c,d]}\}$ dinamakan *Integral Lebesgue Atas* dari fungsi f pada $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ dan dinyatakan dengan $(\mathcal{L}) \int_{a}^{\underline{b}} f \; d\mu$.

Definisi 3.2.4

Fungsi $\mathrm{f} : [\mathrm{a}, \mathrm{b}] \to \mathbb{R}$ dikatakan terintegral lebesgue pada $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$,

jika

$$(\mathcal{L}) \int_{\overline{a}}^{b} f \; d\mu = (\mathcal{L}) \int_{a}^{\underline{b}} f \; d\mu$$

Dalam hal fungsi $f : [\mathrm{a,b}] \to \mathbb{R}$ dikatakan terintegral lebesgue pada $[\mathrm{a,b}]$, integral lebesgue atas yang sama dengan integral lebesgue bawah. Dinamakan integral lebesgue fungsi f pada $[\mathrm{a,b}]$

dengan

$$(\mathcal{L}) \int_b^a f \, d\mu$$

Contoh 3.2.5

Diketahui $f(x) = x^2$,$x \in [0,2]$ terintegral lebesgue, maka akan dihitung $\int_0^2 f \, d\mu$
Penyelesaian :

$$f[(0,2)] = [0,4]$$

Selang [0,4] menjadi n selang bagian oleh titik-titik $y_1, y_2, y_3, y_4, \dots, y_n$, maka $m_i = y_{i-1}$, $M_i = y_i$, $E_i = (y_{i-1} - y_i)$

$$y_i = f(x_i) \quad (i = 1,2,3, \dots, n)$$
$$\mu(E_i) = x_i - x_{i-1}$$

sehingga

$$\overline{\int_0^2} f \, d\mu = \lim_{maks\mu(E_i)\to 0} \sum_{i=1}^{n} M_i \, \mu(E_i)$$
$$= \lim_{maks(x_i - x_{i-1})\to 0} \sum_{i=1}^{n} M_i \, (x_i - x_{i-1})$$
$$= \overline{\int_0^2} f(x) \, dx$$

dan

$$\int_{\underline{0}}^2 f \, d\mu = \lim_{maks\mu(E_i)\to 0} \sum_{i=1}^{n} m_i \, \mu(E_i)$$
$$= \lim_{maks(x_i - x_{i-1})\to 0} \sum_{i=1}^{n} m_i \, (x_i - x_{i-1})$$
$$= \int_{\underline{0}}^2 f(x) \, dx$$

Karena f kontinu, maka f terintegral Riemann pada [0,2].
Jadi

$$\overline{\int_0^2} f(x) \, dx = \int_{\underline{0}}^2 f(x) \, dx = \int_0^2 f(x) \, dx = \int_0^2 x^2 \, dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^2 = \frac{8}{3}$$

sehingga

$$\int_{0}^{\overline{2}} f\, d\mu = \int_{\overline{0}}^{2} f\, d\mu = \int_{0}^{2} f\, d\mu$$
Dan ini berarti f terintegral Lebesgue pada $[0,2]$
dan

$$\int_{0}^{2} f\, d\mu = \int_{0}^{2} f(x)\, dx$$

Teorema 3.2.6

1. Untuk setiap fungsi $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ berlaku

$$(\mathcal{L}) \int_{\overline{a}}^{b} f\, d\mu = \lim_{maks\ \mu(E_i) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{n} y_{i-1}\, \mu(E_i)$$

$$(\mathcal{L}) \int_{a}^{\underline{b}} f\, d\mu = \lim_{maks\ \mu(E_i) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{n} y_i\, \mu(E_i)$$

2. Jika fungsi $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ terintegral lebesgue, maka

$$(\mathcal{L}) \int_{a}^{b} f\, d\mu = \lim_{maks\ \mu(E_i) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{n} f(t_i) \mu(E_i)$$

dengan $t_i \in E_i$ sebarang.

Bukti

Untuk setiap $i = 1,2,3, \ldots, n$ berlaku

$$m_i \leq f(t_i) \leq M_i$$

sehingga

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\, \mu(E_i) \leq \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\, \mu(E_i) \leq \sum_{i=1}^{n} M_i\, \mu(E_i)$$

yang berakibat

$$(\mathcal{L}) \int_{\overline{a}}^{b} f\, d\mu \leq \lim_{maks\ \mu(E_i) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\, \mu(E_i) \leq (\mathcal{L}) \int_{a}^{\underline{b}} f\, d\mu$$

Karena fungsi f terintegral Lebesgue pada $[a,b]$, maka

$$(\mathcal{L})\int_{\bar{a}}^{b} f\, d\mu = (\mathcal{L})\int_{a}^{\underline{b}} f\, d\mu$$

Dan akhirnya diperoleh

$$(\mathcal{L})\int_{a}^{b} f\, d\mu = \lim_{maks\, \mu(E_i)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\mu(E_i)$$

Teorema 3.2.7

Jika $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ terintgral Riemann pada $[a,b]$, maka f juga terintegral Lebesgue pada $[a,b]$ dan berlakulah

$$(\mathcal{R})\int_{a}^{b} f(x)\ dx = (\mathcal{L})\int_{a}^{b} f\, d\mu$$

Bukti

Karena setiap fungsi tangga juga merupakan fungsi sederhana, maka kita memperoleh

$$(\mathcal{R})\int_{\bar{a}}^{b} f(x)\ dx \leq (\mathcal{L})\int_{a}^{b} f\, d\mu \leq (\mathcal{L})\int_{a}^{b} f\, d\mu \leq (\mathcal{R})\int_{a}^{\underline{b}} f(x)\ dx$$

karena f terintegral Riemann pada [a,b], maka

$$(\mathcal{R})\int_{\bar{a}}^{b} f(x)\ dx = (\mathcal{R})\int_{a}^{\underline{b}} f(x)\ dx = (\mathcal{R})\int_{a}^{b} f(x)\ dx$$

sehingga akhirnya kita memperoleh

$$(\mathcal{R})\int_{\bar{a}}^{b} f(x)\ dx = (\mathcal{L})\int_{a}^{b} f\, d\mu = (\mathcal{L})\int_{a}^{b} f\, d\mu = (\mathcal{R})\int_{a}^{\underline{b}} f(x)\ dx$$

Ini berarti fungsi f terintegral Lebesgue pada [a,b] dan

$$(\mathcal{R})\int_{a}^{b} f(x)\ dx = (\mathcal{L})\int_{a}^{b} f\, d\mu.$$

Contoh 3.2.8

Diketahui

$$f(x) = \begin{cases} 4, & Jika\ x\ rasional \\ 5, & Jika\ x\ irrasional \end{cases}$$

Akan diselidiki apakah fungsi f

a. Terintegral Riemann pada [0,1];

b. Terintegral Lebesgue pada [0,1].

penyelesaian.

a. Misalkan $\mathcal{P}$ partisi sebarang dari [0,1], maka

$$m_i = 4 \quad , \quad M_i = 5 \quad , \quad i = 1,2,3, \dots, n$$

Jadi

$$\int_{\overline{0}}^{1} f(x)\, dx = 4, \quad \int_{0}^{\overline{1}} f(x)\ \ dx = 5$$

dan ini berarti fungsi f tak terintegral Riemann pada [0,1].

Jadi

$$f \notin \mathcal{R}[0,1].$$

b. Fungsi f adalah suatu fungsi sederhana dengan

$$E_1 = \mathbb{Q} \cap [0,1], \quad E_2 = (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap [0,1], a_1 = 4, \quad a_2 = 5$$

Jadi

$$\int_0^1 f\, d\mu = a_1\mu(E_1) + a_2\mu(E_2)$$

$$= 4.0 + 5.1$$

$$= 5$$

Ini berarti $f \in \mathcal{L}[0,1]$. Dengan menggunakan sifat Integral Lebesgue fugsi sederahana, diperoleh sifat Integral Lebesgue fungsi Terukur Terbatas.

Teorema 3.2.10 (Konvergensi Terbatas)

Jika diberikan $\langle f_n \rangle$ adalah barisan dari fungsi terukur pada himpunan E yang ukurannya berhingga. Dianggap ada bilangan real M sehingga $|f_n(x)| \leq M$ untuk semua x dan n. Jika $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ untuk setiap $x \in E$

maka

$$(\mathcal{L})\int_E f = \lim_{n\to\infty} (\mathcal{L})\int_E f_n$$

Bukti

Dianggap $\langle f_n \rangle$ konvergen ke f pada E. Jadi untuk setiap $\varepsilon > 0$ dan $\sigma = \frac{\varepsilon}{4M}$ terdapat himpunan terukur $A \subset E$ dengan $\mu(A) = \frac{\varepsilon}{4M}$ sehingga berlaku

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2\mu(E)} \qquad \forall n \geq \mathbb{N} \qquad dan\ x \in E - A$$

$$|f_n(x)| \leq M \qquad ,\forall n \in \mathbb{N} \qquad dan \qquad x \in E$$

$$|f(x)| \leq M \qquad ,\ x \in E$$

$$|f_n(x) - f(x)| \leq 2M \qquad ,x \in E$$

Oleh karena itu

$$\begin{aligned}\left|(\mathcal{L})\int_E f_n - (\mathcal{L})\int_E f\right| &= \left|(\mathcal{L})\int_E f_n - (\mathcal{L})\int_E f\right| \\ &= \left|(\mathcal{L})\int_E (f_n - f)\right| \\ &\leq (\mathcal{L})\int_E |f_n - f| \\ &= (\mathcal{L})\int_{E-A} |f_n - f| + (\mathcal{L})\int_A |f_n - f| \\ &< \frac{\varepsilon}{2\mu(E)}\mu(E-A) + 2M\mu(A)\end{aligned}$$

$$< \varepsilon \qquad \forall n \geq \mathbb{N}$$

Dan ini berarti

$$(\mathcal{L})\int_E f = \lim_{n\to\infty}(\mathcal{L})\int_E f_n.$$

3.3 Integral Fungsi Non Negtaif pada Himpunan Berukuran Berhingga

Definisi 3.3.1

Misalkan $f : E \to \mathbb{R}$ suatu fungsi terukur tak negatif. $(\mathcal{L})\int_E f\, d\mu$ didefinisikan sebagai $(\mathcal{L})\int_E f\, d\mu = \sup\left\{(\mathcal{L})\int_E \varphi\, d\mu \mid \varphi : E \to \mathbb{R} \text{ terukur dan terbatas }, \varphi \leq f\right\}$. Fungsi f dikatakan terintegral pada E, jika $(\mathcal{L})\int_E < \infty$

Contoh 3.3.2

Hitunglah $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, d\mu$.

Penyelesaian:

Fungsi f adalah terukur, tak negative dan tak terbatas pada $(0,1]$.

$$f_n = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} & bila\ \dfrac{1}{n^2} < x \leq 1 \\ n & bila\ 0 < x \leq \dfrac{1}{n^2} \end{cases}$$

Karena f_n kontinu pada $\left(0, \frac{1}{n^2}\right]$ dan pada $\left(\frac{1}{n^2}, 0\right]$ maka

$$\int_0^{\frac{1}{n^2}} f_n\, d\mu = \int_{\frac{1}{n^2}}^{0} f_n\,(x)dx \qquad , \quad \int_1^{\frac{1}{n^2}} f_n\, d\mu = \int_{\frac{1}{n^2}}^{1} f_n(x)\, dx,$$

Jadi

$$\int_0^1 f_n\, d\mu = \int_0^{\frac{1}{n^2}} f_n(x)\, dx + \int_{\frac{1}{n^2}}^{1} f_n(x)\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{n^2}} n\, dx + \int_{\frac{1}{n^2}}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$$

$$= \frac{1}{n} + \left(2 - \frac{2}{n}\right)$$

$$= 2 - \frac{1}{n}$$

Sehingga

$$\int_0^1 f_n\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \left(2 - \frac{1}{n}\right) = 2.$$

Teorema 3.3.3

Jika $f : E \to \mathbb{R}$, $g : E \to \mathbb{R}$ dua fungsi terukur tak negatif, $\alpha > 0$ maka

1. $\int_E (f + g)\, d\mu = \int_E f\, d\mu + \int_E g\, d\mu$
2. $\int_E \alpha f\, d\mu = \alpha \int_E f\, d\mu$
3. Jika $f(x) \leq g(x)$, $x \in E$ maka $\int_E f\, d\mu \leq \int_E g\, d\mu$

Bukti

1. Misalkan $\varphi(x) \leq f(x)$ dan $\psi(x) \leq g(x)$ $\quad x \in E$

maka

$$\varphi(x) + \psi(x) \leq f(x) + g(x)$$

sehingga

$$\int_E (\varphi + \psi)\, d\mu = \int_E \varphi\, d\mu + \int_E \psi\, d\mu \leq \int_E (f + g)\, d\mu$$

Jadi

$$\sup \left\{\int_E \varphi\, d\mu + \int_E \psi\, d\mu \mid \varphi \leq f , \psi \leq f\right\} \leq \int_E (f + g)\, d\mu$$

$$\sup \left\{\int_E \varphi\, d\mu \mid \varphi \leq f \right\} + \sup \left\{\int_E \psi\, d\mu \mid \psi \leq f\right\} \leq \int_E (f + g)\, d\mu$$

$$\int_E f\,d\mu + \int_E g\,d\mu \le \int_E (f+g)\,d\mu \qquad \dots \qquad (*)$$

Misalkan λ suatu fungsi terukur terbatas, $\lambda(x) \le f(x) + g(x) \quad x \in E$

Didefinisikan

$$\varphi(x) = \min\ \{f(x), \lambda(x) \quad \text{dan} \quad \psi(x) = \lambda(x) - \varphi(x)\} \qquad x \in E$$

maka

$$\varphi(x) \le f(x) \text{ dan } \psi(x) \le g(x) \quad x \in E$$

sehingga

$$\int_E \lambda\,d\mu = \int_E (\varphi + \psi)\,d\mu = \int_E \varphi\,d\mu + \int_E \psi\,d\mu \le \int_E f\,d\mu + \int_E g\,d\mu$$

Jadi

$$\sup\ \{\int_E \lambda\,d\mu \mid \lambda \le f + g\} \le \int_E f\,d\mu + \int_E g\,d\mu$$

$$\int_E (f+g)\,d\mu \le \int_E f\,d\mu + \int_E g\,d\mu \qquad \dots \qquad (**)$$

Dari (*) dan (**) diperoleh

$$\int_E (f+g)\,d\mu = \int_E f\,d\mu + \int_E g\,d\mu$$

2. Misalkan φ suatu fungsi terukur terbatas, $\varphi(x) \le f(x) \quad x \in E$ maka $\alpha\varphi$ adalah fungsi terukur terbatas dengan $\alpha\varphi(x) \le \alpha f(x) \quad , \quad x \in E$

$$\begin{aligned}\int_E \alpha f\,d\mu &= \sup\ \{\int_E \alpha\varphi\,d\mu \mid \varphi \le f\} \\ &= \sup\ \{\alpha\int_E \varphi\,d\mu \mid \varphi \le f\} \\ &= \alpha \sup\ \{\int_E \varphi\,d\mu \mid \varphi \le f\} \\ &= \alpha\int_E f\,d\mu.\end{aligned}$$

3. Misalkan $\varphi \le f \le g$ hampir dimana-mana maka $\int_E \varphi\,d\mu \le \int_E g\,d\mu$.

Jadi $\int_E f = \sup \int_E \varphi\,d\mu \le \int_E g\,d\mu$.

Ini berarti

$$\int_E f\, d\mu \ \le\ \int_E g\, d\mu$$

Lemma 3.3.4 (**Lemma Fatou**)

Jika $\langle f_n \rangle$ suatu barisan fungsi terukur tak negatif yang konvergen hampir dimana-mana ke fungsi f pada E, maka

$$\int_E f\, d\mu \ \le \lim_{n\to\infty} \inf \int_E f_n\, d\mu.$$

Bukti

Misalkan $A = \{\varphi |\ \varphi : E \to \mathbb{R}, \varphi \text{ terukur dan terbatas } \varphi \le f\}$

Maka $\int_E f\, d\mu = \lim_{\varphi\in A} \int_E \varphi\, d\mu$

Jadi untuk setiap $\varphi \in A$ berlaku

$$\int_E \varphi\, d\mu \ \le\ \int_E f \qquad \ldots \qquad (*)$$

Ambil $\varphi \in A$ tetap, tetapi sebarang.

Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, Ambil fungsi terukur terbatas $\varphi_n : E \to \mathbb{R}$ yang memenuhi

$$\varphi_n(x) \le f_n(x) \quad , \quad x \in E \ \text{ dan } \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \varphi_n(x) \ , \ x \in E$$

Maka menurut *teorema konvergensi terbatas*

$$\lim_{n\to\infty} \int_E \varphi_n\, d\mu = \int_E \varphi\, d\mu.$$

Dari $\varphi_n(x) \le f_n(x) \quad , \quad x \in E$ diperoleh

$$\lim_{n\to\infty} \inf \int_E \varphi_n\, d\mu \le \lim_{n\to\infty} \inf \int_E f_n\, d\mu \qquad \ldots \quad (**)$$

Karena barisan $\left(\int_E \varphi_n\, d\mu\right)$ konvergen, maka

$$\lim_{n\to\infty} \inf \int_E \varphi_n\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E \varphi_n\ d\mu = \int_E \varphi\, d\mu \qquad \ldots \quad (***)$$

Dari (*), (**) dan (***) diperoleh

$$\int_{\mathrm{l}} \varphi\, d\mu \ \le \lim_{n\to\infty} \inf \int_E f_n\, d\mu \qquad \ldots \quad (\#)$$

karena $\varphi \in A$ diambil tetap, tetapi sebarang, maka dari (#) diperoleh

$$\int_E f\, d\mu = \sup_{\varphi \in A} \int_E \varphi\, d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \inf \int_E f_n\, d\mu.$$

Teorema 3.3.5 (Konvergensi Monoton)

Jika $\langle f_n \rangle$ suatu barisan monoton naik fungsi terukur tak negatif yang konvergen titik demi titik ke fungsi f, maka

$$\int_E f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n\, d\mu.$$

Bukti

Menurut lemma fatou diperoleh

$$\int_E f\, d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \inf \int_E f_n\, d\mu \qquad (*)$$

Untuk setiap n berlaku

$$f_n(x) \leq f(x) \qquad , \quad x \in E$$

Jadi

$$\int_E f_n\, d\mu \leq \int_E f\, d\mu$$

Dan ini berakibat

$$\int_E f\, d\mu \geq \lim_{n\to\infty} \inf \int_E f_n\, d\mu \qquad (**)$$

Dipihak lain, untuk setiap barisan $\langle f_n \rangle$ berlaku

$$\lim_{n\to\infty} \inf \int_E f_n\, d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \sup \int_E f_n\, d\mu \qquad (***)$$

Sehingga Dari (*), (**) dan (***) diperoleh

$$\lim_{n\to\infty} \inf \int_E f_n\, d\mu = \int_E f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \sup \int_E f_n\, d\mu$$

Jadi

$$\int_E f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n\, d\mu$$

3.4 Integral Lebesgue Fungsi Terukur Sebarang pada Himpunan Berukuran Berhingga

Definisi 3.4.1

Misalkan $f : A \to \mathbb{R}$ suatu fungsi.

Fungsi $f^+ : A \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan oleh

$$f^+(x) = makx\,\{f(x), 0\}, \qquad x \in A$$

Dinamakan bagian positif fungsi f

Fungsi $f^- : A \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan oleh

$$f^+(x) = makx\,\{-f(x), 0\}, \qquad x \in A$$

Dinamakan bagian negatif fungsi f

Definisi 3.4.2

Fungsi terukur $f: E \to \mathbb{R}$ dikatakan terintegral pada E

jika $f^+: E \to \mathbb{R}$ dan $f^-: E \to \mathbb{R}$ keduanya terintegralkan pada E

dan $\int_E f\, d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu$

Teorema 3.4.3

Misalkan $f : E \to \mathbb{R}$, $g : E \to \mathbb{R}$ dua fungsi terukur yang terintegral pada E, maka $\alpha \in \mathbb{R}$; maka

1. $\int_E (f+g) d\mu = \int_E f\, d\mu + \int_E g\, d\mu$
2. $\int_E \alpha f\, d\mu = \alpha \int_E f\, d\mu$
3. $f(x) \geq g(x)$, $x \in E$ maka $\int_E f\, d\mu \geq \int_E g\, d\mu$

Bukti

1. Misalkan

$$A = \{x \in E : f(x) \geq 0 , g(x) \geq 0\} \cup \{x \in E : f(x) \leq 0 , g(x) \leq 0\}$$

$$B = \{x \in E : f(x) \geq 0 , g(x) < 0\} ;$$

$$C = \{x \in E : f(x) < 0 , g(x) \geq 0\}$$

Pada $A :$ $(f+g)^+ = f^+ + g^+$ dan $(f+g)^- = f^- + g^-$

Sehingga menurut definisi 3.4.2 diperoleh

$$\int_A (f+g)d\mu = \int_A (f+g)^+ d\mu - \int_A (f+g)^- d\mu$$

$$= \left(\int_A f^+ \, d\mu + \int_A g^+ \, d\mu\right) - \left(\int_A f^- d\mu + \int_A g^- d\mu\right)$$

$$= \left(\int_A f^+ d\mu - \int_A g^- \, d\mu\right) + \left(\int_A g^+ d\mu + \int_A g^- d\mu\right)$$

$$= \int_A f \, d\mu + \int_A g \, d\mu$$

Jadi

$$\int_A (f+g)d\mu = \int_A f \, d\mu + \int_A g \, d\mu \qquad \ldots (*)$$

B dipecah menjadi dua himpunan B_1 dan B_2 :

$$B_1 = B \cap \{x | \, f(x) + g(x) \geq 0 \} \;\; ; \quad B_2 = B \cap \{x | \, f(x) + g(x) < 0 \}$$

Pada B_1 : f , $f+g$ dan $-g$ adalah tiga fungsi terukur tak negatif . Jadi diperoleh

$$\int_{B_1} f \, d\mu = \int_{B_1} (f+g)d\mu + \int_{B_1} (-g)d\mu$$

$$= \int_{B_1} (f+g)\, d\mu \; - \int_{B_1} g\, d\mu$$

sehingga

$$\int_{B_1} (f+g) d\mu = \int_{B_1} f\, d\mu + \int_{B_1} g\, d\mu$$

Pada $B_2 : f, -(f+g)$ dan $-g$ adalah tiga fungsi terukur tak negatif . Jadi diperoleh

$$-\int_{B_2} g\, d\mu = \int_{B_2} (-g) d\mu = \int_{B_2} -(f+g) d\mu - \int_{B_2} f\, d\mu$$

$$= -\int_{B_2} (f+g)\, d\mu + \int_{B_2} f\, d\mu$$

sehingga

$$\int_{B_2} (f+g) d\mu = \int_{B_2} f\, d\mu + \int_{B_2} g\, d\mu$$

Karena $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ dan $B = B_1 \cup B_2$ maka

$$\int_B (f+g) d\mu = \int_{B_1} (f+g) d\mu + \int_{B_2} (f+g) d\mu$$

$$= \left(\int_{B_1} f\, d\mu + \int_{B_1} g\, d\mu\right) + \left(\int_{B_2} f\, d\mu + \int_{B_2} g\, d\mu\right)$$

$$= \left(\int_{B_1} f\, d\mu + \int_{B_2} f\, d\mu\right) + \left(\int_{B_1} g\, d\mu + \int_{B_1} g\, d\mu\right)$$

$$= \int_B f\, d\mu + \int_B g\, d\mu$$

Jadi

$$\int_B (f+g) d\mu = \int_B f\, d\mu + \int_B g\, d\mu \qquad \ldots \quad (**)$$

C dipecah menjadi dua himpunan C_1 dan C_2 :

$$C_1 = C \cap \{x |\, f(x) + g(x) \geq 0\} \;\; ; \quad C_2 = C \cap \{x |\, f(x) + g(x) < 0\}$$

Pada $C_1 : f, f+g$ dan $-g$ adalah tiga fungsi terukur tak negatif . Jadi diperoleh

$$\int_{C_1} f\, d\mu = \int_{C_1} (f+g) d\mu \; + \int_{C_1} (-g) d\mu$$

$$= \int_{C_1} (f+g)\, d\mu \; - \int_{C_1} g\, d\mu$$

sehingga

$$\int_{C_1} (f+g) d\mu = \int_{C_1} f\, d\mu + \int_{C_1} g\, d\mu$$

Pada $C_2 : f\,, -(f+g)$ dan $-\,g$ adalah tiga fungsi terukur tak negatif . Jadi diperoleh

$$-\int_{C_2} g\, d\mu = \int_{C_2} (-g) d\mu = \int_{C_2} -(f+g) d\mu - \int_{C_2} f\, d\mu$$

$$= -\int_{C_2} (f+g)\, d\mu + \int_{C_2} f\, d\mu$$

sehingga

$$\int_{C_2} (f+g) d\mu = \int_{C_2} f\, d\mu + \int_{C_2} g\, d\mu$$

Karena $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ dan $C = C_1 \cup C_2$ maka

$$\int_{C} (f+g) d\mu = \int_{C_1} (f+g) d\mu + \int_{C_2} (f+g) d\mu$$

$$= \left(\int_{C_1} f\, d\mu + \int_{C_1} g\, d\mu\right) + \left(\int_{C_2} f\, d\mu + \int_{C_2} g\, d\mu\right)$$

$$= \left(\int_{C_1} f\, d\mu + \int_{C_2} f\, d\mu\right) + \left(\int_{C_1} g\, d\mu + \int_{C_1} g\, d\mu\right)$$

$$= \int_{C} f\, d\mu + \int_{C} g\, d\mu$$

Jadi

$$\int_{C} (f+g) d\mu = \int_{C} f\, d\mu + \int_{C} g\, d\mu \qquad \dots \quad (***)$$

Karena $A \cap B = A \cap C = B \cap C = \emptyset$ dan $E = A \cup B \cup C$, maka

$$\int_{E} (f+g) d\mu = \int_{A} (f+g) d\mu + \int_{B} (f+g) d\mu + \int_{C} (f+g) d\mu$$

$$= \left(\int_{A} f\, d\mu + \int_{A} g\, d\mu\right) + \left(\int_{B} f\, d\mu + \int_{B} g\, d\mu\right)$$

$$+ \left(\int_{C} f\, d\mu + \int_{C} g\, d\mu\right)$$

$$= \left(\int_A f\, d\mu + \int_B f\, d\mu + \int_C f\, d\mu\right)$$

$$+\left(\int_A g\, d\mu + \int_B g\, d\mu + \int_C f\, d\mu\right)$$

$$= \int_E f\, d\mu + \int_E g\, d\mu$$

Jadi terbuktilah

$$\int_E (f+g) d\mu = \int_E f\, d\mu + \int_E g\, d\mu$$

2. Jika $\alpha \geq 0$ maka $(\alpha f)^+ = \alpha f^+$ dan $(\alpha f)^- = \alpha f^-$

Sehingga

$$\int_E (\alpha f)\, d\mu = \int_E (\alpha f)^+\, d\mu - \int_E (\alpha f)^-\, d\mu$$

$$= \alpha \int_E f^+\, d\mu + \alpha \int_E f^-\, d\mu$$

$$= \alpha\left(\int_E f^+\, d\mu - \int_E f^-\, d\mu\right)$$

$$= \alpha \int_E f d\mu.$$

Jadi jika $\alpha \geq 0$ maka diperoleh

$$\int_E (\alpha f)\, d\mu = \alpha \int_E f\, d\mu.$$

Jika $\alpha < 0$, maka $(\alpha f)^+ = -\alpha f^-$ dan $(\alpha f)^- = -\alpha f^+$

sehinnga

$$\int_E (\alpha f)\, d\mu = \int_E (\alpha f)^+\, d\mu - \int_E (\alpha f)^-\, d\mu$$

$$= \int_E (-\alpha f^-)\, d\mu - \int_E (-\alpha) f^+\, d\mu$$

$$= \alpha\left(\int_E f^+\, d\mu - \int_E f^-\right) d\mu$$

$$= \alpha \int_E f\, d\mu.$$

Jadi jika $\alpha < 0$ maka diperoleh

$$\int_E (\alpha f)\, d\mu = \alpha \int_E f\, d\mu.$$

Sehingga untuk setiap bilangan real α diperoleh

$$\int_E (\alpha f)\, d\mu = \alpha \int_E f\, d\mu$$

3. Dari (1) dan (2) diperoleh $\int_E (g-f) d\mu = \int_E g\, d\mu - \int_E f\, d\mu \leq 0$, sebab integral fungsi non negatif adalah non negatif dan integral fungsi pada himpunan berukuran adalah 0.

Teorema 3.4.4 (Konvergensi Lebesgue)

Misalakan $g : E \to \mathbb{R}$ integral pada E. Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ $f_n : E \to \mathbb{R}$ fungsi terukur $|f_n(x)| \leq g(x)$ $, x \in E$. Jika barisan fungsi $\langle f_n \rangle$ konvergen hampir dimana-mana ke suatu fungsi $f : E \to \mathbb{R}$, maka

$$\int_E f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n\, d\mu$$

Bukti

Dari $|f_n| \leq g$ diperoleh $-g \leq f_n \leq g$,

Jadi $g - f_n \geq 0$, $g + f_n \geq 0$ $(n \in \mathbb{N})$.

Karena $g - f_n$ terukur dan tak negatif $(n \in \mathbb{N})$, $(g - f_n)$ konvergen hampir dimana-mana ke fungsi $g - f$, maka menurut lemma fatou

$$\int_E (g-f)\, d\mu \leq \lim_{n\to\infty} inf \int_E (g - f_n)\, d\mu$$

Karena $|f| \leq g$, maka f terintegral pada E, Jadi diperoleh

$$\int_E g\, d\mu - \int_E f\, d\mu \leq \lim_{n\to\infty} inf \int_E f_n\, d\mu$$

Sehingga

$$\int_E f\, d\mu \geq \lim_{n\to\infty} sup \int_E f_n\, d\mu \qquad \dots (*)$$

Dengan cara yang sama, dengan demikian meninjau barisan fungsi $(g + f_n)$ diperoleh

$$\int_E f\,d\mu \leq \lim_{n\to\infty} inf \int_E f_n\,d\mu \qquad \ldots (**)$$

Dipihak lain untuk setiap barisan fungsi berlaku

$$\lim_{n\to\infty} inf \int_E f_n\,d\mu \leq \lim_{n\to\infty} sup \int_E f_n\,d\mu \qquad \ldots (***)$$

Sehingga dari (*), (**) dan (***) diperoleh

$$\lim_{n\to\infty} inf \int_E f_n\,d\mu = \int_E f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} sup \int_E f_n\,d\mu$$

Dan ini berarti

$$\int_E f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n\,d\mu.$$

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

1. Integral Lebesgue merupakan integral yang dikembangkan lewat ukuran lebesgue. Integral lebesgue pada fungsi real dibedakan menjadi tiga macam, yaitu integral lebesgue pada fungsi terukur terbatas, integral lebesgue fungsi tak negatif dan integral lebesgue fungsi terukur sebarang.

2. Pada fungsi terbatas yang terukur pada $[a,b]$ terintegral lebesgue jika

$$(\mathcal{L})\underline{\int_{a}^{b}} f\,d\mu = (\mathcal{L})\overline{\int_{a}^{b}} f\,d\mu$$

3. Pada fungsi terukur tak negatif terintegral lebesgue pada $[a,b]$ jika

$$(\mathcal{L})\int_{a}^{b} f < \infty$$

4. Pada fungsi terukur sebarang terintegral lebesgue jika kedua fungsi f^{+} dan f^{-} masing-masing terintegral pada$[a,b]$, dan didefinisikan

$$(\mathcal{L})\int_{a}^{b} f = (\mathcal{L})\int_{a}^{b} f^{+} - (\mathcal{L})\int_{a}^{b} f^{-}$$

Pada integral Lebesgue berlaku teorema kekonvergenan terbatas, teorema kekonvergenan monoton dan kekonvergenan lebesgue

- Misalkan fungsi g terintegral pada $[a, b]$ dan jika $\langle f_n \rangle$ adalah barisan fungsi terukur sehingga $|f_n| \leq g$ pada $[a, b]$ dan $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ h.d pada $[a, b]$ maka

$$(\mathcal{L}) \int_a^b f = \lim_{n\to\infty} (\mathcal{L}) \int_a^b f_n$$

Kekonvergenan pada integral Lebesgue, jika diketahui n berlaku f_n terintegralkan lebesgue pada himpunan terukur E. Barisan fungsi terukur f_n konvergen h.d pada himpunan terukur E. Pada integral lebesgue syarat cukup agar fungsi f terintegralkan lebesgue pada himpunan terukur E. Dan berlaku$\lim_{n\to\infty} (\mathcal{L}) \int_a^b f_n = (\mathcal{L}) \int_a^b \lim f_n = (\mathcal{L}) \int_a^b f$.

4.2 Saran

Dalam memepelajari integral lebesgue ada beberapa tahapan yang harus dalalui, yaitu : Mempelajari integral Lebesgue untuk fungsi-fungsi sederhana, integral Lebesgue untuk fungsi-fngsi terbatas, integral Lebesgue untuk fungsi-fungsi non negative dan integral Lebesgue untuk fungsi-fungsi sebarang. Oleh karena itu penulis menyarankan pada pembaca atau pihak yang berkepentingan untuk menyusun skripsi tentang kekonvergenan dalam integral Lebesgue yang tak terbatas dan negative, atau pun dapat mencoba membahas kekonvergenan deret pada integral Lebesgue serta kaitan kekonvergenan integral lebesgue dengan integral-integral yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir, 2006. *Ada Matematika Dalam Al-Qur'an* . Malang : UIN Malang

Abdussakir, 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang : UIN Malang

Bartle, Rober. G & Sherbert, D-R. 1982. *Introduction Analysis to Real Analysis*. New York : John Wiley & Sons, Inc

Rahman, Hairur. 2008. *Pengantar Analysis Real*. Malang : UIN Malang

Hijazi, Syekh Ahmad. 1995. *Al-Majalisu Saniyyah*, Perpustaka Nasional: Trigenda Karya.

Hutahean, E. 1989. *Analysis Real II*. Jakarta : Universitas Terbuka

Hutahean, E. 1994. *Fungsi Riil*. Bandung : ITB Bandung

Purcell, Edwin. J & Varbeg, Dale. 1984. *Kalkulus dan Geometri Analitis.* Edisi ke empat. Jakarta : Erlangga

Rifa'i, H. Muhammad. 1992. *300 Hadits Bekal Da'wah dan Pembina pribadi muslim.* Semarang : Wicaksosno

Soemantri, R. 1988. *Analysis Real I*. Jakarta : Universitas Terbuka

Stoll, Manfred. 2001. *Introduction Analysis to Real Analysis*. Addison Wesley longman, inc

Yusuf Ali, Abdullah. 1993. *Al-Qur'an Tejemahan dan Tafsir,* Jakarta: Pustaka Firdaus.